# الفصل الرابـــــع

## المعـــــادلات التفاضليـــــة الخطيـــــة

## ذات المعاملات الثابتة من الرتب العليا

## Linear Differential Equqtions of Constant Coefficients and Higher Orders

## مقدمة:

المعادلة التفاضــلية الخطية ذات المعاملات الثابتة من الرتبة n وهي معادلة تظهر فيها y ومشــتقاتها من الرتبة الأولى فقط وبدون حوا صــل ضــرب. والصــورة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة n ذات المعاملات الثابتة هي

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = f(x) \qquad (*)$$

حيـث $a_0, a_1, \dots, a_n$ ثوابـت وإذا رمزنـا للعـامـل التفـاضــلي $\frac{d}{dx}$ أو الرمز D أو المؤثر التفاضلي ويمكن كتابة المعادلة (*) على الصورة

$$\left[a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n\right] y = f(x)$$

أو باختصار

$$L(D) y = f(x)$$

حيث $L(D)$ كثيرة حدود من درجة n في المؤثر التفاضلي D.

الحل العام للمعادلة التفاضــلية هو علاقة تربط بين المتغيرات وتحتوي على عدد معين من الثوابت الاختيارية مساويا لرتبة المعادلة التفاضلية وهو يمثل مجموعة من المنحنيات.

## ١/٤- المعادلات التفاضلية الخطية:

فى هذا الجزء سوف نعتبر مجموعة من المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة التي يمكن كتابتها فى الصورة:

$$\left.\begin{array}{l} F_{11} y_1 + F_{12} y_2 + \dots + F_{1n} y_n = f_1, \\ F_{21} y_1 + F_{22} y_2 + \dots + F_{2n} y_n = f_2, \\ . \\ . \\ . \\ F_{n1} y_1 + F_{n2} y_2 + \dots + F_{nn} y_n = f_n \end{array}\right\} \qquad (1)$$

حيث $F_{ij}$ $(i, j = 1, 2, ..., n)$ عبارة عن كثيرات حدود في المؤثر التفاضلي $D = \frac{d}{dx}$ ذوات معاملات ثابتة $F_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$ هي دوال في المتغير $x$ (المستقل)، $y_1, y_2, ..., y_n$ هي المتغيرات التابعة

## ٤/١/١- طرق حل المعادلات التفاضلية الخطية:

توجد طريقتان لحل المعادلات التفاضلية الخطية هما:

**(أ) طريقة الحذف** **(ب) طريقة المحددات**

**(أ) طريقة الحذف:** اعتبر مجموعة من المعادلات التفاضلية عددها اثنان التى على الصورة

$$F_{11}y_1 + F_{12}y_2 = F_1 \qquad (2)$$
$$F_{21}y_1 + F_{22}y_2 = F_2 \qquad (3)$$

بالتأثير على المعادلة (2) بالمؤثر التفاضلي $F_{21}$ والمعادلة (3) بالمؤثر التفاضلي $F_{11}$ وطرح المعادلة (3) من المعادلة (2) نحصل على:

$$\left(F_{21}F_{12} - F_{11}F_{22}\right)y_2 = F_{21}F_1 - F_{22}F_2 \qquad (4)$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية في المتغير $x, y_2$ يمكن حلها وبالتعويض عن قيمة $y_2$ في أي من المعادلتين (2) أو (3) نصل على معادلة تفاضلية في المتغير $x, y_1$ بحلها نوجد $y_1$

**مثال (١):** حل المعادلة التفاضلية:

$$(D-1)x + Dy = 2t + 1 \qquad (1)$$
$$(2D+1)x + 2Dy = t \qquad (2)$$

**الحل:**

بضرب المعادلة (1) في 2 وطرح المعادلة (2) من المعادلة (1) نحصل على

$$-3x = 3t + 2$$

أي أن

$$x = -t - \frac{2}{3}$$

بالتعويض في المعادلة (1) نحصل على:

$$(D-1)\left\{-t-\frac{2}{3}\right\}+Dy = 2t+1$$

$$-1+t+\frac{2}{3}+Dy = 2t+1$$

$$Dy = t+\frac{4}{3}$$

الحل الكامل هو:

حيث c ثابت اختياري $\quad x = -t-\frac{2}{3},\ \ y = \frac{1}{2}t^2+\frac{4}{3}t+c$

**مثال (٢):** حل المعادلتين التفاضليتين الآتيتين:

$$(D+2)x + y = \cos t \qquad (1)$$

$$(D-3)x + (D+1)y = 0 \qquad (2)$$

**الحل:**

بالتأثير على المعادلة (1) بالمؤثر التفاضلي (D+1) والطرح:

$$\therefore \{(D+1)(D+2)-(D+3)\}x = (D+1)\cos t$$

أي أن

$$(D^2+2D+5)x = -\sin t+\cos t \qquad (3)$$

الحل العام للمعادلة المتجانسة للمعادلة (3) هو

$$x = e^{-t}\left(c_1\cos 2t + c_2\sin 2t\right)$$

والحل الخاص يعطى من:

$$x=\frac{1}{D^2+2D+2}\{\cos t-\sin t\}$$

$$=\frac{1}{2D+4}\cos t-\frac{1}{2D+4}\sin t$$

$$=\frac{2D-4}{4D^2-16}\cos t-\frac{2D-4}{4D^2-16}\sin t$$

$$=-\frac{1}{15}(D-2)\cos t+\frac{1}{15}(D-2)\sin t$$

$$=-\frac{1}{15}\{-\sin t-2\cos t-\cos t+2\sin t\}$$

$$=-\frac{1}{15}(\sin t-3\cos t)$$

الحل العام للمعادلة (3) يعطى من:

$$x=e^{-t}(c_1\cos 2t+c_2\sin 2t)\frac{1}{5}(\sin t-3\cos t)$$

بالتعويض في المعادلة (1) عن x نحصل على

$$y=\cos t-(D+2)\left\{e^{-t}(c_1\cos 2t+c_2\sin 2t)\frac{1}{5}(\sin t-3\cos t)\right\}$$

$$\therefore y=\cos t-e^{-t}(D+2)$$

$$-e^{t}(c_1\cos 2t+c_2\sin 2t)$$

$$+\frac{1}{5}\{\cos t+2\sin t+3\sin t-6\cos t\}$$

$$=\cos t-e^{t}\{-2c_1\sin 2t+2c_1\cos 2t+2c_2\cos 2t$$

$$+2\sin 2t-c_1\cos 2t-c_2\sin 2t\}$$

$$+\frac{1}{5}\{5\sin t-5\cos t\}$$

$$\therefore y = \cos t - e^{-t}\left\{(c_2 - 2c_1)\sin 2t + (c_1 + 2c_2)\cos 2t\right\}$$
$$+\frac{1}{5}\{5\sin t - 5\cos t\}$$
$$= \cos t + \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}\cos t + e^{-t}\ (c_2 - 2c_1)\sin 2t + (c_1 + 2c_2)\cos 2t\}$$

$$y = e^{-t}\left\{(c_1 - 2c_2)\cos 2t + (c_1 + 2c_2)\sin 2t\right\}$$
$$+\frac{1}{2}(\cos t + \sin t)$$

**ملحوظة:** يمكن إيجاد y بنفس الطريقة التي اوجدنا بها $x$ أي نحذف $x$ بين المعادلتين التفاضليتين.

**(ب) طريقة المحددات:**

باعتبار أن المؤثر التفاضلي يتبع قوانين الجبر الأساسية والتي تمكن المقادير الجبرية يمكن حل مجموعة المعادلات التفاضلية الخطية بنفس الطرق التي تحل بها المعادلات الآنية الخطية في الكميات الجبرية أي اعتبار أن $F_{ij}$ عبارة عن معاملات ثابتة فإذا رمزنا لمحدد مجموعة لمعادلات بالرمز $\Delta$ ورمزنا للمحددات التالية باستبدال الأعمدة الأولي والثانية،....، والأخيرة على الترتيب بالعمود الذي عناصره $F_1, F_2, \ldots F_n$ بالرموز $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ فيكون الشرط الضروري الكافي لكي يكون لمجموعة المعادلات (*) لحل هو $\Delta \neq o$ الحد $\Delta$ هو كثيرة حدود في المؤثر $\Delta$ ، المحددات $\Delta_i\ (i = 1, 2, \ldots, n)$ هي عبارة عن دوال في المتغير x.

من نظرية المعادلات الآتية الخطية فإن حل المجموعة تتحدد بالعلاقات الآتية:

$$\Delta y_i = \Delta_i\ , \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (**)$$

العلاقات (**) تكون n من المعادلات التفاضلية الخطية ذوات معاملات ثابتة رتبة كل منهما على الأكثر هي درجة كثيرة الحدود $\Delta$ .

