مقدمة إلى
فلسفة الرياضيات

برتراند رسل

◆ المؤلف: برتراند رسل
◆ العنوان : مقدمة إلى فلسفة الرياضيات
◆ ترجمة : أحمد سمير سعد
◆ الطبعة الأولى 2021
◆ تصميم الغلاف: عمرو الكفراوي
◆ مستشار النشر: سوسن بشير
◆ المدير العام: مصطفى الشيخ

رقم الإيداع:
٢٠٢٠/١٣٩٨٨
الترقيم الدولي : ISBN
978-977-765-276-6

جميع الحقوق محفوظة. لا يسمح بإعادة إصدار هذا الكتاب أو أي جزء منه، أو تخزينه في نطاق استعادة المعلومات، أو نقله بأي شكل من الأشكال دون إذن مسبق من الناشر.

All rights are reserved. No part of this book may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted in any form, or by any means without prior permission in writing from the publisher.

Afaq Bookshop & Publishing House

1 Kareem El Dawla st. - From Mahmoud Basiuny st. Talaat Harb
CAIRO – EGYPT - Tel: 00202 25778743 - 00202 25779803 Mobile: +202-01111602787
E-mail:afaqbooks@yahoo.com – www.afaqbooks.com

١ شارع كريم الدولة- من شارع محمود بسيوني - ميدان طلعت حرب- القاهرة - جمهورية مصر العربية
ت: ٢٥٧٧٨٧٤٣ ٠٠٢٠٢ - ٢٥٧٧٩٨٠٣ ٠٠٢٠٢ - موبايل: ٠١١١١٦٠٢٧٨٧

مقدمة
إلى فلسفة الرياضيات

تأليف
برتراند رسل

ترجمة
أحمد سمير سعد

آفاق للنشر والتوزيع

بطاقة الفهرسة
إعداد الهيئة العامة لدار الكتب والوثائق القومية
إدارة الشؤون الفنية

رسل، برتراند

مقدمة إلى فلسفة الرياضيات - برتراند راسل

ترجمة: أحمد سمير سعد

ط1 القاهرة -آفاق للنشر والتوزيع - 2021

352 ص، 24 سم.

رقم الإيداع 13988 / 2020

الترقيم الدولي 978 - 977 - 765 - 276 - 6

1 - فلسفة

أ - العنوان

شكر وتقدير

ارتأيت أنه سيكون من الجيد لو أننا أضفنا إلى هذه الترجمة موجزًا مختصرًا لتاريخ المنطق وعلاقته بالرياضيات، حيث سيزيد ذلك من فائدة الكتاب؛ برسمه صورة عامة للموضوع.

وقد تكرم المهندس الصديق عبد الحفيظ العمري (الكاتب العلمي والمحاضر بجامعة العلوم والتكنولوجيا بإب – اليمن) بالاضطلاع بهذا الأمر بعد إلحاح مني عليه، ولم تقف إسهاماته عند ذلك، بل عاونني بشكل كبير في ضبط الاصطلاحات وتدقيق الترجمة.. خالص الشكر والتقدير له.

المترجم

أحمد سمير سعد

القاهرة – ديسمبر 2019

رحلة المنطق وعلاقته بالرياضيات
من أرسطو حتى راسل

بقلم: عبد الحفيظ العمري[1]

عندما رانت أزمة أسس الرياضيات في منتصف القرن التاسع عشر قام علماء رياضيات بفحص أصول الرياضيات وسلكوا في ذلك سبلًا شتى، وكان الفيلسوف برتراند راسل- مؤلف هذا الكتاب - واحدًا من هؤلاء، حتى قيل عنه -إنه «أعظم الباحثين في - أو عن- أصول الرياضيات، وأعظم المناطقة في القرن العشرين وفي تاريخ الفكر الإنساني برمته»، وذلك من خلال كتابه برنكبيا ماتيماتيكا Principia Mathematica -الذي كتبه مع الفيلسوف ألفرد وايتهيد- هذا الكتاب الذي ينبغي أن يُعد من المعالم البارزة للقرن العشرين.

إذَنْ نحن أمام منطق ورياضيات؛ فلا بد لنا أن نعرف العلاقة بينهما، ولماذا البحث عن أصول الرياضيات.

---

(1) الكاتب العلمي والمحاضر بجامعة العلوم والتكنولوجيا بإب- اليمن.

إرهاصات المنطق الأرسطي:

المنطق ربيب الإغريق الذين ازدهرت حضارتهم قبل ما يقرب من 2500 سنة، وتوسعت حتى وصلت لذروتها في أثينا في منتصف القرن الخامس قبل الميلاد، وشملت مدنًا في مناطق خارج اليونان أمثال أيونيا ومالطة وإفسوس في آسيا الصغرى والإسكندرية في مصر، وإيليا في جنوب الساحل الإيطالي.

الاستقرار الذي نعمت به اليونان وحبهم للتفاصيل صنع حضارة دأبت على تمجيد النظر وفي نفس الوقت تحقير العمل اليدوي، فليس غريبًا أن يلد للتفكير الخالص علم المنطق، الذي يمكن تعريفه ببساطة بأنه علم يدرس قوانين التفكير الأساسية، بصرف النظر عن مادة هذا التفكير أو موضوعه فهو معنيٌّ بصحة الاستدلال وسلامة الانتقال من المقدمات إلى النتائج، ولا شأن له بالحكم بانطباقها أو عدم انطباقها على الواقع، إنه معنيٌّ بالصحة وليس بالصدق، فالصحة أو البطلان خاصة للاستدلال.

طبعًا أكثر ما يُنسب ابتكار المنطق لأرسطو (384 – 322 ق.م)؛ تقول د. يمنى طريف الخولي: «المنطق الذي خلقه أرسطو خلقًا مما يشبه العدم»!

الواقع أن أرسطو قد جنى ثمرة مَن سبقه من الفلاسفة الذين مهدوا له الطريق لابتكار قواعد المنطق القديم كاملة؛ فيمكننا اعتبار زينون الإيلي (490 – 430 ق.م) بالإضافة إلى كلٍّ من سقراط (469 – 399 ق.م)

وأفلاطون (427 – 347 ق.م) مبشرين بظهور المنطق؛ فزينون الإيلي قدّم واحدة من المفارقات الرياضية والفلسفية معًا حول الما لا نهاية، والتي تقودنا إلى أن الطبيعة الأساسية للحركة تجعلها (الحركة) مستحيلة والتي تُعرف بمفارقة أخيل والسلحفاة [2]!

وقد وضعت هذه المفارقة انتصارًا لمبدأ أستاذه بارمينيدس **Parmenides** (515 – 440 ق.م) القائل بأن التغيّر وهم!

بالمناسبة قد اعتبر راسل أن بارمينيدس هو مستكشف المنطق!

أما سقراط؛ فمعه بدأت الفلسفة الحقة بوضعه منهجًا مبتكرًا للتفكير يُعرف بالمنهج التهكمي أو التوليدي، والذي من خلاله يضبط المفاهيم ويعري المغالطات المبنية على التناقض، يعد الحرص على عدم الوقوع في هذا الأخير المبدأ الأساسي لكل عملية منطقية، في حين قدم أفلاطون نظرية المُثل **Ideas** (وأحيانًا تُسمَّى الصور **Form**)؛ حيث رأى أن المواد التي ضمن حواسنا ما هي إلا أشياء مقلدة عن مثالها الأسمى في عالم الحقيقة الذي لا يُدرك، فالصورة الجميلة ما هي إلا تقليد لمثال الجمال ذاته، وهذه المُثل لا تُدرك إلا بالعقل.

---

(2) مجرد فكرة نظرية حول السباق بين أخيل والسلحفاة، أخيل سريع العدو، هو أحد أبطال إلياذة هوميروس، والسلحفاة معروفة ببطئها الشديد في السير.

في بداية السباق، السلحفاة تتقدم على أخيل بمسافة ما، وهذا عدل. لكي يلحق أخيل بالسلحفاة، عليه أن يصل إلى المكان الذي كانت توجد فيه السلحفاة في بداية السباق. فتكون السلحفاة قد سبقته بمسافة أخرى.

لكي يلحق أخيل بالسلحفاة في المسافة الثانية، تكون قد سبقته بمسافة ثالثة. وهكذا إلى ما لا نهاية. أي أن أخيل لن يلحق بالسلحفاة مهما كانت سرعته بالنسبة لسرعة السلحفاة. وأيضًا يمكننا حل هذه المشكلة باستخدام المتواليات الهندسية اللا نهائية.

وعرض أفلاطون مثالًا لتقريب ذلك إلى الأذهان في تشبيه الكهف؛ فقد تخيل أننا سجناء في كهف لا نرى إلا ظلال الأشياء المنعكسة على بوابة الكهف فنظنها الأشياء نفسها، لكن أحد المسجونين يهرب من الكهف، فيكتشف أن الأشياء في الخارج هي الحقيقية وما نراه في بوابة الكهف ما هو إلا ظلالها.

أُطلق على عالم الحقيقة التي فيها هذه الصور اسم اللوجوس **Logos**، وهذه الكلمة اشتقت منها لفظة المنطق **logic** وكذلك المقطع **logy** الذي يُضاف إلى الكلمة ليفيد معنى العلم مثل علم الحياة **Biology** وعلم الكونيات **Cosmology** وعلم المعادن **Mineralogy** ...إلخ.

أفكار أفلاطون عن الصور سنجد أثرها في الرياضيات لاحقًا.

ولو عدنا إلى أرسطو، لوجدنا أنه لم يُطلق على المنطق هذا الاسم، بل سماه العلم التحليلي أو التحليلات في كتابه الجامع لعمله في المنطق والمُسمَّى بالأورجانون **Organon**، أي الأداة أو آلة التفكير، وكان الإسكندر الأفروديسي في القرن الثاني الميلادي أول مَن استخدم مصطلح **Logic**.

المنطق الأرسطي أو الصوري:

إذا كانت تلك هي الإرهاصات، فإن علم المنطق الصوري نشأ ناضجًا مكتملًا في القرن الرابع والثالث قبل الميلاد على يد المعلم الأول أرسطو أعظم فلاسفة الإغريق، منقسمًا إلى نوعين؛ الأول: المنطق الصغير **Logica minor** وهو دراسة قوانين الفكر مجردة من

كل مضمون ويبحثها أرسطو حين يتكلم عن القياس كما في التحليلات الأولى وهو المتعارف عليه باسم المنطق الصوري، أما الثاني: المنطق الكبير **Logica major** وهو ما ينطبق على مناهج البحث ويقصد به دراسة عمليات العقل منطبقة على هذا العلم، أو ذاك كما في كتاب (التحليلات الثانية)، وهو يتكلم عن القياس مطبقًا على البرهان، صحيح أنه لم يهمل الناحية المادية لكن الناحية الغالبة هي الناحية الصورية فعُرف منطق أرسطو باسم المنطق الصوري.

ويدرس المنطق الصوري ثلاثة مباحث رئيسة وهي: مبحث الحدود والتصورات (الحد والتصور، المفهوم والماصدق...)، ومبحث القضايا (التركيبية والتحليلية، وكذلك قضية كلية أو جزئية)، ومبحث الاستدلالات (الاستدلال بنوعيه؛ المباشر وغير المباشر المتمثل في القياس). كما وضع أرسطو مبادئ أولية للوجود والفكر وهي الهوية وعدم التناقض والثالث المرفوع أو الوسط الممتنع؛ وهذا المبدأ الأخير هو حجر الزاوية في علم المنطق، فالوسط الممتنع معناه أن القضية لا بد أن تكون صائبة أو خاطئة، وليس الاثنين معًا.

اعتبر أرسطو أن التفكير عن طريق القياس هو النموذج النمطي المكتمل للمنطق؛ ويتكون من مقدمتين ونتيجة.

ويُسمَّى المنهج الاستنباطي الخالص، أي منهج استنتاج النتائج من المقدمات المطروحة اعتمادًا على قوانين العقل والمنطق فقط دون تجربة!

ولعل المثل الذي استخدمه لا يزال عالقًا في الأذهان:

«كل الناس فانون... (مقدمة).

سقراط إنسان... (مقدمة).

إذَنْ سقراط فانٍ... (نتيجة)».

وكان للرواقيين الذين جاءوا بعد أرسطو في العصر الهيليني المساهمة في إضافة أفكار على هذا المنطق الصوري، فالفيلسوف كريسبوس (281–205ق.م) اضطلع بوضع القواعد الملائمة لمعالجة ما نُسميه الآن بالدوال المنطقية «و»، «أو»، «ليس»، التي هي أدوات ربط بين القضايا، وقد سُميت دوالَّ لأنها تقوم بما تقوم به الدوال في الرياضيات حيث تلحق شيئًا محددًا تمامًا بشيء واحد أو عدة أشياء معطاة، التي هي هنا القضايا.

وكذلك فكرة الاستنباط المنطقي أو اللزوم، على غرار «إذا كان أ، فإن ب» أي التي تسير من الفروض إلى الاستنتاجات، وغيرها من القواعد.

لكن تعرض نصيب كبير من أفكار الرواقيين للإهمال أو سوء الفهم لفترة طويلة بسبب الفهم المشوب بالنقصان في العصور الوسطى، وبُخست حقها لحساب أعمال أرسطو وشرّاحه.

قد يُثار سؤال: لماذا يُسمَّى منطقًا صوريًّا؟

أي صورة بغير مضمون!

كان الفيلسوف كانط أول مَن استعمل مصطلح الصوري **Formal** كصفة لمنطق أرسطو.

لكن لماذا؟

لأن هذا المنطق مَعنيٌّ بصورة التفكير أو الفكر وهيكله وقالبه وإطاره العام، وليس بمضمونه الإخباري ومحتواه المعرفي؛ فهو مَعنيٌّ بصحة الاستدلال وسلامة الانتقال من المقدمات إلى النتائج، ولا شأن له بالحكم بانطباقها أو عدم انطباقها على الواقع، إنه معنيٌّ بالصحة وليس بالصدق، فالصحة أو البطلان خاصتان للاستدلال، أما الصدق أو الكذب فخاصتان للقضية.

هذه الصورية لدى المنطق الأرسطي (أي يعني بصورة الكلام دون مادته ومعناه) قد وجدت لها مجالين للتطبيق أحدهما الرياضيات والمجال الآخر في الكلمات أو العبارات اللفظية التي نعبّر بها عن عملية التفكير، والمنطق يتأرجح دائمًا بين هذين المجالين؛ رغم أن المجال الثاني هو صانع الفخاخ المتربصة بالمنطق بفعل غموض الكلمات أو نقصان المعرفة بالأشياء، وهذه الفخاخ سُميت بالمفارقات، ولعل مفارقة أخيل والسلحفاة – السالفة الذكر– واحدة منها.

الرياضيات والمنطق الصوري:

توسع الإغريق في حملاتهم العسكرية في الشرق خصوصًا، حيث وصلت جيوشهم إلى الهند مرورًا بمصر وفارس، لذا استفادوا من الفكر الشرقي القديم بصفة عامة والحضارتين المصرية والبابلية بصفة خاصة، ومن شعوب الشرق الأخرى، في نقل العلوم التي كانت لديهم، ومنها الرياضيات، لكنهم قاموا بتطويرها، فظهرت عندهم مفاهيم أساسية يقوم عليها البناء الرياضي النظري لم تكن موجودة من قبل، كما استعملوا

طرقًا جديدة في التفكير كالتجريد والتعميم والتحليل؛ وما مبرهنة فيثاغورس الشهيرة[3] وآراء طاليس في الهندسة[4] إلا نماذج لذلك، تلك الإرهاصات التي مهدت الطريق لإقليدس الإسكندري (360-295 ق.م) لإقامة نسقه الهندسي مطبقًا التحليل الأرسطي؛ فأصبح موضوع الرياضيات ماهيات ذهنية مجردة لها وجودها الموضوعي الكامل، تؤسس لعلم نظري اكتملت شروطه بعد أن صاغ له إقليدس منهجه في كتابه (الأصول)، ونجد أثر منطق أرسطو الصوري في كتابه، حيث المبادئ الخاصة بالرياضيات هي التعريفات والبديهيات والمسلمات[5]، فإذا كان أفلاطون يقر بعالم المُثل ويعتبر العالم الحسي عالمًا زائفًا، فإن أرسطو يقرُّ بالعكس تمامًا، وبالنسبة للرياضيات عند أرسطو فهي علم برهاني يحتاج لقيامه إلى أسس ومبادئ عامة ننطلق منها للبرهنة على جملة من القضايا والنظريات للوصول إلى نتائج يقينية، هذه المبادئ التي قدمها إقليدس اعتُبرت أنموذجًا للنظرية الاستنتاجية لا يتجاوز، بل يصعب حتى مضاهاته... حُرِص على اختيارها بحيث لا يساور العقل السليم أي شك في شأنها.

(3) مبرهنة فيثاغورس: في المثلث القائم الزاوية يكون مربع الوتر مساويًا لمجموع مربعي الضلعين الآخرين.

(4) نظرية التوازي المشهورة في المثلثات منسوبة إليه.

(5) التعريفات: وهي جملة من الحدود التي تعبر عن جوهر الأشياء وماهيتها وتهدف إلى الوصول لأقصى درجات الوضوح. من بينها: النقطة ليس لها بعد! البديهيات: وهي القضايا الواضحة بذاتها نقبلها من دون البرهنة عليها مثل: الكل أكبر من الجزء.

المسلمات: وهي قضايا غير واضحة بذاتها، ولكن الرياضي يطلب منا التسليم بها دون برهان، مع وعد منه بأنه سيشيد عليها بنيانًا رياضيًّا متماسكًا. مثل المسلمة الخامسة في التوازي التي سنتحدث عنها لاحقًا.

وعلى الرغم من أن كل ما تثبته هو صادق من الناحية الخبرية (أو التجريبية) فإن التجربة لا تُستدعى لتقدم تبريرًا؛ إذ لا يعمل عالم الهندسة إلا وفق الطريقة البرهانية.. مع الامتثال لقوانين المنطق وحدها.

إنه المنطق مرة أخرى، حتى أننا نجد أنه في اللحظة التي وُلد فيها المنطق وُلدت الرياضيات؛ لأنها لم تعد مقتصرة على تبيان أن خاصية ما تصدق على مثال ما أو شكل ما، باتت الآن قادرة على إثباتها عن طريق العقل فقط.

لقد وضع إقليدس أول نسق هندسي استنباطي سار جنبًا إلى جنب مع المنطق الأرسطي لأكثر من ألفي عام.

هيمنة منطق أرسطو في القرون الوسطى:

جاءت العصور الوسطى ودخلت أوروبا في سبات حضاري عميق امتد من سقوط الإمبراطورية الرومانية (تقريبًا في القرن الخامس الميلادي) حتى القرن السادس عشر الميلادي، هذه الفترة كان القياس الأرسطي هو المهيمن وذلك لأن الكتب المنزلة زاخرة بحقائق مُسلَّم بصحتها، قضايا كلية لا جدال في يقينها، يمكن أن تُوضع كمقدمات لنخرج بالجزئيات المترتبة عليها والمتضمنة فيها، أي نتوصل إلى النتائج الضرورية الصدق بواسطة القياس الأرسطي، واحتل أرسطو في تاريخ الفكر منزلة لم يحتلها فيلسوف من قبل ولا من بعد، ولا ننسى أن الفلسفة التي بدأت عند اليونان في البحث عن أصل الكون قد أنزلها سقراط من عرشها ووجَّهها للبحث عن الإنسان بعبارته المشهورة «اعرف نفسك»، ومَن جاء بعده لم يعودوا للبحث عن الطبيعة، بل ذهبوا مسالك شتى،

ثم كانت قبضة الكنيسة القوية في عصور الظلام التي «تمسك مفكروها بأورجانون أرسطو، وأقروه منهجًا وحيدًا للفكر لا بد أن يلتزم به أي مفكر وإلا كان خارجًا عن تعاليم المسيحية -ولو استطاع بعض فلاسفة المسيحية التوفيق بين فلسفة أرسطو وتعاليم الدين المسيحي- كل هذا دفع لتكريس مواهب العقول لخدمة اللاهوت، فلم يعد يرى المفكرون في الطبيعة ألا أنها صنيعة الخالق، والتساؤل عنها وعن العالم المادي بمعزل عن الرب بدا لرجال ذلك العصر هراء لا طائل من ورائه.

هكذا تراجع السؤال عن الطبيعة في حد ذاتها إلى أقصى الحدود، وإن لم يتوارَ نهائيًّا، فلا يعود ثمة احتياج لمناهج تجريبية تنصب عليها، وبالتالي ينفرد القياس الأرسطي بميدان البحث ليبدأ من يقين وينتهي إلى يقين!

ماذا عن العالم الإسلامي في تلك الحقبة؟

تُرجمت كتب أرسطو، في أواسط القرن التاسع الميلادي/ الثالث الهجري، وراجعها على الأصل اليوناني ونقحها وهذبها الجيل الثاني من المترجمين وعلى رأسهم حنين بن إسحق وولده إسحق بن حنين، وترجموا أيضًا شروحًا وتعليقات، ولعل أشهر الذين اشتغلوا على ذلك فيلسوف قرطبة ابن رشد الحفيد (520 - 595هـ) الشارح الأكبر لأعمال أرسطو.

لقد أصبح المنطق الأرسطي مطروحًا بوضوح في الحضارة الإسلامية، فتأثر به علماء الشريعة والفقه. وها هو الإمام الغزالي (450 - 505هـ) يحدد المنطق قائلًا: «بأنه القانون الذي يميز صحيح الحد

والقياس عن غيره، فيتميّز به العلم اليقيني عما ليس يقينًا، وكأنه الميزان، أو المعيار للعلوم كله».

ونجد أثر المنطق في الفقه والنحو وغيره، فقد كان القياس هو الاستدلال العمدة في العصور الوسطى الأوروبية والإسلامية على السواء، رغم وجود مَن نقده من الفقهاء المسلمين وعلى رأسهم ابن تيمية (661–728هـ) صاحب (نقض المنطق) و(الرد على المنطقيين)، حيث شنوا حملة شعواء على أرسطو ومنطقه.

المنطق في العصور الوسطى:

في العصور الوسطى دارت أفكار المنطق لاهوتية حتى يبدو المنطق الملائم أقل وضوحًا من الرياضيات الملائمة؛ لأنه فشل مرارًا وتكرارًا في إبلاغ رسالته، وجرى توظيفه في معالجة موضوعات ضبابية مستغلقة: الطبيعة والآلهة، مثل برهان وجود الله للقديس أنسيلم (1033 – 1109م)؛ حيث يدلل على ذلك بقوله: «حتى هذا الأحمق، لا يتصور في ذهنه موجودًا أعظم من الله؛ لأن الشيء الذي لا نتصور وجود أعظم منه، لا يمكن أن يُوجد في الذهن فقط. لو كان موجودًا في الذهن فقط، لأمكننا أن نفكر في أنه موجود في الواقع أيضًا، وهذا وجود أعظم، لماذا؟ لأن الشيء الموجود في العقل وموجود في الواقع، أعظم من الشيء الموجود في الخيال فقط. في هذه الحالة، يكون الموجود الذي لا نستطيع أن نتصور أعظم منه، هو نفسه ما نستطيع أن نتصور أعظم منه، وهذا تناقض. وبذلك، يكون ما لا نستطيع أن نتصور أعظم منه، يوجد في الذهن والواقع أيضًا. إذن الله موجود».

ونلاحظ أن هذا منطق قائم على اللغة والتلاعب بها، وهذا ما سنجد توضيحه في نظريتَي الأوصاف والأنماط المنطقيتين لدى راسل.

وقبل أن نغادر العصور الوسطى نعرض لواحدة من أعرق مشكلات الفلسفة التي تتوغل في أعماق الميتافيزيقا، حول طبيعة الكليات[6] **universals**، التي كانت خاضعة للتأثير المشترك لأفلاطون وأرسطو وهي المناظرة بين الاسمية والواقعية؛ فالمثُل (أو الصور) عند أفلاطون لدى مؤيدي الواقعية **Realism** واقعية، بل أكثر واقعية من الواقع المادي ويعتقد المدرسيون (فلاسفة القرون الوسطى) أن الرب يدركها ليكون لها كل الخلود والأبدية، أما النظرة المعارضة الاسمية **Nominalism** ترى أن المفاهيم العامة لا تعدوا أن تكون تعبيرات رنانة تطلقها الأفواه عندما تطلق الكلمات؛ بتعبير الفيلسوف رسلينو (1050–1120م) الكليات مجرد إطلاق أصوات، وشايعه الفيلسوف وليام أوكام (1280 – 1349م) صاحب نصل أوكام القائل: «يجب عدم زيادة عدد الكيانات بلا حاجة»، وفي المنطق لا تكثر من عدد البديهيات واستبعد أي زيادات.

سيستخدم راسل نصل أوكام لاحقًا في المنطق الرياضي.

ونعرّج كذلك على الفيلسوف المدرسي بيتر أبيلارد (1079 – 1142م) الذي صاغ قاعدة الإثبات أو الوضع، رغم أن القدامى قد استخدموها دون أن يسموها منذ استخدمها إقليدس استخدامًا منهجيًّا ليثبت مبرهنات جديدة دون أن يعود مجددًا إلى البديهات أو المسلمات الأولية، وهكذا في المنطق: يمكن البدء، في منتصف الحجة، من قضية

(6) الكليات أسماء مولدة من قبيل «إنسان»، «حيوان»، «روح»...إلخ.

مثبتة قبلًا، من دون أن يكون لزامًا تبرير كيفية إثباتها.

رياضيات القرون الوسطى:

حينما كان الظلام يحدق بأوروبا كانت الحضارة الإسلامية في قمة ازدهارها العلمي، حيث شهدت تطويرًا في شتى العلوم ونخص بالذكر العلم الرياضي، فقد ظهرت العديد من الاكتشافات الرياضية، على يد المسلمين، والتي أثرت فيما بعد على تطور العلم الرياضي لدى الغرب، لعل أهمها اختراع الجبر **Algebra** في منتصف القرن التاسع الميلادي، إذ تتجلى العبقرية الإسلامية في الجبر، فالجبر عنوان صحيح وصادق للحضارة الإسلامية وهو وصف لتلك العقلية.

وكذلك استخدام الأرقام العربية المستعملة اليوم، وإدخال فكرة الصفر، وتبع ذلك اختراع الأعداد السالبة، كل هذا أدى لتقدم علم الحساب، ومن ذلك ربط الحساب بالجبر بما عُرف بحسبنة الجبر أي: التخلي عن البراهين الهندسية وتعويضها بالجبرية.

ومهد الطريق أيضًا لربط الجبر بالهندسة كما سنجد ذلك لاحقًا عند ديكارت (وما عرفت بهندسة الجبر)، ومن بعد ذلك ظهور التفاضل والتكامل.

إن فكرة الجبر في حد ذاتها سنجدها لاحقًا في المنطق الرمزي أو الحديث.

التململ من منطق أرسطو مع بيكون والمنهج الاستقرائي:

بدأت الكشوف العلمية في منتصف القرن السادس عشر ثم واصلت

النهضة العلمية طريقها وكانت قد اقترنت حركة العلم الحديث بالثورة على المنطق الأرسطي وقياساته العقيمة، وسلوك الطريق المضاد تمامًا وهو طريق الاستقراء التجريبي، وكان الفيلسوف الإنجليزي فرنسيس بيكون (1561–1626م) قد عرض له في كتابه (الأورجانون الجديد) Novum Organon الصغير الحجم والذائع الصيت الذي نشره عام 1620م، ويعرض العنوان إشارة واضحة إلى أن أورجانون أرسطو قد أصبح أداة قديمة بالية عفا عليها الدهر.

لقد شارك بيكون رجال عصره في رفضهم الضاري للمنطق الأرسطي، وكان من أعنفهم هجومًا على القياس وعقمه، وحتى الاستقراء الأرسطي، لم ينجُ من نقد بيكون الحاد ومحاولاته لإثبات اهترائه وتهافته؛ لأن العصر عاد لسؤال الطبيعة وليس لتوضيح اللاهوت كما كان سائدًا في العصور الوسطى، فتراجع المنطق الصوري لأنه لا يصلح لاكتشاف الطبيعة المتأججة وتنحصر معاملاته في الصحائف والأوراق، وأنه بحكم طبيعته لا يقبل تطويرًا، بل إنه عائق دون استقبال العصر الحديث والعالم الحديث.

لقد هيمنت الروح التجريبية بوصفها روح العصر ومنهج البحث، وتراجع المنطق إلى زوايا الإهمال والجمود لما يقرب من خمسمائة عام.

ما هو المنهج الاستقرائي؟

يمكن أن نلخصه بأنه «عملية الاستنتاج التي يبدأ بها الشخص من تجارب معينة، ويتقدم نحو التعميمات»، أي الانتقال من الجزئي إلى

الكلي مستندًا على التجربة التي هي حجر الأساس.

ديكارت والهندسة التحليلية، ليبنتز واللغة العالمية، كانط وقَبْليته:

بدأت الفلسفة الحديثة بفرنسيس بيكون، حيث بلور الروح العلمية في المنهج التجريبي وأن مصدر المعرفة هو الإنصات لشهادة الحواس التجريبية ورفض الميتافيزيقا، وجاء معاصروه وخلفاؤه في القارة الأوروبية للبحث عن مصدر المعرفة؛ والتقط الشعلة منه الفيلسوف الفرنسي رينيه ديكارت (1596 – 1650م) الذي رأى أن العلم ينبغي أن يستند على فكرة الكم لا الكيف، وأوضح أن العلم الكمي هو الرياضيات، وقرر أنها هي المنطق الحقيقي للعقل، والطبيعة محكومة بقوانين لها الصورة الرياضية – كما سينادي جاليليو بعد ذلك.

قال ديكارت: «تعجبني الرياضيات على الخصوص، وذلك لما في براهينها من الوثاقة والوضوح، ولكني لم ألحظ فائدتها الحقيقية إلا في الصناعات الميكانيكية، فعجبت لأمرها، فمع أن أسسها ثابتة ومتينة لكن لم يُبْنَ عليها بناء أسمى».

لقد قام ديكارت –كما قال هيدجر– بترييض الفكر!

فديكارت إلى جانب كونه فيلسوفًا كان رياضياتيًّا؛ فهو صاحب الهندسة التحليلية الرابطة بين الجبر والهندسة.

أما ليبنتز (1646 – 1716م) فقد رأى بأن أحسن المناهج وأوثقها هي مناهج الجبر، لأن الأخيرة ترمز إلى الفكرة بواسطة رموز ثابتة تعبر عنها تعبيرًا واضحًا، والمعادلات الجبرية بهذا الشكل تثير انتباهنا

وتجعلنا في فطنة ويقظة، وكما ساعدنا الجبر في فهمنا للهندسة كذلك يمكننا أن نتخذه للتعبير عن أفكارنا، فيمكننا أن نرمز للفكرة البسيطة وكذلك الفكرة المركبة برمز معين كرموز الجبر، من هنا طمح ليبنتز إلى إيجاد لغة غير طبيعية تكون موحدة على غرار لغة الرياضيات الرمزية؛ إذ لم يرد ليبنتز أن يجعل المنطق فرعًا من الرياضيات وإنما أراد إقامة حساب منطقي **Calculs** أي منطق لغته الرموز وقوامه معادلات وقوانين، لكن لا تنطوي المعادلات والقوانين على علاقات كمية، بل على علاقات غير كمية.

وهذا ما حاول تجسيده بمشروعه الضخم الذي جعل عنوانه اللغة المتميزة الكلية (العالمية)، إلا أن مشروعه باء بالفشل وذلك لعدم تخلصه من قبضة المنطق الأرسطي، بل لقد أبدى إعجابه به حيث يقول: «إن ابتكار القياس يعد من أجمل إبداعات الفكر الإنساني وأكثرها أهمية، فهو نوع من الرياضيات الكلية (الشاملة) التي لم تُعرف وتقدر أهميتها على النحو الكافي، ويمكن القول إنها تمثل فن العصمة من الزلل شرط أن نحسن استخدامها».

هذا جعل منه الأب المؤسس للمنطق الحديث والمعاصر الذي نشأ بعد قرنين، أو بالأصح المبشر الأول، تبعه في القرن الثامن عشر مبشرون آخرون من علماء الرياضيات المعنيين بالمنطق.

ولا ننسى أن ليبنتز هو المؤسس الشريك مع العالم إسحق نيوتن (1642 – 1727م) –كلًّا على حده– لحساب التفاضل والتكامل.

من نافلة القول إن أعمال ليبنتز قد أثّرت في راسل الذي تولى

تدريسها في كامبردج لمدة عام، ثم أصدر كتابه (عرض نقدي لفلسفة ليبنتز) عام 1900م الذي حمل فيه على المنطق الأرسطي والميتافيزيقا؛ فكان هذا الكتاب علامة فارقة في مستهل طريق فلسفة القرن العشرين وتوجهها صوب المنطق الرياضي وتعلمها أنه صلب الفلسفة، فلا بد وأن تكون منطقية.

كانت التجريبية الإنجليزية قد بلغت ذروتها مع ديفيد هيوم (1711–1766م) الذي قام بالتمييز بين نوعين من المعرفة: النوع الأول هو المعارف المنطقية والرياضية، أي القضايا التحليلية التي تقتصر على تحليل الأفكار الذهنية لتحديد ما بينها من علاقات لزومية استنباطية.

أما النوع الثاني فهو المعرفة المتعلقة بالإخبار عن الواقع كما تفعل العلوم الطبيعية، أي القضايا التركيبية، وهذه لا مصدر لها إلا انطباعات الحس ومعطيات التجريب.

إن القضايا التحليلية لا تقدم معلومات جديدة عن العالم الذي نعيش فيه، إنما معلومات عن معنى الكلمات فقط.

وحدها القضايا التركيبية هي تصف الحقيقة، أي أن المعرفة الحقة لهذا العالم الذي نعيش فيه، يجب أن تعتمد على المشاهدة والتجربة فقط، وما سوى هاتين القضيتين لغو.

جاء من بعده الفيلسوف الألماني إيمانويل كانط (1724 – 1804م) الذي اتخذ موقفًا وسطًا بين مغالاة العقلانية (الديكارتية) التي ترد المعرفة إلى العقل وحده، وتطرف النزعة التجريبية لدى هيوم التي

تردها إلى أساس واقعي تجريبي، حيث رد على هيوم في أن هناك بعض القضايا التركيبية، هي أيضًا لا تتطلب خبرة سابقة (Priori)، من ذلك قضايا الرياضيات والهندسة كمبرهنة فيثاغورس التي تعتمد على تطابق المثلثات، وهكذا نصل إلى البديهيات التي لا تحتاج إلى برهان، فتكون قضايا الرياضيات قَبْلية - أي قبل الخبرة الحسية وسابقة عليها.

أراد كانط أن يبين أن هندسة إقليدس هي الهندسة الوحيدة والضرورية من حيث إنها معبرة عن خواص المكان المعطى لنا في حدسنا وفكرنا؛ لأن المكان والزمان لديه حدسان قَبْليان.

ولديه أن كل قضايا الرياضيات تركيبية، في حين قضايا المنطق تحليلية، ويرى أن المنطق الصوري الذي وضعه أرسطو جاء كاملًا وكل ما قام به المناطقة بعده مجرد تحسين وتنسيق لا إضافة نظرية جدية ولا تصحيح أخطاء.

منطق ستيوارت مل:

سنعبر سريعًا الفلسفات التي تلت كانط؛ لأن المقام ليس عرض تاريخ الفلسفة[7]، ونلخص الأمر أن النزعة التجريبية كانت هي السائدة منذ صاغها بيكون في القرن السادس عشر، قد استلمتها الفلسفة الوضعية المؤمنة بما هو موضوع Posited أمامنا في العالم الواقعي التجريبي، ورفض أي استنتاجات فلسفية أو ميتافيزيقية تتجاوز هذه الحدود، انطلاقًا من رفض كل ما لا يتحقق تجريبيًّا، ليأتي تطرف الاستقرائية التجريبية على

(7) لم نعرض لمنطق هيجل، أو لجدل هيجل (الديالكتك Dialectic)؛ لأنه لا علاقة له بالرياضيات وأيضًا كون راسل قد اعتبره هراء!

يد جون ستيوارت مل (1803 – 1873م) الذي حاول صياغة الاستقراء كمنهج ومذهب بما عُرف بالنزعة الاستقرائية، التي بلغت من التطرف بالتجريبية إلى حد النظر إلى كل مكونات الذهن ومحتوياته باعتبارها مجرد تعميمات استقرائية، لا يُستثنى من ذلك شيء البتة، حتى قوانين الرياضيات «4 = 2 + 2»، وقوانين الفكر الصورية مثلًا «أ هو أ ...» كلها ليست إلا تعميمات استقرائية لكثرة ما لاحظته حواسنا من أن اقتران 2 و2 ينتج عنه دائمًا 4، ومن أن «أ» هي دائمًا أ، فالاستقراء هو منطق العلم والتفكير والحياة!

رفض مل المنطق الصوري الذي سماه منطق النتيجة، في حين سمّى منطقه منطق الحقيقة.

وقد جمع أفكاره في كتابه (نسق المنطق) الصادر عام 1843م محاولًا تحقيق حلمه بأن يكون نبي الاستقراء مثلما كان أرسطو نبي القياس.

الطريق إلى المنطق الرمزي/ الحديث:

كانت النزعة الاستقرائية المتطرفة قد لفتت النظر إلى الرياضيات، التي تُعد علمًا صوريًّا غير مُستقى من واقع تجريبي، لكنها أداة رئيسة بيمين العلوم التجريبية الإخبارية؛ فإن هذه الإجابة التجريبية المتطرفة لم تقنع علماء الرياضيات، لذا نهض فريق منهم لفحص أصول الرياضيات من الطريق المخالف لهذه الاستقرائية، أي طريق التعقل المنطقي الخالص.

ولم يكن هذا هو السبب الوحيد، بل النمو الذي شهدته الرياضيات كذلك منذ ربط الجبر بالهندسة على يد ديكارت؛ فراحت الرياضيات -التي أصبح الجبر عمودها الفقري- تحلق في آفاق رحبة من التجريد وتشيد صروحًا ذهنية تزداد بُعدًا عن العالم الحسي (وما الأعداد التخيلية إلا نموذجًا)، وما جاء به خلفاؤه أمثال نيوتن وليبنتز في تروض الما لا نهاية وظهور أنواع جديدة من الدوال وغيرها مما تزخر به كتب تاريخ الرياضيات.

كل هذه التطورات والنمو أنتج متناقضات في مختلف فروع الرياضيات، تلك التناقضات تمت بلورتها بما عُرف بأزمة الأسس، وهذا ما دعا إلى إعادة النظر في الأسس التي يجب الانطلاق منها لتأسيس رياضيات متناسقة غير متناقضة.

أزمة الأسس في الرياضيات:

شهد منتصف القرن التاسع عشر وأوائل القرن العشرين تناقضات أفرزتها معطيات الرياضيات الحديثة بما عُرف بأزمة الأسس، منها:

1 - المسلمة الخامسة وظهور الهندسة اللا إقليدية:

كان إقليدس قد بنى كتابه (الأصول) على بديهيات ومسلمات وتعريفات، لكن في منتصف القرن التاسع عشر بدأ التساؤل عن صحة المسلمة الخامسة التي أوردها إقليدس في كتابه والقائلة: «من نقطة لا تقع على مستقيم معلوم يمكن رسم مستقيم واحد يمر بتلك النقطة ويوازي المستقيم المعلوم».

هذه الشكوك بدأها الرياضي الألماني فردريك جاووس (1777 - 1855م) حول المسلمة الخامسة، التي حاول مَن سبقوه استنباطها من المسلمات الأخرى، هذه الشكوك والانتقادات قادت إلى اكتشاف نوعين من الهندسة يُطلق عليهما الهندسة اللا إقليدية؛ وهما الهندسة الزائدية أو هندسة لوباتشيفسكي نسبة لمكتشفها عالم الرياضيات الروسي نيكولاي لوباتشيفسكي (1792 - 1856م) عام 1830م، وفيها تُستبدل بمسلمة التوازي المسلمة التالية: «من نقطة لا تقع على مستقيم معلوم يمكن رسم أكثر من مستقيم يمر بتلك النقطة ويوازي المستقيم المعلوم».

والثانية هي الهندسة الناقصية أو هندسة ريمان، التي قدمها عالم الرياضيات الألماني جورج ريمان (1826 - 1866م) عام 1854م؛ وفيها تُستبدل مسلمة التوازي بالمسلمة التالية: «من نقطة لا تقع على مستقيم معلوم لا يمكن رسم مستقيم لا يقطع المستقيم المعلوم». بعبارة أخرى المستقيمات المتوازية لا وجود لها في الهندسة الناقصية.

وهكذا تراجع التطابق بين المكان والزمان الذي في أذهاننا -كما قال كانط- وبين الواقع.

هكذا بات يُنظر إلى المسلمات والبديهيات -كلتيهما- على أنهما حقائق محتملة فقط، تستحق الاستكشاف من أجل خصوبة معقباتها المنطقية.

الجدير بالذكر أن الهندسة اللا إقليدية وجدت لها تطبيقات بديعة في القرن العشرين، لعل أهمها النظرية النسبية العامة لأينشتاين.

2 - ظهور الدالة المنفصلة وانهيار فكرة التحليل في الرياضيات:

إن دارسة الأشكال الهندسية بواسطة الدوال ترتكز في الحقيقة على الفرضية التالية، وهي أن قيم الدالة تتابع من دون تقطع أو انفصال كما تتابع نقط المستقيم تتابعًا مطردًا لا فجوة فيه، وهذا هو الاتصال الهندسي.

الدالة **function** هي قياس متغير بمتغير آخر، وهي صميم الشيء الذي ينصب عليه التحليل الذي ظهر في القرن الثامن عشر.

لكن ظهرت دوال غريبة؛ فقد اكتشف الرياضي الفرنسي أوجستين كوشي (1789 - 1857م) أن هناك دوالَّ غير متصلة بل منفصلة على عكس الحدس الهندسي، وكذلك دخلت الأعداد التخيلية والأعداد المركبة في الدوال.

واكتشف الرياضي الألماني كارل فيرشتراس (1815 - 1897م) دالة متصلة لكنها لا تقبل التفاضل، ونجح ريمان في تكوين دالة منفصلة قابلة للتكامل!

هذه الاكتشافات في زمان كان الاتصال شرطًا للاشتقاق (التفاضل) أو التكامل (أدوات التحليل).

كل هذا الابتعاد عن الحدس الهندسي قاد إلى أن يكون التحليل مُتحسِّبًا، أي يستمد يقينه من علم الحساب الذي مرتكزه العدد، لذا كان اهتمام علماء الرياضة اللاحقين منصبًّا على العدد وتعريفه كما سنرى مع راسل نفسه.

3 - أزمة النهائي واللا نهائي في الرياضيات:

الما لا نهاية ليست منفصلة عن الدوال؛ لأن هذه الأخيرة -كما وضح نيوتن نفسه- ما هي إلا مجموع متسلسلة لا نهائية.

ولعل حساب التفاضل والتكامل واحد من المواضيع المبني على الما لا نهاية، حيث يدرس ضروب الزيادة اللا متناهية في الصغر.

وكان الرياضي كوشي -السابق الذكر- قد وضح الشروط متى يكون لهذه المتسلسلات مجموع أو بلغة الرياضيات، تكون تقاربية، ولعل هذا يذكرنا بمفارقة زينون التي تحدثنا عنها في بداية هذا التقديم.

في القرن التاسع عشر التُفِت إلى الحساب، وبالتحديد العدد مرة أخرى لدراسة الما لا نهاية أو بالأصح لترويض الما لا نهاية على يد عدة علماء منهم التشيكي بولزانو (1781 - 1848م) الذي وضّح أن سلسلة الأعداد الزوجية غير المنتهية تطابق سلسلة الأعداد الصحيحة غير المنتهية، رغم أن الأولى جزء من الأخيرة، وهكذا وجدنا أنفسنا أمام مفارقة مخالفة لما ألفناه من بديهيات إقليدس، حيث إن الجزء أقل من الكل؛ فهنا صار الجزء مساويًا للكل[8]!

وجاء العالم الألماني جورج كانتور (1845 - 1918م) الذي وضح أن الما لا نهاية تبرز في شكلين مختلفين، لا نهائيات غير تامة كبرى تلك التي تدرس كميات الكبر التي تقول مهما بلغ ذلك الشيء نهايته الكبرى توجد نهاية أكبر منه وهي اللا متناهية في الكبر، وبالتالي

(8) وسنرى في مفارقة كانتور أن الجزء يصبح أكبر من الكل!

فهي غير محدودة وكذلك نفس الشيء بالنسبة للا متناهية في الصغر، أما الثانية عبّر عنها في دوال من خلال نقاط لا متناهية على مستوى حركة تكون نقاطها غير منتهية.

فكانت نظرية المجموعات أو الفئات **Set theory** التي تبلورت على يديه، لكنها حملت عدة تناقضات منها مفارقة كانتور نفسه[9]، وقد أشار راسل إلى واحدة منها، فسُميت مفارقة راسل[10].

فأضاف أزمة أخرى إلى أزمات الأسس.

ومع ذلك تكمن أهمية نظرية المجموعات في أنها أكدت على تأسيس الرياضيات كلها – ومنها الهندسة على أساس الأعداد الطبيعية بحيث تشيد الرياضيات كلها على أساس علم الحساب، إلى جانب قيامها بتقسيم سلاسل الأعداد إلى مرتبة وأصلية[11]، ومن ثم متناهية وغير متناهية، والتي اعتمد عليها راسل نفسه في كتابه (برينكيبيا ماتيماتيكا).

---

(9) مفارقة كانتور: تنص نظرية المجموعات على إمكانية تجزئة أي مجموعة ما إلى مجموعات جزئية تكون أكثر عددًا من عناصر تلك المجموعة! مثلًا: مجموعة مكونة من 3 عناصر يمكن تجزئتها إلى 5 مجموعات حسب عدد بيل؛ وهكذا صار الجزء أكبر من الكل!

(10) مفارقة راسل: إنّ فكرة مجموعة جميع المجموعات توحي بكون المجموعة تتميز بخاصة الانتماء إلى المجموعة كونها هي أيضا مجموعة، وبالتالي فهي تشمل على نفسها: أما عدم اشتمالها على نفسها فهو التناقض في حد ذاته وسنوضح ذلك بمثال: ومنه إذا قلنا بأنّها تشمل على نفسها أولًا تشمل هنا في كلا الحالتين أمر يؤدي إلى التناقض، لأنّ عكس القضية إذا أدى إلى التناقض أثبت صحة القضية الأولى، وهذه النقيضة التي عرفت منذ زمن عند اليونان بما يُسمَّى نقيضة الكذّاب: إذا قال شخص أنه كذّاب، فإن كان صادقًا فهو كذاب وإن كان كاذبا فهو صادق، وكلتا الحالتين هناك تناقض!

(11) سيأتي ذكرها وتعريفها في الكتاب.

الآن أصبحت الرياضيات مشكوكًا في صحتها، مما أدى إلى تعدد الأنساق، ومنها نتساءل في إطار أزمة الأسس، من أين تستمد الرياضيات المعاصرة يقينها؟ هل يعود إلى طبيعتها ومنهجها أم إلى عوامل خارجة عنها؟

لأن المنطق هو الأخ التوأم للرياضيات، وهو الذي يجعل الإثبات ممكنًا، فقد تم إيقاظه من سباته عندما بدأ علماء الرياضيات في البحث عن أصول الرياضيات.

المنطق الرمزي/الحديث:

يقوم هذا النوع من المنطق بدراسة العلاقات بين الحدود في قضية ما، والعلاقات المختلفة التي تربط بين عدة قضايا، فهو يمتاز بالرموز في عباراته التي تمنحه الدقة واليقين، وقد اهتم بدراسة العلاقات بين الحدود، لذلك كانت اللوجوستيقا فلسفة علمية حيث بُنيت على أساس رياضي.

إن هذا المنطق الحديث يُسمَّى المنطق الرياضي وهو نفسه المنطق الرمزي، المصطلحات الثلاثة مترادفة، ويمكن أن نضيف إليها مرادفًا رابعًا طرحه في ذلك العام الحاسم 1900م لويس كوترا (1868-1914م) لتمييز المنطق الرمزي الحديث عن المنطق الأرسطي التقليدي، وهو مصطلح اللوجوستيقا **Logistic** .

وتم التوصل إليه خلال عملية البحث عن أصول الرياضيات، التي تميزت إلى ثلاثة اتجاهات وهي:

أولًا- المنطقية:

أ - جبر المنطق:

أحيا الإيرلندي جورج بول (1815-1871م) أفكار ليبنتز حول اللغة العالمية، وإن كان على نحو مخالف له؛ إذ أراد بول للمنطق أن يكون علمًا رمزيًّا، والرموز في المنطق الرمزي مثل ثوابت الرياضيات كعلامات الجمع والطرح والقسمة والمساواة والصفر والواحد الصحيح، وكان يستخدم الأحرف الثلاثة الأخيرة من هجاء الإنجليزية وهي **Z,Y,X** كمتغيرات ونستطيع أن نضع هنا الأحرف «هـ» بدلًا من **X**، و«و» بدلًا من **Y** ، و«ي» بدلًا من **Z**، كان بول يرمز بهذه المتغيرات إلى أصناف عنده بديلة للحدود في المنطق التقليدي.

لقد استفاد بول من أستاذه أغسطس دي مورجان (1806-1871م) الذي خصه بالرعاية والتشجيع.

كان دي مورجان عالم رياضيات أيضًا معنيًّا بتطبيق الأدوات الرياضية على المنطق التقليدي، وفي كتابه (المنطق الصوري) الصادر عام 1847م صاغ نظرية العلاقات لأول مرة في صورة رمزية، وعلَّم بول أن المنطق يمكنه استخدام أساليب الرياضيات، وأن قوانين الجبر يمكن تعميمها بصرف النظر عن تفسيراتها الجزئية، فاستطاع بول أن يصل إلى جبر عام مجرد يتمثل في قوانين الفكر الأساسية، واستبعاد اللغة الجارية كوسيط غير دقيق والتعبير عن هذه القوانين بلغة رمزية دقيقة كلغة الحساب، وإقامة علم المنطق على هذا الأساس.

هكذا تم تأسيس المنطق الرياضي بكتابي جورج بول (التحليل الرياضي للمنطق) عام 1847م، و(فحص قوانين الفكر) عام 1854م.

نلاحظ أن الأول صدر في نفس عام صدور كتاب أستاذه مورجان، فيمكن اعتبار هذا العام – 1847م– عام ميلاد المنطق الرياضي الرمزي الحديث.

يقول الدكتور زكي نجيب محمود في كتابه (المنطق الوضعي): «ليست المسألة مجرد استعمال رموز من أحرف الهجاء أو غيرها لتحل محل الحدود والقضايا، وإلا لكانت لعبة صبيانية لا طائل وراءها يستحق اهتمامًا، بل إن جوهر المنطق الحديث هو تحويل القضية المنطقية إلى قضية شبيهة بمعادلات الجبر، فتكتسب عمليات التفكير ما في الرياضيات من صرامة ودقة وانضباط».

طبَّق بول جبره المنطقي على فروع المنطق وموضوعاته، بما في ذلك نظرية القياس الأرسطية، واتضح أنها مجرد حالة لمنطق الفئات.

وهكذا نجد أن المنطق الرياضي يستوعب المنطق التقليدي في سياق أوسع وأرحب، والأهم أنه أدق وأكفأ.

إن مسعى جورج بول لا يتمثل في تأكيد أن حقيقة المنطق جبرية رياضية، بقدر ما أراد أن يبين أنه إذا أمكن التعبير عن العمليات الجبرية والمنطقية برمز واحد، فإن تعبيراتهما الرمزية تخضع لقوانين واحدة.

جبر بول اليوم يعرفه كل طالب حاسوب تحت مُسمَّى الجبر البولياني **Boolean algebra**[12].

(12) مثلت لي أعمال راسل في المنطق الخلفية الواضحة لمادة (الهياكل المتقطعة) التي أدرّسها لطلابي في جامعة العلوم والتكنولوجيا قسم الحاسوب منذ عدة سنوات؛ حيث وجدت أني أدرّس نتائج جهد راسل وبيانو وفريجه وكانتور وغيرهم دون علمي بالمنطلقات التي أوصلت إلى هذه النتائج.

ب- منطق الرياضيات:

هذا الاتجاه المنطقي حاول العكس، فبدلًا من رد المنطق إلى الرياضيات حاولوا العكس، أي رد الرياضيات إلى المنطق بغية تأمين أصولها.

إنه الطريق الذي شقه جوتلوب فريجة (1848-1925م)، وجوزيب بيانو(1858-1932م)، وواصله ألفرد وايتهيد (1861 - 1947م) وبرتراند راسل (1872 - 1979م)، حتى أخرجا كتابهما الفذ برنكيبا ماتيماتيكا.

وهنا سنعرض لعمل كل من فريجه وبيانو، تاركين أعمال راسل لموضع لاحق.

يعتبر فريجه أول مَن وضع نظامًا كاملًا للمنطق الرمزي، مستعينًا بأعمال مَن قبله خاصة مشروع ليبنتز في بناء لغة رمزية، كما يُعد أول مَن أعطى تعريفًا منطقيًّا للعدد الأصلي، وأول مَن صاغ نظرية المجموعات صياغة أولية.

لم يطلب فريجه من المنطق أن يضمن تسلسل البراهين الرياضية فحسب، بل أراد أن يُخرج من كل الرياضيات -أو على الأقل من علم الحساب- كل محتوى غير منطقي؛ لقد حاول في كتابه (أسس الحساب) أن يشتق علم الحساب من المنطق.

من أهم كتبه (أسس الحساب) عام 1884م، و(القوانين الأساسية للحساب) عام 1893م، و(مباحث منطقية) عام 1916م، أعماله

الأولى لم تلفت انتباه أحد لدى صدورها حتى أشار لذلك راسل في كتابه (برينكيبيا ماتيماتيكا).

أما «بيانو وفيما يختص بدوره في جبر المنطق كان كتابه (صيغة الرياضيات **Formulaire de Mathématique**) (1904 – 1908م) أكثر تقدمًا من حيث دقة رموزه كما تكشف رؤاه عن ثوابت لم يعرفها جبر المنطق وأهم من هذا كله أدخل «المتغيرات **variable**» في كل صيغ المنطق بحيث أصبح المنطق قادراً تمامًا على التعبير عن قضايا الرياضيات كلها برموزه وحدها.

ولعل تأثيره على راسل واضح، فقد كان راسل يؤكد أنه أيًّا كانت هذه المشكلات الفلسفية، فإن المنطق لا يقدمها لنا؛ إذ إن المنطق يمكنه مساعدتنا في الاستدلال عليها فقط، لكنه غيّر رأيه عند اطلاعه على أعمال بيانو في مؤتمر باريس عام 1900م.

تلخص هذه الاتجاه عبارة د. يمنى طريف الخولي: «ثورة المنطق الرياضي أو ثورة الرياضيات المنطقية مع راسل ووايتهيد اللذين رأيا -بخلاف جبر المنطق مع جورج بول، أي رد المنطق إلى الرياضيات- أن الرياضيات هي التي تُرد بأكملها إلى المنطق، خاصة بعد تحسيب الرياضيات، أي ردها إلى علم الحساب على يد فريجه، ورد علم الحساب إلى مفهوم العدد على يد بيانو، ورد العدد إلى المنطق على يد برتراند راسل، الأمر الذي جعل راسل يعبر عن العلاقة بين المنطق والرياضيات بقوله الشهير إنهما لا يختلفان، إلا كما يختلف الصبي عن الرجل، فالمنطق هو صبا الرياضيات، والرياضات هي رجولة المنطق».

ثانيًا- الصورية أو الأكسيوماتيكي:

يمثله عالم الرياضيات البحتة ديفيد هيلبرت (1862-1943م) الذي كان يبحث أصول الرياضيات من اتجاه آخر هو الاتجاه الصوري أو الشكلي **Formalism** ويذهب إلى أن قضايا الرياضيات صيغ متفق على معاني رموزها دون أن يكون لها مدلولات خارجية، بمعية الاتفاق على قواعد متى راعيناها فقد ضمَّنا بلوغ اليقين والضرورة، فانصب منظور هيلبرت على المفاهيم والتصورات الرياضية والتحسيب الصوري لها على أساس نسق من البديهيات يتوافر فيها الاتساق والكفاية والاستقلال وخصائص الاكتمال الأخرى التي تتحدد في مبحث ما بعد الرياضيات **Meta-Mathematics**.

ومشروع هيلبرت هو بشكل ما إحياء لمشروع ليبنتز في القرن السابع عشر، الذي كان يطمح إلى وضع لغة رمزية عالمية يتحد الناس جميعًا في استعمالها بصرف النظر عن لغاتهم الطبيعية، تمامًا كالرياضيات، وتشكل حروفها أبجدية الفكر البشري، فيناظر كل حرف مفهومًا أوليًّا بسيطًا، وعن طريق قواعد التركيب نشكل من هذه المفاهيم البسيطة مفاهيم مركبة.

