الفصل السادس

تحويلات لابلاس

Laplace Tranformations

تعريف تحويل لابلاس:

يعرف تحويل لابلاس للدالة $f(t)$ على النحو التالى:

$$\ell\{f(t)\}=F(s)=\int_{o}^{\infty}e^{-st}f(t)dt \qquad (1)$$

ويقال أن التحويل موجود أو غير موجود وفقا لتقارب أو تباعد التكامل فى (1) وعادة ما يوجد عدد حقيقى s_o بحيث يكون التكامل فى (1) موجودا عندما $s>s_o$

ولا يوجد لقيم $s\le s_0$ يطلق على قيم $s>s_0$ التي يوجد عندها التكامل (1) بفترة تقارب أو وجود المقدار $\ell\{f(t)\}$

يسمى الرمز ℓ فى (1) بمؤشر تحويل لابلاس ويمكننا أن نبين أن ℓ ما هو إلا مؤشر خطى أى أن

$$\ell\{c_1F_1(t)+c_2F_2(t)\}=c_1\ell\{F_1(t)\}+c_2\ell\{F_2(t)\}$$

تحويلات لابلاس لبعض الدول الأولية: -

$$(1)\ell\{t^2\}=\int_{o}^{\infty}t^2e^{-st}dt=\left\{t^2\frac{e^{-st}}{-s}\right\}_{o}^{\infty}+\frac{n}{s}\int_{o}^{\infty}e^{-st}tdt,\quad s>0$$

$$=0+\frac{2}{s}\left\{-t\frac{e^{-st}}{s}\right\}_{o}^{\infty}+\frac{2}{s^2}\int_{o}^{\infty}e^{-st}dt=0+\frac{2}{s^2}\left\{\frac{e^{-st}}{s}\right\}_{o}^{\infty}=\frac{2}{s^3} \qquad (2)$$

$$(2)\ell\{t^n\}=\int_{o}^{\infty}t^ne^{-st}dt=\left\{t^n\frac{e^{-st}}{-s}\right\}_{o}^{\infty}+\frac{n}{s}\int_{o}^{\infty}e^{-st}t^{n-1}dt=\frac{n!}{s^{n+1}} \qquad (3)$$

$$(3)\ell\{\cos\alpha t\}=R\int_{o}^{\infty}e^{-st}e^{iat}dt=R\int_{o}^{\infty}e^{-(s-ia)t}dt \qquad (4)$$

حيث R هو الجزء الحقيقي للدالة

$$(4)\ R\left\{\frac{e^{-(s-ia)t}}{-(s-ia)}\right\}_0^{\infty}=R\left\{\frac{1}{(s-ia)}\right\}=R\left\{\frac{s+ia}{s^2+a^2}\right\}=\frac{s}{s^2+a^2},\ s>0(5)$$

$$(5)\ \ell\{\sin at\}=\operatorname{Im}\int_o^{\infty}e^{-st}e^{iat}dt=\operatorname{Im}\int_o^{\infty}e^{-(s-ia)t}dt=$$

$$=\operatorname{Im}\left\{\frac{s+ia}{s^2+a^2}\right\}=\frac{a}{s^2+a^2},\quad s>0 \qquad (6)$$

$$(6)\quad \ell\{\sinh at\}=\frac{1}{2}\ell\{e^{at}-e^{-at}\}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s+a}\right\}=\frac{a}{s^2-a^2} \qquad (7)$$

هكذا وبنفس الطريقة يمكن ايجاد $\ell\{\cosh at\}$

$$(6)\ \ell\{\cos h\alpha t\}=\frac{1}{2}\ell\{e^{\alpha t}+e^{-at}\}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s+a}\right\}=\frac{s}{s^2-a^2} \quad (8)$$

نظرية (١):

بفرض أن $\ell\{F(t)\}=f\ (s)$ فإن $\ell\{e^{at}F(t)\}=f\ (s+a)$

البرهان:

$$\therefore \ell\{F(t)\}=\int_o^{\infty} e^{-st}F(t)dt$$

$$\therefore \ell\{e^{-at}F(t)\}=\int_o^{\infty} e^{-st}e^{-at}F(t)dt=\int_o^{\infty} e^{-(s+a)t}F(t)dt,\quad s>-a$$

وهذه النتيجة هى نفس f (s) مع استبدال s بـ s+a وعليه فإن

$$\ell\{F(t)\}=f\ (s)\Rightarrow \ell\{e^{at}F(t)\}=f\ (s+a)$$

نظرية ٢:

بفرض أن

$$\ell\{F(t)\}=f\ (s)$$

$$\ell\{t\ \ F(t)\}=-\frac{d}{ds}\{f\ (s)\}$$

البرهان:

$$\because \ell\{F(t)\} = f(s) = \int_{o}^{\infty} e^{-st} F(t) dt$$

$$\therefore \frac{d}{ds}\{f(s)\} = \frac{d}{ds}\int_{0}^{\infty} e^{-st} F(t) dt = \int_{0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial s} e^{-st} F(t) dt +$$

$$+\left(\lim_{M\to\infty} e^{-sM} F(M)\right)\frac{\partial M}{\partial s} - \left(\lim_{m\to\infty} e^{-sm} F(m)\right)\frac{\partial m}{\partial s}$$

$$= \int_{o}^{\infty} -te^{-st} F(t) dt = -\int_{o}^{\infty} e^{-st}\ tF(t) dt = -\ell\{tF(t)\}$$

$$\therefore \ell\{tF(t)\} = -\frac{d}{ds}\{f(s)\}$$

وبنفس الطريقة نحصل على

$$\ell\{t^2 F(t)\} = \ell\{t\,[tF(t)]\} = -\frac{d}{ds}\left[-\frac{d}{ds}\{f(s)\}\right]$$

$$\therefore \ell\{t^2 F(t)\} = \frac{d^2}{ds^2} f(s)$$

وبتكرار نفس الطريقة يمكن باستخدام مبدأ الاستنتاج الرياضى اثبات أن

$$\ell\{t^n F(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\{f(s)\}$$

نظرية ٣:

بفرض أن $\ell\{F(t)\} = f(s)$ فإن

$$\ell\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_{s}^{\infty} f(s) ds$$

شريطة أن النهاية $\lim_{t\to 0}\frac{F(t)}{t}$ تكون موجودة

البرهان:

$$\int_s^\infty f(s)ds = \int_s^\infty \left\{\int_o^\infty e^{-st}F(t)dt\right\} ds$$

$$= \int_o^\infty \int_s^\infty e^{-st}F(t)ds\ dt = \int_o^\infty \left\{\frac{e^{-st}F(t)}{-t}\right\}_0^\infty dt$$

$$= \int_o^\infty \left\{(0)-[\frac{e^{-st}F(t)}{-t}]\right\}dt$$

$$\int_o^\infty e^{-st}\frac{F(t)}{t}dt = \ell\{\frac{F(t)}{t}\}$$

$$\therefore \ell\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty f(s)ds$$

مثال(١): اوجد $\ell\{t^2 e^{-t}\}$

الحل:

$$\ell\{t^2\} = \frac{2!}{s^3} \qquad \therefore \ell\{t^2 e^{-t}\} = \frac{2}{(s+1)^3}$$

مثال(٢): اثبت أن

(1) $\ell\{\cos 3t\} = \dfrac{s}{s^2+9}$

(2) $\ell\{3\sin 5t\} = \dfrac{15}{s^2+25}$

(3) $\ell\{e^{-3t}\sin 2t\} = \dfrac{2}{(s+3)^2+4}$

(4) $\ell\{e^{-t}\cos h\,4t\} = \dfrac{s+1}{(s+1)^2-16}$

$$(5)\ell\{\cos 3t+\sin 3t\}=\frac{s}{s^2+9}+2.\frac{3}{s^2+9}$$

$$(6)\ell\{e^{-3t}(1+t^2)\}=\frac{1}{s+3}+\frac{2}{(s+3)^3}$$

٦/١- جدول تحويلات لابلاس:

F(t)	$L\{F(t)\}=f(s)$
a	$a/s\,, \qquad s>a$
e^{at}	$1/(s-a)\,, \qquad s>0$
t	$1/s^2\,, \qquad s>0$
$t^n \;, n=1,2,3,.....$	$n!/s^{n+1}$
$\sin at$	$a/(s^2+a^2)$
$\cos at$	$s/(s^2+a^2)$
$\sinh at$	$\alpha/(s^2-\alpha^2), \qquad \lvert s\rvert>a$
$\cosh at$	$s/(s^2-a^2)\,, \qquad \lvert s\rvert>a$
$t\sin at$	$2as/(s^2+a^2)^2$
$t\cos at$	$(s^2-a^2)/(s^2+a^2)^2$
$e^{at}F(t)$	$f(s+a)$
$t^nF(t)$	$(-1)^n d^n/ds^n\{f(s)\}$
$F(t)/t$	$\int_s^\infty f(s)ds\,, \lim_{t\to 0} F(t)/t \qquad exists$
$e^{-at}t^n$	$n!/(s+a)^{n+1}$
$e^{-at}\sin at$	$a/\{(s-a)^2+a^2\}$
$e^{-at}\cos at$	$(s+a)/\{(s+a)^2+a^2\}$
$e^{-at}\cos bt$	$(s+a)/\{(s+a)^2+b^2\}$
$e^{-at}t\sin bt$	$2b(s+a)/\{(s+a)^2+b^2\}^2$

مثال(٣): اوجد تحويلات لابلاس التالية:

$$(i)\ \ell\{t\sin 3t\},\quad (ii)\ \ \ell\{t\cos at\}$$

الحل:

$$(i)\ell\{\sin 2t\}=\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}$$

$$\therefore\ \ell\{t\sin 2t\}=\frac{d}{ds}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}=\frac{4s}{(s^2+4)^2}$$

$$(ii)\ell\{\cos at\}=\frac{s}{s^2+a^2}$$

$$\therefore\ \ell\{t\ \cos at\}=\frac{d}{ds}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\}=\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$$

بالمثل يمكن إثبات أن

$$\ell\{t^2\cos at\}=\frac{2s(s^2-3a^2)}{(s^2+a^2)^3}$$

مثال(٤): اوجد $\ell\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}$

الحل:

$$\ell\{\sin t\}=\frac{1}{s^2+1},\qquad \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$$

طبقاً لنظرية (٣) يكون لدينا

$$\ell\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}=\int_s^\infty\frac{1}{s^2+1}ds=[\tan^{-1}s]_s^\infty$$

$$=\pi/2-\tan^{-1}s$$

كذلك

$$\ell\left\{\frac{\cos 2t-\cos 3t}{t}\right\}$$

$$\ell\{\cos 2t-\cos 3t\}=\frac{s}{s^2+1}-\frac{s}{s^2+9},$$

$$\lim_{t\to 0}\left\{\frac{\cos 2t-\cos 3t}{t}\right\}=\lim_{t\to 0}\left\{\frac{-2\sin 2t-3\sin 3t}{1}\right\}=0$$

(وذلك باستخدام قاعدة لوبتيال)

$$\lim_{t\to 0}\frac{F(t)}{t} \qquad exists$$

$$\therefore \ell\left\{\frac{\cos 2t-\cos 3t}{t}\right\}=\int_o^\infty \left\{\frac{s}{s^2+4}-\frac{s}{s^2+9}\right\}ds$$

$$=\left\{\frac{1}{2}\ell n(s^2+4)-\frac{1}{2}\ell n(s^2+9)\right\}_s^\infty=\frac{1}{2}\left\{\ell n\,\frac{s^2+4}{s^2+9}\right\}_s^\infty$$

$$s\to\infty\Rightarrow\frac{1}{2}\lim_{s\to\infty}\ell n\,\frac{s^2+4}{s^2+9}=\frac{1}{2}\ell n\lim_{s\to\infty}\frac{s^2+4}{s^2+9}=\frac{1}{2}\ell n 1=0$$

$$\therefore \ell\left\{\frac{\cos 2t-\cos 3t}{t}\right\}=-\frac{1}{2}\ell n\left\{\frac{s^2+4}{s^2+9}\right\}=\ell n\left(\frac{s^2+9}{s^2+4}\right)^{1/2}$$

مثال(٥): اوجد $\ell\left\{\dfrac{1-\cos h\,t}{t}\right\}$

الحل:

$$\therefore \ell\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos h\,t}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin \mathrm{h}t}{1}=0$$

(باستخدام قاعدة لوبتيال)

$$\ell\{1-\cos h\,t\}=\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2-1}=\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+h^2}$$

$$\therefore \ell\left\{\frac{1-\cos h\,t}{t}\right\}=\int_s^\infty \left\{\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2-1}\right\}ds$$

$$=\left\{\ell ns-\frac{1}{2}\ell n(s^2-1)\right\}_s^\infty$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\ell n(\frac{s^2}{s^2-1})\right\}_s^\infty=\frac{1}{2}\left\{0-\ell n\frac{s^2}{s^2-1}\right\}$$

$$=\ell n\left\{\left(\frac{s^2}{s^2-1}\right)^{-\frac{1}{2}}\right\}=\ell n\left(\frac{s^2-1}{s^2}\right)^{1/2}$$

$$\left\{s\to\infty\Rightarrow \ell n\frac{s^2}{s^2-1}\to \ell n1=0\right\}$$

مثال(٦): اوجد $\ell\left\{\frac{e^{2t}-1}{t}\right\}$

الحل:

$$\because \lim_{t\to 0}\frac{e^{2t}-1}{t}=\lim_{t\to 0}\ 2e^{2t}=2,$$

$$\ell\{e^{2t}-1\}=\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s},\qquad s>2$$

$$\therefore \ell\left\{\frac{e^{2t}-1}{t}\right\}=\int_s^\infty\left\{\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s}\right\}ds$$

$$=\{(\ln(s-2)-\ln s)\}_s^\infty=\left\{\ln\left(\frac{s-2}{s}\right)\right\}_s^\infty$$

$$=0-\ln\left(\frac{s-2}{s}\right)=\ln\left(\frac{s}{s-2}\right)$$

٢/٦- تحويلات لابلاس العكسية:

إذا كانت $\ell\{F(t)\}=f(s)$ فإن $F(t)$ تسمى تحويل لابلاس العكسى للدالة $f(s)$ وتكتب

$$\ell^{-1}\{f(s)\}=F(t)=\int_{o}^{\infty}e^{-st}f(s)ds$$

مثال(٧): إذا كان $\ell\{t\}=\frac{1}{s^2}$ فإن $\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}=t$

مثال(٨): اثبت أنه إذا كان $\ell\{e^{at}\}=\frac{1}{s-a},\quad s>a$

فإن $\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\}=e^{at}$

(يترك الحل للقاريء)

مثال(٩): اوجد تحويل لابلاس العكسي لكل من الدوال الآتية:

$$(i)\ \frac{s}{s^2-9}\qquad (ii)\ \frac{s+3}{(s+3)^2-9}\qquad (iii)\ \frac{1}{s^2+2s-3}$$

$$(iv)\ \frac{2s-6}{(s-2)(s-4)}\qquad (v)\ \frac{3!}{s^4}\ \frac{5}{(s^2+9)}\qquad (vi)\ \frac{n!}{s^{n+1}}$$