بفرض أن $\Delta$ من الدرجة r في المؤثر التفاضلي $\Delta$ فيكون الحل المكمل لكل من المعادلات (2) هو حل المعادلة المختزلة (المتجانسة) $\Delta y_i = 0$ أي أن الحل العام لكل متغير $y_i$ يحتوي على r من الثوابت الاختيارية وبذلك نحصل على $n \times r$ من الثوابت بالتعويض عن

$y_1, y_2, \ldots, y_n$ في المعادلات التفاضلية (*) نحصل على متطابقات في x ومنه بمقارنة المعاملات نحصل على $(n-1)r$ من العلاقات بين الثوابت الاختيارية التي عددها nr فيتبقى لدينا r من الثوابت المستقلة وهو العدد الواجب توافره في حلول المعادلات (*) لأن $\Delta$ من الدرجة r في المؤثر $\Delta$.

**مثال (٣):** حل المعادلتين التفاضليتين الآتيتين.

$$2(D-2)x+(D-1)y=e^t \qquad (1)$$

$$(D-3)x+y=0 \qquad (2)$$

**الحل:**

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2(D-2) & D-1 \\ D+3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=2D-4-D^2-2D+3=-\left(D^2+1\right)$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} e^t & D-1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=e^t$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 2(D-2) & e^t \\ D+3 & 0 \end{vmatrix}=-4e^t$$

من المعادلتين

$$\Delta_x=\Delta_1, \quad \Delta y=\Delta_2$$

$$\left(D^2+1\right)x=-e^t$$

$$\left(D^2+\right)y=4e^t$$

الحل العام للمعادلتين السابقين هو:

$$x=C_1\cos t+C_2\sin t-\frac{1}{2}e^t$$

$$y=C_3\cos t+C_4\sin t+2e^t \qquad (3)$$

بالتعويض فى المعادلة (2) نحصل على

$$(D+3)\left\{C_1\cos t+C_2\sin-\frac{1}{2}e^t\right\}$$
$$+C_3\cos t+C_4\sin t+2e^t=0$$

$$\therefore (C_2+3C_1+C_3)\cos t+(3C_2-C_1+C_4)\sin t=0$$

وهذه صحيحة لجميع قيم t بما أن $\cos t,\ \sin t$ دوال مستقلة

$$\therefore C_2+3C_1+C_3=0,\quad 3C_2-C_1+C_4=0$$
$$\therefore C_3=-(3C_1+C_2),\quad C_4=(C_1-3C_2)$$

وبالتعويض عن $C_3,\ C_4$ في المعادلة (3) فإن

$$y=-(3C_1+C_2)\cos t+(C_1-3C_2)\sin t+2e^t$$

**مثال (٤):** حل المعادلتين الآتيتين:

$$(D^2-2)x-3y=e^{2t} \qquad (1)$$
$$(D^2+2)y+x=0 \qquad (2)$$

**الحل:**

$$\Delta=\begin{vmatrix}D^2-1 & -3\\ 1 & D^2+2\end{vmatrix}=(D^4-4)+3=D^4-1$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}e^{2t} & -3\\ 0 & D^2+2\end{vmatrix}=(D^2-2)e^{2t}=6e^{2t}$$
$$\Delta_2=\begin{vmatrix}D^2-2 & e^{2t}\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-e^{2t}$$

من المعادلتين

$$\Delta x=\Delta_1,\quad \Delta y=\Delta_2$$

$$\therefore \left(D^4-1\right)x=6e^{2t}, \quad \left(D^2-1\right)y=-e^{2t}$$

وحلها العام على هذه الصورة

$$x=c_1e^t+c_2e^{-t}+c_3\cos t+c_4\sin t+\frac{2}{5}e^{2t} \tag{3}$$

$$y=c_5e^t+c_6e^{-t}+c_7\cos t+c_8\sin t+\frac{1}{15}e^{2t} \tag{4}$$

بالتعويض في المعادلة (1) بالمعادلتين (4) ،(3) نحصل على نحصل على:

$$\left(D^2-2\right)\left\{c_1e^t+c_2e^{-t}+c_3\cos t+c_4\sin t+\frac{2}{5}e^{2t}\right\}$$
$$-3\left\{c_5e^t+c_6e^{-t}+c_7\cos t+c_8\sin t+\frac{1}{15}e^{2t}\right\}=e^{2t}$$

$$\left\{c_1e^t-c_2e^{-t}-3c_3\cos t-3c_4\sin t+\frac{4}{s}e^{2t}\right\}$$
$$-3c_5e^tc_6e^{-t}-c_7\cos t-c_8\sin t+\frac{3}{15}e^{2t}=e^{2t}$$
$$\therefore \left(c_1e^t+3c_5\right)e^t+\left(c_2e^t+3c_6\right)e^{-t}-3\left(c_3+c_7\right)\cos t$$
$$-\left(3c_4+c_8\right)\sin t+e^{2t}=e^{2t}$$
$$\therefore c_1=-3c_5, c_2=-c_6\, , \, c_3=-c_7\ , \, c_4=-c_8$$

بالتعويض عن $C_1, C_2, C_3, C_4$ في المعادلة (3) نحصــل على الحل العام للمعادلتين على الصورة

$$x=-3c_5e^t-3c_6e^{-t}-c_7\cos t-c_8\sin t+\frac{2}{5}e^{2t}$$

$$y=c_5e^t+c_6e^{-t}+c_7\cos t+c_8\sin t-\frac{2}{5}e^{2t}$$

## ٢/٤- المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة النونية ذات المعاملات الثابتة:

**تعريف (١):** تسمى المعادلة التفاضلية خطية إذا كانت الدالة المجهولة $(y)$ وجميع مشتقاتها الواردة في المعادلة التفاضلية من الدرجة الأولى ولا يوجد حاصل ضرب بين الدالة المجهولة $(y)$ وأي من مشتقاتها.

الصورة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة النونية ذات المعاملات الثابتة هي:

$$p_0\, y^{(n)} + p_1\, y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}\, y' + p_n\, y = f(x), \qquad (1)$$

حيث

$$y' = \frac{dy}{dx}, \; y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \; y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}; \quad p_0 \neq 0 \;،$$

$$p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}, p_n$$

جميعها كميات ثابتة.

باستخدام الرموز $D = \frac{d}{dx}, \; D^2 = \frac{d^2}{dx^2}, \ldots, \; D^n \equiv \frac{d^n}{dx^n}$.

فإن المعادلة $(1)$ تأخذ الصورة

$$(p_0 D^{(n)} + p_1 D^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} D + p_n) y = f(x) \qquad (2)$$

المعادلة $(2)$ يمكن كتابتها على الصورة المختصرة

$$F(D)y = f(x)$$

حيث $F(D)$ مؤثر تفاضلي خطي، يعطى بالعلاقة

$$\begin{aligned} F(D) &= p_0\, D^{(n)} + p_1\, D^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}\, D + p_n \\ &= \sum_{r=0}^{n} p_r\, D^{n-r} \qquad (3) \end{aligned}$$

**تعريف (٢):**

المعادلة الخطية $(1)$ تكون غير متجانسة عندما $f(x) \neq 0$ ، أما عندما $f(x) = 0$ فإنها تسمى متجانسة، حيث تكون متجانسة في الدالة المجهولة $(y)$ ومشتقاتها.

## ١/٢/٤- خواص المؤثر التفاضلي الخطي $F(D)$:

من السهل اثبات الخواص التالية:

حيث c ثابت اختياري

$$1) F(D)(cy) = c\,F(D)(y)$$

$$2)\ F(D)(y_1 \pm y_2) = F(D)(y_1) \pm F(D)(y_2).$$

**نتيجة:**

من الخاصيتين $(2),(1)$ نستنتج أن

حيث $c_i$ ثوابت اختيارية

$$F(D)\left\{\sum_{i=1}^{n} c_i\, y_i\right\} = \sum_{i=1}^{n} c_i F(D)(y_i)$$

باستخدام خواص المؤثر التفاضلي الخطي $F(D)$ يمكننا أثبات النظريات التالية:

**نظرية (١):**

إذا كان $y_1$ حل للمعادلة المتجانسة $F(D)y = 0$ فإن $c\,y_1$ يكون أيضاً حلاً لهذه المعادلة، حيث $c$ ثابت اختياري.

**البرهان:**

حيث أن $y_1$ حل للمعادلة المتجانسة $F(D)y = 0$ لذلك فهو يحققها.

أي أن

$$F(D)y_1 = 0$$

بضرب طرفي المعادلة السابقة في $c$ نجد أن

$$c\,F(D)y_1 = F(D)(c\,y_1) = c \times 0 = 0\,.$$

وذلك باستخدام الخاصية الأولي ، أي أن $c\,y_1$ يكون أيضاً حلاً لهذه المعادلة.

**نظرية (٢):**

إذا كان $y_1\,,\,y_2$ حلان للمعادلة المتجانسة $F(D)y=0$ . فإن $(y_1 \pm y_2)$ يكون حل لهذه المعادلة أيضاً.