إن تصور هلبرت للعلاقة بين المنطق والرياضيات، تصور يناقض ما انتهى أصحاب المنطق الرياضي الذين رأوا أن الرياضيات أصلها مشتق من المنطق، فهو يرى أن المنطق والرياضيات خطان متوازيان يمشيان جنبًا لجنب، وبالتالي تنتفي تبعية الرياضيات للمنطق، بل هما مندرجان تحت كلٍّ أكبر منهما هو الأكسيوماتيك، ولتسوية العلاقة بين

المنطق والرياضيات وخلق نوع من الاستقامة بينهما بوصفهما علمين استنباطيين، يجب أن نذهب أكثر من ذلك إلى حد أكبر من المسلمات والحدود التي يقومان عليها والتي مهدها وأسسها لهما ثلة من الفلاسفة والمفكرين على غرار بيانو وفريجه وراسل وغيرهم.

هنا نجد أن الاتجاهين يجمع بينهما المنطق، لذا يمكن جمعهما في اتجاه منطقي واحد لكن برأيين مختلفين حول استخدام هذا المنطق.

ثالثًا- الحدسية:

هذا الاتجاه العقلي الحدس المثالي، الذي يرى أن الحدس، أي الإدراك الفوري المباشر هو الطريق لإدراك حقائق الرياضيات وأسسها.

لو راجعنا تاريخ الرياضيات سنجد له جذورًا عند أفلاطون حتى ديكارت وكانط، وتم بعثه مجددًا على يد الهولندي لويتسجن بروور(1881–1966م)، وأيضًا أرند هايتنج (1898 –1980)، وبوانكاريه (1854 – 1912م).

أنكر الحدسيون أن يكون المنطق قادرًا على تأسيس أصول الرياضيات، وعرضوا قوانين التفكير الأساسية لمنظار النقد، وأثاروا الشك في قانون الثالث المرفوع أو الوسط الممتنع.

يقول هايتنج: «ليس المنطق هو الأساس الذي استند إليه وكيف يجوز ذلك، وهو يحتاج إلى أساس، مبادؤه أكثر تعقيدًا وأقل مباشرة من مبادئ الرياضيات نفسها».

راسل وأثره:

عاش الفيلسوف برتراند راسل (1872 – 1970م) في عصر تقلبت فيه الأفكار والمفاهيم كثيرًا، هذه التقلبات لم يكن بعيدًا عنها، بل كان مشاركًا فيها وبقوة، فهو واحد من أشهر فلاسفة القرن العشرين، وخلال هذه الحياة الطويلة نشر الكثير من الكتب والمقالات الرائجة التي حفلت بآراء متنوعة في الأمور الاجتماعية والأخلاقية والسياسية والتعليمية التي جلبتْ عليه مجموعة متنوعة من ردود الأفعال تراوحت بين أحكام بالسجن وجائزة نوبل!

ولكن أعظم ما قدمه هو إسهاماته المدهشة في مجالَي المنطق والفلسفة، وهذه الأخيرة أثرى فيها جدًّا بكتبه التي دوّن تاريخها.

برع راسل في الرياضيات، وكان تألقه واضحًا، حيث منحت له عام 1890 م منحة دراسية لدراسة الرياضيات في كلية ترينيتي بجامعة كمبريدج، ليحصل على مرتبة الشرف الأولى في الرياضيات سنة 1893م التي درسها ثلاث سنوات لينكب في السنة الرابعة على الفلسفة (كانت تُسمَّى العلوم الأخلاقية)، وبتأثير من أحد أساتذته أبدى إعجابه بأعمال الفيلسوف الإنجليزي فرانسيس برادلي (1846–1924م) الذي جذبه للمثالية الألمانية المتمثلة في فلسفة كانط وهيجل.

تحولاته الفلسفية:

لكن راسل سرعان ما نبذ المثالية الكانطية والهيجلية وذلك عام 1898م يقول:

«لقد حدثت لي عام 1898 عدة أحداث جعلتني أنفضّ عن (كانط) وعن (هيجل) في آن واحد، من ذلك أني قرأت كتاب هيجل (المنطق الأكبر) فكان رأيي فيه عندئذ -ولا يزال هو رأيي اليوم- أن ما قاله هيجل عن الرياضيات كلام فارغ خرج من رأس مشوش».

ولكن أكثر مَن أثَّر في راسل أشد التأثير كان أحد معاصريه الشباب، وكان ذلك هو جورج مور(1873-1958م)، وقد بدأ كمعتنقٍ للفلسفة الهيجلية شأنه شأن راسل، ولكنه سرعان ما نبذها، وأقنع راسلٍ أن يحذو حذوه، وكان ذلك في نفس الوقت الذي كان يلقي فيه محاضرات عن ليبنتز - كما أشرنا سابقًا.

في نفس العام الذي أصدر فيه كتابه عن ليبنتز، التقى بجوزيب بيانو في المؤتمر العالمي للفلسفة في باريس في يوليو عام 1900م، وكان بيانو قد أنجز خطوات فنية في المنطق، فدرسها راسل، ثم بدأ يُحسّن المناهج الواردة فيها ويوسّعها ويطبّقها أو بعبارته: «ولم أكد أدرس فكرته [أي بيانو] دراسة شاملة حتى رأيتها توسع نطاق الدقة التي ألفناها في علوم الرياضيات ، بحيث تشمل موضوعات أخرى، لبثتْ حتى ذلك الحين نهبًا للغموض الفلسفي».

عمله في الرياضيات والمنطق:

التفت راسل إلى المنطق بسبب أعمال بيانو التي حفزته لاشتقاق الرياضيات من المنطق؛ أي تحليل المفاهيم الرياضية الأساسية إلى مفاهيم منطقية صرفة، ومن ثم تقديم نسقٍ منطقيٍّ محكمٍ يضمن لنا استنباط القضايا الرياضية.

لذا كان كتابه الأول (أصول الرياضيات) – الذي أصدره عام 1903م يناقش هذا المشروع– إذ لم يزد عن تقديم وصفٍ مختصر سطحي، في حين يتألف كتاب (برنكبيا ماتيماتيكا) الذي عمل عليه مع وايتهيد خلال السنوات (1910–1913م) على وصف تفصيلي لمحاولة تنفيذه[13].

وكان من بين أهم الأسباب التي دعت راسل إلى تأجيل المهمة حتى إصدار كتاب (أسس الرياضيات) هو أنه اكتشف وجود تناقض ظاهري؛ وهو ما كان ليهدد المشروع بأكمله، وهي مسألة المتناقضات أو المفارقات التي أشرنا إليها في المجموعات.

في كتابه (برينكيبيا ماتيماتيكا) يلتحم المنطق مع الرياضيات تمامًا، في إطار نسق موحد يبدأ من حساب القضايا وينتقل إلى حساب الفئات ثم العلاقات، ويتدرج دون أدنى فجوة أو قطع إلى الحساب العددي منتقلًا منه إلى بقية فروع الرياضيات كما نسقها المذهب الحسابي لفريجه في تسلسلها عن العدد الصحيح. نحن هنا لا نستطيع أن نقول أين انتهى المنطق وأين بدأت الرياضيات[14].

---

(13) الكتاب الذي نشره راسل لوحده عام 1903م اسمه (**The Principle of Mathematics**) وترجمته (أصول الرياضيات)، وهو الكتاب الذي ترجمه د. محمد مرسي أحمد ود. أحمد فؤاد الأهواني عن طبعته الإنجليزية الثانية عام 1937م، وقد صدر الكتاب المترجم بالعربي عام 1961م باسم (أصول الرياضيات).

أما الكتاب الذي كتبه مع ألفرد نورث وايتهيد اسمه (**Principa Mathematica**) برنكيبيا ماتماتيكا وسُمي باللاتينية؛ لأن معناه (أصول الرياضيات) والهدف هو التمييز عن كتاب راسل السابق، ويسميه د. زكي نجيب محمود (أسس الرياضيات). وعمومًا هما كتاب واحد لأن الأول الفكرة والثاني التفاصيل.

(14) لن نعرض تفاصيل فنية؛ لأن الكتاب يغني عن ذلك.

أثر كتاب (برينكيبا ماتيماتيكا):

قدم راسل خلال رحلته في كتابه (برينكيبيا ماتيماتيكا) نظريتين منطقيتين:

نظرية الأوصاف المنطقية[١٥]:

قدمها راسل عام 1905م والتي عن طريقها تستطيع الفلسفة -أخيرًا- إثبات أن غولا أو دائرة مربعة مفاهيمُ لا وجود لها.

(كل العفاريت حمراء)، و(كل المصريين عرب)، قضيتان متساويتان في نظر المنطق الأرسطي، وعن طريق الأوصاف المنطقية يتم إثبات أن المقدم (المبتدأ أو الموضوع) في القضية الأولى لا وجود له، بينما هو في الثانية موجود، هناك فئة فارغة وفئة غير فارغة.

هدف (الأوصاف المنطقية) هو تمييز الصور المنطقية عن الصور النحوية وإبعاد الكيانات الزائفة التي لا يستطيع النحو إثبات زيفها.

نظرية الأنماط المنطقية[١٦]:

قدمها راسل عام 1908م للتغلب على التناقضات التي واجهها في نظرية الفئات، كما رأينا سابقًا.

في نظرية الأنماط يمكن أن نفرق بين قضية تشير إلى شيء جزئي وقضية تشير إلى مبدأ عام أو تشير إلى قضايا أخرى، مما أدى إلى حل مفارقات كثيرة.

---

(15) ستجد تفاصيل مشروحة لهذه النظرية في الفصلين السادس عشر والسابع عشر من الكتاب.
(16) ستجد تفاصيل مشروحة لهذه النظرية في الفصل الثالث عشر من الكتاب.

الجدير بالذكر أنه أصدر كتاب في ذاك العام اسمه (المنطق الرياضي مستندًا على نظرية الأصناف) ناقش فكرتي (البعض) و(الكل) وتدرج الأنماط والمنطق الرياضي والفئات والعلاقات والدلالات الوصفية.

جودل ومبرهنة عدم الاكتمال:

هل نجح راسل في مسعاه؟

هل نجح في جعل الرياضيات جزءًا من المنطق؟

في عام 1931م (أي بعد قرابة الـ 20 سنة على إصدار الطّبعة الأولى لكتاب برينكيبيا ماتيماتيكا) تقدّم عالم المنطق والرّياضيّات النّمساوي كورت جوديل (1906 - 1978م) بمبرهنات عدم الاكتمال؛ قدم في مبرهنته الأولى أنه في أي نسق صوري يقوم على سلسلة الأعداد الطبيعية التي تبدأ من الصفر، توجد قضية أو صياغة لا يمكن إثباتها ولا إثبات نفيها، أي غير قابلة للبت أو الحسم صوريًّا، وينتج عن هذا مبرهنة جودل الثانية التي تبرهن على أنه لا يمكن إثبات اتساق النسق الصوري ببرهان من داخله، الإثبات الذاتي للاتساق يقتضي توافر خصائص جوهرية لا يتمتع بها النسق الصوري الملائم لسلسلة الأعداد الطبيعية، وهذا يعني لا اكتمالاً في النسق الصوري؛ محطّمًا أهداف مشروع راسل ووايتهيد إلى شذرات!

مع هذا وحين كتب راسل تمهيدًا لطبعة جديدة في عام 1937، ذكر أنه ظلَّ مقتنعًا بصحة الفرضية الأساسية للكتاب؛ وهي «أن الرياضيات والمنطق متطابقان».

ومع هذا الإخفاق، فإن أهم النتائج التي أنتجها كتاب راسل هو التحليلية التي ترى أن أي مشكلة فلسفية إذا خضعت للتدقيق والتحليل الضروريين؛ اتضح أنها إما أن تكون مشكلة منطقية أو أنها ليست مشكلة فلسفية فعلًا، بعبارة أخرى، كل المشاكل الفلسفية فعلًا هي مشاكل منطقية.

لقد قادت التحليلية راسل إلى تطبيقها على الأشياء وطريقة حديثنا عنها. وأطلق على هذا المنهج (فلسفة مذهب الذرية المنطقية).

ويشرح د. محمد زكريا توفيق ذلك بقوله:

«لقد كان راسل يعتقد أن العالم مكون من حقائق صغيرة مستقلة لا يمكن تفتيتها، أسماها بالحقائق الذرية (Atomic facts) كلمة ذرة باليونانية تعني الشيء الذي لا يمكن تفتيته إلى أشياء أبسط منه».

أبحاث راسل في المنطق، جعلته يفحص بعناية طريقة استخدامنا للغة. اعتقد راسل أن قواعد اللغة المستخدمة في حياتنا العامة ليست منطقية، ويمكن أن تؤدي إلى عدم فهم وتضليل.

الجملة في لغتنا، لكي تكون مفيدة، يجب أن يكون لها معنى. ولكي يكون لها معنى، يجب أن تماثل أو توافق هذه الحقائق الأساسية، أي الحقائق الذرية. وظيفة الفلسفة هي تحليل هذه الجمل أو المقولات، وتفكيكها إلى جمل بسيطة تطابق حقائق بسيطة. الحقائق البسيطة إما أن تكون صحيحة أو كاذبة.

مثلًا، جملة: «المرأة تنجب 2.6 طفل في المتوسط»، هي جملة مركبة

وليست بسيطة. كذلك مفاهيم مثل «الدولة» و«الرأي العام»، هي مفاهيم مركبة وليست بسيطة. نخطئ إذا اعتبرناها أشياء حقيقية موجودة».

وهذا ما نجد صداه في أعمال الفيلسوف النمساوي لودفيج فيتجنشتاين (1889-1951م) الذي كان تلميذًا لراسل ثم صار صديقًا له بعد ذلك.

هذا الكتاب:

الكتاب الذي بين أيدينا هو نسخة شعبية من كتاب (برينكيبيا ماتيماتيكا)، عرض فيه راسل الأفكار الأساسية لفلسفة الرياضيات، وقد كتبه في السجن!

نعم في السجن؛ فلقد سُجن راسل في بداية عام 1918 لمناهضته الحرب العالمية الأولى، واستمر في سجنه حتى سبتمبر من نفس العام؛ أي ستة أشهر، خلالها كتب هذا الكتاب وبداية كتابه (تحليل العقل).

وقد نستغرب أنه أنتج كتابًا في السجن، وتزول الغرابة لو عرفنا أن راسل بفضل علاقاته الاجتماعية (أقرَّ متهكمًا أنه من المفيد أن يكون المرء أخًا لإيرل) وضعوه في الشعبة الأولى من السجن؛ أي أنه كان يقيم في زنزانة مخصصة له وحده، وكان يُسمح له بالاحتفاظ بكتب؛ ومن ثَمَّ كان يقرأ ويكتب.

وقد صدر هذا الكتاب في طبعته الأولى عام 1919م.

يتكون الكتاب من ثمانية عشر فصلًا وتصدير، ابتدأها بالأعداد الطبيعية وتعريف العدد (مستندًا على بيانو ومفندًا له في الوقت نفسه)، وانتقل

إلى الاستقراء الرياضي ومن ثم العلاقات (هذه هي الإضافة الجديدة لراسل على مَن سبقه)، مرورًا بالترتيب، وبعدها يرجع مرة ثانية للأعداد وأنواعها (مستفيدًا من كانتور)، ويعرّج على الاتصال والنهايات ويقدم في الدوال فكرة الدالة القضوية وعلاقتها بنظريتيه الأنماط والأوصاف وربطها بالفئات، وأخيرًا يصل إلى علاقة الرياضيات والمنطق كمسك الختام للكتاب.

يختم راسل كتابه بهذه الجملة المعبرة: «لو قاد هذا الكتاب الصغير أي طالب نحو دراسة جادة للمنطق الرياضي، فسوف يكون قد أدى غرضه الرئيس الذي كُتب من أجله».

كتاب بذل مترجمه د. أحمد سمير سعد قصارى جهده في توضيح مفاهيمه ونقل مادته بأمانة إلى العربية في سلاسة ويسر رغم الرموز الرياضية التي ملأت الكتاب.

وقد قدم المترجم في هوامش كل فصل تراجم مختصرة لعلماء وفلاسفة الرياضيات الذين أشار إليهم المؤلف في متن الكتاب.

إن كتابًا مثل هذا في رف المكتبة العربية هو إضافة مهمة لكل دارس فلسفة أو منطق أو حتى حاسوب؛ ليعرف الجهد الذي بذله علماء الرياضيات والفلسفة للوصول بعصرنا إلى هذا الانفجار المعرفي والمعلوماتي الذي نعيشه اليوم.

عبدالحفيظ العمري

إب – اليمن 12 ديسمبر (كانون الأول) 2019م

تصدير

قُصِد من هذا الكتاب أن يكون بالأساس «مقدمة»، ولم يكن الغرض منه أن يزود بمناقشة مرهقة للمعضلات التي يتعامل معها. يبدو من المرغوب فيه إبراز نتائج معينة -إلى الآن هي غير متاحة إلا إلى أولئك الذين أتقنوا الرمزية المنطقية- في صورة تقدم للمبتدئ أدنى درجات الصعوبة. بُذِل جهد عظيم من أجل تجنب الدوجمائية فيما يتعلق بمثل هذه التساؤلات التي لا تزال مفتوحة أمام الشك الجاد، وهذا السعي تحكم بدرجة ما في اختيار المواضيع المدروسة. بدايات المنطق الرياضي غير معروفة بشكل محدد تمامًا مقارنة بجوانبه الأخيرة، إلا أن أهميته تعدل تلك التي للفلسفة على الأقل. أغلب ما سوف يستعرض في الفصول التالية ليس من الصحيح تمامًا دعوته «بالفلسفة»، على الرغم من أن الأمور المعنية كانت مضمنة في الفلسفة طوال الفترة التي لم يوجد فيها علم مقنع لها. على سبيل المثال، انتمت طبيعة اللانهاية والاتصال في الأيام الأولى إلى الفلسفة، لكنها تنتمي الآن إلى الرياضيات. من غير الممكن للفلسفة الرياضية بمعناها الصارم -ربما- أن تُحمَل على ضم مثل هذه النتائج العلمية المحددة كما حُصِّلت ضمن هذا النطاق؛ سوف يكون من المتوقع لفلسفة الرياضيات أن تتعامل على نحو طبيعي مع التساؤلات التي تقع على تخوم المعرفة،

تلك التي لم يُحرز يقين نسبي بشأنها. لكن من النادر أن يكون التخمين فيما يتعلق بمثل هذه التساؤلات مثمرًا ما لم تُعرف الأجزاء الأكثر علمية لمبادئ الرياضيات. لذلك، فكتاب يتعامل مع تلك الأجزاء قد يدَّعي كونه مقدمة للفلسفة الرياضية بالرغم من أنه يستطيع بالكاد ادعاء كونه يتعامل بالفعل مع جانب للفلسفة إلا حيثما يخطو خارج ميدانه. مع ذلك فهو يتعامل مع هيكل للمعرفة يبدو للذين يَقبلون به ناقصًا للفلسفة الأكثر تقليدية، بل ناقصًا حتى لجزء كبير من الفلسفة الحالية في الأيام الراهنة. يعد المنطق الرياضي بهذه الطريقة وبالإضافة إلى ثقله على المعضلات التي لم تحل بعد، على صلة وثيقة بالفلسفة. لهذا السبب وبالإضافة إلى الأهمية الجوهرية للموضوع من الممكن تحقيق هدفٍ ما عن طريق عرض موجز للنتائج الرئيسة للمنطق الرياضي في شكل لا يتطلب معرفة بالرياضيات أو كفاءة في الرمزية الرياضية.

مع ذلك، فهنا كما هو الحال في كل مكان آخر المنهج أهم من النتائج، من منظور البحث الأعمق؛ ومن غير الممكن شرح المنهج جيدًا خلال إطار العمل الخاص بكتاب مثل التالي. آمل أن بعض القراء قد يكونون مهتمين بالشكل الكافي كي يرتقوا نحو دراسة المنهج الذي يمكن عن طريقه جعل المنطق الرياضي نافعًا في تقصي المعضلات التقليدية للفلسفة. لكن هذا موضوع لم تحاول الصفحات القادمة التعامل معه.

برتراند راسل

الفصل الأول

سلسلة الأعداد الطبيعية[1]

الرياضيات هي الدراسة التي عندما نمضي فيها ابتداء من أكثر جوانبها ألفة، قد نمضي في أحد سبيلين، كل منهما هو نقيض الآخر. إما أن نمضي في الاتجاه الأكثر ألفة وهو الاتجاه البنائي نحو تعقد يزداد تدريجيًّا من الأعداد الصحيحة[2] إلى الكسور[3] والأعداد الحقيقية[4] والأعداد المركبة[5]؛ من الجمع والضرب إلى التفاضل والتكامل، وهكذا قدمًا نحو رياضيات أعلى. وإمَّا أن قد نمضي في الاتجاه المعاكس الأقل ألفة، نسعى صوب تجريد أكبر وبساطة منطقية عن طريق التحليل؛ وبدلًا من أن نسأل عما قد نعينه ونستدل عليه مما يفترض أننا قد بدأنا به، نسأل عن التصورات والمبادئ الأكثر عمومية التي من الممكن اكتشافها، بالتحديد عن نقطة البداية التي قد نعينها أو نستدل عليها. إنها الحقيقة المتمثلة في السعي نحو الاتجاه المعاكس الذي يميز فلسفة الرياضيات بالمقارنة بالرياضيات المعتادة. لكن من اللازم أن نعي أن هناك فارقًا واحدًا، وهو لا يكمن في موضوع الدراسة لكنه كامن في الحالة الذهنية للباحث. بحسب التعريف السابق فإن الهندسة

الإغريقية الأولى المنحدرة من القواعد التجريبية للمصريين ماسحي الأراضي وحتى الافتراضات العامة التي برهنت على تلك القواعد ومن ثم مسلمات إقليدس[6] وفرضياته كذلك انخرطت جميعها في الفلسفة الرياضية؛ لكن بمجرد الوصول إلى المسلمات والافتراضات، فإن توظيفها الاستدلالي كما نجده عند إقليدس ينتمي للرياضيات بمعناها المتعارف عليه. يقوم التمايز الوحيد بين الرياضيات والفلسفة الرياضية على الشغف الذي يلهم البحث، وعلى المرحلة التي وصل إليها البحث؛ لا على الفرضيات التي يُعنى بها البحث.

يمكننا أن ننص على نفس الفارق بطريقة أخرى. ليست تلك الأشياء التي تأتي على نحو منطقي في البداية هي الأكثر سهولةً ووضوحًا فيما يتعلق بالرياضيات؛ لكنها تلك الأشياء التي تأتي في مكان ما في المنتصف بالنسبة لمنظور الاستدلال المنطقي. تمامًا كما هو الأمر مع الأجسام، حيث لا تكون الأجسام التي ترى بسهولة هي القريبة جدًّا أو البعيدة للغاية، ولا تلك الصغيرة جدًّا أو الكبيرة للغاية، على ذلك فأسهل المفاهيم التي نقبض عليها ليست بالمعقدة جدًّا أو بالبسيطة للغاية (مع استخدام كلمة بسيطة بدلالتها المنطقية). وكما نحتاج إلى نوعين من الأدوات، التلسكوب والميكروسكوب كي نعظم من قدراتنا على الرؤية، نحتاج كذلك إلى نوعين من الأدوات كي نعظم من قدراتنا المنطقية، نوع يتقدم بنا للأمام نحو الرياضيات الأعلى، والآخر يرجع بنا إلى الأسس المنطقية للأشياء التي نميل إلى أخذها كمسلمات في الرياضيات. سوف نجد أننا عن طريق تحليل مفاهيمها الرياضية

المعتادة نكتسب تبصرًا طازجًا وقدرات جديدة ووسائل للخلوص إلى موضوعات رياضية كاملة جديدة وذلك عبر تبني مسارات طازجة للتقدم بعد الانتهاء من رحلتنا للوراء. يعرض هذا الكتاب شرحًا للفلسفة الرياضية ببساطة وبلا تفاصيل فنية متخصصة ودون استفاضة في تلك الأجزاء الغامضة والمحيرة أو تلك الأجزاء الصعبة، حيث إن المعالجة الأولية هي بالكاد ممكنة -يمكن الاطلاع على المعالجة الكاملة في كتاب (أصول الرياضيات)[7]- قُصد من هذه المعالجة في هذا الإصدار أن تكون مجرد مقدمة.

تعتبر سلسلة الأعداد غير الكسرية هي نقطة البدء الجلية في الرياضيات بالنسبة للشخص المتعلم العادي في عصرنا الحالي.

1, 2, 3, 4, ...

ربما كان ليفكر الشخص الذي يحظى ببعض المعرفة الرياضية فقط في البدء بالـ «**0**» بدلًا من البدء بال 1، لكننا سوف نفترض في شخصنا العادي هذه الدرجة من المعرفة؛ وعلى ذلك سوف نأخذ السلسلة التالية كنقطة بدء لنا:

0, 1, 2, 3, ...n, n + 1, ...

وهي سلسلة الأعداد التي نقصدها عند الحديث عن «سلسلة الأعداد الطبيعية».

لم تؤخذ هذه السلسلة كنقطة بدء إلا عند درجة متقدمة على سلم التحضر. تطلب الأمر بكل تأكيد أزمنة عديدة من أجل اكتشاف أن

زوجًا من الطيور وزوجًا من الأيام كليهما مثالان للرقم 2. درجة التجريد المطلوبة بعيدة تمامًا عن أي بساطة أو سهولة. ولعل اكتشاف أن الـ 1 هو عدد قد كان بالتأكيد عسيرًا. وكذلك يعد الـ 0 إضافة حديثة جدًّا؛ لم يكن لدى الإغريق والروم مثل هذا الرقم. لو أننا بصدد السعي وراء الفلسفة الرياضية في العصور السحيقة، علينا أن نبدأ من شيء أقل تجريدًا من سلسلة الأعداد الطبيعية، التي سوف نصل إليها في مرحلة ما خلال رحلتنا للوراء. عندما تصبح الأسس المنطقية للرياضيات أكثر ألفة، سنكون قادرين على البدء من نقطة أبعد للخلف، ما يعد الآن خطوة متأخرة في تحليلنا. لكن الأعداد الطبيعية تبدو في الوقت الحالي ممثلة للأبسط والأكثر ألفة في الرياضيات.

لكن على الرغم من كونها مألوفة إلا أنها غير مفهومة. قلة قليلة جدًّا من الناس تجدهم جاهزين بتعريف للمقصود «بالعدد» أو بالـ«0» أو بالـ«1». ليس من الصعب للغاية إدراك أنه ابتداء من الـ 0، يمكننا الوصول إلى أي عدد آخر من الأعداد الطبيعية وذلك بتكرار إضافة 1، لكن علينا أن نعرف المقصود «بإضافة 1»، والمقصود «بتكرار». هذه الأسئلة ليست سهلة بأي حال. كان من المسلم به حتى وقت قريب أن البعض على الأقل من تلك المفاهيم الأولية للحساب يجب القبول بها باعتبارها بسيطة وبدائية للغاية كي تُعرّف. وحيث إن كل المصطلحات التي تُعرّف، تُعرّف من خلال مصطلحات أخرى، فمن الواضح أنه من اللازم أن ترضى المعرفة البشرية دائمًا بقبول بعض المصطلحات باعتبارها مفهومة دون تعريف؛ وذلك كي تحظى بنقطة بدء خاصة

بتعريفاتها. وجوب وجود مصطلحات غير قابلة للتعريف هو أمر غير واضح: من المحتمل مع ذلك أنه مهما رجعنا إلى الوراء في محاولاتنا للتعريف، دائمًا ما قد يكون في إمكاننا الرجوع أكثر، لم نزل. من ناحية أخرى، من المحتمل أيضًا أننا بدفع التحليل بعيدًا للوراء بالقدر الكافي، قد نصل إلى مصطلحات هي بسيطة بالفعل، وبذلك يصبح من العصي منطقيًّا تعريفها باستخدام هذا النوع من التعريف الذي يقتضي التحليل. هذه مسألة ليس من الضروري بالنسبة لنا البت فيها؛ من الكافي لأهدافنا الحالية إدراك أنه نظرًا لكون القدرات البشرية متناهية، فإن التعريفات المعروفة لنا يجب أن تبدأ دائمًا في مكان ما، بمصطلحات غير مُعرّفة في الوقت الراهن، إلا أن عدم تعريفها ربما لا يكون أبديًّا.

من الممكن اعتبار كل الرياضيات البحتة -بما في ذلك الهندسة التحليلية- مكونة بالكامل من فرضيات حول الأعداد الطبيعية. بمعنى آخر، المصطلحات التي نصادفها من الممكن تعريفها عن طريق الأعداد الطبيعية والفرضيات من الممكن الاستدلال عليها من خلال خواص الأعداد الطبيعية – مع إضافة تصورات وفرضيات المنطق البحت في كل حالة.

إدراكنا أن كل الرياضيات البحتة من الممكن اشتقاقها من الأعداد الطبيعية هو اكتشاف حديث إلى حد كبير، على الرغم من أن ذلك قد كان موضع ظن لفترة طويلة. لقد كان فيثاغورس الذي اعتقد في أنها ليست الرياضيات فقط -بل كل شيء آخر- من الممكن الاستدلال عليه من خلال الأعداد، هو مكتشف الحجر العثرة الأكثر خطورة في

طريق ما يسمى «حسبنة arithmetising» الرياضيات. لقد اكتشف فيثاغورس وجود ما هو غير قابل للقياس، على وجه التحديد اكتشف عدم قابلية قياس قطر ضلع مربع. لو كان طول الضلع هو 1 بوصة، فإن عدد البوصات في القطر هو الجذر التربيعي لـ 2، وهو ما لا يبدو كعدد على الإطلاق. لم تُحل هذه المعضلة التي فرضت نفسها إلا في أيامنا هذه فقط، ولم تُحَلّ تمامًا إلا بمساعدة اختزال الحساب إلى المنطق فقط وهو ما سنفسره في الفصول اللاحقة. في الوقت الراهن، سوف نسلم بحسبنة الرياضيات، على الرغم من أنها قد كانت خطوة فذة على درجة عظيمة جدًّا من الأهمية.

الخطوة التالية في التحليل المنطقي عقب اختزال كل الرياضيات البحتة التقليدية إلى نظرية الأعداد الطبيعية تتمثل في اختزال النظرية نفسها إلى أقل مجموعة من الافتراضات والحدود غير المعرفة التي يمكن اشتقاقها منها. أنجز بيانو[8] هذا العمل. أوضح أن نظرية الأعداد الطبيعية بالكامل من الممكن اشتقاقها من ثلاثة تصورات أولية وخمس فرضيات أولية بالإضافة إلى تلك الخاصة بالمنطق البحت. على ذلك فقد أصبحت هذه التصورات الثلاثة والافتراضات الخمسة رهائن ممثلة لكل الرياضيات البحتة التقليدية. إذا ما أصبح في الإمكان تعريفها والبرهنة عليها، فمن الممكن القيام بذلك بالنسبة لكل الرياضيات البحتة. «ثقلها» المنطقي -إذا كان للواحد أن يستخدم مثل هذا التعبير- مكافئ لذلك الذي لسلاسل العلوم جميعها، تلك التي استُدل عليها من نظرية الأعداد الطبيعية؛ يمكن الاطمئنان لصحة هذه المجموعات كلها

لو ضمنا صحة الفرضيات الأولية الخمس، بشرط عدم وجود خطأ في النظام المنطقي البحت المضمن بالتأكيد. أصبح العمل على تحليل الرياضيات يسيرًا على نحو إعجازي بفضل جهود بيانو. التصورات الأولية الثلاثة في حساب بيانو هي:

0، عدد number، تابع successor.

قصد «بالتابع» العدد التالي في الترتيب الطبيعي. ما يعني أن تابع **0** هو **1**، وتابع **1** هو **2** وهكذا. وقصد «بالعدد» في هذا الصدد مجموعة الأعداد الطبيعية[9]. لا يفترض أننا نعرف كل أعداد هذه المجموعة، لكنه يفترض أننا نعرف فقط ما نقصده عندما نقول إن هذا أو ذاك هو عدد، تمامًا كما نعرف ما نقصده عندما نقول إن «جونز هو رجل» مع أننا لا نعرف كل الرجال بشكل منفرد.

الفرضيات الخمس التي افترضها بيانو هي:

1 – الـ**0** هو عدد.

2 – تابع أي عدد هو عدد.

3 – لا يحظى أي عددين بنفس التابع.

4 – الـ **0** ليس تابعًا لأي عدد.

5 – أي خاصية تعود للـ **0**، وكذلك تعود لتابع كل عدد له ذات الخاصية، تعود لكل الأعداد.

الأخير هو مبدأ الاستقراء الرياضي[10] **mathematical induction**. لدينا الكثير لنقوله بخصوص الاستقراء الرياضي فيما هو

لاحق، في الوقت الراهن نحن معنيون به فيما يتعلق بكونه واقعًا ضمن تحليل بيانو للحساب.

دعنا نأتِ باختصار على ذكر الكيفية التي تنتج بها نظرية الأعداد الطبيعية انطلاقًا من هذه التصورات الثلاثة والفرضيات الخمسة. في البداية عرّفنا 1 باعتباره «تابعًا لـ 0» و2 باعتبارها «تابعًا لـ 1» وهكذا. من الواضح أنه في إمكاننا المضي قُدُمًا كما نشاء مع هذه التعريفات، حيث إنه في ضوء (2) فإن كل عدد نصل إليه سوف يكون له تابع، وفي ضوء (3) من غير الوارد أن يكون هذا التابع أي عدد سبق تعريفه بالفعل؛ لأن ذلك لو حدث سوف يحظى عددان مختلفان بنفس التابع، وفي ضوء (4) من غير الوارد أن يكون أي عدد في سلسلة التوابع هذه 0. هكذا تمدنا سلسلة التوابع هذه بسلسلة من الأعداد الجديدة المتصلة بلا نهاية. في ضوء (5) فإن كل الأعداد المنتمية لهذه السلسلة التي تبدأ بـ 0 وتمضي نحو توابع متوالية يكون: أ- ينتمي 0 لهذه السلسلة. وب- لو أن عددًا n ينتمي للسلسلة فكذلك ينتمي تابعه لها، حيث إنه عن طريق الاستقراء الرياضي ينتمي كل عدد للسلسلة.

فلنفترض أننا نطمح إلى تعريف مجموع عددين. فلنأخذ أي عدد m ، نُعرّف $m + 0$ باعتباره m ، ونُعرّف $m + (n + 1)$ باعتباره تابعًا لـ $m + n$. في ضوء (5) فإننا نعثر على تعريفٍ لمجموع m و n أيًّا ما كان العدد n. بالمثل يمكننا تعريف ناتج أي عددين. قد يُقنع القارئ نفسه بسهولة بأن أي فرضية أولية عادية للحساب من الممكن البرهنة عليها من خلال افتراضاتنا الخمس، ولو عانى أي صعوبة فبإمكانه العثور على الدليل عند بيانو.

حان الآن وقت التحول إلى الاعتبارات التي جعلت من التقدم لما وراء النقطة التي ارتكز عليها بيانو ضروريًّا -بيانو الذي جسد آخر إجادة «لحسبنة» الرياضيات- نحو فريجه[11] الذي كان أول من نجح في «منطقة» الرياضيات، أي اختزال المفاهيم الحسابية التي بين أسلافه كفايتها من أجل الرياضيات إلى المنطق. في هذا الفصل لن نزود بتعريف فريجه الفعلي للعدد وللأعداد المعينة، لكننا سوف نزود ببعض الأسباب التي جعلت من معالجة بيانو معالجة غير نهائية تمامًا وليست كما تبدو.

في المقام الأول فإن تصورات بيانو الأولية الثلاثة – أقصد **0** والعدد والتابع – قابلة لعدد لا نهائي من التأويلات المختلفة، كل منها سوف يحقق الفرضيات الخمس الأولية. سوف نضرب بعض الأمثلة.

1 – فلنجعل «**0**» تعني **100**، ولنجعل «العدد» يعني الأعداد من **100** إلى ما بعد ذلك في سلسلة الأعداد الطبيعية. من ثم فإن كل فرضياتنا المبدئية سوف تتحقق حتى تلك الرابعة، فبالرغم من أن **100** هو تابع **99**، فإن **99** لا يعد «عددًا» بالمعنى الذي أسبغناه الآن على كلمة «عدد». من الواضح أنه من الممكن استبدال أي عدد بـ **100** في هذا المثال.

2 – فلنجعل لـ «**0**» نفس معناه المعتاد، لكن فلنجعل «العدد» يعني ما نطلق عليه عادة اسم «عددًا زوجيًّا»، ولنجعل «تابع» العدد ما ينتج عن إضافة **2** له. من ثم سوف يمثل «**1**» العدد اثنين، وسوف يمثل «**2**» العدد أربعة وهكذا؛ سلسلة الأعداد سوف

تصبح على الصورة التالية:

0 ، اثنان، أربعة، ستة، ثمانية، ...

لا يزال في الإمكان تحقيق كل افتراضات بيانو.

3 – فلنجعل **0** تعني العدد واحد، ولنجعل «العدد» يعني المجموعة **set**.

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$$

فلنجعل «التابع» يعني «نصف». من ثم سوف تكون كل مسلمات بيانو صحيحة بالنسبة لهذه المجموعة.

من الواضح أنه من الممكن مضاعفة مثل هذه الأمثلة إلى ما لا نهاية. في الحقيقة فإن أي مجموعة موضع دراسة، غير متناهية **infinite**.

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, \ldots$$

لا تحتوي على أي تكرار، لها بداية، وليس لها حدود لا يمكن الوصول إليها من البداية في عدد متناهٍ **finite** من الخطوات، تمتلك مجموعة من الأحكام الموافقة لمسلمات بيانو. من السهل إدراك ذلك، غير أن الإثبات النظامي طويل نوعًا ما. فلنجعل «**0**» تعني x_0 ، ولنجعل «العدد» يعني كل مجموعة الحدود **terms**، ولنجعل «تابع» x_n يعني x_{n+1}. إذن،

1 – «**0** هو عدد» أي أن x_0 هو عدد في المجموعة.

2 – «تابع أي عدد هو عدد»، أي أننا لو أخذنا أي حد x_n في الفئة، فإن x_{n+1} يكون في المجموعة كذلك.

3 – «لا يحوز أي عددين نفس التابع» أي أنه لو كان كل من x_m و x_n عددين مختلفين في المجموعة، فإن x_{m+1} و x_{n+1} مختلفين؛ ينتج هذا عن حقيقة أنه لا وجود لتكرار في المجموعة (من خلال الفرضية).

4 – «0 ليس تابعًا لأي عدد» أي أنه لا وجود لأي حد في المجموعة قبل x_0 .

5 – ينتج عن ذلك: أي خاصية تعود لـ x_0 وتعود لـ x_{n+1} وكذلك تعود لـ x_n تعود لكل x في المجموعة.

يتأتى ذلك من الخواص المناظرة للأعداد.

أي مجموعة تأتي على الشكل التالي:

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots x_n, \dots$$

فيها حد أول، وفيها تابع لكل حد (على ذلك فلا وجود لحد أخير)، لا وجود للتكرار ويمكن الوصول لكل حد من البداية في عدد متناهٍ من الخطوات يطلق عليها اسم متوالية حسابية **progression**. للمتواليات الحسابية أهمية كبيرة في مبادئ الرياضيات. حيث تبين لنا في التو أن كل متوالية حسابية تحقق مسلمات بيانو الخمس. ومن الممكن إثبات العكس كذلك، أن كل سلسلة تحقق مسلمات بيانو الخمس هي متوالية حسابية. على ذلك، من الممكن استخدام هذه المسلمات الخمس لتعريف مجموعة المتواليات الحسابية: «المتواليات الحسابية» هي «تلك السلسلة التي تحقق هذه المسلمات الخمس». يمكن اعتبار أي

متوالية حسابية أساسًا للرياضيات البحتة: يمكننا منح الحد الأول الاسم «0» ومنح اسم «عدد» لكل مجموعة الحدود، واسم «تابع» للحد التالي في المتوالية الحسابية. من غير اللازم أن تتكون المتوالية الحسابية من أعداد: من المحتمل أن تتكون من نقاط في الفراغ أو من لحظات زمنية أو من أي حدود أخرى، لها امتداد لا نهائي. كل متوالية حسابية مختلفة سوف توفر تأويلًا مختلفًا لكل فرضيات الرياضيات البحتة التقليدية؛ كل هذه الفرضيات الممكنة على درجة واحدة من الصحة.

في نظام بيانو لا وجود لشيء يمكِّننا من التمييز بين هذه التأويلات المختلفة لتصوراته الأولية. من المفترض معرفتنا بالمقصود بـ «0» وعلى ذلك لن نفترض أن المقصود بهذا الرمز العدد 100 أو مسلات كليوباترا[12] أو أي من الأشياء الأخرى التي قد يعنيها.

هذه النقطة التي تذهب إلى أنه لا يمكن تعريف «0» و«العدد» و«التابع» من خلال مسلمات بيانو الخمس لكن من اللازم فهمها بشكل مستقل على درجة عالية من الأهمية. نرغب في استخدام أعدادنا وتطبيقها بالطريقة الصحيحة على الأشياء المعتادة، لا إلى مجرد تحقيقها للمعادلات الرياضية. نرغب في أن يكون لنا عشرة أصابع وعينان اثنتان وأنف واحد. نظام يعني فيه «1» الـ«100» وتعني فيه «2» الـ«101» وهكذا، قد يكون صحيحا تمامًا للرياضيات البحتة لكنه لن يكون مناسبًا للحياة اليومية. نريد من «0» و«العدد» و«التابع» أن تحظى بالمعاني التي تسمح لنا بعدد صحيح من الأصابع والأعين والأنوف. لدينا بعض المعرفة بالفعل بما نقصده بـ«0» و«1» و«2» وهكذا (على

الرغم من كونها معرفة غير واضحة أو تحليلية على نحو كافٍ) ويجب أن يتوافق استخدامنا للأعداد في الحساب مع هذه المعرفة. هذا هو الحال مع منهجية بيانو، لا يمكننا تأمين ذلك؛ كل ما يسعنا القيام به إذا ما تبنينا منهجيته هو أن نقول «نعرف ما نقصده بـ «0» و«العدد» و«التابع»، على الرغم من عدم قدرتنا على شرح ما تعنيه من خلال اصطلاحات مفاهيم أخرى أبسط». ومن الجائز تمامًا أن نقول هذا عندما يكون ذلك لزامًا علينا، وعند نقطة ما سوف يكون ذلك لزاما علينا جميعًا؛ غير أن موضوع الفلسفة الرياضية يتمثل في محاولة إرجاء هذا القول طالما كان ذلك ممكنا. يمكننا إرجاء هذا القول لفترة طويلة جدًّا عن طريق النظرية المنطقية للحساب.

قد يُطرح أنه بدلًا من التأسيس للـ «0» و«العدد» و«التابع» باعتبارها حدودًا نعرف معناها بالرغم من انعدام قدرتنا على تعريفها، يمكننا جعلها تقوم مقام أي ثلاثة حدود تحقق مسلمات بيانو الخمس. على ذلك لن يظل لهذه الحدود معنى محدد مع أنه غير مُعرّف: سوف تصبح هذه الحدود عبارة عن «متغيرات variables»، حدود نقوم بفرضيات تتعلق بها، تحديدًا تلك الفرضيات المنصوص عليها في المسلمات الخمس، لكنها غير محددة فيما عدا ذلك. إذا ما تبنينا هذا المخطط، فإن نظرياتنا لن تتم البرهنة عليها فيما يتعلق بمجموعة معينة من الحدود تُدعى «بالأعداد الطبيعية»، لكن فيما يتعلق بكل مجموعات الحدود التي لها خواص معينة. مثل هذا الإجراء ليس خاطئًا؛ بل في الحقيقة يمثل تعميمًا له قيمته لأغراض معينة. لكنه يفشل في المد بأساس مناسب للحساب وذلك

عبر منظورين. في المقام الأول لا يمكِّننا من معرفة ما إذا كان هناك أي مجموعات من الحدود تحقق مسلمات بيانو؛ بل لا تمد حتى بأبهت طرح إلى سبيل لاكتشاف إذا ما كان هناك مثل هذه المجموعات. في المقام الثاني -كما لاحظنا- نرغب في أن تكون أعدادنا على الشاكلة التي تجعل من الممكن استخدامها لعد الأشياء المعتادة، وهو ما يستدعي أن يكون لأعدادنا معنى محدد، لا أن تكون لها مجرد خواص شكلية معينة. يُعرّف هذا المعنى المحدد عن طريق النظرية المنطقية للحساب.

* * *

الهوامش:

(1) هي كل عدد صحيح موجب 1، 2، 3، 4... مضاف إليها الصفر. (المترجم).

(2) هي مجموعة الأعداد الطبيعية بالإضافة إلى الأعداد الصحيحة السالبة 1-، 2-، 3-، 4-... (المترجم).

(3) يُطلق عليها الأعداد النسبية كذلك، وهي تلك الأعداد التي من الممكن أن تكتب على صورة بسط ومقام. (المترجم).

(4) من الممكن تمثيلها كمستقيم متصل من الأعداد يحتوي على كل الأعداد الطبيعية والصحيحة والنسبية وغير النسبية مثل $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ وغيرها.

(5) هو أي عدد يكتب على صورة **a + bi** حيث **a** و**b** عددان حقيقيان و**i** هو عدد خيالي مربعه يساوي $\sqrt{-1}$ (المترجم).

(6) إقليديس: عالم رياضيات يوناني، لُقِّبَ بأبي الهندسة، ولد عام 300 قبل

الميلاد، وضع كتاب العناصر، أحد أهم مراجع الرياضيات قديمًا خاصة الهندسة، وهو يحتوي على مجموعة من المسلمات التي تؤسس لما يعرف بالهندسة الإقليدية. (المترجم).

(7) **Cambridge university press, vol. i.,1910; vol. ii., 1912; vol. iii.,1913. By Whitehead and Russell.** (المؤلف).

(8) جيوسيبي بيانو: عالم رياضيات إيطالي (1858 – 1932) (المترجم).

(9) سوف نستخدم كلمة «عدد» بهذا المفهوم في الفصل الحالي. وسوف نستخدمها بمعنى أكثر عمومية فيما بعد. (المؤلف).

(10) عادة ما تعتمد الرياضيات على مبدأ الاستنباط؛ وهو الانطلاق من مقدمة أو عدة مقدمات نحو استنتاج ما. أما الاستقراء فيعتمد على تتبع الجزيئات للوصول إلى حكم عام وعادة ما يستخدم الاستقراء في العلوم التجريبية لكنه ليس حكرًا عليها، فقد شاع استخدامه في الرياضيات كذلك؛ حيث يستخدم للبرهنة على أن معادلة ما صحيحة بالنسبة لعدد لا نهائي (غير متناهٍ) من الأعداد، بطريقة تشبه تساقط قطع الدومينو، ففي البداية نثبت المعادلة لأول عدد ثم الذي يليه فالذي يليه، كقطع دومينو متراصة تواصل التساقط. (المترجم).

(11) جوتلوب فريجه: عالم رياضيات ومنطقي وفيلسوف ألماني (1848 – 1925). (المترجم).

(12) هي ثلاث مسلات مصرية قديمة تعود للفراعنة، وقد أطلق عليها الرومان اسم كليوباترا ربما لتأثيرها السياسي في ذلك الوقت، وهي موجودة الآن في لندن وباريس ونيويورك. (المترجم).

* * *

الفصل الثاني

تعريف العدد

كثيرًا ما يسأل الواحد منا «ما العدد؟»، لكن السؤال رغم ذلك لم يُجب عنه على نحو صحيح إلا في عصرنا الحالي. منحنا فريجه الإجابة عام 1884، في كتابه [1] **Grundlagen de Arthmetic**. على الرغم من قصر هذا الكتاب إلى حد بعيد وعدم صعوبة فهمه وكونه على درجة عالية جدًّا من الأهمية فإنَّهُ لم يجذب أي انتباه، وبقي تعريف العدد الذي يحتويه غير معروف عمليًّا حتى أُعيد اكتشافه عن طريق المؤلف الحالي في عام 1901. ونحن بصدد السعي خلف تعريف للعدد، فإن أول شيء يجب إيضاحه ما يمكن أن نُطلق عليه القواعد النحوية لمطلبنا. ينطلق كثير من الفلاسفة بالفعل عند محاولتهم لتعريف العدد في العمل على تعريف التعدد، وهو شيء مختلف تمامًا. العدد هو المميز للأعداد، كما أن الرجل هو المميز للرجال. التعددية ليست مثالًا للعدد، لكنها مثال لعدد معين. على سبيل المثال، ثلاثية من الرجال هي مثال للعدد ثلاثة، والعدد ثلاثة هو مثال للعدد؛ لكن الثلاثية ليست مثالًا للعدد. تبدو هذه النقطة بدائية وبالكاد تستحق الذكر؛ مع ذلك ثبت عدم وضوحها تمامًا بالنسبة للفلاسفة، مع استثناءات قليلة.

لا يكافئ العدد المعين أي تجمع **collection** من الحدود لها ذلك العدد: لا يكافئ العدد 3 الثلاثية المكونة من براون وجونز وروبنسون. العدد ثلاثة هو شيء مشترك تحظى به كل الثلاثيات، وهو ما يميزها عن بقية التجمعات. العدد هو شيء مميز خاص بتجمعات معينة، تحديدًا تلك التي لها ذلك العدد.

بدلًا من الحديث عن «تجمع» سوف نتحدث كقاعدة عن «فئة **class**» أو عن «مجموعة» في بعض الأحيان. تُستخدم بعض الكلمات في الرياضيات كي تعبر عن نفس الشيء مثل «حشد» و«متعدد». لدينا الكثير لنقوله فيما بعد عن الفئات. في الوقت الراهن سوف نقول أقل ما يمكن. لكن هناك ملاحظات يجب الإشارة إليها في التو.

يمكن تعريف الفئة أو التجمع بطريقتين تبدوان للوهلة الأولى متمايزتين تمامًا. قد نعدد عناصرها، كأن نقول «التجمع الذي أقصده هو تجمع براون وجونز وروبنسون». أو ربما نأتي على ذكر خاصية مُعرّفة كأن نتحدث عن «الجنس البشري» أو عن «سكان لندن». نطلق على التعريف الذي يعدد، التعريف عن طريق «الماصدق **extension**». أما ذلك الذي يأتي على ذكر خاصية تعريفية فنطلق عليه التعريف عن طريق «المفهوم **intension**». من بين نوعي التعريف هذين، فذلك الذي عن طريق «المفهوم» هو الجوهري منطقيًّا على نحو أكبر. يمكن توضيح ذلك من خلال أمرين: –1 دائمًا ما يمكن اختزال تعريف الماصدق إلى تعريف المفهوم؛ –2 لا يمكن اختزال تعريف المفهوم غالبًا ولو بشكل نظري إلى تعريف الماصدق. هاتان النقطتان بحاجة إلى بعض التوضيح.

1 – يمتلك كل من براون وجونز وروبنسون خاصية معينة، لا يمتلكها أي أحد آخر في كل الكون؛ تحديدًا خاصية كونهم إما براون أو جونز أو روبنسون. يمكن استخدام هذه الخاصية لتعريف الفئة المكونة من براون وجونز وروبنسون عن طريق المفهوم. فلنتدارس معادلة على شاكلة «x هو براون أو x هو جونز أو x هو روبنسون». هذه المعادلة صحيحة بالنسبة لثلاثة x فقط، تحديدًا براون وجونز وروبنسون. من هذا المنطلق هي تشبه معادلة تكعيبية بجذورها الثلاث. يمكن اعتبارها كخاصية مُعيِّنة مشتركة بين عناصر الفئة المكونة من هؤلاء الرجال الثلاثة وخاصة بهم. من الواضح أنه من الممكن تطبيق معالجة مماثلة على أي فئة أخرى موضع دراسة مُعرَّفة عن طريق الماصدق.

2 – من الواضح أنه بإمكاننا غالبًا معرفة الكثير عن فئة ما أثناء العمل دون أن نكون قادرين على تعديد عناصرها. لا يمكن لأي رجل واحد تعديد كل الرجال، أو حتى تعديد كل سكان لندن، رغم ذلك هناك قدر كبير من المعلومات المعروفة عن كل فئة من هذه الفئات. هذا كافٍ من أجل توضيح أن التعريف عن طريق الماصدق غير لازم كي نعرف عن الفئة. لكن عندما نكون بصدد دراسة فئات غير متناهية، نجد أن التعديد غير ممكن حتى نظريًّا بالنسبة لكائنات تعيش لفترة زمنية متناهية فقط. ليس بمقدورنا تعديد كل الأعداد الطبيعية: هي 0، 1، 2، 3، وهكذا دواليك. عند نقطة ما يجب أن نقنع بعبارة «وهكذا دواليك». لا يمكننا

تعديد كل الكسور أو كل الأعداد غير النسبية أو كل أي تجمع غير متناهٍ آخر. على ذلك يمكننا أن نقتبس معارفنا فيما يتعلق بكل ما يماثل هذه التجمعات من خلال التعريف عن طريق المفهوم.

هذه الملاحظات هي وثيقة الصلة عندما نسعى خلف تعريف للأعداد، وذلك من ثلاثة أوجه. في المقام الأول- تشكل الأعداد نفسها تجمعا غير متناهٍ، وعلى ذلك لا يمكن تعريفه عن طريق التعديد. ثانيًا- تشكل التجمعات نفسها التي لها عدد ما من الحدود في النهاية تجمعا غير متناهٍ: على سبيل المثال يفترض أن هناك تجمع غير متناهٍ من الثلاثيات في العالم، حيث إن الأمر لو لم يكن على هذه الصورة سوف يصبح العدد الكلي للأشياء في العالم متناهيًا، وهو الأمر بعيد الاحتمال على الرغم من كونه ممكنًا. ثالثًا- نأمل في تعريف «العدد» على نحو قد تكون فيه الأعداد غير المتناهية ممكنة؛ على ذلك يجب أن نكون قادرين على الحديث عن عدد الحدود في تجمع غير متناه، ومثل هذا التجمع يجب تعريفه عن طريق المفهوم، أي عن طريق خاصية مشتركة بين كل العناصر ومميزة لها.

لأجل أغراض كثيرة، تكون الفئة والخاصية المُعرفة قابلة للتبادل عمليًّا. يكمن الفارق الحيوي بين الاثنين في حقيقة أن هناك فئة واحدة فقط لها مجموعة ما من العناصر بينما هناك دائمًا خواص عديدة مختلفة يمكن تعريف فئة ما عن طريقها. قد يعرف الرجال باعتبارهم من ذوات القدمين التي لا ريش لها، أو باعتبارهم حيوانات عاقلة، أو (على نحو

أصح) بواسطة السمات التي ميز بها سويفت كائنات الياهو[2]. إنها تلك الحقيقة التي تنص على أن الخاصية المُعرِّفة غير فريدة أبدًا، وهو ما يجعل الفئات ذات جدوى؛ وإلا سوف نقنع بالخواص المشتركة والمميزة لعناصرها[3]. يمكن لأي واحدة من هذه الخواص أن تحل محل الفئة، ما لم تكن الفرادة متطلبة وهامة.

بالعودة إلى تعريف العدد الآن، من الواضح أن العدد هو وسيلة لجمع تجمعات معينة معًا، تحديدًا تلك التي لها عدد ما من الحدود. يمكننا افتراض أن كل الثنائيات تجمعها حزمة واحدة وكل الثلاثيات تنتظم في حزمة أخرى وهكذا. على هذا النحو نحصل على حزم متعددة لتجمعات، كل حزمة تتكون من كل التجمعات التي لها عدد معين من الحدود. كل حزمة هي فئة، عناصرها هي تجمعات، أي فئات؛ على ذلك فكل واحدة هي فئة لفئات. على سبيل المثال، الحزمة المكونة من كل الثنائيات هي فئة لفئات: كل زوجين هي فئة تحتوي على عنصرين، وحزمة الثنائيات بمجملها هي فئة تتكون من عدد غير متناهٍ من العناصر، كل منها هو فئة من عنصرين.