الحل:

$$(i)\ \ell^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-9}\right\}=\cosh 3t$$

$$(ii)\ \ell^{-1}\left\{\frac{s+3}{(s+3)^2-9}\right\}=e^{-3t}\cosh 3t$$

باستخدام الكسور الجزئية نحصل على

$$(iii)\ \ell^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+2s-3}\right\}=\ell^{-1}\left\{\frac{-\frac{1}{4}}{s-1}+\frac{\frac{1}{4}}{s+3}\right\}$$

$$=\ell^{-1}\left\{\frac{-\frac{1}{4}}{s-1}+\ell^{-1}\frac{\frac{1}{4}}{s+3}\right\}=-\frac{1}{4}e^{t}+\frac{1}{4}e^{-3t}$$

$$(iv)\ \ell^{-1}\left\{\frac{2s-6}{(s-2)(s-4)}\right\}$$

باستخدام الكسور الجزئية نحصل على

$$\ell^{-1}\left\{\frac{2s-6}{(s-2)(s-4)}\right\}=\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}+\frac{1}{s-4}\right\}$$

$$=\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}+\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\right\}=e^{2t}+e^{4t}$$

$$(v)\ \ell^{-1}\left\{\frac{3!}{s^4}+\frac{s}{s^2+9}\right\}=\ell^{-1}\left\{\frac{3!}{s4}\right\}+\ell^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\}=e^{t^3}+\cos 3t$$

$$(vi)\ \ell^{-1}\{n!/s^{n+1}\}=t^n$$

٣/٦- تحويلات لابلاس للمشتقات:

سوف نجد أن تحويلات لابلاس تساعد فى إيجاد وسائل مفيدة لحل المعادلات التفاضلية. ولهذا السبب يكون من اللازم لنا أن نوجد تحويلات لابلاس للمشتقات. لذلك نعتبر النظريات التالية:

نظرية (١): بفرض أن $F'(t)$ هى المشتقة الأولى للدالة $F(t)$ يكون لدينا

$$\ell\{F'(t)\}=s\ell\{F(t)\}-F(0)=sf(s)-F(0)$$

البرهان:

$$\ell\{F'(t)\}=\int_{o}^{\infty} e^{-st}F'(t)dt$$

بإجراء التكامل بالتجزئ و وضع

$$dv = F'(t)dt\,, \quad u = e^{-st}$$

نحصل على

$$\ell\{F'(t)\}=\{e^{-st}F(t)\}_0^{\infty}+s\int_{0}^{\infty} F(t)e^{-st}dt$$

$$t \to \infty \;\; \Rightarrow e^{-st}F(t)=0$$

$$\begin{aligned}\ell\{F'(t)\}&=-F(0)+s\,\ell\{F(t)\}\\&=sf\,(s)-F(0)=s\;\ell\{F(t)\}-F(0)\end{aligned}$$

وهو المطلوب.

ويمكن تعميم النظرية السابقة كما يلى:

نظرية (٢): بفرض أن $F^{(n)}(t)$ هى المشتقة النونية للدالة $F^{'}(t)$ يكون لدينا

$$\ell\{F^{(n)}(t)\}=s^{n}F(s)-s^{n-1}F(0)-s^{n-2}F'(0)...-F^{(n-1)}(0)$$

البرهان:

يمكن البرهان باستخدام الاستنتاج الرياضي كما فى النظرية السابقة.

والآن نفرض أن

$$\begin{aligned}&F''(0)=x_{2}, \quad F'(0)=x_{1}, \quad F(0)=x_{0}, \quad x=F(t),\\&F^{(n)}(0)=x_{n}..., \qquad F'''(0)=x_{3}\end{aligned}$$

أى أن

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=x_1,\quad \left.\frac{d^2x}{dt^2}\right|_{t=0}=x_2,\quad \left.\frac{d^3x}{dt^3}\right|_{t=0}=x_3,\ldots,\ \left.\frac{d^nx}{dt^n}\right|_{t=0}=x_n$$

أيضاً نفرض أ ن $\quad \overline{x}=\ell\{x\}=\ell\{F(t)\}=f\ (s)$

$$\therefore \ell\{x\}=\overline{x}$$

$$\ell\{\dot{x}\}=s\overline{x}-x_o$$

$$\ell\{\ddot{x}\}=s^2\overline{x}-sx_o-x_1$$

$$\ell\{\dddot{x}\}=s^3\overline{x}-s^2x_o-sx_1-x_2$$

٤/٦- حل المعادلات التفاضلية باستخدام تحويلات لابلاس:

مثال(١٠): اوجد حل المعادلات التفاضلية: $\frac{dx}{dt}-4x=8$ حيث $x(0)=2$

الحل:

نعيد كتابة المعادلة التفاضلية فى الصورة $\dot{x}-4x=8$ وبأخذ تحويل لابلاس للطرفين نحصل على

$$\ell\{\dot{x}-4x\}=\ell\{8\}$$

$$\therefore s\overline{x}-x_o-4\overline{x}=8/s \qquad (1)$$

وحيث أن $t=0$ فإن $x_o=2$ وبالتعويض فى العلاقة (1) نحصل على

$$s\overline{x}-2-4\overline{x}=8/s$$

وهذه المعادلة يمكن إعادة كتابتها فى الصورة

$$(s-4)\overline{x}-2=8/s$$

$$\Rightarrow (s-4)\overline{x}=\frac{8+2s}{s}$$

وبحل المعادلة فى $\overline{x}$ نحصل على

$$\overline{x}=\frac{2}{s-4}+\frac{8}{s(s-4)}$$

باستخدام الكسور الجزئية نحصل على

$$\therefore \overline{x}=\frac{2}{s-4}-\frac{2}{s}+\frac{2}{s-4}=\frac{4}{s-4}-\frac{2}{s}$$

وبأخذ تحويل لابلاس العكسى نحصل على:

$$x=\ell^{-1}\left\{\frac{4}{s-4}-\frac{2}{s}\right\}=4e^{4t}-2$$

وهو الحل المطلوب

مثال(٢): اوجد حل المعادلة التفاضلية:

$$x(0)=5 \text{ حيث } \quad 2\frac{dx}{dt}+3x=e^{4t}$$

الحل:

يمكن كتابة المعادلة السابقة فى الصورة:

$$2\dot{x}+3x=e^{4t}$$

$$\therefore \ell\{2\dot{x}+3x\}=\ell\{e^{4t}\}$$

$$2(s\overline{x}-x_o)+3\overline{x}=\frac{1}{s-4} \qquad ,\because x_o=5$$

$$\therefore 2(s\overline{x}-5)+3\overline{x}=\frac{1}{s-4}$$

$$\therefore (2s+3)\overline{x}-10=\frac{1}{s-4}$$

$$\therefore \overline{x}=\frac{10}{2s-3}+\frac{1}{(2s-3)(s-4)}=$$

$$\frac{10}{2s+3}+\frac{1}{11(s-4)}-\frac{2}{11(2s+3)}$$

$$=\frac{108}{11}\left(\frac{1}{(2s+3)}\right)+\frac{1}{11}\frac{1}{(s-4)}$$

$$\therefore x=\ell^{-1}(\overline{x})=\frac{54}{11}e^{-3t/2}+\frac{1}{11}e^{4t}$$

وهو المطلوب.

