الفصل الرابع
الصياغة الرياضية لتوازن المنتج عامة

مقدمة:

يمثل التوازن المذكور هنا التوازن الساكن أو الإستراتيجي Static وهو يبين التصرف الأمثل للمنشأة ، وهو يبين على عدة فروض هي:

١- استمرار الإنتاج أي أن الإنتاج متصل ولا يتوقف على فترة زمنية معينة.

٢- أن الهدف الأساسي لنشاط المنشأة هو تحقيق الحد الأقصى للربح من خلال زيادة الإنتاج (تعظيم) وتقلقل التكاليف (تصغيرها لحدها الأدنى) .

٣- أن دالة الإنتاج معروفة .

٤- أن أسعار السلع والخدمات وكذلك عناصر الإنتاج ثابتة ، وذلك في ظل سيادة المنافسة التامة بالطبع .

هذا ويتحقق توازن المنشأة في الحالات المختلفة (تبعاً لما سبق ذكره من اشتراطات لتوازن المنتج) على النحو التالي في صيغة رياضية.

١- التوازن بالنسبة لاستخدامات عناصر الإنتاج :

حيث الإيراد الحدي = السعر ، (م ع هي المرونة السعرية وهي أيضاً مرونة الطلب م ط).

ر ح – ع ويساوي أيضاً = ع $\left[1 + \frac{1}{\text{م ع}} \right]$ (1)

ويفرض أن دالة الإنتاج هي ص = د(س١ ، س٢) في حالة استخدام عنصري إنتاج فقط هما س١ ، س٢ لإنتاج السلعة ص :

حيث ت ل التكاليف الكلية ، س١ ، س٢ الكميات المستخدمة من العنصرين[1] .

ر١ ، ر٢ أسعار هذين العنصرين ، م ط س١ ، م ط س2 مرونة الطلب لعناصر الإنتاج المذكورة.

وحيث تعتمد الكمية المستخدمة من س١ على الكمية المستخدمة من س٢.

∴ س١ = د (س٢)

---

(1) السعر = الإيراد الحدى أي ع = ر ح ، لأن الإيراد الحدي

$$\frac{\text{التغير في الإيراد الكلي}}{\text{التغير في الكمية}} = \frac{\text{د (ع ك)}}{\text{د (ك)}}$$

$$\text{مرونة الطلب السعرية} = \frac{\text{د ك}}{\text{دع}} \times \frac{\text{ع}}{\text{ك}}$$

الإيراد الحدي = الإيراد المتوسط في ظل المنافسة أي ر ح = ر م .

$$\therefore \text{الإيراد المتوسط (ر م)} = \frac{\text{الإيراد الكلي}}{\text{الكمية}} = \frac{\text{ك . ع}}{\text{ك}}$$

$$\therefore \text{السعر ع} = \text{د (ك)}$$

$$\therefore \text{ر م} = \frac{\text{ك د (ك)}}{\text{ك}} = \text{د (ك)} = \text{ع}$$

أي أن الإيراد الحدي – الإيراد المتوسط = السعر

والإيراد الحدي في هذه الحالة – ع $\left[1 + \frac{1}{\text{م ع}} \right]$

حيث ع السعر ، م ع المرونة السعرية للطلب

في ظل المنافسة التامة = @ ∴ $\frac{1}{\text{م ع}}$ = صفر

ولإيجاد علاقة التوازن في المعادلة (١) يؤخذ التفاضل الجزئي بالنسبة لـ س١ .

$$\frac{(ت\ ل)}{س_1\ a}a - ر_1 \left[1 + \frac{1}{م\ ط\ س_1}\right] + ر_2 \left[1 + \frac{1}{م\ ط\ س_2}\right] \frac{د\ س_2}{د}$$

وبعد ذلك تساوي المعادلة بالصفر لغرض تقليل التكاليف إلى أقل ما يمكن .

$$\therefore ر_1 \left[1 + \frac{1}{م\ ط\ س_1}\right] + ر_2 \left[1 + \frac{1}{م\ ط\ س_2}\right] \frac{د\ س_2}{د\ س_1}$$

$$\frac{-د\ س_2}{د\ س_1} = \frac{\frac{1}{ر_1 (1 + م\ ط\ س_1)}}{\frac{1}{ر_2 (1 + م\ ط\ س_2)}}$$

$$= \frac{\text{التكاليف الحدية للعنصر س}_1}{\text{التكاليف الحدية للعنصر س}_2}$$

وهي شرط التوازن الساكن وفي حالة المنافسة التامة حيث تكون التكاليف الحدية مساوية للسعر:

فإن شرط التوازن الساكن يكون : $\frac{-د\ س_2}{د س_1} = \frac{ر_1}{ر_2}$

وفي حالة المنافسة غير التامة يكون شرط التوازن الساكن هو :

$$-\frac{د\ س_2}{د\ س_1} = \frac{ك_1}{ك_2}$$ حيث ك التكاليف الحدية

أي أن معدل الإحلال الحدي للعنصر س١ بدلاً من س٢ يساوى مع مقلوب نسبة التكاليف الحدية للعنصرين .