كيف لنا أن نقرر ما إذا كان لتجمعين أن ينتميا لنفس الحزمة؟ الإجابة التي تطرح نفسها: «فتش عن عدد العناصر التي يحتوي عليها كل منهما، وقم بوضعهما في نفس الحزمة لو كان لهما نفس عدد العناصر». لكن هذا يفترض على نحو مسبق أن لدينا أعدادًا مُعرَّفة، كما يفترض على نحو مسبق أننا نعرف كيفية استجلاء عدد الحدود التي يحوزها التجمع. إننا معتادون للغاية على عملية العد، حتى إن مثل هذا الفرض المسبق قد

يمر بسهولة دون أن نلاحظه. في الحقيقة، رغم أن العد مألوف للغاية إلا أنه عملية معقدة جدًّا منطقيًّا؛ علاوة على ذلك لا تكون متاحة كوسيلة لاكتشاف عدد الحدود التي يحتوي عليها التجمع إلا عندما يكون التجمع متناهيًا. لا يجب أن يفترض تعريفنا للعدد بشكل مسبق أن كل الأعداد متناهية، ولا يمكننا بأي حال استخدام العد لتعريف الأعداد دون الوقوع في دائرة مفرغة؛ لأن الأعداد تستخدم للعد. لذلك نحن بحاجة لمنهج آخر لتقرير متى يكون لتجمعين نفس عدد الحدود.

الحقيقة الفعلية أنه من الأسهل منطقيًّا اكتشاف ما إذا كان لتجمعين نفس عدد الحدود من تعريف ماهية العدد. سوف يساعد المثال التوضيحي على تبيان هذا. لو لم يكن هناك تعدد للأزواج (زواج المرأة من أكثر من رجل) ولا تعدد للزوجات (زواج الرجل من أكثر من امرأة) في أي مكان في العالم، فمن الجلي أن عدد الأزواج الأحياء سيكون مساويًا تمامًا لعدد الزوجات. لسنا بحاجة لتعداد سكاني كي نطمئن إلى ذلك، كما أننا لسنا بحاجة إلى معرفة العدد الفعلي للأزواج والزوجات. نعرف أن العدد يجب أن يكون هو نفسه في كلا التجمعين؛ لأن لكل زوج زوجة واحدة ولكل زوجة زوجًا واحدًا. العلاقة بين الزوج والزوجة هي ما نطلق عليه علاقة «واحد إلى واحد».

يُقال إن العلاقة هي «واحد إلى واحد» عندما يكون لـ x علاقة هي موضع تساؤل بالنسبة لـ y ، لا وجود لحد آخر x' يحظى بذات العلاقة مع y ، ولا تحظى x بنفس العلاقة مع أي حد آخر y' بخلاف y . عندما يُوفى بالشرط الأول فقط من بين هذين الشرطين، تُدعى العلاقة بعلاقة

«واحد إلى عديد»؛ عندما يُوفى بالشرط الثاني فقط، تُدعى العلاقة بعلاقة «عديد إلى واحد». يجب ملاحظة أن العدد 1 لا يستخدم في هذه التعريفات.

في البلاد المسيحية تكون العلاقة بين الأزواج للزوجات علاقة «واحد إلى واحد»، في البلاد المحمدية تكون العلاقة علاقة «واحد إلى عديد»؛ في التبت هي علاقة «عديد إلى واحد»؛ أما علاقة الأبناء للآباء فهي علاقة «عديد إلى واحد»، لكن علاقة الأبناء الأكبر إلى الآباء هي علاقة «واحد إلى واحد». إذا كان n أي عدد، فإن علاقة n إلى n + 1 هي علاقة واحد إلى واحد؛ وكذلك علاقة n إلى 2n أو إلى 3n . عندما نكون معنيين بالأعداد الموجبة فقط تكون علاقة n إلى n^2 هي علاقة واحد إلى واحد؛ لكن إذا ما ضممنا الأعداد السالبة، تصبح العلاقة علاقة اثنين إلى واحد حيث إن لـ n و – n نفس المربع. هذه الأمثلة كافية لتوضيح مفاهيم العلاقات واحد إلى واحد وواحد إلى عديد وعديد إلى واحد، تلك العلاقات التي تلعب دورًا عظيمًا في مبادئ الرياضيات، ليس فقط فيما يتعلق بتعريف الأعداد، لكن فيما يتعلق بصلات أخرى كثيرة.

يقال إن فئتين «متشابهتان similar» عندما تكون هناك علاقة واحد إلى واحد تربط بين كل حد من حدود فئة منهما بحد من حدود الفئة الأخرى، بنفس الطريقة التي تربط بها علاقة الزواج بين الأزواج والزوجات. سوف تساعدنا بعض التعريفات الأولية في النص على هذا التعريف بشكل أكثر دقة. تُدعى فئة تلك الحدود التي لها علاقة ما

بشيء ما أو الآخر نطاق domain تلك العلاقة: على ذلك فالآباء هم نطاق علاقة الآباء بالأبناء، الأزواج هم نطاق علاقة الأزواج بالزوجات، الزوجات هن نطاق علاقة الزوجات بالأزواج، والأزواج والزوجات معًا هم نطاق علاقة الزواج. تُدعى علاقة الزوجات بالأزواج بعكس converse علاقة الأزواج بالزوجات. بالمثل أقل هو عكس أكثر وتالٍ هو عكس سابق وهكذا. بشكل عام، مقابل علاقة ما هي العلاقة التي تقوم بين y وx عندما تقوم علاقة ما بين x وy . النطاق العكسي converse domain لعلاقة هو عكس النطاق: على ذلك ففئة الزوجات هي النطاق العكسي لعلاقة الأزواج بالزوجات. يمكننا الآن النص على تعريف التشابه على النحو التالي:

يقال إن فئة مفردة «مشابهة» لأخرى عندما تكون هناك علاقة واحد إلى واحد بينهما، وتكون الفئة المفردة في العلاقة هي النطاق بينما الفئة الأخرى هي النطاق العكسي.

من السهل البرهنة على أن 1 – كل فئة مشابهة لنفسها.

2 – إذا ما كانت فئة α مشابهة لفئة β، فمن ثم فئة β ستكون مشابهة لفئة α.

3 – إذا ما كانت α مشابهة لـ β وكانت β مشابهة لـ γ، فمن ثم ستكون α مشابهة لـ γ. يُقال إن العلاقة انعكاسية reflexive إذا ما كانت تحوز أول هذه الشروط، يُقال عليها علاقة تناظر symmetrical عندما تحوز الشرط الثاني، يُقال عليها متعدية transitive عندما تحوز الشرط الثالث. ومن الواضح أن علاقة التناظر والعلاقة المتعدية يجب

أن تكون انعكاسية عبر كل النطاق الخاص بها. العلاقات التي تمتلك هذه الخواص هي من نوع هام ويستحق الأمر التوقف لوهلة من أجل تسجيل أن التشابه هو من هذا النوع من العلاقات.

من الواضح للحس المشترك أنه سيكون لفئتين متناهيتين نفس عدد الحدود إذا ما كانتا متشابهتين ولا شيء آخر. ينحصر فعل العد في إنشاء تناسب الواحد للواحد بين مجموعة الأشياء المعدودة وبين الأعداد الطبيعية المستخدمة في العملية (مع استثناء **0**). يستنتج الحس المشترك من ذلك أن هناك أشياء عديدة في المجموعة لعدها، بقدر ما هنالك أعداد حتى العدد الأخير المستخدم في العد. كما نعرف كذلك أنه، طالما كنا نقصر أنفسنا على الأعداد المتناهية، سيكون هناك عدد **n** فقط من **1** إلى **n** . يستتبع ذلك أن آخر عدد يُستخدم في عد تجمع هو عدد الحدود في التجمع، بشرط أن التجمع متناهٍ. لكن هذه النتيجة – بجانب كونها قابلة للتطبيق على التجمعات المتناهية فقط – تعتمد على حقيقة أن الفئتين المتشابهتين لهما نفس عدد الحدود كما تفترض ذلك؛ حيث إن ما نقوم به حال عد (فلنقل) عشرة أشياء، هو تبيان أن مجموعة الأشياء هذه مشابهة لمجموعة الأعداد من **1** إلى **10**. يُفترض مفهوم التشابه على نحو مسبق منطقيًّا في عملية العد، وهو أسهل منطقيًّا على الرغم من كونه غير مألوف كثيرًا. عند العد، من اللازم تناول الأشياء المعدودة بترتيب معين كأول، ثانٍ، ثالث، إلخ.، لكن الترتيب ليس هو جوهر العد: إنه إضافة غير ذات صلة، تعقيد غير ضروري من منظور منطقي. لا يتطلب مفهوم التشابه ترتيبًا:

على سبيل المثال، رأينا أن عدد الأزواج مماثل لعدد الزوجات، دون حاجة إلى إرساء الأسبقية فيما بينهم. لا يتطلب مفهوم التشابه كذلك أن تكون الفئات المتشابهة متناهية. على سبيل المثال، فلننظر في الأعداد الطبيعية (مع استثناء 0) من جهة، ولننظر في الكسور التي بسطها 1 من جهة أخرى: من الواضح أن بمقدورنا عقد علاقة بين 2 و$\frac{1}{2}$ وبين 3 و $\frac{1}{3}$ وهكذا، يبرهن ذلك على أن الفئتين متشابهتان.

من ذلك قد نستخدم مفهوم «التشابه» كي نقرر متى لتجمعين أن ينتميا لنفس الحزمة، بالمعنى الذي كنا نسأل به هذا السؤال سابقًا في هذا الفصل. نريد أن ننشئ حزمة واحدة تحتوي على الفئة التي لا عناصر فيها: هي من أجل العدد 0. ثم نريد حزمة لكل الفئات التي لديها عنصر واحد: هذه من أجل العدد 1. ثم من أجل العدد 2، نريد حزمة تتكون من كل الثنائيات؛ ثم واحدة لكل الثلاثيات؛ وهكذا دواليك. بالنسبة لأي تجمع أيًّا ما كان، يمكننا تعريف الحزمة التي ينتمي لها باعتبارها فئة كل تلك التجمعات «المشابهة» له. من السهل للغاية إدراك ذلك، فلو أن هناك (على سبيل المثال) تجمعًا من ثلاثة عناصر، فإن فئة كل تلك التجمعات المشابهة له سوف تكون فئة الثلاثيات. وأيًّا ما كان عدد الحدود التي قد يحتوي عليها تجمُّع ما، فإن تلك التجمعات «المشابهة» له سوف تحتوي على نفس عدد الحدود. قد نعتبر هذا تعريف «الاحتواء على نفس عدد الحدود». من الواضح أنه يزود بنتائج مريحة للاستخدام طالما كنا نقصر أنفسنا على التجمعات المتناهية.

إلى الآن لم يُطرح أي شيء يحمل أدنى درجات التناقض. لكن عندما

نأتي إلى التعريف الفعلي للأعداد، لا يمكننا تجنب ما يجب أن يبدو للوهلة الأولى تناقضًا، غير أن هذا الانطباع سرعان ما سوف يتلاشى. نعتقد بشكل طبيعي في أن فئة الثنائيات (على سبيل المثال) هي شيء ما يختلف عن العدد 2. لكن لا يوجد شك فيما يتعلق بفئة الثنائيات: هي مفروغ منها ومن غير العسير تعريفها، بينما العدد 2 بأي معنى آخر هو مكون ميتافيزيقي، لا يمكن أن نشعر بيقين حيال وجوده أو حيال تعقبه والقبض عليه. لذلك فمن الأحصف أن نقنع بفئة الثنائيات، تلك التي نحن على يقين منها، بدلًا من أن نسعى وراء قنص العدد 2 الإشكالي الذي سيبقى مراوغًا دائمًا بالتأكيد. بناءً على ذلك قمنا بصياغة التعريف التالي:

(عدد فئة ما هو فئة كل تلك الفئات المشابهة لها).

على ذلك سوف يكون عدد الثنائي هو فئة كل الثنائيات. في الحقيقة، سوف تكون فئة كل الثنائيات هي العدد 2، وذلك وفق تعريفنا. على حساب بعض الغرابة، يُؤمِّن هذا التعريفُ التحديدَ والموثوقيةَ؛ وليس من الصعب البرهنة على أن الأعداد المُعرّفة على هذا النحو لها كل الخواص التي نتوقع امتلاكها لها.

ربما نمضي الآن نحو تعريف الأعداد بشكل عام باعتبارها أي حزمة يجمع فيها التشابه الفئات. سوف يكون العدد مجموعة فئات مثل تلك التي يكون فيها أي اثنين مشابهين لبعضهما، ولا شيء خارج المجموعة مشابه لأي شيء داخلها. بمعنى آخر، العدد (بشكل عام) هو أي مجموعة يكون هو عدد أحد عناصرها؛ أو على نحو أبسط، لم يزل:

(العدد هو أي شيء يكون هو عدد فئة ما).

مثل هذا التعريف يحمل مظهرًا لفظيًّا دائريًّا، لكن في الحقيقة هو ليس كذلك. نُعرِّف «عدد فئة ما» دون استخدام مفهوم العدد عمومًا؛ على ذلك يمكننا تعريف العدد بشكل عام بدلالة «عدد فئة ما» دون ارتكاب أي خطأ منطقي.

التعريفات من هذا النوع شائعة جدًّا في الحقيقة. على سبيل المثال، فئة الآباء سوف تُعرَّف عن طريق تعريف ماهية أب أحدهم؛ ثم سوف تكون فئة الآباء هي كل أولئك الذين هم آباء أحدهم. بالمثل إذا ما أردنا تعريف -فلنقل- الأعداد المربعة، علينا أن نُعرِّف في البداية ما نقصده بقولنا أن عددًا هو مربع عدد آخر، ومن ثم نُعرِّف الأعداد المربعة باعتبارها تلك الأعداد التي هي مربع أعداد أخرى. هذا النوع من الإجراءات شائع جدًّا، ومن الهام إدراك أنه جائز بل حتى ضروري في الغالب.

لقد قمنا الآن بتعريف الأعداد، ستكون نافعة مع التجمعات المتناهية. يبقى أن ندرك كيف ستكون نافعة بالنسبة للتجمعات غير المتناهية. لكن علينا أولًا أن نقرر ما الذي نعنيه بـ«المتناهي» وبـ«غير المتناهي»، وهو ما لا يمكن القيام به ضمن إطار هذا الفصل.

* * *

الهوامش:

(1) نُصَّ على ذات الإجابة بشكل أكمل وأكثر تطورًا في كتابه **Grundgesetze der Arithmetik, vol.i., 1893**. (المؤلف).

(2) جوناثان سويفت: روائي وسياسي بريطاني (1667 – 1745) صاحب مجموعة روايات (رحلات جوليفر). والياهو هي كائنات أسطورية وردت في رحلات جوليفر، وقد وصفها سويفت بأنها كائنات بذيئة، سلوكياتها غير محمودة، بهائم في هيئة بشرية، كما كانوا مهووسين بالتنقيب عن المعادن النفيسة في الطين، ما يعكس ماديتهم البغيضة. (المترجم).

(3) كما سوف يتضح لاحقًا، يمكن اعتبار الفئات كخيالات منطقية **logical fictions**، مصاغة من الخواص التعريفية. لكن في الوقت الحالي فسوف يُسهِّل من عرضنا معالجة الفئات كما لو كانت واقعية. (المؤلف).

❊ ❊ ❊

الفصل الثالث

التناهي والاستقراء الرياضي

كما تبين لنا في الفصل الأول، يمكننا تعريف سلسلة الأعداد الطبيعية جميعها إذا ما عرفنا ما المقصود بالحدود الثلاثة «0» و«عدد» و«تابع». لكن في مقدورنا أن نمضي خطوة أبعد: يمكننا تعريف كل الأعداد الطبيعية إذا ما عرفنا ما المقصود بـ «0» و«تابع». يساعدنا هذا على فهم الفارق بين «المتناهي» و«غير المتناهي» كي ندرك كيفية القيام بذلك والسبب الذي يجعلنا غير قادرين على مد المنهج المستخدم لما هو مجاوز للمتناهي. لن نعمد بعد إلى الكيفية التي نُعرّف بها «0» و«التابع»: سوف نفترض في الوقت الراهن معرفتنا بما يعنيه هذان الحدان، ومن ثم سوف نستعرض كيفية الحصول على كل الأعداد الطبيعية الأخرى.

من السهل تبيان الكيفية التي يمكننا بها الوصول إلى أي عدد معين، فلنقل 3000. في البداية نُعرف «1» باعتباره «تابعًا» الـ «0»، ثم نعرف «2» باعتباره «تابعًا» الـ «1» وهكذا. في حالة أي عدد قمنا بتعيينه -وليكن 3000 على سبيل المثال- يمكننا البرهنة على قدرتنا على الوصول إليه تجريبيًّا عن طريق التقدم خطوة بخطوة على هذا المنوال، إذا كنا نتمتع بالصبر الكافي: يمكننا المضي قدمًا حتى نصل بالفعل إلى

3000. لكن على الرغم من أن منهج التجريب حاضر وممكن لكل عدد طبيعي معين، إلا أن البرهنة على أن الفرضية العامة التي تدَّعي إمكانية الوصول لكل الأعداد المشابهة عبر ذات السبيل غير قائمة، والمقصود بذات السبيل أي عبر المواصلة خطوة بخطوة ابتداءً بالـ «0»، ومن ثم من كل عدد إلى تابعه. هل هناك أي وسيلة أخرى للبرهنة على ذلك؟

دعنا ننظر إلى السؤال من الجهة الأخرى. ما الأعداد التي يمكن الوصول إليها وفي حوزتنا الحدَّان «0» و«التابع»؟ هل هناك أي سبيل يمكننا عن طريقه تعريف كل فئة مشابهة لهذه الأعداد؟ نصل إلى 1 باعتباره تابعًا 0؛ 2 باعتباره تابعًا 1؛ 3 باعتباره تابعًا 2؛ وهكذا. إنها «وهكذا» تلك التي نطمح إلى استبدالها بشيء أقل غموضًا ولا تحددًا. ربما نميل إلى أن نقول إن «وهكذا» تعني أننا قد نكرر عملية السعي فيما وراء التوابع تلك لأي عدد متناهٍ من المرات؛ لكن المعضلة العالقين فيها تكمن في تعريف «العدد المتناهي»، ولذلك لا يجب أن نستخدم هذا المفهوم في تعريفنا. لا يجب أن يفترض تعريفنا أننا نعرف ماهية العدد المتناهي.

يكمن مفتاح حل معضلتنا في الاستقراء الرياضي. علينا أن نتذكر أن هذا قد كان خامس الفرضيات الأولية الخمس التي أشرنا إليها وتتعلق بالأعداد الطبيعية. تنص الفرضية على أن أي خاصية تعود لـ 0، وكذلك تعود لتابع كل عدد له ذات الخاصية، تعود لكل الأعداد. أشرنا إلى ذلك فيما بعد باعتباره مبدأً، لكن علينا أن نوظفه الآن باعتباره تعريفًا. من غير الصعب تبين أن الحدود التي تطيعه هي نفسها ذات الأعداد التي

يمكن الوصول إليها من 0 عبر خطوات متتابعة، تمضي من التالي إلى الذي يليه، لكن نظرًا لأهمية هذه النقطة فسوف نقوم باستعراض الأمر في شيء من التفصيل.

حسنًا سنصنع لو بدأنا ببعض التعريفات، تلك التعريفات التي سوف تكون مفيدة في مواضع أخرى أيضًا.

يُقال إن خاصية ما في سلسلة الأعداد الطبيعية هي «وراثية hereditary» إذا ما انطبق عليها التالي، كلما كانت تعود لعدد n ، فإنها تعود كذلك لـ n + 1 ، تابع n . بالمثل يقال إن فئة ما هي «وراثية»، إذا ما انطبق عليها التالي، طالما كان n عنصرًا في الفئة، فكذلك n + 1 . على الرغم من أنه ليس من المفترض أن نعرف بعد إلا أنه من السهل إدراك أن قولنا إن خاصية ما متوارثة مكافئ لقولنا إنها تعود لكل الأعداد الطبيعية التي لا تقل عن أحدها، على سبيل المثال كأن تعود إلى كل الأعداد التي لا تقل عن 1000، أو كأن تعود إلى كل تلك الأعداد التي لا تقل عن 0، أو كأن تعود لها كلها بلا استثناء.

يُقال إن خاصية ما هي «استقرائية inductive» عندما تكون خاصية متوارثة وتعود إلى 0. بالمثل تكون الخاصية «استقرائية» عندما تكون الفئة وراثية، و0 عنصر فيها.

لو أن لدينا فئة وراثية الـ0 عنصر فيها، يستتبع ذلك أن 1 هو عنصر فيها؛ لأن الفئة الوراثية تحتوي على توابع عناصرها، و1 هو تابع 0. بالمثل لو لدينا فئة وراثية 1 هو عنصر فيها، يستتبع ذلك أن 2 هو عنصر فيها؛ وهكذا. على ذلك فبإمكاننا من خلال عملية تمضي خطوة بخطوة

البرهنة على أن أي عدد طبيعي نقوم بتعيينه –وليكن– 3.000 هو عنصر في كل فئة استقرائية.

سوف نُعرّف «خَلَف posterity» عدد طبيعي ما بالنسبة إلى علاقته «بالسلف ancestor المباشر» (الذي هو عكس «التابع») باعتباره كل تلك الحدود التي تنتمي إلى الفئة الوراثية التي ينتمي لها ذلك العدد الطبيعي. مرة أخرى من السهل إدراك أن خَلَف العدد الطبيعي يتكون منه هو نفسه ومن كل الأعداد الطبيعية الأكبر؛ لكننا لا نعرف ذلك بشكل معتمد بعد أيضًا.

من خلال التعريفات السابقة، فإن خَلَف 0 سوف يتكون من كل تلك الحدود التي تعود إلى كل فئة استقرائية.

من غير العسير الآن تبيان أن خَلَف «0» هو نفس مجموعة الحدود تلك التي يمكن الوصول إليها من الـ «0» عبر خطوات متتابعة من التالي إلى الذي يليه. حيث، ينتمي «0» في المقام الأول إلى كلا هاتين المجموعتين (بالمعنى الذي عرّفنا به حدودنا من خلاله)؛ ثانيًا، إذا كان n ينتمي إلى كلا المجموعتين، فكذلك ينتمي n + 1 إلى كلتيهما. من الملاحظ أننا نتعامل هنا مع ذلك النوع من الأمور التي لا تقبل دليلًا دقيقًا، بمعنى مقارنة تصورات غير محددة نوعًا بواحدة دقيقة نوعًا ما. مفهوم «تلك الحدود التي يمكن الوصول إليها من الـ «0» «من خلال خطوات متتابعة من التالي إلى الذي يليه» غير محدد، على الرغم من أنه قد يبدو حاملًا لمعنى محدد دقيق؛ من جهة أخرى فإن «خَلَف» الـ «0» دقيق وجلي، بينما التصور الآخر مشوش. ربما نذهب إلى أننا نزود بما

نعنيه كي يعنيه عندما نتحدث عن الحدود التي يمكن الوصول إليها من الـ «0» من خلال خطوات متتابعة.

نضع الآن التعريف التالي:

(«الأعداد الطبيعية» هي خَلَف الـ«0» من حيث العلاقة مع «السلف المباشر» (الذي هو عكس التابع)).

بذلك نكون قد وصلنا إلى تعريف أحد تصورات بيانو الأولية بالنسبة إلى الاثنين الآخرين. كنتيجة لهذا التعريف، فإن اثنين من فرضياته الأولية – تحديدًا تلك التي تنص على أن الـ «0» هو عدد وتلك التي تنص على الاستقراء الرياضي – أصبحتا غير ضروريتين، حيث إنهما تتولدان من التعريف. نحتاج إلى تلك التي تنص على أن تابع العدد الطبيعي هو عدد طبيعي في صيغتها الضعيفة فقط «لكل عدد طبيعي تابع».

يمكننا بالطبع تعريف الـ «0» و«التابع» بسهولة عن طريق وسائل تعريف العدد بشكل عام، ذلك التعريف الذي وصلنا إليه في الفصل الثاني. العدد 0 هو عدد الحدود في فئة لا توجد عناصر بها، أي في فئة يُطلق عليها «فئة خالية **null class**». من خلال التعريف العام للعدد، فإن عدد الحدود في الفئة الخالية هو مجموعة كل الفئات المشابهة للفئة الخالية، أي المجموعة التي تتكون من الفئة الخالية بمفردها تمامًا (وهو مما يسهل البرهنة عليه)، أي الفئة التي عنصرها الوحيد هو الفئة الخالية. (لا تشابه هذه الفئة الفئة الخالية: ففيها عنصر واحد، تحديدًا الفئة الخالية، في الوقت الذي لا يوجد لدى الفئة الخالية أي عناصر. لا تشابه فئة لديها عنصر واحد ذلك العنصر الواحد أبدًا، كما سوف

نبين عندما نأتي إلى نظرية الفئات). على ذلك فإن لدينا التعريف التالي المنطقي بشكل محض:

(الـ «0» هو الفئة التي عنصرها الوحيد هو المجموعة الخالية).

بقي أن نُعرّف «التابع». بالنظر إلى أي عدد n ، فلنجعل α فئة لديها n عنصر، ولنجعل x حدًّا ليس عنصرًا في α. من ثم فإن فئة تتكون من α مع إضافة x سوف يكون لديها n + 1 عنصر. على ذلك يصبح لدينا التعريف التالي:

(تابع عدد الحدود في الفئة α هو عدد الحدود في الفئة المكونة من α مع x ، حيث x هو أي حد لا ينتمي للفئة).

يتطلب جعل هذا التعريف مثاليا تفاصيل معينة، لكن لا حاجة لأن نُعنى بها[1]. علينا أن نتذكر أننا قد زودنا بالفعل (في الفصل الثاني) بتعريف منطقي لعدد الحدود في فئة، تحديدًا عرّفناه باعتباره مجموعة كل الفئات المشابهة للفئة المعنيين بها.

بذلك قد قمنا باختزال تصورات بيانو الثلاثة الأولية إلى تصورات منطقية: زودنا بتعريفات لها، جعلتها محددة، لم تعد قابلة لعدد غير متناهٍ من المعاني المختلفة، كما كانت عندما كانت مجرد محددات لمدى موافقة مسلمات بيانو الخمس. أزلناها من عتاد المصطلحات الأساسية، اللازم استيعابه بالكاد، وبذلك زدنا من التعبير الاستقرائي للرياضيات.

فيما يتعلق بالفرضيات الخمس الأولية، نجحنا بالفعل في جعل

اثنتين منها بينتين من خلال تعريفنا «للعدد الطبيعي». كيف هو الحال مع الثلاثة الباقية؟ من السهل للغاية البرهنة على أن 0 ليس تابعًا لأي عدد، وعلى أن تابع أي عدد هو عدد. لكن هناك صعوبة فيما يتعلق ببقية الفرضيات الأولية، تحديدًا، «لا يحظى أي عددين بنفس التابع». تظهر الصعوبة، لو لم يكن عدد العناصر في الكون متناهيًا؛ بالنسبة لعددين m وn، ليس أي منهما العدد الكلي للعناصر في الكون، من السهل البرهنة على أننا لا نستطيع الحصول على m + 1 = n + 1 إلا إذا كانت m = n . لكن دعنا نفترض أن العدد الكلي للعناصر في الكون كان (فلنقل) 10؛ من ثم لن تكون هناك فئة الـ11 عنصرًا، وسوف يكون العدد 11 هو الفئة الخالية. وكذلك العدد 12. على ذلك سوف نحصل على 11 = 12؛ على ذلك فتابع 10 سوف يكون هو نفسه تابع 11، على الرغم من أن 10 ليست هي نفسها 11. لذلك لا يسعنا إلا الحصول على عددين مختلفين لهما نفس التابع. لا يمكن بأي حال أن يظهر هذا الفشل للمسلمة الثالثة، لو كان عدد العناصر في العالم متناهيًا. سوف نعود إلى هذا الموضوع في مرحلة تالية[2].

إذا ما افترضنا أن عدد العناصر في الكون غير متناهٍ، فقد نجحنا الآن لا في تعريف تصورات بيانو الثلاثة الأولية فقط، بل في إدراك كيفية البرهنة على فرضياته الخمس الأولية، بمعونة تصورات أولية وفرضيات تعود للمنطق. يستتبع ذلك أن كل الرياضيات البحتة – طالما كانت مشتقة من نظرية الأعداد الطبيعية– ما هي إلا تمديد للمنطق. لا يعجزنا من حيث المبدأ مد هذه النتيجة على تلك الأفرع الحديثة للرياضيات، تلك الأفرع

غير المشتقة من نظرية الأعداد الطبيعية، كما بينا في مكان آخر[3].

عملية الاستقراء الرياضي من خلال الوسائل التي عرّفنا بها الأعداد الطبيعية قابلة للتعميم. عرّفنا الأعداد الطبيعية باعتبارها «خَلَف» الـ «0» من حيث علاقة العدد بتابعه المباشر. إذا ما أطلقنا على هذا العلاقة N، فإن كل عدد m سوف يحظى بهذه العلاقة مع m + 1. تكون الخاصية «متوارثة فيما يتعلق بـ N» أو ببساطة تكون «N وراثية» إذا ما كانت أي خاصية تعود إلى عدد m ، تعود كذلك دائمًا إلى m + 1، أي إلى العدد الذي يكون m على علاقة N معه. وسوف يقال إن العدد n ينتمي إلى «خَلَف» m من حيث العلاقة N إذا كانت n لديها كل خاصية N وراثية تعود إلى m . يمكن تطبيق هذه التعريفات كلها على أي علاقة أخرى كما تطبق تمامًا على N . على ذلك لو أن R هي أي علاقة أيًّا ما كانت، يمكننا النص على التعريفات التالية[4]:

يطلق على خاصية «R – وراثية» عندما يتحقق التالي، إذا ما كانت تعود إلى الحد x ، والحد x على علاقة R مع y ، فإنها تعود إلى الحد y .

تكون فئة ما R وراثية عندما تكون خاصيتها المُعرفة R – وراثية.

يقال إن الحد x «R – سلف» الحد y إذا كان لـ y كل خاصية R وراثية يمتلكها الحد x ، بشرط أن x هو حد له علاقة R مع شيء ما أو شيء ما له علاقة R معه. (لا تستثنى إلا حالات طفيفة فقط).

«R – خَلَف» الحد x هو كل الحدود التي يكون x هو R سلف بالنسبة لها.

قمنا بتأطير التعريفات السابقة، بحيث إذا كان حد ما هو سلف أي شيء فإنه سلفه الخاص به وينتمي إلى خَلَفه الخاص به. هذا للتسهيل فقط.

سوف نلاحظ أننا إذا ما أسبغنا على R العلاقة «والد» و«سلف» و«خَلَف»، فسوف يكون لها المعاني المعتادة، فيما عدا أن الشخص سوف يُضمَّن فيما بين أسلافه وأخلافه. من الواضح للوهلة الأولى بالتأكيد أن «السلف» قابل للتعريف من منطلق «الوالد» لكن لم يتمكن أحدهم من تعريف «السلف» بدقة من منطلق «الوالد» حتى طور فريجه نظريته المعممة للاستقراء. سوف يساعد تفكر موجز في هذه النقطة في توضيح أهمية النظرية. شخص يواجه معضلة تعريف «السلف» من منطلق «الوالد» للمرة الأولى طبيعي أن يقول إن A هو سلف Z لو أن هناك عددًا معينًا من الأشخاص B, C,... بين A وZ حيث B هو طفل A ، كل منها هو والد لما يليه، حتى آخر هؤلاء الأشخاص ذلك الذي يكون هو والد Z . لكن هذا التعريف غير وافٍ ما لم نضف أن عدد الحدود في المنتصف هو عدد متناهٍ. على سبيل المثال، فلنأخذ مثل هذه السلسلة التالية:

$$-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1$$

لدينا هنا في البداية سلسلة من كسور سالبة بلا نهاية، ومن ثم سلسلة من كسور موجبة، بلا بداية. هل لنا أن نقول هنا، في هذه السلسلة أن $1/8$ – هو سلف لـ $1/8$؟ سوف يكون الحال على هذه الصورة وفق التعريف الابتدائي المطروح سابقًا، لكنه لن يكون كذلك

وفق أي تعريف يزود بمثل ذلك التصور الذي نطمع في تعريفه. لأجل هذا الهدف فإن عدد الحدود الواقعة في الوسط يجب أن يكون متناهيا. لكن كما رأينا، يُعرّف «المتناهي» عن طريق الاستقراء الرياضي، ومن الأسهل تعريف العلاقة بالسلف بشكل عام في الحال مقارنة بتعريفها في البداية فقط من أجل الحالة الخاصة بعلاقة n بـ $n + 1$ ، ثم مدها لتشمل بقية الحالات. قد يستدعي طلب الشمول من البداية –هنا، كما هو ثابت في كل مكان آخر– الكثير من المجهود الذهني، إلا أنه سيكشف على المدى الطويل عن اقتصاد في المجهود الذهني وزيادة في القوة المنطقية.

كان استخدام الاستقراء الرياضي في الشروحات التوضيحية في الماضي شيئًا ملغزًا نوعًا ما. بدا أنه ما من شك مقبول في كونه وسيلة صالحة للبرهان، لكن لم يقدَّر لأحدهم أن يعرف تمامًا سبب صلاحيته. ذهب بعضهم إلى أن المسألة بالفعل هي مسألة استقراء، بالمعنى الذي تستخدم به الكلمة في المنطق. اعتبره بوانكاريه[5] مبدأً على أعلى درجات الأهمية[6]، من خلاله يمكن تكديس عدد غير متناهٍ من الاستدلالات المنطقية في برهان واحد. نعرف الآن أن كل وجهات النظر تلك خاطئة، وأن الاستقراء الرياضي هو تعريف وليس مبدأً. هناك بعض الأعداد التي من الممكن تطبيقه عليها وهناك أعداد أخرى من غير الممكن تطبيقه عليها (كما سوف نرى في الفصل الثامن). نُعرّف «الأعداد الطبيعية» باعتبارها تلك الأعداد التي من الممكن تطبيق براهين الاستقراء الرياضي عليها، أي باعتبارها تلك التي تمتلك كل الخواص

الاستقرائية. يستتبع ذلك أن مثل هذه البراهين من الممكن تطبيقها على الأعداد الطبيعية بغير إسناد إلى بداهة ملغزة أو مسلمة أو مبدأ لكن باعتبارها مسألة لفظية بحتة. لو عُرّفت «رباعيات الأرجل» باعتبارها الحيوانات التي لها أربع أرجل، فسوف يستتبع ذلك أن الحيوانات التي لها أربع أرجل هي رباعية الأرجل؛ مسألة الأعداد التي تطيع الاستقراء الرياضي مماثلة لذلك.

سوف نستخدم عبارة «الأعداد الاستقرائية كي نعني بها نفس مجموعة الأعداد التي كنا نتحدث عنها إلى الآن باعتبارها «الأعداد الطبيعية». قد تُفضل عبارة «الأعداد الاستقرائية» باعتبارها مُذكرة بأن تعريف هذه المجموعة من الأعداد قد حصلنا عليه عن طريق الاستقراء الرياضي.

يوفر الاستقراء الرياضي الخواص الجوهرية للتمييز بين المتناهي وغير المتناهي أكثر من أي شيء آخر. من الممكن النص على مبدأ الاستقراء الرياضي في صيغة دارجة على نحو مماثل للتالي «ما يمكن الاستدلال عليه من علاقة التالي بالذي يليه، من الممكن الاستدلال عليه من علاقة الأول بالأخير». هذا صحيح عندما يكون عدد الخطوات المتوسطة بين الأول والأخير عددًا متناهيًا، وليس شيئًا آخر. أي شخص نظر يومًا إلى قطار بضائع بدأ في التحرك، سيكون قد لاحظ كيف تتصل اندفاعات الحركة بهزة تنتقل من عربة إلى التالية، حتى آخر عربة في النهاية تكون في حالة حركة. عندما يكون القطار طويلًا جدًّا، فسوف يكون هناك وقت طويل للغاية قبل أن تتحرك العربة الأخيرة. لو كان القطار طويلًا إلى ما

لا نهاية (غير متناهي الطول)، فسوف يكون هناك تتابعات لا نهائية من الاهتزازات، ولن تأتي اللحظة التي يكون عندها كل القطار في حالة حركة أبدًا. مع ذلك، لو أن هناك سلسلة من العربات ليست أطول من سلسلة الأعداد الاستقرائية (والتي -كما سوف نرى- هي مثال لأصغر اللا نهايات)، فإن كل عربة سوف تبدأ بالتحرك عاجلًا أو آجلًا لو أُبقي على عمل المحرك، مع ذلك سوف تكون هناك دائمًا عربات أبعد في المؤخرة لم تبدأ في التحرك بعد. سوف تساعد هذه الصورة على إيضاح برهان من التالي إلى الذي يليه وعلاقته بالتناهي. عندما نجيء إلى دراسة الأعداد غير المتناهية، عندما تصبح البراهين المستمدة من الاستقراء الرياضي غير صالحة، سوف تساعدنا خواص مثل هذه الأعداد (عن طريق المقارنة بها) على توضيح الاستخدام اللا شعوري نوعًا ما للاستقراء الرياضي حيثما تعلق الأمر بالأعداد المتناهية.

* * *

الهوامش:

(1) انظر **Principia Mathematica, vol.ii. *110**. (المؤلف).

(2) انظر الفصل الثالث عشر. (المؤلف).

(3) فيما يتعلق بالهندسة، طالما ليست تحليلية بحتة، انظر **principles of mathematics, part vi**.

وفيما يتعلق بديناميكا الدوران، نفس المصدر، **part vii** . (المؤلف).

(4) تعود هذه التعريفات والنظرية المعممة للاستقراء إلى فريجه، وقد نُشرت منذ فترة طويلة عام 1879 في كتابه **Begriffsschrift** . وعلى الرغم من القيمة العظيمة لهذا العمل، أعتقد أنني أول شخص قد قرأه على الإطلاق – بعد ما يزيد عن العشرين عامًا من نشره. (المؤلف)

(5) هنري بوانكاريه (1854 – 1912): عالم فرنسي في الفيزياء والرياضيات، وله إسهاماته في فلسفة العلوم كذلك (المترجم).

(6) العلم والمنهج، الفصل الرابع. **Science and method, chap. iv**. (المؤلف).

❊ ❊ ❊

الفصل الرابع

تعريف الترتيب

لقد حملنا الآن تحليلنا لسلسلة الأعداد الطبيعية إلى نقطة، تحصلنا عندها على تعريفات منطقية لعناصر هذه السلاسل ولكل فئة هذه العناصر ولعلاقة العدد بتابعه المباشر. علينا الآن أن نهتم بالطبيعة التسلسلية للأعداد الطبيعية في ترتيبها 0, 1, 2, 3, ... عادة ما نفكر في الأعداد وفق هذا الترتيب، وهو جانب جوهري لعملنا على تحليل بياناتنا من أجل السعي وراء تعريف «للترتيب» أو «للسلاسل» من ناحية منطقية. لمفهوم الترتيب أهمية ضخمة في الرياضيات. لا يقتصر الأمر على الأعداد الصحيحة بل للكسور النسبية ولكل الأعداد الحقيقية ترتيب وفق المقدار كذلك، وهذا أمر جوهري بالنسبة لأغلب خواصها الرياضية. ترتيب النقاط على خط هو أمر جوهري بالنسبة للهندسة؛ وبالمثل الترتيب الأكثر تعقيدًا بقليل لخطوط تمرُّ بنقطة في مستوى، أو لمستويات تمرُّ بخط. الأبعاد في الهندسة هي تطوير للترتيب. مفهوم النهايات الكامن وراء كل الرياضيات العليا هو مفهوم تسلسلي. هناك أجزاء في الرياضيات لا تنهض على مفهوم الترتيب، لكنها قليلة للغاية مقارنة بالأجزاء المتضمنة لهذا المفهوم.

عند السعي للقبض على تعريف للترتيب، فإن أول شيء يجب إدراكه: أن لا ترتيب واحد هناك يَجُبُّ كل ترتيب آخر لأي مجموعة من الحدود. لمجموعة الحدود كل ترتيب تقدر عليه. أحيانًا ما يكون ترتيب ما أكثر ألفةً وطبيعيةً بالنسبة لتفكيرنا، حيث نميل إلى اعتباره هو ترتيب تلك المجموعة من الحدود؛ لكن هذا خطأ. تقع الأعداد الطبيعية – أو الأعداد الاستقرائية كما قد نطلق عليها أيضًا– بالنسبة لنا على نحو أكثر سلاسة في ترتيب وفق المقدار؛ لكنها قابلة كذلك لعدد غير متناهٍ من الانتظامات الأخرى. على سبيل المثال، قد نتفكر في ترتيب تأتي فيه كل الأعداد الفردية أولًا ثم كل الأعداد الزوجية؛ أو قد نتفكر في ترتيب يأتي فيه 1 أولًا ثم كل الأعداد الزوجية ثم كل المضاعفات الفردية لـ 3، ثم كل مضاعفات الـ 5 من غير مضاعفات 2 و3 ثم كل مضاعفات الـ 7 من غير مضاعفات 2 و 3 و 5 وهكذا عبر كل سلسلة الأعداد الأولية. عندما نقول إننا «نظمنا» الأعداد بهذه الطرق المتنوعة للترتيب، فهذا تعبير غير دقيق: ما قمنا به بالفعل هو تحويل الانتباه صوب علاقات معينة بين الأعداد الطبيعية، تخلق هي نفسها مثل هذا وذاك التنظيم. لا يمكننا «تنظيم» الأعداد الطبيعية بأكثر من قدرتنا على «تنظيم» السماوات المفروشة بالنجوم؛ لكن تمامًا كما قد نلاحظ بين النجوم الثابتة ترتيب لمعانها أو ترتيب توزيعها في السماء، بالمثل هناك علاقات متنوعة بين الأعداد من الممكن رصدها وهي تكشف عن طرق متنوعة مختلفة للترتيب بين الأعداد، كلها مقبولة بذات القدر. وما هو صحيح بالنسبة للأعداد صحيح بذات القدر بالنسبة لنقاط على

خط أو بالنسبة للحظات الزمن: ترتيب واحد هو أكثر ألفة، لكن البقية صالحة بذات القدر. كمثال، فلنأخذ أولًا كل النقاط التي لها إحداثيات من أعداد صحيحة على الخط، ثم كل تلك التي لها احداثيات من أعداد نسبية غير صحيحة، ثم كل تلك التي لها إحداثيات جبرية لأعداد غير نسبية وهكذا، من خلال أي مجموعة من التركيبات التي قد تروق لك. سوف يكون الترتيب الناتج أحد طرق الترتيب تلك التي تنتظم فيها النقاط بالتأكيد، سواء اخترنا ملاحظته أو لم نختر، الشيء الوحيد الاعتباطي فيما يتعلق بطرق الترتيب المتنوعة لمجموعة الحدود هو انتباهنا، أما الحدود نفسها لها دائمًا كل طرق الترتيب التي تقدر عليها.

أحد النتائج الهامة لهذا التمثل أن علينا ألا نبحث عن تعريف الترتيب في طبيعة مجموعة الحدود المرتبة؛ حيث إن لمجموعة واحدة من الحدود أكثر من ترتيب واحد. لا يقوم الترتيب على فئة الحدود بل على العلاقة فيما بين عناصر الفئة، حيث يظهر بعضها بالنسبة لبعضها كسوابق والبعض كلواحق. ترجع حقيقة أنه قد يكون للفئة أكثر من ترتيب إلى حقيقة مفادها أن من الممكن أن يكون هناك علاقات عديدة قائمة بين عناصر فئة واحدة مفردة. ما الخواص التي يجب أن تحظى علاقة بها كي تمد بترتيب؟

من الممكن اكتشاف الخواص الجوهرية للعلاقة التي تمكنها من المد بترتيب عن طريق التفكر في أنه بالنسبة لأي علاقة تأتي على هذا النحو يجب أن نكون قادرين على أن نشير إلى أي حدين في الفئة التي سنُعنى بترتيبها، ونقول إن أحدهما «يسبق» والثاني «يتبع». الآن

في ضوء أننا قد نكون قادرين على استخدام هاتين الكلمتين بالطريقة التي نفهمهما بها في المعتاد، نقضي بأن علاقة الترتيب ينبغي أن تحظى بخواص ثلاثة:

1 – إذا كانت x تسبق y ، فإن y لا يجب أن تسبق x كذلك.

هذه خاصية واضحة في هذا النوع من العلاقات التي تؤدي إلى تكوين سلاسل. إذا كانت x أقل من y ، فإن y ليست أقل من x كذلك. إذا كانت x أبكر من y في الزمن، فإن y ليست أبكر كذلك من x . إذا كانت x إلى اليسار من y ، فإن y ليست إلى اليسار كذلك من x . من جهة أخرى، لا تحظى العلاقات التي لا تمد بسلاسل غالبًا بهذه الخاصية. إذا كانت x هي أخ أو أخت y ، فإن y هي أخ أو أخت x . إذا كان لـ x نفس طول y ، فإن لـ y نفس طول x . إذا كان لـ x طول مختلف عن y ، فإن لـ y طول مختلف عن x . في كل هذه الحالات عندما تكون هناك علاقة قائمة بين x و y ، فإنها قائمة كذلك بين y وx . لكن لا يمكن لمثل هذا الأمر أن يحدث في العلاقات التسلسلية. العلاقة التي لها مثل هذه الخاصية الأولى يطلق عليها غير متناظرة **asymmetrical**.

2 – إذا كانت x تسبق y وy تسبق z، فيجب أن تسبق x الحد z. من الممكن شرح ذلك من خلال نفس الأمثلة في السابق: أقل، أبكر، إلى اليسار من. لكن بالنسبة لأمثلة العلاقات التي لا تحظى بهذه الخاصية، فاثنتان فقط من الثلاثة أمثلة السابقة سيخدمان هدفنا. إذا كانت x هي أخ أو أخت y و y هي أخ أو أخت z فإن x من المحتمل ألا تكون أخ أو أخت z ،

حيث إن x و z قد يكونان نفس الشخص. ينطبق نفس الأمر على الفارق في الطول، لكن ليس على التماثل في الطول والذي يحظى بخاصيتنا الثانية، لكنه لا يحظى بخاصيتنا الأولى. على الجانب الآخر تحظى علاقة «الأب» بخاصيتنا الأولى لكنها لا تحظى بالثانية. العلاقة التي تحظى بخاصيتنا الثانية يُطلق عليها متعدية **transitive**.

3 – بالنسبة لأي حدين في فئة مرتبة، يجب أن يكون أحدهما سابقًا والآخر يتبعه. على سبيل المثال، بالنسبة لأي عددين صحيحين أو كسرين أو عددين حقيقيين، أحدهما يكون أصغر والآخر أكبر؛ لكن بالنسبة لأي عددين مركبين فهذا غير صحيح. بالنسبة لأي لحظتين في الزمن يجب أن تكون واحدة أكبر من الأخرى؛ لكن بالنسبة لحدثين ربما يكونان متزامنين، لا يمكن قول ذلك عنهما. بالنسبة لنقطتين على خط، يجب أن تكون واحدة إلى اليسار من الأخرى. علاقة لها مثل هذه الخاصية الثالثة يطلق عليها متصلة **connected**.

عندما تحظى علاقة بهذه الخواص الثلاثة، فهي من النوع الذي يمد بترتيب بين الحدود التي تقوم فيما بينها العلاقة؛ وحيثما وُجد ترتيب، من الممكن العثور على بعض هذه العلاقات المنشئة له التي تحظى بهذه الخواص.

قبل شرح هذه النظرية، سوف نطرح بعض التعريفات.

1 – يقال إن علاقة هي لا انعكاسية[1] **aliorelative** أو محصورة

في **contained in** أو تستلزم التباين **imply diversity** إذا ما لم يكن لأي حد هذه العلاقة مع نفسه. على ذلك وكمثال فإن «أكبر» و«مختلف في الحجم» و«أخ» و«زوج» و«أب» هي لا انعكاسية؛ لكن «مساوٍ ل» و«مولود نفس الوالدين» و«صديق عزيز» ليست كذلك.

2 – مربع العلاقة هو العلاقة التي تقوم بين حدين **x** و**z** عندما يكون هناك حد متوسط **y** بحيث تقوم العلاقة موضع البحث بين **x** و**y** وبين **y** و**z** . على ذلك «فالجد من جهة الأب» هو مربع «الأب» و«أكبر بـ **2**» هي مربع «أكبر بـ **1**» وهكذا.

3 – يتكون نطاق العلاقة من كل هذه الحدود التي لها علاقة مع شيء ما أو آخر ويتكون النطاق العكسي من كل تلك الحدود التي لشيء ما أو الآخر علاقة معها، سبق تعريف هذه الكلمات، لكننا نعيد استدعاءها هنا من أجل التعريفات التالية:

4 – يتكون حقل **field** العلاقة من النطاق ومن النطاق العكسي معًا.

5 – يُقال إن علاقة محتواة أو مُضمنة بواسطة علاقة أخرى، إذا ما قامت عندما تقوم الأخرى.

سوف نرى أن علاقة غير متناظرة هي نفسها العلاقة التي مربعها لا انعكاسي. غالبًا ما يحدث أن تكون العلاقة لا انعكاسية دون أن تكون غير متناظرة، على الرغم من أن العلاقة غير المتناظرة هي دائمًا لا انعكاسية.

على سبيل المثال، «الزوج في علاقة تجمع بين شيئين زوجين» هي غير انعكاسية، لكنها متناظرة، حيث إنه إذا كان x هو زوج y ، فإن y هو زوج x . لكن فيما بين العلاقات المتعدية، كل العلاقات اللا انعكاسية هي غير متناظرة والعكس بالعكس أيضًا.

من التعريفات سوف نرى أن العلاقة المتعدية هي تلك العلاقة التي تتضمن مربعها أو كما قد نقول أيضًا، هي تلك العلاقة التي «تحتوي» مربعها. على ذلك «فالسلف» هو متعدٍّ لأن سلف السلف هو سلف؛ لكن «الأب» ليس متعدِّيًا لأن أب الأب ليس أبًا. أما العلاقة المتعدية اللا انعكاسية فهي تلك التي تحتوي على مربعها وهي محصورة في التباين، أو قد نقول عنها -وهو ما سيؤدي بنا إلى نفس الشيء- إنها العلاقة التي يفيد عنها مربعها ويفيد عن التباين - لأنه عندما تكون العلاقة متعدية فإن عدم التناظر مكافئ لكونها لا انعكاسية.

تكون العلاقة متصلة، إذا ما تحقق التالي عند دراسة أي حدين مختلفين في حقلها، تقوم العلاقة بين الحدين الأول والثاني أو بين الثاني والأول (دون استثناء احتمالية أن الأمرين قد يحدثان، مع ذلك فلا يمكن أن يحدث الأمران لو كانت العلاقة غير متناظرة).

سوف نرى أن علاقة «السلف» -على سبيل المثال- هي علاقة لا انعكاسية ومتعدية، لكنها ليست متصلة؛ بسبب أنها غير متصلة، هي غير قادرة على النهوض بترتيب الجنس البشري في سلسلة.

العلاقة «أقل من أو يساوي» بين الأعداد هي متعدية ومتصلة، لكنها ليست غير متناظرة أو لا انعكاسية.

العلاقة «أكبر من أو أقل من» بين الأعداد هي لا انعكاسية ومتصلة، لكنها ليست متعدية، حيث إنه إذا كان x أكبر من أو أصغر من y وكانت y هي أكبر من أو أقل من z ، فمن المحتمل أن يصادف ويكون x وz هما نفس العدد.

على ذلك فالخواص الثلاث 1 – اللا انعكاسية، 2 – التعدي، 3 – الاتصال، هي مستقلة في تبادل، ذلك أن أي علاقة قد تحظى بأي خاصيتين دون الثالثة.

الآن ننص على التعريفات التالية:

تكون العلاقة تسلسلية عندما تكون لا انعكاسية ومتعدية ومتصلة أو بمعنى آخر عندما تكون غير متناظرة ومتعدية ومتصلة.

نقصد بالسلسلة ما نقصده بالعلاقة التسلسلية.

ربما ظن البعض أن السلسلة ينبغي أن تكون هي حقل العلاقة التسلسلية، لا العلاقة التسلسلية نفسها. لكن هذا خطأ. على سبيل المثال،

1, 2 , 3; 1, 3, 2; 2, 3, 1; 2, 1, 3; 3, 1, 2; 3, 2, 1

ست سلاسل مختلفة لها جميعا نفس الحقل. لو كان الحقل هو السلسلة، فسوف يسفر ذلك عن سلسلة واحدة لها حقل معين. ما يجعل الست سلاسل السابقة متمايزة هو ببساطة علاقات الترتيب المختلفة في الست حالات. كل من الحقل والترتيب محددات لعلاقة الترتيب. على ذلك قد تعتبر علاقة الترتيب هي السلسلة لكن لا يمكن اعتبار الحقل على ذات النحو.

بدراسة أي علاقة تسلسلية، فلنقل P سوف نقول إنه بالنسبة لهذه العلاقة، x «تسبق» y إذا كان لـ x علاقة P بالنسبة إلى y، والتي سوف نكتبها على صورة «xPy» اختصارًا. الخواص الثلاث التي يجب أن تحظى بها P كي تكون تسلسلية هي:

1 – لا يجب أن نحظى أبدًا بـ xPx ، أي لا يجب أن يسبق حد نفسه.

2 – P^2 يجب أن تستلزم P ، أي لو كانت x تسبق y وy تسبق z ، يجب أن تكون x سابقة لـ z .

3 – لو أن x وy حدان مختلفان في حقل P ، فسوف نحظى بـ xPy أو yPx ، أي أن واحدًا من الاثنين يجب أن يسبق الآخر.

من السهل أن يقنع القارئ نفسه أنه حيثما وُجدت هذه الخواص الثلاث في علاقة ترتيب، فإن السمات التي نتوقع العثور عليها في السلسلة سوف توجد كذلك والعكس بالعكس. لذلك فعندنا ما يبرر اتخاذنا مما سبق تعريفًا للترتيب أو للسلسلة. ومن الملاحظ أن التعريف متحقق في صورة اصطلاح منطقي بحت.

بالرغم من أن العلاقة المتعدية غير المتناظرة المتصلة دائمًا ما توجد حيثما كانت هناك سلسلة، إلا أنها ليست هي دائمًا العلاقة التي تُعتبر في العادة خالقة للسلسلة. ربما تخدم مجموعة الأعداد الطبيعية هدف توضيحنا لهذا الأمر. العلاقة التي افترضناها عند التفكر في أمر الأعداد الطبيعية هي علاقة التعاقب المباشر، أي العلاقة بين الأعداد الصحيحة المتتابعة. هذه العلاقة غير متناظرة، لكنها ليست متعدية أو متصلة. مع

ذلك ففي إمكاننا اشتقاق علاقة «السلف» منها عن طريق منهج الاستقراء الرياضي، تلك العلاقة التي ألقينا عليها الضوء في الفصل السابق. سوف تكون هذه العلاقة مشابهة لعلاقة «أقل من أو مساوٍ لـ» فيما بين الأعداد الصحيحة الاستقرائية. من أجل توليد مجموعة الأعداد الطبيعية، نريد علاقة «أقل من» مستبعدين «مساوٍ لـ». هذه هي علاقة **m** بالنسبة إلى **n** عندما يكون **m** هو سلف **n** لكنه غير مكافئ لـ **n** ، أو (وهو ما سيؤدي بنا إلى نفس الأمر) عندما يكون تابع **m** هو سلف لـ **n** من حيث كونه عددًا هو سلفه. ما يعني أننا سوف ننص على التعريفات التالية:

يُقال: إن العدد الاستقرائي **m** أقل من عدد آخر **n** عندما تمتلك **n** كل خاصية وراثية مملوكة بواسطة تابع **m** .

من السهل أن ندرك – وهو أمر لا تصعب البرهنة عليه – أن علاقة «أقل من» كما تُعرّف هي علاقة غير متناظرة ومتعدية ومتصلة وتحظى بالأعداد الاستقرائية كحقل لها. على ذلك وعن طريق هذه العلاقات تتخذ الأعداد الاستقرائية ترتيبًا بالمعنى الذي عرّفنا به مصطلح «ترتيب»، وهذا الترتيب هو ما يُطلق عليه ترتيب «طبيعي» أو ترتيب بحسب المقدار.

توليد سلاسل عن طريق علاقات مشابهة إلى حد ما لـ **n** و **n + 1** هو أمر شائع جدًّا. على سبيل المثال، سلسلة ملوك إنجلترا تنشأ عن علاقة كل منهم بتابعه. من المحتمل أن هذه هي أسهل طريقة –حيثما كانت قابلة للتطبيق– من أجل تصور نشأة السلاسل. في هذا المنهاج نمر من كل حد إلى الذي يليه طالما كان هناك تالٍ، أو نمر نكوصًا إلى الذي

يسبق طالما كان هناك سابق. دائمًا ما يتطلب هذا المنهج الصيغة العامة للاستقراء الرياضي من أجل تمكيننا من تعريف «سابق» و«لاحق» في سلسلة أُنشئت على هذا النحو. (في تمثل لمصطلح «الكسور الحقيقية)[2] دعنا نطلق اسم «خلف x الحقيقي بالنسبة إلى R» على فئة تلك الحدود التي تنتمي إلى R خلف حد معين، تحظى x بعلاقة R معه، بالمعنى الذي أسبغناه على «الخلف»، حيث الحد مُضمّن في الخلف الخاص به. بالعودة إلى التعريفات الأساسية، نجد أن «الخلف الحقيقي» قد يُعرّف على النحو التالي:

يتكون «الخلف الحقيقي» لـ x بالنسبة إلى R من كل الحدود التي تمتلك كل خاصية R وراثية، تلك الخاصية المملوكة من قِبل كل حد يحظى x بعلاقة R معه.