مثال(٣): اوجد حل المعادلة التفاضلية:

$$\frac{dx}{dt}-3x=te^{2t} \quad \text{حيث} \quad x(0)=0$$

الحل:

$$(s\overline{x}-x_0)-3\overline{x}=\frac{1}{(s-2)^2}$$

$$\therefore x_o=0 \quad \therefore (s-3)\overline{x}=\frac{1}{(s-2)^2}$$

باستخدام الكسور الجزئية نحصل على

$$\because \overline{x} = \frac{1}{(s-3)(s-2)^2} = \frac{1}{(s-3)} - \frac{1}{(s-2)} - \frac{1}{(s-2)^2}$$
$$\therefore x = e^{3t} - e^{2t} - te^{2t} = e^{3t} - (1+t)e^{2t}$$

مثال(٤): اوجد حل المعادلة التفاضلية:

$$\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 0, \qquad x(0) = 4, \quad \dot{x} = 3$$

الحل:

نحاول كتابة المعادلة السابقة بدلالة تحويلات لابلاس وذلك باستخدام التعبيرات التالية:

$$\ell\{x\} = \overline{x}$$
$$\ell\{\dot{x}\} = s\overline{x} - x_o$$
$$\ell\{\ddot{x}\} = s^2\overline{x} - sx_o - x_1$$

وبذلك فإن المعادلة التفاضلية بعد التأثير على طرفيها بمؤثر لابلاس تأخذ الصورة الآتية:

$$(s^2\overline{x} - sx_0 - x_1) - 3(s\overline{x} - x_o) + 2\overline{x} = 0 \qquad (1)$$
$$At \quad t = 0, \quad x = 4, \qquad \dot{x} = 3$$
$$\therefore x_o = 4 \quad , \quad x_1 = 3$$

وبالتعويض فى العلاقة (1) نحصل على

$$(s^2\overline{x} - 4s - 3) - 3(s\overline{x} - 4) + 2\overline{x} = 0$$
$$\therefore \overline{x}(s^2 - 3s + 2) - 4s + 9 = 0$$

$$\therefore \overline{x} = \frac{4s-9}{(s-1)(s-2)} = \frac{5}{s-1} - \frac{1}{s-2}$$
$$\therefore x = \ell^{-1}\{\overline{x}\} = 5e^{t} - e^{2t}$$

وعلى وجه العموم باستخدام التعبير

$$\ell\{x^{(n)}\} = s^n \bar{x} - s^{n-1}x_o - s^{n-2}x_1 \ldots x_{n-1}$$

حيث $n = 1, 2, 3, \ldots$ يمكن بنفس الطريقة المتبعة فى الأمثلة السابقة حل المعادلات من الرتب أعلى من الثانية.

٥/٦-أمثلة عامة على تحويلات لابلاس:

مثال(١): اوجد حل المعادلة التفاضلية:

$$3\dot{x} - 4x = \sin 2t\ , \quad x(0) = \frac{1}{3}$$

الحلـ:

$$\ell\{3\dot{x} - 4x\} = \ell\{\sin 2t\}$$

$$3\{s\bar{x} - x_{\circ}\} - 4\bar{x} = \frac{2}{S^2 + 4}$$

وبالتعويض عن $x(0) = \frac{1}{3}$ نحصل على

$$\{3s - 4\}\bar{x} = 1 + \frac{2}{s^2 + 4}$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{1}{3s - 4} + \frac{2}{(3s - 4)(s^2 + 4)} \qquad (1)$$

وبتحليل الكسر الأخير نحصل على

$$\frac{2}{(3s - 4)(s^2 + 4)} = \frac{18/52}{3s - 4} - \frac{6s/52}{s^2 + 4} - \frac{8/52}{s^2 + 4}$$

$$= \frac{3}{26}\frac{1}{s - \frac{3}{4}} - \frac{3}{26}\frac{s}{s^2 + 4} - \frac{4}{26}\frac{1}{s^2 + 4} \qquad (2)$$

وبالتعويض من العلاقة (2) فى العلاقة (1) نحصل على

$$\bar{x} = \frac{3S}{78} - \frac{1}{S - \frac{4}{3}} - \frac{3}{26}\left\{\frac{S}{S^2 + 4} + \frac{2}{3}\frac{2}{S^2 + 4}\right\}$$

وبإيجاد تحويل لابلاس العكسى للطرفين نحصل على

$$x = \frac{35}{78} e^{4t/3} - \frac{3}{26}\left\{\cos 2t + \frac{2}{3}\sin 2t\right\}$$

مثال(٢): حل المعادلة التفاضلية:

$$\ddot{x} + 36x = 0, \quad x(0) = -1, \quad \dot{x}(0) = 2$$

الحل:

$$\because s^2\bar{x} - sx_o - x_1 + 36\bar{x} = 0, \quad x_o = -1, x_1 = 2$$
$$\therefore s^2\bar{x} + s - 2 + 36\bar{x} = 0$$

والتى يمكن كتابتها فى الصورة

$$(s^2 + 36)\bar{x} + s - 2 = 0$$
$$\therefore \bar{x} = \frac{2 - s}{s^2 + 36}$$
$$= \frac{2}{s^2 + 36} - \frac{s}{s^2 + 36}$$
$$\therefore x = \frac{1}{3}\sin 6t - \cos 6t$$

مثال(٣): اوجد حل المعادلة التفاضلية:

$$\ddot{x} - 7\ddot{x} + 12x = 2, \qquad x(0) = 1, \dot{x}(0) = 5$$

الحل:

$$s^2\bar{x} - sx_0 - x_1 - 7(2s\bar{x} - x_0) + 12\bar{x} = \frac{2}{s}$$
$$\therefore s^2\bar{x} - s - 5 - 7s\bar{x} + 7 + 12\bar{x} = \frac{2}{s}$$

أى أن

$$(s^2-7s+12)\bar{x}=s-2+\frac{2}{s}=\frac{1}{s}\left\{s^2-2s+2\right\}$$

$$\therefore \bar{x}=\frac{s^2-2s+2}{s(s-3)(s-4)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-3}+\frac{c}{s-4}$$

$$=\frac{1}{6}-\frac{1}{s}-\frac{5}{3}-\frac{1}{5-3}+\frac{5}{2}-\frac{1}{s-4}=\frac{1/6}{s}+\frac{-5/3}{s-3}+\frac{5/2}{s-4}$$

$$\therefore x(t)=\frac{1}{6}-\frac{5}{3}e^{3t}+\frac{5}{2}e^{4t}$$

مثال(٤): اوجد حل المعادلة التفاضلية:

$$\ddot{x}-6\dot{x}+8x=e^{3t},\qquad x(0)=0,\qquad \dot{x}(0)=2$$

الحلـ:

$$(s^2\bar{x}-s\,x(0)-\dot{x}(0))-6(s\bar{x}-x(0))+8\bar{x}=\frac{1}{s-3}$$

وحيث أن

$$x(0)=0,\qquad \dot{x}(0)=2$$

$$\therefore (s^2\bar{x}-2)-6s\,\bar{x}+8\bar{x}=\frac{1}{s-3}$$

$$\therefore (s^2-6s+8)\bar{x}=2+\frac{1}{s-3}=\frac{2s-5}{s-3}$$

$$\therefore \bar{x}=\frac{2s-5}{(s-2)(s-3)(s-4)}=\frac{A}{s-2}+\frac{B}{s-3}+\frac{c}{s-4}$$

$$=-\frac{1}{2}\,\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s-3}+\frac{3/4}{s-4}$$