**البرهان:**

حيث أن $y_1\,,\,y_2$ حلان للمعادلة المتجانسة $F(D)y=0$ فإن

$$F(D)y_1 = 0, \qquad F(D)y_2 = 0$$

باستخدام الخاصية (٢) نجد أن

$$F(D)(y_1 \pm y_2) = F(D)(y_1) \pm F(D)(y_2) = 0 \pm 0 = 0.$$

أي أن $(y_1 \pm y_2)$ يحقق المعادلة $F(D)y=0$.

لذلك فإن $(y_1 \pm y_2)$ حل أيضاً.

**نتيجة:**

من النظريتين (١)، (٢) نستنتج أنه إذا كان $y_1\,,\,y_2\,,\,y_3\,,\,\ldots,\,y_n$ حلول للمعادلة المتجانسة $F(D)y=0$ وكانت مستقلة خطياً فإن أي تركيب خطي من هذه الحلول على الصورة $\sum_{i=1}^{n} c_i\,y_i$ يكون أيضاً حلاً لهذه المعادلة ، حيث $c_i$ ثوابت اختيارية.

**نظرية (٣):**

إذا وجد للمعادلة المتجانسة $F(D)y=0$ ذات المعاملات الحقيقية $p_i$ ، حلاً مركباً على الصورة $y_1=a(x)+ib(x)$ ، فإن الجزء الحقيقي $a(x)$ لهذا الحل والجزء التخيلي له $b(x)$ يكونان، كل على حدة، حلاً للمعادلة المتجانسة $F(D)y=0$ .

**البرهان:**

حيث أن $y_1=a(x)+ib(x)$ حل للمعادلة المتجانسة $F(D)y=0$ ، لذلك فهو يحققها، أي أن $F(D)\ [a(x)\ +i\ \ b\ \ (x)]\ =\ 0$ ، باستخدام الخاصيتين $(2),(1)$ نستنتج أن

$$F(D)\big(a(x)+ib(x)\big)=F(D)\,a(x)\ +\ iF(D)\,b(x)=0$$

وحيث أن الدالة المركبة ذات المتغير الحقيقي عندما تتلاشى فإن كل حد من حديها، الحقيقي والتخيلي، يتلاشى كلاً على حدة، أي أن

$$F(D)\,a(x)\ =0\ ,\qquad F(D)\,b(x)=0$$

وهذا يعني أن $a(x)$ ، $b(x)$ يكونان، كل على حدة، حلين للمعادلة المتجانسة

$F(D)y=0$ .

**نظرية (٤):**

المعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة من الرتبة النونية ذات المعاملات الثابتة ، حلها العام يتكون من جزئين، الأول $(y_h)$ الحل العام للمعادلة المتجانسة $F(D)y=0$ .

والثاني $(y_p)$ الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة $F(D)y=f(x)$ .

أي أن الحل العام للمعادلة غير المتجانسة $(y_g)$ ، يعطى بالعلاقة $y_g=y_h+y_p$ .

**البرهان:**

حيث أن $y_h$ هو الحل العام للمعادلة المتجانسة $F(D)y = 0$، لذلك فهو يحققها، أي أن $F(D)y_h = 0$.

وحيث أن $y_p$ هو الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة $F(D)y = f(x)$، لذلك فهو يحققها، أي أن $F(D)y_p = f(x)$.

وبالتالي فإن

$$\begin{aligned} F(D)y_g = F(D)(y_h + y_p) &= F(D)y_h + F(D)y_p \\ &= 0 + f(x) \end{aligned}$$

أي أن $y_g$ يحقق المعادلة غير المتجانسة $F(D)y = f(x)$، وحيث أنه يحتوى على عدد من الثوابت الاختيارية تساوي رتبة المعادلة (الثوابت التي يحتوي عليها $y_h$)، لذلك فإن الحل $y_g$ هو الحل العام للمعادلة غير المتجانسة.

وسوف نستعرض، فيما يلي كيفية الحصول على كل حل على حدة.

## ٣/٤- الحل العام للمعادلة الخطية المتجانسة ذات المعاملات الثابتة:

بفرض أن الحل العام للمعادلة الخطية المتجانسة ذات المعاملات الثابتة والتي على الصورة

$$\left[ p_0 \ D^{n} + p_1 \ D^{n-1} + \ . \ . \ . + \ p_{n-1} D + p_n \right] y = 0 \qquad (4)$$

يكون على الصورة

$$y = e^{rx}, \quad r \neq 0$$

وبالتالي فإن

$$De^{rx} = r e^{rx}, \ D^2 e^{rx} = r^2 e^{rx}, \ . \ . \ . \ . \ , \ D^n e^{rx} = r^n e^{rx}.$$

بالتعويض عن $y$ ومشتقاتها في المعادلة $(4)$ نجد أن

$$\left[ p_0 r^{n} + p_1 r^{n-1} + \ . \ . \ . + \ p_{n-1} r + p_n \right] e^{rx} = 0$$

وحيث أن $e^{rx} \neq 0$ ، لذلك فإن

$$p_0\, r^{n} + p_1\, r^{n-1} + \ . \ . \ . + \ p_{n-1}\ r \ + \ p_n = \sum_{r=0}^{n} p_r\, r^{n-r} = 0 \qquad (5)$$

وهذه كثيرة حدود من الدرجة $n$ (في المتغير $r$) ولذلك فإن لها $n$ من الجذور(حقيقية أو مركبة)، وتسمى المعادلة المساعدة، ويمكن الحصول عليها مباشرةً من المعادلة $(4)$ وذلك باستبدال المؤثر $D$ بالمتغير $r$ في التعبير الموجود بين القوسين ومساواته بالصفر.

## الحالات المختلفة للجذور:

### ١) جذور المعادلة المساعدة حقيقية ومختلفة.

إذا كانت جذور المعادلة المساعدة هي $r_1 , r_2 , r_3 , \ldots , r_n$ وكانت جميعها حقيقية ومختلفة، فقد حصلنا بذلك على $n$ حلاً للمعادلة $(4)$ هي

$$y_1 = e^{r_1 x} \ , \ y_2 = e^{r_2 x} \ \ ، \ \ldots , \ \ y_n = e^{r_n x}$$

ويكون الحل العام للمعادلة المتجانسة $(4)$ هو

$$y_h = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{r_i x}$$

حيث $c_i$ ثوابت اختيارية

وذلك باستخدام نظرية (١).

والجدير بالذكر أن أويلر ودانيال برنوللي توصلا كل منهما إلى طريقة حل المعادلة الخطية المتجانسة ذات المعاملات الثابتة قبل عام ١٧٤٣ م، و نشرها أويلر (قبل برنوللي) عام ١٧٤٣م.

**مثال (١):** اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

**الحل:**

بكتابة المعادلة المعطاة على الصورة

$$(D^2 + 5D + 6)\,y = 0$$

وبالتالي فإن المعادلة المساعدة هي

$$r^2 + 5r + 6 = 0$$
$$\therefore (r + 2)(r + 3) = 0$$

جذور هذه المعادلة هي $r = -2\ ,\ r = -3$ وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة المعطاة هو

$$y_h = c_1\, e^{-2x} + c_2\, e^{-3x}$$

**مثال (٢):** اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$$

**الحلـ:**

بكتابة المعادلة المعطاة على الصورة

$$(D^3 - D^2 - 4D + 4)\,y = 0$$

وبالتالي فإن المعادلة المساعدة هي

$$r^3 - r^2 - 4r + 4 = 0$$

وبتحليل الطرف الأيسر من المعادلة المساعدة، نجد أن

$$(r-1)(r-2)(r+2) = 0$$

أي أن جذور المعادلة المساعدة هي $r = 1\ ,\ r = 2,\ r = -2$، وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة المعطاة هو

$$y_h = c_1\, e^{x} + c_2\, e^{2x} + c_3\, e^{-2x}$$

## ٢) بعض جذور المعادلة المساعدة حقيقية ومكرره (متساوية).

إذا كان أحد الجذور حقيقي ومكرر $m$ من المرات، في هذه الحالة فإنه يوجد $m$ من الحلول المكررة $y_1 = e^{rx}\,,\, y_2 = e^{rx}\,,\, \dots\,,\, y_m = e^{rx}$ ، وبالتالي فإن الحل الذي سنحصل عليه لا يكون حل عام، لأن عدد الثوابت الاختيارية التي ستظهر فيه يكون أقل من رتبة المعادلة المعطاة، حيث أن عدد الثوابت الاختيارية المرتبطة بالـ $m$ حلاً، سوف تصبح ثابتاً واحداً (مجموع $m$ ثابت يعطي ثابت واحد) وليس $m$.

**نظرية:**

المعادلة التفاضلية التي على الصورة

$$(D - r)^m y = 0 \tag{6}$$

يكون حلها العام على الصورة

$$y = e^{rx}\left(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \dots + c_m x^{m-1}\right) \tag{7}$$

**البرهان:**

بفرض أن الحل العام للمعادلة $(6)$ يكون على الصورة

$$y = e^{rx}\, X(x)$$

حيث $X(x)$ دالة قابلة للتفاضل $m$ من المرات بالنسبة لـ$x$. لذلك فإن هذا الحل

يحقق المعادلة $(6)$، أي أن $(D - r)^m e^{rx} X(x) = 0$.

