# الفصل الخامس

## حل المعادلات التفاضليـــــــــة

## باستخدام المتسلسلات اللانهائية

## Soution of Differential Equations

## by Infinite Series

## أولاً- طريقة ليبنز– ماكلورين:

يمكن تلخيص هذه الطريقة وذلك بايجاد مفكوك ماكلورين في صورة متسلسلة لا نهائية للحل

$$y = y(0)+xy^{(1)}(0)+\frac{x^2}{2!}y^{(2)}(0)+\dots\frac{x^r}{r!}y^{(r)}(0)+\dots$$

ثم استخدام نظرية ليبنز للتفاضل للمعادلة التفاضلية n من المرات وتوجد علاقة بين المشتقات $y^{(r)}\ (r=0,1,2,\dots)$ كما سيتضح من الأمثلة الآتية.

**مثال (١):** اوجد حل المعادلة التفاضلية:

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}-5x\frac{dy}{dx}-3y=0 \tag{1}$$

**الحل:**

يتفاضل المعادلة (1)، $n$ من المرات باستخدام نظرية ليبنز نحصل على

$$\left(1-x^2\right)y^{(n+2)}-x\left(2n+5\right)y^{((n+1))}-\left(n+1\right)\left(n+3\right)y^{n}=0 \tag{2}$$

نفرض أن حل المعادلة (١) فى صورة متسلسلة ماكلورين

$$y=y\left(0\right)+xy^{(1)}\left(0\right)+\frac{x^2}{2!}y^{(2)}\left(0\right)+\dots+\frac{x^r}{r!}y^{(r)}\left(0\right)+\dots \tag{3}$$

حيث $y^r\left(0\right)$ نرمز إلى القيمة $\frac{d^ry}{dx^r}$ عند النقطة $x=0$

بوضع $x=0$ فى المعادلة (٢) نحصل على

$$y^{(n+2)}\left(0\right)=\left(n+1\right)\left(n+3\right)y^{(n)}\left(0\right),\quad \left(n\ge 0\right) \tag{4}$$

نحصل على (4) ومن ثم من

$$y^{(2)}(0)=1.3.y(0)$$
$$y^{(3)}(0)=2.4.y^{(1)}(0)$$
$$y^{(4)}(0)=3.5.y^{(2)}(0)=1.3^2.5.y(0)$$
$$y^{(5)}(0)=4.6.y^{(3)}(0)=2.4^2.6.y^{(1)}(0)$$
$$y^{(6)}(0)=5.7.y^{(4)}(0)=1.3^2.5^2.7y(0)$$

وهكذا ... ومن ثم من (3) نحصل على

$$y=y(0)\left[1+\frac{1.3}{3!}x^2+\frac{1.3^2.5}{4!}x^4+\frac{1.3^2.5^2.7}{6!}x^6+\ldots\right]$$
$$+y^{(1)}(0)\left(x+\frac{2.4}{3!}x^3+\frac{2.4^2.6}{5!}x^5+\frac{2.4^2.6^2.6}{7!}x^7+\ldots\right) \qquad (5)$$

ا لمعادلة (5) تمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية (1) لأنها تحتوى على ثابتين اختيارين هما $y(0),\ y^{'}(0)$

ملحوظة: بما أن هذا الحل حصلنا عليه حول النقطة $x=0$ (في صورة متسلسلة ماكلورين) نقول أن هذا الحل حول النقطة $x=0$ لكي نحصل على حل حول أي نقطة أخري $x=a$ المعادلة (3) يجب أن تستبدل بمتسلسلة تايلور حول النقطة $x=a$ أي أن:

$$y=y(a)+(x-a)y^{(1)}(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}y^{(2)}(a)+\ldots+\frac{(x-a)^r}{r!}y^{(r)}(a)+\ldots \qquad (6)$$

بوضع $x=a$ في المعادلة (2) تستبدل بالمعادلة:

$$\left(1-a^2\right)y^{(n+2)}(a)-(2n+5)ay^{(n+1)}(a)-(n+1)(n+3)y^{(n)}(a)=0 \qquad (7)$$

سوف نعتبر الحل حول النقطة $x=0$ فقط.

**مثال (٢):** أوجد حل المعادلة التفاضلية:

$$y^{''}+xy=0 \qquad (1)$$

علماً بأن $\qquad y(0)=a, \qquad y'(0)=b$

**الحل:**

تفاضل المعادلة (1) $n$ من المرات باستخدام نظرية ليبنز نحصل على

$$y^{(n+2)}(x)+xy^{(n)}(x)+ny^{(n-1)}(x)=0 \qquad (2)$$

بوضع $x=0$ فى المعادلة (2):

$$\therefore y^{(n+2)}(0)=-ny^{(n-1)}(0) \qquad (3)$$

ولكن $y(0)=0, \qquad y'(0)=b$

من المعادلة (1) نجد أن

$$y''(0)=0 \Rightarrow xa=0$$

من المعادلة (3) نحصل على

$$y^{(3)}(0)=1.y^{(0)}(0)=-y(0)=-a$$
$$y^{(4)}(0)=-2y^{(1)}(0)=-2b$$
$$y^{(5)}(0)=-3y^{(2)}(0)=0$$
$$y^{(6)}(0)=-4y^{(3)}(0)=4.1.a=4a$$
$$y^{(7)}(0)=-5y^{(4)}(0)=5.2.b=10b$$
$$y^{(8)}(0)=-6y^{(5)}(0)=0$$
$$y^{(9)}(0)=-7y^{(6)}(0)=-7.4.1a=-28a$$
$$y^{(10)}(0)=-8y^{(7)}(0)=8.5.2b=80b$$
$$y^{(11)}(0)=-9y^{(8)}(0)=0$$
$$y^{(12)}(0)=-10y^{(9)}(0)=-10.7.4a=-280a$$

بالتعويض فى مفكوك ما كلورين نحصل على

$$y = y(0) + \frac{x}{1!} y^{(1)}(0) + \frac{x^2}{2!} y^{(2)}(0) + \ldots\ldots + \frac{x^R}{R!} y^{(R)}(0) + \ldots$$

$$\therefore y = a + bx - \frac{a}{3!}x^3 - \frac{2b}{4!}x^4 + \frac{4.1}{6!}ax^6 + \frac{5.2b}{7!}x^7 - \frac{7.4.1}{9!}ax^9$$
$$-\frac{8.5.2b}{10!}x^{10} + \frac{10.7.4}{12!}x^{12} + \ldots$$

$$\therefore y = a\left(1 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1.4}{6!}x^6 - \frac{7.4.1}{9!}x^9 4\ldots\right)$$
$$+bx\left(1 - \frac{2}{4}x^3 + \frac{5.2}{7!}x^6 - \frac{8.5.2}{10!}x^9 + \ldots\right)$$

**مثال (٣):** اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (1+x)\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \qquad (1)$$

بالقرب من $x = 0$

**الحل:**

نفاضل المعادلة (1) $n$ من المرات باستخدام نظرية ليبنز

$$\therefore xy^{(n+2)}(x) + (1+n+x)y^{(n+1)}(x) + (n+2)y^{(n)}(x) = 0 \qquad (2)$$

بوضع $x = 0$ في (2) نحصل على

$$y^{(n+1)}(0) = -\frac{n+2}{n+1} y^{(n)}(0) \qquad (3)$$

بوضع $n = 0,1,2,\ldots$ نحصل على

$$y^{(1)}(0) = -2y(0)$$
$$y^{(2)}(0) = -\frac{3}{2} y^{(1)}(0) = 3y(0)$$

$$y^{(3)}(0)=-\frac{4}{3}y^{(2)}(0)=-4y(0)$$
$$y^{(4)}(0)=-\frac{5}{4}y^{(3)}(0)=5y(0)$$

وهكذا: بالتعويض في مفكوك ما كلورين

$$y=y(0)+\frac{x}{1!}y^{(1)}(0)+\frac{x^2}{2!}y^{(2)}+\ldots+\frac{x^r}{r!}y^{(r)}(0)+\ldots$$

نحصل على

$$y=y(0)\Bigg(1-2x+\frac{3}{2!}x^2-\frac{4}{3!}x^3+\frac{5}{4!}x^4+\ldots+ +(-1)^r\frac{(y+1)}{r!}x^r+\ldots\Bigg) \tag{4}$$

حيث $y(0)$ ثابت اختياري.

المعادلة (4) ليست حل عام للمعادلة التفاضلية لأنها تحتوى على ثابت اختياري واحد $(y(0))$ لإيجاد الحل الثاني نستخدم التعويض

$$y=u(x)y_1 \tag{5}$$

حيث $y_1$ يعطى بالعلاقة (4). بالتعويض من (5) فى (1) نحصل على

$$x\left[u^{(2)}y_1+2u^{(1)}y_1^{(1)}+uy_1^{(2)}\right]+(1+x)\left(u^{(1)}y+uy_1^{(1)}\right)+2uy_1=0 \tag{6}$$

بما أن $y_1$ حل المعادلة التفاضلية (1) إذن

$$x\left(u^{(2)}y_1+2u^{(1)}y_1^{(1)}\right)+(1+x)u^{(1)}y_1=0 \tag{7}$$

تصبح المعادلة (7) على الصورة

$$\frac{u^{(2)}}{u^{(1)}}+\frac{2y_1^{(1)}}{y_1}+\frac{1}{x}+1=0 \tag{8}$$

بتكامل (8) نجد أن

$$\ln\left|u^{(1)}\right|+2\ln\left|y_1\right|+\ln\left|x\right|+x=c$$

ومنها نحصل على

$$xe^x y_1^2\frac{du}{dx}=c^*,\quad c^*=e^c \tag{9}$$

حيث c ثابت اختياري للتكامل

$$\therefore u=c^*\int\frac{e^{-x}}{xy_1^2}dx \tag{10}$$

بالتعويض من (10) في المعادلة (5) نحصل على

$$y_2=c^*y_1\int\frac{e^{-x}}{xy_1^2}dx$$

إذن الحل العام للمعادلة (1) هو

$$\begin{aligned}y&=Ay_1+By_2\\&=Ay_1+Bc^*y_1\int\frac{e^{-x}}{xy_1^2}dx\end{aligned}$$

حيث A، B ثوابت اختيارية.