ومنها نحصل على $$x=\tfrac{3}{4}e^{4t}-e^{3t}-\frac{1}{2}e^{2t}$$

مثال(٥): اوجد حل المعادلة التفاضلية:

$$\ddot{x} + x = 6\cos 2t, \qquad x(0) = 3, \quad \dot{x}(0) = 1$$

الحل:

$$s^2\bar{x} - sx(0) - \dot{x}(0) + \bar{x} = \frac{6s}{s^2+4}$$

وبالتعويض عن $x(0), \dot{x}(0)$ نحصل على

$$(s^2+1)\bar{x} - 3s - 1 = 6s/(s^2+4)$$

ومنها نحصل على

$$(s^2+1)\bar{x} = 3s + 1 + \frac{6s}{s^2+4}$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{3s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} + \frac{6s}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

$$= \frac{3s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} + \frac{2s}{s^2+1} - \frac{2s}{s^2+4} = \frac{5s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} - \frac{2s}{s^2+4}$$

$$\therefore x = 5\cos + \sin t - 2\cos 2t$$

مثال(٦): اوجد حل المعادلة التفاصلية:

$$\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = \sin 3t, \qquad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 4$$

الحل:

$$(s^2\bar{x} - sx_o - x_1) - 4(s\bar{x} - x_o) + 4\bar{x} = \frac{3}{s^2+9}$$

وبالتعويض عن $x(0), \quad \dot{x}(0)$ والتبسيط نحصل على X_0 فى الصورة

$$\bar{x} = \frac{4}{(s-2)^2} + \frac{3}{(s-2)^2(s^2+9)}$$

$$= \frac{55}{13}\frac{1}{(s-2)^2} - \frac{3}{169}\cdot\frac{4}{s-2} + \frac{12}{169}\frac{s}{s^2+9} - \frac{5}{169}\cdot\frac{1}{s^2+9}$$

$$\therefore x = \frac{55}{13}te^{2t} - \frac{3}{169}\left\{4e^{2t} - 4\cos 3t + \frac{5}{3}\sin 3t\right\}$$

مثال(٧): اوجد حل المعادلة التفاضلية:

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 4t^2, \qquad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$$

الحل:

$$s^2\bar{x} - sx_o - x_1 + 3(s\bar{x} - x_o) + 2\bar{x} = \frac{8}{s^3}$$

وبالتعويض عن $x_o = x_1 = 0$ والتبسيط نحصل على

$$\bar{x} = \frac{8}{s^3(s+1)(s+2)}$$

وباستخدام الكسور الجزئية نحصل على

$$\bar{x} = \frac{4}{s^3} - \frac{6}{s^2} + \frac{7}{s} + \frac{1}{s+2} - \frac{8}{s+1}$$

وباستخدام تحويل لابلاس العكسى نحصل على

$$x = 2t^2 - 6t + 7 + e^{-2t} - 8e^{-t}$$

مثال(٨): اوجد حل المعادلة التفاضلية:

$$\dddot{x} + \ddot{x} + \dot{x} + x = 4, \qquad x(0) = \dot{x}(0) = 0, \ \ddot{x}(0) = 3$$

الحل:

باستخدام تحويل لابلاس نحصل على

$$(s^3+s^2+s+1)\overline{x}=3+4/s=(3s+4)/s$$

$$\therefore \overline{x}=\frac{3s+4}{s(s+1)(s^2+1)}=4/s-\frac{1}{2}.\frac{1}{s+1}-\frac{7}{2}.\frac{s}{s^2+1}-\frac{1}{2}.\frac{s}{s^2+1}$$

ومنها نحصل بسهولة باستخدام تحويل لابلاس العكسى على x فى الصورة

$$x=4-e^{-t}/2-7/2\cos t-\frac{1}{2}\sin t$$

مثال(٩): حل المعادلة التفاضلية:

$$\dddot{x}-2\ddot{x}-\dot{x}+2x=2+t\,,\qquad x(0)=0,\ \dot{x}(0)=1,\ \ddot{x}(0)=0$$

الحل:

$$s^3\overline{x}-s^2x(0)-sx_1-x_2-2(s^2\overline{x}-sx(0)-\dot{x}(0))-$$
$$-s\overline{x}-x(0)+2\overline{x}=2/s+1/s^2$$

وباستخدام الشروط الإبتدائية نحصل بعد التبسيط على

$$(s^3-2s^3-s+2)\overline{x}-s+2=\frac{2s+1}{s^2}$$

$$\therefore (s-2)(s^2-1)\overline{x}=s-2+\frac{2s+1}{s^2}$$

$$\overline{x}=\frac{s-2}{(s-2)(s^2-1)}+\frac{s2+1}{s(s-2)(s^2-1)}$$

$$=\frac{1}{s^2-1}+\frac{1}{s}\left\{\frac{2s+1}{s(s-1)(s^2+1)(s-2)}\right\}$$

$$=\frac{1}{s^2-1}+\frac{1}{2}.\frac{1}{s^2}+\frac{5}{4}.\frac{1}{s}-\frac{3}{2}.\frac{1}{s-1}-\frac{1}{6}.\frac{1}{s+1}+\frac{5}{12}.\frac{1}{s-1}$$

$$\therefore x=\sin ht+\frac{t}{2}+\frac{5}{4}-3e^{t}/2-e^{-t}/6+5/12\,e^{2t}$$

وحيث أن $\sin ht = \frac{1}{2}\left\{e^{t} - e^{-t}\right\}$ فإن النتيجة السابقة يمكن كتابتها فى الصورة

$$x = \tfrac{5}{4} + \tfrac{t}{2} - e^{t} - \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{5}{12}e^{2t}$$

مثال(١٠): اوجد حل نظام المعادلات التفاضلية الآتية:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} + y + 2x &= 0, \\ \dot{x} + 4\dot{y} - 2x &= e^{-2t} \end{aligned}\right\}, \quad x(0) = 2, \quad y(0) = 0$$

باستخدام تحويل لابلاس والرموز $\bar{y} = \ell(y), \bar{x} = \ell\{x\}$ نحصل على

$$\begin{aligned} s\bar{x} - x_o + s\bar{y} - y_o + 2\bar{x} &= 0, \\ s\bar{x} - x_o + 4(s\bar{y} - y_o) - 2\bar{x} &= \frac{1}{s+2} \end{aligned}$$

وباستخدام الشروط الإبتدائية والتبسيط نحصل على

$$\begin{aligned} (s+2)\bar{x} + s\bar{y} &= 2, \\ (s-2)\bar{x} + 4s\bar{y} &= 2 + \frac{1}{s+2} \end{aligned}$$

وبحل المعادلتين معاً نحصل على

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{6}{3s+10} - \frac{1}{(s+2)(3s+10)} \\ &= \frac{9}{4}\cdot\frac{1}{s+\frac{10}{3}} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s+2} \end{aligned}$$

وبإستخدام تحويل لابلاس العكسى نحصل على x فى الصورة

$$x = \frac{9}{4}e^{\frac{-10}{3}t} - \frac{1}{4}e^{-2t}$$

ويبقى الحصول على y ويمكن الحصول عليها بإجراء خطوات مماثلة كما يلى

$$\bar{y}=\frac{9}{s(3s+10)}=\frac{3}{s(s+10/3)}$$

وبإستخدام الكسور الجزئية نحصل على

$$\bar{y}=\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{s}-\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{\left(s+10/3\right)}$$

$$\therefore y=\frac{9}{10}\left\{1-e^{-10t/3}\right\}$$

ويجمع الحلين معا نحصل على الحل المطلوب فى الصورة

$$x=\frac{1}{4}\left\{ye^{-10t/3}-e^{-2t}\right\},\; y=\frac{9}{10}\left\{1-e^{-10t/3}\right\}$$

مثال (١١): اوجد حل نظام المعادلات التفاضلية الآتية:

$$2\dot{x}-x+\dot{y}+y=5\sin t$$
$$3\dot{x}-x+2\dot{y}+y=e^{t}\quad,\quad x(0)=y(0)=0$$