من الملاحظ أن هذا التعريف يجب تأطيره للغاية كي يصبح قابلًا للتطبيق، ليس فقط إذا ما كان هناك حد واحد فقط، تحظى x بعلاقة R معه، لكن في الحالات التي قد يكون فيها هناك الكثير من الحدود التي تحظى فيها x بعلاقة R معها (مثل علاقة الأب بطفله) أيضًا. نعمد إلى مد التعريف:

الحد x هو «سلف حقيقي» لـy بالنسبة إلى R إذا كانت y تنتمي إلى خلف x الحقيقي بالنسبة إلى R .

سوف نتحدث بصيغ مختصرة عن «R خلف» و«R سلف»، عندما تبدو هذه الاصطلاحات أكثر استساغة.

نعود الآن إلى توليد السلاسل عن طريق العلاقة R فيما بين الحدود المتعاقبة، سوف نجد أنه لو كان لهذا المنهج أن يصبح ممكنًا، فإن علاقة «R سلف حقيقي» يجب أن تكون لا انعكاسية ومتعدية ومتصلة. تحت أي شروط سيحدث هذا؟ سوف تكون متعدية دائمًا: لا تهم الصورة التي ستكون عليها العلاقة R ، كلٌّ من «R سلف» و«R سلف حقيقي» دائمًا ما تكونان متعديتين. لكن تحت شروط خاصة فقط سوف تكونان لا انعكاسيتين ومتصلتين. فلتفكر -على سبيل المثال- في علاقة جار أحدهم إلى اليسار منه حول مائدة عشاء مستديرة، يجلس إليها اثنا عشر شخصًا. إذا ما أطلقنا على هذه العلاقة R، فإن خلف R الحقيقي لشخص يتكون من كل أولئك الذين يستطيع الوصول إليهم بالالتفاف حول المائدة من اليمين إلى اليسار. يتضمن هذا كل الأشخاص حول المائدة، بما فيهم الشخص نفسه، حيث إن اثنتي عشرة خطوة تعود بنا إلى نقطة البدء. على ذلك في مثل هذه الحالة، بالرغم من أن العلاقة «R سلف حقيقي» متصلة، وبالرغم من أن R نفسها لا انعكاسية، لا نحصل على سلسلة لأن «R سلف حقيقي» ليست لا انعكاسية. لهذا السبب لا يمكننا أن نقول إن شخصًا ما قد جاء قبل أحدهم بالنسبة لعلاقة «إلى اليمين من» أو بالنسبة لعلاقة سليل السلف.

هذا مثال فيه العلاقة السلفية متصلة، لكنها ليست محصورة في التباين. هناك مثال يمكن الحصول عليه لعلاقة محصورة في التباين لكنها غير متصلة من المعنى المعتاد لكلمة «سلف». إذا كانت x سلفًا حقيقيًّا لـy ولا يمكن لـ x وy أن يكونا نفس الشخص؛ لكن من غير الصحيح أن أي

شخصين يجب أن يكون أحدهما هو سلف الآخر.

التساؤل عن الشروط التي في وجودها يمكن توليد سلاسل عن طريق العلاقات السلفية المشتقة من علاقات التعاقب أمر هام غالبًا. هذه بعض الحالات الأكثر أهمية: فلنفرض أن **R** هي علاقة عديد لواحد، ودعنا نقصر انتباهنا على خلف حد معين **x** . عندما نكون محددين هكذا، يجب أن تكون علاقة «**R** سلف حقيقي» علاقة متصلة؛ وبذلك كل ما بقي لضمان تسلسلها أن تكون محصورة في التباين. هذا تعميم لمثال مائدة العشاء. هناك تعميم آخر لو اعتبارنا **R** هي علاقة واحد إلى واحد ولو ضمنا سلف وخلف **x** كذلك. نجد ها هنا مرة أخرى أن الشرط الوحيد المطلوب لتأمين توليد سلسلة هو أن تكون علاقة «**R** سلف حقيقي» محصورة في التباين.

على الرغم من أهمية توليد الترتيب عن طريق أدوات علاقات التعاقب، إلا أنه أقل عمومية من المنهج الذي يستخدم علاقة متعدية لتعريف الترتيب. غالبًا ما يصادف أن يكون هناك في السلسلة عدد غير متناهٍ من الحدود الوسطى بين أي حدين تعمد إلى اختيارهما، أيًّا ما كان قربهما من أحدهما الآخر. على سبيل المثال فلننظر إلى الكسور في ترتيبها بحسب المقدار. بين كل كسرين هناك كسور أخرى – على سبيل المثال المتوسط الحسابي للاثنين. ينتج عن ذلك أنه لا وجود لمثل هذا الشيء المدعو بزوجين من كسرين متعاقبين. إذا ما اعتمدنا على التعاقب كي نُعرّف الترتيب، لن نصبح قادرين على تعريف الترتيب بحسب المقدار في حالة الكسور. لكن علاقة (أكبر من وأصغر من)

فيما بين الكسور لا تحتاج في الحقيقة كي تُخلَّق إلى علاقات التعاقب، ولعلاقة (أكبر من وأصغر من) فيما بين الكسور السمات الثلاث التي نحتاجها لتعريف العلاقات التسلسلية. في كل هذه الحالات من هذا النوع يجب تعريف الترتيب بمساعدة العلاقة المتعدية، حيث إن مثل هذه العلاقة هي الوحيدة القادرة على القفز على عدد غير متناهٍ من الحدود الوسطى. منهج التعاقب مثله كمثل منهج العد، هو من أجل اكتشاف عدد التجمع، وهما مناسبان في حالة المجموعات المتناهية فقط. بل قد يُمدَّد إلى سلاسل غير متناهية معينة، تحديدًا تلك التي على الرغم من أن العدد الكلي للحدود فيها غير متناهٍ، إلا أن عدد الحدود بين أي اثنين منها متناهٍ دائمًا؛ لكن لا يمكن تعميمه. ليس ذلك فقط، لكن يجب اتخاذ الحيطة نحو اجتثاث كل السلوكيات الفكرية الناتجة عن افتراض عموميته من المخيلة. لو لم نقم بذلك، سوف تبقى السلاسل التي لا يوجد بها حدود متعاقبة عصية وملغزة. ولهذه السلاسل أهمية حيوية لأجل فهم الاتصالية والمكان والزمن والحركة.

هناك طرق عديدة لتوليد السلاسل، لكن كلها قائمة على العثور على علاقة غير متناظرة متعدية متصلة أو التأسيس لها. لبعض هذه الطرق أهمية معتبرة. على سبيل التوضيح قد نتعرض إلى توليد العلاقات عبر مساعدة علاقة الحدود الثلاثة التي قد ندعوها بالـ «بين». هذه الوسيلة مفيدة للغاية في الهندسة، وقد تخدم أهدافنا كمقدمة للعلاقات التي لها أكثر من حدين؛ من الأفضل طرحها في علاقتها بالهندسة الأولية.

بالنسبة لأي ثلاث نقاط على خط مستقيم في الفضاء المعتاد يجب أن تكون واحدة منها بين الاثنتين الأخريين. لن يكون الأمر على هذه الصورة فيما يتعلق بالنقاط على الدائرة أو على أي منحنى مغلق آخر؛ لأنه بالنسبة لأي ثلاث نقاط على الدائرة يمكننا الانتقال من أي نقطة إلى الأخرى دون المرور عبر الثالثة. في الحقيقة، مفهوم «البين» هو مفهوم مميز للسلاسل المفتوحة – أو للسلاسل بمعناها الصارم – مقارنة بما قد ندعوه بالسلاسل «الدائرية»، تلك التي تعود بنا لو ارتحلنا لوقت كافٍ إلى النقطة التي بدأنا منها كما كان الحال مع مائدة العشاء. من الممكن اختيار مفهوم «البين» كمفهوم أساسي للهندسة المعتادة؛ لكن في الوقت الراهن سوف نُعنى فقط بتطبيقه على خط مستقيم مفرد وعلى ترتيب النقاط على خط مستقيم[3]. بالتفكر في أي نقطتين **a** و**b**، يتكون الخط **ab** من ثلاثة أجزاء (إلى جانب **a** و **b** نفسيهما):

1 – نقاط بين **a** و**b** .

2 – نقاط **x** بحيث تقع **a** بين **x** و**b** .

3 – نقاط **y** بحيث **b** بين **y** و**a** .

على ذلك يمكن تعريف الخط (**ab**) في ضوء العلاقة «بين».

كي يمكن لعلاقة «البين» أن تنظم نقاط الخط في ترتيب من اليسار لليمين، نحتاج إلى افتراضات معينة، تحديدًا الافتراضات التالية:

1 – إذا كان هناك أي شيء بين **a** و**b** ، فإن **a** و**b** غير متشابهين.

2 – إذا كان هناك أي شيء بين **a** و **b** ، فهو كذلك بين بين **b** و**a** .

3 – أي شيء بين a وb غير مشابه لـ a ، (وبالتالي هو غير مشابه لـ b في ضوء (2)).

4 – إذا كانت x بين a وb ، فإن أي شيء بين a وx ، هو كذلك بين a وb .

5 – إذا كانت x بين a وb ، وb بين x وy ، فمن ثم b بين a وy .

6 – إذا كانت x وy بين a وb ، فمن ثم إما أن كل من x وy متشابهان، وإمَّا أن x تقع بين a وb وإمَّا أن x تقع بين y وb .

7 – إذا كانت b بين a وx وكذلك بين a وy فمن ثم إما أن x وy متشابهان، وإمَّا أن x تقع بين b وy ، وإمَّا أن y تقع بين b وx .

هذه الخواص السبع هي واضحة الصحة في حالة النقاط على خط مستقيم في الفضاء المعتاد. أي علاقة ثلاثة حدود متسقة معًا ينتج عنها سلسلة كما قد نرى في ضوء التعريفات التالية. من أجل جعل الأمر واضحًا، دعنا نفترض أن a هي إلى اليسار من b . فمن ثم تكون النقاط على الخط (ab):

1 – تلك التي بينها وبين b تقع a – سوف ندعوها بإلى اليسار من a – 2 . a نفسها. 3 – تلك التي بين a و b – 4 . b نفسها. 5 – تلك التي بينها وبين a تقع b – سوف ندعوها بإلى اليمين من b . قد نحدد بشكل عام أن النقطتين x وy على الخط (ab)، يمكننا أن نقول إن x هي «إلى اليسار من» y في الحالات التالية:

1 – عندما يكون x وy كلاهما إلى اليسار من a ، وy بين x وa .

2 – عندما تكون x إلى اليسار من a ، وy هي a أو b أو بين a وb أو إلى اليمين من b .

3 – عندما تكون x هي a ، وy بين a وb أو هي b أو إلى اليمين من b .

4 – عندما يكون x وy كلاهما بين a وb ، وy هي بين x وb .

5 – عندما تكون x بين a وb ، وy هي b أو إلى اليمين من b .

6 – عندما تكون x هي b وy هي إلى اليمين من b .

7 – عندما يكون x وy كلاهما إلى اليمين من b وx بين b وy .

سوف نجد أنه من السبع خواص التي عيَّنَّاها لعلاقة «البين»، يمكن الاستدلال على أن العلاقة «إلى اليسار من» كما هي معرفة في السابق هي علاقة تسلسلية كما عرّفنا هذا المصطلح. من الهام ملاحظة أن لا شيء في التعريفات أو البرهان يعتمد على ما نعنيه بـ«البين»، العلاقة الفعلية لهذا الاسم القائمة في الفضاء الإمبيريقي (التجريبي): سوف يخدم أي من الحدود الثلاثة التي لها الخواص الصورية السبع السابقة هدف البرهان على نحو متكافئ تمامًا.

لا يمكن تخليق الترتيب الدائري، مثل ذلك الخاص بالنقاط على الدائرة عن طريق علاقات الحدود الثلاثة للـ «بين». نحتاج إلى علاقة لأربعة حدود، قد ندعوها «فصل الأزواج». قد يتضح الأمر لو تفكرنا في رحلة حول العالم. يمكن لأحدهم أن يذهب من إنجلترا إلى نيوزيلندا عن طريق السويس أو عن طريق سان فرانسيسكو؛ لا نستطيع أن نقول

أي من هذين المكانين بالتحديد هو «بين» إنجلترا ونيوزيلندا. لكن لو اختار رجل طريق الذهاب حول العالم؛ أيًّا ما كان الطريق الذي سيتخذه حول العالم، فإن أوقاته في إنجلترا ونيوزيلندا مفصولة عن أحدها الآخر بأوقاته في السويس وسان فرانسيسكو وبالعكس. بالتعميم، لو أخذنا أي أربع نقاط على دائرة، يمكننا فصلها إلى زوجين، فلنقل النقاط a وb وx وy، على ذلك كي نمضي من a إلى b على الواحد أن يمر إما عبر x وإما y، وكي يمضي من x إلى y يجب أن يمر إما عبر a وإما b. وفق هذه الشروط، نقول إن الزوجين (a, b) «مفصولان» بواسطة الزوجين (x, y). خارج هذه العلاقة يمكن توليد ترتيب دائري بطريقة تماثل تلك التي ولدنا بها ترتيبًا مفتوحًا من «البين»، لكن بشكل أكثر تعقيدا نوعًا ما[4].

لقد كان الغرض من النصف الأخير من هذا الفصل طرح الموضوع الذي قد يطلق عليه أحدهم «توليد العلاقات التسلسلية». عندما أصبحت مثل هذه العلاقات مُعرّفة، بات توليدها -من العلاقات الأخرى التي تملك بعض الخواص المتطلبة فقط- هامًّا للغاية، خاصة فيما يتعلق بفلسفة الهندسة والفيزياء. لكننا لا نستطيع ضمن حدود الإصدار الحالي القيام بما هو أكثر من جعل القارئ واعيًا بوجود مثل هذا الموضوع.

* * *

الهوامش:

(1) يعود هذا المصطلح إلى شارل ساندز بيري (المؤلف). وهو فيلسوف أمريكي وأحد مؤسسي السيميائيات وله إسهاماته الهامة في فلسفة العلوم. (1914 – 1939). (المترجم).

(2) الكسور الحقيقية هي الكسور التي يكون بسطها أصغر من مقامها، ويقابلها الكسور غير الحقيقية التي يكون بسطها أكبر من مقامها، وبالتالي فمعكوس الكسر الحقيقي هو كسر غير حقيقي. (المترجم).

(3) **Cf. Riviera di Matematica, iv. PP. 55ff.; Principles of Mathematics, p. 394** (المؤلف).

(4) **Cf. Principles of Mathematics, P. 205** والمراجع معينة هناك. (المؤلف).

* * *

الفصل الخامس

أنواع العلاقات

يُعنى جانب عظيم من فلسفة الرياضيات بالعلاقات، ولأنواع عديدة من العلاقات أنواع عديدة من الاستخدامات. غالبًا ما يحدث أن خاصية تنتمي إلى كل العلاقات تكون هامة بالنسبة إلى علاقات من أنواع معينة فقط، في هذه الحالات لن يدرك القارئ حمل الفرضية التي تؤكد على مثل هذه الخاصية ما لم يضعْ نصب عينيه أنواع العلاقات التي تكون الخاصية مفيدة بالنسبة لها. لأجل هذه الأسباب ولأجل أمور داخلية تخص الموضوع، فمن الجيد أن نضع نصب أعيننا قائمةً عامةً بأكثر تنوعات العلاقات التي تخدم الرياضيات.

تعرضنا في الفصل السابق إلى فئة من العلاقات فائقة الأهمية، تحديدًا العلاقات التسلسلية. لكل من الخواص الثلاث التي جمعناها في تعريف السلسلة –تحديدًا، عدم التناظر والتعدي والاتصالية– أهميته الخاصة. سوف نبدأ بقول شيء ما عن كل واحدة من هذه الخواص.

عدم التناظر أي أن خاصية الكيان غير متوافقة مع العكس، هي سمة ذات أهمية وفائدة عظيمة. كي نطور وظائفها سوف نتفكر في أمثلة متنوعة. علاقة الزوج هي غير متناظرة وكذلك علاقة الزوجة، أي أنه إذا كان **a** هو زوج **b**، فلا يمكن لـ **b** أن تكون زوج **a** ، وبالمثل في حالة الزوجة. على الجانب الآخر علاقة «رفيق الحياة» هي علاقة تناظرية: إذا كان **a** هو رفيق حياة **b** ، فمن ثم **b** سوف تكون رفيق حياة **a** . فلنفترض الآن أننا قد أُعطينا علاقة رفيق الحياة ونرغب في اشتقاق علاقة الزوج. الزوج يماثل رفيق الحياة الذكر أو رفيق الحياة بالنسبة للأنثى؛ على ذلك يمكن اشتقاق علاقة الزوج من رفيق الحياة إما بقصر النطاق على الذكور وإمَّا بقصر النطاق العكسي على الإناث. نرى من هذا المثال أنه عند دراسة علاقة متناظرة، فمن الممكن أحيانًا فصلها إلى علاقتين غير متناظرتين دون الحاجة إلى أي علاقات أبعد من أجل فصلهما إلى علاقتين غير متناظرتين. لكن الحالات -التي يكون فيها ذلك ممكنًا- نادرة واستثنائية: هناك حالات تكون فيها الفئتان متبادلتين حصريًّا، فلنقل الفئتان α و β بحيث إنه طالما كانت العلاقة قائمة بين حدين، كان أحد الحدين عنصرًا في α والحد الآخر عنصرًا في β - في حالة رفيق الحياة حد واحد للعلاقة ينتمي إلى فئة الذكور وواحد آخر لفئة الإناث. في مثل هذه الحالة، فإن العلاقة التي يكون النطاق الخاص بها محصورًا في α سوف تكون غير متناظرة، وكذلك سوف تكون العلاقة التي ينحصر النطاق الخاص بها في β. لكن مثل هذه الحالات ليست من النوع الذي يقع عندما نتعامل مع سلسلة مكونة من أكثر من حدين؛ حيث إنه في

السلسلة تنتمي كل الحدود عدا الأول والأخير (إذا كانا موجودين) إلى النطاق والنطاق العكسي للعلاقة المنشِئة، لذلك فعلاقة على شاكلة علاقة الزوج التي لا يتداخل فيها النطاق مع النطاق العكسي هي مستثناة.

التساؤل عن كيفية بناء علاقات لها خاصية ما نافعة عن طريق عمليات على علاقات تحظى بأصول الخاصية، هو تساؤل على درجة معتبرة من الأهمية. من السهل بناء التعدي والاتصالية في حالات كثيرة، لا تمتلك فيها العلاقة الأصلية موضع البحث التعدي والاتصالية: على سبيل المثال، لو أن **R** هي أي علاقة، فإن العلاقة السلفية المشتقة من **R** عن طريق الاستقراء العام أيًّا ما كانت هي علاقة متعدية؛ ولو كانت **R** هي علاقة عديد إلى واحد، فإن العلاقة السلفية سوف تكون متصلة لو كانت مقصورة على خلف حدٍّ معطًى. لكن عدم التناظر هو علاقة على درجة أكبر من الصعوبة كي تُؤَّمن عن طريق البناء **construction**. المنهج الذي اشتققنا به الزوج من رفيق الحياة غير متوفر -كما رأينا- في الحالات الأكثر أهمية، مثل أكبر من وقبل وإلى اليمين حيث يتداخل النطاق مع النطاق العكسي. في كل هذه الحالات، يمكننا بالتأكيد الحصول على علاقة متناظرة عن طريق إضافة العلاقة المعطاة ومقابلها معًا، لكننا لن نستطيع العودة من هذه العلاقة المتناظرة إلى العلاقة غير المتناظرة الأصلية إلا بمساعدة علاقة غير متناظرة ما. على سبيل المثال فلننظر في أمر علاقة أكبر: علاقة أكبر أو أصغر -أي لا يساوي- هي علاقة متناظرة، لكن لا وجود لأدنى صعوبة في هذه العلاقة لتبيان أنها عبارة عن مجموع علاقتين غير متناظرتين. فلننظرْ في أمر علاقة

مثل «الاختلاف في الشكل». هذه العلاقة ليست ناتج جمع علاقة غير متناظرة ومقابلها، حيث إن الشكل لا يُكوِّن سلسلة منفردة: لا وجود لأدنى صعوبة لتبيان أنها تختلف عن «الاختلاف في المقدار» لو لم نكن نعلم بالفعل أن للمقدار علاقة أكبر من أو أصغر من. يوضح هذا السمة الأساسية لعدم التناظر كخاصية للعلاقات.

من منظور تصنيف العلاقات، عدم التناظر هو سمة أكثر أهمية بكثير من استلزام التباين. تستلزم العلاقات غير المتناظرة التباين، لكن العكس غير صحيح. على سبيل المثال، يستلزم «عدم التساوي» التباين، لكنها علاقة متناظرة. بشكل عام، يمكننا أن نقول إذا ما رغبنا في التخلص من الفرضيات العلائقية بقدر ما نستطيع واستبدالها بمثل هذه المحمولات المعزوة إلى رؤوس المواضيع. سوف ننجح في هذا، طالما نقصر أنفسنا على العلاقات المتناظرة: تلك التي لا تستلزم التباين، إذا ما كانت متعدية، قد تعتبر كجازمة بمحمول مشترك، بينما تلك التي تستلزم التباين قد تعتبر كجازمة بمحمول غير متوافق. على سبيل المثال، فلتتفكر في علاقة التشابه بين الفئات بذات السبيل الذي عرّفنا به الأعداد. هذه العلاقة متناظرة ومتعدية ولا تستلزم التباين. من الممكن اعتبار عدد التجمع كمحمول للتجمع بالرغم من أن هذا أعقد من المنهج الذي تبنيناه: من ثم سوف يكون لفئتين متشابهتين نفس المحمول العددي بينما سوف يكون لفئتين غير متشابهتين محمول عددي مختلف. منهج استبدال العلاقات هذا بالمحمولات هو ممكن منهجيًّا (على الرغم من أنه غالبًا ما يكون متعذرًا) طالما كانت العلاقات

المعنية متناظرة؛ لكنه مستحيل منهجيًّا عندما تكون العلاقة غير متناظرة، لأن كُلًّا من تشابه واختلاف المحمولات متناظر. قد نقول عن العلاقات غير المتناظرة إنها أكثر العلائقيات المميزة للعلاقات وإنها الأكثر أهمية للفيلسوف الذي يصبو إلى دراسة الطبيعة المنطقية الأبعد للعلاقات.

واحدة من فئات العلاقات الأخرى التي لها استخدام كبير، فئة علاقات الواحد إلى عديد، أي العلاقات التي يمكن للحد الواحد على أكثر تقدير أن يحظى بها مع الحد موضع الدراسة. مثل الأب والأم والزوج (عدا في التبت) ومربع وجيب وما إلى غير ذلك. أحد الوالدين والجذر التربيعي وما إلى غير ذلك ليست واحد إلى عديد. من الممكن منهجيًّا استبدال كل العلاقات بعلاقات واحد إلى عديد عن طريق الحيلة. فلننظرْ على سبيل المثال في علاقة أقل فيما بين الأعداد الاستقرائية. فلننظرْ في أمر أي رقم **n** أكبر من **1**، لن يكون هناك عدد واحد فقط يحظى بالعلاقة أقل من **n** ، لكننا نستطيع صياغة كل فئة الأعداد التي هي أقل من **n** . هذه فئة واحدة وعلاقتها بـ **n** لا تشاركها إياها أي فئة أخرى. قد ندعو فئة الأعداد التي هي أقل من **n** «السلفية الحقيقية» لـ **n** ، في السياق الذي نتحدث فيه عن السلف والخلف في اتصال بالاستقراء الرياضي. من ثم فإن علاقة «السلف الحقيقي» هي علاقة واحد إلى عديد (سوف تستخدم علاقة واحد إلى عديد دائمًا من أجل أن تتضمن الواحد إلى الواحد)، حيث إن كل عدد يحدد فئة واحدة من الأعداد تعد مكونة لسلفه الحقيقي. على ذلك يمكن استبدال علاقة أقل من بالاندراج كعنصر ضمن السلف الحقيقي. على هذا النحو، يمكن منهجيًّا دائمًا استبدال علاقة ليست (واحد إلى عديد) بعلاقة

(واحد إلى عديد) فيها الواحد هو فئة مع عضويته في هذه الفئة. تعامل بيانو -الذي كان لسبب معين دائمًا ما يستوعب العلاقة بشكل غريزي باعتبارها علاقة واحد إلى عديد- مع تلك العلاقات التي ليست علاقات واحد إلى عديد في شكلها الطبيعي على هذا النحو. لا يقدم اختزال علاقات واحد إلى عديد بواسطة هذا المنهج -على الرغم من كونه ممكنًا كمسألة تتعلق بالصياغة- تبسيطًا تقنيًّا، وتتوفر كل الأسباب للاعتقاد في أنه لا يقدم تحليلًا فلسفيًّا، إذا كان ذلك فقط بسبب أنه يجب اعتبار العلاقات «كخيالات منطقية **logical fictions**»[1]. لذلك سوف نواصل اعتبارنا لعلاقات (الواحد إلى عديد) كنوع خاص من العلاقات.

علاقات الواحد إلى عديد مضمنة في كل صيغة تأتي على شاكلة «هذا وهذا لذاك وذلك» «ملك إنجلترا» «زوجة سقراط»[2] «أبو جون ستيوارت ميل»[3] وهكذا، كلها تصف شخصًا واحدًا عبر أدوات علاقة الواحد إلى عديد بالنسبة إلى حدٍّ معطىً. لا يمكن لشخص أن يحظى بأكثر من أب، لذلك «أبو جون ستيوارت ميل» تصف شخصًا ما واحدًا حتى لو لم نكن نعرف مَن هو. هناك الكثير لنقوله بخصوص موضوع الأوصاف **descriptions**، لكن في الوقت الحالي هي علاقات، نحن معنيون بها، والأوصاف هي متداخلة باعتبارها تضرب أمثلة لاستخدامات علاقات (الواحد إلى عديد). يجب ملاحظة أن كل الدوال الرياضية تنتج عن علاقات (واحد إلى عديد): لوغاريتم x ، جيب تمام x ، إلخ.، مثلها كمثل أبو x ، هي حدود موصوفة بأدوات علاقة (الواحد إلى عديد) (لوغاريتم، جيب تمام، إلخ) للحد موضع الدراسة x . لا يحتاج مفهوم

الدالة function إلى أن يقتصر على الأعداد أو على الاستخدامات التي عودتنا الرياضيات عليها؛ يمكن تمديده إلى كل حالات علاقات (واحد إلى عديد)، وعلاقة «أبو x» هي مجرد دالة جائزة، فيها x هو متغير كما هو لوغاريتم x . الدوال على هذا النحو هي دوال وصفية. كما سوف نرى لاحقًا، هناك دوال من نوع أكثر أساسية وأكثر عمومية تحديدًا الدوال القضوية propositional functions؛ لكن في الوقت الراهن سوف نقصر انتباهنا على الدوال الوصفية descriptive functions، أي «الحد الذي يحظى بعلاقة R بالنسبة إلى x » أو اختصارا «R لـ x»، حيث R هي أي علاقة واحد إلى عديد.

من الملاحظ أنه إذا كان لـ «R لـ x» أن تصف حدًّا محددًا، فإن x يجب أن تكون حدًّا، يحظى شيء ما بعلاقة R معه، ولا يجب أن يكون هناك أكثر من حد واحد يحظى بالعلاقة R بالنسبة إلى x ، حيث إن «التعريف بالإضافة» المستخدم على نحو صحيح يجب أن يستلزم الفرادة. على ذلك قد نتحدث عن «والد x» إذا كان x هو أي بشري عدا آدم وحواء؛ لكننا لا نستطيع الحديث عن «أبو x» لو كانت x منضدة أو كرسيًّا أو أي شيء آخر ليس له أب. سوف نقول إن R لـ x «موجودة» عندما يكون هناك حد واحد فقط وليس أكثر يحظى بهذه العلاقة R بالنسبة إلى x . على ذلك لو كانت R هي علاقة واحد إلى عديد، فإن R لـ x «موجودة» متى كانت x تنتمي إلى النطاق العكسي لـR ، وليس شيئًا آخر. فيما يتعلق بـ «R لـ x» كدالة بالمنظور الرياضي، نقول إن x هو متغير الدالة argument وإذا كان y هو حد يحظى بالعلاقة R

بالنسبة إلى x ، أي إذا كان y هو R لـ x ، فمن ثم تكون y هي «قيمة» الدالة للمتغير x . إذا كانت R هي علاقة واحد إلى عديد، فإن مدى المتغيرات المحتملة للدالة هو النطاق العكسي لـ R ومدى القيم هو النطاق. على ذلك فإن مدى المتغيرات المحتملة للدالة «أبو x » هو كل أولئك الذين لهم آباء، أي النطاق العكسي لعلاقة أب، في حين أن مدى القيم المحتملة للدالة هو كل الآباء، أي نطاق العلاقة.

أغلب المفاهيم الأكثر أهمية في منطق العلاقات هي دوال وصفية، على سبيل المثال: عكسي، نطاق، نطاق عكسي، حقل. وسوف تقع أمثلة أخرى مع مضينا قدما.

فيما بين علاقات الواحد إلى عديد، نجد فئة علاقات الواحد إلى واحد على درجة خاصة من الأهمية. لقد حظينا بالفعل بمناسبة للحديث عن علاقات الواحد إلى الواحد في اتصال مع تعريف العدد، لكن من الضروري أن تألفها، لا أن تعرف بالكاد تعريفها المتعارف عليه. من الممكن اشتقاق التعريف المتعارف عليه من ذلك الخاص بعلاقات الواحد إلى عديد: يمكن تعريفها باعتبارها علاقات واحد إلى عديد التي هي مقابل علاقات واحد إلى عديد كذلك، أي باعتبارها العلاقات التي هي واحد إلى عديد وعديد إلى واحد معًا. من الممكن تعريف علاقات (واحد إلى عديد) باعتبارها علاقات تأتي على هذا النحو، لو أن لـ x العلاقة موضع السؤال بالنسبة إلى y ، فلا يوجد هناك أي حد آخر x′ له نفس هذه العلاقة بالنسبة إلى y . أو من جديد، من الممكن تعريفها كالتالي: بالنظر إلى حدين x و x′ ، لا يكون هناك أي

عناصر مشتركة بين الحدود التي تحظى x بالعلاقة موضع البحث معها وبين الحدود التي تحظى x′ بالعلاقة موضع البحث معها. أو من جديد، يمكن تعريفها باعتبارها العلاقات التي يستلزم الناتج النسبي لأحدها ولمقابله المطابقة، حيث «الناتج النسبي» للعلاقتين R وS هو العلاقة القائمة بين x وz عندما يكون هناك حد متوسط y ، على النحو الذي فيه لـ x العلاقة R بالنسبة إلى y ول y العلاقة S بالنسبة إلى z . بذلك، على سبيل المثال، لو أن R هي علاقة أب إلى ابنه، يكون الناتج النسبي لـ R ومقابله العلاقة التي تقوم بين x ورجل z عندما يكون هناك شخص y على النحو الذي يكون معه x هو والد y وy هو ابن z. من الواضح أن x وz يجب أن يكونا نفس الشخص. على الجانب الآخر، لو نظرنا إلى علاقة أحد الوالدين والطفل، وهي ليست علاقة (واحد إلى عديد)، لم يعد في إمكاننا البرهنة على أنه إذا كان x هو والد y وy هو طفل z ، فإن x وz يجب أن يكونا نفس الشخص، حيث إن أحدهما قد يكون أبو y والآخر أمه. هذا يبين لنا سمات علاقات الواحد إلى عديد عندما يستلزم الناتج النسبي لعلاقة ومقابلها المطابقة. يقع هذا في حالة علاقات الواحد إلى واحد، وكذلك يستلزم الناتج النسبي للمقابل وللعلاقة المطابقة. بالنظر إلى علاقةR هي ممكنة إذا ما كان لـ x العلاقة R بالنسبة إلى y ، بالتفكير في y باعتباره قد تم الوصول إليه من x عن طريق «R – خطوة» أو «R – متجه». في نفس الحالة يتم الوصول إلى x من y عن طريق «R – خطوة للوراء». على ذلك يمكننا النص على سمات علاقات الواحد إلى عديد التي كنا نتعامل

معها بالقول إن R – خطوة متبوعة بـ R خطوة للوراء يجب أن ترجع بنا إلى نقطة البدء الخاصة بنا. في العلاقات الأخرى، لا تكون الأمور على هذه الصورة بأي حال؛ على سبيل المثال، لو أن R هي علاقة طفل إلى الوالد، فإن الناتج النسبي لـ R ومقابلها هو علاقة «هو نفسه أو أخ أو أخت» ولو كانت R هي علاقة الطفل الحفيد بالنسبة إلى الجد، فإن الناتج النسبي لـ R ومقابلها هو «هو نفسه أو أخ أو أخت أو ابن العم الأول». من الملاحظ أن الناتج النسبي لعلاقتين ليس إبداليًّا بوجه عام، أي أن الناتج النسبي لـ R وS ليس هو نفسه الناتج النسبي لـ S وR بوجه عام، على سبيل المثال، الناتج النسبي لوالد وأخ هو عم، لكن الناتج النسبي لأخ ووالد هو والد.

تزود علاقة الواحد إلى واحد بارتباط **correlation** فئتين، حد إلى حد، بذلك فكل حد في أي من الفئتين سيكون له حد ارتباطه. أسهل حالات القبض على مثل تلك الارتباطات عندما لا يكون هناك أي عناصر مشتركة بين الفئتين، مثل فئة الأزواج وفئة الزوجات؛ في هذه الحالة نعرف في الحال ما إذا كان الحد من المفترض أن تخرج منه علاقة الارتباط R ، أم من المفترض أن تذهب إليه. من المناسب استخدام كلمة المسند إليه **referent** للحد الذي تخرج منه العلاقة ومصطلح مركبة العلاقة **relatum** للاصطلاح على الذي تذهب إليه العلاقة. على ذلك لو كان x وy زوجًا وزوجة، فمن ثم، فيما يتعلق بعلاقة «الزوج»x هو المسند إليه وy هو مركبة العلاقة، لكن فيما يتعلق بعلاقة «الزوجة» تكون y هي المسند إليه وx هو مركبة العلاقة. نقول إن علاقة ومقابلها

لهما «مدلولان» متضادان؛ على ذلك «مدلول» العلاقة التي تذهب من x إلى y هو مضاد ذلك الذي للعلاقة المقابلة من y إلى x . حقيقة أن للعلاقة مدلول هو أمر جوهري، وهو جزء من السبب وراء إمكانية توليد الترتيب عن طريق علاقات مناسبة. من الملاحظ أن فئة كل الحدود المسند إليها المحتملة للعلاقة موضع البحث هي النطاق الخاص بها، وفئة كل مركبات العلاقات المحتملة هي النطاق العكسي الخاص بها.

لكن كثيرًا ما يحدث أن يتداخل النطاق والنطاق العكسي لعلاقة (الواحد إلى واحد). على سبيل المثال، انظر في الأرقام العشرة الأولى (باستثناء 0)، وأضف 1 إلى كل منها؛ لذلك فبدلًا من الأرقام العشرة الأولى، في حوزتنا الآن الأرقام:

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11.

مثلها كمثل تلك التي كانت بحوزتنا من قبل، باستثناء أن 1 قد مُحي في البداية و11 التحقت بالنهاية. لا يزال هناك عشرة أرقام: مترابطة بالعشرة السابقة بواسطة علاقة n إلى n + 1 ، وهي علاقة واحد إلى واحد. أو من جديد، بدلًا من إضافة 1 إلى كل من الأرقام العشرة الأصلية، كان بإمكاننا مضاعفة كل منها، وبذلك نحصل على الأرقام:

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20

هنا لا يزال لدينا خمسة من مجموعة الأرقام السابقة، تحديدًا، 2, 4, 6, 8, 10. علاقة الارتباط في هذه الحالة هي علاقة العدد إلى مضاعفه، وهي من جديد علاقة (واحد إلى واحد). أو قد كنا لنستبدل

كل عدد بمربعه، بذلك نحصل على المجموعة:

2, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100

في هذه الحالة، لم يُسْتَبْقَ سوى ثلاثة من المجموعة الأصلية، تحديدًا **1, 4, 9**. من الممكن التنويع على مثل عمليات الارتباط هذه إلى ما لا نهاية.

أكثر هذه الحالات إثارة هي تلك التي من ذلك النوع سابق الذكر حيث يكون لعلاقة الواحد إلى واحد الخاصة بنا نطاق عكسي هو جزء من النطاق، لا النطاق بأكمله. لو أننا بدلًا من أن نحصر النطاق على الأرقام العشرة الأولى، تفكرنا في كل الأعداد الاستقرائية، سوف توضح لنا الأمثلة السابقة هذه الحالة. قد نضع الأعداد المعنية في صفين، بحيث يكون حد الارتباط مباشرة تحت العدد الذي هو حد ارتباطه. على ذلك عندما تكون دالة الارتباط هي العلاقة **n** إلى **n + 1**، يصبح عندنا الصفان:

1, 2, 3, 4, 5, ...n....

2, 3, 4, 5, 6,...n +1..

عندما تكون دالة الارتباط هي علاقة عدد بضعفه، نحصل على الصفين:

1, 2, 3, 4, 5, ...n....

2, 4, 6, 8, 10 ...2n...

عندما تكون دالة الارتباط هي علاقة عدد بمربعه، نحصل على الصفين:

1, 2, 3, 4, 5, ...n....

1, 4, 9, 16, 25,...n^2....

في كل هذه الحالات، تقع كل الأعداد الاستقرائية في الصف العلوي، وبعضها فقط في الصف السفلي.

الحالات من مثل هذا النوع، حيث يكون النطاق العكسي «جزءًا حقيقيًّا» من النطاق (أي جزء منه وليس كله) سوف تشغلنا من جديد عندما نأتي إلى التعامل مع اللا نهاية. في الوقت الحالي، نرغب فقط في الإشارة إلى وجودها، وإلى أنها تستدعي التفكر في أمرها.

فئة أخرى للارتباطات غالبًا ما تكون هامة هي فئة تُدعى «بالتباديل permutations»، حيث يكون النطاق والنطاق العكسي متشابهين. فلتتفكر على سبيل المثال في التنظيمات الستة الممكنة للحروف الثلاثة:

a, b, c

a, c, b

b, c, a

b, a, c

c, a, b

c, b, a

يمكن الحصول على أي واحد من الثلاثة بواسطة أدوات الارتباط.

على سبيل المثال، انظر في أمر الصفين الأول والأخير، (a, b, c) و(c, b, a). هنا a مرتبطة مع c ، و b مرتبطة مع نفسها، وc مرتبطة مع a. من الواضح أن جمع تباديلين هو تباديل من جديد، أي أن تباديل فئة معطاة تُكوِّن ما يعرف «بالزمرة group».

لهذه الأنواع المختلفة من الارتباطات أهمية كبيرة في أمور متنوعة على صلة، بعضها يخدم هدفًا ما وبعضها يخدم هدفًا آخر. للمفهوم العام لارتباط الواحد بالواحد أهمية بلا حدود في فلسفة الرياضيات، كما رأينا جزئيًّا بالفعل، لكن سوف يتضح ذلك بشكل أكثر كمالًا مع مُضيِّنا قدمًا. سوف ننشغل بأحد استخداماتها في فصلنا القادم.

* * *

الهوامش:

(1) أطلق راسل على البُنى المنطقية المشتقة من مواد أخرى اسم «الخيالات المنطقية logical fictions». (المترجم).

(2) سقراط: أحد أشهر فلاسفة اليونان القديمة (469 ق.م. – 399 ق. م.)، لم يترك مؤلفات، وما وصلنا منه يعود إلى تلاميذه، وأشهر ما وضعه تلاميذه عنه (محاورات أفلاطون)، أما زوجته فتدعى «كزانتيب» وورد عنها أنها قد كانت امرأة سليطة اللسان، تجادله كثيرًا وتشكو دائمًا منه ومن شظف العيش، لكنه كان يقابلها دائمًا بالتبسم والهدوء وعندما سئل عن ذلك، أشار إلى أنه قد أصبح فيلسوفًا بفضل مشاكلها وعنادها وأسلوبها. (المترجم).

(3) جون ستيوارت ميل: فيلسوف بريطاني (1806 – 1873)، أحد رواد الفلسفة الليبرالية. (المترجم).

الفصل السادس

تشابه العلاقات

رأينا في الفصل الثاني أن أي فئتين تحظيان بنفس عدد الحدود عندما تكونان «متشابهتين» أي، عندما تكون هناك علاقة (واحد إلى واحد)، النطاق الخاص بها هو إحدى الفئتين، والنطاق العكسي الخاص بها هو الفئة الأخرى. في مثل هذه الحالة نقول إن هناك «ارتباط الواحد للواحد» بين الفئتين.

في الفصل الحالي علينا أن نُعرّف علاقة تقوم بين العلاقات، سوف تلعب فيما بينها نفس الدور الذي يلعبه التشابه بين الفئات. سوف ندعو هذه العلاقة «تشابه العلاقات أو تماثلها»، عندما يبدو أن من المستحسن استخدام كلمة مختلفة عن تلك التي نستخدمها للفئات. كيف نُعرّف المماثلة likeness؟

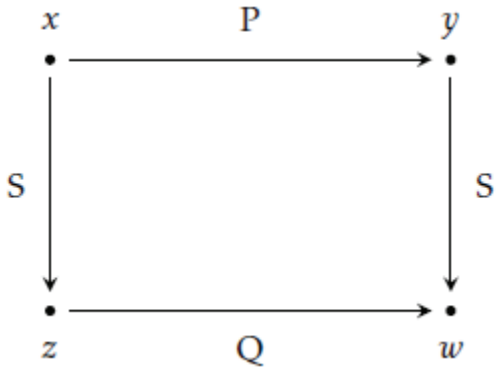
لا نزال نوظف مفهوم الارتباط: سوف نفترض أنه من الممكن أن يترابط نطاق علاقة مع نطاق العلاقة الأخرى، والنطاق العكسي مع النطاق العكسي؛ لكن ذلك غير كافٍ لهذا النوع من التشاكل الذي

نرغب في حيازته بين علاقتينا. ما نرغب فيه هو على النحو التالي، في أي وقت تكون فيه إحدى العلاقتين قائمة بين حدين، فإن العلاقة الأخرى سوف تكون قائمة بين ارتباطي هذين الحدين. يتمثل أسهل الأمثلة لمثل هذا النوع من الأشياء التي نرغب فيها في الخريطة. عندما يكون أحد الأماكن إلى الشمال من مكان آخر، فإن المكان على الخريطة المقابل لذلك الأحد هو أعلى ذلك المكان المقابل للآخر على الخريطة؛ عندما يكون مكان أحد الأماكن إلى الغرب من مكان آخر، فإن المكان على الخريطة المقابل لذلك الأحد هو إلى اليسار من ذلك المكان المقابل للآخر على الخريطة؛ وهكذا. تقابل بنية الخريطة تلك التي للبلد التي رسمت لها الخريطة. تحظى علاقات المكان في الخريطة «بتماثل» مع العلاقات المكانية في البلد المرسومة على الخريطة. إنه من ذلك النوع من الصلات التي نرغب في تعريفها.

في المقام الأول قد نطرح قيدًا على نحو مُجْدٍ. سوف نقصر أنفسنا في تعريفنا «للمماثلة» على مثل هذه العلاقات التي تحظى «بحقول» مثل هذه، أي مثل تلك التي تسمح بتكوين فئة مفردة من النطاق والنطاق العكسي. ليس الحال دائمًا على هذه الصورة. على سبيل المثال، انظر في أمر العلاقة «نطاق»، أي العلاقة التي يحظى بها نطاق العلاقة بالنسبة إلى العلاقة. تحظى هذه العلاقة بكل الفئات في النطاق الخاص بها، حيث إن كل فئة هي نطاق علاقة ما؛ كما تحظى بكل العلاقات في النطاق العكسي الخاص بها، حيث إن لكل علاقة النطاق الخاص بها. لكن من غير الممكن جمع الفئات والعلاقات معًا من أجل تكوين فئة جديدة مفردة؛ لأنها من

«أنماط types» منطقية مختلفة. لسنا في حاجة إلى أن نخطو داخل النطاق الصعب للأنماط، لكن من الجيد أن نعرف عندما نكون محجمين عن الدخول فيه. قد نقول –دون الولوج إلى أسس الجزم– أن للعلاقة «حقلًا» فقط عندما تكون على هيئة ندعوها «متجانسة homogeneous» أي، عندما يكون نطاقها ونطاقها العكسي من نفس النمط المنطقي؛ قد نقول عن دلالة ما نقصده «بالنمط» بشكل بسيط وسريع أن الأفراد وفئات الأفراد والعلاقات بين الأفراد والعلاقات بين الفئات وعلاقات الفئات بالنسبة للأفراد وهكذا هي من أنماط مختلفة. لن يكون مفهوم المماثلة الآن مفيدا جدًّا عند تطبيقه على العلاقات غير المتجانسة؛ لذلك سوف نبسط معضلتنا في تعريف «المماثلة» بالحديث عن حقل واحدة من العلاقات المعنية. يضيق هذا نوعًا ما من عمومية تعريفنا، لكن لا توجد أي أهمية عملية لهذا التضييق. وبمجرد النص عليه، لا ضرورة هناك للاستمرار في تذكره.

قد نُعرّف علاقتين P وQ باعتبارهما متشابهتين أو باعتبارهما تحظيان «بالمماثلة»، عندما تكون هناك علاقة S (واحد إلى واحد)، النطاق الخاص بها هو الحقل P والنطاق العكسي الخاص بها هو الحقل Q ، وفيها إذا كان لأحد الحدود العلاقة P مع حد آخر، فإن الحد المرتبط بأحد الحدود ذلك يحظى بالعلاقة Q مع الحد المرتبط بذلك الحد الآخر، والعكس بالعكس. سوف يجعل الشكل التالي هذا أكثر وضوحًا.



فلنفرض أن x وy حدان بينهما العلاقة P . ثم هناك حدان z وw بحيث تحظى x بالعلاقة S بالنسبة إلى z ، وتحظى y بالعلاقة S بالنسبة إلى w . لو حدث ذلك مع كل زوجين من الحدود كما هو الحال مع x وy ، ولو حدث المقابل مع كل زوجين مثل z وw ؛ فمن الواضح أن كل مثال فيه العلاقة P قائمة هناك مثال مقابل فيه العلاقة Q قائمة، والعكس بالعكس؛ وهو ما نحاول ضمانه من خلال تعريفنا. نقدر على التخلص من بعض الحشو في مخطط التعريف السابق عن طريق ملاحظة أنه عندما تُدرك الشروط السابقة، فإن العلاقة P هي نفسها الناتج النسبي لـ S وQ ومقابل/ معكوس S . أي أن خطوة P من x إلى y من الممكن استبدالها بتتابع الخطوة S من x إلى z والخطوة Q من z إلى w ورجوع الخطوة S من w إلى y . على ذلك من الممكن أن نؤسس للتعريفات التالية:

يقال إن العلاقة S هي «دالة ارتباط correlator» أو «دالة الارتباط الترتيبي ordinal correlator» لعلاقتين P وQ إذا كانت S علاقة

(واحد إلى واحد) وتحظى بحقل Q باعتباره نطاقها العكسي وP هو الناتج النسبي لـ S وQ ومقابل/ معكوس S .

يقال إن علاقتين P وQ «متشابهتان» أو تحظيان «بالمماثلة»، عندما يكون هناك دالة ارتباط واحدة على الأقل لـ P وQ .

سوف نجد أن هذه العلاقات تسفر عما قررنا كونه ضروريًّا في الفقرات السابقة.

سوف نجد أنه عندما تكون علاقتان متشابهتين، فإنهما تتشاركان كل الخواص التي لا تعتمد على الحدود الفعلية في حقليهما. على سبيل المثال، إذا كانت إحداهما تستلزم التباين، فالأخرى تستلزم التباين بالمثل؛ لو كانت إحداهما متعدية، فالأخرى متعدية بالمثل؛ لو أن إحداهما متصلة، فالأخرى متصلة بالمثل. على ذلك لو أن إحداهما تسلسلية، فالأخرى تسلسلية كذلك. مجددًا، إذا كانت إحداهما هي علاقة (واحد إلى عديد) أو (واحد إلى واحد)، فالأخرى هي علاقة (واحد إلى عديد) أو (واحد إلى واحد)؛ وهكذا، عبر كل الخواص العامة للعلاقات. حتى العبارات التي تتضمن الحدود الفعلية لحقل العلاقة، على الرغم من أنها قد لا تكون صحيحة كي تصمد عند تطبيقها على العلاقة المشابهة، إلا أنها دائمًا ما تكون قابلة لأن تُترجم إلى عبارات مماثلة. تقودنا مثل هذه الأمور إلى معضلة لها أهميتها في الفلسفة الرياضية، لم تستكشف على النحو المناسب مطلقًا بعد. يمكن النص على معضلتنا كالتالي:

لو زودنا بعبارة ما وفق لغة نعرف قواعدها النحوية وإعرابها، لكننا لا

نعرف مفرداتها، فما هي المعاني المحتملة لمثل هذه العبارة، وما معنى الكلمات غير المعروفة التي ستجعلها صحيحة؟

السبب الذي يجعل من هذا التساؤل هامًّا أنه يقدم لنا ما هو قريب جدًّا للغاية مما نعتقد في أنه حال معرفتنا بالطبيعة. نعرف أن فرضيات علمية معينة -تلك التي يُعبَّر عنها برموز رياضية في أغلب العلوم المتقدمة، هي نوعًا ما -يزيد وينقص- تعبر عن العالم بشكل صحيح، لكننا إلى حد كبير في لجة بحر فيما يتعلق بالتأويلات التي نسبغها على الحدود الواقعة في هذه الفرضيات. نعرف أكثر كثيرًا عن صورة الطبيعة من معرفتنا عن المادة (ذلك إن استخدمنا في الوقت الراهن مثالًا عتيقًا لزوجين من الاصطلاحات). على ذلك، ما نعرفه بالفعل عندما نتحدث عن قانون الطبيعة أن هناك -إذ ربما فقط- تأويلًا ما لمصطلحاتنا التي سوف تجعل القانون صحيحًا إلى حد ما. على ذلك، ترتبط بالتساؤل أهمية كبرى: ما المعاني المحتملة لقانون مُعبَّر عنه بمصطلحات، لا نعرف معانيها الموضوعية، لكننا نعرف قواعد النحو والإعراب فقط؟ وهذا هو السؤال المطروح في السابق.

سوف نتجاهل في الوقت الراهن التساؤل العام الذي سوف يشغلنا من جديد في مرحلة لاحقة؛ يجب تفحص موضوع «المماثلة» نفسه على نحو أعمق أولًا.

نتيجة للحقيقة التي مفادها أنه عندما تكون هناك علاقتان متشابهتان، فإن خواصهما تكون متماثلة، باستثناء عندما تعتمد على الحقول، كونها مُشكَّلة من الحدود التي تشكلها فقط، فمن المرغوب فيه الحصول على

اصطلاح يجمع كل العلاقات المشابهة للعلاقة موضع البحث معًا. تمامًا كما ندعو مجموعة هذه الفئات المشابهة لفئة معطاة «بعدد» هذه الفئة، لذا ربما ندعو مجموعة كل تلك العلاقات المشابهة لعلاقة معطاة «بعدد» هذه العلاقة لكن كي نتفادى الخلط مع الأعداد المكافئة للفئات، سوف نتحدث في هذه الحالة عن «عدد – العلاقة». بذلك تصبح لدينا التعريفات التالية:

«عدد – علاقة» علاقة معطاة هو فئة كل تلك العلاقات المشابهة للعلاقة المعطاة.

«أعداد – العلاقة» هي مجموعة كل فئات العلاقات تلك التي هي أعداد –علاقة علاقات مختلفة؛ أو عدد– علاقة هو فئة علاقات تتكون من كل تلك العلاقات المشابهة لعنصر واحد للفئة، وهو ما يصل بنا إلى نفس الشيء.

عندما يكون من الضروري الحديث عن أعداد الفئات بطريقة تجعل من المستحيل التباسها بأعداد – العلاقة سوف ندعوها «بالأعداد الأصلية **cardinal numbers**». على ذلك، فالأعداد الأصلية هي الأعداد المتماشية مع الفئات. تتضمن تلك الأعداد الصحيحة المعتادة في الحياة اليومية، وكذلك أعداد غير متناهية معينة، سوف نتحدث عنها لاحقًا. عندما نتحدث عن «الأعداد» دون إلحاق، علينا أن نفهمها باعتبارها أعداد أصلية. تعريف العدد الأصلي الذي علينا وضعه نصب أعيننا، هو على النحو التالي:

«العدد الأصلي» لفئة معطاة هو مجموعة كل تلك الفئات المشابهة للفئة المعطاة.

التطبيق الأكثر بروزًا لأعداد– العلاقة هو على السلاسل. من الممكن اعتبار سلسلتين متكافئتين من حيث الطول عندما يكون لهما نفس عدد – العلاقة. سوف يكون لسلسلتين غير متناهيتين نفس عدد – العلاقة عندما يكون لحقليهما نفس العدد الأصلي للحدود، وعند ذلك فقط –أي أن سلسلة (فلنقل) من 15 حدًّا سوف يكون لها نفس عدد– العلاقة مثل أي سلسلة أخرى من خمسة عشر حدًّا، لكن لن يكون لها نفس عدد العلاقة مثل سلسلة من 14 أو 16 حدًّا، وبالطبع لن يكون لها كذلك نفس عدد – العلاقة لعلاقة ليست تسلسلية. على ذلك، في الحالة الخاصة تمامًا لسلسلة متناهية هناك توازٍ بين الأعداد الأصلية وأعداد – العلاقة. من الممكن دعوة أعداد – العلاقة القابلة للتطبيق على السلاسل «بالأعداد التسلسلية **serial numbers**» (تلك الأعداد التي تدعى على نحو شائع «بالأعداد الترتيبية **ordinal numbers**» هي فئة فرعية **subclass** منها)؛ على ذلك فإن عددًا تسلسليًّا متناهيًا هو محدد عندما نعرف العدد الأصلي للحدود في حقل سلسلة، لها العدد التسلسلي موضع التساؤل. لو أن **n** هو عدد أصلي متناهٍ، فإن عدد – العلاقة للسلسلة التي لها **n** حد يُدعى بالعدد «الترتيبي» **n** . (هناك أعداد ترتيبية غير متناهية كذلك، لكننا سوف نتحدث عنها في فصل لاحق). عندما يكون العدد الأصلي للحدود في حقل السلسلة غير متناهٍ، فإن عدد – العلاقة للسلسلة لا يتحدد بواسطة العدد الأصلي ببساطة، حقيقة يوجد عدد لا نهائي من أعداد – العلاقة لعدد لا نهائي أصلي واحد، كما سوف نرى عندما نأتي إلى التفكر في أمر السلسلة غير المتناهية. عندما تكون سلسلة غير متناهية، فما الذي قد ندعوه «بطولها»، أي أن

عدد – العلاقة قد يختلف دون تغيير في العدد الأصلي؛ لكن عندما تكون السلسلة متناهية، لا يمكن لذلك أن يحدث.