**ملحوظة:** واضح من الأمثلة السابقة أن الحل بطريقة ماكلورين أو تايلور ليس عمليا وقد يكون شاذا في بعض الحالات أو من الممكن أن تكون التفاضلات المتتالية معقدة يمكن استنتاج قاعدة عامة هى أن حل مثل هذه المعادلات يكون على هيئة متسلسلة لانهائية على الصورة:

$$y=x^m\left(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\dots\right)=x^m\sum_{r=0}^{\infty}a_\gamma x^r,\ a_0\neq 0$$

أو على الصورة

$$y=\sum_{r=0}^{\infty}a_r x^{m+r}$$

بالتعويض في أي معادلة تفاضــلية من الرتبة الثانية بالفرض الســابق فانه يمكننا أن نوجد علاقة بين المعاملات ومن السـهل أن نسـتنتج قيمة كل من المعاملات بدلالة $a_0,\ a_1$ في أغلب الأحيان:

**مثال (٤):** اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$xy''+y'+y=0 \tag{1}$$

**الحلـ:**

$$y''+\frac{1}{x}y'+\frac{b}{x}y=0$$

نفرض أن الحل على الصورة:

$$y=\sum_{r=0}^{\infty}a_r x^{r+m}, \qquad (a_1\neq 0)$$

$$\therefore y'=\sum_{r=0}^{\infty}a_r\,(r+m)x^{r+m-1}$$

$$y''=\sum_{r=0}^{\infty}a_r\,(r+m)(r+m-1)x^{r+m-2}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية (1)

$$\therefore \sum_{r=0}^{\infty}a_r\,(r+m)(\gamma+m-1)x^{r+m-1}+$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}a_r\,(\gamma+m)x^{r+m-1}+\quad b\sum_{r=0}^{\infty}a_r x^{r+m}=0$$

$$\therefore \sum_{r=0}^{\infty}a_r\,(r+m)^2x^{r+m-1}+b\sum_{r=0}^{\infty}a_r x^{r+m}=0$$

بمساواة معامل أصغر قوى $x^{\gamma+m}$ بالصفر

$$\therefore a_{r+1}(r+m+1)^2+ba_r=0$$

$$\therefore a_{r+1}=\frac{-b}{(r+m+1)^2}a_r$$

$$\therefore a_{r+1}=\frac{-b}{(r+1)^2}a_\gamma \qquad (m=0)$$

$$=\frac{-b}{(r+1)^2}\cdot\frac{-b}{r^2}\cdot\frac{-b}{(r-1)^2}\cdots\frac{-b}{1}a_0$$

$$\therefore a_{r+1}=\frac{(-b)^{r-1}}{\left[(r+1)!\right]^2}a_0$$

$$\therefore a_r=\frac{(-b)^r}{(r!)^2}a_0$$

$$\therefore y=\sum_{r=0}^{\infty}a_r x^{r+m}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}a_r x^r$$

$$=a_0\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-b)^r}{(r!)^2}x^r$$

وهو حل غير كامل لأنة يحتوي على ثابت اختياري واحد يمكن إيجاد الحل العام كما في المثال السابق.

## ١/٥- تعاريف هامة:

**الدالة التحليلية:** تسمى الدالة $\varphi(x)$ دالة تحليلية عند النقطة $x=a$ إذا كانت وإذا كانت نقط $\varphi'(x)$ لها قيمة محدودة عند النقط المحيطة بالنقطة $x=a$.

**النقطة العادية:** النقطة $x=0$ تسمى نقطة عادية Regular point للمعادلة التفاضلية

$$y''+\varphi(x)y'+\psi(x)y=0$$

إذا كانت $\varphi(x)$ ، $\psi(x)$ دالتين تحليليتين عند النقطة $x=0$.

**تعريف آخر للنقطة العادية:**

النقطة $x=0$ تسمى نقطة عادية للمعادلة التفاضلية

$$y'' + \varphi(x)y' + \psi(x)y = 0$$

إذا كانت

$$\varphi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots$$
$$\psi(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots$$

متسلسلتين تقاربيتين في جوار النقطة $x=0$.

**النقطة الشاذة المنتظمة:** النقطة التي لم تكن عادية فهي شاذة و (فريدة).

وتكون النقطة $x=0$ شاذة منتظمة للمعادلة التفاضلية

$$y'' + \varphi(x)y' + \psi(x)y = 0$$

إذا كانت

$$x\varphi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots \qquad = \varphi^*(x)$$
$$x^2\psi(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots \qquad = \psi^*(x)$$

متسلسلتين تقاربيتين في جوار النقطة $x=0$.

**ملحوظة:** النقطة $x=0$ نقطة عادية للمعادلة المذكورة إذا كانت كل من $\varphi(0), \psi(0)$ كمية محدودة عند النقطة $x=0$ تسمى شاذة منتظمة للمعادلة التفاضلية المذكورة إذا كان كل من $\varphi(0), \psi(0)$، كمية غير محدودة.

**مثال (٥):** اثبت أن $x=0$ نقطة عادية للمعادلة التفاضلية:

$$y'' + xy' + 2y = 0$$

**الحل:**

$$y'' + xy' + 2y = 0$$

$$\varphi(x) = x, \quad \psi(x) = 2$$

دالتين تحليليتين في جوار $x = 0$

إذن $x = 0$ نقطة عادية، وغير منظمة للمعادلة

$$y'' + xy' + 2y = 0$$

## أولاً- طريقة فروبينيوس:

لحل المعادلة التفاضلية $y'' + \varphi(x) y' + \psi(x) y = 0$ إذا كانت النقطة $x = 0$ نقطة عادية أو نقطة شاذة منتظمة لها نفرض أن الحل على الصورة

$$y = x^m \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\right), \; a_0 \neq 0$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{r+m}$$

$$\therefore y' = \sum_{r=0}^{\infty} a_r (r+m) x^{r+m-1}$$

$$y'' = \sum_{r=0}^{\infty} a_r (r+m)(r+m-1) x^{r+m-2}$$

بضرب طرفي المعادلة التفاضلية في $x^2$

$$\therefore x^2 y'' + x\varphi(x) y' + x^2 \psi(x) y = 0$$

بالتعويض

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r (r+m)(r+m-1) x^{r+m-1}$$

$$+ \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r x^r \sum_{r=0}^{\infty} a_r (r+m) x^{r+m}$$

$$+ \sum_{r=0}^{\infty} \beta_r x^r . \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{r+m} = 0$$

وبمساواة معامل أصغر قوى $\left(x^{m}\right)$ بالصفر

$$\therefore a_0 m(m-1)+\alpha_0 a_0 m+\beta_0 a_0=0$$
$$\therefore m(m-1)+\alpha_0 m+\beta_0=0$$
$$\therefore m^2+(1-\alpha_0)m+\beta_0=0$$

والمعادلة الأخيرة من الدرجة الثانية في m تسمى معادلة الأسس وهذه المعادلة لها جذران في m وهناك ثلاثة حالات:

١- أن يختلف الجذران بعدد غير صحيح

٢- أن يختلف الجذران بعدد صحيح

٣- أن يتساوى الجذران

في الحالة الأولي نحصل من قيمتي m على جذرين مستقلين يتكون منهما الحل الكامل للمعادلة التفاضلية. وفي الحالتين الأخيرتين لن نتمكن بصفة عامة من الحصول إلا على حل واحد فقط و أما الحل الثاني فيمكن إجادة بالطريقة الآتية.

نفرض أن الحل الأول للمعادلة التفاضلية هو

$$y_1=\sum_{\gamma-0}^{\infty}a_{\gamma}x^{\gamma+m_1}$$

كما في مثال (٣) السابق:

$$y_2=y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int\frac{1}{x}\varphi(x)dx}dx$$
$$=y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int\frac{1}{x}\left(\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\dots\right)dx}dx$$
$$=y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{\ln x^{\alpha_0}}\ e^{-\int\frac{1}{x}\left(\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\dots\right)dx}dx$$
$$=y_1\int\frac{1}{y_1^2x^{\alpha_0}}\chi(x)dx$$

$$= y_1 \int \frac{\chi(x)}{\left(x^{m_1} \sum_{\gamma=0}^{\infty} a_\gamma x\right)^2 x^{\alpha_0}} dx$$

$$\therefore y_2 = y_1 \int \frac{1}{x^{2m_1+\alpha_0}} \cdot \frac{\chi(x)}{\left(\sum_{\gamma=0}^{\infty} a_\gamma x^\gamma\right)^2} dx$$

$$= y_1 \int \frac{1}{x^{2m_1+\alpha_0}} \chi(x) dx$$

حيث $\chi(x)$ متسلسلة لا نهائية.

ولكن من معادلة الأسس

$$m^2 + (1-\alpha_0)m + B_0 = 0$$

مجموع الجذرين = $-(1-\alpha_0) = m_1 + m_2$

ولكن $k = m_1 - m_2$ حيث $k$ عدد صحيح موجب

بالجمع

$$\therefore 2m + \alpha_0 = 1 + k$$

$$\therefore y_2 = y_1 \int \frac{\chi(x)}{x^{k+1}} dx$$

$\chi(x)$ يمكن كتابتها على الصورة $\lambda x^k + \chi^x(x)$ حيث $\chi^x(x)$ متسلسلة لا نهائية.

$$y_2 = y_1 \int \left\{ \frac{\lambda x^k}{x^{k+1}} + \frac{\chi^x(x)}{x^{k+1}} \right\} dx$$

$$= \lambda y_1 \ln x + \chi^{"}(x)$$

حيث $\chi^{"}(x)$ متسلسلة لا نهائية.

## الحالة الأولي:

جذرا معادلة الأسس مختلفان بعدد غير صحيح.

**مثال (٦):** حل المعادلة التفاضلية:

$$4xy'' + 2y' + y = 0$$

بالقرب من $x = 0$

**الحلـ:**

يمكن كتابة المعادلة التفاضلية على الصورة

$$y'' + \frac{1}{2x} y' + \frac{1}{4x} y = 0$$

$$y'' + \varphi(x) y' + \psi(x) y = 0$$

$$\therefore x\,\varphi(x) = x\left(\frac{1}{2x}\right) = \frac{1}{2},$$

$$x^2\psi(x) = x^2\left(\frac{1}{4x}\right) = \frac{x}{4}$$

إذن $x = 0$ نقطة شاذة منتظمة.