ولكن من خواص المؤثر التفاضلي $F(D)$ أن

$$F(D)\left(e^{rx}\, X(x)\right) = e^{rx} F(D+r)\, X(x)$$

(سوف نثبت هذه الخاصية فيما بعد) وبالتالي فإن

$$(D - r)^m e^{rx} X(x) = e^{rx} D^m\, X(x) = 0$$

ولكن $e^{rx} \neq 0$، لذلك فإن

$$D^m \, X(x) = 0$$

والحل العام لهذه المعادلة هو

$$X = \left(c_1 + c_2\, x + c_3\, x^2 + \ldots + c_m\, x^{m-1}\right)$$

وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة $(6)$ يكون على الصورة

$$y = e^{rx}\left(c_1 + c_2\, x + c_3\, x^2 + \ldots + c_m\, x^{m-1}\right)$$

**مثال (١):** اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y''' - 3y' + 2y = 0$$

**الحل:**

بكتابة المعادلة المعطاة على الصورة

$$\left(D^3 - 3D + 2\right) y = 0$$

وبالتالي فإن المعادلة المساعدة هي

$$r^3 - 3r + 2 = 0 \quad \therefore \quad (r+2)(r-1)^2 = 0$$

أي أن جذور المعادلة المساعدة هي $r = 1 , \; r = 1, \; r = -2$.

بالتالي فإن الحل العام للمعادلة المعطاة هو

$$y_h = \left(c_1 + c_2\, x\right) e^{x} + c_3\, e^{-2x}$$

**مثال (٢):** اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$$

**الحل:**

بكتابة المعادلة المعطاة على الصورة

$$\left(D^3 - D^2 - 4D + 4\right) y = 0$$

وبالتالي فإن المعادلة المساعدة هي

$$r^3 - r^2 - 4r + 4 = 0$$

وبتحليل الطرف الأيسر من المعادلة المساعدة، نجد أن

$$\left(r-1\right)\left(r-2\right)\left(r+2\right) = 0$$

أي أن جذور المعادلة المساعدة هي

$$r = 1\,,\; r = 2,\; r = -2$$

وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة المعطاة هو

$$y_h = c_1\, e^{x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-2x}$$

**مثال (٣):** اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y^{(4)} + 6\,y^{(3)} + 5y^{(2)} - 24\,y^{(1)} - 36y = 0$$

**الحل:**

بكتابة المعادلة المعطاة على الصورة

$$\left(D^4 + 6D^3 + 5D^2 - 24D - 36\right) y = 0$$

وبالتالي فإن المعادلة المساعدة هي

$$r^4 + 6r^3 + 5\,r^2 - 24r - 36 = 0$$

وبتحليل الطرف الأيسر من المعادلة المساعدة، نجد أن

$$\left(r+3\right)^2 \left(r-2\right)\left(r+2\right) = 0$$

أي أن جذور المعادلة المساعدة هي $r=-3\,,\ r=-3\,,\ r=2,\ r=-2$ ، وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة المعطاة هو

$$y_h=\left(c_1+c_2\,x\right)e^{-3x}+c_3\,e^{2x}+c_4\,e^{-2x}$$

## ٣) بعض جذور المعادلة المساعدة مركبة.

حيث أن معاملات المعادلة المســـاعدة حقيقية ، فإن الجذور المركبة إذا وجدت فإنها تكون أزواجاً مترافقة.

بفرض وجود جذرين مركبين مترافقين في الصورة

$$r_1=a+i\,b,\quad r_2=a-i\,b$$

وبالتالي فإن الحلين المناظران لهما هما

$$e^{(a+i\,b)x},\qquad e^{(a-i\,b)x}$$

كما يمكن كتابتهما على الصورة

$$e^{(a+i\,b)x}=e^{ax}\left(\cos bx+i\,\sin bx\right),$$

$$e^{(a-i\,b)x}=e^{ax}\left(\cos bx-i\,\sin bx\right)$$

وطبقاً لنظرية $(3)$ ، يكون كل من الجزء الحقيقي والجزء التخيلي لهذين الحلين، حلاً للمعادلة التفاضلية، أي أن الجذرين المركبين المترافقين

$$r_1=a+i\,b\,,\quad r_2=a-i\,b$$

يناظرهما الحلان الحقيقيان

$$e^{ax}\left(\cos bx\right),\quad e^{ax}\left(\sin bx\right)$$

واللذان يمكن تركيبهما على الصورة

$$e^{ax}\left(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx\right)$$

**مثال (١):** اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y'' + y' + y = 0$$

**الحلـ:**

بكتابة المعادلة المعطاة على الصورة

$$\left(D^2 + D + 1\right)y = 0$$

وبالتالي فإن المعادلة المساعدة هي

$$r^2 + r + 1 = 0$$

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$

وجذراها هما

$$r_1 = \frac{-1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\ , \qquad r_2 = \frac{-1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

لذلك فإن الحل العام للمعادلة المعطاة هو

$$y_h = e^{-\frac{x}{2}}\left(c_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

**مثال (٢):** اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y''' + 9y' = 0$$

**الحلـ:**

بكتابة المعادلة المعطاة على الصورة

$$\left(D^3 + 9D\right)y = 0$$

وبالتالي فإن المعادلة المساعدة هي

$$r^3 + 9r = 0 \qquad \therefore \quad r\left(r^2 + 9\right) = 0$$

وجذورها هي

$$r_1 = 0, \quad r_2 = 3i, \quad r_3 = -3i$$

لذلك فإن الحل العام للمعادلة المعطاة هو

$$y_h = c_1 + c_2 \cos 3x + c_3 \sin 3x$$

**مثال (٣):** اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y''' - y'' + 16y' - 16y = 0$$

**الحل:**

بكتابة المعادلة المعطاة على الصورة

$$\left(D^3 - D^2 + 16D - 16\right) y = 0$$

وبالتالي فإن المعادلة المساعدة هي

$$r^3 - r^2 + 16r - 16 = 0$$

وجذورها هي

$$r_1 = 1, \qquad r_2 = 4i, \qquad r_3 = -4i$$

لذلك فإن الحل العام للمعادلة المعطاة هو

$$y_h = c_1 e^x + c_2 \cos 4x + c_3 \sin 4x.$$

## ٤) بعض جذور المعادلة المساعدة مركبة ومكررة.

حيث أن معاملات المعادلة المساعدة حقيقية، فإن الجذور المركبة إذا وجدت فإنها تكون أزواجاً مترافقة، لذلك إذا وجد الجذر المركب $(a + ib)$ مكرر $m$ من المرات فإن الجذر المركب $(a + ib)$ سوف يوجد مكرر $m$ من المرات أيضاً.

وفي هذه الحالة، مثل الحالة الثانية، يمكن إثبات أن الحل العام يكون على الصورة

$$y = e^{ax}\left(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \ldots + c_m x^{m-1}\right)\cos bx + e^{ax}\left(c_1' + c_2' x + c_3' x^2 + \ldots + c_m' x^{m-1}\right)\sin bx$$

وهذا الحل يحتوي على $2m$ ثابت اختياري (= رتبة المعادلة المعطاة).

**مثال (١)**: اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y^{(4)} + 4y^{(2)} + 4y = 0$$

**الحل:**

بكتابة المعادلة المعطاة على الصورة

$$\left(D^4 + 4D^2 + 4\right)y = 0$$

وبالتالي فإن المعادلة المساعدة هي

$$r^4 + 4r + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(r^2 + 2\right)^2 = 0$$

وجذورها هي

$$r_1 = i\sqrt{2}\ , \quad r_2 = -i\sqrt{2}\ , \quad r_3 = i\sqrt{2}\ , \quad r_4 = -i\sqrt{2}$$

لذلك فإن الحل العام للمعادلة المعطاة هو

$$y_h = \left(c_1 + c_2 x\right)\cos\sqrt{2}\,x + \left(c_3 + c_4 x\right)\sin\sqrt{2}\,x\ .$$

**مثال (٢)**: اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y^{(6)} + 3y^{(4)} - 9y^{(2)} - 27y = 0$$

**الحل:**

بكتابة المعادلة المعطاة على الصورة

$$\left(D^6+3D^4-9D^2-27\right)y=0$$

وبالتالي فإن المعادلة المساعدة هي

$$r^6+3r^4-9r-27=0 \quad \therefore \left(r^2+3\right)^2\left(r-\sqrt{3}\right)\left(r+\sqrt{3}\right)=0$$

وجذورها هي

$$r_{1,2}=i\sqrt{3}, \qquad r_{3,4}=-i\sqrt{3}, \qquad r_5=\sqrt{3}, \qquad r_6=-\sqrt{3}$$