الحل:

باستخدام تحويل لابلاس نحصل على

$$2\left(s\bar{x}-x(0)\right)-\bar{x}+s\bar{y}-y(0)+\bar{y}=\frac{5}{s^{2}+1};$$
$$3\left(s\bar{x}-x(0)\right)-\bar{x}+2\left(s\bar{y}-y(0)\right)+\bar{y}=\frac{1}{s-1}$$

وباستخدام الشروط الابتدائية نحصل على

$$(2s-1)\bar{x}+(s+1)\bar{y}=\frac{5}{s^2+1},$$
$$(3s-1)\bar{x}+(2s+1)\bar{y}=\frac{1}{s-1}$$

وبحل المعادلتين معاً فى $\bar{x},\ \bar{y}$ نحصل على

$$\bar{x}=\frac{s(2s+1)}{s(s-2)(s^2+1)}-\frac{s+1}{s(s-1)(s-2)}$$

وباستخدام الكسور الجزئية نحصل على

$$\bar{x}=\frac{1}{s-2}+\frac{2}{s-1}-\frac{3}{s}-\frac{5}{s^2+1}$$
$$\therefore x=e^{2t}+2e^{t}-3-5\sin t$$

بالمثل يمكن ايجاد $\bar{y}$ فى الصورة

$$\bar{y}=\frac{2s-1}{s(s-1)(s-2)}-\frac{5(3s-1)}{s(s-2)(s^2+1)}$$

وبإستخدام الكسور الجزئية نحصل على

$$\bar{y}=-\frac{3}{s}-\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s-2}+\frac{5s}{s^2+1}+\frac{5}{s^2+1}$$
$$\therefore y=-3-e^{t}-e^{2t}+5\cos t+5\sin t$$

الحل الكامل للمسألة هو

$$x=e^{2t}+2e^{t}-3-5\sin t$$
$$\therefore y=5\cos t+5\sin t-3-e^{t}-e^{2t}$$

مثال(١٢): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية:

$$\dot{x} + 2y - x = 0$$
$$\dot{y} + 2x - y = 0$$

الحلـ:

بإستخدام تحويل لابلاس نحصل على

$$s\bar{x} - x(0) + 2\bar{y} - \bar{x} = 0$$
$$s\bar{y} - y(0) + 2\bar{x} - \bar{y} = 0$$

وبوضع $x(0) = A$ $\quad$ $y(0) = B,$ نحصل على

$$(s-1)\bar{x} + 2\bar{y} = A$$
$$2\bar{x} + (s-1)\bar{y} = B$$

ومنها نحصل على $\bar{x}$ فى الصورة

$$\bar{x} = \frac{1}{2}\left\{\frac{A+B}{s+1} + \frac{A+B}{s-3}\right\}$$

ويوضع $\frac{A+B}{2} = \mathrm{P}$ $\quad$ $\frac{A-B}{2} = Q,$ نحصل على

$$\bar{x} = \frac{p}{s+1} + \frac{Q}{s-3}$$

وحيث أن

$$\therefore x = pe^{-t} + Qe^{3t}$$
$$\dot{x} = -pe^{-t} + 3Qe^{3t} \qquad (1)$$

$$\dot{x} + 2y - x = 0 \qquad (2)$$

بالتعويض عن x, $\dot{x}$ فى العلاقة (2) يمكن الحصول على y فى الصورة

$$y = pe^{-t} - Qe^{3t}$$

$\therefore$ الحل المطلوب هو

$$x = pe^{-t} + Q\,e^{3t}\,, \qquad y = pe^{-t} - Q\,e^{3t}$$

مثال(١٣): اوجد الحل العام لنظام المعادلات الآتية:

$$\ddot{x} + 3x - 2y = 0$$

$$\ddot{x} + \ddot{y} - 3x + 5y = 0 \quad ; \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 3$$

الحل:

$$s^2\bar{x} - sx_o - x_1 + 3\bar{x} - 2\bar{y} = 0$$

$$s^2\bar{x} - sx_o - x_1 + s^2\bar{y} - sy_o - y_1 - 3\bar{x} + 5\bar{y} = 0$$

وباستخدام الشروط الإبتدائية والتبسيط نحصل على

$$\left(s^2 + 3\right)\bar{x} - 2\bar{y} = 1$$

$$\left(s^2 - 3\right)\bar{x} + \left(s^2 + 5\right)\bar{y} = 4$$

ومنها نحصل على $\bar{x}$ في الصورة

$$\bar{x} = \frac{s^2 + 13}{\left(s^2 + 1\right)\left(s^2 + y\right)} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{s^2 + 1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s^2 + 9}$$

$$\therefore x = \tfrac{3}{2}\sin t - \frac{1}{6}\sin 3t \qquad (1)$$

$$\therefore \dot{x} = \tfrac{3}{2}\cos t - \frac{1}{2}\cos 3t \;; \qquad (2)$$

$$\ddot{x} = -\tfrac{3}{2}\sin t + \tfrac{3}{2}\sin 3t \qquad (3)$$

بالتعويض من $(1),(3)$ في العلاقة $\ddot{x}+3x-2y=0$ نحصل بعد الاختصار على y

في الصورة $y=\frac{3}{2}\sin t+\frac{1}{2}\sin 3t$

٦/٦- تطبيقات على تحويلات لابلاس:

(i) دالة جاما:

يرمز لها بالرمز $\Gamma(x)$ وتعرف بأنها

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}\ t^{x-1}dt \tag{1}$$

وباستخدام التعريف السابق نحصل على النتائج الآتية:

$$(1)\ \Gamma(1)=1$$

من التعريف (1) نحصل على

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-t}dt=\lim_{b\to\infty}\left\{\int_0^b e^{-t}dt\right.$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left\{-e^{-b}+1\right\}=1$$

$$(2)\ \Gamma(x+1)=x\Gamma(x)\ ,\quad x>0$$

البرهان:

$$\Gamma(x+1)=\int_0^\infty e^{-t}\ t^{x}dt=\lim_{b\to\infty}\left\{\int_0^b -e^{-t}t^{x}dt\right\}$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left\{-e^{-t}t^{x}dt\right\}_0^b+x\int_0^\infty e^{-t}\ t^{x-1}dt=0+x\Gamma(x)=x\Gamma(x)$$

وبناء على النتيجة السابقة إذا كان x عدد صحيح غير سالب فإن

$$(3)\Gamma(x+1)=x!$$

$$(4)\Gamma(x)=2\int_0^\infty e^{-t^2}\, t^{2x-1}dt$$

البرهان:

باستخدام التعويض $t = u^2$ فى تعريف دالة جاما نحصل على

$$dt=2udu;\quad t=0\Rightarrow u=0;\qquad t\to\infty\to u\to\infty$$

$$\therefore \Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-u^2}(u^2)^{x-1}\;2udu$$

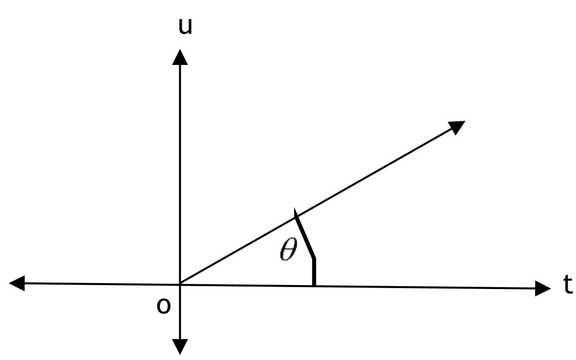
$$=2\int_0^\infty e^{-t^2}\;t^{2x-1}\;dt$$

$$\int_0^{\pi/2}\cos^{2x-1}\theta\;\sin^{2y-1}\theta d\theta=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{2\Gamma(x+y)}$$