نفرض أن الحل على الصورة

$$y = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{r+m}, \qquad (a_0 \neq 0)$$

$$\therefore y' = \sum_{r=0}^{\infty} a_r\,(r+m)x^{r+m-1}$$

$$y'' = \sum_{r=0}^{\infty} a_r\,(r+m)(r+m-1)x^{r+m-2}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية

$$\therefore 4\sum_{r=0}^{\infty} a_r\left(r+m\right)\left(r+m-1\right)x^{r+m-1}+$$

$$+2\sum_{r=0}^{\infty} a_r\left(r+m\right)x^{r+m-1}+\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{r+m}=0$$

$$\therefore \sum_{r=0}^{\infty}\left\{4a_r\left(r+m\right)\left(r+m-1\right)+2a_r\left(r+m\right)\right\}x^{r+m-1}$$

$$+\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{r+m}=0$$

$$\therefore \sum_{r=0}^{\infty} 2a_r\left(r+m\right)\left(2r+2m-1\right)x^{r+m-1}+\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{r+m}=0$$

بمساواة معامل أصغر قوى $\left(x^{r+m}\right)$

$$a_{r+1}\left(r+1+m\right)\left(2r+2m+1\right)+a_r=0$$

$$a_{r+1}=-\frac{1}{2\left(r+m+1\right)\left(2r+2m+1\right)}a_r$$

(٢) بوضع $m=0$

$$a_{r+1}=-\frac{1}{2\left(r+1\right)\left(2r+1\right)}a_r$$

$$\therefore a_1=-\frac{1}{2.1.1}a_0=-\frac{1}{2!}a_0$$

$$a_2=-\frac{1}{2.2.3}a_1=-\frac{1}{4.3}.-\frac{1}{2!}a_0=-\frac{1}{4!}a_0$$

$$a_3=-\frac{1}{2.3.2}a_2=-\frac{1}{6.5.4!}a_0=-\frac{1}{6!}a_0$$

**وهكذا ...**

الحل الأول هو:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots \\ &= a_0 - \frac{a_0}{2!} x + \frac{a_0}{4!} x^2 - \frac{a_0}{6!} x^3 + \ldots. \\ &= a_0 \left( 1 - \frac{1}{2!} x + \frac{1}{4!} x^2 - \frac{1}{6!} x^3 + \ldots. \right) \\ &= a_0 \cos \sqrt{x} \end{aligned}$$

بوضع $m = -\frac{1}{2}$

$$a_{r+1} = -\frac{1}{(2\gamma+3)(2\gamma+2)} a_r$$

$$\therefore a_1 = -\frac{1}{3.2} a_0 = -\frac{1}{3!} a_0$$

$$a_2 = -\frac{1}{4.5} a_1 = -\frac{1}{5.4.3} .a_0 = -\frac{1}{5!} a_0$$

$$a_3 = -\frac{1}{6.7} a_2 = -\frac{1}{6.7.5!} a_0 = -\frac{1}{7!} a_0$$

**وهكذا ...**

الحل الثاني هو $y_2$ يمكن ايجادة بالطريقة الآتية:

$$\begin{aligned} y_2 &= \sum_{r=0}^{\infty} a_\gamma x^{r-\frac{1}{2}} \\ &= a_0 x^{1/2} + a_1 x^{3/2} + a_2 x^{5/2} + a_3 x^{7/2} + \ldots \\ &= a_0 x^{1/2} - \frac{1}{3!} a_0 x^{3/2} - \frac{1}{5!} a_0 x^{5/2} - \frac{1}{7} a_0 x^{7/2} + \ldots \\ &= a_0 \left[ \sqrt{x} - \frac{1}{3!} \left( \sqrt{x} \right)^3 + \frac{1}{5!} \left( \sqrt{x} \right)^5 - \frac{1}{7!} \left( \sqrt{x} \right)^7 + \ldots \right) \\ &= a_0 \; Sin \sqrt{x} \end{aligned}$$

إذن الحل العام يعطى من

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 \cos \sqrt{x} + c_2 Sin \sqrt{x}$$

**مثال (٧):** أوجد حل المعادلة التفاضلية:

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - v^2\right)y = 0$$

بالقرب من $x = 0$ إذا علم أن $2v$ عدد غير صحيح (معادلة بيسل من الرتبة $v$

**الحل:**

نفرض أن الحل على الصورة

$$y = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{r+m}, \qquad \left(a_0 \neq 0\right)$$

$$\therefore y' = \sum_{r=0}^{\infty} a_r \left(r+m\right) x^{r+m-1}$$

$$y'' = \sum_{r=0}^{\infty} a_r \left(r+m\right)\left(r+m-1\right) x^{r+m-2}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاة نحصل على

$$\sum_{r=0}^{\infty} \left\{a_r \left(r+m\right)\left(r+m-1\right) - a_r \left(r+m\right) - v^2 a_r\right\} x^{r+m} + \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{r+m2} = 0$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r \left\{\left(r+m\right)^2 - v^2\right\} x^{r+m} + \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{r+m+2} = 0$$

يمكن كتابة المعادلة السابقة على الصورة

بوضع $r = 0,1$ في الحد الأول في المعادلة السابقة

$$\therefore a_0 \left(m^2 - v^2\right) x^m + a_1 \left\{\left(1+m\right)^2 - v^2\right\} x^{m+1}$$

$$+ \sum_{r=2}^{\infty} a_r \left\{\left(r+m\right)^2 - v^2\right\} x^{r+m} + \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{r+m+2} = 0$$

بوضع $r+2$ بدلا من $r$ في الحد الثالث من المعادلة السابقة

$$\therefore a_0\left(m^2-v^2\right)+a_1\left\{(1+m)^2-v^2\right\}x^{m+1}$$

$$+\sum_{r=2}^{\infty}a_{r+2}\left\{(r+2+m)-v^2\right\}x^{r+m+2}$$

$$+\sum_{r=0}^{\infty}a_r x^{r+m+2}=0$$

بمساواة معامل $x^m$ بالصفر

$$\therefore a_0\left(m^2-v^2\right)=0$$

$$\therefore m=\pm v$$ (لأن $(a_0\neq 0)$).

بمساواة معامل $x^{m+1}$ بالصفر نحصل على

$$a_1\left\{(1+m)^2-v^2\right\}=0$$

$$\therefore a_1=0$$

لأن $(1+m)^2\neq r^2$ من الفرض

بمساواة المعامل الحد العام $x^{\gamma+m+2}$ بالصفر

$$\therefore a_{r+2}\left\{(r+m+2)^2-v^2\right\}+a_r=0$$

$$\therefore a_{r+2}=-\frac{1}{(r+m+2)^2-v^2}a_\gamma$$

(i) بوضع $m=r$

$$\therefore a_{\Upsilon+2}=-\frac{1}{(\Upsilon+r+2)^2-r^2}a_\Upsilon$$

$$=-\frac{1}{(\Upsilon+2v+2)(\Upsilon+2)}a_\Upsilon$$

$$\therefore a_2=-\frac{1}{(2+2r)(2)}a_0=-\frac{1}{4(1+r)}a_0$$

$$\therefore a_4 = -\frac{1}{(4+2r).4}a_2 = -\frac{1}{\gamma(2+r)}a_0$$
$$= \frac{1}{4.8(1+r)(2+r)}a_0$$

$$\therefore a_6 = -\frac{1}{(6+2r).6}a_4 = -\frac{1}{12(3+r)}a_4$$
$$\therefore a_6 = -\frac{1}{4.8.12(1+r)(2+r)(3+r)}a_0$$

**وهكذا ...**

بما أن $a_1 = 0$ إذن $a_3 = a_5 = a_7 = \ldots = 0$ ، فإن الحل الأول هو

$$y_1 = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{\Upsilon+r}$$
$$= a_0 x^r \left(1 - \frac{1}{4(1+r)}x^2 + \frac{1}{4.8(1+r)(2+r)}x^4\right.$$
$$\left. - \frac{1}{4.8.12(1+r)(2+r)(3+r)}x^6 + \ldots\right.$$

(ii) بوضع $m = -r$ نجد أن الحل الثاني $y_2$ يعطى من

$$y_2 = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{\Upsilon-r}$$
$$= a_0 x^{-\gamma} \left(1 - \frac{1}{4(1-r)}x^2 + \frac{1}{4.8(1-r)(2-r)}x^4\right.$$
$$\left. - \frac{1}{4.8.12(1-r)(2-r)(3-r)}x^6 + \ldots\right.$$

إذن الحل العام يكون على الصورة

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

**الحالة الثانية:**

جذرا معادلة الأسس متساوية (يتضح من المثال الآتي).

**مثال (٨):** اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$xy'' + y' + by = 0$$

بالقرب من $x = 0$

**الحل:**

وجدنا في مثال(4) أنه إذا كان الحل

$$y = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{\Upsilon + m}$$

فإننا بالتفاضل والتعويض ومقارنة المعاملات (معامل أصغر قوى بالصفر)

معادلة الأسس

$$\therefore m = 0.0, \quad a_0 m^2 = 0$$

ومساواة معامل $x^{\Upsilon+m}$ بالصفر كانت

$$a_{\Upsilon+1} = \frac{-b}{(\Upsilon + m + 1)^2} a_{\Upsilon+1}$$

فإذا أبقينا m دون أن نعوض عن قيمتها بالصفر فإن

$$a_{\Upsilon+1} = \frac{(-b)^{\Upsilon+1}}{(\Upsilon+1+m)^2 (\Upsilon+m)^2 (\Upsilon-1+m)^2 \ldots (1+m)^2} a_0$$

$$a_{\Upsilon} = \frac{(-b)^{\Upsilon}}{(\Upsilon+m)^2 (\Upsilon+m-1)^2 \ldots (1+m)^2} a_0$$

الحل الأول هو $y_1$

$$y_1=\sum_{\Upsilon=0}^{\infty}a_\Upsilon x^{\Upsilon+m}$$

$$y_1=\sum_{\Upsilon=0}^{\infty}\frac{(-b)^{\Upsilon}}{(\Upsilon+m)^2(\Upsilon+m-1)^2\dots(m+1)^2}a_0x^{\Upsilon+m}$$

(عندما m=0)

بالتعويض في المعادلة التفاضلية عن قيم $y_1, y_1', y_1''$ ومقارنة المعاملات نجد أن جميع المعاملات تتقدم الا معامل الحد الأول وهو $a_0m^2x^{m-1}$ .