لذلك فإن الحل العام للمعادلة المعطاة هو

$$y_h=\left(c_1+c_2x\right)\cos\sqrt{3}\,x+\left(c_3+c_4x\right)\sin\sqrt{3}\,x+c_5e^{\sqrt{3}\,x}+c_6e^{-\sqrt{3}\,x}.$$

## ٤/٤-الحل الخاص للمعادلة الخطية غير المتجانسة ذات المعاملات الثابتة

لإيجاد الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة $F(D)y=f(x)$ ، سوف نستخدم طريقة المؤثرات، وذلك بالتأثير على الدالة $f(x)$ بالمؤثر العكسي $\frac{1}{F(D)}$ ، ولذلك سوف ندرس الآن خواص المؤثر التفاضلي $F(D)$ ، والمؤثر العكسي $\frac{1}{F(D)}$ ، عندما يؤثر كل منهما على بعض الدوال الأساسية.

$$1)\,F(D)e^{\alpha x}=F(\alpha)e^{\alpha x}$$

حيث $\alpha$ ثابت اختياري

**الإثبات:**

$$\because De^{\alpha x}=\alpha e^{\alpha x}, \quad D^2e^{\alpha x}=\alpha^2e^{\alpha x}, \ldots, D^ne^{\alpha x}=\alpha^ne^{\alpha x}.$$

$$\therefore F(D)e^{\alpha x}=\left(p_0D^n+p_1D^{n-1}+\ldots+p_{n-1}D+p_n\right)e^{\alpha x}$$

$$=\left(p_0\alpha^n+p_1\alpha^{n-1}+\ldots+p_{n-1}\alpha+p_n\right)e^{\alpha x}$$

$$= F(\alpha)\, e^{\alpha x}.$$

$$2)\quad F(D)\left(e^{\alpha x} u(x)\right) = e^{\alpha x} F(D+\alpha)\, u(x)$$

**الإثبات:**

$$\because\ D\left(e^{\alpha x}\, u(x)\right) = e^{\alpha x}\left(D+\alpha\right) u(x),$$

$$\begin{aligned} D^2\left(e^{\alpha x}\, u(x)\right) &= e^{\alpha x}\left(D^2+\alpha D\right) u(x) + \alpha e^{\alpha x}\left(D+\alpha\right) u(x) \\ &= e^{\alpha x}\left(D+\alpha\right)\left(D+\alpha\right) u(x) \\ &= e^{\alpha x}\left(D+\alpha\right)^2 u(x). \end{aligned}$$

وبالتالي، يمكن إثبات أن $D^n\left(e^{\alpha x}\, u(x)\right) = e^{\alpha x}\left(D+\alpha\right)^n u(x),$

$$\begin{aligned} \therefore\ F(D)\left(e^{\alpha x}\, u(x)\right) &= \sum_{r=0}^{n} p_r\, D^{n-r} e^{\alpha x} u(x) \\ &= \sum_{r=0}^{n} p_r\, e^{\alpha x} \left(D+\alpha\right)^{n-r} u(x) \\ &= e^{\alpha x} F\left(D+\alpha\right) u(x). \end{aligned}$$

$$3)\ F\left(D^2\right)\left(\sin(\alpha x+\beta)\right) = F\left(-\alpha^2\right)\sin(\alpha x+\beta),$$

$$F\left(D^2\right)\left(\cos(\alpha x+\beta)\right) = F\left(-\alpha^2\right)\cos(\alpha x+\beta)$$

حيث $\alpha , \beta$ ثوابت.

**الإثبات:**

$$\because D\left(\sin(\alpha x+\beta)\right) = \alpha\cos(\alpha x+\beta)$$

$$\therefore D^2\left(\sin(\alpha x+\beta)\right) = -\alpha^2\sin(\alpha x+\beta),$$

$$\therefore \left(D^2\right)^2\left(\sin(\alpha x+\beta)\right) = \left(-\alpha^2\right)^2\sin(\alpha x+\beta),$$

$$\left(D^2\right)^n\left(\sin(\alpha x+\beta)\right) = \left(-\alpha^2\right)^n\sin(\alpha x+\beta).$$

$$\therefore\ F\left(D^2\right)\left(\sin\left(\alpha x+\beta\right)\right)=\sum_{r=0}^{n} p_r\left(D^2\right)^{n-r}\left(\sin\left(\alpha x+\beta\right)\right)$$

$$=\sum_{r=0}^{n} p_r\left(-\alpha^2\right)^{n-r}\left(\sin\left(\alpha x+\beta\right)\right)$$

$$=F\left(-\alpha^2\right)\sin\left(\alpha x+\beta\right).$$

وبالمثل يمكن اثبات أن

$$F\left(D^2\right)\left(\cos\left(\alpha x+\beta\right)\right)=F\left(-\alpha^2\right)\cos\left(\alpha x+\beta\right)$$

4) $$\frac{1}{F(D)}e^{\alpha x}=\frac{1}{F(\alpha)}e^{\alpha x},\qquad F(\alpha)\neq 0$$

**الإثبات:**

$$\because \frac{1}{F(D)}\left(F(D)e^{\alpha x}\right)=e^{\alpha x},\quad F(D)e^{\alpha x}=F(\alpha)e^{\alpha x}$$

$$\therefore \frac{1}{F(D)}\left(F(\alpha)e^{\alpha x}\right)=e^{\alpha x}$$

بقسمة الطرفين على $F(\alpha)$ ، حيث $F(\alpha)$ ثابت، $F(\alpha)\neq 0$ ، نحصل على

$$\frac{1}{F(D)}e^{\alpha x}=\frac{1}{F(\alpha)}e^{\alpha x},\qquad F(\alpha)\neq 0$$

5) $$\frac{1}{F(D)}\left(e^{\alpha x}u(x)\right)=e^{\alpha x}\frac{1}{F(D+\alpha)}u(x)$$

**الإثبات:**

$$\because F(D)e^{\alpha x}\left[\frac{1}{F(D+\alpha)}u(x)\right]=e^{\alpha x}\frac{1}{F(D+\alpha)}\left[\frac{1}{F(D+\alpha)}u(x)\right]$$

$$=e^{\alpha x}u(x)$$

بالتأثير على الطرفين بالمؤثر $\frac{1}{F(D)}$ نجد أن

$$\frac{1}{F(D)}\left(e^{\alpha x}u(x)\right)=e^{\alpha x}\frac{1}{F(D+\alpha)}u(x)$$

6) $$\frac{1}{F\left(D^2\right)}\left(\sin(\alpha x+\beta)\right)=\frac{1}{F\left(-\alpha^2\right)}\sin(\alpha x+\beta),$$

$$\frac{1}{F\left(D^2\right)}\left(\cos(\alpha x+\beta)\right)=\frac{1}{F\left(-\alpha^2\right)}\cos(\alpha x+\beta)$$

حيث $\alpha, \beta$ ثوابت، $F\left(-\alpha^2\right)\neq 0$.

**الإثبات:**

$$\because F\left(D^2\right)\left(\sin(\alpha x+\beta)\right)=F\left(-\alpha^2\right)\sin(\alpha x+\beta),$$

بالتأثير على الطرفين بالمؤثر $\frac{1}{F\left(D^2\right)}$ نجد أن

$$\frac{1}{F\left(D^2\right)}F\left(D^2\right)\left(\sin(\alpha x+\beta)\right)=\frac{1}{F\left(D^2\right)}F\left(-\alpha^2\right)\sin(\alpha x+\beta)$$

$$\therefore\left(\sin(\alpha x+\beta)\right)=F\left(-\alpha^2\right)\frac{1}{F\left(D^2\right)}\sin(\alpha x+\beta),$$

بقسمة الطرفين على $F\left(-\alpha^2\right)$ نحصل على

$$\frac{1}{F\left(D^2\right)}\left(\sin(\alpha x+\beta)\right)=\frac{1}{F\left(-\alpha^2\right)}\sin(\alpha x+\beta).$$

بالمثل يمكن اثبات أن

$$\frac{1}{F\left(D^2\right)}\left(\cos(\alpha x+\beta)\right)=\frac{1}{F\left(-\alpha^2\right)}\cos(\alpha x+\beta).$$

$$7)\ \frac{1}{F(D)}c = \frac{c}{F(0)}, \qquad F(0) \neq 0$$

**الإثبات**

$$\frac{1}{F(D)}c = c\,\frac{1}{F(D)}e^{0x} = c\,\frac{1}{F(0)}e^{0x} = \frac{c}{F(0)}.$$

**نتيجة:** المعادلة التفاضلية

$$p_0\, y^{(n)} + p_1\, y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}\, y' + p_n\, y = c,\ \ c \text{ is a constant}.$$

لها حل خاص على الصورة $y_p = \dfrac{c}{p_n}$.

وذلك لأن $F(0) = p_n$ ، $p_n$ هو معامل $y$ .