٢- التوازن بالنسبة للعلاقة بين عناصر الإنتاج والناتج :

بفرض أن دالة الإنتاج هي السابق ذكرها للسلعة ك .

وهي : ك = د (س١ ، س٢) ،

وأن الإيراد الكلي ر ك = ك ع = ك x ر ح

$$\text{ر ح} = \text{ع} \left(١ + \frac{١}{\text{م ع}} \right)$$

∴ الربح (ح) =

$$\text{ك ع} \left(١ + \frac{١}{\text{م ع}} \right) - \text{س١ ر١} \left(١ + \frac{١}{\text{م ط س١}} \right) - \text{س٢ ر٢} \left(١ + \frac{١}{\text{م ط س٢}} \right)$$

حيث ك الكمية المباعة ، ع السعر الخاص بالسلعة .

م ع مرونة الأسعار ، س١ ، س٢ عناصر الإنتاج .

ر١ ، ر٢ أسعار هذه العناصر، م ط س١ ، م ط س٢ مرونات الطلب على العنصرين .

ولتحقيق الربح الأقصى، يؤخذ التفاضل الجزئي للمعادلة بالنسبة لـ س١ ثم تساوي المعادلة بالصفر .

$$\frac{\text{a ر ح}}{\text{a س١}} = \frac{\text{a د(س١، س٢)}}{\text{a س١}} \text{ ع} \left[\frac{١}{\text{م ط}} + ١ \right] - \text{ر١} \left[\frac{١}{\text{م ط س١}} + ١ \right] = \text{صفر}$$

$$\text{ثم } \frac{\text{a ر ح}}{\text{a س١}} = \frac{\text{a ك}}{\text{a س١}} \text{ ع} \left[\frac{١}{\text{م ط}} + ١ \right] - \text{ر١} \left[\frac{١}{\text{م ط س٢}} + ١ \right] = \text{صفر}$$

$$\frac{a\,ك}{a\,س_1} = \frac{ر_1 \left[1 + \frac{1}{م\ ط\ س} \right]}{ع \left[1 + \frac{1}{م\ ط\ س} \right]}$$

$$= \frac{\text{التكاليف الحدية لـ س}_1}{\text{الإيراد الحدي من ك}}$$

وفي حالة المنافسة الكاملة في كل من سوق خدمات عناصر الإنتاج وسوق السلعة ك

$$\therefore \quad \frac{a\,ك}{a\,س_1} = \frac{ر_1}{ع}$$

وحيث $\frac{a\,ك}{a\,س_1}$ هي الإنتاج الحدي للعنصر س١ ويكتب عادة $\frac{د\,ك}{د\,س_1}$ إذا كان هو عنصر الإنتاج الوحيد .

$$\therefore \quad \frac{د\,ك}{د\,س_1} = \frac{ر_1}{ع}$$

أي توازن المنتج هنا في ظل المنافسة الكاملة يتحقق بتساوي الناتج الحدي (كمية) لنسبة سعر العناصر إلى سعر الكمية المنتجة.

٣- التوازن في حالة علاقات النواتج ببعضها البعض :

يفترض هنا كمثال أن لدينا سلعتان هما ك١ ، ك٢ لذا فإنه يمكن القول بأن:

ك١ = د (ك٢)

ك٢ = د (ك١)

لأن كمية إنتاج أي منهما تعتمد على كمية إنتاج الأخرى .

وحيث أن الربح (ح) = الإيرادات الكلية (ر ل) – التكاليف الكلية (ت ل) ودالتا الإنتاج في حالة وجود عنصري إنتاج فقط لإنتاج كلتا السلعتين هما : ك١ = (س١ ، س٢)

ك٢ = د (س١ ، س٢)

أما الإيراد الكلي بصفة عامة فهو :

$$\text{ر ل} = \text{ك}_1 \, \text{ع}_1 \left(1 + \frac{1}{\text{م ط}_1} \right) + \text{ك}_2 \, \text{ع}_2 \left(1 + \frac{1}{\text{م ط}_2} \right)$$

وهو ينطبق على حالة عدم وجود منافسة تامة .