المعادلة تصبح

$$xy_1''+y_1'+by_1=a_0m^2x^{m-1}$$

بمفاضلة هذه المعادلة جزئيا بالنسبة إلى $m$

$$\therefore x\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial y_1}{\partial m}\right)+\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial y_1}{\partial m}\right)+b\left(\frac{\partial y_1}{\partial m}\right)$$
$$=a_0\frac{\partial}{\partial m}\left(m^2x^{m-1}\right)$$
$$=a_0\left(2mx^{m-1}+m^2x^{m-1}\ln x\right)$$

إذن الطرف الأيسر يتقدم عند $m=0$

إذن يكون

$$\therefore\left|\frac{\partial y_1}{\partial m}\right|_{m=0}$$

حل آخر للمعادلة التفاضلية

بما أن

$$y_1=\sum_{\Upsilon=0}^{\infty}a_\Upsilon x^{\Upsilon+m}$$

$$\therefore \frac{\partial y_1}{\partial m} = x^m \sum_{\Upsilon=0}^{\infty} \frac{\partial a_\Upsilon}{\partial m} x^\Upsilon + x^m \ln x \sum_{\Upsilon=0}^{\infty} a_\Upsilon x^\Upsilon$$

$$= \sum_{\Upsilon=0}^{\infty} \frac{\partial a_\Upsilon}{\partial m} x^{\Upsilon+m} + y_1 \ln x$$

$$\therefore a_\Upsilon = \frac{(-b)^\Upsilon}{(\Upsilon+m)^2 (\Upsilon+m-1)^2 \ldots (m+1)^2} a_0$$

نفرض أن:

$$z = \sum_{\Upsilon=0}^{\infty} \frac{1}{(\Upsilon+m)^2 (\Upsilon+m-1)^2 \ldots (m+1)^2}$$

$$\therefore \ln z = -2\left[\ln(\Upsilon+m) + \ln(\Upsilon+m-1) + \ldots + \ln(m+1)\right]$$

$$\therefore \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial m} = -2\left(\frac{1}{\Upsilon+m} + \frac{1}{\Upsilon+m-1} + \ldots + \frac{1}{m+1}\right)$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial m} = \frac{-2}{(\Upsilon+m)^2 (\Upsilon+m-1)^2 \ldots (m+1)^2} \;,\; \frac{1}{\Upsilon+m} + \frac{1}{\Upsilon+m-1} + \ldots + \frac{1}{m+1}$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial m}\Big|_{m=0} = \frac{-2}{\Upsilon^2 (\Upsilon-1)^2 \ldots,^2}\left(\frac{1}{\Upsilon} + \frac{1}{\Upsilon-1} + \ldots \frac{1}{1}\right)$$

$$= \frac{-2}{(\Upsilon!)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{\Upsilon}\right)$$

إذن الحل الثاني يعطى من:

$$y_2 = \left|\frac{\partial y_1}{\partial m}\right|_{m=0}$$

$$= y_1 \ln x + \sum_{\Upsilon=0}^{\infty} (-2)\frac{(-b)^\Upsilon}{(\Upsilon!)^2} a_0 \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{\Upsilon}\right) x^\Upsilon$$

$$= y_1 \ln x - 2a_0 \sum_{\Upsilon=0}^{\infty} \frac{(-b)^\Upsilon}{\Upsilon!}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{\Upsilon}\right) x^\Upsilon$$

إذن الحل العام يعطى من المعادلة

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

## (ج)الحالة الثالثة:

جذرا معادلة الأسس مختلفان بعدد صحيح

**مثال (٨):** اوجد الخل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y'' + xy = 0$$

بالقرب من $x = 0$

**الحل:**

نفرض أن الحل على الصورة

$$y = \sum_{\gamma=0}^{\infty} a_\gamma x^{\gamma+m}$$

بالتفاضل نحصل على

$$y'' = \sum_{\gamma=0}^{\infty} a_\gamma (\gamma+m)(\gamma+m-1) x^{\gamma+m-2}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية

$$\therefore \sum_{\gamma=0}^{\infty} a_\gamma (\gamma+m)(\gamma+m-1) x^{\gamma+m-2}$$

$$= \sum_{\gamma=0}^{\infty} a_\gamma x^{\gamma+m+1}$$

والتي تعطى

$$a_0 m(m-1)x^{m-2} + a_1 m(m+1)x^{m-1} +$$

$$+a_2(m+2)(m+1)x^m + \sum_{\gamma=3}^{\infty} a_\gamma (\gamma+m)(\gamma+m-1) x^{\gamma+m-2}$$

$$-\sum_{\gamma=0}^{\infty} a_\gamma x^{\gamma+m+1} = 0$$

نضع $\gamma + 3$ بدلاً من $\gamma$ في المجموع الأول (الحد الرابع)

$$\therefore a_0 m(m-1)x^{m-2} + a_1 m(m+1)x^{m-1}$$
$$+a_2(m+2)(m+1)x^m$$
$$+\sum\left\{(\gamma+m+3)(\gamma+m+2)a_{\gamma+3} - a_\Upsilon\right\}x^{\gamma+m-1} = 0$$

بمساواة معاملات قوى x بالصفر نحصل على

$$a_0 m(m-1) \qquad (1)$$

$$a_1(m+1)m = 0 \qquad (2)$$

$$a_2(m+2)(m+1) = 0 \qquad (3)$$

$$a_{\gamma+3} = \frac{a_\gamma}{(\gamma+m+3)(\gamma+m+2)}, \quad (\gamma = 0,1,2,\ldots) \qquad (4)$$

بما أن $a_0 \neq 0$ من المعادلة (1) نحصل على:

في حالة $m = 0$؛ من المعادلة (2) إذن $a_1$ ثابت اختياري.

ومن المعادلة (3) نحصل على $a_2 = 0$.

ومن المعادلة (4)

$$\therefore a_3 = \frac{a_0}{3.2}$$

$$a_4 = \frac{a_1}{4.3}$$

$$a_5 = \frac{a_2}{5.4} = 0$$

$$a_6 = \frac{a_3}{6.5} = \frac{a_0}{6.5.4.3}$$

$$a_7 = \frac{a_4}{7.6} = \frac{a_1}{7.6.4.3}$$

$$a_8 = \frac{a_5}{8.7} = 0$$

**وهكذا ...**

الحل للمعادلة التفاضلية المناظرة m = 0 هو

$$y = a_0 + a_1 x + \frac{a_0}{3.2} x^3 + \frac{a_1 x^4}{3.4} + \frac{a_0}{6.5.3.2} x^6 + + \frac{a_1}{7.8.4.3} x^7 + .......)$$

$$= a_0 \left( 1 + \frac{x^3}{3.2} + \frac{x^6}{6.5.3.2} + ... \right) + + a_1 \left( x + \frac{x^4}{4.3} + \frac{x^7}{7.6.4.3} + ... \right)$$

حيث $a_1, a_0$ ثوابت اختيارية

في حالة m = 1: من المعادلات (1)– (4) نحصل على $a_1 = a_2 = 0$ ومن ثم

$$a_3 = \frac{a_0}{4.3}, \qquad a_4 = \frac{a_1}{5.4}, \qquad a_5 = \frac{a_2}{6.5} = 0$$

$$a_6 = \frac{a_3}{7.6} = \frac{a_0}{7.6.4.3}, \qquad a_7 = \frac{a_4}{8.7} = 0$$

$$a_8 = \frac{a_5}{9.8} = 0, \qquad a_9 = \frac{a_6}{10.9} = \frac{a_0}{10.9.7.4.3}$$

الحل المناظر لـ m = 1 يعطى من

$$y = x\,(a_0 + \frac{a_0}{4.3} x^3 + \frac{a_0}{7.6.4.3} x^7 + ...)$$

**ملحوظة**: الحل السابق هو عبارة عن جزء من الحل السابق (الحل عندما $m = 0$) (لاحظ المتسلسلة الثانية والحل الأول يعتبر حل عام للمعادلة التفاضلية المعطاة لأنه تحتوى على ثابتين اختياريين $a_2$ ,$a_1$.

## ٢/٥- حل المعادلات التفاضلية باستخدام المتسلسلات اللانهائية:

ليس من السهل حل كل المعادلات التفاضلية بالطرق السابقة حتى ولو كانت من الرتبة الأولى. وفي الأبواب السابقة قدمنا طرقاً خاصة لإيجاد حلول لبعض المعادلات التفاضلية ذات صيغة

محددة مثل المعادلات التفاضلية ذات المعاملات الثابتة أو معادلات يمكن تحويلها إلى أخرى ذات معاملات ثابتة أو الحصول على الحل الخاص للمعادلة المختزلة ... الخ. لذلك لابد من البحث عن طرق أخرى لإيجاد حلول بعض هذه المعادلات.

وأهم هذه الطرق من الناحية النظرية هي الحل في صورة متسلسلة لانهائية، وهناك طرق أخرى مثل الحلول التقريبية سواء كانت عددية أم متسلسلات تقريب.

وفي هذا الباب نقدم طريقة تايلور وطريقة فروبينيوس لحل المعادلات التفاضلية في صورة متسلسلة لانهائية.

## أولاً: طريقة تايلور:

مفكوك تايلور للدالة $y=y(x)$ بالقرب من $x=x_0$ هو:

$$y(x)=y(x_0)+(x-x_0)y'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}y''(x_0)+....=\sum_{k=0}\frac{(x-x_0)^k}{k!}y^{(k)}(x_0)$$

إذا وضعنا $x_0=0$ في مفكوك تايلور فإننا نحصل على مفكوك ماكلورين:

$$y(x)=y(0)+xy'(0)+\frac{x^2}{2!}y''(0)+\frac{x^3}{3!}y'''(0)+.....=\sum_{k=0}\frac{x^k}{k!}y^{(k)}(0)$$

ولحل المعادلة التفاضلية $y''+\varphi(x)y'+\psi(x)y=0$

نحسب المقادير $y''(x_0), y'''(x_0), y^{(4)}(x_0), ...$ بمعلومية $y(x_0), y'(x_0)$ وذلك بالتفاضل المتتالي والتعويض عن $x=x_0$، وباستخدام مفكوك تايلور نحصل على $y$ التي هي حل للمعادلة التفاضلية المعطاه.

**مثال (١):** اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$y''=x^2+y^2$، علماً بأن $y(0)=y'(0)=1$

**الحل:**

$$y'' = x^2 + y^2 \qquad \therefore \quad y''(0) = 1$$
$$y''' = 2x + 2yy' \qquad \therefore \quad y'''(0) = 2(1)(1) = 2$$
$$y^{(4)} = 2 + 2yy'' + 2y'^2 \qquad \therefore \quad y^{(4)}(0) = 2 + 2(1)(1) + 2(1) = 6$$
$$y^{(5)} = 2yy''' + 6y'y'' \qquad \therefore \quad y^{(5)}(0) = 2(1)(2) + 6(1)(1) = 10$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\begin{aligned} y &= 1 + x + \frac{x^2}{2!}(1) + \frac{x^3}{3!}(2) + \frac{x^4}{4!}(6) + \frac{x^5}{5!}(10) + \ldots. \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{12} + \ldots. \end{aligned}$$

**مثال (٢):** اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$y'' - (x-2)y' + 2y = 0$ بالقرب من $x = 2$

**الحل:**

نفرض أن $y(2) = c_1, \quad y'(2) = c_2$

بذلك يكون $y''(2) = -2y(2) = -2c_1$

بتفاضل المعادلة التفاضلية $n$ من المرات باستخدام نظرية ليبنز نجد أن:

$$y^{(n+2)}(x) - (x-2)y^{(n+1)}(x) - ny^{(n)}(x) + 2y^{(n)}(x) = 0$$

بالتعويض عن $x = 2$ نحصل على:

$$\begin{aligned} &y^{(n+2)}(x) = (n-2)y^{(n)}(x), \\ &y^{(3)}(x) = -y'(x) = -c_2, \qquad y^{(4)}(x) = 0, \\ &y^{(5)}(x) = y'''(x) = -c_2, \qquad y^{(6)}(x) = 0, \ldots \end{aligned}$$

وبالتعويض في مفكوك تايلور يكون الحل العام هو:

$$y(x)=c_1+(x-2)c_2-\frac{(x-2)^2}{2!}2c_1-\frac{(x-2)^3}{3!}c_2+0-\frac{(x-2)^5}{5!}c_2+\ldots$$
$$=c_1[1-(x-2)^2]+c_2\left[(x-2)-\frac{1}{6}(x-2)^3-\frac{(x-2)^5}{5!}-\ldots\right]$$

**مثال (٣):** اوجد حل المعادلة التفاضلية:

$$xy''+(x+1)y'+2y=0$$

في صورة متسلسلة لانهائية بالقرب من $x=0$ إذا كانت $y(c)=0$.