يمكننا تعريف الجمع والضرب بالنسبة لأعداد– العلاقة، وكذلك بالنسبة إلى الأعداد الأصلية، ومن الممكن تطوير حساب كامل لأعداد– العلاقة. من الممكن بسهولة إدراك الأسلوب الذي يُنجز ذلك من خلاله عن طريق التفكر في أمر السلاسل. على سبيل المثال، فلتفترض أننا نرغب في تعريف مجموع سلسلتين غير متداخلتين بمثل تلك الطريقة التي سوف يكون عدد – العلاقة للمجموع قابلًا للتعريف باعتباره مجموع عددي– العلاقة للسلسلتين. في المقام الأول، من الواضح أن هناك ترتيبًا مضمَّنًا بين السلسلتين: واحدة منهما يجب أن توضع قبل الأخرى. على ذلك، لو كان P وQ هما مُوَلِّدا علاقة السلسلتين، في العلاقة التي هي مجموعهما مع وضع P قبل Q ، سوف يسبق كل عنصر لحقل P كل عنصر لحقل Q . على ذلك، فالعلاقة التسلسلية التي سوف تُعرّف باعتبارها مجموع P وQ ليست «P أو Q» ببساطة، لكنها «P أو Q أو علاقة أي عنصر لحقل P بأي عنصر للحقل Q» بافتراض أن P وQ لا تتداخلان، هذه العلاقة تسلسلية، لكن «P أو Q» ليست تسلسلية، كونها غير متصلة، حيث إنها غير قائمة بين عنصر في حقل P وعنصر في حقل Q . على ذلك فمجموع P وQ – كما هو مُعرّف– في السابق هو ما نحتاجه كي نُعرّف مجموع عددي – علاقة. تعديلات مشابهة مطلوبة من أجل نواتج الضرب وعمليات الأسس. لا يطيع الحساب الناتج قانون الإبدال commutative law:

يعتمد مجموع أو ناتج عددي- العلاقة بوجه عام على الترتيب الذي قاربناهما به. لكنه يطيع قانون التجميع associative law وأحد أشكال قانون التوزيع distributive law واثنين من قوانين الأسس الصورية formal laws for powers، ليس فقط باعتبارها تُطبق على الأعداد التسلسلية، لكن باعتبارها تُطبق على أعداد - العلاقة بشكل عام. في الحقيقة على الرغم من أن حساب - العلاقات هو فرع حديث في الرياضيات إلا أنه فرع يحظى بتقدير واسع.

لا يجب أن يفترض أنه لا يوجد أي تطبيقات أخرى هامة للسلاسل لمجرد أنها توفر أوضح تطبيق لفكرة «المماثلة». ذكرنا الخرائط بالفعل وربما نمد تصوراتنا من هذا المثال التوضيحي إلى الهندسة بشكل عام. إذا كان نظام العلاقات الذي عن طريقه تُطبّق الهندسة على مجموعة معينة من الحدود من الممكن تحويله بالكامل إلى علاقات للمماثلة مع نظام يطبق على مجموعة أخرى من الحدود، فمن ثم سوف تكون هندسة المجموعتين غير متمايزة من المنظور الرياضي، أي أن كل الفرضيات هي نفسها باستثناء الحقيقة التي مفادها أنها تطبق في حالة على مجموعة ما من الحدود وفي حالة أخرى على مجموعة أخرى. قد نقوم بإيضاح هذا بواسطة علاقات من النوع الذي قد نطلق عليه «بين»، الذي كان موضع اهتمامنا في الفصل الرابع. رأينا هناك أنه إذا ما كان لعلاقة ثلاثة حدود خواصَّ منطقية صورية، فسوف تنشأ عنها سلسلة، وقد يُطلق عليها (علاقة- بين). بالنظر إلى أي نقطتين، يمكننا استخدام (علاقة- بين) لتعيين خط مستقيم

محدد بواسطة هذين النقطتين؛ يتكون من a و b وكل نقاط x معًا، على الصورة التي تقوم بها (علاقة – بين) بين النقاط الثلاثة a, b, x بترتيب ما أو الآخر. أوضح أوزوالد فيبلين[1] أننا قد نعتبر كل الفضاء كحقل لـ(علاقة– بين) ثلاثة حدود وأن نُعرّف هندستنا من خلال الخواص التي أسبغناها على (علاقة – البين) خاصتنا[2]. الآن باتت المماثلة سهلة التعريف بين علاقات الحدود الثلاثة كما هي سهلة بين علاقات الحدين الاثنين. لو أن B و′B هما علاقتا حدين اثنين، على ذلك «xB (y, z)» تعني أن «x هي بين y و z بالنسبة إلى B»، سوف نطلق على S دالة الارتباط لـ B و′B إذا ما كانت تحظى بحقل ′B كنطاق عكسي، وبحيث تكون العلاقة B قائمة بين الحدود الثلاثة عندما تكون العلاقة ′B قائمة بين ارتباطاتها في S ، وعند ذلك فقط. وسوف نقول إن B مثل ′B عندما تكون هناك دالة ارتباط واحدة على الأقل بين B و′B . من الممكن للقارئ أن يقنع نفسه بسهولة أنه إذا كانت B مثل ′B على هذا النحو، فلن يكون هناك اختلاف بين الهندسة التي تنشأ عن B وتلك التي تنشأ عن ′B .

يستتبع ذلك أن الرياضياتي لا يحتاج إلى أن يشغل نفسه بالكيانات المحددة أو بالطبيعة الجوهرية لنقاطه وخطوطه ومستوياته حتى عندما يتبصر فيها كرياضياتي تطبيقي. قد نقول إن هناك دليلًا إمبيريقيًّا (تجريبيًّا) لحقيقة تقريبية لمثل هذه الأجزاء من الهندسة؛ إذ إنها ليست مسألة تعريف. لكن لا يوجد دليل إمبيريقي لماهية النقطة. يجب أن تكون النقطة شيئًا ما يرضي مسلماتنا على أقرب وجه ممكن، لكن من

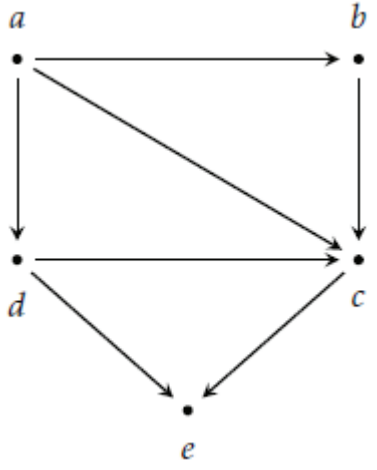
غير اللازم أن تكون «صغيرة للغاية» أو «بلا أجزاء». سواء كانت أو لم تكن، هي أشياء لا تؤثر طالما ترضي مسلماتنا. إذا كان في مقدورنا التأسيس لبنية منطقية من المادة الإمبيريقية ترضي مسلماتنا الهندسية -لا أهمية لدرجة تعقدها- قد يُطلق على هذه البنية بشكل جائز تمامًا اسم «نقطة». علينا ألا نقول بعدم وجود أي شيء آخر قد كان له على نحو جائز تمامًا أن يُدعى «نقطة»؛ علينا أن نقول فقط: «هذا الشيء الذي أسسنا له هو كافٍ بالنسبة للمشتغل بالهندسة؛ قد يكون واحدًا من أشياء عديدة، أي منها سوف يكون كافيًا، لكن ذلك ليس مما يعنينا، حيث إن هذا الشيء كافٍ لتبرير الحقيقة الإمبيريقية للهندسة، طالما لم تكن الهندسة مسألة تعريف. هذا مثال توضيحي فقط للمبدأ العام الذاهب إلى أن ما يهم في الرياضيات وبدرجة كبيرة جدًّا في العلم الفيزيائي ليس الطبيعة الجوهرية لحدودنا ومصطلحاتنا لكن الطبيعة المنطقية لعلاقاتها البينية.

قد نقول إن علاقتين متشابهتين لهما نفس «البنية» لمقاصد تتعلق بالرياضيات (مع ذلك هي ليست مقاصد للفلسفة البحتة) الأمر الوحيد الهام في مسألة العلاقة يكمن في الحالات التي تكون قائمة فيها، لا في طبيعتها الداخلية الباطنة. تمامًا كما هو من الممكن تعريف فئة بواسطة مفاهيم متنوعة مختلفة لكن متساوية – على سبيل المثال، «رجل» و«من ذوات القدمين التي لا ريش لها» – على ذلك قد تقيم علاقتان مختلفان مفاهيميًّا نفس مجموعة المُثُل **instances**. «مثال» تقوم فيه علاقة سوف

يُدرك كزوجين من الحدود، لهما ترتيب، بذلك يأتي أحد الحدين أولًا ويأتي الحد الآخر ثانيًا؛ يأتي الزوجان بالتأكيد على النحو التالي، يحظى الحد الأول بالعلاقة موضع التساؤل بالنسبة للثاني. فلننظر على سبيل المثال (فلنقل) إلى علاقة «الأب»: يمكننا تعريف ما قد ندعوه «ماصدق extension» هذه العلاقة باعتباره فئة كل الأزواج المرتبة (x, y) التي هي على صورة x هو أبو y . من منظور رياضي: الشيء الوحيد ذو الأهمية بخصوص علاقة «الأب» أنها تُعرّف مجموعة الأزواج المرتبة هذه. بالحديث بشكل عام نقول:

ماصدق العلاقة هو فئة تلك الأزواج المرتبة (x, y) التي هي على صورة x تحظى بالعلاقة موضع التساؤل بالنسبة لـ y .

يمكننا الآن أن نمضي خطوة أبعد في عملية التجريد ونتفكر فيما نعنيه «بالبنية». بالنظر في أمر أي علاقة يمكننا -إذا كانت العلاقة بسيطة بالقدر الكافي- رسم خريطة لها. لأجل الوضوح، دعنا ننظر في أمر علاقة ماصدقها هو الأزواج التالية: ab, ac, ad, bc, ce, dc, de حيث a, b, c, d, e خمسة حدود، لا تهم ماهيتها. يمكننا صنع «خريطة» من هذه العلاقة بأخذ خمس نقاط على مستوى ووصلها معًا بواسطة أسهم، كما في الشكل المصاحب.



ما كشفت عنه الخريطة هو ما ندعوه «ببنية» العلاقة.

من الواضح أن «بنية» العلاقة لا تعتمد على الحدود المعينة التي تنشئ حقل العلاقة. قد يتغير الحقل دون تغير البنية، وقد تتغير البنية دون تغير الحقل – على سبيل المثال، إذا كنا لنضيف الزوج **ae** إلى الرسم التوضيحي السابق، سينبغي علينا تعديل البنية لكن الحقل لن يتعدل. تحظى علاقتان بنفس «البنية»، عندما تكون نفس الخريطة فاعلة بالنسبة للاثنتين، أو عندما تكون أي منهما قابلة لأن تكون خريطة للأخرى (حيث إن كل علاقة قابلة لأن تكون خريطة نفسها)، وهو ما يصل بنا لنفس الأمر. ويتبين لنا –في لحظة كشف– أن ذلك هو نفسه تمامًا ما كنا قد دعوناه «بالمماثلة». ما يحضنا على أن نقول: تحظى علاقتان بنفس البنية عندما تحظيان بالمماثلة، أي عندما يكون لهما نفس عدد– العلاقة. على ذلك ما عرّفناه باعتباره «عدد– العلاقة» هو نفس الشيء تمامًا الذي نشير إليه في غموض بكلمة «بنية» – هي كلمة على درجة كبيرة من الأهمية،

لم تُعرّف أبدًا بمصطلحات دقيقة (على حد علمنا) من قِبل أولئك الذين يستخدمونها.

كان هناك قدر كبير من التخمين في الفلسفة التقليدية، ربما كان ليجتنب لو أن أهمية البنية وصعوبة العمل عليها قد أُدركت. على سبيل المثال، غالبًا ما يقال إن المكان والزمن ذاتيان، لكنَّ لهما نظيرين **counterparts** موضوعيين؛ أو أن الظواهر **phenomena** ذاتية، لكن تتسبب فيها أشياء في نفسها، يجب أن تحظى فيما بينها باختلافات مقابلة للاختلافات في الظواهر التي أتت بها. أينما وُلِّدتْ مثل هذه الفرضيات، صار من المفترض بوجه عام أن في مقدورنا معرفة القليل للغاية عن النظائر الموضوعية. مع ذلك فالحقيقة الفعلية أنه لو كانت الفرضيات كما نُصّ عليها صحيحة، فإن النظائر الموضوعية سوف تشكل عالمًا له نفس البنية التي للعالم الظاهراتي سامحة لنا أن نستدل من الظاهرة على كل الافتراضات التي من الممكن النص عليها في اصطلاحات مجردة، معروفة صحتها بالنسبة للظاهرة. لو كان للعالم الظاهراتي ثلاثة أبعاد، فكذلك يجب أن يكون للعالم فيما وراء الظاهرة ثلاثة أبعاد؛ لو أن العالم الظاهراتي إقليدي[3] فكذلك يجب أن يكون العالم الآخر وهكذا. باختصار، يجب أن تكون كل فرضية لها دلالة قابلة للنقل للآخرين صحيحة بالنسبة للعالمين أو غير صحيحة بالنسبة لهما معًا: يجب أن يكمن الاختلاف الوحيد في جوهر الفردانية التي تراوغ الكلمات دائمًا وتربك التوصيف لكن ذلك -ولنفس هذا السبب- غير ذي صلة بالعلم. الآن فالغاية الوحيدة مما نراه من إدانة الفلاسفة للظاهرة هي من أجل إقناع

أنفسهم والآخرين أن العالم الواقعي مختلف جدًّا عن عالم التجلي. في مقدورنا أن نتعاطف جميعا مع رغبتهم في البرهنة على مثل هذه الفرضية المرغوبة جدًّا، لكننا لا نستطيع تهنئتهم على نجاحهم. من الصحيح أن الكثير منهم لا يجزمون بنظائر موضوعية للظاهرة وهؤلاء يهربون من الجدال السابق. أولئك الذين يجزمون بالنظائر كتومون جدًّا -كقاعدة عامة- في هذا الخصوص؛ لأنهم يشعرون بشكل غريزي أنهم لو باشروا هذا الأمر، فسوف يجلب هذا بشكل كبير للغاية مصالحة بين العالم الواقعي والعالم الظاهراتي. إذا كان لهم أن يباشروا هذا الموضوع وأن يسعوا وراءه، لن يستطيعوا بالكاد تجنب الاستنتاجات التي كنا نطرحها. على مثل هذا النحو وكذلك على أكثر من نحو آخر، نجد أن مفهوم البنية و(عدد - العلاقة) على قدر كبير من الأهمية.

* * *

الهوامش:

(1) أوزوالد فيبلين: عالم رياضيات وجيولوجيا وطوبولوجيا أمريكي، أسهمت أعماله في تطوير الفيزياء الذرية والنظرية النسبية. (المترجم).

(2) لا ينطبق هذا على الفضاء الإهليجي، لكن فقط على الفضاءات التي فيها الخط المستقيم هو متسلسلة مفتوحة.

Modern Mathematics, edited by J. W. Young, pp. 3-51 (monograph by O. Veblen on «The Foundation of Geometry") (المؤلف).

(3) المقصود أنه يخضع للهندسة الإقليدية. وهي الهندسة التي وَضَعَ إقليدس أُسُسَها. (المترجم).

الفصل السابع

الأعداد النسبية والحقيقية والمركبة

رأينا الآن كيف نُعرّف الأعداد الأصلية وكذلك أعداد- العلاقة، التي منها ما يُدعى على نحو شائع بالأعداد الترتيبية والتي هي فصيلة من نوع خاص. سوف نجد أن كل أنواع الأعداد هذه قد تكون غير متناهية، وكذلك قد تكون متناهية. لكن كل منها غير قابل -كما هو- على الامتداد الأكثر ألفة لفكرة الأعداد، تحديدًا الامتداد نحو الأعداد السالبة والكسرية وغير النسبية والمركبة. في الفصل الحالي سوف نزود على نحو مختصر بالتعريفات المنطقية لهذه الامتدادات المتنوعة.

أحد الأخطاء التي تسببت في تأخير اكتشاف التعريفات الصائبة في هذا المنحى، الفكرة الشائعة الذاهبة إلى أن كل امتداد للأرقام يتضمن الأنواع السابقة كحالات خاصة. كان من المعتقد أن الأعداد الصحيحة السالبة قد تُعرَّف من خلال الأعداد الصحيحة التي بلا إشارة عند التعامل مع مسألة الأعداد الصحيحة الموجبة والسالبة. من جديد كان من المعتقد أن الكسر الذي مقامه 1 قد يُعرّف من خلال العدد الطبيعي الذي هو بسطه. وكان هناك مَن يفترض أن الأعداد غير النسبية مثل الجذر

التربيعي لـ 2 تجد مكانها بين الكسور النسبية، باعتبارها أكبر من بعضها وأصغر من بعضها الآخر، على ذلك قد كان من الجائز اعتبار الأعداد النسبية وغير النسبية معًا كفئة واحدة، تُدعى «بالأعداد الحقيقية». وعندما مُدّت فكرة الأعداد أكثر كي تتضمن الأعداد «المركبة»، أي الأعداد التي تتضمن الجذر التربيعي لـ 1-، كان من المعتقد أن الأعداد الحقيقية قد تُعتبر هي تلك الواقعة فيما بين الأعداد المركبة التي فيها الجزء التخيلي (أي الجزء الذي هو مضاعفات الجذر التربيعي لـ 1-) صفر. كانت كل هذه التكهنات خاطئة ويجب التخلص منها، كما سوف نجد لو طرحت التعريفات الصائبة.

دعنا نبدأ بالأعداد الصحيحة الموجبة والسالبة. من الواضح بعد تفكُّر لحظي أن كل من 1+ و1- يجب أن يكونا علاقتين، وفي الحقيقة يجب أن يكونا مقابل أحدهما الآخر. التعريف الواضح الكافي أن 1+ هو علاقة n + 1 بالنسبة إلى n ، و1- هو علاقة n بالنسبة إلى n + 1 . بشكل عام لو أن m هو عدد استقرائي، فإن m+ سوف يكون علاقة n + m بالنسبة إلى n (وذلك لأي n)، وسوف يكون m- هو علاقة n بالنسبة إلى n + m . حسب هذا التعريف فإن m+ هو علاقة واحد إلى واحد طالما كانت n عددا أصليًّا (سواء كان متناهيًا أو غير متناهٍ) وm هو عدد استقرائي أصلي. لكن m+ تحت أي ظرف غير قابل للتعريف من خلال m، فهو ليس علاقة لكنه فئة لفئات. في الحقيقة، m+ هو متمايز تمامًا عن m كما هو m- .

أما الكسور فهي أكثر إثارة من الأعداد الصحيحة الموجبة أو السالبة.

نحتاج الكسور من أجل أهداف كثيرة، لكن ربما يكون من الواضح أن أغلب هذه الأهداف هي من أجل القياس. طوَّر صديقي ورفيق دربي ألفريد نورث وايتهيد[1] نظرية للكسور معدة خصيصًا لتطبيقات الكسور فيما يتعلق بالقياس، وقد استعرضتُها في **Principia Mathematica**[2]. لكن لو كان كل ما نحتاجه من أجل تعريف تلك الأشياء هو أن تحظى بالخواص الرياضية البحتة المتطلبة، فمن الممكن الوصول لتلك الغاية عن طريق نهج أبسط، وهو النهج الذي سنتخذه هنا. سوف نُعرّف الكسر **m/n** باعتباره علاقة قائمة بين عددين استقرائيين **x, y** عندما **xn = ym** . يُمكِّننا هذا التعريف من البرهنة على أن **m/n** هو علاقة واحد إلى واحد بشرط أن **m** وكذلك **n** لا يساوي أيٌّ منهما الصفر. وبالطبع **n/m** هو العلاقة المقابلة لـ **m/n** .

يتضح من التعريفات السابقة أن الكسر **m/1** هو العلاقة بين عددين صحيحين **x, y** إذا ما كان **x = my** . تماثل هذه العلاقة علاقة **m+** ، هي على أي نحو غير قابلة للتعريف من خلال العدد الأصلي الاستقرائي **m** ؛ لأن العلاقة وفئة الفئات هما شيئان من نوعين مختلفين تمام الاختلاف[3]. سوف نرى أن **0/n** هي دائمًا نفس العلاقة، أيًّا ما قد يكون العدد الاستقرائي **n** ، باختصار هي علاقة **0** بالنسبة لأي عدد أصلي استقرائي آخر. قد ندعو هذا بصفر الأعداد النسبية؛ هو ليس مماثلًا بالطبع للعدد الأصلي **0**. في المقابل، العلاقة **m/0** هي دائمًا نفس الشيء، أيًّا ما قد يكون العدد الاستقرائي **m** . لا وجود لأي عدد استقرائي أصلي يقابل **m/0** . قد ندعوه «لا نهاية الأعداد النسبية». هو

نموذج لجنس اللا نهاية المعتاد في الرياضيات والممثل بواسطة «∞». هذا جنس مختلف تمامًا عن اللا نهايات الكانتورية[4] الحقيقية، تلك التي سوف نتدارسها في الفصل القادم. لا تتطلب لا نهايات الأعداد النسبية من أجل تعريفها أو استخدامها أي فئات غير متناهية (لا نهائية) أو أي أعداد صحيحة غير متناهية. في الحقيقة الفعلية، ليس هذا بمفهوم شديد الأهمية، ونستطيع التخلص منه بالكلية، إذا كان هناك أي داعٍ للقيام بذلك. على الجانب الآخر، للا نهايات الكانتورية أهمية بالغة للغاية وجوهرية تمامًا؛ يفتح فهمها الطريق أمام واقع كامل جديد للرياضيات والفلسفة.

سوف نلاحظ أن الصفر واللانهاية، هما فقط من بين كل النسب لا يمثلان علاقة (واحد إلى واحد). الصفر هو علاقة (واحد إلى عديد)، واللا نهاية علاقة (عديد إلى واحد).

لا وجود لأدنى صعوبة في تعريف (أكبر من وأصغر من) فيما بين النسب (أو الكسور). بالنظر في أمر أي نسبتين **m/n** و**p/q** ، سوف نقول إن **m/n** هي أصغر من **p/q** لو أن **mq** أصغر من **pn** . لا وجود لأي صعوبة في البرهنة على أن العلاقة «أصغر من» -بحسب تعريفها- هي علاقة تسلسلية، على ذلك تشكل النسب سلسلة وفقًا للمقدار. في هذه السلسلة الصفر هو أصغر حد، واللا نهاية هي الحد الأكبر. إذا ما أسقطنا الصفر واللا نهاية من سلسلتنا، لم يعد هناك أي نسبة هي الأصغر أو الأكبر؛ من الواضح أنه لو كانت **m/n** هي أي نسبة غير الصفر واللا نهاية، فإن **m/2n** هي أصغر و**2m/n** هي أكبر، ومع ذلك فأي منهما ليست صفرًا أو

ما لا نهاية، ومن ذلك m/n ليست النسبة الأصغر أو الأكبر بشكل مطلق، وبذلك (عند إسقاط الصفر والما لا نهاية) لا وجود للأصغر المطلق ولا للأكبر المطلق، حيث إن m/n قد جرى اختيارها عشوائيًّا. على نحو مماثل يمكننا البرهنة على أنه مهما كاد كسران أن يتساويا، هناك دائمًا كسور أخرى فيما بينهما. فلتفترض أن m/n وp/q كسران، من بينهما p/q هو الأكبر. من ثم من السهل أن ندرك (أو أن نبرهن على) أن (m + p) / (n + q) سوف يكون أكبر من m/n وأصغر من p/q. على ذلك فسلسلة النسب هي سلسلة لا وجود لأي حدين متعاقبين فيها، لكنْ هناك دائمًا حدودٌ أخرى فيما بين أي حدين. نتيجة أن هناك حدودًا أخرى بين هذه الأخرى وهكذا إلى ما لا نهاية، من الواضح أن هناك عددًا لا نهائيًّا من النسب بين أي حدين، مهما كانا متقاربين جدًّا إلى درجة تجعلهما يكادان يتساويان[5]. تُدعى السلسلة التي تحظى بخاصية أن هناك دائمًا حدودًا أخرى بين أي حدين وعلى ذلك لا وجود لأي حدين متعاقبين «بالملتحمة compact». على ذلك تشكل النسب وفقًا للمقدار سلسلة «ملتحمة». لمثل هذه السلسلة خواص عديدة هامة، ومن الهام ملاحظة أن النسب توفر نموذجًا للسلسلة الملتحمة المُوّلدة على نحو منطقي بحت، دون أي التجاء إلى المكان أو الزمن أو أي معطيات إمبيريقية أخرى.

من الممكن تعريف النسب الموجبة والسالبة بطريقة مماثلة لتلك التي عرّفنا بها الأعداد الصحيحة الموجبة والسالبة. عن طريق تعريف مجموع نسبتين m/n وp/q باعتبارهما (mq + pn)/nq في البداية،

نُعرّف $p/q+$ باعتباره علاقة $m/n + p/q$ بالنسبة إلى m/n ، حيث m/n هي أي نسبة؛ و $p/q-$ هي بالطبع مقابل $p/q+$. ليست هذه هي الطريقة الوحيدة الممكنة لتعريف النسب الموجبة والسالبة، لكنها طريقة تحظى بمزية كونها تكييفًا للطريقة التي تبنيناها في حالة الأعداد الصحيحة وتخدم غرضنا.

نصل الآن إلى امتداد أكثر إثارة لفكرة العدد، أي الامتداد نحو ما يطلق عليه الأعداد «الحقيقية»، وهو النوع الذي يتضمن الأعداد غير النسبية. في الفصل الأول صادفنا مناسبة للحديث عن «الأشياء غير القابلة للقياس» واكتشافها من قِبل فيثاغورس. بدأ الأمر من هناك، أي من خلال الهندسة، حيث بدأ التفكير لأول مرة في الأعداد غير النسبية. مربع طول ضلعه بوصة واحدة سوف يكون له قطر طوله هو الجذر التربيعي لـ 2 بوصة. لكن كما اكتشف القدماء، لا وجود لكسر مربعه هو 2. بُرهن على هذه الفرضية في الكتاب العاشر لإقليدس، وهو أحد الكتب التي كان طلاب المدارس ليعتبرون فقدانها من حسن الحظ عندما كان إقليدس لا يزال يُستخدم ككتاب مرجعي. البرهان سهل على نحو لا يصدق. فلتجعل m/n هو الجذر التربيعي لـ 2 –إن كان ذلك ممكنا–، على ذلك سوف يكون $m^2/n^2 = 2$ ، أي أن $m^2 = 2n^2$. على ذلك m^2 هو عدد زوجي وعلى ذلك، يجب أن يكون m عددًا زوجيًّا، لأن مربع العدد الفردي هو عدد فردي. الآن لو كانت m عددًا زوجيًّا، يجب قسمة m^2 على 4، وذلك في حالة أنه إذا كانت $m = 2p$ ، حيث إنه عند ذلك سوف تكون $m^2 = 4p^2$ ، هكذا سوف تكون $4p^2 = 2n^2$، عندما تكون

P هي نصف m . عندئذ سوف تكون $n^2 = 2p^2$، وعلى ذلك سوف يكون n/p هو أيضًا الجذر التربيعي لـ 2. إلا أن في مقدورنا أن نعيد ذات البرهان ابتداءً من هنا: لو كانت n = 2q ، فسوف يمثل p/q كذلك الجذر التربيعي لـ2، وهكذا، عبر سلسلة لا تنتهي من الأعداد التي كل منها هو نصف سابقيه. لكن ذلك مستحيل؛ لو قسمنا عددًا على 2، ومن ثم قمنا بتنصيف النصف، وهكذا دواليك، يجب أن نبلغ عددًا فرديًّا بعد عدد متناه من الخطوات. أو قد نجعل النقاش أكثر بساطة إذا ما افترضنا أن m/n التي بدأنا بها هي في أدنى حدودها؛ في هذه الحالة يمتنع على m و n أن يكون كلاهما عددًا زوجيًّا؛ لكننا كنا قد رأينا أنه إذا كانت $m^2/n^2 = 2$ ، فإنهما يجب أن يكونا عددين زوجيين. على ذلك يمتنع وجود أي كسر m/n مربعه 2.

من ذلك، لن يعبر أي كسر عن الطول المضبوط المحدد لقطر المربع الذي طول ضلعه بوصة واحدة. يبدو هذا كتحدٍّ ألقت به الطبيعة أمام الحساب. مع ذلك قد يتباهى أحدهم بقوى الأعداد (كما فعل فيثاغورس)، تبدو الطبيعة قادرة على إصابته بالحيرة عن طريق الكشف عن أطوال، لا يمكن لأعداد تقديرها بمصطلحات الوحدات. لكن المعضلة لم تبقَ في هيئتها الهندسية. بمجرد ابتكار الجبر، بزغت ذات المعضلة فيما يتعلق بحل المعادلات، إلا أنها قد اتخذت هنا شكلًا أوسع، حيث إنها تضمنت الأعداد المركبة أيضًا.

من الواضح أنه من الممكن العثور على كسور تقترب أكثر فأكثر من أن يكون مربعها مساويًا لـ 2. يمكننا تشكيل سلسلة متصاعدة من

الكسور، لكل منها مربع أقل من 2، لكن عناصرها الأخيرة تقل عن 2 بما هو أقل من أي قدر تم تعيينه. قد نقول عن ذلك، فلتفرض أنني عينت مقدارًا ما صغيرًا مقدمًا، فلتقل واحدًا من البليون، سوف نجد أن كل حدود سلسلتنا بعد حد معين –فلتقل العاشر– سوف يكون لها مربعات تختلف عن 2 بأقل من هذا المقدار. ولو أنني قمت بتعيين مقدارٍ أصغر من ذلك، فقد يكون من اللازم المضيّ أبعد على طول السلسلة. لكن ينبغي أن نصل بعد وقت يطول أو يقصر إلى حد في السلسلة –فلنقل العشرين– بعده سوف تحظى كل الحدود بمربعات تختلف عن 2 بأقل من هذا المقدار الأصغر. إذا ما انطلقنا إلى العمل على استخلاص الجذر التربيعي لـ 2 عن طريق القاعدة الحسابية المعتادة، سوف نحصل على كسر عشري لا ينتهي، شاغلًا العديد والعديد من الخانات الكثيرة، بحيث يوفي تمامًا بالشروط السابقة. في مقدورنا على نحو مكافئ تشكيل سلسلة تنازلية من الكسور التي كسورها أكبر من 2، لكنها أكبر بمقادير تواصل التناقص كلما تحركنا صوب الحدود الأخيرة للسلسلة، وبالتالي فهي تختلف –طال الوقت أو قصر– بأقل من أي كمية مسبقة التعيين. على هذا النحو يبدو كأننا نرسم سورًا حول الجذر التربيعي لـ 2، وقد يبدو من العسير الاعتقاد في أنه سيواصل التفلت منا للأبد. إلا أن هذا ليس هو السبيل الذي سوف نصل به بالفعل إلى الجذر التربيعي لـ 2.

إذا ما قسمنا كل النسب إلى فئتين، بحسب مربعاتها، إما أصغر من 2 وإما لا، نجد بين تلك التي مربعاتها ليست أقل من 2، أن كل مربعاتها أكبر

من 2. لا وجود لحد أقصى للنسب التي مربعاتها أقل من 2، ولا يوجد حد أدنى لتلك التي مربعاتها أكبر من 2. لا يوجد حد أدنى يصل للصفر للفارق بين عددين مربعهما أصغر قليلًا من 2 أو بين عددين مربعهما أكبر قليلًا من 2. باختصار، يمكننا تقسيم كل النسب إلى فئتين، بحيث إن كل الحدود في إحدى الفئتين أقل من كل الحدود في الفئة الأخرى، لا يوجد حد أكبر أقصى للفئة الأولى، ولا حد أصغر أدنى في الفئة الأخرى. بين هاتين الفئتين، حيث ينبغي أن يقع $\sqrt{2}$، لا وجود لشيء. وبذلك فعلى الرغم من أننا قد رسمنا سورًا محكمًا بقدر ما نستطيع، إلا أنه قد رُسم في المكان الخاطئ، ولم يقتنص $\sqrt{2}$.

أزاح ديدكايند[6] الستار عن هذا المنهج المذكور حالًا لتقسيم حدود السلسلة إلى فئتين، فيهما واحدة تسبق بكاملها الأخرى، ولذلك فهي تسمى «حد ديدكايند». بالنسبة إلى ما يحدث عند نقطة التقسيم، هناك أربع احتمالات: 1 – قد يكون هناك حد أقصى للقسم الأدنى، وحد أدنى للقسم الأعلى. 2 – قد يكون هناك حد أقصى للأول، ولا وجود لحد أدنى للقسم الآخر. 3 – قد لا يكون هناك حد أقصى للأول، لكن هناك حد أدنى للآخر. 4 – قد لا يكون هناك حد أقصى للأول، ولا وجود لحد أدنى للقسم الآخر. من بين هذه الحالات الأربع، الحالة الأولى موضحة بواسطة أي سلسلة، فيها حدود متعاقبة: على سبيل المثال، في سلسلة الأرقام يجب أن ينتهي القسم الأقل بعدد ما n ، ويجب أن يبدأ الحد الأعلى إذَنْ بـ $n + 1$. الحالة الثانية توضحها سلسلة النسب إذا ما اتخذنا لقسمنا الأدنى كل النسب حتى 1 متضمنة إياه كذلك، واتخذنا

لقسمنا الأعلى كل النسب التي هي أكبر من 1. الحالة الثالثة تتضح إذا ما اتخذنا لقسمنا الأدنى كل النسب الأقل من 1 واتخذنا لقسمنا الأعلى كل النسب من 1 إلى ما يزيد عنه (متضمنة 1 نفسه). الحالة الرابعة -كما رأينا- تتضح إذا ما وضعنا في قسمنا الأدنى كل النسب التي جذورها أقل من 2، ووضعنا في قسمنا الأعلى كل النسب التي جذورها أكبر من 2.

قد نهمل أول الحالات الأربع، بما أنها لا تتجلى إلا في السلسلة التي يوجد فيها حدود متعاقبة. في ثاني حالاتنا الأربع، نقول إن الحد الأقصى للقسم الأدنى هو أدنى نهاية limit للقسم الأعلى، أو لأي مجموعة من الحدود المختارة من القسم الأعلى بحيث لا يكون هناك أي حد في القسم الأعلى واقع قبلها جميعا. في ثالث حالاتنا الأربع نقول إن الحد الأدنى للقسم الأعلى هو أعلى نهاية للقسم الأدنى، أو لأي مجموعة من الحدود المختارة من القسم الأدنى بحيث لا يكون هناك أي حد في القسم الأدنى واقع بعدها جميعا. في الحالة الرابعة، نقول إن هناك «فجوة»: لا يحظى القسم العلوي ولا القسم الأدنى بنهاية أو بحد أخير. في هذه الحالة، قد نقول كذلك إن لدينا «قسمًا غير نسبي»، حيث إن لأقسام سلاسل النسب «فجوات» عند تقابلها مع الأعداد غير النسبية.

ما يؤخر الوصول لنظرية صحيحة للأعداد غير النسبية كان اعتقادًا خاطئًا، يذهب إلى أنه يجب أن تكون هناك «نهايات» لسلاسل النسب. مفهوم «النهاية» هو في غاية الأهمية، وقبل أن نواصل نحو ما هو أبعد،

سوف يكون من الجيد أن نُعرّفه.

يقال إن الحد x هو «النهاية العليا upper limit» لفئة α بالنسبة إلى علاقة P لو

1 – كانت α لا تحظى بحد أقصى maximum في P .

2 – كان كل عدد في α ينتمي إلى حقل P يسبق x .

3 – كان كل عدد في حقل P يسبق x ، يسبق عنصرًا ما في α.
(نقصد بـ «يسبق» أنه «يحظى بعلاقة P بالنسبة إلى»).

يفترض هذا على نحو مسبق التعريف التالي «لأقصى»:

يقال إن حد x هو «الأقصى» في فئة α بالنسبة إلى علاقة P ، لو كان x عنصرًا في α وفي حقل P ولا يحظى بالعلاقة P بالنسبة إلى أي عنصر آخر في α.

لا تتطلب هذه التعريفات وجوب أن تكون الحدود التي تطبق عليها كمية. على سبيل المثال، بالتفكر في سلسلة من لحظات الزمن مرتبة من السابق للاحق، سوف تكون «أقصاها» (إن كانت هناك) هي آخر اللحظات؛ لكن إذا كانت مرتبة من اللاحق للسابق، فإن «أقصاها» (إن كانت هناك) سوف تكون أول اللحظات.

«أدنى minimum» الفئة بالنسبة إلى P هو أقصاها بالنسبة إلى مقابل P ؛ و«النهاية الدنيا lower limit» بالنسبة إلى P هي النهاية العليا بالنسبة إلى مقابل P .

لا تتطلب مفاهيم النهاية والأقصى بالضرورة أن تكون العلاقة التي

يُعرَّفان بالنسبة لها تسلسلية، لكن تطبيقاتهما الهامة قليلة باستثناء تلك الحالات التي تكون فيها العلاقة تسلسلية أو شبه تسلسلية. مفهوم «النهاية العليا أو الأقصى» الذي قد نمنحه اسم «الحافة العليا **upper boundary**» هو مفهوم هام غالبًا. على ذلك «فالحافة العليا» لمجموعة من الحدود مختارة من السلسلة هي آخر عناصرها، إذا كان لها آخر، لكن إذا لم يكن لها فهي الحد الأول بعدها كلها، إن كان هناك مثل هذا الحد. إذا لم يكن هناك ما هو أقصى أو لم تكن هناك نهاية، فلا وجود لحافة عليا هناك. «الحافة الدنيا **lower boundary**» هي النهاية الدنيا أو هي الحد الأدنى.

بالعودة إلى أنواع تقسيم ديدكايند الأربعة، ندرك أنه في حالة الثلاثة أنواع الأولى لكل قسم حافة (عليا أو دنيا كما قد تستلزم الحالة)، بينما في الحالة الرابعة لا وجود لكلتا الحافتين. من الواضح كذلك أنه عندما يكون للقسم الأدنى حافة عليا، يكون للقسم الأعلى حافة دنيا. في الحالتين الثانية والثالثة، تكون الحافتان متطابقتين، في الحالة الأولى هما حدان متعاقبان في السلسلة.

تُدعى السلسلة «ديدكايندية» عندما يكون لكل قسم حافة، عليا أو دنيا كما قد يقتضي الحال.

كنا قد رأينا أن سلاسل النسب بحسب المقدار ليست ديدكايندية.

نتيجة لسلوك البشر المتأثر بتصوراتهم المكانية، افترض الناس أنه من اللازم أن يكون للسلاسل نهايات حيث سيبدو من الشاذ ألا يكون لها مثل تلك النهايات. على ذلك، مع إدراكهم أنه لا وجود لنهاية منطقية للنسب

التي جذرها أقل من 2، سمحوا لأنفسهم «بافتراض» نهاية غير نسبية كي تملأ فجوة ديدكايند. أسس ديدكايند في العمل المذكور سابقًا للمسلمة التي تذهب إلى أن الفجوة يجب أن تُملأ، أي أن كل قسم يجب أن تكون له حافة. لهذا السبب تُدعى السلاسل التي تكون مسلمته صحيحة فيها «ديدكايندية»، لكنْ هناك عدد غير متناهٍ من السلاسل لا تكون المسلمة صحيحة فيها.

لمنهج «افتراض» ما نريده مزايا عدة؛ مماثلة تمامًا للمزايا التي تفوق بها السرقة الكدح الشريف. دعنا نترك تلك المزايا للآخرين ونواصل مع الكدح الشريف.

من الواضح أن حد ديدكايند غير النسبي «يمثل» على نحو ما عددًا غير نسبي. كي نفيد من هذا من أجل بدايتنا، لا نجد إلا شعورًا مشوشًا أن علينا العثور على سبيل ما لاستنباط تعريف دقيق منه؛ ولكي نقوم بذلك علينا تحرير أدمغتنا من وهم المفهوم الذاهب إلى أن غير النسبي يجب أن يكون نهاية مجموعة نسب. تمامًا كما هي النسب التي مقامها 1 ليست مطابقة للأعداد الصحيحة، لذلك فتلك الأعداد النسبية التي من الوارد أن تكون أكبر من أو أصغر من الأعداد غير النسبية أو من التي من الممكن أن تحظى بالأعداد النسبية كنهاية لها، لا يجب تعريفها بواسطة النسب. علينا أن نُعرّف نوعًا جديدًا من الأعداد يُدعى «بالأعداد الحقيقية»، بعضها سوف يكون نسبيًّا وبعضها الآخر غير نسبي. «تتوافق» تلك النسبية مع النسب، بنفس الطريقة التي تتوافق بها النسبة n/1 مع العدد الصحيح n ؛ لكنها ليست مماثلة للنسب. كي نقرر ما عليها أن تكونه، دعنا نسجل ملاحظتنا

أن غير النسبي يمثل بواسطة حد غير نسبي، والحد يمثل بواسطة قسمه الأدنى. دعنا نحصر أنفسنا في الحدود التي ليس لقسمها الأدنى ما هو أقصى؛ في هذه الحالة سوف ندعو القسم الأدنى «مقطعا **segment**». من ثم تكون تلك المقاطع التي تتوافق مع النسب هي تلك التي تتكون من كل النسب الأقل من النسبة التي نلاحقها والتي هي حافتها؛ في حين أن تلك التي تمثل الأعداد غير النسبية هي تلك التي لا حافة لها. تأتي المقاطع -سواء تلك التي لها حواف أو تلك التي دون حواف- على الصورة التالية، أي مقطعين يندرجان في سلسلة واحدة، يجب أن يكون أحدهما جزءًا من الآخر؛ على ذلك من الممكن أن تنتظم جميعًا في سلسلة من خلال علاقة كل وجزء. سوف تمد السلسلة التي فيها فجوات ديدكايند -أي تلك التي فيها مقاطع ليس لها حواف- بمقاطع أكثر مما تحظى به من حدود، حيث إن كل حد سوف يتاخم مقطعًا يحظى بهذا الحد كحافة، ومن ثم سوف تكون المقاطع التي لا حواف لها زائدة.

نحن الآن في موضع يخول لنا تعريف عدد حقيقي وعدد غير نسبي.

«عدد حقيقي» هو مقطع لسلسلة نسب مرتبة وفق المقدار.

«عدد غير نسبي» هو مقطع لسلسلة نسب، لا حافة له.

"عدد حقيقي نسبي» هو مقطع لسلسلة نسب، له حافة.

على ذلك يتكون عدد حقيقي نسبي من كل النسب الأقل من نسبة معينة وهو العدد الحقيقي النسبي الموافق لتلك النسبة. على سبيل المثال، العدد الحقيقي 1 هو فئة الكسور الحقيقية[7].

في الحالات التي نفترض فيها على نحو طبيعي أن العدد غير النسبي يجب أن يكون نهاية مجموعة نسب، الحقيقة أنه نهاية مجموعة الأعداد الحقيقية النسبية المقابلة في سلسلة المقاطع المرتبة ككل وجزء. على سبيل المثال $\sqrt{2}$ هو النهاية العليا لكل مقاطع سلسلة النسب تلك التي تتوافق مع النسب التي مربعاتها أقل من 2. على نحو أبسط، $\sqrt{2}$ هو المقطع المكون من كل تلك النسب التي مربعاتها أقل من 2.

من السهل البرهنة على أن سلسلة مقاطع أي سلسلة هي ديدكايندية. حيث إنه بالنظر إلى أي مجموعة مقاطع، ستكون حافتها هي مجملها المنطقي، أي فئة كل تلك الحدود التي تنتمي إلى مقطع واحد للمجموعة على الأقل[8].

التعريف السابق للأعداد الحقيقية هو مثال «للبناء» في مقابل «الافتراض»، ولدينا مثال آخر عليه في تعريف الأعداد الأصلية. الفائدة العظيمة من هذا المنهج أنه لا يتطلب أي فرضيات جديدة، لكن يمكننا من المواصلة على نحو استقرائي من أدوات المنطق الأصلية.

لا توجد صعوبة في تعريف الجمع والضرب بالنسبة للأعداد الحقيقية كما هي مُعرَّفة في السابق. بالنظر في أمر أي عددين حقيقيين μ وν، كل منهما هو فئة نسب، فلتأخذ أي عنصر في μ وأي عنصر في ν واجمعهما معًا بحسب قاعدة جمع النسب. كَوِّنْ فئة كل أمثال هذه الجموع التي من الممكن الحصول عليها عن طريق تنويع العناصر المختارة من μ وν. يزوِّد هذا بفئة نسب جديدة، ومن السهل البرهنة على أن هذه الفئة الجديدة هي مقطع في سلسة النسب. نُعرّفها باعتبارها مجموع μ وν.

من الممكن النص على التعريف على نحو أكثر إيجازًا كالتالي:

المجموع الحسابي لعددين حقيقيين هو فئة المجاميع الحسابية لعنصر من الأول وعنصر من الآخر وقد اختيروا عبر كل السبل الممكنة.

يمكننا تعريف ناتج الضرب الحسابي لعددين حقيقيين بنفس الطريقة تمامًا، عن طريق ضرب عنصر من الأول في عنصر من الآخر عبر كل السبل الممكنة. تُعرّف فئة النسب المُوّلدة من خلال ذلك باعتبارها ناتج العددين الحقيقيين. (في كل ما يماثل هذه التعريفات، يجب أن تُعرّف سلسلة النسب باعتبار الـ **0** واللا نهاية مستثنيين).

لا توجد صعوبة في مد تعريفنا إلى الأعداد الحقيقية الموجبة والسالبة وجمعها وضربها.

بقي أن نزود بتعريف الأعداد المركبة.

على الرغم من أن الأعداد المركبة قابلة للتأويل الهندسي، إلا أنها غير مطلوبة من قِبل الهندسة بذات الشكل الإلزامي المطلوبة به الأعداد غير النسبية. يُقصد بالعدد «المركب» عدد يتضمن الجذر التربيعي لعدد سالب، سواء كان عددًا صحيحًا أو نسبيًّا أو حقيقيًّا. بما أن مربع العدد السالب هو عدد موجب، فالعدد الذي يجب أن يكون مربعه سالبًا هو بالضرورة عدد من نوع جديد. لو استخدمنا الحرف **i** ممثلًا للجذر التربيعي لـ **1-**، فعلى ذلك من الممكن التعبير عن أي عدد يتضمن الجذر التربيعي لعدد سالب على هذا النحو **x + yi** ، حيث **x** و**y** حقيقيان. يطلق على الجزء **yi** الجزء «التخيلي» من هذا العدد، **x** هو

الجزء «الحقيقي». (يكمن السبب وراء عبارة «الأعداد الحقيقية» أنها تتناقض مع مثل تلك «التخيلية»). على الرغم من غياب أي تعريف دقيق للأعداد المركبة، إلا أن لها مدة طويلة تستخدم بشكل اعتيادي من قِبل الرياضياتيين. افترض ببساطة أنها كانت لتطيع القواعد الحسابية المعتادة، وقد وُجد أن توظيفها حسب هذا الافتراض نافعا. هي مُتطلَبة على نحو أقل من قِبل الهندسة مقارنة بالجبر والتحليل. على سبيل المثال نرغب في أن نكون قادرين على أن نقول إن لكل معادلة تربيعية جذرين، ولكل معادلة تكعيبية ثلاثة، وهكذا. لكن لو أننا حصرنا أنفسنا في الأعداد الحقيقية، فلن تحظى مثل هذه المعادلة $x^2 + 1 = 0$ بأي جذور، ومثل هذه المعادلة $x^3 - 1 = 0$ سوف تحظى بجذر واحد. قدّم كل تعميم للأعداد نفسه في البداية باعتباره من أجل حل معضلة ما بسيطة: كانت هناك حاجة للأعداد السالبة كي يكون الطرح ممكنا دائمًا، فمن دونها سوف يكون $a - b$ بلا معنى إذا ما كانت a أقل من b ؛ كانت هناك حاجة للكسور كي تكون القسمة -إذ ربما- ممكنة دائمًا؛ وهناك حاجة للأعداد المركبة كي يكون استخلاص الجذور وحل المعادلات -إذ ربما- ممكنًا دائمًا. لكن امتدادات الأعداد لم تُخلّق لمجرد الحاجة لها: لقد خُلّقت عن طريق التعريف، وعلينا الآن أن نحول انتباهنا صوب تعريف الأعداد المركبة.

من الممكن اعتبار العدد المركب ببساطة كزوج مرتب من الأعداد الحقيقية، ومن الممكن كذلك تعريفه من خلال ذلك. هنا كما هو الحال في كل مكان آخر، الكثير من التعريفات ممكنة. كل ما هو لازم أن تقود

التعريفات المتبناة إلى خواص معينة. في حالة الأعداد المركبة، لو عُرّفت كأزواج مرتبة من الأعداد الحقيقية، فإننا نُؤمِّن في الحال بعض الخواص المتطلبة، تحديدًا أن عددين حقيقيين متطلبين لتعيين العدد المركب، وأن من بينها يمكننا تمييز عددٍ أولًا وآخر ثانيًا، وأن أي عددين مركبين لا يتطابقان إلا عندما يكون العدد الحقيقي الأول المضمن في أولهما مساويًا للأول المضمن في الآخر، والثاني مساويًا للثاني. ما نحتاجه أكثر من ذلك يمكن تأمينه من خلال تعريف قواعد الإضافة والضرب. علينا أن نحظى بالتالي:

$$(x + yi) + (x' + y'i) = (x + x') + (y + y')\, i$$

$$(x + yi)\,(x' + y'i) = (x\,x' - y\,y') + (x\,y' + x'y)\, i$$

هكذا نُعرّف ما يلي، مجموع أي زوجين مرتبين من الأعداد الحقيقية، (x,y) و(x′,y′) هو الزوج (x+x′,y+y′) وناتج ضربهما سوف يكون الزوج $(x\,x' - y\,y',\ x\,y' + x'\,y)$. عن طريق هذه التعريفات سوف نُؤمِّن لأزواجنا المرتبة الظفر بالخواص التي نرغب فيها. على سبيل المثال انظر في حاصل ضرب الزوجين (0, y) و(0, y′). عن طريق القاعدة المذكورة سابقًا سوف يكون ناتج الضرب هو الزوج (-y y′, 0). على ذلك سوف يكون مربع الزوج (0, 1) هو الزوج (-1, 0). الآن فهذه الأزواج التي فيها الحد الثاني هو 0 هي تلك التي تحظى بالصفر باعتباره جزءها التخيلي بحسب الاصطلاح؛ في التوصيف x + yi ، من الطبيعي أن تكتب x + 0i ببساطة على هيئة x ، وكما هو طبيعي تمامًا (لكنه خاطئ) أن تُعرّف النسب التي مقامها هو الواحد من خلال الأعداد

الصحيحة، فكذلك من الطبيعي تمامًا (لكنه خاطئ) أن تُعرّف الأعداد المركبة التي جزؤها التخيلي هو الصفر من خلال الأعداد الحقيقية. بالرغم من أن هذا خطأ في النظرية، إلا أنه تيسير عند الممارسة والتطبيق؛ من الممكن استبدال «x + 0i» ببساطة بواسطة «x» و«yi + 0» بواسطة «yi»، بشرط انتباهنا إلى أن «x» ليس عددًا حقيقيًّا بالفعل، لكنه حالة خاصة للعدد المركب. وعندما يكون y هو 1، قد تستبدل «yi» بالطبع بواسطة «i». على ذلك فالزوج (0, 1) يمثل بواسطة i ، والزوج (0 ,1-) يمثل بواسطة 1-. الآن تجعل قواعدنا للضرب من مربع (0, 1) مساويًا لـ (0 ,1-)، أي أن مربع i هو 1-. هذا ما نرغب في تأمينه. على ذلك تخدم تعريفاتنا كل الغايات الضرورية.

من السهل التزويد بتأويل هندسي للأعداد المركبة في هندسة المستوى. عرض ويليام كنجدون كليفورد[9] هذا الأمر على نحو مقبول في كتابه (الحس المشترك للعلوم المنضبطة) وهو كتاب عظيم الفائدة، إلا أنه كُتب قبل إدراك أهمية التعريفات المنطقية البحتة.

بالرغم من أن الأعداد المركبة ذات الرتبة الأعلى أقل نفعًا واستخدامًا من تلك التي كنا نُعرّفها، إلا أن لها استخدامات معينة ليست عديمة الأهمية في الهندسة، كما قد نرى على سبيل المثال في كتاب (الجبر الشامل) لدكتور وايتهيد. نحصل على تعريف الأعداد المركبة من الرتبة n عن طريق مد واضح للتعريف الذي زودنا به. نُعرّف عددًا مركبًا من الرتبة n باعتباره علاقة (واحد إلى عديد)، يتكون نطاقها من أعداد حقيقية معينة ويتكون نطاقها العكسي من أعداد

صحيحة من 1 إلى n [10]. هذا هو ما يشير إليه في المعتاد التوصيف $(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)$ حيث تدل اللواحق على الارتباط بالأعداد الصحيحة المستخدمة كلواحق، والارتباط هو (واحد إلى عديد)، ليس بالضرورة أن يكون (واحد إلى واحد)؛ لأن x_r وx_s قد يكونان متساويين عندما يكون r و s غير متساويين. سوف يخدم التعريف السابق مع قاعدة الضرب المناسبة كل الغايات التي نحتاج لأجلها الأعداد المركبة من رتبة عليا.

الآن قد استكملنا عرضنا لتمديدات الأعداد، تلك التي لا تتضمن اللا نهاية. يجب أن يكون تطبيق الأعداد على التجمعات غير المتناهية هو موضوعنا التالي.

* * *

الهوامش:

(1) نورث وايتهيد: عالم رياضيات وفيلسوف إنجليزي (1861 – 1947)، له العديد من الإسهامات في الجبر والمنطق وفلسفة العلوم والفيزياء، وكان شريك راسل في تأليف كتاب مبادئ الرياضيات **Principia Mathematica**. (المترجم).

(2) **Vol. iii. 300 ff., especially 303**. (المؤلف).

(3) بالتأكيد، أثناء الممارسة العملية سوف نواصل الحديث عن الكسور باعتبارها (فلنقل) أكبر من أو أصغر من (1)، ونعني بذلك أنها أكبر من أو أصغر من 1/ 1. وطالما كان مفهومًا أن النسبة 1/ 1 تختلف عن العدد الأصلي 1، فمن غير الضروري التحذلق في التأكيد على الاختلاف. (المؤلف).

(4) نسبة إلى عالم الرياضيات الألماني جورج كانتور (1845 – 1918)، مؤسس نظرية المجموعات. وكثيرًا ما يطلق على المجموعات أنها مجموعات كانتورية. (المترجم).

(5) من أجل الحديث على نحو محدد صارم، فهذه العبارة وكذلك تلك اللاحقة حتى نهاية الفقرة، تتضمن ما ندعوه «بمسلمة اللا نهاية»، تلك التي سوف نناقشها في الفصل اللاحق. (المؤلف).

(6) يوليوس فيلهلم ريتشارد ديدكايند: عالم رياضيات ألماني (1831 – 1916). (المترجم).

Stetigkeit und irrationals Zahlen, 2nd edition, Brunswick, 1892. (المؤلف).

(7) الكسور الحقيقية: هي كل الكسور التي مقاماتها أكبر من بسطها. (المترجم).

(8) من أجل بيان أكثر كمالا عن موضوع المقاطع والعلاقات الديدكايندية، انظر **Principia Mathematica, vol. ii. *210 – 214**.

من أجل معالجة أكثر كمالًا للأعداد الحقيقية، انظر نفس المرجع **ibid., Vol. iii. *310 ff., and Principles of Mathematics, chaps. xxxiii. And xxxiv**. (المترجم).

(9) ويليام كنجدون كليفورد: عالم رياضيات بريطاني (1845 – 1879). (المترجم).

(10) **Cf. Principles of Mathematics, s360, p. 379**. (المؤلف).

❊ ❊ ❊

الفصل الثامن

الأعداد الأصلية غير المتناهية

في الفصل الثالث قمنا بتطبيق تعريف الأعداد الأصلية التي زودنا بتعريفها في الفصل الثاني على الأعداد المتناهية، أي على الأعداد الطبيعية المعتادة. تلك الأعداد التي أسبغنا عليها اسم «الأعداد الاستقرائية»؛ لأننا وجدنا أنها يجب أن تُعرَّف باعتبارها الأعداد التي تطيع الاستقراء الرياضي البادئ من 0. لكننا لم نتفكر بعد في التجمعات التي لا تحظى بعدد حدود استقرائي، ولم نتساءل عمَّ إذا كان من الوارد أن نقول عن مثل هذه التجمعات أن لها عددًا على الإطلاق. هذه معضلة عتيقة، وقد حُلّت في أيامنا الحالية بشكل رئيس من قِبل جورج كانتور. سنحاول في هذا الفصل شرح نظرية فوق المتناهي **transfinite** أو الأعداد الأصلية غير المتناهية حيث إنها نتجت عن مزيج بين اكتشافاته وتلك التي كانت لفريجه في النظرية المنطقية للأعداد.