البرهان:

سوف نبرهن هذه النتيجة بإيجاد التكامل الثنائي $I=\iint_R e^{-t^2-u^2}t^{2x-1}u^{2y-1}dt\,du$

حيث R هى المربع الأول للمستوى (t, u) الموضح بالشكل وبطريقتين مختلفتين:



شكل (٦-١)

أولاً: يكون لدينا

$$I = \int_{t=0}^{\infty} \left\{ \int_{u=0}^{\infty} e^{-t^2-u^2}\ t^{2x-1}\ u^{2y-1} dt \right\} du$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-t^2}\ t^{2x-1}\ dt \int_{0}^{\infty} e^{-u^2}\ u^{2y-1}\ du = \frac{1}{2}\Gamma(x).\frac{1}{2}\Gamma(y)$$

والآن بتغيير المتغيرات إلى الإحداثيات القطبية وذلك باستخدام التعويضات $t = r\cos\theta,\ u = r\sin\theta$ نحصل على عنصر المساحة فى الصورة $rdrd\theta$ ويؤول التكامل إلى الصورة

$$I = \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\pi/2} e^{-r^2}\ r^{2x-1}\ \cos\theta^{2x-1} r^{2y-1} \sin\theta^{2y-1} rdrd\theta$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-r^2}\ r^{2(x+y)-1}\ dr \int_{0}^{\pi/2} \cos^{2x-1}\theta \sin^{2y-1}\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\Gamma(x+y)\int_{o}^{\pi/2} \cos\theta^{2x-1} \sin\theta^{2y-1} d\theta$$

وبمطابقة النتيجتين نحصل على المطلوب.

$$(6)\quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

بوضع $x = y = \dfrac{1}{2}$ فى (5) نحصل على

$$\left(\pi/2\right) = \int_{0}^{\pi/2} d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(1)} = \frac{1}{2}\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2$$

وحيث أن $\Gamma(x)$ يجب ان تكون موجبة نحصل على $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

(ii) دالة بيتا:

تُعرف دالة بيتا $\beta(m,n)$ من التكامل

$$\beta(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx \qquad (1)$$

حيث m, n عددان حقيقيان موجبان حتى يكون التكامل متقارباً.

٦/٧- أمثلة محلولة:

مثال(١): اوجد قيم كل من التكاملات الآتية:

$$(i)\int_o^{\pi/2} (\tan\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta \qquad (ii)\int_o^{\infty} t^{-3/2}(1-e^{-t})dt$$

$$(iii)\int_o^1 \frac{dx}{(1-x^3)^{1/3}} \qquad (iv)\int_{-1}^1 \left\{\frac{1+x}{1-x}\right\}^{\frac{1}{2}}dx$$

الحل:

(i) حيث أن

$$\int_o^{\pi/2} \cos^{2x-1}\theta\sin^{2y-1}\theta\, d\theta=2\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{2\Gamma(x+y)}, \qquad (1)$$

$$\tan^{\frac{1}{2}}\theta=\sin^{\frac{1}{2}}\theta\cos^{-\frac{1}{2}}\theta$$

بوضع $2x-1=-\dfrac{1}{2}$, $2y-1=\dfrac{1}{2}$ أي $x=\dfrac{1}{4}, y=\dfrac{3}{4}$

يمكن بسهولة باستخدام العلاقة (1) الحصول على

$$\int_o^{\pi/2} \{\tan\theta\}^{\frac{1}{2}}d\theta=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma(3/4)}{2\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)}=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma(3/4)$$

(ii) لايجاد التكامل $\mathrm{I}=\int_{o}^{\infty} t^{-3/2}(i-e^{-t})dt$

نستخدم التكامل بالتجزئ للحصول على

$$\int_{o}^{\infty} t^{-3/2}\left(1-e^{-t}\right)dt = \lim_{b\to\infty}\left\{-2t^{-1/2}\left(1-e^{-t}\right)\right\}_{0}^{b}$$

$$-\int_{o}^{\infty} -2t^{-1/2}e^{-t}dt = o+2\int_{o}^{\infty} t^{-1/2}e^{-t}dt = 2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= 2\sqrt{\pi}$$

(iii) $$\mathrm{I}=\int_{o}^{1}\frac{dx}{\left(1-x^{3}\right)^{1/3}}=\int_{o}^{1}\left(1-x^{3}\right)^{-1/3}dx$$

وبإستخدام التعويض $t = x^{3}$ نحصل على

$$\int_{o}^{1}\left(1-x^{3}\right)^{-\frac{1}{3}}dx = \int_{o}^{1}(1-t)^{-1/3}\frac{1}{3}t^{-2/3}dt$$

$$=\frac{1}{3}\beta\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)$$

(iv)- لايجاد التكامل $\int_{-1}^{1}\left\{\frac{1+x}{1-x}\right\}^{1/2}dx$ نستخدم التعويض

$$t=\frac{1}{2}\left(1+x\quad\right)$$

وبذلك يؤول التكامل المطلوب إلى الصورة

$$2\int_{o}^{1} t^{1/2}\left(1-t\quad\right)^{-1/2}dt = 2b\left(3/2, 1/2\quad\right)$$

$$=2\ \ 1/2\ \frac{\Gamma^{2}(1/2)}{1!}=\pi$$

مثال(٢): اوجد قيمة كل من التكاملات الآتية:

$$(i)\int_0^\infty y^{1/2}e^{-y^3}dy$$

$$(ii)\int_0^\infty 3^{-4z^2}dz$$

الحل:

(i) - بوضع $y^3 = x$ نحصل على

$$\int_o^\infty y^{1/2}e^{-y^3}dy = \frac{1}{3}\int_o^\infty x^{-1/2}e^{-x}dx = \frac{1}{3}\Gamma(1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{3}$$

(ii)- بوضع $(4\ln 3)z^2 = x$ نحصل على

$$\int_0^\infty 3^{-4\lambda^2}dz = \int_0^\infty \frac{1}{2\sqrt{4\ell\eta 3}}x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{-4\sqrt{\ell\eta 3}}$$

مثال (٣): اوجد قيمة التكامل $\int_0^\infty x^m e^{-ax^n}dx$

حيث m, n, a ثوابت موجبة

الحل:

باستخدام التعويض $ax^n = y$ فإن

$$\int_0^\infty x^m e^{-ax^n}dx = \frac{1}{n\,a^{(m+1)/n}}\int_0^\infty y^{\frac{m+1}{n-1}}e^{-y}dy = \frac{1}{n\,a^{(m+1)/n}}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$$

مثال(٤): عبرعن التكامل $\int_0^{\pi/2} \sin^{\rho}\theta d\theta$ بدلالة دالة جاما

الحل:

بوضع $2m-1=\rho$ ، $2n-1=0,$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta \ \cos^{2n-1}\theta = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{2\Gamma(m+n)}, \quad m,n>o$$

نحصل على

$$\int_o^{\pi/2} \sin^{\rho} d\theta = \frac{\Gamma\left\{\left(\rho+\frac{1}{2}\right)\right\}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left\{\left(\frac{\rho+2}{2}\right)\right\}}$$

مثال(٥): بفرض أن:

$$\int_o^{\infty} \frac{x^{\rho-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin\rho\pi}$$

أثبت أن $0<\rho<1$; $\Gamma(\rho)\Gamma(1-\rho) = \dfrac{\pi}{\sin\rho\pi}$

الحل:

بوضع $\dfrac{x}{1+x}=y$ نحصل على

$$\int_o^{\infty} \frac{x^{\rho-1}}{1+x} dx = \int_o^1 y^{\rho-1}(1-y)^{-\rho} dy = \beta(\rho,1-\rho)$$
$$=\Gamma(\rho)\Gamma(1-\rho)$$

مثال(٦): اوجد قيمة: $\int_{o}^{\infty} \frac{dy}{1+y4}$

الحل:

بوضع $y^{4}=x$ فإن التكامل يؤدى إلى

$$\frac{1}{4}\int_{o}^{\infty} \frac{x^{-3/4}}{1+x}dx = \frac{\pi}{4\sin \pi/4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

وذلك بوضع $\rho = \frac{1}{4}$ فى المثال السابق

مثال(٧): بين أن: $\int_{o}^{2} x\,(8-x^{3})^{1/3}dx = \frac{16\pi}{9\sqrt{3}}$

الحل:

بوضع $x^{3}=8y$ يؤدى التكامل إلى

$$\frac{8}{3}\int_{o}^{1} y^{-1/3}(1-y)^{1/3}dy = \frac{8}{3}\beta\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$$

$$= \frac{8}{3}\Gamma(2/3)\Gamma(4/3) = \frac{8}{9}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{8}{9}\,\frac{\pi}{\sin \pi/3} = \frac{8}{9}\,\frac{2\pi}{\sqrt{3}} = \frac{16\pi}{9\sqrt{3}}$$

٨/٦- تمارين:

اوجد تحويل لابلاس لكل من الدوال الآتية:

$(1)\cos 4t$, $(2)\,3t$, $(3)\,te^{2t}$

$(4)\,3\sin 5t$, $(5)\,e^{3t}(1+t^{2})$, $(6)\,e^{-t}\cosh 5t$

$(7)\cos 5t + t\sin t$, $(8) te^{2t}\sin 3t$

$(9) t^3\cos 52t$, $(10) t^6 e^{3t}$, $(11) t^2\sin 6t$

$(12) 2e^{-4t} + 3e^{4t}$, $(13) e^{3t}(2t + t^2 + 3t^3)$

$(14) \dfrac{\sinh t}{t}$, $(15) \dfrac{1-\cos 2t}{t}$

$(16) \sin kt \;\; \cos kt$, $(17) \cos(wt+\theta)$

$(18) \cos^2 kt$, $(18) \cos^4 t$, $(19) \sin^3 t$

$(20) e^{-t}\sin^2 t$, $(21)\ \cosh^2 4t$

$(22)\ (\sin t - \cos t)^2$, $(23)\ te^{-2t}\sin wt$

$(24) \dfrac{e^{-2t} - e^{-3t}}{t}$, $(25) \dfrac{\cos at - \cos bt}{t}$

$(26) \sin t \sin 2t \sin 3t$, $(27) \cos t \cos 2t \cos 3t$

(٢٨) فى التمارين التالية اوجد تحويل لابلاس العكسية لكل من الدوال الآتية:

$(i)\dfrac{s}{s^2+4s+8}$, $(ii)\dfrac{2s+1}{(s-3)^2}$, $(iii)\dfrac{1}{s}\{\dfrac{s-\alpha}{s+\alpha}\}$

$(iv)\dfrac{1}{(s^4-2s^3}$, $(v)\dfrac{5}{(s+\alpha)^2+b^2}$, $(vi)\dfrac{2s-5}{s^2-\vartheta}$

$(vii)\dfrac{s^2-3}{(s+2)(s-3)(s^2+2s+5)}$, $(viii)\dfrac{1}{s^2}\left\{\dfrac{s+1}{s^2+1}\right\}$

$(ix)\dfrac{s+2}{s^2(s+3)}$, $(x)\dfrac{2s^2+s-10}{(5-4)(s^2+2s+2)}$

$(xi)\dfrac{2s^2+s-10}{(5-4)(s^2+2s+2)}$, $(xii)\dfrac{1}{s^2(s^2+1)(s^2+4)}$

$(xiii)\dfrac{s+1}{(s-1)(s+2)^2}$, $(xiv)\dfrac{s+2}{s(s-3)(s^2+1)}$

$(xv)\dfrac{5s-6}{(5+4)(s^2+2s+2)}$, $(xvi)\dfrac{s}{(5+\alpha)^2-b^2}$

(٢٩) باستخدام تحويلات لابلاس اوجد حل المعادلات التفاضلية الآتية:

$$(i)\ 2\dot{x}+5x=e^{-2t} \qquad x(0)=1$$

$$(ii)\ 4\dot{x}-3x=\sin 2t \qquad x(0)=\frac{1}{4}$$

$$(iii)\ \ddot{x}-5\dot{x}+6x=0 \qquad x(0)=0,\quad \dot{x}(0)=5$$

$$(iv)\ \ddot{x}-2\dot{x}+5x=e^{-2t} \qquad x(0)=0,\quad \dot{x}(0)=4$$

$$(v)\ \ddot{x}-4\dot{x}+4x=\sin 3t \qquad x(0)=0,\quad \dot{x}(0)=4$$

$$(vi)\ \dddot{x}-\ddot{x}+\dot{x}-x=e^{-2t}, \qquad x(0)=0,\quad \dot{x}(0)=1,\quad \ddot{x}(0)=0$$

$$(vii)\ \dddot{x}-2\ddot{x}-\dot{x}+2x=2+t, \qquad x(0)=0,\quad \dot{x}(0)=1,\quad \ddot{x}(0)=0$$

$$(viii)\ \dddot{x}+\ddot{x}+\dot{x}+x=4, \qquad x(0)=0,\quad \dot{x}(0)=0,\quad \ddot{x}(0)=3$$

(٣٠) اوجد قيمة y التي تحقق المعادلتين:

$$\ddot{y}-5y-5x=0;$$

$$\ddot{x}+x+y=0;\quad x(0)=y(0)=0,\quad \dot{x}(0)=0,\quad \dot{y}(0)_1=2$$

(٣١) اوجد حل كل من النظم الآتية:

$$(i)\ \dot{y}+2x=e^{-t}\ ,\quad \dot{x}-2y=e^{t}$$

$$(ii)\ 2\dot{x}-6x+3y=0\ ,\ 3\dot{y}-3y-2x=0,\ x(0)=3,\ y(0)=1$$

(٣٢) اوجد حل نظام للمعادلات الآتية:

$$\dot{x}-2x+y=0,\quad \dot{y}+2x-3y=0,\quad x(0)=0;\ y(0)=0$$

(٣٣) اوجد قيمة x التى تحقق النظام

$$\ddot{x}+3\dot{x}-2x+\dot{y}-3y=2e^{2t}$$

$$2\dot{x}-x+\dot{y}-2y=0;\quad x(0)=\dot{x}(0)=0;\quad y(0)=4$$

(٣٤) إذا كان

$$\ddot{x} - x + 5\dot{y} = t; \quad \ddot{y} - 4y - 2\dot{x} = -2,$$

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0; \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 0$$

اوجد y بدلالة t

(٣٥) اوجد حل أزواج المعادلات الآتية مستعينا بالشروط الإبتدائية المعطاة:

$$(i)\ \dot{x} + 5x + y = e^{-t}; \ \dot{y} - x + 3y = e^{-2t}; \ x(0) = \frac{1}{2}; \ y(0) = \frac{2}{3}$$

$$ii)\quad \ddot{x} + 5\dot{y} - 4x = 3\sin 2t; \ddot{y} - 5\dot{x} - 4y = 0;$$

$$x(0) = y(0) = \dot{y}(0) = 0, \qquad \dot{x}(0) = 1$$