**الحل:**

بتفاضل هذه المعادلة **n** من المرات مستخدما نظرية ليبنز نحصل على

$$xy^{(n+2)}(x)+(1+n+x)y^{(n+1)}(x)+(n+2)y^{(n)}(x)=0$$

ومنها نحصل على العلاقة:

$$y_{(0)}^{(n+1)}=-\frac{n+2}{n+1}y_{(0)}^{(n)}$$
$$\therefore y'(0)=-2y(0)=-2c,\qquad y''(0)=\frac{-3}{2}y'(0)=3c$$
$$y(0)=\frac{-4}{3}y''(0)=-4y(0)=-4c,\qquad y^{(4)}=-5c$$

وبالتعويض في مفكوك ماكلورين نحصل على

$$y=c\left[1-2x+\frac{3}{2!}x^2-\frac{4}{3!}x^3-\frac{5}{4!}x^4+\ldots\right]$$

حيث **c** ثابت اختياري.

وبما أن المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية فيكون هذا الحل غير كامل (عام) لأنه لا يحتوي إلا على ثابت اختياري واحد.

من الأمثلة السابقة نلاحظ أن الحل بطريقة تايلور (أو ماكلورين) ليس عملياً وقد يكون شاقاً في بعض الحالات ، ويمكن حل مثل هذه المعادلات على هيئة متسلسلة لا نهائية على الصورة:

$$y = x^{\nu}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots), \qquad a_0 \neq 0$$

$$= x^{\nu} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\nu}$$

$$\therefore \quad y' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\nu) x^{n+\nu-1}, \qquad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\nu)(n+\nu-1) x^{n+\nu-2}$$

وبالتعويض عن $y\,,\,y',\,y''$ في المعادلة التفاضلية (مثال (٣))

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\nu)(n+\nu-1) x^{n+\nu-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\nu) x^{n+\nu} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\nu) x^{n+\nu-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\nu} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\nu)^2 x^{n+\nu-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\nu+2) x^{n+\nu} = 0$$

بمساواة معامل أصغر قوة $x^{\nu-1}$ بالصفر:

$$\therefore \; a_0 \nu^2 = 0 \quad \therefore \; \nu^2 = 0 \quad \therefore \nu = 0$$

بمساواة معامل الحد العام ( $x^{n+\nu}$ ) بالصفر:

$$\therefore \; a_{n+1}(n+\nu+1)^2 + a_n (n+\nu+2) = 0$$

$$\therefore \; a_{n+1} = -\frac{n+\nu+2}{(n+\nu+1)^2} \; a_n$$

عندما $\nu = 0$ نجد أن

$$a_{n+1} = -\frac{n+2}{(n+1)^2} \quad a_n$$

$$\therefore \quad a_1 = -2a_0 \quad , \quad a_2 = -\frac{3}{4}a_1 = \frac{3}{2}a_0, \quad a_3 = -\frac{4}{9}a_2 = -\frac{4}{6}a_0, ....$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ...$$

$$= a_0 (1 - 2x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{6}x^3 - ....)$$

وهو نفس الحل السابق . وإذا رمزنا لهذا الحل بالرمز $y_1$ فإنه يمكن الحصول على حل آخر $y_2$ مستقلاً عن $y_1$ يعطى من

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} \ e^{-\int \phi(x) dx} \quad dx$$

حيث $\phi(x)$ هو معامل $y'$ بعد جعل معامل $y''$ الوحده

$$\therefore y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int \frac{1+x}{x} dx} \ dx = y_1 \int \frac{e^{-x}}{x y_1^2} \ dx$$

ويعطى الحل العام للمعادلة التفاضلية في الصورة

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 y_1 + c_2 y_1 \int \frac{e^{-x}}{x y_1^2} \quad dx$$

## ثانياً: طريقة فروبينيوس:

لحل المعادلة التفاضلية (3) باستخدام طريقة فروبينيوس، وبفرض أن $x = 0$ نقطة عادية أو شاذة منتظمة لها ( إذا كانت $x = x_0$ نقطة عادية أو شاذة منتظمة نضع $X = x - x_0$ وبذلك تكون $x = 0$ نقطة عادية أو شاذة منتظمة).

نفرض أن حل المعادلة التفاضلية

$$y'' + \varphi(x) y' + \psi(x) y = 0 \qquad (1)$$

على الصورة:

$$y = x^{\nu}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ...) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\nu}, \qquad a_0 \neq 0 \qquad (2)$$

حيث $\nu$ عدد حقيقي

$$\therefore y' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\nu) x^{n+\nu-1}, \qquad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\nu)(n+\nu-1) x^{n+\nu-2}$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية

$$y'' + \varphi(x) y' + \psi(x) y = 0$$

نحصل على

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\nu)(n+\nu-1) x^{n+\nu-2} + \phi(x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\nu) x^{n+\nu-1} + \psi(x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\nu} = 0$$

*or*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n [(n+\nu)(n+\nu-1) + x(n+\nu)\phi(x) + x^2 \psi(x)] x^{n+\nu-2} = 0$$

وحيث أن x = 0 نقطة شاذة منتظمة فيكون كل من $x\phi(x)$ , $x^2\psi(x)$ يمكن كتابتها على الصورة

$$x\phi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + ...$$

$$x^2 \psi(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + ... \qquad (3)$$

و بالتعويض عن $x^2\psi(x), x\phi(x)$ بهاتين المتسلسلتين، وبمساواة معامل أصغر قوة $(x^{\nu-2})$ بالصفر (أي عندما n=0) نحصل على

$$a_0[\nu(\nu-1) + \alpha_0 \nu + \beta_0] = 0 \qquad , a_0 \neq 0$$

$$\therefore \nu(\nu-1) + \alpha_0 \nu + \beta_0 = 0$$

أو

$$\nu^2 + (\alpha_0 - 1)\nu + \beta_0 = 0 \qquad (4)$$

وهذه المعادلة من الدرجة الثانية في $\nu$ تسمى معادلة الأسس (Indicial equation)

وهذه المعادلة لها جذران $\nu_1$ , $\nu_2$ وسوف نرى أن واحداً من حلول المعادلة التفاضلية (1) دائماً سيكون في الصورة (2)، وهناك ثلاث صور للحل الثاني المستقل خطياً تبعاً للحالات الثلاث التالية:

**الحالة الأولى**: الجذران $\nu_1, \nu_2$ حقيقيان ومختلفان والفرق بينهما ليس عدداً صحيحاً

**الحالة الثانية:** $\nu_1 = \nu_2$ (الجذران متساويان)

**الحالة الثالثة:** الجذران $\nu_1 = \nu_2$ مختلفان بعدد صحيح

**الحالة الأولى:** الجذران مختلفان والفرق بينهما ليس عدداً صحيحاً:

هي أسهل الحالات والمعادلة (1) لها حلان مستقلان هما $y_1, y_2$ على الصورة

$$y_1 = x^{\nu_1}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots), \qquad a_0 \neq 0$$
$$y_2 = x^{\nu_2}(a_0^* + a_1^* x + a_2^* x^2 + \ldots), \qquad a_0^* \neq 0$$

وبالتعويض في (1) نحدد المعاملات $a_i ,\ a_i^*$

**مثال (١):** اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$2x^2 y'' + 7x(x+1)y' - 3y = 0$$ بالقرب من $x = 0$

**الحل:**

نجد أن $x = 0$ هي نقطة شاذة منتظمة و بالتالي يمكن تطبيق طريقة فروبينيوس . نفرض أن الحل على الصورة

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\nu}, \qquad y' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\nu) x^{n+\nu-1}, \ldots$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاة

$$2x^2\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+\nu)(n+\nu-1)x^{n+\nu-2}\quad +7x(x+1)\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+\nu)x^{n+\nu-1}-3\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+\nu)x^{n+\nu}=0$$

$$\therefore\sum_{n=0}^{\infty}[2(n+\nu)(n+\nu-1)+7(n+\nu)-3]a_nx^{n+\nu}+\sum_{n=0}^{\infty}7a_n(n+\nu)x^{n+\nu+1}=0$$

بمساواة معامل أصغر قوة $(x^{\nu})$ بالصفر

$$[2\nu(\nu-1)+7\nu-3]a_0=0 \qquad a_0\neq 0$$

$$\therefore 2\nu^2+5\nu-3=0 \qquad or \qquad (2\nu-1)(\nu+3)=0$$

$\therefore$ جذرا معادلة الأسس هما $\nu_2=-3$ ، $\nu_1=\frac{1}{2}$ والفرق بينهما $\frac{7}{2}$ ليس عدداً صحيحاً

بمساواة معامل الحد العام $(x^{n+\nu})$ بالصفر

$$a_n[2(n+\nu)(n+\nu-1)+7(n+\nu)-3]\ +7a_{n-1}(n+\nu-1)=0$$

$$\therefore a_n=-\frac{7(n+\nu-1)}{(n+\nu+3)(2n+2\nu-1)}a_{n-1}, \qquad n\geq 1 \qquad (1)$$

عندما $\nu=\frac{1}{2}$ نجد من المعادلة (1) أن

$$a_n=-\frac{7(2n-1)}{2n(2n+7)}a_{n-1}, \qquad n\geq 1$$

$$\therefore a_1=-\frac{7}{18}a_0, \qquad a_2=-\frac{21}{44}a_1=\frac{49}{264}a_0,...$$

وبذلك يكون الحل الأول $y_1$ هو

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+\frac{1}{2}}=a_0x^{\frac{1}{2}}[1-\frac{7}{18}x+\frac{49}{264}x^2......]$$

وعندما $\nu=-3$ نجد أن المعادلة (1) تأخذ الصورة

$$a_n = -\frac{7(n-4)}{n(2n-7)} a_{n-1} \qquad n \ge 1$$

$$\therefore a_1 = -\frac{21}{5} a_0, \qquad a_2 = -\frac{7}{3} a_1 = \frac{49}{5} a_0 \ ,...$$

$$\therefore y_2 = x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x = x a_0 \left(1 - \frac{21}{5} x + \frac{49}{5} x^2 - ...\right)$$

والحل العام للمعادلة التفاضلية هو $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$

حيث $c_1 \ , \ c_2$ ثابتان اختياريان.