**مثال (١):** اوجد الحل الخاص لكل من المعادلات التفاضلية الآتية:

1) $y'' - 4y' + 3y = 2$

2) $y'' + 9y = e^{5x}$

3) $y''' + 4y'' + 4y' = 8e^{-2x}$

**الحل:**

***المعادلة الأولى** يمكن كتابتها على الصورة $F(D)y = 2$

حيث $F(0) = 3,\quad F(D) = \left(D^2 - 4D + 3\right)$

لذلك فإن الحل الخاص لهذه المعادلة هو $y_p = \dfrac{2}{3}$ (الخاصية (7)).

***المعادلة الثانية** يمكن كتابتها على الصورة $F(D)y = e^{5x}$

حيث $F(5) = 34 \neq 0,\quad F(D) = \left(D^2 + 9\right)$

لذلك فإن الحل الخاص لهذه المعادلة هو $y_p = \frac{1}{34} e^{5x}$ (الخاصية (٤)).

***المعادلة الثالثة** يمكن كتابتها على الصورة $F(D)y = 8e^{-2x}$.

حيث $F(D) = \left(D^3 + 4D^2 + 4D\right)$, $F(-2) = 0$.

لذلك فإننا نكتب $F(D)$ على الصورة

$$F(D) = D\left(D^2 + 4D + 4\right) = D(D+2)^2$$

ويصبح الحل الخاص لهذه المعادلة هو

$$y_p = 8\,\frac{1}{D(D+2)^2}\,e^{-2x} = 8\,\frac{1}{(D+2)^2}\left(\frac{1}{D}\,e^{-2x}\right)$$

$$= 8\,\frac{1}{(D+2)^2}\left(\frac{-1}{2}\right)e^{-2x}$$

$$= -4\left(\frac{1}{(D+2)^2}\,x^0\,e^{-2x}\right)$$

$$= -4\left(e^{-2x}\,\frac{1}{(D+2-2)^2}\,x^0\right)$$

$$= -4e^{-2x}\,\frac{1}{D^2}\,x^0 = -4e^{-2x}D^{-2}\,x^0$$

$$= -2x^2e^{-2x}$$

لاحظ أن

$$D^{-2}\,x^0 = D^{-1}\left(D^{-1}x^0\right) = \int\left(\int x^0\,dx\right)dx = \int x\,dx = \frac{1}{2}\,x^2$$

ولم يتم إضافة ثوابت أثناء التكامل نظراً لأن الحل الخاص لا يحوي أي ثوابت.

**مثال (٢):** اوجد الحل الخاص لكل من المعادلات التفاضلية الآتية:

$$1)\, y'' - y' - 2y = 4x^2 .$$
$$2)\, y'' - 2y' + y = x^2 e^x .$$
$$3)\, y'' + 2y' = x^3 e^{-x} .$$

**الحلـ:**

المعادلة الأولى يمكن كتابتها على الصورة

$$F(D)y = 4x^2$$

حيث $$F(D) = \left(D^2 - D - 2\right)$$

لذلك فإن الحل الخاص لهذه المعادلة نحصل عليه، كما يلي

$$y_p = \frac{1}{D^2 - D - 2}\left(4x^2\right) = 4\left(\frac{1}{(D+1)(D-2)}\right)x^2$$

باستخدام الكسور الجزئية نجد أن

$$\left(\frac{1}{(D+1)(D-2)}\right) = \frac{-1}{3(D+1)} - \frac{1}{6\left(1 - \frac{D}{2}\right)}$$

$$\therefore\ y_p = 4\left[\frac{-1}{6}\left(1 - \frac{D}{2}\right)^{-1} - \frac{1}{3}\left(1 + D\right)^{-1}\right]x^2$$

باستخدام نظرية ذات الحدين، نجد أن

$$\left(1 - \frac{D}{2}\right)^{-1}x^2 = \left(1 + \left(\frac{D}{2}\right) + \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \dots\right)x^2 = x^2 + x + \frac{1}{2},$$
$$\left(1 + D\right)^{-1}x^2 = \left(1 - D + D^2 - \dots + \dots\right)x^2 = x^2 - 2x + 2 .$$

$$y_p = \frac{-4}{3}\left[\frac{1}{2}\left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right) + \left(x^2 - 2x + 2\right)\right]$$

$$= \frac{-1}{3}\left(6x^2 - 6x + 9\right)$$

المعادلة الثانية يمكن كتابتها على الصورة

$$F(D)y = x^2 e^x$$

حيث $F(D) = \left(D^2 - 2D + 1\right)$

لذلك فإن الحل الخاص لهذه المعادلة هو

$$y_p = \frac{1}{\left(D^2 - 2D + 1\right)} x^2 e^x$$

$$= \frac{1}{(D-1)^2} x^2 e^x$$

$$\therefore y_p = \left[e^x \frac{1}{(D-1+1)^2} x^2\right]$$

$$= e^x D^{-2} x^2$$

$$= \frac{1}{12} x^4 e^x$$

المعادلة الثالثة يمكن كتابتها على الصورة

$$F(D)y = x^3 e^{-x}$$

حيث $F(D) = \left(D^2 + 2D\right) = D(D+2)$

لذلك فإن الحل الخاص لهذه المعادلة نحصل عليه كما يلي

$$y_p = \frac{1}{D(D+2)} x^3 e^{-x} = e^{-x} \frac{1}{(D-1)(D+1)} x^3$$

$$= -e^{-x}(1-D)^{-1}(1+D)^{-1} x^3$$

$$= -e^{-x}\left(1+D+D^2+D^3+\dots\right)\left(1-D+D^2-D^3\right)x^3$$

$$= -e^{-x}\left(1+D+D^2+D^3+\dots\right)\left(1-D+D^2-D^3\right)x^3$$

$$= -e^{-x}\left(1+D^2\right)x^3$$

وذلك بإهمال الكميات التي من الدرجة الأعلى من الثالثة.

$$\therefore\ y_p = -\,e^{-x}\left(x^3+6x\right)$$

**مثال (٣):** اوجد الحل الخاص لكل من المعادلات التفاضلية الآتية:

1) $y''+9y=\sin 3x$.

2) $y''+y=x\cos x$.

3) $y''-6y'+13y=4e^{3x}\sin 5x$.

**الحل:**

*المعادلة الأولى يمكن كتابتها على الصورة

$$F(D)y=\sin 3x$$

حيث $F(D)=\left(D^2+9\right)$ ، $F\left(-\alpha^2\right)=F(-9)=-9+9=0$

لذلك فإن الحل الخاص لهذه المعادلة نحصل عليه كما يلي

$$y_p=\frac{1}{D^2+9}\left(\sin 3x\right)=\operatorname{Im}\left(\frac{1}{D^2+9}e^{3ix}\right)=\operatorname{Im}\left(\frac{1}{(D+3i)(D-3i)}e^{3ix}\right)$$

$$=\operatorname{Im}\frac{1}{(D-3i)}\left(\frac{1}{6i}e^{3ix}\right)=\operatorname{Im}\frac{1}{6i}\frac{1}{(D-3i)}\left(x^0e^{3ix}\right)$$

$$=\operatorname{Im}\frac{1}{6i}\frac{1}{(D-3i)}\left(x^0e^{3ix}\right)=\operatorname{Im}\left(\frac{-i}{6}e^{3ix}\frac{1}{(D)}x^0\right)$$

$$= \mathrm{Im}\left(\frac{-i\,x}{6}\, e^{3i\,x}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{-i\,x}{6}\left(\cos 3x + i\,\sin 3x\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{6}\, x\,\cos 3x$$

حيث Im هي الجزء التخيلي للعدد المركب.

لاحظ أننا لم نستطع تطبيق الخاصية السادسة والتي تنص على

$$\frac{1}{F\left(D^2\right)}\left(\sin\left(\alpha x+\beta\right)\right)=\frac{1}{F\left(-\alpha^2\right)}\sin\left(\alpha x+\beta\right),\quad F\left(-\alpha^2\right)\neq 0$$

وذلك لأن $F\left(-\alpha^2\right) = 0$

لذلك تستخدم الطريقة السابقة في هذه الحالة.