فللتعرف على توازن المنتج بالنسبة للسلعتين ، يؤخذ التفاضل الجزئي لدالة الإيراد الكلي أولاً ثم يساوي بالصفر لتقليل التكاليف إلى أدنى حد ممكن .

فبأخذ التفاصيل الجزئي لدالة الإيراد الكلي بالنسبة للسلعة ك١ .

$$\frac{a\,(\text{ر ل})}{a\,\text{ك}_1} = \text{ع}_1 \left(1 + \frac{1}{\text{ك ط}_1} \right) + \text{ع}_2 \left(1 + \frac{1}{\text{م ط}_2} \right) \frac{\text{د ك}_2}{\text{د ك}_1}$$

؛ بمساواة المعادلة بالصفر .

$$\therefore \text{ع}_1 \left(1 + \frac{1}{\text{م ط}_1} \right) + \text{ع}_2 \left(1 + \frac{1}{\text{م ط}_2} \right) \frac{\text{د ك}_2}{\text{د ك}_1} = \text{صفر}$$

$$\therefore \frac{\text{د ك}_2}{\text{د ك}_1} = \frac{\text{ع}_1 \left(1 + \frac{1}{\text{م ط}_1} \right)}{\text{ع}_2 \left(1 + \frac{1}{\text{م ط}_2} \right)}$$

أي أن معادلة الإحلال الحدي للسلعة ك١ بدلاً من ك٢ يتساوى مع نسبة الإيراد الحدي من السلعة ك١ إلى الإيراد الحدي من السلعة ك٢ .

وحيث يتساوى الإيراد الحدي للسلعة مع سعرها في ظل المنافسة التامة فإنه في ظل المنافسة التامة يكون :

$$\frac{\text{د ك}_{٢}}{\text{د ك}_{١}} = \frac{\text{ع}_{١}}{\text{ع}_{٢}} =$$

٤- توازن المنشأة بالنسبة لكافة العلاقات الإنتاجية :

وهو عبارة عن التوازن للعلاقات الثلاث السابقة ، وهو يجمع التوازنات الثلاث لأنها تمثل معا التصرف الأمثل للمنشأة الهادفة نحو تحقيق أقصى ربح ممكن .

وفيما يلي خلاصة توازنات هذه العلاقات الثلاث في ظل كل من المنافسة التامة والمنافسة غير التامة .

أ _ في حالة المنافسة التامة :

$$١ - \frac{\text{د س}_{٢}}{\text{د س}_{١}} = \frac{\text{ر}_{١}}{\text{ر}_{٢}}$$

حيث س العناصر ، ر سعر العناصر .

أي تساوي معدل الإحلال الحدي بين العناصر مع مقلوب النسبة السعرية للعنصرين .

$$٢ - \frac{\text{د ك}}{\text{د س}_{١}} = \frac{\text{ر}_{١}}{\text{ر}_{٢}}$$

حيث ك هي الناتج ، ع سعر السلعة .

أي تساوي الناتج الحدي مع نسبة سعر العنصر (أي التكاليف الحدية) إلى سعر الكمية المنتجة (الإيراد الحدي) .

$$٣- \frac{\text{د ك}_{٢}}{\text{د ك}_{١}} = \frac{\text{ع}_{١}}{\text{ع}_{٢}}$$

أي تساوي معدل الإحلال الحدي بين السلعتين ك١ ، ك٢ مع النسب السعرية للسلعتين .

ب ـ في حالة المنافسة غير التامة :

$$١- \frac{\text{د س}_{٢}}{\text{د س}_{١}} = \frac{\text{ر}_{١}\left(١ + \frac{١}{\text{م ط س}_{١}}\right)}{\text{ر}_{٢}\left(١ + \frac{١}{\text{م ط س}_{٢}}\right)}$$

$$١- \frac{\text{د ك}}{\text{د س}_{١}} = \frac{\text{ر}_{١}\left(١ + \frac{١}{\text{م ط س}_{١}}\right)}{\text{ع}\left(١ + \frac{١}{\text{م ط ك}}\right)}$$

$$٣- \frac{\text{د ك}_{٢}}{\text{د ك}_{١}} = \frac{\text{ع}_{١}\left(١ + \frac{١}{\text{م ط}_{١}}\right)}{\text{ع}_{٢}\left(١ + \frac{١}{\text{م ط}_{٢}}\right)}$$