**مثال (٢):** اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$4xy'' + 2y' + y = 0$ بالقرب من $x = 0$

**الحل:**

النقطة $x = 0$ نقطة شاذة منتظمة.

نفرض أن الحل على الصورة

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\nu}, \qquad a_0 \ne 0$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية عن $y \ , \ y', \ y''$ نجد أن

$$4\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\nu)(n+\nu-1) x^{n+\nu-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\nu) x^{n+\nu-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\nu} = 0$$

*or*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\nu)(4n+4\nu+2) x^{n+\nu-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\nu} = 0$$

بمساواة معامل أصغر قوة $(x^{\nu-1})$ بالصفر

$$\therefore a_0[\nu(4\nu-2)] = 0 \qquad \therefore \nu = 0 \quad , \nu = \frac{1}{2}$$

والفرق بين جذري معادلة الأسس عدداً ليس صحيحاً.

مساواة معامل الحد العام $(x^{n+\nu})$ بالصفر

$$\therefore a_{n+1}(n+\nu+1)(4n+4\nu+2)+a_n=0$$
$$\therefore a_{n+1}=-\frac{a_n}{2(n+\nu+1)(2n+2\nu+1)}$$

وهذه العلاقة صحيحة لقيم $n=0,1,2,...$ وتسمى بالعلاقة التكرارية للمعاملات

i) بوضع $\nu=0$ في العلاقة التكرارية

$$\therefore a_{n+1}=-\frac{a_n}{2(n+1)(2n+1)}$$
$$\therefore a_1=-\frac{1}{2}a_0,\quad a_2=-\frac{a_1}{12}=\frac{a_0}{4!},\qquad a_3=-\frac{a_2}{30}...$$

والحل الأول للمعادلة هو

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+....$$
$$=a_0(1-\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{4!}-\frac{x^3}{6!}+...)=a_0\cos\sqrt{x}$$

ii) بوضع $\nu=\frac{1}{2}$ في العلاقة التكرارية

$$\therefore a_{n+1}=-\frac{a_n}{(2n+3)(2n+2)}$$
$$\therefore a_1=-\frac{a_0}{3(2)}a_0,\quad a_2=-\frac{a_1}{5(4)}=\frac{a_0}{5!},\qquad a_3=-\frac{a_0}{7!},...$$

وبذلك يكون الحل الثاني هو

$$y_2=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+\frac{1}{2}}=a_0x^{\frac{1}{2}}\left[1-\frac{x}{3!}+\frac{x^2}{5!}-\frac{x^3}{7!}+\dots\right]$$
$$=a_0\left[\sqrt{x}-\frac{(\sqrt{x})^3}{2!}+\frac{(\sqrt{x})^5}{4!}-\frac{(\sqrt{x})^7}{6!}+\dots\right]=a_0\sin\sqrt{x}$$

إذن الحل العام يعطى من

$$y=c_1y_1+c_2y_2=c_1\cos\sqrt{x}+c_2\sin\sqrt{x}$$

**مثال (٣):** اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$x^2y''+xy'+(x^2-m^2)y=0$$

بالقرب من $x=0$ إذا كان $2m$ عدد غير صحيح.

(معادلة بسل التفاضلية من الرتبة الميمية Bessel's equation of order m)

**الحل:**

معادلة بسل التفاضلية لها دور بالغ الأهمية في الرياضيات التطبيقية والفيزياء النظرية والعلوم الهندسية، وتستخدم هذه المعادلة كنموذج رياضي في مجالات شتى كحركة الأمواج والمرونة وحركة السوائل وغير ذلك.

نفرض أن الحل العام هو

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+\nu},\qquad a_0\neq 0$$

وبالتعويض في معادلة بسل نحصل على

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+\nu)(n+\nu-1)x^{n+\nu}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+\nu)x^{n+\nu}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+\nu+2}-m^2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+\nu}=0$$
$$\therefore\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+\nu+m)(n+\nu-m)x^{n+\nu}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+\nu+2}=0$$

بمساواة معامل أصغر قوة $(x^{\nu})$ بالصفر

$$a_0(\nu+m)(\nu-m)=0 \qquad \therefore \nu_1=m \;, \nu_2=-m$$

بمساواة معامل القوة التالية $(x^{\nu+1})$ بالصفر

$$a_1(1+\nu+m)(1+\nu-m)=0 \qquad \therefore a_1=0$$

لأن $(1+\nu+m)(1+\nu-m)\neq 0$

بمساواة معامل الحد العام $(x^{n+\nu})$ بالصفر

$$a_n(n+\nu+m)(n+\nu-m)+a_{n-2}=0$$

$$\therefore a_n=-\frac{a_{n-2}}{(n+\nu+m)(n+\nu-m)}$$

*or*

$$a_{n+2}=-\frac{a_n}{(n+\nu+2+m)(n+\nu+2-m)}$$

i) بوضع $\nu=0$ يكون

$$a_{n+2}=-\frac{a_n}{(n+2+2m)(n+2)}$$

$$\therefore a_2=-\frac{a_0}{2(2+2m)}=-\frac{a_0}{4(1+m)},$$

$$a_4=-\frac{a_2}{4(4+2m)}=\frac{a_0}{4(8)(1+m)(2+m)},$$

$$a_6=-\frac{a_4}{12(3+m)}=-\frac{a_0}{4(8)(12)(1+m)(2+m)(3+m)},$$

$$a_1=a_3=a_5=\dots=0$$

الحل الأول يعطى من

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+\nu_1}=a_0x^m[1-\frac{1}{4(1+m)}x^2+\frac{1}{4(8)(1+m)(2+m)}x^4-\dots]$$

ii) بوضع $-m$ بدلا من m في الحل الأول نحصل على الحل الثاني في الصورة

$$y_2=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n-m} \quad =a_0x^{-m}[1-\frac{1}{4(1-m)}x^2+\frac{1}{4(8)(1-m)(2-m)}x^4-...]$$

ويكون الحل العام لمعادلة بسل التفاضلية من الرتبة الميمية هو $y=c_1y_1+c_2y_2$.

**الحالة الثانية:** الجذران متساويان:

في الحالتين الثانية والثالثة لا يمكن الحصول إلا على حل واحد فقط المناظر لجذر من جذور معادلة الأسس رقم (4)

نعين الحل الأول $y_1$ في الصورة

$$y_1=x^{\nu_1}(a_0+a_1x+a_2x^2+...)$$
$$\therefore y_2=y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int\varphi(x)dx}dx$$
$$=y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int\frac{1}{x}(a_0+a_1x+a_2x^2+...)dx}dx$$
$$=y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-a_0\ln x}e^{-\int(a_1+a_2x+...)dx}dx$$
$$=y_1\int\frac{1}{y_1^2x^{a_0}}\varphi(x)dx$$
$$=y_1\int\frac{\varphi(x)}{\left(x^{\nu_1}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)^2x^{a_0}}dx$$
$$\therefore y_2=y_1\int\frac{1}{x^{2\nu_1+a_0}}\psi(x)dx$$

حيث $\varphi$ (x) متسلسلة لا نهائية

أيضاً (x) $\psi$ متسلسلة لانهائية ولكن من معادلة الأسس رقم (4) نجد أن

$$\nu_1+\nu_2=1-\alpha_0, \qquad \nu_1-\nu_2=r$$

حيث r عدد صحيح أو صفر

$$\therefore 2v_1 + \alpha_0 = 1 + r$$

$$\therefore y_2 = y_1 \int \frac{\psi(x)}{x^{r+1}}\, dx$$

يمكن وضع $\psi(x)$ في الصورة

$$\psi(x) = \lambda x^r + R(x)$$

حيث *R(x)* متسلسلة لانهائية

$$y_2 = y_1 \int \left[ \frac{\lambda}{x} + \frac{R(x)}{x^{r+1}} \right] dx = \lambda y_1 \ln x + S(x)$$

حيث S(x) متسلسلة لانهائية.

**مثال (٤):** اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0$ بالقرب من $x = 0$

(معادلة بسل التفاضلية من رتبة صفر)

**الحل:**

$\psi(x) = 1, \quad \phi(x) = \dfrac{1}{x}$ وبالتالي تكون $x = 0$ نقطة شاذة منتظمة.

نفرض أن الحل على الصورة

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+v}, \qquad a_0 \neq 0$$

وبالتعويض عن $y', y''$ في المعادلة التفاضلية نحصل على

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\nu)^2 x^{n+\nu} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\nu+2} = 0$$

بمساواة معامل أصغر قوة $(x^{\nu})$ بالصفر والتالي له $(x^{\nu+1})$ أيضاً بالصفر نجد أن

$$a_0[\nu(\nu)] = 0 \quad \therefore \nu^2 = 0 \quad \therefore \quad \nu_1 = \nu_2 = 0$$
$$a_1[(1+\nu)^2] = 0 \quad \therefore \quad a_1 = 0$$

بمساواة معامل الحد العام $(x^{n+\nu})$ بالصفر

$$a_n (n+\nu)^2 + a_{n-2} = 0, \qquad \therefore a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n+\nu)^2}$$
$$a_{n+2} = \frac{-a_n}{(n+\nu+2)^2} \tag{1}$$

وهي العلاقة التكرارية للمعاملات

$$\because a_1 = 0 \qquad \therefore a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = 0$$

عندما $\nu = 0$ يكون

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+2)^2}$$
$$\therefore a_2 = -\frac{a_0}{2^2}, \quad a_4 = -\frac{a_2}{4^2} = \frac{1}{2^2 4^2} a_0, \quad \ldots$$

الحل الأول هو

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$
$$= a_0 \left(1 - \frac{1}{2^2} x^2 + \frac{1}{2^2 4^2} x^4 - \ldots\right)$$

لايجاد الحل الثاني بمعلومية الحل الأول $y_1$ نفرض أن

$$y_1 = y_1(x,\nu) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\nu) x^{n+\nu} = a_0 x^{\nu} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\nu) x^{n+\nu}$$

ونعوض عن $y_1(x,\nu)$ في الطرف الأيسر من المعادلة التفاضلية المعطاه مع الأخذ في الاعتبار أن $a_n$ دالة في المتغير $\nu$

$$x^2\frac{d}{dx^2}[y_1(x,\nu)]+x\frac{d}{dx}[y_1(x,\nu)]+x^2y_1(x,\nu)$$
$$=x^2\frac{d}{dx^2}[a_0x^\nu+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n+\nu}]+x\frac{d}{dx}[a_0x^\nu+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(\nu)x^{n+\nu}]+x^2[a_0x^\nu+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n+\nu}]$$
$$=x^2\frac{d}{dx^2}(a_0x^\nu)+x\frac{d}{dx}(a_0x^\nu)=a_0\nu^2x^\nu$$