*المعادلة الثانية يمكن كتابتها على الصورة

$$F\left(D\right)y = x\cos x$$

حيث $F\left(D\right)=\left(D^2+1\right)$

لذلك فإن الحل الخاص لهذه المعادلة نحصل عليه كما يلي

$$y_p = \frac{1}{\left(D^2+1\right)}\left(x\,\cos x\right)$$

$$= \mathrm{Re}\,\frac{1}{\left(D^2+1\right)}\left(x\,e^{i\,x}\right)$$

$$= \mathrm{Re}\,e^{i\,x}\,\frac{1}{\left(\left(D+i\right)^2+1\right)}\left(x\right)$$

$$= \mathrm{Re}\,e^{i\,x}\,\frac{1}{\left(D^2+2i\,D\right)}\left(x\right)$$

$$= \operatorname{Re} e^{ix} \frac{1}{D(D+2i)}(x)$$

$$= \operatorname{Re} e^{ix} \frac{1}{2i} D^{-1}\left(1+\frac{D}{2i}\right)^{-1}(x)$$

$$= \operatorname{Re} e^{ix} \frac{1}{2i} D^{-1}\left(1-\frac{D}{2i}-\frac{D^2}{4}+\ldots\right)(x)$$

$$= \operatorname{Re} e^{ix} \frac{1}{2i}\left(D^{-1}-\frac{1}{2i}-\frac{D}{4}\right)(x)$$

$$= \operatorname{Re} \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2i}x-\frac{1}{4}\right)(\cos x + i\sin x)$$

$$= \frac{1}{8}(2x^2-1)\sin x + \frac{1}{4}x\cos x$$

المعادلة الثالثة يمكن كتابتها على الصورة

$$F(D)y = 4e^{3x}\sin 5x$$

حيث

$$F(D) = (D^2-6D+13)$$

لذلك فإن الحل الخاص لهذه المعادلة هو

$$y_p = \frac{1}{(D^2-6D+13)} 4e^{3x}\sin 5x$$

$$= 4e^{3x}\frac{1}{((D+3)^2-6(D+3)+13)}\sin 5x$$

$$= 4e^{3x}\frac{1}{(D^2+4)}\sin 5x$$

$$= 4e^{3x}\frac{1}{(-25+4)}\sin 5x$$

$$= \frac{-4}{21} e^{3x} \sin 5x$$

**مثال (٤):** اوجد الحل الخاص لكل من المعادلات التفاضلية الآتية:

$$1)\ y'' - 4y = x + 3\cos x + e^{-2x}.$$
$$2)\ y'' - 2y' + 2y = x\, e^{x} \cos x.$$

**الحل:**

*المعادلة الأولى يمكن كتابتها على الصورة

$$F(D) = x + 3\cos x + e^{-2x}$$

حيث $F(D) = \left(D^2 - 4\right)$

لذلك فإن الحل الخاص لهذه المعادلة يكون عبارة عن مجموع الحلول الخاصة للمعادلات

$F(D) = x$ , $F(D) = 3\cos x$ , $F(D) = e^{-2x}$.

و نحصل عليه كما يلي

$$y_p = \frac{1}{D^2 - 4}\left\{x + 3\cos x + e^{-2x}\right\}$$

$$+ \frac{1}{(D+2)(D-2)}\left\{e^{-2x}\right\} + 3\frac{1}{D^2 - 4}(\cos x)$$

$$= \frac{1}{D^2 - 4}(x)$$

$$= \frac{1}{(D-2)(D+2)}\{x\} - \frac{3}{5}\cos x + \frac{1}{(D-2)^2 - 4}\left\{x^0\right\}$$

$$= \frac{1}{4(D-2)}x - \frac{1}{4(D+2)}x - \frac{3}{-5}\cos x + \left\{e^{-2x}\right\}\frac{1}{D(D-4)}\left\{x^0\right\}$$

$$= -\frac{1}{8}\left(1-\frac{D}{2}\right)^{-1}(x) - \frac{1}{8}\left(1+\frac{D}{2}\right)^{-1}(x) - \frac{3}{5}\cos x$$

$$-\frac{1}{4}e^{-2x}D^{-1}\left(1-\frac{D}{4}\right)^{-1}x^{0}$$

$$= -\frac{1}{8}\left(\left(1+\frac{D}{2}+\frac{D^2}{4}+\dots\right)+\left(1-\frac{D}{2}+\frac{D^2}{4}-\dots+\dots\right)\right)x -$$

$$-\frac{3}{5}\cos x - \frac{1}{4}e^{-2x}D^{-1}\left(1+\frac{D}{4}+\frac{D^2}{16}\dots\right)x^{0}$$

$$= -\frac{1}{8}\left(2+\frac{D^2}{2}\right)(x) - \frac{3}{5}\cos x - \frac{1}{4}e^{-2x}\left(D^{-1}+\frac{1}{4}\right)x^{0}$$

$$= -\frac{1}{4}x - \frac{3}{5}\cos x - \frac{1}{16}(4x+1)e^{-2x}$$

*المعادلة الثانية يمكن كتابتها على الصورة

$$F(D)y = x e^{x}\cos x ،$$

حيث $F(D) = \left(D^2 - 2D + 2\right).$

لذلك فإن الحل الخاص لهذه المعادلة نحصل عليه كما يلي

$$y_p = \frac{1}{\left(D^2 - 2D + 2\right)}e^{x}x\cos x$$

$$= e^{x}\frac{1}{\left((D+1)^2 - 2(D+1) + 2\right)}x\cos x$$

$$= e^{x}\frac{1}{\left(D^2+1\right)}x\cos x$$

المقدار $\frac{1}{\left(D^2+1\right)}x\cos x$ سبق أن حصلنا عليه من خلال المعادلة الثانية من مثال (٣)

وهو يساوي $\frac{1}{8}\left(2x^2-1\right)\sin x+\frac{1}{4}x\cos x$.

وبالتالي فإن حل المعادلة المعطاة هو

$$y_p=e^x\left(\frac{1}{8}\left(2x^2-1\right)\sin x+\frac{1}{4}x\cos x\right)$$

لاحظ أننا أثرنا أولاً بالمؤثر على الدالة الأسية ثم على الدالة المثلثية، وغالباً يكون من المفيد عمل ذلك.

فيما سبق، استطعنا إيجاد الحل العام $(y_h)$ للمعادلة المتجانسة

$$p_0\,y^{(n)}+p_1\,y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}\,y'+p_n\,y=0$$

والحل الخاص $(y_p)$ للمعادلة غير المتجانسة

$$p_0\,y^{(n)}+p_1\,y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}\,y'+p_n\,y=f(x)$$

ولذلك يمكننا إيجاد الحل العام $y_g$ للمعادلة غير المتجانسة، على الصورة

$$y_g=y_h+y_p$$

## ٥/٤- معادلة أويلر الخطية:

معادلة أويلر الخطية هي المعادلة التي على الصورة

$$\begin{aligned}a_0(ax+b)^n\,y^{(n)}+a_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)}&+\\+\ldots+a_{n-1}(ax+b)\,y'+a_n\,y&=f(x),\end{aligned}$$

حيث $a_0\,,a_1\,,a_2\,,\ldots,a_{(n-1)}\,,a_n\,,a\,,b$ ثوابت.

ويمكن تحويلها إلى معادلة تفاضلية خطية ذات معاملات ثابتة.

استخدام التعويض

$$ax+b=e^{z} \therefore z=\ln(ax+b)$$

نجد أن

$$\frac{dz}{dx}=\frac{a}{ax+b} \;,\quad (ax+b)y'=a\frac{dy}{dz}=a\,\Theta y\,,\quad \Theta=\frac{d}{dz}\,,$$

$$(ax+b)^{2}\;y''=a^{2}\left(\frac{d^{2}y}{dz^{2}}-\frac{dy}{dz}\right)=a^{2}\,\Theta(\Theta-1)\,y,$$

$$(ax+b)^{3}\;y'''=a^{3}\,\Theta(\Theta-1)(\Theta-2)y,$$

وبالتالي فإن

$$(ax+b)^{n}\,y^{(n)}=a^{n}\,\Theta(\Theta-1)(\Theta-2)\ldots(\Theta-n+1)y$$

بالتعويض بالعلاقات السابقة في معادلة أويلر نحصل على معادلة تفاضلية خطية ذات معاملات ثابتة، وتحل كما سبق، فنحصل على الحل العام بدلالة $y\,,\,z$ ، ثم بالتعويض عن $z$ بدلالة $x$ نكون قد اوجدنا الحل المطلوب لمعادلة أويلر.

**مثال (١):** اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$x^{2}y''-4xy'+6y=x$$

**الحل:**

هذه المعادلة هي معادلة أويلر، حيث

$$n=2\,,\;a=1\,,\;b=0\,,\;a_{0}=1\,,\;a_{1}=-4\,,\;a_{2}=6$$

بأخذ التعويض $x=e^{z}\quad or\quad z=\ln x$ ، نجد أن

$$y'=\frac{1}{x}\frac{dy}{dz}\;,\quad y''=\frac{1}{x^{2}}\left(\frac{d^{2}y}{dz^{2}}-\frac{dy}{dz}\right)$$

وتتحول المعادلة المعطاة إلى الصورة

$$\frac{d^2y}{dz^2}-5\frac{dy}{dz}+6y=e^z$$

والتي يمكن كتابتها على الصورة

$$F(\Theta)=\Theta^2-5\Theta+6 \text{ ، } F(\Theta)y=e^z$$

المعادلة المتجانسة $\frac{d^2y}{dz^2}-5\frac{dy}{dz}+6y=0$ ،

يمكن كتابتها على الصورة

$$\left(\Theta^2-5\Theta+6\right)y=0$$

وتكون المعادلة المساعدة لها هي

$$\left(r^2-5r+6\right)=0$$

$$\therefore(r-2)(r-3)=0$$

وجذور هذه المعادلة هي

$$r_1=2,\quad r_2=3$$

وبالتالي يكون الحل العام للمعادلة المتجانسة هو

$$y_h=c_1e^{3x}+c_2e^{2x}=c_1x^3+c_2x^2$$

أما الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة فنحصل عليه كما يلي

$$y_p=\frac{1}{\Theta^2-5\Theta+6}e^z=\frac{1}{2}e^z$$

وذلك لأن $F(1)=2$.