من غير الممكن الذهاب إلى تأكيد وجود أي تجمعات غير متناهية في العالم في الحقيقة. افتراض وجودها هو ما نطلق عليه «مسلمة اللا نهاية». على الرغم من الطرق المتنوعة التي تطرح نفسها، وعن طريقها

قد نأمل في البرهنة على هذه المسلمة، إلا أن هناك ما يدعو للخوف من أن تكون جميعها وهمية، وألا يكون هناك أي سبب منطقي قاطع للاعتقاد في صحتها. في نفس الوقت، لا يوجد بالتأكيد أي سبب منطقي ينهض ضد التجمعات غير المتناهية، ولذلك هناك في المنطق ما يبرر لنا تقصي الفرضية الذاهبة إلى أن هناك مثل هذه التجمعات. لأجل أهدافنا الحالية فالصيغة العملية لهذه الفرضية تتمثل في افتراض أنه لو كان n أي عدد استقرائي، فمن ثم n لا تساوي n + 1 . تبزغ تفاصيل دقيقة مختلفة حال تعريفنا لصيغة افتراضنا هذه، تلك الصيغة التي تجزم بوجود تجمعات غير متناهية؛ لكننا سوف نتركها خارج حسابنا حتى فصل لاحق، نأتي فيه على التفكر في مسلمة اللا نهاية بذاتها. في الوقت الراهن سوف نفترض فقط أنه لو كان n عددًا استقرائيًّا، فإن n لا تساوي n + 1. هذا مضمن في فرضيات بيانو، لا يحظى أي عددين بنفس التابع؛ حيث إنه إذا كانت n = n + 1، فمن ثم سوف تحظى n – 1 وn بنفس التابع، الذي هو n . لذلك فنحن لا نفترض أي شيء لم يكن مضمنًا في فرضيات بيانو الأولية.

دعنا الآن نهتم بتجمع الأعداد الاستقرائية نفسه. هذه فئة محددة على نحو جيد مثالي. في المقام الأول، العدد الأصلي هو مجموعة فئات مشابهة كلها لبعضها البعض وغير مشابهة لأي شيء آخر باستثناء بعضها. من ثم نُعرّف «الأعداد الاستقرائية» باعتبارها تلك التي تقع بين الأعداد الأصلية التي تنتمي إلى خَلَف 0 بالنسبة إلى علاقةn إلى n + 1 ، أي تلك التي تمتلك كل خاصية مملوكة بواسطة 0 وبواسطة

توابع كل الملاك، المقصود «بتابع» n العدد n + 1 . على ذلك ففئة «الأعداد الاستقرائية» محددة على نحو مثالي. من خلال تعريفنا العام للأعداد الأصلية، فإن عدد الحدود في فئة للأعداد الاستقرائية يجب أن يكون مُعرَّفًا باعتباره «كل تلك الفئات المشابهة لفئة الأعداد الاستقرائية»، أي أن مجموعة الفئات هذه هي عدد الأعداد الاستقرائية بحسب تعريفنا.

الآن بات من السهل إدراك أن هذا العدد ليس واحدًا من الأعداد الاستقرائية. لو كانت n أي عدد استقرائي، فإن عدد الأعداد من 0 إلى n (وكلاهما مضمن) هو n + 1 ؛ لذلك فالعدد الكلي للأعداد الاستقرائية هو أكبر من n ، بغض النظر عن العدد الاستقرائي الذي قد يكونه n . إذا ما نظمنا الأعداد الاستقرائية في سلسلة بحسب المقدار، فليس لهذه السلسلة حد أخير؛ لكن n هو عدد استقرائي، تحظى كل سلسلة للنطاق الخاص بها n حد بحد أخير، من السهل إثبات ذلك. تتضاعف مثل هذه الاختلافات بشكل عفوي. على ذلك فعدد الأعداد الاستقرائية هو عدد جديد مختلف عنها جميعًا، لا يمتلك كل الخواص الاستقرائية. قد يحدث أن يكون لـ «0» خاصية معينة، وأن يكون لـ n + 1 الخاصية كذلك إذا كانت لدى n ، إلا أن هذا العدد الجديد لا يحظى بها. تمثلت الصعوبات التي أدت إلى تأخير نظرية الأعداد غير المتناهية طويلًا جدًّا بشكل كبير في الحقيقة التي مفادها أن بعض الخواص الاستقرائية –على الأقل– قد صدر حكمًا خاطئًا بشأنها باعتبار أن من اللازم انتماؤها لكل الأعداد؛ في الحقيقة، كان من المعتقد أنه

من غير الممكن نكرانها دون أن يؤدي ذلك إلى تناقض. تتمثل الخطوة الأولى في فهم الأعداد غير المتناهية في إدراك خطأ هذا المنظور.

يكمن الاختلاف الأكثر إدهاشًا وإثارةً للدهشة بين العدد الاستقرائي وهذا العدد الجديد في أن هذا العدد الجديد لا يتغير بإضافة 1 أو بطرح 1 أو بالمضاعفة أو بالتنصيف أو بأي عدد من العمليات الأخرى التي نظن بالضرورة أنها تجعل عددًا أكبر أو أصغر. استخدم كانتور حقيقة عدم التغير بإضافة 1 من أجل تعريف ما دعاه بالأعداد الأصلية «فوق المتناهية»؛ لكن لأجل أسباب مختلفة -بعضها سوف يظهر حالما نمضي قدمًا- من الأفضل تعريف عدد أصلي غير متناهٍ باعتباره واحدًا لا يمتلك كل الخواص الاستقرائية، أي ببساطة باعتباره واحد ليس عددًا استقرائيًّا. مع ذلك، فخاصية عدم التغير بإضافة 1 هي خاصية هامة، وعلينا أن نمعن النظر فيها لبعض الوقت.

كي نقول إن لفئة عدد لا يتبدل بإضافة 1 هو نفس الشيء كأن نقول إننا لو أخذنا حد x لا ينتمي إلى الفئة، يمكننا العثور على علاقة واحد إلى واحد، نطاقها هو الفئة، ونحصل على نطاقها العكسي بإضافة x إلى الفئة. حيث إنه في هذه الحالة، تكون الفئة مشابهة لمجموع نفسها والحد x ، أي مشابهة لفئة تحظى بحد واحد زائد؛ لذلك فلها نفس العدد تمامًا كفئة مع حد واحد إضافي، لذلك إذا كانت n هي هذا العدد، فإن $n = n + 1$. في هذه الحالة، سوف نحظى كذلك بـ $n = n - 1$ ، أي سوف تكون هناك علاقات واحد إلى واحد يتكون نطاقها من الفئة بمجملها ويتكون نطاقها العكسي من حد واحد فقط

أقل من الفئة بمجملها. من الممكن تبيان أن الحالات التي يحدث فيها هذا مماثلة لتلك الحالات الأكثر عمومية بشكل واضح، والتي من الممكن فيها وضع جزء ما (أقل من الكل) في علاقة واحد إلى واحد مع الكل. عندما يكون من الوارد القيام بهذا، فإنه يقال عن دالة الارتباط التي من خلالها يمكن القيام بذلك بأنها «تعكس» الفئة بمجملها في جزء من نفسها؛ لهذا السبب سوف تدعى مثل هذه الفئات «انعكاسية **reflexive**». على ذلك:

الفئة «الانعكاسية» هي تلك المشابهة لجزء حقيقي من نفسها. («جزء حقيقي **proper part**» هو جزء أقل من الكل).

عدد أصلي «انعكاسي» هو العدد الأصلي لفئة انعكاسية.

علينا الآن أن نتفكر في هذه الخاصية للانعكاسية.

أحد الأمثلة الأكثر إدهاشًا «للانعكاس» مثال رويس[1] التوضيحي للخريطة: تخيل رويس أنه قد اتُّخذ قرار بعمل خريطة لإنجلترا على جزء من سطح إنجلترا. تحظى هذه الخريطة بتقابل واحد إلى واحد مثالي مع أصلها، إذا كانت دقيقة؛ لذلك فخريطتنا -التي هي جزء- هي على علاقة واحد إلى واحد مع الكل، ويجب أن تحتوي على نفس عدد النقاط مثلها كمثل الكل، ويجب أن يكون هذا العدد بذلك عددًا انعكاسيًّا. كان رويس مهتمًّا بالحقيقة الذاهبة إلى أن الخريطة -لو كانت صحيحة- يجب أن تحتوي على خريطة للخريطة، والتي بدورها يجب أن تحتوي على خريطة للخريطة للخريطة، وهكذا إلى ما لا نهاية. هذه النقطة مثيرة، لكننا لسنا بحاجة إلى أن تشغلنا في الوقت الراهن. في

الحقيقة، سوف يكون من الأفضل لو عبرنا الأمثلة الصورية نحو ما يعد محددًا بشكل أكثر كمالًا، ولأجل هذا الهدف لا يمكننا أن نفعل ما هو أفضل من النظر في سلسلة – العدد نفسها.

تنحصر علاقة n إلى n + 1 في الأعداد الاستقرائية، وهي علاقة (واحد إلى واحد)، تحظى بكل الأعداد الاستقرائية كنطاق لها، كما تحظى بها جميعًا كنطاق عكسي مع استثناء «0». على ذلك ففئة الأعداد الاستقرائية بمجملها مشابهة لما أصبحت عليه نفس الفئة عند إسقاط «0». يترتب على ذلك كونها فئة «انعكاسية» بحسب التعريف، وعدد حدودها هو عدد «انعكاسي». من جديد، علاقة n بـ 2n هي علاقة محصورة في الأعداد الاستقرائية وهي علاقة واحد إلى واحد، تحظى بكل الأعداد الاستقرائية في نطاقها وبالأعداد الاستقرائية الزوجية فقط في نطاقها العكسي. بذلك فالعدد الكلي للأعداد الاستقرائية هو نفسه عدد الأعداد الاستقرائية الزوجية. استخدم ليبنتز[2] (وآخرون كثر) هذه الخاصية كبرهان على أن الأعداد غير المتناهية هي مستحيلة، كان هناك ظن أن في «تساوي الجزء مع الكل» تناقض ذاتي. لكن هذه واحدة من العبارات التي تعتمد في معقوليتها على الغموض غير المدرك: لكلمة «تساوٍ» معانٍ عديدة، لكن لو اعتبرنا أن المقصود بها ما كنا قد أطلقنا عليه «تشابه»، فلا تناقض هناك، حيث إن التجمع غير المتناهي من الممكن أن يحظى على نحو جيد مثالي بأجزاء مشابهة لنفسه. أولئك الذين يعتبرون هذا كمستحيل قد عزوا بشكل غير واعٍ للأعداد في عمومها –كقاعدة– خواصَّ، لا يمكن البرهنة عليها إلا بواسطة الاستقراء الرياضي، وتجعلنا

ألفتنا معها نعتبرها على نحو خاطئ صحيحة فيما وراء منطقة النهاية (التناهي).

عندما نستطيع «عكس» فئة في جزء من نفسها، فإن نفس الانعكاس سوف يعكس بالضرورة ذلك الجزء في جزء أصغر وهكذا إلى ما لا نهاية. على سبيل المثال، يمكننا عكس -كما رأينا للتو- كل الأعداد الاستقرائية في الأعداد الزوجية؛ يمكننا بواسطة نفس العلاقة (علاقة **n** إلى **2n**) عكس الأعداد الزوجية في مضاعفات الـ **4**، وهذه في مضاعفات الـ **8**، وهكذا دواليك. هذا نظير مجرد لمعضلة رويس الخاصة بالخريطة. الأعداد الزوجية هي «خريطة» كل الأعداد الاستقرائية؛ مضاعفات الـ **4** هي خريطة الخريطة، مضاعفات الـ **8** هي خريطة خريطة الخريطة؛ وهكذا. إذا ما كنا قد طبقنا نفس العملية على علاقة **n** إلى **n + 1**، لكانت «خريطتنا» مكونة من كل الأعداد الاستقرائية باستثناء **0**؛ ولكانت خريطة الخريطة مكونة من كل الأعداد ابتداءً من **2** قدمًا، ولكانت خريطة خريطة الخريطة مكونة من كل الأعداد ابتداء من **3** قدمًا؛ وهكذا. الاستخدام الرئيس لمثل هذه الأمثلة التوضيحية هو من أجل أن نألف فكرة الفئات الانعكاسية، بذلك قد تترجم الفرضيات الحسابية المتناقضة ظاهريًّا بيسر إلى لغة للانعكاسات والفئات، بحيث تكون مساحات التناقض أقل كثيرًا.

سوف يكون من النافع التزويد بتعريف للعدد الخاص بالأعداد الاستقرائية الأصلية. لأجل هذا الهدف سوف نُعرّف أولًا نوع السلاسل التي تُضرب الأعداد الاستقرائية الأصلية المرتبة بحسب المقدار كمثال

لها. اهتممنا بالفعل بنوع السلاسل المدعوة «بالمتواليات» في الفصل الأول. هي سلسلة من الممكن توليدها بواسطة علاقة التعاقب: يجب أن يحظى كل عنصر في السلسلة بتابع، لكن يجب أن يكون هناك واحد فقط ليس له سلف، ويجب أن يكون كل عنصر في السلسلة في خَلَف هذا الحد وفقًا لعلاقة «السلف المباشر». من الممكن جمع هذه السمات في التعريف التالي[3]:

«المتوالية» هي علاقة (واحد إلى واحد) على النحو الذي يكون فيه هناك حد واحد فقط منتم إلى النطاق لكنه غير منتمٍ إلى النطاق العكسي، والنطاق مطابق لخَلَف هذا الحد الواحد.

من السهل إدراك أن المتوالية –كما هي معرّفة– تحقق مسلمات بيانو الخمس. الحد المنتمي إلى النطاق، لكنه لا ينتمي إلى النطاق العكسي سوف يكون ما دعاه بالـ«0»، الحد الذي سوف يكون لحد علاقة واحد إلى واحد معه سوف يكون «تابع» الحد؛ وسوف يكون نطاق علاقة الواحد إلى واحد ما دعاه «بالعدد». بالنظر في مسلماته الخمسة بدورها، يصبح لدينا التأويلات التالية:

1 – «0 هو عدد» تصبح: «العنصر من النطاق والذي هو ليس عنصرًا في النطاق العكسي هو عنصر نطاق». هذا مكافئ لوجود مثل هذا العنصر الذي أقررنا به في تعريفنا. سوف ندعو هذا العنصر «الحد الأول».

2 – «تابع أي عدد هو عدد» تصبح: «الحد الذي للعنصر موضع البحث في النطاق العلاقة موضع التساؤل معه هو عنصر في النطاق

كذلك». من الممكن البرهنة على هذا كالتالي: من التعريف، كل عنصر في النطاق هو عنصر في خَلَف الحد الأول؛ على ذلك يجب أن يكون تابع عنصر في النطاق، عنصرًا في خَلَف الحد الأول (لأن خَلَف حد يحتوي دائمًا على تابعيه الخاصين به، من خلال التعريف العام للخَلَف)، وبذلك فهو عنصر في النطاق؛ لأنه من التعريف يكون خَلَف الحد الأول مثله كمثل النطاق.

3 – «لا يحظى أي عددين بنفس التابع». لا يقول هذا إلا أن العلاقة هي علاقة واحد إلى عديد وهي كذلك من التعريف. (كونها علاقة واحد إلى واحد).

4 – «الـ «0» ليس تابعًا لأي عدد». تصبح: «الحد الأول ليس عنصرًا في النطاق العكسي» وهي من جديد نتيجة مباشرة للتعريف.

5 – هذا استقراء رياضي، تصبح: «ينتمي كل عنصر في النطاق إلى خَلَف الحد الأول» وهو ما كان جزء من تعريفنا.

على ذلك؛ فالمتواليات كما عرّفناها تحظى بالخواص الخمس الصورية التي استنبط منها بيانو الحساب. من السهل تبيان أن متواليتين هما «متشابهتان» بالمعنى الذي عرّفنا به تشابه العلاقات في الفصل السادس. يمكننا بالطبع اشتقاق علاقة متسلسلة من علاقة (الواحد إلى واحد)، تلك التي عرّفنا بها المتوالية: المنهج المستخدم هو ذلك المشروح في الفصل الرابع، والعلاقة هي علاقة حد إلى عنصر في خَلَفه الحقيقي وفق علاقة الواحد إلى واحد الأصلية.

علاقات من نوع غير متناظر ومتعدية تُوّلد متواليات متشابهة، لنفس الأسباب التي تجعل علاقات الواحد إلى واحد المتقابلة متشابهة. فئة كل مُوّلدات المتواليات المتعدية هي «عدد تسلسلي» بالمعنى الوارد في الفصل السادس؛ في الحقيقة هو أصغر الأعداد التسلسلية غير المتناهية، العدد الذي أصبغ عليه كانتور اسم ω، ومن خلاله صنع شهرته.

لكننا معنيون في هذه اللحظة بالأعداد الأصلية. بما أن متواليتين اثنتين هما علاقتان متشابهتان، يستتبع ذلك أن نطاقيهما (أو حقليهما اللذين هما مماثلان لنطاقيهما) هما فئتان متشابهتان. تشكل نطاقات المتواليات عددًا أصليًّا، حيث إنه من السهل تبيان أن كل فئة مشابهة لنطاق متوالية هي نفسها نطاق متوالية. هذا العدد الأصلي هو أصغر الأعداد الأصلية غير المتناهية؛ إنه ذلك العدد الذي اقتنص له كانتور ألف اللغة العبرية مضيفًا له 0 كلاحق؛ كي يميزه عن الأعداد الأصلية غير المتناهية الأكبر، تلك التي تحظى بلواحق أخرى. على ذلك يكون اسم أصغر الأعداد الأصلية غير المتناهية هو $\aleph_0$.

أن نقول إن لفئة $\aleph_0$ حدًّا، مماثل تمامًا لأن نقول إنها عنصر في $\aleph_0$، وهو مماثل تمامًا لأن نقول إنه من الممكن تنظيم عناصر الفئة في متوالية. من الواضح أن أي متوالية تبقى متوالية إذا ما أسقطنا عددًا متناهيًا من الحدود منها، أو إذا ما أسقطنا حدًّا من بعد حد أو إذا ما أسقطناها كلها باستثناء كل عاشر حد أو باستثناء حد كل مائة. عمليات تنحيف المتوالية هذه لا تجعلها تتوقف عن أن تكون متوالية، وبذلك لا تخفض من عدد حدودها، تلك التي تظل $\aleph_0$. في الحقيقة، كل تشكيلة من المتوالية هي

متوالية إذا لم يكن لها حد أخير، مهما كان توزيعها مشتتًا. فلتأخذ على سبيل المثال الأعداد الاستقرائية في صيغة n^n أو n^{n^n}. مثل هذه الأعداد تنمو على نحو متباعد ومخلخل في الأجزاء العليا من سلسلة الأعداد، ومع ذلك لا يزال هناك العديد منها مثلها كمثل الأعداد الاستقرائية بالكامل، تحديدًا $\aleph_0$.

في المقابل، يمكننا إضافة حدود إلى الأعداد الاستقرائية دون أن نزيد من عددها. فلتأخذ النسب على سبيل المثال. قد يميل الواحد إلى التفكير في أنه يجب أن تكون هناك نسب أكثر كثيرًا من الأعداد الصحيحة، حيث إن النسب التي مقامها 1 تقابل الأعداد الصحيحة وتبدو كجزء متناهي الصغر فقط من النسب. لكن في الحقيقة الفعلية، عدد النسب (الكسور) هو نفس عدد الأعداد الاستقرائية بالضبط، تحديدًا $\aleph_0$. من السهل إدراك هذا عن طريق تنظيم النسب في سلسلة على النهج التالي: إذا كان مجموع البسط والمقام في أحدها أقل من الآخر، ضع صاحب ذلك المجموع الأقل قبل الآخر؛ إذا كان مجموعهما متساويًا في الاثنين، ضع أولًا ذلك الذي بسطه أصغر. يزودنا هذا بالسلسلة:

$$1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 4, \frac{1}{5}, \ldots$$

هذه السلسلة هي متوالية، وتقع فيها كل النسب عاجلًا أو آجلًا. هكذا، يمكننا تنظيم كل النسب في متوالية، وعددها لذلك هو $\aleph_0$.

ليس هذا هو الحال، مع أن لكل التجمعات غير المتناهية $\aleph_0$ حد. عدد الأعداد الحقيقية على سبيل المثال أكبر من $\aleph_0$ ؛ في الحقيقة هو $2^{\aleph_0}$، وليس من الصعب البرهنة على أن 2^n أكبر من n حتى عندما تكون

n غير متناهية. أسهل طريقة للبرهنة على هذا هي في البرهنة أولًا على أنه إذا كانت لفئة n عنصرٌ، فإنها تحتوي على 2^n فئة فرعية – بمعنى آخر أن هناك 2^n طريقة لاختيار بعض عناصرها (بما في ذلك الحالات المتطرفة التي نختار فيها الكل أو لا شيء)؛ وفي البرهنة ثانيًا على أن عدد الفئات الفرعية المحتواة في فئة هو دائمًا أكبر من عدد عناصر الفئة. من بين هاتين الفرضيتين، فالأولى مألوفة في حالة الأعداد المتناهية ومن غير الصعب مدها على الأعداد غير المتناهية. البرهان الثاني سهل جدًّا وتنويري للغاية، لذلك سوف نشير إليه:

في المقام الأول من الواضح أن عدد الفئات الفرعية لفئة ما (فلنقل α) هو على الأقل في نفس قدر عدد العناصر، حيث إن كل عنصر يشكل فئة فرعية، وبذلك يكون لدينا ارتباط بين كل العناصر مع بعض الفئات الفرعية. يستتبع ذلك أنه لو كان عدد الفئات الفرعية غير مساوٍ لعدد العناصر، فإنه يجب أن يكون أكبر. الآن من السهل البرهنة على أنَّ العدد غير متساوٍ عن طريق تبيان أنه في أي علاقة (واحد إلى واحد) نطاقها هو العناصر ونطاقها العكسي محتوًى بين مجموعة العناصر الفرعية، يجب أن تكون هناك فئة فرعية على الأقل لا تنتمي إلى النطاق العكسي. البرهان هو على النحو التالي[4]: عندما يكون ارتباط (واحد إلى واحد) R متحققًا بين كل عناصر α وبعض الفئات الفرعية، قد يحدث أن عنصرًا ما x في ارتباط مع الفئة الفرعية التي هو عنصر فيها؛ أو من جديد قد يحدث أن x في ارتباط مع فئة فرعية، هو ليس عنصرًا فيها. دعنا نشكل الفئة بمجملها (فلنقل β) لتلك العناصر x التي في ارتباط

مع الفئات الفرعية التي هي ليست عناصر فيها. هذه فئة فرعية لـ α، وهي ليست في ارتباط مع أي عنصر لـ α. بأخذ عناصر β في البداية، كل منها (من تعريف β) في ارتباط مع فئة فرعية ما، هي ليست عنصرًا فيها، وهي لذلك ليست في ارتباط مع β. بأخذ الحدود التي ليست عناصر في β تاليًا، كل منها (من تعريف β) في ارتباط مع فئة فرعية ما، هي عنصر فيها، ولذلك من جديد هي ليست في ارتباط مع β. على ذلك لا يوجد أي عنصر لـ α في ارتباط مع β. بما أن R قد كانت أي ارتباط واحد إلى واحد لكل العناصر مع بعض الفئات الفرعية، يستتبع ذلك أنه لا وجود لارتباط لكل العناصر مع كل الفئات الفرعية. البرهان غير معنيٍّ إذا ما كانت β لا تحظى بأي عناصر: كل ما يحدث في تلك الحالة أن تلك الفئة الفرعية التي تبين هجرانها هي فئة خالية. هكذا، لا يساوي عدد الفئات الفرعية عدد العناصر في أي حالة، وبذلك ومما قلناه سابقًا يتضح أنه أكبر. بجمع هذا مع الفرضية الذاهبة إلى أنه لو كان n هو عدد العناصر فإن 2^n هو عدد الفئات الفرعية، تصبح لدينا النظرية الذاهبة إلى أن 2^n أكبر دائمًا من n ، حتى عندما تكون n غير متناهية.

يستتبع هذه الفرضية أنه لا وجود لحد أقصى للأعداد الأصلية غير المتناهية، مهما قد يكون كبر العدد غير المتناهي n ، سوف يظل 2^n أكبر. حساب الأعداد غير المتناهية (اللا نهائية) مثير للدهشة نوعًا ما إلى أن يصبح الواحد معتادا عليه. لدينا، على سبيل المثال:

$$\aleph_0 + 1 = \aleph_0$$

$$\aleph_0 + n = \aleph_0$$

حيث n هو أي عدد استقرائي

$$\aleph_0^{\,2} = \aleph_0$$

(يترتب هذا على حالات النسب، ذلك أنه بما أن النسبة تحدد بواسطة زوجين من الأعداد الاستقرائية، فمن السهل إدراك أن عدد النسب هو مربع عدد الأعداد الاستقرائية أي أنه $\aleph_0^{\,2}$ ، لكننا رأينا أنه كذلك $\aleph_0$.

$$\aleph_0^{\,n} = \aleph_0$$

حيث n هو أي عدد استقرائي

يترتب على أن $\aleph_0^{\,n} = \aleph_0$ عن طريق الاستقراء؛

أنه إذا كان $\aleph_0^{\,n} = \aleph_0$

إذا $\aleph_0^{\,n+1} = \aleph_0$

لكن $2^{\aleph_0} > \aleph_0$

في الحقيقة كما سوف نرى لاحقًا، $2^{\aleph_0}$ هو عدد هام للغاية، تحديدًا، عدد الحدود في سلسلة تحظى «بالاتصال» بالمعنى الذي استخدمت به هذه الكلمة من قِبل كانتور. بفرض أن المكان والزمن متصلان بهذا المعنى (كما نفعل في المعتاد في الهندسة التحليلية وفي الكينماتيكا) سوف يكون هذا هو عدد النقاط في المكان أو اللحظات في الزمن؛ وسوف يكون كذلك عدد النقاط في أي جزء متناهٍ من المكان، سواء كانت خطًّا أو مساحة أو حجمًا. بعد $\aleph_0$ ، تأتي $2^{\aleph_0}$ باعتبارها الأكثر أهمية وإثارة في الأعداد الأصلية غير المتناهية.

على الرغم من أن الإضافة والضرب ممكنان دائمًا بالنسبة للأعداد

الأصلية غير المتناهية، إلا أن الطرح والقسمة لم يعودا يوفران نتائج محددة، ولذلك لا يمكن توظيفهما كما هما موظفان في الحساب الابتدائي.

فلننظر في أمر الطرح، لنبدأ به: طالما كان العدد المطروح متناهيًا، فكل شيء يسير على ما يرام، لو كان العدد الآخر انعكاسيًّا، يبقى بلا تغيير. على ذلك $\aleph_0 - n = \aleph_0$ لو كان n متناهيًا؛ إلى الآن يوفر الطرح نتيجة محددة على نحو مثالي. لكن فيما عدا ذلك، عندما نطرح $\aleph_0$ من نفسه؛ قد نحصل على أي نتيجة، من 0 حتى $\aleph_0$. من السهل إدراك هذا عن طريق الأمثلة. استبعد التجمعات التالية لـ $\aleph_0$ من الأعداد الاستقرائية:

1 – كل الأعداد الاستقرائية – الباقي، صفر.

2 – كل الأعداد الاستقرائية من n قدمًا – الباقي، الأعداد من 0 إلى $n - 1$ ، عددها جميعا n حد.

3 – كل الأعداد الفردية – الباقي، كل الأعداد الزوجية، عددها $\aleph_0$ حد.

كل هذه طرق مختلفة لطرح $\aleph_0$ من $\aleph_0$ ، وكلها تعطي نتائج مختلفة.

بالنسبة للقسمة، نحصل على نتائج مشابهة جدًّا، تترتب على حقيقة أن $\aleph_0$ لا تتغير عندما تُضرب في 2 أو في 3 أو في أي عدد متناهٍ n أو في $\aleph_0$. يستتبع ذلك أنه عند قسمة $\aleph_0$ على $\aleph_0$ قد نحصل على أي قيمة من 1 حتى $\aleph_0$.

نتيجة ذلك اللبس الناتج عن الطرح والقسمة لا يمكن مدهما ليطبقا

على الأعداد غير المتناهية. يواصل الجمع والضرب وعمليات الرفع للأسس على نحو مُرْضٍ، لكن العمليات العكسية -الطرح والقسمة واستخلاص الجذور- ملبسة والمفاهيم التي تعتمد عليها تفشل عندما تكون الأعداد غير المتناهية معنية.

كانت السمة التي عرّفنا بها التناهي هي الاستقراء الرياضي، أي أننا عرّفنا العدد باعتباره متناهيًا عند إطاعته للاستقراء الرياضي البادئ من 0، وعرّفنا فئة باعتبارها متناهية عندما يكون عددها متناهيًا. يثمر هذا التعريف عن نوع النتائج التي ينبغي أن يثمر عنها تعريف، تحديدًا أن الأعداد المتناهية هي تلك التي تقع في سلاسل الأعداد المعتادة 0, 1, 2, 3,... لكن في الفصل الحالي الأعداد غير المتناهية التي ناقشناها لم تكن غير استقرائية فقط: بل كانت انعكاسية كذلك. استخدم كانتور الانعكاسية باعتبارها تعريف غير المتناهي، واعتقد في أنها مكافئة للا استقرائية؛ ما يعني أنه اعتُقد في أن كل فئة وكل عدد أصلي هو إما استقرائي وإما انعكاسي. قد يكون هذا صحيحًا، وقد يكون قابلًا جدًّا للبرهنة عليه؛ لكن البراهين المقدمة من قِبل كانتور وآخرين (بما فيهم المؤلف الحالي في أيام سابقة) خاطئة، لأسباب سوف تُشرح عندما نصل إلى التفكر في «مسلمة التضاعف multiplicative axiom». في الوقت الراهن من غير المعروف ما إذا كانت هناك فئات وأعداد أصلية ليست انعكاسية وليست استقرائية كذلك. إذا كان n مثل هذا العدد الأصلي، فلا يجب أن نحظى بـ n = n + 1، لكن n لن تكون أحد «الأعداد الطبيعية»، وسوف تكون فاقدة لبعض الخصائص الاستقرائية. كل الفئات غير المتناهية المعروفة

والأعداد الأصلية المعروفة انعكاسية؛ لكن في الوقت الراهن من الجيد أن نحتفظ بأفق مفتوح نحو ما إذا كان هناك نماذج غير معروفة إلى الآن لفئات ولأعداد أصلية ليست انعكاسية وليست استقرائية. إبان ذلك، نتبنى التعريفات التالية:

فئة متناهية أو عدد أصلي متناهٍ هي تلك الاستقرائية أو هو ذلك الاستقرائي.

فئة غير متناهية أو عدد أصلي غير متناهٍ هي تلك غير الاستقرائية أو هو ذلك غير الاستقرائي. كل الفئات الانعكاسية والأعداد الأصلية الانعكاسية غير متناهية؛ لكنه من غير المعروف في الوقت الحالي ما إذا كانت كل الفئات والأعداد الأصلية غير المتناهية انعكاسية. سوف نعود لهذا الموضوع في الفصل الثاني عشر.

* * *

الهوامش:

(1) يوشيا رويس: فيلسوف ومنطقي أمريكي (1855 – 1916)، مؤسس المثالية الأمريكية، له إسهاماته في الجبر البولياني وفلسفة الرياضيات. (المترجم).

(2) جوتفريد ليبنتز: فيلسوف وعالم رياضيات وعالم طبيعة ألماني (1646 – 1716). (المترجم).

(3) **Cf Principia Mathematica, vol. ii. *123**. (المؤلف).

(4) البرهان مأخوذ من كانتور، مع بعض التبسيط، انظر:

Jahresbericht der Deutsche Mathematiker – Vereinigung, i. (1892), p. 77. (المؤلف).

الفصل التاسع

السلاسل غير المتناهية والأعداد الترتيبية

قد تُعرّف «السلسلة غير المتناهية» باعتبارها سلسلة، حقلها فئة غير متناهية. كنا قد حظينا بالفعل بفرصة التفكر في نوع واحد من السلاسل غير المتناهية، تحديدًا المتواليات. في هذا الفصل سوف نتفكر في الموضوع بشكل أكثر عمومية.

أكثر خاصية جديرة بالذكر تتعلق بسلسلة غير متناهية أنه من الممكن تغيير عددها التسلسلي بمجرد إعادة تنظيم حدودها. في هذا الخصوص هناك تعارض مؤكد بين العدد الأصلي والأعداد التسلسلية. من الممكن الحفاظ على العدد الأصلي لسلسلة انعكاسية بلا تغيير على الرغم من إضافة حدود لها؛ على الجانب الآخر، من الممكن تغيير العدد التسلسلي لسلسلة دون إضافة أو استبعاد أي حدود، عن طريق مجرد إعادة التنظيم. في نفس الوقت، في حالة أي سلسلة غير متناهية من الممكن كذلك -كما هو الحال مع الأعداد الأصلية- إضافة حدود دون تغيير العدد التسلسلي: يعتمد كل شيء على الطريقة التي يُضاف بها.

من أجل جعل الأمور واضحة، سيكون من الأفضل أن نبدأ بأمثلة. دعنا نتفكر أولًا في أنواع مختلفة متنوعة، من الممكن أن تُستولد من الأعداد الاستقرائية المنظمة وفق مخططات متنوعة. نبدأ بالسلسلة:

$$1, 2, 3, 4, \ldots n, \ldots,$$

كما رأينا سابقًا بالفعل، تمثل هذه السلسلة أصغر الأعداد التسلسلية غير المتناهية، النوع الذي دعاه كانتور ω. دعنا نمضي نحو تنحيف هذه السلسلة عن طريق القيام على نحو متكرر بعملية استبعاد العدد الزوجي الأول الذي نقابله إلى نهاية السلسلة. بذلك نحصل على السلاسل المتنوعة التالية في تتابع:

$$1, 3, 4, 5, \ldots n, \ldots 2,$$

$$1, 3, 5, 6, \ldots n + 1, \ldots 2, 4,$$

$$1, 3, 5, 7, \ldots n + 2, \ldots 2, 4, 6,$$

وهكذا دواليك، إذا ما تخيلنا أن هذه العملية قد تم القيام بها لأبعد مدى ممكن، نصل في النهاية إلى السلسلة:

$$1, 3, 5, 7, \ldots 2n + 1, \ldots 2, 4, 6, 8, \ldots 2n, \ldots$$

وفيها نحظى في البداية بكل الأعداد الفردية، ومن ثم كل الأعداد الزوجية.

الأعداد التسلسلية لهذه السلاسل المتنوعة هي:

ω 2 ,..., ω+3, ω+2, ω+1 كل من هذه الأعداد «أكبر» من أي من أسلافه، بالمعنى التالي:

يقال إن عددًا تسلسليًّا «أكبر» من آخر إذا كانت أي سلسلة تحظى بالعدد الأول تحتوي على جزء يحظى بالعدد الثاني، لكن لا سلسلة تحظى بالعدد الثاني تحتوي على جزء يحظى بالعدد الأول.

إذا ما قارنا السلسلتين:

$$1, 2, 3, 4, \ldots n, \ldots$$

$$1, 3, 4, 5, \ldots n + 1, \ldots 2,$$

نرى أن الأولى مشابهة للجزء من الثانية الذي يغفل الحد الأخير، تحديدًا العدد 2، لكن الثانية غير مشابهة لأي جزء من الأولى. (هذا واضح لكن من السهل تبيانه) على ذلك للسلسلة الثانية عدد تسلسليٌّ أكبر من الأولى بحسب التعريف – أي أن $\omega + 1$ أكبر من ω. لكننا إذا ما أضفنا حدًّا في بداية المتوالية بدلًا من نهايتها، لم نزل نحظى بمتوالية. هكذا $1 + \omega = \omega$ على ذلك فإن $\omega + 1$ لا تساوي $1 + \omega$ هذه خاصية مميزة لحساب – العلاقة بشكل عام: إذا كان كل من μ و ν عددًا – علاقة، فالقاعدة العامة هي أن $\mu + \nu$ لا يساوي $\nu + \mu$. حالة الأعداد الترتيبية المتناهية التي فيها تساوٍ هي استثنائية.

السلسلة التي بلغناها في النهاية للتو تتكون من كل الأعداد الفردية في البداية، ومن ثم كل الأعداد الزوجية، وعددها التسلسلي ω 2. هذا العدد أكبر من ω أو $\omega + n$ حيث n متناهية. من الملاحظ أنه اتساقٌ مع التعريف العام للترتيب، كل من تنظيمات الأعداد الصحيحة هذه، يجب اعتبارها ناتجة عن علاقة محددة ما. على سبيل المثال، تلك التي

تستبعد 2 إلى النهاية، فحسب سوف تُعرّف عن طريق العلاقة التاليــة: «x و y هما عددان صحيحان متناهيان، وإما أن y هو 2 وx ليس 2 وإما أن كليهما ليس 2 و x أصغر من y». يمكن تعريف تلك التي تضع كل الأعداد الفردية في البداية ومن ثم كل الأعداد الزوجية على النحو التالي: «x و y هما عددان صحيحان متناهيان، وإما أن x فردي وy زوجي وإما أن x أصغر من y وإما أن كليهما زوجي وإما أن كليهما فردي». لن نزعج أنفسنا -كقاعدة- بالنص على هذه المعادلات في المستقبل؛ لكن حقيقة أنه من الممكن النص عليها هي حقيقة جوهرية.

العدد الذي كنا قد أطلقنا عليه ω 2 ، تحديدًا عدد سلسلة مكونة من متواليتين، يُدعى أحيانًا 2 . ω. يعتمد الضرب -مثله كمثل الجمع- على ترتيب العوامل: متوالية من الأزواج تمد بسلسلة مماثلة للتالي:

$$x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \dots x_n, y_n, \dots,$$

وهي نفسها متوالية؛ لكن زوج من المتواليات يمد بسلسلة هي مرتين طول المتوالية. لذلك من الضروري التمييز بين ω 2 وبين 2 . ω. الاستخدام متباين، سوف نستخدم ω 2 لأجل زوجين من المتواليات و2 . ω لأجل متوالية من الأزواج، وهذا القرار يحكم بالتأكيد تأويلنا العام لـ «β . α» عندما يكون α و β عددي- علاقة: «β . α» يجب أن يرمز لمجموع مبني على نحو مناسب لعلاقات α كل منها يحظى بـ β حد.

يمكننا المضي إلى أجل غير مسمى مع عمليات تنحيف الأعداد الاستقرائية. على سبيل المثال، يمكننا أولًا وضع الأعداد الفردية ثم

مضاعفاتها، ثم مضاعفات المضاعفات وهكذا. بذلك نحصل على السلسلة:

1, 3, 5, 7, ...; 2, 6, 10, 14; 4, 12, 20, 28...; 8, 24, 40, 56, ...,

التي عددها ω^2 ، حيث إنها متوالية لمتواليات. من الممكن بكل تأكيد تنحيف أي واحدة من المتواليات في هذه السلسلة الجديدة كما قمنا بتنحيف المتوالية الأصلية. يمكننا المضي نحو ω^ω ... ,ω^4 ,ω^3 ، وهكذا دواليك. مهما ذهبنا بعيدًا، يمكننا الذهاب دائمًا نحو ما هو أبعد.

سلسلة كل الأعداد الترتيبية التي من الممكن الحصول عليها على هذا النحو -أي كل ما يمكن الحصول عليه عن طريق تنحيف متوالية- هي نفسها أطول من أي سلسلة يمكن الحصول عليها عن طريق إعادة تنظيم حدود المتوالية. (ليس من الصعب البرهنة على هذا). من الممكن تبيان أن العدد الأصلي لفئة مثل هذه الأعداد الترتيبية هو أكبر من $\aleph_0$ ؛ إنه العدد الذي دعاه كانتور $\aleph_1$ العدد الترتيبي لسلسلة كل الأعداد الترتيبية التي من الممكن توليدها من $\aleph_0$ ، في ترتيب بحسب المقدار هو ω_1. على ذلك تحظى السلسلة التي عددها الترتيبي ω_1 بحقل عدده الأصلي هو $\aleph_1$.

يمكننا المواصلة من ω_1 و $\aleph_1$ إلى ω_2 و $\aleph_2$ عن طريق عملية مطابقة لتلك التي تقدمنا بها من ω و $\aleph_0$ إلى ω_1 و $\aleph_1$ وما من شيء هناك كي يمنعنا من التقدم إلى أجل غير مسمى في هذا السبيل نحو أعداد أصلية جديدة وأعداد ترتيبية جديدة. من غير المعروف ما إذا كان $2^{\aleph_0}$ مساويًا لأي من الأعداد الأصلية في سلسلة ألف العبرية. من غير المعروف حتى

ما إذا كان قابلًا للمقارنة معها في المقدار؛ بحسب ما نعرف قد لا يكون مساويًا لـ ولا أكبر من ولا أصغر من أي واحد من الألف العبرية. هذا السؤال متصل بمسلمة التضاعف، تلك التي سوف نعالجها لاحقًا.

كانت كل السلاسل التي تفكرنا فيها إلى الآن في هذا الفصل مما يُدعى «جيدة الترتيب **well ordered**». السلسلة جيدة الترتيب هي واحدة لها بداية ولها حدود متعاقبة ولها حد تالٍ بعد أي مُنتخَب **selection** من حدودها، بشرط وجود أي حدود بعد المُنتخَب. يستبعد هذا من ناحية، السلاسل الملتحمة التي يوجد فيها حدود بين أي حدين، ويستبعد من ناحية أخرى السلاسل التي لا بداية لها أو التي يوجد فيها أجزاء تابعة لا بداية لها. سلسلة الأعداد الصحيحة السالبة مرتبة وفق المقدار لا بداية لها، لكنها تنتهي بـ **1-**، هي غير جيدة الترتيب؛ لكن لو أخذناها مرتبة بشكل عكسي، بادئين بـ **1-**، تكون جيدة الترتيب، كونها في الحقيقة متوالية. التعريف هو:

سلسلة «جيدة الترتيب» هي واحدة تحظى كل فئة فرعية فيها (باستثناء الفئة الخالية بالطبع) بحد أول.

يعني العدد «الترتيبي» عدد- علاقة لسلسلة جيدة الترتيب. يكون بهذا صنفًا من أصناف العدد التسلسلي.

تنطبق صيغة معممة من الاستقراء الرياضي فيما بين السلاسل جيدة الترتيب. من الممكن أن يقال عن خاصية إنها «وراثية على نحو فوق متناهٍ» إذا ما كانت عندما تنتمي إلى مُنتخَب معين من الحدود في سلسلة، تنتمي للتابع المباشر لذلك المُنتخَب بشرط أن يكون لها واحد». في

سلسلة جيدة الترتيب، تنتمي الخاصية الوراثية على نحو فوق متناهٍ والمنتمية إلى الحد الأول في السلسلة إلى كل السلسلة. يجعل ذلك من البرهنة على العديد من الفرضيات المعنية بالسلاسل جيدة الترتيب، غير الصحيحة بالنسبة لكل السلاسل ممكنًا. ليس من السهل تنظيم الأعداد الاستقرائية في سلسلة ليست جيدة الترتيب، ومن غير السهل حتى ترتيبها في سلسلة متصلة. على سبيل المثال، يمكننا تبني الخطة التالية: تفكر في الأعداد العشرية من **0.1** (مُضمّن) إلى 1 (مستثنى)، منظمة في ترتيب بحسب المقدار. يشكل هذا سلسلة ملتحمة؛ بين أي حدين هناك دائمًا عدد غير متناهٍ من حدود أخرى. الآن احذف الفاصلة العشرية، في بداية كل عدد، تصبح في حوزتنا سلسلة ملتحمة مكونة من كل الأعداد الصحيحة المتناهية باستثناء تلك القابلة للقسمة على **10**. إذا ما رغبنا في تضمين تلك القابلة للقسمة على **10**، لا توجد صعوبة؛ بدلًا من البدء بـ **0.1** سوف نُضمّن كل الأعداد العشرية الأقل من **1**، لكننا عندما نمحو العلامة العشرية، سوف ننقل إلى اليمين أي أصفار تقع في بداية أعدادنا العشرية. بتجاهل هذه الأعداد الأخيرة، والعودة إلى تلك التي لا تحظى بأصفار في البداية، يمكننا النص على القاعدة الخاصة بتنظيمنا لأعدادنا الصحيحة كالتالي: من بين العددين الصحيحين اللذين لا يبدآن بنفس الرقم، يأتي ذلك الذي يبدأ بالرقم الأصغر أولًا. من بين الاثنين اللذين يبدآن بنفس الرقم لكنهما يختلفان في الرقم الثاني، فذلك صاحب الرقم الثاني الأصغر يأتي أولًا، لكن قبل الجميع يأتي ذلك الذي بلا رقم ثانٍ؛ وهكذا. بشكل عام، لو اتفق عددان صحيحان بالنسبة إلى أول **n** رقم،

لكنهما لا يتفقان بالنسبة إلى الرقم (n + 1) يأتي أولًا ذلك الذي إما لا يحظى بالرقم (n + 1) وإما يحظى بـ (n + 1) أصغر من الآخر. تزود قاعدة التنظيم هذه -كما يمكن للقارئ أن يقنع نفسه بسهولة- بسلسلة ملتحمة تحتوي على كل الأعداد الصحيحة غير القابلة للقسمة على 10؛ وكما رأينا لا توجد صعوبة تتعلق بتضمين تلك القابلة للقسمة على 10. يترتب على هذا المثال أنه من الممكن بناء سلسلة ملتحمة تحظى بـ $\aleph_0$ حد. في الحقيقة، قد رأينا بالفعل أن هناك $\aleph_0$ نسبة، وتشكل النسب بحسب ترتيب المقدار سلاسل ملتحمة؛ بذلك بات لدينا مثال آخر هنا. سوف نستكمل هذا الموضوع في الفصل التالي.

من بين كل القوانين الصورية المعتادة للجمع والضرب والرفع للأسس، نجد أن الأعداد الأصلية فوق المتناهية تطيعها جميعًا، لكن الأعداد الترتيبية فوق المتناهية تطيع بعضها فقط، وتلك المطاعة من قِبلها مطاعة من قِبل كل أعداد - العلاقة. نعني «بالقوانين الصورية المعتادة التالي:

قانون الإبدال:

$$\alpha \times \beta = \beta \times \alpha \text{ و } \alpha + \beta = \beta + \alpha$$

قانون التجميع:

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$$

$$(\alpha \times \beta) \times \gamma = \alpha \times (\beta \times \gamma) \text{ و}$$

قانون التوزيع:

$$\alpha\,(\beta+\gamma) = \alpha\,\beta + \alpha\,\gamma$$

عندما لا يسري قانون الإبدال، يجب تمييز الصيغة السابقة لقانون التوزيع من الصيغة التالية:

$$(\beta+\gamma)\,\alpha = \beta\,\alpha + \gamma\,\alpha$$

كما سوف نرى في الحال، قد تكون إحدى الصيغتين صحيحة والأخرى خاطئة.

قوانين الرفع للأسس :

$$\alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\gamma} = \alpha^{\beta+\gamma}$$

$$\alpha^{\gamma} \cdot \beta^{\gamma} = (\alpha\,\beta)^{\gamma}$$

$$(\alpha^{\beta})^{\gamma} = \alpha^{\beta\,\gamma}$$

تسري كل هذه القوانين على الأعداد الأصلية، سواء كانت متناهية أو غير متناهية، كما تسري على الأعداد الترتيبية المتناهية. لكن عندما نأتي إلى الأعداد الترتيبية غير المتناهية، أو في الحقيقة إلى أعداد العلاقة في العموم، بعضها يبقى ساريًا وبعضها لا. قانون الإبدال لا يسري؛ أما قانون التجميع فيسري؛ قانون التوزيع (متبنين النمط الذي كنا قد تبنيناه سابقًا بالنسبة إلى ترتيب العوامل في الناتج) يسري في الصيغة:

$$(\beta+\gamma)\,\alpha = \beta\,\alpha + \gamma\,\alpha$$

لكنه لا يسري في الصيغة:

$$\alpha\,(\beta+\gamma) = \alpha\,\beta + \alpha\,\gamma$$

قوانين الرفع للأسس:

$$\alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\gamma} = \alpha^{\beta + \gamma}$$

$$(\alpha^{\beta})^{\gamma} = \alpha^{\beta \gamma}$$

لا تزال سارية، لكن القانون:

$$\alpha^{\gamma} \cdot \beta^{\gamma} = (\alpha \beta)^{\gamma}$$

لا يسري، وهو القانون واضح الصلة بقانون الإبدال الخاص بالضرب.

تعريفات الضرب والرفع للأسس المقدرة في الفرضيات السابقة معقدة نوعًا ما. على القارئ الراغب في معرفة ماهيتها وكيفية البرهنة على القوانين السابقة الرجوع إلى الجزء الثاني من كتاب **Principia Mathematica, *172 – 176**.

طوِّر كانتور حساب الأعداد الترتيبية فوق المتناهية في مرحلة سابقة لتطويره حساب الأعداد الأصلية فوق المتناهية، نظرًا لأن له استخدامات رياضية فنية متنوعة، قادته إليه. لكن من منظور فلسفة الرياضيات هو أقل أهمية وأقل جوهرية من نظرية الأعداد الأصلية فوق المتناهية. الأعداد الأصلية هي بالضرورة أبسط من الأعداد الترتيبية، ويعد ظهورها في البداية باعتبارها مستخلصًا من الأخيرة حدثًا تاريخيًّا غريبًا مثيرًا للفضول، لم تصل إلى أن تُدّرس منفصلة بنفسها إلا بالتدريج. لا ينطبق هذا على عمل فريجه، عُولجت فيه الأعداد الأصلية المتناهية وفوق المتناهية في استقلالية كاملة عن الأعداد الترتيبية؛ لكنه كان عمل كانتور الذي جعل

العالم على دراية بالموضوع، بينما بقى فريجه غير معروف تقريبًا، ربما كان السبب الرئيس وراء ذلك صعوبة رمزيته. والرياضياتي مثله كمثل الناس الآخرين يعاني من صعوبة أكبر في فهم واستخدام المفاهيم التي هي «أبسط» نسبيًّا بالحس المنطقي من التصدي لمفاهيم أكثر تعقيدًا أقرب إلى ممارستهم العادية. لهذه الأسباب، لم تُدرك الأهمية الحقيقية للأعداد الأصلية في فلسفة الرياضيات إلا بشكل تدريجي. على الرغم من أن أهمية الأعداد الترتيبية ليست صغيرة بأي حال، إلا أنها أقل من تلك التي للأعداد الأصلية دون ريب، وهي مدموجة على نحو كبير جدًّا بتلك التي للمفهوم الأكثر عمومية لأعداد – العلاقة.

❊ ❊ ❊

الفصل العاشر

النهايات limits والاتصال continuity

مفهوم «النهاية» هو أحد تلك المفاهيم التي وجد أن أهميتها في الرياضيات في تزايد مستمر عما كان معتقد. تعتمد الحسابات التفاضلية والتكاملية بمجملها، بل في الحقيقة يعتمد كل شيء في الرياضيات العليا عمليًّا على النهايات. كان من المفترض سابقا أن الكميات غير متناهية الصغر **infinitesimals** مضمنة في أساسات هذه المواضيع، لكن فيرشتراس[1] أوضح خطأ هذا: حيثما ظُنّ وقوع الكميات غير متناهية الصغر، فما يقع حقًّا هو مجموعة متناهية من الكميات التي يكون الصفر هو نهايتها الأدنى. كان من المعتاد الظن في أن «النهاية» هي مفهوم كمي بالضرورة، تحديدًا، مفهوم الكمية التي تقترب منها الكميات الأخرى أقرب فأقرب، لذلك فمن بين تلك الأخرى سوف يكون هناك البعض مما يختلف بأقل من أي كمية معينة. لكن مفهوم «النهاية» في الحقيقة مفهوم ترتيبي بحت لا يتضمن الكمية على الإطلاق (إلا عن طريق الصدفة عندما يحدث أن تكون السلسلة المعنية كمية).

قد تكون نقطة معطاة على خط هي نهاية مجموعة من النقاط على الخط، دون حاجة ضرورية إلى تحويلها إلى إحداثيات أو قياس أو أي شيء كمي. العدد الأصلي $\aleph_0$ هو نهاية الأعداد الأصلية ..., n ... ,3 ,2 ,1 (حسب ترتيب المقدار)، على الرغم من أن الفارق العددي بين $\aleph_0$ وأي عدد أصلي متناهٍ هو ثابت وغير متناهٍ (لا نهائي): من منظور كمي، لا تمضي الأعداد المتناهية مقتربة من $\aleph_0$ كلما أصبحت أكبر. ما يجعل $\aleph_0$ هو نهاية الأعداد المتناهية وفقًا لحقيقة مفادها أنه يأتي بعدها مباشرة في السلسلة، وهي حقيقة ترتيبية، لا كمية.

هناك صور متنوعة لمفهوم «النهاية»، تتزايد في التعقيد. كانت الصورة الأبسط والأكثر جوهرية التي يشتق منها الجميع قد عُرّفت بالفعل، لكننا نعيد التعريفات التي قادت إليها هنا، في صيغة عامة، غير متطلب فيها أن تكون العلاقة المعنية تسلسلية. تأتي التعريفات كالتالي:

«الحدود الأدنى minima» لفئة α بالنسبة إلى علاقة P هي عناصر αتلك وحقل P الذي لا يحظى أي عنصر من α بالعلاقة P معه (إن وجد).

«الحدود الأقصى maxima» بالنسبة إلى P هي الحدود الأدنى بالنسبة إلى مقابل P .

«التوالي sequents» توالي الفئة α بالنسبة إلى علاقة P هي الحدود الأدنى «لتوابع α» successors و«توابع» α هي تلك العناصر في حقل P التي يحظى معها كل عنصر في الجزء المشترك من α ونطاق P بالعلاقة P .

«الأسلاف Precedents» بالنسبة إلى P هي تلك التوالي بالنسبة إلى مقابل P .

«النهاية العليا upper limit» لـ α بالنسبة إلى P هي التوالي بشرط أن α لا تحظى بحد أقصى؛ لكن لو كان لـ α حد أقصى، فلا نهاية عليا لها.

«النهاية الدنيا lower limit» بالنسبة إلى P هي النهاية العليا بالنسبة إلى مقابل P .

عندما تحظى P بالترابطية connexity، يمكن لفئة أن تحظى بالكثير على حد أقصى واحد وحد أدنى واحد وتالٍ واحد.. إلخ. على ذلك في الحالات التي نُعنى بها عند الممارسة، يمكننا الحديث عن «النهاية» (إن وجدت).

عندما تكون P علاقة تسلسلية، يمكننا تبسيط التعريفات السابقة للنهاية بشكل كبير. يمكننا -في هذه الحالة- تعريف «حافة» فئة α أولًا، أي نهايتها أو حدها الأقصى، ومن ثم نواصل نحو تمييز الحالة التي تكون الحافة فيها هي النهاية من تلك التي تكون فيها الحد الأقصى. لأجل هذا الغرض من الأفضل استخدام مفهوم «المقطع».

سوف نتحدث عن «مقطع P المُعرّف بواسطة فئة α» باعتباره كل تلك الحدود التي تحظى بالعلاقة P مع عنصر ما أو أكثر لـ α. سوف يكون هذا مقطعًا بالمعنى المُعرّف في الفصل السابع؛ في الحقيقة، كل مقطع بالمعنى المُعرّف به هناك هو المقطع المُعرّف بواسطة فئة ما α. إذا

كانت P تسلسلية، يتكون المقطع المُعرّف بواسطة α من كل الحدود التي تسبق حد ما أو الآخر لـ α. لو أن لـ α حد أقصى سوف يكون المقطع كل أسلاف الحد الأقصى. لكن لو لم يكن لـ α حد أقصى، فإن كل عنصر في α يسبق عنصرًا ما آخر في α ، وبذلك فكل α مضمنة في المقطع المُعرّف بواسطة α. على سبيل المثال انظر في أمر الفئة المكونة من الكسور:

$$½, ¾, {}^{7}/_{8}, {}^{15}/_{16}, ...,$$

أي فئة كل الكسور على صورة $½^n - 1$ حيث لـ n قيم مختلفة متناهية. لا تحظى فئة الكسور هذه بحد أقصى، ومن الواضح أن المقطع الذي تُعرّفه (في سلسلة الكسور بمجملها وفق ترتيب المقدار) هو فئة كل الكسور الحقيقية. أو من جديد تفكر في الأعداد الأولية باعتبارها مُنتخبًا من الأعداد الأصلية (متناهية وغير متناهية) وفق ترتيب المقدار. في هذه الحالة المقطع المُعرّف يتكون من كل الأعداد الصحيحة المتناهية.

بفرض أن P تسلسلية، «حافة» الفئة α سوف تكون الحد x (إذا كان موجودًا) أسلافه هو المقطع المُعرّف بواسطة α.

«الحد الأقصى» لـ α هو حافة والتي هي عنصر في α.

«النهاية العليا» لـ α هي حافة والتي هي ليست عنصرًا في α.

إذا كانت هناك فئة بلا حافة، هي بلا حد أقصى وبلا نهاية. هذا هو الحال مع حد ديدكايند «غير النسبي» أو ما يُدعى «بالفجوة».

على ذلك «النهاية العليا» لمجموعة حدود α بالنسبة إلى سلسلة P هي ذلك الحد x (إذا كان موجودًا) الذي يأتي بعد كل حدود α، لكن على النحو الذي يأتي فيه كل حد أسبق قبل بعض حدود α.