أي بالتعويض في المعادلة التفاضلية عن $y, y', y''$ ونقارن المعاملات فنجد أن جميع المعاملات تنعدم إلا معامل الحد الأول، وبتفاضل هذه المعادلة جزئياً بالنسبة إلى $\nu$ نحصل على

$$x^2\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial y_1}{\partial\nu}\right)+x\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial y_1}{\partial\nu}\right)+x^2\left(\frac{\partial y_1}{\partial\nu}\right)=a_0\nu^2x^\nu\ln(x)\ +2a_0\nu x\,\nu$$

وبالتعويض عن $\nu=0$ نجد أن الطرف الأيمن ينعدم وبذلك يكون

$$x^2\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial y_1}{\partial\nu}\right)_{\nu=0}\Big|+x\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial y_1}{\partial\nu}\right)\Big|_{\nu=0}+x^2\left(\frac{\partial y_1}{\partial\nu}\right)_{\nu=0}=0$$

وبالتالي يكون $\left(\frac{\partial y_1}{\partial\nu}\right)_{\nu=0}$ حل آخر للمعادلة التفاضلية

$$\therefore y_2=\frac{\partial y_1}{\partial\nu}_{\nu=0},\qquad y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\nu)x^{n+\nu}$$
$$\therefore y_2=x^\nu\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\nu}a_n(\nu)x^n+(x^\nu\ln x)\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\nu)x^n$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\nu}a_n(\nu)x^{n+\nu}+y_1\ln x$$

أي أن: متسلسلة لانهائية + ln x . ( الحل الأول ) = $y_2$

أي أنه إذا كان جذرا معادلة الأسس متساويين وكان $y_1$ الحل الأول للمعادلة التفاضلية فإن $\left(\frac{\partial y_1}{\partial \nu}\right)_{\nu=0}$ حل آخر عند التعويض عن قيمة $\nu = \nu_1$

من العلاقة (1) يكون

$$a_2 = -\frac{a_0}{(\nu+2)^2}, \qquad a_4 = \frac{a_0}{(\nu+2)^2(\nu+4)^2}, \quad a_6 = -\frac{a_0}{(\nu+2)^2(\nu+4)^2(\nu+6)^2}, \ldots$$

نفرض أن $b_1 = \frac{1}{(\nu+2)^2}$

إذن

$$\ln b_1 = -2\ln(\nu+2)$$

$$\frac{1}{b_1}\frac{\partial b_1}{\partial \nu} = \frac{-2}{\nu+2} \qquad \therefore \frac{\partial b_1}{\partial \nu} = \frac{-2}{(\nu+2)^3} \qquad \therefore \frac{\partial b_1}{\partial \nu}_{\nu=0} = \frac{-1}{2^2}$$

ونفرض أن $b_2 = \frac{1}{(\nu+2)^2(\nu+4)^2}$

$$\therefore \ln b_2 = -2\ln(\nu+2) - 2\ln(\nu+4)$$

$$\therefore \frac{1}{b_2}\frac{\partial b_2}{\partial \nu} = \frac{-2}{\nu+2} - \frac{2}{\nu+4}$$

$$\therefore \frac{\partial b_2}{\partial \nu} = \frac{-2}{(\nu+2)^2(\nu+4)^2}\left[\frac{1}{\nu+2} + \frac{1}{\nu+4}\right]$$

$$\therefore \frac{\partial b_2}{\partial \nu}_{\nu=0} = \frac{-2}{4^2 2^2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{-1}{4^2 2^2}\left(1 + \frac{1}{2}\right), \ldots$$

وبالمثل $b_3 = \frac{1}{(\nu+2)^2(\nu+4)^2(\nu+6)^2}$

فيكون $\frac{\partial b_3}{\partial \nu}_{\nu=0} = \frac{-1}{6^2 4^2 2^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$

والحل الثاني $y_2$ يعطى من

$$y_2 = y_1 \ln x + a_0\left(\frac{1}{2^2}x^2 - \frac{1+\frac{1}{2}}{2^2.4^2}x^4 + \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{2^2.4^2.6^2}x^6 - ....\right)$$

ويكون الحل العام هو $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$

والطريقة العامة لحل المعادلة التفاضلية $y'' + \varphi(x)y' + \psi(x)y = 0$ بالقرب من النقطة الشاذة المنتظمة $x = 0$ وعندما يكون جذرا معادلة الأسس متساويان نوجد أولاً معادلة الأسس ونفرض أن جذراها هما $\nu_1$ , $\nu_2$ حيث $\nu = \nu_1 = \nu_2$

$$\therefore y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\nu} = x^{\nu}[a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\nu)x^n]$$

وبالتعويض عن $y, y', y''$ في المعادلة التفاضلية نجد أن

$$x^2 y_1'' + x(x\varphi(x))y_1' + x^2\psi(x)y_1 = a_0 x^{\nu}(\nu - \nu_1)^2$$

$$\therefore x^2 \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial y_1}{\partial \nu}\right) + x(x\varphi(x))\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial y_1}{\partial \nu}\right) + x^2\psi(x)\frac{\partial y_1}{\partial \nu}$$

$$= a_0[x^{\nu}(\ln x)(\nu - \nu_1)^2 + 2(\nu - \nu_1)x^{\nu}]$$

وبالتعويض عن $\nu = \nu_1$ يكون الطرف الأيمن في هذه المعادلة يساوي الصفر.

أي أن $\left(\frac{\partial y_1}{\partial \nu}\right)_{\nu=\nu_1}$ حل للمعادلة التفاضلية أي أن الحل الثاني هو

$$y_2 = \frac{\partial y_1}{\partial \nu}_{\nu=\nu_1} = y_1 \ln x + x^{\nu}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial a_n}{\partial \nu}_{\nu=\nu_1} x^n$$

الحل الثاني = الحل الأول . ln x + متسلسلة لا نهائية.

**مثال (٥):** حل المعادلة التفاضلية:

$$x^2 y'' + 3xy' + (1 - 2x)y = 0$$ بالقرب من $x = 0$

**الحل:**

النقطة $x=0$ نقطة شاذة منتظمة.

نفرض أن الحل على الصورة

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+\nu}$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+\nu+1)x^{n+\nu}-\sum_{n=0}^{\infty}2a_n x^{n+\nu+1}=0$$

بمساواة معامل أصغر قوة ($x^{\nu}$) بالصفر

$$(\nu+1)^2=0 \qquad \therefore \nu=-1\ ,\ 1$$

بمساواة الحد التالي ($x^{\nu+1}$) بالصفر

$$(\nu+2)^2 a_1-2a_0=0, \qquad a_1\neq 0$$

بساواة معامل الحد العام ($x^{n+\nu}$) بالصفر

$$a_n=\frac{2a_{n-1}}{(n+\nu+1)^2}, \qquad n\geq 1$$

$$\therefore a_1=\frac{2a_0}{(\nu+2)^2}, \quad a_2=\frac{2a_1}{(\nu+3)^2}=\frac{4a_0}{(\nu+2)^2(\nu+3)^2},\ldots$$

$$a_n=\frac{2^n a_0}{(\nu+2)^2(\nu+3)^2\ldots(\nu+n+1)^2}$$

عندما يكون الحل الأول هو $y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n-1}=x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n}$

حيث:

$$a_n = \frac{2^n a_0}{1^2.2^2.3^2...n^2} = \frac{2^n a_0}{(n!)^2}$$

$$\therefore a_1 = \frac{2a_0}{1^2}, \quad a_2 = \frac{2^2 a_0}{1^2.2^2}, \quad a_3 = \frac{2^3 a_0}{1^2.2^2.3^2}, ....$$

$$\therefore y_1 = a_0 x^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n x^n}{(n!)^2}$$

ويكون الحل الثاني

$$y_2 = \left[\frac{\partial}{\partial \nu} y_1(x,\nu)\right]_{\nu=-1}$$

$$= y_1 \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial a_n}{\partial \nu}_{\nu=-1} x^{n-1}$$

نعلم أن

$$a_n(\nu) = \frac{2^n a_0}{[(\nu+2)(\nu+3)...(\nu+n+1)]^2}$$

$$\therefore \ln a_n(\nu) = n \ln 2 + \ln a_0 - 2[\ln(\nu+2) + \ln(\nu+3) + ... + \ln(\nu+n+1)]$$

وبالتفاضل جزئياً بالنسبة لـ $\nu$ يكون

$$\frac{\partial a_n}{\partial \nu} = -2a_n(\nu)[\frac{1}{\nu+2} + \frac{1}{\nu+3} + .... + \frac{1}{\nu+n+1}]$$

$$\therefore \frac{da_n}{d\nu}_{\nu=-1} = -2\frac{2^n}{(n!)^2}[1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}]$$

$$\therefore y_2 = y_1 \ln x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1} x^n}{(n!)^2} H_n$$

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$$

ويكون الحل العام هو

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2, \qquad x \geq 0$$

الحالة الثالثة: جذرا معادلة الأسس مختلفان والفرق بينهما عدد صحيح:

**أ) إذا كان أحد جذري معادلة الأسس يؤدي إلى معاملات غير محددة**

**مثال (٦):** حل معادلة لجندر التفاضلية من الرتبة الميمية الآتية

$$(1-x^2)y''-2xy'+m(m+1)y=0:$$

بالقرب من نقطة الأصل حيث m ثابت حقيقي.