والحل العام للمعادلة المعطاة هو

$$y_g = c_1 x^3 + c_2 x^2 + \frac{1}{2}x$$

لذلك فإن الحل العام للمعادلة $\frac{d^2y}{dz^2} - 5\frac{dy}{dz} + 6y = e^z$ ، هو

$$y_g = y_h + y_p = c_1 e^{3z} + c_2 e^{2z} + \frac{1}{2}e^z$$

**مثال (٢):** اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$x^2 y'' - 3xy' + 4y = 6x^2 \ln x + \frac{6}{x}$$

**الحل:**

هذه المعادلة هي معادلة أويلر، حيث

$$n = 2\,,\ a = 1\,,\ b = 0\,,\ a_0 = 1\,,\ a_1 = -3\,,\ a_2 = 4$$

بأخذ التعويض $z = \ln x \quad or \quad x = e^z$ ، نجد أن

$$y' = \frac{1}{x}\frac{dy}{dz}\ ,\ \ y'' = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}\right)$$

وتتحول المعادلة المعطاة إلى الصورة

$$\frac{d^2y}{dz^2} - 4\frac{dy}{dz} + 4y = 6z\,e^{2z} + 6e^{-z}$$

$$\therefore \left(\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}\right) - 3\frac{dy}{dz} + 4y = 6z\,e^{2z} + \frac{6}{e^z}$$

والتي يمكن كتابتها على الصورة

$$F(\Theta)y = 6ze^{2z} + 6e^{-z}$$

وتكون المعادلة المساعدة لها هي

$$\left(r^2-4r+4\right)=0 \quad \therefore \quad \left(r-2\right)^2=0$$

وجذور هذه المعادلة هي

$$r_1 = r_2 = 2$$

وبالتالي يكون الحل العام للمعادلة المتجانسة هو

$$y_h = \left(c_1 + c_2 z\right) e^{2z}$$

أما الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة فنحصل عليه كما يلي

$$y_p = 6\,\frac{1}{\left(\Theta-2\right)^2}\left(z\,e^{2z} + z^0 e^{-z}\right)$$

$$= 6\,z\,e^{2z}\,\Theta^{-2} + 6\,\frac{1}{\left(-1-2\right)^2} e^{-z}$$

$$= z^3 e^{2z} + \frac{2}{3} e^{-z}$$

لذلك فإن الحل العام للمعادلة

$$\frac{d^2y}{dz^2} - 4\frac{dy}{dz} + 4y = 6ze^{2z} + 6e^{-z}$$

هو $y_g = y_h + y_p = \left(c_1 + c_2 z\right) e^{2z} + z^3 e^{2z} + \frac{2}{3} e^{-z}$

والحل العام للمعادلة المعطاة هو

$$y_g = x^2\left(c_1 + c_2 \ln x\right) + x^2\left(\ln x\right)^3 + \frac{2}{3x}$$

**مثال (٣):** أوجد حل مجموعة المعادلات التفاضلية الآتية:

$$\left(D+2\right)x + 3y = 0 \qquad (1)$$

$$3x + \left(D+2\right)y = 2e^{2t} \qquad (2)$$

**الحل:**

بالتأثير على المعادلة (1) بالمؤثر (D+2) وضرب (2) في (3) وطرح (2) من (1) نحصل على:

$$\left(D^2+4D-5\right)x=-6e^{2t}$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية ذات معادلات ثابتة حلها لعام على الصورة

$$x=c_1e^t+c_2e^{-5t}-\frac{6}{7}e^{2t} \qquad (3)$$

بالتعويض في المعادلة (1) نحصل على

$$y=-\frac{1}{3}\left[\left(D+2\right),c_1e^t+c_2e^{-st}-\frac{6}{7}e^{2t}\right]$$

$$=-\frac{1}{3}\left[3c_1e^t-3c_2e^{-st}-\frac{24}{7}e^{2t}\right]$$

$$\therefore y=c_1e^t+c_2e^{-st}-\frac{8}{7}e^{2t} \qquad (4)$$

الحل الكامل يعطى بالمعادلتين (4) ،(3).

## ٦/٤- تمارين:

١- اوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية:

1) $y''-3y'+2y=0$ .

2) $y''-6y'+9y=0$ .

3) $y''+3y=0$ .

4) $y''+2y'+10y=0$ .

5) $y'''-6y''+11y'-6y=0$ .

6) $y'''-4y''-3y'+18y=0$ .

7) $y^{(iv)}-9y''+20y=0$ .

8) $y^{(iv)}+8y'''+24y''+32y'+16y=0$ .

9) $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$ .
10) $y''' - 6y'' + 2y' + 36y = 0$ .

11) $y^{(iv)} - 64y = 0$ .
12) $y^{(iv)} - 4y''' + 7y'' - 4y' + 6y = 0$ .

15) $y^{(iv)} - 6y''' + 13y'' - 12y' + 4y = 0$ .
16) $y^{(vi)} + 9y^{(iv)} + 24y'' + 16y = 0$ .

17) $y^{(iv)} - 8y'' + 16y = 0$ .
18) $y^{(iv)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 0$ .

19) $4y^{(v)} - 3y''' - y'' = 0$ .
20) $y^{(vi)} + 3y^{(iv)} + 3y'' + y = 0$ .

21) $y^{(iv)} - y''' - 9y'' - 11y' - 4y = 0$ .
22) $\left(D^2 - 2D + 5\right)^2 y = 0 , \qquad D \equiv \dfrac{d}{dx}$ .

٢- اوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية:

1) $y'' + 5y' + 6y = e^{-2x}$.
2) $y''' - y'' - y' - y = \cos 2x$ .

3) $y'' - 8y' + 15y = 9xe^{2x}$.
4) $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 3x^2 e^x - 7e^x$ .

5) $y'' + 4y' = 195e^{2x}\sin 3x$ .
6) $y''' - 6y'' + 9y' - 4y = 3 + 8x^2 - 6e^{2x}$ .

7) $y''' - 4y'' + y' + 6y = 3xe^x + 2e^x - \sin x$ .
8) $y'' + 7y' + 10y = 4xe^{-3x}$ .

9) $y''' + y' = 2x^2 + 4\sin x$ .
10) $y'' + y' - 6y = 10e^{2x} - 18e^{3x} - 6x - 11$ .

11) $y'' + 3y' - 40y = \sin 20x + 40\cos 20x$ .

12) $y''' + y'' + 3y' - 5y = 5\sin 2x + 10x^2 - 3x + 7$ .

13) $y^{(4)} + y'' = 3x^2 + 4\sin x - 2\cos x$ .

14) $y'' + 2y' + 4y = e^x \sin 2x$ .

15) $y^{(4)} + 2y'' + y = \cos x$ .

16) $y'' + y = \sin 3x \cos x$ .

17) $x^2 y'' - x y' + y = x(\ln x)^3$.

18) $(1+x)y'' - 3y' + \dfrac{4}{1+x}y = (1+x)^2$.

19) $(x+2)^2 y'' - (x+2)y' + y = 3x + 4$ .

20) $(3x+2)^2 y'' + 3(3x+2)y' - 36y = 3x^2 + 4x + 1$ .

٣-اوجد الحل العام لأنظمة المعادلات التفاضلية الآنية:

$$(1)\begin{cases} Dx - (D+1)y = -e^t \\ x + (D-1)y = e^{2t} \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} (D+2)x + (D+1)y = t \\ 5x + (D+3)y = t^2 \end{cases}$$

$$(3)\begin{cases} (D+1)x + (D+1)y = e^t + 2 \\ -2x + (D+3)y = e^t - 1 \end{cases}$$

$$(4)\begin{cases} (D^2+16)x - 6Dy = 0 \\ 6Dx + (D^2+16)y = 0 \end{cases}$$

$$(5)\begin{cases} (D^2+4)x - 6Dy = 0 \\ (D^2+1)y - 2x = \cos^2 x \end{cases}$$

$$(6)\ \begin{cases}(D-1)x+(D+2)y=1+e^t\\(D-1)y\ (D+1)z=2+e^t\\(D-1)x+(D+1)z=3+e^t\end{cases}$$

$$(7)\begin{cases}t^2\ddot{x}+t\dot{x}+2y=0\\t^2\ddot{y}+t\dot{y}+2\dot{y}-2x=0\end{cases}$$

$$(8)\begin{cases}\ddot{x}+x=\dot{y}\\4\dot{x}+2x=\dot{y}+2y\end{cases}$$