يمكننا تعريف كل «نقاط النهاية العليا» لمجموعة حدود β باعتبارها كل تلك التي هي نهايات عليا لمجموعات الحدود المختارة من β. سوف يتوجب علينا بالتأكيد تمييز نقاط النهاية العليا من نقاط النهاية الدنيا. إذا ما تفكرنا على سبيل المثال في سلسلة الأعداد الترتيبية:

$$1, 2, 3, \ldots \omega, \omega + 1, \ldots 2\,\omega, 2\,\omega + 1, \ldots$$

$$3\,\omega, \ldots \omega^{2}, \ldots \omega^{3}, \ldots,$$

نقاط النهاية العليا لحقل هذه السلسلة هي تلك التي لا تحظى بأسلاف مباشرة، أي:

$$1, \omega, 2\,\omega, 3\,\omega, \ldots \omega^{2}, \omega^{2} + \omega, \ldots 2\,\omega^{2}, \ldots \omega^{3} \ldots$$

سوف تكون نقاط النهاية العليا لحقل هذه السلسلة الجديدة:

$$1, \omega^{2}, 2\,\omega^{2}, \ldots \omega^{3}, \omega^{3} + \omega^{2} \ldots$$

على الجانب الآخر، لا تحظى سلسلة الأعداد الترتيبية – وكذلك كل سلسلة جيدة الترتيب في الحقيقة – بنهاية دنيا؛ لأنه لا توجد حدود باستثناء الحد الأخير لا تحظى بتابع مباشر. لكننا لو تفكرنا في سلسلة مثل سلسلة النسب، نجد أن كل عنصر في هذه السلسلة هو نقطة نهاية عليا ودنيا معًا بالنسبة لمجموعات مختارة بشكل مناسب. إذا ما تفكرنا في سلسلة الأعداد الحقيقية، واخترنا منها الأعداد الحقيقية النسبية،

سوف تحظى هذه المجموعة (سلسلة الأعداد النسبية) بكل الأعداد الحقيقية كنقاط نهاية عليا ودنيا. يطلق على نقاط النهاية لمجموعة «مشتقتها الأولى **first derivative**»، ويطلق على نقاط النهاية للمشتقة الأولى «المشتقة الثانية **second derivative**» وهكذا.

فيما يتعلق بالنهايات قد نميز بين درجات مختلفة لما قد يُطلق عليه «اتصال **continuity**» في سلسلة. كانت قد استخدمت كلمة «اتصال» لزمن طويل، لكنها بقيت دون أي تعريف دقيق حتى زمن ديدكايند وكانتور. كل من هذين الرجلين منح المصطلح دلالة دقيقة، لكن تعريف كانتور أضيق من ذلك الخاص بديدكايند: السلسلة التي تحظى باتصال كانتوري يجب أن تحظى باتصال ديدكايندي، لكن العكس غير قائم.

التعريف الأول الذي سوف يقع بشكل طبيعي في نفس رجل يسعى نحو معنى دقيق لاتصال سلسلة سوف يكون بتعريفه باعتباره كامنًا فيما أطلقنا عليه «تلاحم»، أي في حقيقة أنه بين أي حدين في سلسلة هناك حدود أخرى. لكن سوف يكون هذا تعريفا غير كافٍ، بسبب وجود «فجوات» في السلاسل مثل سلسلة النسب. رأينا في الفصل السابع أن هناك طرقًا لا تحصى يمكن بها تقسيم سلسلة النسب إلى جزئين، واحد منهما يسبق الآخر بالكامل، والأول منهما ليس له حد أخير، وفي ذات الوقت ليس للثاني حد أول. يبدو مثل هذا الوضع معاكس لإحساسنا المبهم تجاه ما يجب أن يميز «الاتصال»، بل ما هو أكثر من ذلك يبين لنا هذا الوضع أن سلسلة النسب ليست من نوع السلاسل المطلوبة لأجل العديد من الغايات الرياضية. على سبيل المثال فلننظر إلى الهندسة:

نرغب في أن نكون قادرين على أن نقول إنه عندما يقطع خطين مستقيمين أحدهما الآخر، تكون هناك نقطة مشتركة فيما بينهما، لكن إذا كانت سلسلة النقاط على خط مشابهة لسلسلة النسب، قد يتقاطع الخطان في «فجوة» ولا تكون هناك أي نقطة مشتركة فيما بينهما. هذا مثال غير دقيق، لكن من الممكن ضرب أمثلة عديدة أخرى لتبيان أن التلاحم غير كافٍ كتعريف للاتصال.

كانت احتياجات الهندسة أكثر من أي شيء هي التي قادت لتعريف الاتصال «الديدكايندي». نذكر أننا عرّفنا سلسلة باعتبارها ديدكايندية عندما يكون لكل فئة فرعية في النطاق حافة. (من الكافي افتراض أن هناك حافة عليا دائمًا أو أن هناك حافة دنيا دائمًا. إذا ما فرضنا أحد هذين الفرضين، من الممكن الاستدلال على الآخر). يمكن أن نقول إن السلسلة ديدكايندية عندما لا تكون هناك فجوات. قد ينشأ غياب الفجوات، إما عبر أن للحدود توابع، وإما عبر وجود نهايات في غياب حدود أقصى.

على ذلك فالسلسلة المتناهية أو السلسلة جيدة التنظيم هي ديدكايندية، وكذلك سلسلة الأعداد الحقيقية. النوع الأول من السلاسل الديدكايندية مستثنى نتيجة افتراض أن سلاسلنا ملتحمة؛ في تلك الحالة يجب أن تحظى سلسلتنا بخاصية قد تُدعى على نحو مناسب –لأغراض عديدة– بالاتصال. يقودنا ذلك إلى التعريف :

تحظى سلسلة «باتصال ديدكايندي» عندما تكون ديدكايندية وملتحمة.

لكن هذا التعريف لا يزال فضفاضًا جدًّا بالنسبة لغايات كثيرة. فلتفترض -على سبيل المثال- أننا نرغب في أن نكون قادرين على إسباغ مثل هذه الخواص على الفضاء الهندسي، ما يجعله معينا بحيث إنه من الممكن تحديد كل نقطة بواسطة أدوات الإحداثيات التي هي أعداد حقيقية: هذا غير مؤَّمن بواسطة الاتصال الديدكايندي منفردًا. نريد أن نكون في يقين من أن كل نقطة لا يمكن تعيينها بواسطة إحداثيات نسبية من الممكن تعيينها باعتبارها نهاية متوالية نقاط إحداثياتها نسبية، وهذه خاصية إضافية، لا يُمكِّننا تعريفنا من الاستدلال عليها.

يقودنا ذلك إلى إلقاء نظرة أقرب على السلاسل بالنسبة للنهايات. قام كانتور بهذه النظرة وشكل قواعد تعريفه للاتصال. وعلى الرغم من صيغته شديدة البساطة إلا أن هذا التعريف يحجب نوعًا ما الاعتبارات التي أدت إليه. لذلك سوف نرتحل أولًا عبر بعض مفاهيم كانتور في هذا الصدد قبل أن نصرح بتعريفه للاتصال.

عرّف كانتور سلسلة باعتبارها «تامة **perfect**» عندما تكون كل نقاطها نقاط نهاية وكل نقاط النهاية الخاصة بها تنتمي إليها. لكن هذا التعريف لا يعبر عما يقصده بشكل دقيق تمامًا. لا يوجد تصحيح مطلوب طالما كان معنيًّا بخاصية أن نقاطها يجب أن تكون نقاط نهاية؛ هذه خاصية تنتمي إلى السلاسل الملتحمة، لا إلى أي سلاسل أخرى لو كانت كل النقاط نهايات عليا أو كلها نهايات دنيا. لكن لو ذهب الافتراض فقط إلى أنها نقاط نهاية في اتجاه واحد دون تحديد أي اتجاه، سوف تكون هناك سلاسل أخرى تحظى بالخاصية موضع التساؤل -

على سبيل المثال، سلسلة الأعداد العشرية التي فيها ينتهي عدد عشري في 9 متكررة متمايزة عن العدد العشري المتمم المقابل ويقع قبله مباشرة. مثل هذه السلسلة هي قريبة للغاية من أن تكون ملتحمة، لكنها تحظى بحدود استثنائية متعاقبة، أولها لا يحظى بسلف مباشر، بينما الثاني لا يحظى بتابع مباشر. بغض النظر عن مثل هذه السلاسل، تشكل السلسلة التي فيها كل نقطة هي نقطة نهاية سلسلة ملتحمة؛ وهذا ينشأ دون قيود تتعلق بما إذا كان يشترط أن تكون كل نقطة هي نقطة نهاية عليا (أو أن تكون كل نقطة هي نقطة نهاية دنيا).

على الرغم من أن كانتور لم يهتم بالأمر على نحو صريح إلا أن علينا تمييز أنواع نقاط النهاية المختلفة وفق طبيعة أصغر الفئات الفرعية التي من الممكن تعريفها بها. افترض كانتور أنه يجب تعريفها عن طريق التوالي **progression** أو الانحدار **regression** (الذي هو نقيض التوالي). عندما يكون كل عنصر في سلسلتنا هو نهاية توالٍ أو انحدار، أطلق عليها كانتور «مكثفة في نفسها «**condensed in itself** (**insichdicht**)».

نأتي الآن إلى الخاصية الثانية التي يُعرّف التمام من خلالها، تحديدًا تلك التي أطلق عليها كانتور أن تكون «مغلقة **closed** (**abgeschlossen**)». كانت مُعرّفة في البداية -كما رأينا- باعتبارها منحصرة في الحقيقة التي مفادها أن كل نقاط نهاية سلسلة تنتمي لها. لكن لهذا دلالة ذات جدوى فقط إذا نُضَّ على سلسلتنا باعتبارها محتواة في سلسلة ما أخرى أكبر (على سبيل المثال كما في حالة مُنتخَب من

الأعداد الحقيقية)، ونقاط النهاية موضع البحث على علاقة مع السلسلة الأكبر. في أي حالة أخرى، إذا اعتبرت السلسلة قائمة بذاتها ببساطة، لا يمكن أن تفشل في احتواء نقاط النهاية الخاصة بها. ما يعنيه كانتور ليس هو ما قاله بالضبط؛ حقيقة في مناسبات أخرى قال شيئًا مختلفًا نوعًا ما، وهو ما كان يعنيه. ما كان يعنيه بالفعل أن كل سلسلة تابعة من النوع الذي قد يتوقع أن له نهاية، يحظى بنهاية ضمن السلسلة موضع الدراسة أي أن كل سلسلة تابعة ليس لها حد أعلى تحظى بنهاية أي أن لكل سلسلة تابعة حافة. لكن كانتور لم ينص على هذا لكل سلسلة تابعة، لكن للمتواليات وللمنحدرات فقط. (من غير الواضح إلى أي مدى كان مدركًا لهذا كقيد). على ذلك وجدنا في النهاية أن التعريف الذي نريده هو التالي: يقال إن سلسلة هي «مغلقة» (**abgeschlossen**) عندما يكون كل متوالية أو منحدر محتوى في سلسلة يحظى بنهاية في السلسلة.

من ثم بات لدينا تعريف أعمق:

تعتبر سلسلة «تامة» عندما تكون مكثفة في نفسها ومغلقة أي عندما يكون كل حد هو نهاية متوالية أو منحدر وكل متوالية أو منحدر محتوى في السلسلة له نهاية في السلسلة.

في خضم سعي كانتور خلف تعريف للاتصال، كان في ذهنه أنه يبحث عن تعريف سوف يُطبّق على سلسلة الأعداد الحقيقية وعلى أي سلسلة مشابهة لذلك، لكن ليس على أي سلسلة أخرى. لأجل هذه الغاية علينا أن نضيف خاصية إضافية. من بين الأعداد الحقيقية بعضهم يكون أعدادًا نسبية وبعضهم أعدادًا غير نسبية؛ على الرغم من أن عدد الأعداد

غير النسبية أكبر من عدد الأعداد النسبية إلا أن هناك أعدادًا نسبية بين أي عددين مهما كان الفارق بين العددين ضئيلًا. عدد الأعداد النسبية كما رأينا هو $\aleph_0$. يزود هذا بخاصية إضافية تكفي لتمييز الاتصال بشكل كامل، تحديدًا خاصية الاحتواء على فئة من $\aleph_0$ عنصرًا بحيث يكون بعضهم من هذه الفئة واقعًا بين أي حدين في سلسلتنا، مهما كان قربهما من أحدهما الآخر. تكفي هذه الخاصية مضافة إلى التمام لتعريف فئة سلاسل كلها متشابهة وهي في الحقيقة عدد تسلسلي. عرّف كانتور هذه السلسلة باعتبارها تلك الخاصة بالسلاسل المتصلة.

قد نبسط تعريفه قليلًا. نبدأ بأن نقول:

«فئة وسيطة **median class**» لسلسلة هي فئة فرعية للنطاق بحيث يجب أن توجد عناصرها بين أي حدين في السلسلة.

على ذلك فالأعداد النسبية هي فئة وسيطة في سلسلة الأعداد الحقيقية. من الواضح أنه من غير الممكن أن توجد فئات وسيطة إلا في سلسلة ملتحمة.

من ثم نجد أن تعريف كانتور مكافئًا للتالي: تكون السلسلة متصلة عندما:

1 – تكون ديدكايندية. 2 – تحتوي على فئة وسيطة تحظى بـ $\aleph_0$ حد.

كي نتجنب التشوش، سوف نتحدث عن هذا النوع باعتباره «اتصالًا كانتوريًّا». سوف نرى أنه يستلزم الاتصال الديدكايندي، لكن العكس غير صحيح. كل السلاسل التي تحظى باتصال كانتوري متشابهة، لكن

ليست كل السلاسل التي تحظى باتصال ديدكايندي. لا يجب أن تتبلبل مفاهيم النهاية والاتصال التي كنا نُعرّفها بمفاهيم نهاية دالة تقترب من المتغير موضع البحث أو اتصال دالة في جوار المتغير موضع البحث. هذه مفاهيم مختلفة، هامة للغاية، لكنها مشتقة من السابقة كما أنها أكثر تعقيدًا. يعد اتصال الحركة (لو أن الحركة متصلة) مثالًا على اتصال دالة، على الجانب الآخر، يعد اتصال المكان والزمن (لو أنهما متصلين) مثالًا على اتصال سلسلة، أو (كي نتحدث بشكل أكثر حرصًا) مثالًا لنوع من الاتصال، من الممكن اختزاله إلى اتصال سلسلة عن طريق معالجات رياضية وافية. في ضوء الأهمية الجوهرية للحركة في الرياضيات التطبيقية، ولغايات أخرى كذلك سوف يكون من المستحسن التعرض بشكل مختصر لمفاهيم النهايات والاتصال من حيث تطبيقاتها على الدوال؛ لكن الأفضل حفظ هذا الموضوع لفصل منفرد.

لا تتوافق تعريفات الاتصال التي كنا بصدد التفكر فيها -تحديدًا تلك الخاصة بديدكايند وكانتور- بشكل وثيق مع الفكرة المشوشة المرتبطة بالكلمة في ذهن رجل الشارع أو الفيلسوف. يدركون الاتصال إلى حد ما باعتباره غياب للانفصال في هيئة طمس عام للتمايز، ذلك الطمس الذي يميز الضباب الكثيف. يترك الضباب انطباعًا برحابة تفتقد إلى التعددية المحددة أو التقسيم. إنه هذا النوع من الأشياء التي يعنيها الميتافيزيقي «بالاتصال»، معلنًا إياه في صدق شديد سمة مميزة لحياته العقلية ولتلك الخاصة بالأطفال والحيوانات.

تشير كلمة «اتصال» إلى الفكرة العامة على نحو غير واضح أو محدد

عند توظيفها على هذا النحو، وكذلك كلمة «تدفق flux» تبدو مختلفة تمامًا بالتأكيد عن تلك التي كنا نُعرِّفها. على سبيل المثال، انظر في أمر سلسلة الأعداد الحقيقية. كل منها هو ما هو عليه، محدد تمامًا ولا يقبل المساومة؛ لا يتجاوز ولو بدرجة غاية في الضآلة نحو الآخر؛ هو جامد ومنفرد ومسافته التي تفصله عن كل وحدة أخرى متناهية بالرغم من أنه من الممكن جعلها أقل من أي كمية معينة مسبقًا. السؤال عن العلاقة بين نوع الاتصال الموجود فيما بين الأعداد الحقيقية والنوع الظاهر المتجلي -مثل ذلك الذي نراه في فترة زمنية ما- هو سؤال صعب ومعقد للغاية. لن يصمد أن النوعين ببساطة متماثلان، لكن قد يصمد على نحو جيد للغاية -فيما أظن- أن المفهوم الرياضي الذي كنا بصدده في هذا الفصل يزود بمخطط منطقي مجرد، بالنسبة له من الممكن بالتأكيد استحضار المادة الإمبيريقية (التجريبية) عن طريق المعالجة المناسبة، إذا كان لهذه المادة أن يطلق عليها «متصلة» بأي معنى قابل للتعريف بدقة. سوف يكون من المستحيل تمامًا إثبات هذه النظرية ضمن حدود الإصدار الحالي. قد يطلع القارئ المهتم على محاولة لإثباتها فيما يتعلق بالزمن على وجه الخصوص قام بها مؤلف هذه السطور في مجلة the Monist[2] 1914 – 5، بالإضافة إلى أجزاء من كتاب معرفتنا بالعالم الخارجي Our Knowledge of the External World .
مع هذه الإشارات، علينا أن نترك هذه المعضلة -المثيرة كما تبدو- كي نعود إلى مواضيع متصلة بشكل أكثر وثاقة بالرياضيات.

الهوامش:

(1) كارل فيرشتراس: رياضياتي ألماني (1827 – 1897)، يشار إليه باعتباره رائد التحليل الرياضي الحديث. (المترجم).

(2) monist أو المؤمن بالأحادية وهو منظور فلسفي يرجع كل شيء في الكون إلى أصل واحد.

وthe Monist هي واحدة من أشهر وأقدم المجلات المتخصصة في الفلسفة، تأسست عام 1888. (المترجم).

* * *

الفصل الحادي عشر

النهايات واتصال الدوال

في هذا الفصل سوف نُعنى بتعريف نهاية دالة (لو كانت هناك) عند اقتراب المتغير من قيمة ما، كما سوف نُعنى بتعريف المقصود «بدالة متصلة». كل من هاتين الفكرتين هي فنية نوعًا ما وبالكاد تستدعي المعالجة في مجرد مقدمة للفلسفة الرياضية، لكن نظرًا للحقيقة المتمثلة بشكل خاص فيما يُدعى حساب تفاضل وتكامل الكميات غير متناهية الصغر، أصبحت وجهات النظر الخاطئة حول مواضيعنا الحالية متجذرة في رسوخ شديد في عقول الفلاسفة المتخصصين وهو ما يستدعي مجهودًا مطوّلًا وضخمًا من أجل استئصالها. منذ زمن ليبنتز كان هناك اعتقاد دائم في أن حساب التفاضل والتكامل يتطلب كميات غير متناهية الصغر. برهن علماء الرياضيات (خاصة فيرشتراس) على خطأ هذا؛ لكن الخطأ متداخل ومدمج على سبيل المثال كان على هيجل[1] أن يقول عن الرياضيات إنها محافظة ومقاومة للتغيير في استماتة، مال الفلاسفة إلى تجاهل عمل رجال مثل فيرشتراس.

تُعرّف النهايات واتصال الدوال حال عملها في الرياضيات المعتادة في اصطلاحات تتضمن عددًا. هذا غير ضروري كما بيّن د. وايتهيد[2]. مع ذلك سوف نبدأ بالتعريفات في الكتب المرجعية، ومن ثم نواصل بعد ذلك لتبيان كيف يمكن تعميم هذه التعريفات كي تطبق على السلاسل بوجه عام، ولا تقتصر فقط على ما هو عددي أو ما هو قابل للقياس العددي.

دعنا نتفكر في دالة رياضية معتادة $f\,x$، حيث x و $f\,x$ كلاهما عدد حقيقي، و $f\,x$ أحادية القيمة أي أنه عندما تكون قيمة x معطاة، فهناك قيمة واحدة يمكن لـ $f\,x$ أن تحظى بها. ندعو x «متغير الدالة» وندعو $f\,x$ «بالقيمة عند المتغير x». عندما تكون دالة على الصورة التي ندعوها «متصلة"، فالفكرة الخام التي نبحث لها عن تعريف دقيق تتمثل في أن اختلافات بسيطة في x سوف تتطابق مع اختلافات بسيطة في $f\,x$، وإذا ما جعلنا الاختلافات في x صغيرة بالقدر الكافي، فبإمكاننا جعل الاختلافات في $f\,x$ أقل من أي كمية معينة. نحن لا نرغب في أن تكون هناك قفزات مفاجئة إذا ما كانت الدالة متصلة، لذلك لبعض قيم x سوف يؤدي أي تغير –مهما كان ضئيلًا– إلى تغير في $f\,x$ يتجاوز كمية ما متناهية معينة. تحظى الدوال البسيطة المعتادة للرياضيات بهذه الخاصية: على سبيل المثال تنتمي هذه الخاصية إلى $x^2, x^3, \ldots \log x, \sin x,$ وهكذا. لكن من غير العسير على الإطلاق تعريف الدوال غير المتصلة. كمثال غير رياضي انظر في أمر، «مكان ميلاد أصغر شخص حي في الوقت t». هذه دالة t؛ قيمتها ثابتة من وقت ميلاد الشخص حتى

وقت الميلاد التالي، ومن ثم تتغير القيمة بشكل مفاجئ من مكان الميلاد الأول إلى مكان آخر. سوف يكون المثال الرياضي المماثل على النحو التالي «العدد الصحيح التالي أدنى من x» حيث $f\,x$ هي عدد حقيقي. هذه الدالة تبقى ثابتة من عدد صحيح إلى الذي يليه، ومن ثم تزود بقفزة مفاجئة. تكمن الحقيقة الفعلية في أنه على الرغم من أن الدوال المتصلة هي الأكثر ألفةً واعتيادًا، إلا أنها هي الاستثناء: هناك دوال غير متصلة أكثر من تلك الدوال المتصلة على نحو غير متناهٍ.

الكثير من الدوال غير متصلة بالنسبة لقيمة واحدة أو قيم متعددة للمتغير، لكنها متصلة بالنسبة لكل القيم الأخرى. على سبيل المثال تفكر في $\sin 1/x$. تمر دالة $\sin \theta$ عبر كل القيم من -1 إلى 1 في كل مرة تمر فيها x من $-\pi/2$ إلى $\pi/2$، أو من $\pi/2$ إلى $3\pi/2$ أو بشكل عام من $(2n - 1)\ \pi/2$ إلى $(2n + 1)\ \pi/2$ حيث n هو أي عدد صحيح. الآن لو تفكرنا في $1/x$ عندما تكون x صغيرة جدًّا، ندرك أنه مع تضاؤل x تتزايد $1/x$ أسرع فأسرع، لذلك تمر أسرع كثيرًا عبر دائرة القيم من أحد مضاعفات $\pi/2$ إلى الآخر كلما أصبحت x أصغر فأصغر. يترتب على ذلك أن $\sin 1/x$ يمر أسرع فأسرع من -1 إلى 1 ومن ثم يعيد الكرة مع تضاؤل x. في الحقيقة لو أننا أخذنا أي فترة تحتوي على 0، فلتقل الفترة من $+\varepsilon$ إلى $-\varepsilon$ حيث ε هو عدد صغير جدًّا، سوف تمضي $\sin 1/x$ عبر عدد غير متناهٍ من التذبذبات **fluctuations** في هذه الفترة، ولا يمكننا تقليل التذبذبات عن طريق جعل الفترة أصغر. على ذلك عند الدوران حول متغير الدالة 0 تكون الدالة غير متصلة. من السهل تخليق دوال غير متصلة في أماكن عديدة أو في $\aleph_0$ مكان أو في كل مكان. يمكن العثور

على أمثلة في أي كتاب عن نظرية الدوال لمتغير حقيقي.

نواصل الآن في بحثنا عن تعريف دقيق للمقصود بأن الدالة متصلة بالنسبة إلى متغير دالة ما، عندما يكون متغير الدالة والقيمة كلاهما عددين حقيقيين، دعنا أولًا نُعرّف «جوار neighborhood» عدد x باعتباره كل الأعداد من ε+ إلى ε-، حيث ε هو عدد ما سوف يكون صغيرًا للغاية في حالات هامة. من الواضح أن الاتصال عند نقطة ما عليه أن يتعامل مع ما يحدث في أي جوار لتلك النقطة، مهما كان صغيرًا.

ما نرغب فيه هو التالي: إذا كان a هو متغير الدالة الذي نأمل أن تكون دالتنا متصلة بالنسبة له، دعنا أولًا نُعرّف الجوار المحتوي على قيمة fa (وليكن هذا الجوار هو α) القيمة fa هي القيمة التي تحظى بها الدالة بالنسبة لمتغير الدالة a؛ نرغب في أنه إذا ما أخذنا جوار صغير كفاية يحتوي على a، سوف تكون كل قيم متغير الدالة عبر هذا الجوار محتواة في الجوار α ، ولا يهم مقدار صغر α الذي قد نكون عيناه.

ما يعني أننا إذا ما قضينا بأن على دالتنا ألا تختلف عن fa لأكثر من قدر ما ضئيل للغاية جدًّا، يمكننا أن نجد دائمًا مدى من أعداد حقيقية، يحظى بـ a في منتصفه، بحيث لن تختلف fx عن fa عبر كل المدى بأكثر من قدر ضئيل للغاية منصوص عليه. ويجب أن يبقى هذا صحيحا أيًّا ما كان صغر القدر الذي قد نختاره. يقودنا ذلك نحو التعريف التالي:

يقال إن الدالة f(x) «متصلة» بالنسبة لمتغير الدالة a إذا ما كان لكل عدد موجب σ -يختلف عن 0 لكنه صغير بقدر ما نرغب- يوجد هناك عدد موجب ε، يختلف عن 0 بحيث يكون

الاختلاف $f(a) - f(a + \delta)$ مع كل قيم δ التي هي أقل عدديًّا من ε[3] أقل من σ.

في هذا التعريف تُعرّف σ في البداية جوار $f(a)$ ، تحديدًا الجوار من $f(a) - \sigma$ إلى $f(a) + \sigma$. ثم يمضي التعريف ليقول إن في مقدورنا تعريف الجوار (عن طريق ε) تحديدًا ذلك الكائن من $a - \varepsilon$ إلى $a + \varepsilon$ ، بحيث تكون قيمة الدالة واقعة بين الجوار من $f(a) - \sigma$ إلى $f(a) + \sigma$. إذا كان القيام بذلك ممكنا، أيًّا ما كانت σ المختارة، فالدالة «متصلة» بالنسبة إلى متغير الدالة a.

ذلك طالما لم نكن قد عرَّفنا «نهاية» دالة بالنسبة إلى متغير دالة ما. إذا ما كنا قد قمنا بذلك، لكان في مقدورنا تعريف اتصال دالة بشكل مختلف: تكون الدالة متصلة في نقطة حيث تكون قيمتها هي نفسها نهاية قيمها عند اقترابها سواء من الأعلى أو من الأسفل. لكنها الدالة «المُروَّضة tame» فقط هي التي تحظى على نحو استثنائي بنهاية محددة عند اقتراب متغير الدالة من نقطة معطاة. يتمثل القانون العام في أن الدالة تتذبذب، وأنه بالنسبة لأي جوار معطى لأي متغير دالة معطى –مهما كان صغيرًا– سوف يقع مدى كامل من القيم بالنسبة إلى متغير الدالة ضمن هذا الجوار. وبما أن هذا هو القانون العام، دعنا نتفكر فيه أولًا.

دعنا نتفكر فيما قد يحدث مع اقتراب متغير الدالة من قيمة ما a من الأسفل، ما يعني أننا نأمل في التفكر فيما يحدث لمتغير دالة محتوى في الفترة من $a - \varepsilon$ إلى a، حيث ε هو عدد ما سوف يكون صغيرًا جدًّا في حالات هامة.

سوف تكون قيم الدالة لمتغيرات دالة من a – ε إلى a (a مستثناة) مجموعة أعداد حقيقية، سوف تُعرِّف قسمًا معينًا من مجموعة الأعداد الحقيقية، تحديدًا القسم المكون من تلك الأعداد التي هي ليست أكبر من كل القيم التي لمتغيرات الدالة من a – ε إلى a. بالنظر إلى أي عدد في هذا القسم، هناك قيم هي على الأقل في ذات كبر هذا العدد الذي لمتغير الدالة بين a – ε و a ، أي لمتغيرات الدالة التي تقع قبل a بقليل للغاية (لو كانت ε صغيرة جدًّا). دعنا نأخذ كل قيم ε الممكنة وكل الأقسام المقابلة الممكنة. سوف ندعو الجزء المشترك من بين كل هذه الأقسام «القسم النهائي ultimate section» عند اقتراب متغير الدالة من a. كي تقول إن عدد z ينتمي إلى القسم النهائي، كأن تقول مهما جعلنا ε صغيرة، هناك متغيرات دالة بين a – ε و a بحيث لا تكون قيمة الدالة أقل من z.

قد نطبق نفس العملية بالضبط على الأقسام العلوية، أي تلك التي تمضي من نقطة ما عاليا نحو القمة، بدلًا من أن تمضي من القاع عاليًا نحو نقطة ما. هنا نأخذ تلك الأعداد التي لا تقل عن كل قيم متغيرات الدالة من a – ε إلى a؛ يُعرِّف هذا قسم علوي، سوف يختلف مع اختلاف ε. بأخذ الجزء المشترك بين كل هذه الأقسام لكل قيم ε الممكنة، نحصل على «القسم العلوي النهائي». كي تقول إن العدد z ينتمي إلى القسم النهائي العلوي كأن تقول مهما جعلنا ε صغيرة، هناك متغيرات دالة بين a – ε و a بحيث لا تكون قيمة الدالة أكبر من z.

لو أن حد z ينتمي إلى كل من القسم النهائي والقسم النهائي العلوي،

سوف نقول إنه ينتمي إلى «التذبذب النهائي **ultimate fluctuation**». ربما يتضح الأمر أكثر لو تفكرنا مرة إضافية في الدالة **sin 1/x** عندما تقترب **x** من القيمة **0**. كي نكيف الأمر مع التعريفات السابقة، سوف نفترض أن الاقتراب من هذه القيمة يأتي من الأسفل.

دعنا نبدأ «بالقسم النهائي». بين **ε** – و**o** ، أيًّا ما قد تكون قيمة **ε**، سوف تتخذ الدالة القيمة **1** بالنسبة لمتغيرات دالة معينة، لكنها لن تتخذ أبدًا أي قيمة أكبر. على ذلك يتكون القسم النهائي من كل الأعداد الحقيقية، الموجبة والسالبة حتى **1** ومتضمنة إياه؛ أي أنها تتكون من كل الأعداد السالبة مع 0 ومع الأعداد الموجبة حتى **1** ومتضمنة إياه.

بالمثل يتكون «القسم النهائي العلوي» من كل الأعداد الموجبة مع **o** ومع الأعداد السالبة حتى **1-** ومتضمنة إياه.

على ذلك يتكون «التذبذب النهائي» من كل الأعداد الحقيقية من **1-** إلى **1**، وكلاهما مضمّن.

قد نقول بشكل عام إن «التذبذب النهائي» لدالة عندما يقترب متغير الدالة من **a** من أسفل يتكون من تلك الأعداد **x** والتي مهما مضينا مقتربين من **a**، سوف نظل نجد قيمًا في ذات كبر **x** وقيمًا في ذات صغر **x**.

قد لا يحتوي التذبذب النهائي على أي حدود أو قد يحتوي على حد واحد أو على حدود كثيرة. في أول حالتين للدالة نهاية محددة بالنسبة إلى الاقتراب من أسفل. هذا واضح تمامًا، إذا ما كان للتذبذب

النهائي حد واحد. والأمر على نفس درجة الصحة لو لم يكن لها حدود، ومن غير العسير البرهنة على ذلك. لو أن التذبذب النهائي خالٍ، وحد القسم النهائي مماثل لذلك الذي للقسم النهائي العلوي، من الممكن تعريفه باعتباره نهاية الدالة بالنسبة إلى الاقتراب من الأسفل. لكن لو كان للتذبذب النهائي حدود عديدة، لا وجود لنهاية محددة للدالة بالنسبة لاقترابها من أسفل. في هذه الحالة، يمكننا أخذ الحدين الأدنى والأعلى للتذبذب النهائي (أي الحد الأدنى للقسم النهائي العلوي) و(الحد الأعلى للقسم النهائي) باعتبارهما النهايتين الدنيا والعليا لقيمها «النهائية» بالنسبة للاقتراب من أسفل. بالمثل نحصل على النهايتين الدنيا والعليا للقيم «النهائية» بالنسبة للاقتراب من الأعلى. بذلك فإن لدينا في الحالة العامة، أربع نهايات لدالة بالنسبة لاقترابها من متغير دالة معين. لا توجد نهاية بالنسبة إلى متغير دالة ما **a** إلا عندما يتساوى كل هؤلاء الأربعة، ومن ثم فهذه هي القيمة المشتركة. إذا ما كانت هي القيمة بالنسبة إلى متغير الدالة **a** كذلك، فالدالة متصلة بالنسبة لمتغير الدالة هذا. قد يُعتبر هذا كتعريف للاتصال: وهو مكافئ لتعريفنا السابق.

يمكننا تعريف نهاية دالة بالنسبة إلى متغير دالة ما دون المرور عبر التذبذب النهائي والنهايات الأربع للحالة العامة. نمضي مع التعريف في تلك الحالة، تمامًا كما مضينا مع التعريف السابق للاتصال. دعنا نعرِّف النهاية بالنسبة للاقتراب من أسفل. إذا ما كانت هناك نهاية محددة للاقتراب من **a** من أسفل، من الضروري والكافي أنه بالنظر إلى أي عدد صغير معطى σ ، سوف تختلف قيمتين بالنسبة إلى

متغيري دالة على مقربة كافية من a (لكن الاثنين أقل من a) بأقل من ϭ ؛ أي لو كان ε صغير بالقدر الكافي ويقع كلا متغيري الدالة بين a – ε و a (a غير مضمَّنة)، من ثم سوف يكون الاختلاف بين القيمتين بالنسبة إلى متغيري الدالة هذين أقل من σ. يسري هذا على أي σ ، مهما كانت صغيرة؛ في تلك الحالة للدالة نهاية بالنسبة للاقتراب من أسفل. بالمثل نُعرِّف الحالة عندما يكون هناك اقتراب من الأعلى. ليس من الضروري بالنسبة لهاتين النهايتين –حتى عندما تكونا موجودتين هما الاثنتان– أن تكونا متماثلتين؛ ولو كانتا متماثلتين، لا يزال من غير الضروري أن تكونا متماثلتين فيما يتعلق بالقيمة بالنسبة لمتغير الدالة a. فقط في هذه الحالة الأخيرة ندعو الدالة بالمتصلة بالنسبة لمتغير الدالة a.

يطلق على الدالة «متصلة» (دون مؤهلات qualifications) عندما تكون متصلة بالنسبة لكل متغير دالة. هناك طريقة مختلفة قليلًا للوصول إلى تعريف الاتصال، هي كالتالي:

دعنا نقول إن دالة «تتقارب (تؤول) نهائيًّا إلى فئة α» لو كان هناك عدد حقيقي ما بحيث تكون قيمة الدالة عنصرًا في الفئة α بالنسبة لمتغير الدالة هذا وكل المتغيرات الأكبر من هذا». بالمثل سوف نقول إن دالة «تتقارب إلى α عندما يقترب متغير الدالة من x من أسفل» لو كان هناك متغير دالة ما y أقل من x بحيث تكون للدالة قيم هي عناصر في α عبر الفترة من y (مُضمَّنة) إلى x (مستثناة). قد نقول الآن إن الدالة تكون متصلة بالنسبة لمتغير الدالة a، والتي تحظى بالقيمة *f* a بالنسبة له، إذا ما وفَّت بشروط أربعة، تحديدًا:

1 – بالنسبة إلى أي عدد حقيقي أقل من $f\,a$ ، تتقارب الدالة إلى توابع هذا العدد عند اقتراب متغير الدالة من a من الأسفل.

2 – بالنسبة إلى أي عدد أكبر من $f\,a$ ، تتقارب الدالة إلى أسلاف هذا العدد عند اقتراب متغير الدالة من a من أسفل.

3 – و4. هما شرطان مماثلان لهذين الشرطين بالنسبة للاقتراب من أعلى.

تكمن فائدة هذه الصيغة للتعريف في أنها تحلل شروط التواصل إلى أربعة شروط مشتقة من استعراض متغيرات الدالة والقيم التي هي أكبر من وأصغر من متغير الدالة والقيمة (على الترتيب)، متغير الدالة والقيمة اللذان يُعرَّف التواصل بالنسبة لهما.

الآن قد نعمم تعريفاتنا كي نطبقها على السلاسل غير العددية أو غير المعروف قابليتها للقياس العددي. تعد حالة الحركة مثالًا ملائمًا كي نضعه نصب أعيننا. هناك قصة لهربرت جورج ويلز[4] سوف توضح من خلال مثال الحركة الفارق بين نهاية دالة بالنسبة إلى متغير دالة معطى وقيمتها بالنسبة لنفس متغير الدالة. بطل القصة الذي يملك دون أن يدري القدرة على تحقيق أمنياته، هوجم من قِبل رجل شرطة لكن عند هتافه «اذهب إلى ...» وجد أن ضابط الشرطة قد اختفى. إذا كانت $f(t)$ هي موضع ضابط الشرطة في الزمن t، وt_0 هي لحظة الهتاف، سوف تكون نهاية مواضع ضابط الشرطة عندما t تقترب من t_0 من أسفل في تماس مع البطل عندما تصبح القيمة بالنسبة لمتغير الدالة t_0 هي .... لكن من المفترض أن تكون مثل هذه الحوادث نادرة في العالم الواقعي، ومن

المفترض أن كل الحركات هي متصلة (على الرغم من غياب البرهان المناسب)، أي أنه بالنظر إلى أي جسم، لو كانت $f(t)$ هي موضعه في الزمن t، فإن $f(t)$ هي دالة متصلة لـ t. هذا هو معنى «التواصل» المضمّن في مثل هذه الإفادات التي نرغب حاليًا في تعريفها بأبسط شكل ممكن.

من الممكن بسهولة تكييف التعريفات التي صغناها لتسري على الدوال عندما يكون متغير الدالة والقيمة عددين حقيقيين كي تخدم استخدامات أكثر عمومية.

فلنفرض أن P و Q علاقتان، من الجيد أن نتصورهما تسلسليتين، على الرغم من أنه من غير الضروري لتعريفاتنا أن تكونا كذلك. فلنفرض أن R هي علاقة واحد إلى عديد، نطاقها محتوًى في حقل P، بينما نطاقها العكسي محتوًى في Q. إذَنْ R هي دالة (بالمعنى العام)، تنتمي متغيرات الدالة الخاصة بها إلى حقل Q، بينما تنتمي قيمها إلى حقل P. فلتفترض -على سبيل المثال- أننا نتعامل مع جسيم يتحرك على خط: افترض أن Q هي سلسلة الزمن، وأن P هي سلسلة النقاط على خطنا من اليسار لليمين، وأن R هي علاقة موضع جسيمنا على الخط في الزمن a بالنسبة للزمن a، بذلك يكون «R لـ a» هو موضعه في الزمن a. ربما تحتفظ بهذا المثال التوضيحي في ذهنك خلال تعريفاتنا.

سوف نقول إن الدالة R هي متصلة بالنسبة إلى متغير الدالة a، إذا ما كانت أي فترة معطاة α على سلسلة - P تحتوي على قيمة الدالة بالنسبة لمتغير الدالة a، وهناك فترة على سلسلة -Q تحتوي على aليس كنقطة نهاية وبحيث تحظى الدالة خلال هذه الفترة بقيم هي

عناصر في α. (نقصد «بالفترة» كل الحدود بين أي اثنين؛ أي إذا كان xو y عنصران في حقل P و لـ x علاقة P بالنسبة إلى y، سوف نقصد بـ «فترة – P من x إلى y» كل الحدود z بحيث تحظى x بالعلاقة P بالنسبة إلى z وتحظى z بالعلاقة P بالنسبة إلى y .

يمكننا تعريف «القسم النهائي» و«التذبذب النهائي» بسهولة. كي نُعرِّف «القسم النهائي» بالنسبة للاقتراب من متغير الدالة من أسفل، خذ أي متغير دالة y يسبق a (أي يحظى بالعلاقة Q بالنسبة إلى a)، خذ قيم الدالة لكل متغيرات الدالة حتى y ومتضمنة إياه، وكوِّن قسم P المُعرَّف بواسطة هذه القيم، أي عناصر سلسلة P تلك التي تسبق أو تماثل بعض هذه القيم. كَوِّن كل هذه الأقسام لكل قيم y التي تسبق a، وخذ الجزء المشترك؛ سوف يكون هذا هو القسم النهائي. من ثم يُعرَّف القسم العلوي النهائي والتذبذب النهائي تمامًا مثلما كان الأمر في الحالة السابقة. لا يمثل تكييف تعريف التقارب والتعريفات البديلة الناتجة للاتصال أي صعوبة من أي نوع.

نقول إن دالة R هي «متقاربة Q نهائيًّا إلى α» إذا ما كان هناك عنصر y من النطاق العكسي لـ R وحقل Q بحيث تكون قيمة الدالة بالنسبة لمتغير الدالة y وبالنسبة لأي متغير دالة تحظى y بالعلاقة Q معه عنصر في α. نقول إن R «تتقارب Q إلى α عندما يقترب متغير الدالة من متغير دالة معطى a» إذا ما كان هناك حد y يحظى بالعلاقة Q بالنسبة إلى a وينتمي إلى النطاق العكسي لـ R وبحيث إن قيمة الدالة بالنسبة لأي متغير دالة في الفترة Q من y (مضمنة) إلى a (مستثناة) ينتمي إلى α.

من الأربعة شروط التي يجب أن توفي بها دالة كي تكون متصلة بالنسبة إلى متغير الدالة **a**، الأول هو، بوضع **b** كقيمة بالنسبة لمتغير الدالة **a**:

بالنظر إلى أي حد يحظى بالعلاقة **P** بالنسبة إلى **b**، فإن **R** تتقارب **Q** إلى توابع **b** (بالنسبة إلى **P**) عندما يقترب متغير الدالة من **a** من أسفل.

نحصل على الشرط الثاني باستبدال **P** بمقابلها؛ نحصل على الشرطين الثالث والرابع من الأول والثاني باستبدال **Q** بمقابلها.

على ذلك لا وجود لشيء في مفاهيم نهاية دالة أو اتصال دالة، يتضمن عددًا بالضرورة. من الممكن تعريف الاثنين بشكل عام، ومن الممكن البرهنة على كثير من الفرضيات حولهما فيما يتعلق بأي سلسلتين (إحداهما سلسلة متغير الدالة والأخرى سلسلة قيمة الدالة). سوف نرى أن التعريفات لا تتضمن كميات غير متناهية الصغر. هي تتضمن فئات غير متناهية لفترات، تصبح أصغر بلا حد أصغر من الصفر، لكنها لا تتضمن أي فترات ليست متناهية. هذا مماثل للحقيقة التي تذهب إلى أنه لو نُصِّف خط طوله بوصة، ثم نُصِّف من جديد وهكذا إلى أجل غير مسمى؛ لا نصل أبدًا إلى كميات غير متناهية بهذه الطريقة: بعد **n** من التقسيم إلى النصف، يكون طول الجزء الصغير هو $^{1}/_{2}{}^{n}$ من البوصة، وهذا متناهٍ أيًّا ما قد يكون العدد المتناهي **n**. لا تقود عمليات التقسيم إلى النصف إلى قطاعات عددها الترتيبي غير متناهٍ، حيث إنها تقع عن طريق عملية واحدة تلو الأخرى بالضرورة. بذلك لا وصول للكميات غير متناهية الصغر بهذه الطريقة. كان للتشوش المحيط بمثل هذه

المواضيع آثارٌ جمة تمثلت في الصعوبات التي وُجدت عند مناقشة اللا نهاية والاتصال.

* * *

الهوامش:

(1) هيجل: أحد أهم الفلاسفة الألمان على مر التاريخ، وأحد مؤسسي المثالية الألمانية، وقد أرسى قواعد المنهج الجدلي الذاهب إلى أن كل فكرة تستدعي نقيضها ثم يكون جدل بينهما يتمخض عن فكرة تستدعي نقيضها وهكذا. (المترجم).

(2) انظر **Principia Mathematica, vol. ii. *230 – 234**. (المؤلف).

(3) يقال إن العدد «أقل عدديًّا» من ε عندما يقع بين ε+ إلى ε−. (المؤلف).

(4) هربرت جورج ويلز: روائي وقاص بريطاني (1866 – 1946)، اشتهر بكتاباته في حقل الخيال العلمي، ومن أشهر أعماله روايات: (آلة الزمن) و(الرجل الخفي) و(حرب الكواكب). (المترجم).

* * *

الفصل الثاني عشر
المُنتخَبات ومسلمة التضاعف

في هذا الفصل علينا أن نتفكر في مسلمة، من الممكن استعراضها، لا البرهنة عليها بمصطلحات المنطق، وعلى الرغم من تواؤمها، إلا أنها غير لازمة في أجزاء معينة من الرياضيات. هي متوائمة بمعنى أن هناك العديد من الفرضيات الهامة والمثيرة التي تبدو طبيعية كي يُظَّن في صحتها، من غير الممكن البرهنة عليها دون مساعدتها؛ لكنها غير لازمة؛ لأنها حتى دون تلك الفرضيات، يظل الموضوع الذي تقع فيه موجودًا، لكن في صورة مشوهة نوعًا ما.

قبل استعراض مسلمة التضاعف، علينا أولًا توضيح نظرية المُنتخَبات وتعريف الضرب عندما قد يكون عدد العوامل غير متناه.

الإجراء الصحيح الوحيد عند تعريف العمليات الحسابية هو بناء فئة فعلية (أو علاقة في حالة أعداد العلاقة) تحظى بعدد الحدود المتطلبة. يتطلب هذا أحيانًا قدرًا معينًا من الابتكار، لكنه ضروري من أجل

البرهنة على وجود العدد المُعرَّف. خذ -كأبسط مثال- حالة الجمع. افترض أننا قد أُعطينا عددًا أصليًّا μ ، وفئة α تحظى بـ μ حد. كيف نُعرِّف $\mu + \mu$ ؟ لأجل هذا يجب أن يكون لدينا فئتان تحظيان بـ μ حد، ولا يجب أن تتداخلا معًا. يمكننا بناء مثل هذه الفئات من α عبر طرق متنوعة. ربما تكون الطريقة التالية هي الأبسط من بينها: في البداية كوِّن كل الأزواج المرتبة التي حدها الأول هو فئة مكونة من عنصر مفرد لـ α وحدها الثاني فئة خالية؛ ثم كوِّن كل الأزواج المرتبة التي حدها الأول هو فئة خالية وحدها الثاني هو فئة مكونة من عنصر مفرد لـ α. لا تحظى فئتا الأزواج هاتان بأي عنصر مشترك فيما بينهما، وسوف يكون المجموع المنطقي للفئتين $\mu + \mu$ حد. بالمثل تمامًا في إمكاننا تعريف $\mu + \nu$ ، بحيث μ هو عدد فئة ما α و ν هو عدد فئة ما β.

مثل هذه التعريفات -كقاعدة- هي بالكاد تساؤل عن أداة فنية مناسبة. لكن في حالة الضرب، حيث قد يكون عدد العوامل غير متناهٍ، تظهر معضلات هامة من التعريف. لا يطرح الضرب عندما يكون عدد العوامل متناهيًا أي صعوبة. بالنظر إلى فئتين α و β ، للأولى μ حد وللثانية ν حد، يمكننا تعريف $\mu \times \nu$ باعتباره عدد الأزواج المرتبة التي من الممكن تشكيلها عن طريق اختيار الحد الأول من α والحد الثاني من β. سوف يتبين لنا أن هذا التعريف لا يستدعي وجوب عدم تداخل αو β ؛ بل يظل مناسبًا حتى لو كانت α و β متماثلتين. على سبيل المثال، اجعل α هي الفئة التي عناصرها x_1, x_2, x_3. من ثم فالفئة التي تستخدم لتعريف ناتج ضرب $\mu \times \mu$ هي فئة الأزواج:

$(x_1, x_1), (x_1, x_2), (x_1, x_3); (x_2, x_1), (x_2, x_2), (x_2, x_3);$
$(x_3, x_1), (x_3, x_2), (x_3, x_3)$

يبقى هذا التعريف قابلًا للتطبيق عندما يكون μ أو ν أو كلاهما متناهيًا، ومن الممكن مده خطوة بعد خطوة نحو ثلاثة أو أربعة أو أي عدد متناهٍ من العوامل. لا تظهر أي صعوبة تتعلق بهذا التعريف، باستثناء أنه من غير الممكن مده نحو عدد غير متناهٍ من العوامل.

تظهر معضلة الضرب عندما قد يكون عدد العوامل غير متناهٍ بهذه الطريقة: افترض أن لدينا فئة κ تتكون من فئات؛ افترض أن عدد الحدود في كل من هذه الفئات معطًى.

كيف سنعرِّف ناتج ضرب كل هذه الأعداد؟ إذا كان في مستطاعنا تأطير تعريفنا بشكل عام، سوف يكون قابلًا للتطبيق سواء كانت κ متناهية أو غير متناهية. من الملاحظ أن المعضلة هي في أن تكون قادرًا على التعامل مع الحالة عندما تكون κ غير متناهية، لا عندما تكون عناصرها غير متناهية. لو لم تكن κ غير متناهية، فالمنهج المُعرَّف سابقًا قابل للتطبيق تمامًا عندما تكون عناصرها غير متناهية، وكذلك عندما تكون عناصرها متناهية. إنها الحالة التي تكون فيها κ غير متناهية -حتى لو كانت عناصرها متناهية- هي تلك التي علينا العثور على طريقة للتعامل معها.

يعود المنهج التالي لتعريف الضرب بشكل عام إلى د. وايتهيد. وهو مشروح ومعالج على نحو مُطوَّل في **Principia Mathematica**, **vol. i. 80ff., and vol. ii. *114**.

دعنا نفترض كبداية أن κ هي فئة فئات، لا تتداخل أي اثنتين منهما – فلتقل هي مجمعات انتخابية في بلد حيث لا وجود لإمكانية تصويت الناخب في أكثر من مكان، يعتبر كل مجمع انتخابي فئة من المصوتين. دعنا الآن نشرع في اختيار حد واحد من كل فئة كي يكون ممثلًا لها، كما تفعل المجمعات الانتخابية عند انتخابها لعناصر البرلمان، بفرض أنه قانون على كل مجمع أن ينتخب رجلًا له حق التصويت في ذلك المجمع الانتخابي. نصل بذلك إلى فئة من الممثلين، تشكل برلماننا، واحد مُنتخَب من كل مجمع. كم عدد الطرق الممكنة المختلفة هناك لاختيار البرلمان؟ يستطيع كل مجمع انتخابي أن يختار أي واحد من مُصوتيه، ولذلك إذا كان هناك μ مُصوِّت في مجمع، يمكن للمجمع القيام بـ μ اختيار. اختيارات المجمعات الانتخابية المختلفة مستقلة؛ هكذا من الواضح أنه عندما يكون العدد الكلي للمجمعات الانتخابية متناهيًا، نحصل على عدد البرلمانات الممكنة بضرب أعداد المصوتين في مختلف المجمعات الانتخابية معًا. عندما لا نعرف ما إذا كان عدد المجمعات الانتخابية متناهيًا أم غير متناهٍ، قد نأخذ عدد البرلمانات الممكنة كتعريف لناتج ضرب أعداد المجمعات الانتخابية المنفصلة. هذا هو المنهج الذي تُعرَّف نواتج الضرب غير المتناهية من خلاله. علينا الآن أن نسقط مثالنا التوضيحي وأن نمضي إلى الحالة المضبوطة.

افترض أن κ هي فئة فئات، ودعنا نفترض كبداية أنه لا يتداخل أي عنصرين في κ، أي أنه إذا ما كان α و β عنصرين مختلفين في κ ، من

ثم لا عنصر في أحدهما هو عنصر في الآخر. سوف ندعو فئة « مُنتخَب» من κ عندما تتكون من حد واحد فقط من كل عنصر في κ ؛ أي أن μ هي « مُنتخَب» من κ إذا كان كل عنصر في μ ينتمي إلى عنصر ما في κ ، وإذا كان α هو أي عنصر في κ ، فإن μ و α يحظيان بحد واحد بالضبط مشتركًا فيما بينهما.

سوف ندعو فئة كل «المُنتخَبات» من κ ، «فئة تضاعف» لـ κ. عدد الحدود في فئة تضاعف لـ κ ، أي عدد المُنتخَبات من κ ، تُعرّف باعتبارها ناتج ضرب أعداد عناصر κ ، هذا التعريف قابل للتطبيق سواء كانت κ متناهية أو غير متناهية على حد سواء.

قبل أن نكون قادرين على الشعور برضى كامل تجاه هذه التعريفات، علينا أن نتخلص من القيد الخاص بأنه لا يجب أن يتداخل أي عنصرين في κ. لأجل هذه الغاية، بدلًا من أن نُعرّف أولًا فئة تدعى «مُنتخَب»، سوف نُعرِّف أولًا علاقة تُدعى «مُنتخِب selector». سوف تُدعى علاقة R«مُنتخِب» من κ إذا ما كانت تلتقط من كل عنصر في κ حد واحد كممثل للعنصر، أي أنه بالنظر إلى أي عنصر α في κ ، هناك حد واحد فقط x، هو عنصر في α ويحظى بالعلاقة R بالنسبة إلى α ؛ وسوف يكون هذا هو كل ما تفعله R. التعريف الصوري هو:

«المنتخِب» من فئة فئات κ هو علاقة واحد إلى عديد، تحظى بـ κ باعتباره النطاق العكسي الخاص بها، بحيث إذا ما كانت x تحظى بالعلاقة بالنسبة إلى α ، فمن ثم x هي عنصر في α.

لو كانت R هي مُنتخِب من κ ، و α هو عنصر في κ ، و x هو العنصر

الذي يحظى بالعلاقة R بالنسبة إلى α ، ندعو x «بممثل» α بالنسبة إلى العلاقة R.

الآن سوف يعرَّف «مُنتخَب» من κ باعتباره نطاق المُنتخِب؛ وسوف تكون فئة التضاعف كما كانت في السابق فئة المُنتخَبات.

لكن عندما تتداخل عناصر κ ، قد يكون هناك مُنتخِبات أكثر من المُنتخَبات، حيث إن الحد x الذي ينتمي إلى فئتين α و β قد يكون انتُخِب مرة لتمثيل α ومرة لتمثيل β ، مسفرًا عن مُنتخِبين مختلفين في الحالتين، لكن نفس المُنتخَب. من أجل أهداف تتعلق بتعريف الضرب، هي المُنتخِبات التي نحتاج إليها أكثر من المُنتخَبات. لذلك نطرح التعريف التالي:

«ناتج ضرب أعداد عناصر فئة فئات κ» هو عدد المُنتخِبات من κ.

يمكننا تعريف الرفع للأسس عن طريق تكييف الخطة السابقة. بالتأكيد قد نُعرِّف μ^{ν} باعتباره عدد المُنتخِبات من ν فئة، التي لكل منها μ حد. لكن هناك اعتراضات على هذا التعريف، مرجعها حقيقة أن مسلمة التضاعف (تلك التي سنتكلم عنها باختصار» هي مضمنة في غير ضرورة إذا ما تبنيناها. نتبنى عوضًا عنها البناء التالي:

افترض أن α هي فئة تحظى بـ μ حد وأن β هي فئة تحظى بـ ν حد. افترض أن y عنصر في β ، وشكِّل فئة كل الأزواج المرتبة التي تحظى بـ y من أجل حدها الثاني وتحظى بعنصر في α من أجل حدها الأول. سوف يكون هناك μ زوج لـ y ما، حيث إن أي عنصر فى α

قد يُختار من أجل الحد الأول، و α تحظى بـ μ عنصر. إذا ما شكلنا الآن كل الفئات من هذا النوع التي تنتج عن تنويع y، نحصل على ν فئة بالكلية، حيث إن y قد تكون أي عنصر في β و β تحظى بـ ν عنصر. كل من فئات ν هذه، هي فئة من أزواج، تحديدًا كل الأزواج التي من الممكن تشكيلها من عناصر متغيرة من α وعنصر ثابت من β. نُعرِّف μ^{ν} باعتباره عدد المُنتخِبات من الفئة المكونة من فئات ν هذه. أو قد نُعرِّف μ^{ν} على نحو مكافئ باعتباره عدد المُنتخَبات، حيث إن فئات الأزواج متخالفة **mutually exclusive**، عدد المُنتخِبات هو نفسه عدد المُنتخَبات. سوف يكون مُنتخَبًا من فئة الفئات الخاصة بنا مجموعة من أزواج مرتبة، سوف يكون منها واحد يحظى بأي عنصر من β من أجل حده الثاني، وقد يكون الحد الأول أي عنصر من α. على ذلك، يُعرَّف μ^{ν} عن طريق المُنتخِبات من مجموعة معينة لفئات ν ، تحظى كل منها بـ μ حد، لكن المجموعة هي واحدة تحظى ببنية معينة وبتركيب طيع مقارنة بالحالة في العموم. علاقة هذا بمسلمة التضاعف سوف تظهر بعد قليل.