**الحل:**

نفرض أن الحل على الصورة $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+\nu}$

وبالتعويض عن $y\;,y',\;y''$ في معادلة لجندر التفاضلية

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+\nu)(n+\nu-1)x^{n+\nu-2}-\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+\nu)(n+\nu-1)x^{n+\nu}-2\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+\nu)x^{n+\nu}+m(m+1)\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+\nu}=0$$

$$\therefore\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+\nu)(n+\nu-1)x^{n+\nu-2}-\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+\nu+m+1)(n+\nu-m)x^{n+\nu}=0$$

بمساواة معامل أصغر قوة $(x^{\nu-2})$ بالصفر

$$a_0\nu(\nu-1)=0 \qquad \nu_1=0,\nu_2=1$$

بمساواة معامل القوة التالية $(x^{\nu-1})$ بالصفر يكون

$$a_1\nu(\nu+1)=0$$

إذن $a_1$ كمية غير محدودة عندما $\nu=0$

بمساواة معامل الحد العام بالصفر نحصل على

$$a_{n+2}(n+\nu+2)(n+\nu+1)-a_n(n+\nu+m+1)(n+\nu-m)=0$$
$$\therefore a_{n+2}=\frac{(n+\nu+m+1)(n+\nu-m)}{(n+\nu+2)(n+\nu+1)}\ a_n$$

الحل المناظر لـ $\nu=0$ هو حل مباشر

$$\therefore a_{n+2}=\frac{(n+m+2)(n-m+1)}{(n+3)(n+2)}\ a_n$$

فيكون

$$a_2=\frac{(m+2)(1-m)}{(3)(2)}\ a_0,\qquad a_4=\frac{(4+m)(3-m)}{(5)(4)}\ a_2$$
$$\therefore a_4=\frac{(3-m)(4+m)(1-m)(2+m)}{5!}a_0$$
$$a_1=a_3=a_5=\ldots=a_9=0$$

ويكون الحل المناظر للجذر $\nu=0$ هو

$$y=a_0x[1+\frac{(1-m)(2+m)}{3!}x^2+\frac{(2+m)(1-m)(3-m)(4+m)}{5!}x^4+\ldots]$$
$$=a_0[x-\frac{(m-1)(2+m)}{3!}x^3+\frac{(m-1)(m-3)(m+2)(m+4)}{5!}x^5-\ldots]$$

عندما $\nu=0$ فإن

$$\therefore a_{n+2}=\frac{(n+m+1)(n-m)}{(n+2)(n+1)}\ a_n$$
$$\therefore a_2=-\frac{m(m+1)}{2!}\ a_0,\qquad a_4=-\frac{(2-m)(3+m)}{4(3)}\ a_2=\frac{m(m-2)(m+1)(m+3)}{4!}\ a_0$$
$$,\ a_6=-\frac{(4-m)(5+m)}{6(5)}\ a_4=-\frac{m(m-2)(m+1)(m+3)(m-4)(m+5)}{6!}\ a_0,\ldots$$
$$a_3=\frac{(1-m)(2+m)}{3!}\ a_1,\qquad a_5=\frac{(3-m)(4+m)}{5(4)}\ a_3=\frac{(m-1)(m+2)(m-3)(m+4)}{5!}\ a_1,\ldots$$

ويكون الحل المناظر لـ $\nu=0$ هو

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+\nu}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$
$$=a_0\left[1-\frac{m(m+1)}{2!}x^2+\frac{m(m-2)(m+1)(m+3)}{4!}x^4+\ldots\right]$$
$$+a_1\left[x-\frac{(m-1)(m+2)}{3!}x^3+\frac{(m-1)(m-3)(m+2)(m+4)}{5!}x^5-\ldots\right]$$

وهذا الحل يمثل الحل العام لأنه يحتوي على ثابتين اختياريين $a_0,a_1$ وقد حصلنا عليه فقط بقيمة $\nu=0$ التي تؤدي إلى معاملات غير محددة.

ونلاحظ أن معامل $a_1$ هو المتسلسلة التي حصلنا عليها عندما $\nu=0$

**ب) إذا كان جذري معادلة الأسس يؤدي إلى معاملات لانهائية:**

**مثال (٧):** اوجد الحل العام لمعادلة بسل التفاضلية:

$$x^2y''+xy'+(x^2-1)y=0$$ بالقرب من $x=0$

**الحل:**

النقطة $x=0$ نقطة شاذة منتظمة لأن

$$x\,\phi(x)=x.\frac{1}{x}=1=\alpha_0,\quad x^2\psi(x)=x^2-1=\beta_0+\beta_2x^2$$

نفرض أن الحل على الصورة

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+\nu},\qquad a_0\neq 0$$

وبالتعويض عن $y$ ومشتقاتها في المعادلة التفاضلية نجد أن

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n[(n+\nu)(n+\nu-1)+(n+\nu)-1]x^{n+\nu}+\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\nu+2}=0$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\nu-1)(n+\nu+1)x^{n+\nu}+\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\nu+2}=0$$

بمساواة معامل أصغر قوة $(x^{\nu})$ بالصفر يكون

$$a_0(\nu-1)(\nu+1)=0, \quad \nu_1=1, \quad \nu_2=-1$$

بمساواة معامل القوة التالية $(x^{\nu+1})$ بالصفر

$$\therefore a_1\nu(\nu+2)=0 \qquad \therefore a_1=0$$

بمساواة معامل الحد العام بالصفر

$$\therefore a_n (n+\nu-1)(n+\nu+1)=-a_{n-2}$$

$$\therefore a_{n+2}=-\frac{a_n}{(n+\nu+1)(n+\nu+3)}$$

$$\therefore a_2=-\frac{a_0}{(n+1)(n+3)},$$

$$a_4=-\frac{a_2}{(n+3)(n+5)}=\frac{a_0}{(n+1)(n+3)^2(n+5)}, \ldots,$$

$$a_1=a_3=a_5=\ldots=0$$

عندما $\nu=1$ نحصل على الحل الأول $y_1$ في الصورة

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}=a_0 x[1-\frac{1}{2(4)}x^2+\frac{1}{2(4)^2 6}x^4-\ldots]$$

لإيجاد الحل الثاني $y_2$ نجد أنه إذا وضعنا $\nu=0$ في $a_2, a_4, \ldots$ فإن المقامات تنعدم وتصبح الحدود لانهائية علماً بأن $a_1=0$ ويمكن إيجاد الحل بالطريقة التالية:

نعلم أن

$$y = a_0\left[x^{\nu} - \frac{1}{(\nu+1)(\nu+3)}x^{\nu+2} + \frac{1}{(\nu+1)(\nu+3)^2(\nu+5)}x^{\nu+4} - \dots\right]$$

يمكن التخلص من صعوبة وجود في $(\nu+1)$ بالمقام بكتابة $k \neq 0 \qquad a_0 = k(\nu+1),$
ونحصل على

$$y = k\ x^{\nu}[(\nu+1) - \frac{1}{(\nu+3)}x^2 + \frac{1}{(\nu+3)^2(\nu+5)}x^4 - \dots] \qquad (1)$$

وبالتعويض عن هذه القيمة في المعادلة التفاضلية السابقة

$$x^2y'' + xy' + (x^2-1)y = k(\nu+1)^2(\nu-1)x^{\nu}$$

ونظراً لأن $\frac{\partial}{\partial \nu}[k(\nu+1)^2(\nu-1)x^{\nu}]_{\nu=-1}$ تساوي صفر فإنه ينتج كما في الحالة الثانية أي أن $\frac{\partial}{\partial \nu}y(x,\nu)_{\nu=-1}$ يكون حلاً آخر للمعادلة التفاضلية المعطاه.

نفرض أن

$$b_1 = \frac{1}{\nu+3}\ , \qquad \therefore \frac{\partial b_1}{\partial \nu} = \frac{-1}{(\nu+3)^2} \qquad \therefore \frac{\partial b_1}{\partial \nu} = \frac{-1}{4}\ ,$$

$$b_2 = \frac{1}{(\nu+3)^2(\nu+5)} \qquad \therefore \ln b_2 = -2\ln(\nu+3) - \ln(\nu+5)$$

$$\therefore \frac{1}{b_2}\frac{\partial b_2}{\partial \nu} = \frac{-2}{\nu+3} - \frac{1}{\nu+5}$$

$$\frac{\partial b_2}{\partial \nu}_{\nu=-1} = \frac{1}{16}(-1-\frac{1}{4}) = \frac{-5}{64}\ ,\dots$$

$$\therefore y_2 = \frac{\partial y}{\partial \nu}_{\nu=-1} = k\ x^{-1}\left[\frac{-1}{2}x^2 + \frac{1}{16}x^4 - \dots\right]\ln x \ + k\ x^{-1}\left[1 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{64}x^4 + \dots\right]$$

$$= -\frac{k}{2}(\ln x)\left[x - \frac{x^3}{8} + \frac{x^5}{192} - \dots\right] + k\left[x^{-1} + \frac{x}{4} - \frac{5}{64}x^3 + \dots\right]$$

$$= -y_1\ln x \ + k\ x^{-1}\left(1 + \frac{x^2}{4} - \frac{5}{64}x^4 + \dots\right)$$

ويكون الحل العام هو $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$

نلاحظ أن الحل الثاني $y_2 = y_1 \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial a_n}{\partial \nu} x^{n+\nu}$ عندما $\nu = 0$

## ٣/٥- تمارين:

(١) اوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية فى صورة متسلسلة لانهائية بالقرب من $x = 0$

$$(1)\ 2x \frac{d^2y}{dx^2} + (3-2x)\frac{dy}{dx} + 4y = 0$$

$$(2)\ 3y \frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$(3)\ 2(x-x^2)y'' + (1-9x)y' - 3y = 0$$

$$(4)\ (1-x^2)y'' - 5xy' - 3y = 0$$

$$y(0) = a, \quad y'(0) = b$$

$$(5)\ y^{(4)} + y = 1$$

إذا كان

$$y(0) = y'(0) = y'''(0) = 0, \ y''''(0) = 1$$

$$(6)\ xy'' + xy' + (x^2-1)y = 0$$

$$(7)\ x(1-x)y'' - 3xy' = 0$$

$$(8)\ (x+x^2+x^3)y'' + 3x^2y' - 2y = 0$$

$$(9)\ y'' + x^2y' = 0$$

$$(10)\ (2+x^2)y'' + xy' + (1+x)y = 0$$

(٢) باستخدام طريقة تايلور اوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية:

1) $y' = y + x^2, \qquad y(0) = 1$

2) $y'' - x^2 y'' - xy' + 4y = 0, \qquad y(0) = c_1,\ y'(0) = c_2$

3) $y'' - 2(x-1)y' + 2y = 0, \qquad y(1) = c_1,\ y'(1) = c_2$

4) $y'' - \dfrac{y'}{1-x} + \dfrac{x}{1-x} y = 0, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 1$

5) $y'' + x^2 y = 1 + x + x^2, \qquad y(0) = c_1,\ y'(0) = c_2$

6) $y'' - 2xy' + 2y = 0, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

(٣) باستخدام طريقة فروبينيوس اوجد الحل العام للمعادلات الآتية بالقرب من x=0

1) $2x^2 y'' - xy' + (1 - x^2)y = 0$

2) $4x^2 y'' + 4xy' + y = 0$

3) $2xy'' + (2x+1)y' + 3y = 0$

4) $x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \dfrac{1}{4}\right)y = 0$

5) $x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \dfrac{1}{9}\right)y = 0$

6) $x^2 y'' + xy' + (x^2 - 4)y = 0$

7) $xy'' + y' + y = 0$

8) $xy'' + (x+1)y' + 2y = 0$

9) $(1 - x^2)y'' - 2xy' + \dfrac{3}{4}y = 0$