ما ينطبق على الرفع للأسس ينطبق كذلك على ناتج ضرب عددين أصليين. قد نُعرِّف «$\mu \times \nu$» باعتباره مجموع أعداد فئات ν ، لكل منها μ حد، لكننا نفضل تعريفه باعتباره عدد الأزواج المرتبة التي ستتشكل مكونة من عنصر من α متبوعًا بعنصر من β حيث α يحظى بـ μ حد و β تحظى بـ ν حد. صُمم هذا التعريف كذلك كي يتجنب ضرورة الجزم بمسلمة التضاعف.

يمكننا البرهنة على القوانين الصورية للضرب وللرفع للأسس بالاستعانة بتعريفاتنا. لكنْ هناك شيء واحد لا نستطيع البرهنة عليه: لا يمكننا البرهنة على أن ناتج الضرب هو صفر، فقط عندما يكون أحد عوامله هو صفر. يمكننا البرهنة على هذا عندما يكون عدد العوامل متناهيًا، لا عندما يكون غير متناهٍ. بمعنى آخر، لا يمكننا البرهنة على أنه في فئة فئات معطاة ليست أي واحدة منها خالية، يجب أن يكون هناك مُنتخِبات منها؛ أو أنه في فئة معطاة من فئات متخالفة يجب أن يكون هناك على الأقل فئة واحدة تتكون من حد واحد خارج كل الفئات المعطاة. من غير الممكن البرهنة على مثل هذه الأمور؛ وعلى الرغم من أنه للوهلة الأولى تبدو هذه الأمور صحيحة، إلا أن الانعكاس يجلب تدريجيًّا شكًّا متزايدًا، حتى نصبح في النهاية راضين عن قيد الافتراض وتبعاته كما قمنا بقيد مسلمة المتوازيات، دون الجزم بما إذا كنا قادرين على معرفة ما إذا كان هذا صحيحًا أم خاطئًا. نص الافتراض بكلمات فضفاضة أن المُنتخِبات والمُنتخَبات توجد عندما ينبغي أن نتوقع وجودها. هناك طرق عديدة مكافئة للنص عليه بدقة. قد نبدأ بالتالي:

«بالنظر إلى فئة فئات متخالفة، ليست أي واحدة منها خالية، هناك فئة واحدة على الأقل تحظى بحد واحد بالضبط مشترك مع كل الفئات المعطاة».

سوف ندعو هذه الفرضية «بمسلمة التضاعف»[1]. سوف نزود أولًا بأشكال متنوعة مكافئة للفرضية، ومن ثم نتفكر في طرق معينة، فيها صحتها أو كذبها له أهمية في الرياضيات.

مسلمة التضاعف مكافئة للفرضية التي تذهب إلى أن ناتج الضرب هو صفر فقط عندما يكون أحد عوامله على الأقل صفر؛ أي إذا ضُرب أي عدد من الأعداد الأصلية معًا، فالنتيجة لا يمكن أن تكون 0 لو لم يكن أحد الأعداد المعنية 0.

مسلمة التضاعف مكافئة للفرضية الذاهبة إلى أنه إذا كانت R هي أي علاقة، و κ هي أي فئة محتواة في النطاق العكسي لـ R، فمن ثم هناك علاقة واحد إلى عديد على الأقل تستلزم R وتحظى بـ κ كنطاق عكسي لها.

مسلمة التضاعف مكافئة للافتراض الذاهب إلى أنه لو كانت α هي أي فئة، و κ هي كل الفئات الفرعية لـ α باستثناء الفئة الخالية، فمن ثم هناك على الأقل مُنتخِب واحد من κ. هذا هو الشكل الذي استُحضرت به المسلمة لأول مرة إلى وعي العالَم المتعلم عن طريق تسيرميلو[2] في عمله «**Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden Kann**»[3]. اعتبر تسيرميلو المسلمة كحقيقة غير قابلة للمساءلة. يجب الاعتراف بأنه حتى إعلانه عنها، كان الرياضيون يستخدمونها دون أي هواجس حيالها؛ لكن يبدو أنهم قد فعلوا ذلك بلا وعي منهم. والاستحقاق كله يرجع لتسيرميلو؛ لأنه جعلها مطروحة على الساحة وهو الأمر المستقل تمامًا عن التساؤل عمَّ إذا كانت صحيحة أو لا.

أوضح تسيرميلو مسلمة التضاعف في البرهان سابق الذكر باعتبارها مكافئة للفرضية الذاهبة إلى أن كل فئة من الممكن أن تكون جيدة الترتيب، أي من الممكن أن تنظَّم في سلسلة، فيها لكل فئة فرعية حد

أول (باستثناء الفئة الخالية بالطبع). البرهان الكامل لهذه الفرضية صعب، لكن ليس من الصعب إدراك المبدأ العام الذي تنفذ عن طريقه. هي تستخدم الصيغة التي ندعوها «مسلمة تسيرميلو»، أي أنها تجزم بأنه بالنسبة إلى أي فئة معطاة α ، هناك على الأقل علاقة واحد إلى عديد واحدة R، يتكون نطاقها العكسي من كل الفئات الفرعية الموجودة لـ α وتكون على الصورة التي فيها إذا كان لـ x علاقة R بالنسبة إلى ε، فمن ثم x هو عنصر في ε. مثل هذه العلاقة تلتقط «ممثلًا» من كل فئة فرعية؛ بالتأكيد سوف يحدث في الغالب أن يكون لفئتين فرعيتين نفس الممثل. ما قام به تسيرميلو أنه عدَّد عنصر α واحدًا عقب واحد مستعينًا بـ R والاستقراء فوق المتناهي. نضع أولًا ممثل α ؛ ندعوه x_1. ثم نأخذ ممثل الفئة المكونة من كل α باستثناء x_1؛ ندعوه x_2. يجب أن يكون مختلفًا عن x_1؛ لأن كل ممثل هو عنصر في الفئة، و x_1 قد استبعدت من هذه الفئة. استمر على ذات المنوال حتى تُبعد x_2 واجعل x_3 هو ممثل ما بقى. بهذه الطريقة نحصل أولًا على المتوالية $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$، بفرض أن α غير متناهية. من ثم نستبعد المتوالية بمجملها؛ نجعل x_w هي ممثل ما بقى من α. بهذه الطريقة في إمكاننا أن نمضي إلى أن لا يبقى شيء. سوف تشكل الممثلات المتعاقبة سلسلة جيدة الترتيب تحتوي على كل عناصر α. (ما سبق هو بالتأكيد مجرد إشارة إلى الخطوط العامة للبرهان) تدعى هذه الفرضية «نظرية تسيرميلو».

مسلمة التضاعف مكافئة كذلك للافتراض الذاهب إلى أنه من بين

أي عددين أصليين غير متساويين، يجب أن يكون أحدهما أكبر. إذا كانت المسلمة خاطئة، سوف يكون هناك عددان أصليان μ و ν بحيث $|\mu|$ ليست أصغر من وليست مساوية لـ... وليست أكبر من ν. رأينا أن $\aleph_0$ و $2^{\aleph_0}$ يشكلان ربما مثالًا لمثل هذا الزوج.

من الممكن النص على أشكال أخرى عديدة للمسلمة، لكن الشكل سالف الذكر هو أكثر الأشكال المعروفة أهمية في الوقت الحالي. أما فيما يتعلق بصواب أو خطأ المسلمة في أيٍ من أشكالها هذه فلا شيء معروف.

الفرضيات التي تعتمد على المسلمة، دون أن يكون من المعروف عنها مكافئتها لها عديدة وهامة. انظر أولًا في أمر الرابط بين الجمع والضرب. نعتقد بشكل طبيعي أن جمع فئات متخالفة ν ، لكل منها μ حد، يجب أن يكون $\mu \times \nu$. عندما تكون ν غير متناهية، لا يمكن إثباتها دون مسلمة التضاعف، إلا حيثما يمكن البرهنة على وجود مُنتخِبات معينة نتيجة لبعض الملابسات الخاصة. الطريقة التي تلج بها مسلمة التضاعف هي كالتالي: افترض أن في حوزتنا مجموعتي فئات متخالفة ν ، كل منها تحتوي على μ حد. ونرغب في البرهنة على أن مجموع مجموعة واحدة يحظى بعدد حدود مساوٍ لمجموع الأخرى. كي نبرهن على هذا، يجب أن نؤسس إلى علاقة واحد إلى واحد. الآن حيث إنه في كل حالة هناك ν فئة، هناك علاقة واحد إلى واحد ما بين مجموعتي الفئات؛ لكن ما نريده هو علاقة واحد إلى واحد بين حدودها. دعنا نتفكر في علاقة واحد إلى واحد ما S بين الفئات. من ثم إذا كان

κ و λ مجموعتي فئات و α هو عنصر ما في κ ، سوف يكون هناك عنصر ما β في λ هو المرتبط مع α في علاقة بالنسبة للعلاقة S. الآن لـ αو β كليهما μ حد، ولذلك هما متشابهتان. وفق ذلك هناك ارتباطات الواحد إلى الواحد لـ α و β. المزعج أن هناك الكثير للغاية. من أجل أن نحصل على ارتباط الواحد للواحد لمجموع κ مع مجموع λ علينا أن نلتقط معامل ارتباط واحد بين α و β وبالمثل نقوم بذلك لكل زوج آخر. يتطلب هذا مُنتخَب من مجموعة فئات معاملات الارتباط، فئة واحدة من المجموعة كونها هي كل معاملات ارتباط α مع β. لو كانت κ و λ غير متناهيتين، لا يمكننا بشكل عام أن نعرف أن مثل هذا المُنتخَب موجود، ما لم نكن نعرف أن مسلمة التضاعف صحيحة. هكذا لا نستطيع تأسيس نوع الارتباط المعتاد المطلوب بين الجمع والضرب.

لهذه الحقيقة تبعات مختلفة غريبة ومثيرة للفضول. لكي نبدأ، نعرف أن:

$$\aleph_0^2 = \aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$$

يستدل من هذا في المعتاد على أن مجموع $\aleph_0$ فئة، لكل منها $\aleph_0$ عنصر يجب أن يحظى هو نفسه بـ $\aleph_0$ عنصر، لكن هذا الاستدلال خاطئ، حيث إننا لا نعرف أن عدد الحدود في مثل هذا المجموع هو $\aleph_0 \times \aleph_0$، ولا أنه $\aleph_0$ مترتب على ذلك. لهذا ثقله على نظرية الأعداد الترتيبية فوق المتناهية. من السهل البرهنة على أن عدد ترتيبي له $\aleph_0$ سلف يجب أن يكون واحدًا مما دعاه كانتور «بالفئة الثانية»، أي أن مثل تلك السلسلة التي تحظى بهذا

العدد الترتيبي سوف تحظى بـ $\aleph_0$ حد في حقلها. من السهل كذلك إدراك أننا لو أخذنا أي متوالية للأعداد الترتيبية من الفئة الثانية، تشكل أسلاف نهايتها على الأكثر مجموع $\aleph_0$ فئة، لكل منها $\aleph_0$ حد. يستدل من ذلك -بشكل خاطئ لو لم تكن مسلمة التضاعف صحيحة- على أن أسلاف النهاية هي $\aleph_0$ من حيث العدد، وبذلك فالنهاية هي عدد من «الفئة الثانية». ما يعني أنه من المفترض البرهنة على أنه لأي متوالية للأعداد الترتيبية من الفئة الثانية نهاية وهي من جديد عدد ترتيبي من الفئة الثانية. هذه الفرضية مع اللازمة الذاهبة إلى أن ω_1 (أصغر عدد ترتيبي من الفئة الثالثة) ليس نهاية أي متتالية، مضمنان في أغلب نظريات الأعداد الترتيبية للفئة الثانية المعروفة. من منظور الطريقة التي تضمَّن بها مسلمة التضاعف، لا يمكن اعتبار المسلمة ولازمتها مبرهنًا عليهما. قد تكونان صحيحتين أو قد لا يكونان. كل ما يمكن أن يقال في الوقت الحالي هو أننا لا نعرف. على ذلك يجب اعتبار الجزء الأكبر من نظرية الأعداد الترتيبية غير مبرهن عليه.

قد يساعد مثال توضيحي آخر في جعل هذا الأمر أكثر وضوحًا. نعرف أن $\aleph_0 = \aleph_0 \times 2$ هكذا قد نفترض أن مجموع $\aleph_0$ زوج يجب أن يحظى بـ $\aleph_0$ حد. على الرغم من استطاعتنا البرهنة على أن هذا هو الحال أحيانًا، لكننا لا نستطيع البرهنة على أن هذا يحدث دائمًا لو لم نجزم بمسلمة التضاعف. يمكن توضيح هذا بمثال المليونير الذي اشترى زوجين من الجوارب كلما اشترى زوجين من الأحذية، ولا يفعل ذلك أبدًا في أي وقت آخر، لديه شغف شديد لشراء كليهما حتى إن لديه $\aleph_0$

زوجين من الأحذية و $\aleph_0$ زوجين من الجوارب على الأقل. المعضلة هي: كم عدد الأحذية وكم عدد الجوارب لديه؟ سوف يفترض الواحد بشكل طبيعي أن لديه من الأحذية مرتين قدر ما لديه من أزواج الأحذية ولديه من الجوارب مرتين قدر ما لديه من أزواج الجوارب، وبذلك فإن لديه $\aleph_0$ من كل منهما نظرًا لأن العدد لا يزيد عن طريق المضاعفة. لكن هذا مثال على الصعوبة -التي لاحظناها بالفعل- تلك التي تكتنف ربط مجموع ν فئة، لكل منها μ حد بـ $\mu \times \nu$. من الممكن القيام بذلك أحيانًا، وأحيانًا لا يكون ذلك ممكنًا. في حالتنا من الممكن القيام بذلك مع الأحذية، لا مع الجوارب إلا عن طريق أداة ما اصطناعية للغاية. سبب الاختلاف يكمن في التالي: من بين الأحذية يمكننا تمييز اليمين من اليسار، وبذلك يمكننا عمل مُنتخَب لواحد من كل زوجين، تحديدًا يمكننا اختيار كل الأحذية اليمين أو كل الأحذية اليسار؛ لكن بالنسبة للجوارب لا يُطرح أي مبدأ مماثل للانتخاب نفسه، ولا يمكننا التأكد ما لم نجزم بمسلمة التضاعف، أن هناك أي فئة تتكون من جورب واحد من كل زوجين. هكذا هي المعضلة.

قد ننص على الأمر بطريقة أخرى. كي نبرهن على أن لفئة $\aleph_0$ حدًّا، من الضروري والكافي أن نجد وسيلة ما لتنظيم حدودها في متوالية. لا توجد أدنى صعوبة في القيام بهذا مع الأحذية. الأزواج معطاة باعتبارها تشكل $\aleph_0$ ، وهي بذلك معطاة كحقل متوالية. من بين كل زوجين خذ الحذاء اليسار أولًا واليمين ثانيًا، محافظًا على ترتيب الزوجين بلا تغيير؛ على هذا النحو نحصل على متوالية من كل الأحذية. لكن مع الجوارب

علينا أن نختار اعتباطيًّا، وذلك يتكرر مع كل زوجين، أيهما نضعه أولًا؛ وعدد غير متناهٍ من الاختيارات الاعتباطية هو استحالة. ما لم نستطع إيجاد قاعدة للانتخاب، لا نعرف أي علاقة هي مُنتخِب، ولا نعرف حتى إذا كان هناك مُنتخَب ممكنًا نظريًّا. بالتأكيد في حالة أشياء في المحيط مثل الجوارب، نستطيع دائمًا العثور على مبدأ ما للانتخاب. على سبيل المثال، خذ مراكز كتلة الجوارب: سوف تكون هناك نقاط P في المحيط بحيث إنه في حالة أي زوجين، مركزي كتلة الجوربين ليسا كليهما على نفس المسافة تمامًا من P؛ على ذلك يمكننا الاختيار من بين كل زوجين ذلك الذي مركز ثقل كتلته أقرب إلى P. لكن لا يوجد أي سبب نظري لماذا ينبغي على منهج للانتقاء مثل هذا أن يكون ممكنًا دائمًا، وحالة الجوارب مع القليل من النية الطيبة من جانب القارئ، قد تخدم هدف تبيان كيف قد يكون مُنتخَبًا مستحيلًا. من الملاحظ أنه لو كان من المستحيل انتقاء واحد من كل زوجين من الجوارب، سيستتبع ذلك أنه لا يمكن تنظيم الجوارب في متوالية وبذلك لم يكن هناك $\aleph_0$ منها. هذه الحالة توضح أنه لو كان μ هو عدد غير متناهٍ، فإن مجموعة من أزواج μ قد لا تحتوي على نفس الحدود التي تحتوي عليها مجموعة أخري من أزواج μ ؛ بالنسبة إلى أي $\aleph_0$ من أزواج الأحذية، هناك بالتأكيد $\aleph_0$ حذاء، لكننا لا نستطيع التأكد من هذا في حالة الجوارب، ما لم نجزم بمسلمة التضاعف أو نستند إلى منهج هندسي وقع بمحض الصدفة لانتخاب كذلك الذي في السابق.

تكمن معضلة أخرى هامة تتضمن مسلمة التضاعف في علاقة

الانعكاسية باللا استقرائية. نذكر أننا في الفصل الثامن قد لفتنا الانتباه إلى أن العدد الانعكاسي يجب أن يكون لا استقرائيًّا، لكن العكس لا يمكن البرهنة عليه (بقدر ما نعرف إلى الآن) إلا إذا جزمنا بمسلمة التضاعف. الطريقة التي يأتي بها ذلك هي كالتالي:

من السهل البرهنة على أن الفئة الانعكاسية هي واحدة تحتوي على فئات فرعية تحظى بـ $\aleph_0$ حد. (قد تحظى الفئة نفسها -بالطبع- بـ $\aleph_0$ حد). لذلك علينا أن نبرهن -إذا ما كان لذلك سبيلٌ- على أنه بالنظر إلى أي فئة لا استقرائية، من الممكن اختيار متوالية من حدودها. الآن لا توجد صعوبة في تبيان أن فئة غير استقرائية يجب أن تحتوي على حدود أكثر من أي فئة استقرائية أو أنه إذا كانت α فئة غير استقرائية و ν هو أي عنصر استقرائي، فإن هناك فئات فرعية من α تحظى بـ ν حد، وهو ما يصل بنا لنفس الشيء. هكذا يمكننا تشكيل مجموعات من فئات فرعية متناهية من α: أولًا فئة واحدة لا تحظى بأي حد، ثم فئات تحظي بـ 1 حد (بنفس وفرة عناصر α)، ثم فئات تحظى بـ 2 حد، وهكذا. بذلك نحصل على متوالية لمجموعات الفئات الفرعية، كل مجموعة تتكون من كل تلك التي تحظى بعدد حدود متناهٍ معين معطى. إلى الآن لم نستخدم مسلمة التضاعف، لكننا قد برهنا فقط على أن عدد تجمعات الفئات الفرعية لـ α هو عدد انعكاسي، أي أنه إذا كان μ هو عدد عناصر α، بذلك فإن 2^{μ} هو عدد الفئات الفرعية لـ α و $2^{2^{\mu}}$ هو عدد تجمعات الفئات الفرعية، من ثم لو كان μ غير استقرائي، فإن $2^{2^{\mu}}$ يجب أن يكون انعكاسيًّا. لكن ذلك بعيد عما شرعنا في البرهنة عليه.

كي نمضي قدمًا لما بعد هذه النقطة، علينا تطبيق مسلمة التضاعف. من كل مجموعة فئات فرعية دعنا نختار واحدة، متجاهلين الفئة الفرعية المكونة من فئة خالية واحدة. ما يعني أننا انتقينا فئة فرعية واحدة تحتوي على حد واحد α_1، وواحدة تحتوي على حدين α_2، وواحدة تحتوي على α_3، وهكذا. (يمكننا القيام بذلك لو جزمنا بمسلمة التضاعف؛ وإلا فإننا لا نعرف ما إذا كان في مستطاعنا القيام بذلك دائمًا أو لا) لدينا الآن متوالية $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ لفئات α الفرعية، بدلًا من متوالية لتجمعات فئات α الفرعية؛ بذلك فنحن أقرب بخطوة واحدة من هدفنا. نعرف الآن أنه إذا كان μ هو عدد غير استقرائي فإن 2^{μ} يجب أن يكون عددًا انعكاسيًّا وذلك مع الجزم بمسلمة التضاعف.

الخطوة التالية في ملاحظة أنه بالرغم من عدم استطاعتنا أن نكون متأكدين من أن عناصر α الجديدة تلج في أي مرحلة معينة في توالٍ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ فبمستطاعنا أن نكون متأكدين من أن العناصر الجديدة تواصل الولوج من حين لآخر. دعنا نوضح. الفئة α_1 التي تتكون من حد واحد هي بداية جديدة؛ فلنفرض أن هذا الحد هو x_1. قد تحتوي الفئة الثانية α_2 المكونة من حدين على x_1 وقد لا تحتوي عليه؛ إذا ما احتوت عليه فهي تطرح حدًّا واحدًا جديدًا؛ وإذا لم تفعل فهي يجب أن تطرح حدين جديدين، فلنقل x_2, x_3. في هذه الحالة من الممكن أن تتكون α_3 من x_1, x_2, x_3 وبذلك فهي لا تطرح أي حدود جديدة، لكن في هذه الحالة يجب أن تطرح α_4 حدًّا جديدًا. أول ν فئة $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_\nu$ تحتوي على $\nu + \ldots + 3 + 2 + 1$ حد كأكثر ما يكون تمامًا أي $\nu(\nu + 1) / 2$ حد؛

على ذلك سوف يكون من الممكن لو لم يكن هناك تكرارات في أول ν فئة، أن نمضي إلى $\nu (\nu + 1) / 2$ حد مع حدوث تكرارات فقط من الفئة $(\nu + 1)$. لكن مع الوقت لن تعود الحدود القديمة متوفرة بالشكل الكافي كي تشكل فئة تالية لها العدد الصحيح من العناصر، أي $\nu (\nu + 1) / 2 + 1$، لذلك يجب أن تلج حدود جديدة عند هذه النقطة إن لم يكن أقرب. يستتبع ذلك أنه إذا ما أسقطنا من متواليتنا $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ كل تلك الفئات المكونة بالكامل من عناصر وقعت في فئات سابقة، سوف نحظى -لم نزل- بمتوالية. فلتجعل متواليتنا الجديدة تدعى $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ (سوف نحظى بـ $\beta_1 = \alpha_1$ و $\beta_2 = \alpha_2$، لأن α_1 و α_2 يجب أن تطرحا حدودًا جديدة. ربما نحظى بـ $\beta_3 = \alpha_3$ وربما لا، لكن بالحديث بشكل عام فإن β_μ سوف تكون $\forall \alpha$، حيث ν هو عدد ما أكبر من μ أي أن الـ(β)ات هي بعض الـ (α)ات). الآن هذه الـ(β)ات هي على صورة أن أي واحدة منها فلنقل β_μ تحتوي على عناصر لم تقع في أي من الـ(β)ات السابقة. فلتجعل γ_μ الجزء من β_μ الذي يتكون من عناصر جديدة. بذلك نحصل على متوالية جديدة $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$ (من جديد سوف تكون γ_1 متماثلة مع β_1 ومع α_1؛ لو لم تحتوِ α_2 على العنصر الواحد من α_1، سوف نحظى بـ $\gamma_2 = \beta_2 = \alpha_2$، لكن لو احتوت α_2 على هذا العنصر الواحد، سوف تتكون γ_2 من العنصر الآخر من α_2.) هذه المتوالية الجديدة للـ(γ)ات تتكون من فئات متخالفة. على ذلك سوف يكوّن مُنتخَبًا منها متوالية؛ أي إذا كان x_1 عنصرًا في γ_1، و x_2 عنصرًا في γ_2، و x_3 عنصرًا في γ_3

وهكذا؛ من ثم فإن $x_1, x_2, x_3, \ldots$ هي متوالية وهي فئة فرعية من α. لو جزمنا بمسلمة التضاعف، من الممكن القيام بمُنتخَب مثل هذا. هكذا عن طريق استخدام هذه المسلمة مرتين يمكننا البرهنة على أنه إذا كانت المسلمة صحيحة، فإن كل عدد أصلي غير استقرائي يجب أن يكون انعكاسيًّا. من الممكن الاستدلال على هذا من نظرية تسيرميلو كذلك، حيث إنه إذا كانت المسلمة صحيحة، فربما يجب أن تحظى كل فئة جيدة التنظيم؛ بالنسبة للسلاسل جيدة التنظيم إما بعدد متناهٍ من الحدود في حقلها، وإما بعدد انعكاسي.

هناك مزية واحدة في البرهان المباشر السابق مقارنة بالاستدلال من نظرية تسيرميلو أن البرهان السابق لا يتطلب الصحة العامة لمسلمة التضاعف ، لكن صحتها فقط فيما يتعلق بتطبيقها على فئات $\aleph_0$. قد يحدث أن تستقيم المسلمة من أجل فئات $\aleph_0$ ، لكن ليس من أجل الأعداد الأكبر للفئات. لأجل هذا السبب من الأفضل أن نُرضي أنفسنا بالافتراض المقيد بشكل أكبر عندما يكون ذلك ممكنًا. يذهب الافتراض في البرهان المباشر السابق إلى أن ناتج ضرب $\aleph_0$ عامل ليس صفرًا أبدًا ما لم يكن أحد العوامل صفرًا. قد ننص على هذا الافتراض في صيغة: «$\aleph_0$ هو عدد قابل للضرب» حيث عدد ν يُعرَّف باعتباره «قابلًا للضرب» عندما يكون ناتج ضرب عوامل ν ليس صفرًا أبدًا ما لم يكن أحد العوامل صفرا. يمكننا البرهنة على أن العدد المتناهي هو قابل للضرب دائمًا، لكن لا يمكننا البرهنة على أن أي عدد غير متناهٍ هو كذلك. مسلمة التضاعف مكافئة للافتراض الذاهب إلى أن كل

الأعداد الأصلية قابلة للضرب. لكن من أجل أن نماثل الانعكاسي بغير الاستقرائي أو كي نتعامل مع معضلة الأحذية والجوارب أو كي نبيّن أن أي متوالية للأعداد من الفئة الثانية هي من الفئة الثانية، لا نحتاج إلا إلى الافتراض البسيط جدًّا للغاية الذاهب إلى أن $\aleph_0$ قابل للضرب.

من غير المستبعد أن يكون هناك الكثير مما سيكتشف بخصوص الموضوعات المناقشة في هذا الفصل. قد يُعثر على حالات حيث يمكن البرهنة على الافتراضات التي تبدو متضمنة مسلمة التضاعف دون الحاجة إليها. من المفهوم أن أحدهم قد يبين خطأ مسلمة التضاعف في صيغتها العامة. من هذا المنظور، توفر نظرية تسيرميلو الأمل الأفضل: من المحتمل البرهنة على أن المُتصِّل **continuum** أو أن بعض السلاسل التي لم تزلْ أكثر تلاحمًا غير قادرة على أن تحظى بحدودها جيدة الترتيب، وهو ما كان ليثبت خطأ مسلمة التضاعف وفق نظرية تسيرميلو. لكن إلى الآن، لم تُكتشف أي وسيلة للحصول على مثل هذه النتائج، ويبقى الموضوع مفعمًا بالغموض.

الهوامش:

(1) انظر **Principia Mathematica, vol. i. *88**.

وكذلك **vol. iii. *257 – 258**. (المؤلف).

(2) إرنست تسيرميلو: فيزيائي ورياضياتي وفيلسوف ألماني (1871 – 1953). (المترجم).

(3) **Mathematische Annalen, vol. lix. pp. 514 – 6**.

هذه الصيغة سوف نتحدث عنها باعتبارها مسلمة تسيرميلو. (المؤلف).

الفصل الثالث عشر

مسلمة اللا نهاية والأنماط المنطقية logical types

مسلمة اللا نهاية هي افتراض من الممكن إبرازه على النحو التالي:

«إذا كان **n** هو أي عدد أصلي استقرائي، هناك فئة واحدة على الأقل من الأفراد تحظى بـ **n** حد».

إذا كان هذا صحيحًا، يستتبعه بالتأكيد أن هناك فئات عديدة من الأفراد تحظى بـ **n** حد، وأن العدد الكلي من الأفراد في العالم ليس عددًا استقرائيًّا. ومن المسلمة، هناك فئة واحدة على الأقل تحظى بـ **n + 1** حد، يستتبع ذلك أن هناك فئات عديدة من **n** حد، وأن **n** ليس عدد الأفراد في العالم. وحيث إن **n** هو أي عدد استقرائي، يستتبع ذلك أن عدد الأفراد في العالم (لو كانت مسلمتنا صحيحة) يتجاوز أي عدد استقرائي. في ضوء ما وجدناه في الفصل السابق عن احتمالية الأعداد الأصلية التي ليست انعكاسية وليست استقرائية، لا يمكننا أن نستدل من مسلمتنا على أن هناك $\aleph_0$ فردًا **individual** على الأقل ما لم نجزم بمسلمة التضاعف.

لكننا نعرف أن هناك $\aleph_0$ فئة فئات على الأقل، حيث إن الأعداد الأصلية الاستقرائية هي فئة فئات وهي تشكل متوالية لو كانت مسلمتنا صحيحة.

من الممكن شرح الطريقة التي تبزغ بها حاجتنا للمسلمة كالتالي: واحدة من افتراضات بيانو أنه ليس لعددين أصليين استقرائيين نفس التابع، أي أننا لن نحظى بـ $m + 1 = n + 1$ إلا إذا كان $m = n$، لو كان m و n عددين أصليين استقرائيين. في الفصل الثامن حظينا بمناسبات استخدمنا فيها ما هو مماثل فعليًّا لافتراض بيانو السابق، تحديدًا أنه إذا كان n عددًا أصليًّا، فإن n لا يساوي $n + 1$. قد يُظن أنه من الممكن البرهنة على هذا. يمكننا البرهنة على هذا لو كانت α هي فئة استقرائية وn هو عدد عناصر α ، من ثم فإن n لا تساوي $n + 1$. من السهل البرهنة على هذه الفرضية عن طريق الاستقراء، وقد يُظن أنها تستلزم الحالة الأخرى. لكن في الحقيقة هي لا تفعل، حيث إنها قد لا تكون من مثل نوع هذه الفئة α. ما تستلزمه هو التالي: لو كان n عددًا أصليًّا استقرائيًّا بحيث إن هناك فئة واحدة على الأقل تحظى بـ n عنصرًا، فمن ثم n لا تساوي $n + 1$. تؤكد لنا مسلمة اللا نهاية (سواء كانت صحيحة أو خاطئة) أن هناك فئاتٍ تحظى بـ n عنصرًا، وذلك يمكننا من التأكيد على أن n لا تساوي $n + 1$. لكن دون هذه المسلمة سوف نكون قد تُركنا مع احتمالية أن n و $n + 1$ قد يكونان كلاهما فئتين خاليتين.

دعنا نوضح هذه الاحتمالية عن طريق مثال: افرض أن هناك تسعة أفراد بالضبط في العالم، (يجب أن أسأل القارئ الصبر نظرًا لما هو مقصود

بكلمة فرد)، من ثم فإن الأعداد الأصلية الاستقرائية من 0 إلى 9 سوف تكون كما هو متوقع تمامًا، لكن 10 (مُعرَّفة باعتبارها 9 + 1) سوف تكون الفئة الخالية. نتذكر أن n + 1 قد تُعرَّف على النحو التالي: n + 1 هي تجمع كل تلك الفئات التي تحظى بحد x، بحيث عندما يستبعد x، تبقى فئة من n حد. الآن بتطبيق هذا التعريف، نجد أنه في الحالة المفترضة، n + 1 هي فئة تتكون من لا فئات، أي أنها الفئة الخالية. سوف يكون نفس الأمر صحيحًا بالنسبة إلى n + 2 أو بالنسبة إلى n + 9 بشكل عام، ما لم يكن n هو الصفر. على ذلك سوف تكون 10 وكل الأعداد الأصلية الاستقرائية التي تأتي في عقبها متماثلة؛ ذلك لأنها جميعًا سوف تكون الفئة الخالية. في مثل هذه الحالة لن تشكل الأعداد الأصلية الاستقرائية متوالية، ولن يكون من الصحيح كذلك أنه ليس لاثنين منها نفس التابع، بالنسبة لـ 9 و10 سوف يتبعان بالفئة الخالية (الـ 10 نفسها هي فئة خالية). وكي نحول دون مثل هذه الكوارث الحسابية نحتاج إلى مسلمة اللا نهاية.

في الحقيقة، طالما كنا قانعين بحساب الأعداد الصحيحة المتناهية، ولا نطرح أعدادًا صحيحة غير متناهية أو فئات غير متناهية أو سلاسل من أعداد صحيحة أو نسب متناهية، فمن الممكن الحصول على كل النتائج المرغوبة دون مسلمة اللا نهاية. ما يعني أن في إمكاننا التعامل مع جمع الأعداد الصحيحة المتناهية والنسب وضربها ورفعها للأسس، لكن لا نستطيع التعامل مع الأعداد الصحيحة غير المتناهية وكذلك مع الأعداد غير النسبية. هكذا تخذلنا نظرية الأعداد فوق المتناهية ونظرية الأعداد الحقيقية. الكيفية التي تطرأ بها هذه النتائج المختلفة، يجب أن تُشرح الآن.

بفرض أن عدد الأفراد في العالم هو n، فإن عدد فئات الأفراد سوف يكون 2^n. يرجع ذلك للفرضية العامة المذكورة في الفصل الثامن والتي تذهب إلى أن عدد الفئات المحتواة في فئة، لها n عنصر هو 2^n. الآن 2^n دائمًا ما يكون أكبر من n. بذلك فإن عدد الفئات في العالم أكبر من عدد الأفراد[1]. إذا ما افترضنا الآن أن عدد الأفراد سوف يكون 9 -كما فعلنا للتو- سوف يكون عدد الفئات 2^9، أي 512. على ذلك إذا ما تعاملنا مع أعدادنا باعتبارها مطبقة على عد الفئات بدلًا من عد الأفراد، سوف يكون حسابنا طبيعيًّا حتى نصل إلى 512: سوف يكون أول عدد خاليًا هو 513. وإذا ما تقدمنا نحو فئات الفئات سوف نحرز ما هو أفضل (لم نزل): عددها سوف يكون 2^{512}، عدد كبير للغاية يذهل الخيال، حيث إنه يحظى بـ 153 خانة. وإذا ما تقدمنا نحو فئات فئات الفئات، سوف نحصل على عدد يمثل بـ 2 مرفوعة لأس من 153 خانة؛ سوف يكون عدد الخانات في هذا العدد ثلاثة أضعاف 10^{152} تقريبًا. في زمن تعز فيه الأوراق، سيكون من غير المرغوب تدوين هذا العدد، وإذا ما رغبنا في أعداد أكبر يمكننا الحصول عليها عن طريق الارتجال أبعد على طول التسلسل الهرمي المنطقي. على هذا النحو من الممكن جعل أي عدد أصلي استقرائي معين يتخذ مكانه بين الأعداد التي ليست خالية، عن طريق الارتحال على طول التسلسل الهرمي لمسافة كافية فقط[2].

فيما يتعلق بالنسب، لدينا أمر مشابه جدًّا. لو كانت هناك نسبة μ / ν تحظى بالخواص المتوقعة، يجب أن يكون هناك أشياء كافية -أيًّا ما كان نوعها- كي تُعد من أجل ضمان أن الفئة الخالية لن تطل

برأسها فجأة. لكن من الممكن ضمان هذا بالنسبة لأي نسبة معطاة ν / μ، دون مسلمة اللا نهاية، عن طريق الارتحال صعودًا على التسلسل الهرمي لمسافة كافية فقط. إذا لم نستطع النجاح عن طريق عد الأفراد، يمكننا محاولة عد فئات الأفراد؛ إذا ظللنا لا ننجح، يمكننا محاولة عد فئات الفئات، وهكذا. في النهاية، أيًّا ما كان عدد الأفراد الذي يحتمل أن يوجد في العالم ضئيلًا، سوف نصل إلى مرحلة، فيها أعداد أكثر كثيرًا من μ شيء، أيًّا ما قد يكون العدد الاستقرائي μ. حتى لو لم يكن هناك أي أفراد على الإطلاق، سوف يظل هذا صحيحًا، حيث ستظل هناك فئة واحدة، تحديدًا الفئة الخالية، فئتان للفئات (تحديدًا فئة الفئات والفئة التي عنصرها الوحيد هو الفئة الخالية للأفراد)، أربع فئات لفئات الفئات، 16 في المرحلة التالية، 65,536 في المرحلة التالية، وهكذا. على ذلك لا حاجة لمثل هذا الافتراض الخاص بمسلمة اللا نهاية من أجل الوصول إلى أي نسبة معطاة أو عدد أصلي استقرائي.

تكون المسلمة متطلبة عندما نرغب في التعامل مع الفئة بالكامل أو سلسلة الأعداد الأصلية الاستقرائية أو سلسلة النسب. نحتاج فئة الأعداد الأصلية الاستقرائية بالكامل من أجل التأسيس لوجود $\aleph_0$، ولكل السلسلة من أجل التأسيس لوجود المتواليات: بسبب هذه النتائج، من الضروري أن نكون قادرين على إنشاء فئة مفردة أو سلسلة ليس فيهما أي عدد أصلي استقرائي خالٍ. نحتاج إلى كامل سلسلة النسب وفق ترتيب المقدار من أجل تعريف الأعداد الحقيقية باعتبارها مقاطع: هذا التعريف لن يوفر النتيجة المرجوة ما لم تكن سلسلة النسب

ملتحمة، وهو الأمر المستحيل إذا ما كان عدد النسب الكلي متناهيًا عند المرحلة المعنية.

سوف يكون من الطبيعي أن نفترض -كما افترضت أنا نفسي في أيام سابقة- أنه من الممكن البرهنة على مسلمة اللا نهاية عن طريق أدوات البناء مثل تلك التي كنا بصددها. قد يقال: دعنا نفترض أن عدد الأفراد هو n، حيث n قد تكون 0 دون إفساد حجتنا؛ من ثم إذا ما شكلنا مجموعة من كل الأفراد والفئات وفئات الفئات، إلخ، كلها معًا، سوف يكون عدد الحدود في مجموعتنا بكاملها هو:

$$\text{اللا نهاية } \ldots n + 2^n + 2^{2^n}$$

وهو $\aleph_0$. على ذلك لو أخذنا كل أنواع الأشياء معًا، ولم نحصر أنفسنا في أشياء من أي نوع واحد، سوف نحصل بالتأكيد على فئة غير متناهية، وبذلك لن نكون في حاجة إلى مسلمة اللا نهاية. لذلك قد يقال.

الآن قبل أن نمضي مع هذا البرهان، فإن أول شيء نلاحظه أن هناك رياح شعوذة تكتنف الأمر: شيء ما نبّه أحد الحواة الذي أحضر أشياء من قبعته. الرجل الذي سلّف قبعته متأكد تمامًا من عدم وجود أرنب حي فيها من قبل، لكنه أسقط في يده إزاء الحديث عن الكيفية التي وصل بها إلى هناك. كذلك هو حال القارئ، إذا كان لديه حس قوي بالواقع سوف يشعر في اقتناع تام بأنه من المستحيل خلق تجمع غير متناهٍ من تجمع متناهٍ للأفراد، مع ذلك قد لا يكون قادرًا على أن يقول على مكان الخلل في البناء السابق. سوف يكون من الخطأ أن يؤكد كثيرًا جدًّا على إحساسه ذلك بالشعوذة؛ مثله كمثل عواطف أخرى قد

تقودنا بسهولة إلى التخبط. لكنها توفر خلفية أولية من أجل الفحص المتعمق لأي برهان يستثيرها. وعند فحص البرهان السابق سوف نجده -في رأيي- مغالطًا، على الرغم من أن المغالطة دقيقة، وليس من السهل بتاتًا تجنبها في اتساق.

المغالطة المضمنة هي مغالطة قد تُدعى «تشوش الأنماط **confusion of types**». كي نوضح موضوع «الأنماط» بشكل كامل سيتطلب الأمر كتابًا كاملًا؛ علاوة على ذلك، فهدف هذا الكتاب تجنب أجزاء الموضوع التي لا تزال غامضة وموضع جدل، عازلًا إياها من أجل التسهيل على المبتدئين، تلك الأجزاء التي من الممكن القبول بها باعتبارها مستوعبة للحقائق الرياضية الثابتة. لا تنتمي نظرية الأنماط على نحو قاطع إلى الجزء المؤكد والمنتهي من موضوعنا: لا يزال جزء كبير من هذه النظرية غير مكتمل ومشوشًا وغامضًا. لكن الشك في حاجتنا إلى مذهب ما للأنماط أقل من الشك في الهيئة التي يجب أن يتخذها الشكل الدقيق للمذهب؛ وفي اتصال بمسلمة اللا نهاية من السهل على نحو خاص إدراك ضرورة مذهب ما مماثل.

تأتي هذه الضرورة -على سبيل المثال- من «تناقض العدد الأصلي الأكبر». رأينا في الفصل الثامن أن عدد الفئات المحتواة في فئة معطاة هو دائمًا أكبر من عدد عناصر الفئة، واستدللنا على أنه لا وجود لعدد أصلي هو الأكبر. لكن إذا استطعنا إضافة فئات الأفراد وفئات فئات الأفراد، إلخ. معًا في فئة واحدة -كما اقترحنا منذ برهة- ينبغي أن نحصل على فئة سوف تكون فئاتها الفرعية الخاصة بها عناصر فيها. يجب أن تحظى

الفئة المكونة من كل الأشياء التي من الممكن عدها أيًّا كان نوعها -إذا كان هناك فئة مثل هذه- على عدد أصلي هو أكبر ما يكون. وحيث إن كل الفئات الفرعية سوف تكون عناصر فيها، لا يمكن أن يكون هناك منها أكثر من العناصر الموجودة.

عندما التقيت هذا التناقض للمرة الأولى في عام 1901، حاولت اكتشاف خلل ما في برهان كانتور الذاهب إلى أنه لا وجود للعدد الأصلي الأكبر، ذلك الذي نصصنا عليه في الفصل الثامن. اقتادني تطبيق هذا البرهان على الفئة المفترضة لكل الأشياء المتصورة إلى تناقض جديد وأبسط، تحديدًا هو التناقض التالي:

الفئة الشاملة التي نحن بصددها والتي تضم كل شيء، يجب أن تضم نفسها كأحد عناصرها. بمعنى آخر، إذا كان هناك مثل هذا الشيء «كل شيء»، فمن ثم «كل شيء» هو شيء ما وهو عنصر في الفئة «كل شيء». لكن الطبيعي أن الفئة لا تكون عنصرًا في نفسها. على سبيل المثال الجنس البشري ليس بشريًّا. كوِّن الآن جمع كل الفئات التي ليست عناصر في نفسها. هذه فئة: هل هي عنصر في نفسها أم لا؟ لو أنها كذلك، فهي واحدة من تلك الفئات التي ليست عناصر في نفسها، أي أنها ليست عنصرًا في نفسها. لو أنها غير ذلك، فهي ليست واحدة من تلك الفئات التي ليست عناصر في نفسها، أي أنها عنصر في نفسها. هكذا من بين الفرضيتين -أنها عنصر في نفسها وأنها ليست عنصرًا في نفسها- كل منهما تستلزم نقيضها. هذا تناقض[3].

من غير العسير خلق تناقضات مماثلة بشكل عفوي. حل مثل هذه

التناقضات عن طريق نظرية الأنماط موضح بشكل كامل في **Principia Mathematica**[4] وكذلك على نحو أكثر إيجازًا في مقالات لمؤلف هذا الكتاب في **American Journal of Mathematics**[5]، وكذلك في **Revue de Métaphysique**[6] في الوقت الراهن، سيكون ملخصًا مختصرًا للحل كافيًا.

يكمن الخلل في تكوين ما قد نطلق عليه فئات «غير نقية **impure**» أي فئات ليست نقية بالنسبة إلى «النمط». كما سوف نرى في فصل لاحق، الفئات هي خيالات منطقية، وستكون عبارة تبدو وكأنها عن فئة، ذات دلالة فقط لو كانت قابلة للترجمة إلى صيغة، لا ذكر فيها للفئة. يضع هذا قيدًا على السبل التي بها يمكن أن يقع دلاليًّا ما يطلق على الفئات اسميًّا (إذا لم يكن فعليًّا): ليست الجملة أو مجموعة الرموز التي تقع بها مثل تلك الأسماء الكاذبة في سبل خاطئة بالزائفة، لكنها مجردة من المعنى تمامًا. الافتراض الذاهب إلى أن فئة هي عنصر أو هي ليست عنصرًا في نفسها هو غير ذي معنى بهذه الطريقة. وبشكل أعم افتراض أن فئة أفراد هي عنصر أو هي ليست عنصرًا في فئة أفراد أخرى سوف يكون افتراضًا غير ذي معنى؛ وبناء أي فئة رمزيًّا عناصرها ليست جميعها من نفس الدرجة على التسلسل الهرمي هو استخدام للرموز بطريقة تجعلها لم تعد تُرَمِّز أي شيء.

على ذلك لو كان هناك **n** فرد في العالم وهناك 2^n فئة أفراد، لا يمكننا تشكيل فئة جديدة تتكون من الأفراد والفئات معًا وتحظى بـ $2^n + n$ فرد. على هذا النحو تفشل محاولة الهرب من الحاجة إلى

مسلمة اللانهاية. لا أتظاهر بأنني قد شرحت مذهب الأنماط أو قمت بما هو أكثر من الإشارة في مخطط عام فضفاض إلى سبب حاجتنا لوجود مثل هذا المذهب. استهدفت أن أقول ما هو متطلب فقط من أجل تبيان عدم قدرتنا على البرهنة على وجود الأعداد غير المتناهية والفئات من خلال مناهج الحواة تلك كما كنا نختبرها. مع ذلك فقد بقيت مناهج أخرى معينة، يجب الالتفات لها.

نُصَّ على دفوع متنوعة تسعى إلى البرهنة على وجود الفئات غير المتناهية في **Principles of Mathematics (p. 357)**. حتى الآن تجزم هذه الدفوع بأنه لو كان **n** عددًا أصليًّا استقرائيًّا، فإن **n** لا يساوي **n + 1**. كنا قد تعاملنا مع ذلك بالفعل. هناك حجة طُرحت في مقطع من بارمنيدس أفلاطون[7] حيث يشير فيما معناه إلى أنه إذا كان هناك مثل هذا العدد **1**، إذَنْ يحظى **1** بوجود؛ لكن **1** غير مماثل للوجود وبالتالي **1** ووجود اثنين، وبذلك هناك مثل ذلك العدد **2**، و **2** مع **1** ووجود تزود بفئة من ثلاثة حدود وهكذا. هذه الحجة خاطئة، جزئيًّا بسبب أن «وجود» ليس حدًّا يحظى بأي معنى محدد، وعلاوة على ذلك بسبب أنه إذا ما اختُرع معنى له، سوف نجد أن الأعداد لا تحظى بوجود – إنها في الحقيقة ما أطلقنا عليه «خيالات منطقية»، كما سوف نرى عندما نصل إلى التفكر في تعريف الفئات.

يعتمد القول بأن عدد الأعداد من **0** إلى **n** (الاثنان مضمنان) هو **n + 1** على الافتراض الذاهب إلى أنه حتى **n** –ومع تضمينه كذلك– لا وجود لأي عدد مساوٍ لتابعه، وهو ما لن يكون صحيحًا دائمًا –كما

سوف نرى- لو كانت مسلمة اللا نهاية خاطئة. يجب أن يكون مفهومًا أن معادلة $n = n + 1$ -والتي من الممكن أن تكون صحيحة بالنسبة لـ n متناهٍ إذا ما تجاوز n العدد الكلي للأفراد في العالم- تختلف تمامًا عن نفس المعادلة حال تطبيقها على عدد انعكاسي. يعني تطبيقها على عدد انعكاسي أن فئة ما معطاة من n حد، تكون «مشابهة» لتلك التي نحصل عليها عن طريق إضافة حد آخر. لكنها تعني بالكاد عند تطبيقها على عدد كبير للغاية بالنسبة للعالم الفعلي أنه لا وجود لفئة من n فرد، ولا وجود لفئة من $n + 1$ فرد؛ لا يعني ذلك أننا لو ارتقينا تسلسل الأنماط الهرمي بعيدا إلى الحد الكافي لتأمين وجود فئة من n حد، سوف نجد إذَنْ هذه الفئة «مشابهة» لواحدة من $n + 1$ حد، حيث إنه إذا ما كان n استقرائيًّا فلن يكون هذا هو الحال، وذلك في استقلال تام عن صحة أو خطأ مسلمة اللا نهاية.

هناك حجة وُظِّفت من قِبل كل من بولزانو[8] وديدكايند[9] للبرهنة على وجود الفئات الانعكاسية. تأتي الحجة باختصار على النحو التالي: ليس الشيء مماثلًا لتصور الشيء، لكن هناك (على الأقل في عالم الوجود) تصور عن أي شيء. علاقة الشيء بالتصور عنه هي علاقة (واحد إلى واحد)، والتصورات هي مجرد البعض من الأشياء. على ذلك تشكل العلاقة «تصورًا عن» انعكاس لمجمل فئة الأشياء في جزء من نفسها، تحديدًا في ذلك الجزء الذي يتكون من التصورات. وفق ذلك، تكون فئة الأشياء وفئة التصورات كلتاهما غير متناهية. هذه حجة مثيرة، ولا يرجع ذلك لما هو قائم فيها فقط، لكن بسبب الأخطاء فيها

(أو بسبب ما أقضي بأنها أخطاء فيها)، وهي من نوع سيكون من المفيد والتنويري الإشارة له. يكمن الخطأ الرئيس في الجزم بأن هناك تصور لكل جسم. من الصعب بشدة بالتأكيد تقرير ما هو معني «بتصور»، لكن دعنا نفترض أننا نعرف. علينا إذن افتراض أنه بدءًا (فلنقل) من سقراط، هناك تصور سقراط، ومن ثم تصور تصور سقراط وهكذا إلى ما لا نهاية. الآن بات من الواضح أن هذا ليس هو الحال من حيث إن لكل هذه التصورات وجودًا إمبيريقيًّا (تجريبيًّا) فعليًّا في عقول الناس. بعد المرحلة الثالثة والرابعة تصبح خيالية. إذا كان ينبغي الزود عن هذا القول، فإن «التصورات» المعنية يجب أن تكون تصورات أفلاطون المثالية القائمة في السماء، فهي بالتأكيد غير موجودة على الأرض. لكن من ثم يصبح من المشكوك فيه في الحال ما إذا كان هناك مثل هذه التصورات. إذا كان لنا أن نعرف أنها هناك، يجب أن يكون ذلك قائمًا على أسس نظرية منطقية ما، تثبت أنه من الضروري لشيء أن يكون هناك تصور عنه. بالتأكيد لا يمكننا الحصول على مثل هذه النتيجة إمبيريقيًّا (تجريبيًّا) أو تطبيقها كما فعل ديدكايند في «**meine Gedankenwelt**» عالم أفكاري.

إذا كنا معنيين باختبار علاقة التصور بالشيء على نحو تام، علينا أن نقدم على عدد من التساؤلات النفسية والمنطقية، ليست ذات صلة بهدفنا الأساسي. لكن ينبغي تسجيل بعض نقاط أبعد. إذا كان «التصور» ليفهم منطقيًّا، قد يكون مماثلًا للشيء، أو قد يرمز إلى وصف (بمعنى سنأتي على شرحه في فصل تال). تفشل الحجة في الحالة الأولى، لأنه كان من

اللازم لبرهان الانعكاسية أن يكون الشيء والتصور متمايزين. في الحالة الثانية تفشل الحجة أيضًا؛ لأن العلاقة بين الشيء والوصف ليست علاقة واحد إلى واحد: هناك أوصاف صحيحة غير معدودة لأي شيء معطى. على سبيل المثال قد يوصف سقراط باعتباره «معلم أفلاطون» أو باعتباره «الفيلسوف الذي شرب شراب الشوكران»[10] أو باعتباره «زوج كزانتيب». وإذا ما أخذنا بالفرضية الباقية – تأويل «التصور» نفسيًّا، يجب التأكيد على أنه لا وجود لأي كيان نفسي محدد واحد يمكن أن يُطلق عليه تصور الشيء: هناك معتقدات ومواقف لا تعد، كل منها قد يطلق عليه تصور الشيء بالمعنى الذي قد نقول به «تصوري عن سقراط مختلف تمامًا عن تصورك»، لكن لا وجود لأي كيان مركزي (باستثناء سقراط نفسه) كي يربط مختلف «التصورات عن سقراط» معًا، وبذلك لا وجود لمثل علاقة الواحد للواحد تلك بين التصور والشيء كما تفترض الحجة. وكذلك ليس صحيحًا نفسيًّا بالتأكيد -كما أشرنا بالفعل- أن هناك تصورات (مهما وسعنا من معناها) أكثر من نسبة ضئيلة من الأشياء في العالم. لأجل كل هذه الأسباب يجب رفض الحجة السابقة في صالح الوجود المنطقي للفئات الانعكاسية.

قد يُظن أنه أيًّا ما قد يُقال عن الدفوع المنطقية، فالدوافع الإمبيريقية (التجريبية) المستمدة من المكان والزمن وتنوع الألوان إلخ، هي كافية تمامًا للبرهنة على الوجود الفعلي لعدد غير متناهٍ من المفردات. لا أعتقد في ذلك. لا نملك أي أسباب فيما عدا الأحكام المسبقة للاعتقاد في امتداد غير متناهٍ للفضاء والزمن والحقائق الفيزيائية، لا الخيالات

الرياضية. نعتبر بشكل طبيعي أن المكان والزمن متصلين -أو على الأقل- ملتحمين؛ لكن هذا من جديد هو بالأساس حكم مسبق. نظرية «الكمات quanta»[11] في الفيزياء -سواء كانت صحيحة أو خاطئة- توضح حقيقة أن الفيزياء لا يمكن أن تقدم أبدًا برهانًا على الاتصال، لكن ربما توفر نفيًا تامًّا محتملًا. ليست الحواس دقيقة بالشكل الكافي كي تميز بين الحركة المتصلة وسلسلة متعاقبة لحركات منفصلة وسريعة، كما قد يكتشف أحدهم ذلك في السينما. لن يمكن تمييز عالم فيه الحركة مكونة من سلسلة من اختلاجات صغيرة متناهية تجريبيًّا عن واحد فيه الحركة متصلة. سوف يتطلب الدفاع عن هذه النظريات بالشكل المناسب مساحة كبيرة للغاية؛ في الوقت الحالي أطرحها بالكاد ليأخذها القارئ في الاعتبار. إذا كانت صحيحة، يستتبع ذلك أنه لا وجود لسبب تجريبي للاعتقاد في أن عدد المفردات في العالم يجب أن يكون غير متناهٍ، ومن غير الوارد أن يوجد أبدًا؛ وكذلك لا وجود في الوقت الراهن لأي سبب تجريبي للاعتقاد في أن العدد يجب أن يكون متناهيًا، إلا أنه من المتصور نظريًّا أنه في يوم ما قد يكون هناك دليل يشير نحو ذلك الاتجاه، حتى لو كان دليلًا غير قاطع.

يجب أن نستنتج من حقيقة أن اللا تناهي ليس متناقضًا ذاتيًّا، لكنه غير قابل للإثبات المنطقي كذلك أن لا شيء من الممكن أن يُعرَف بشكل مسبق **a priori** فيما يتعلق بما إذا كان عدد الأشياء في العالم متناهيًا أم غير متناهٍ. لذلك فالخلاصة هي تبني صياغة ليبنتز أن بعض العوالم المحتملة متناهية وبعضها غير متناهية، ولا وسيلة لدينا لمعرفة إلى

أي من نوعي العوالم هذين ينتمي عالمنا الفعلي. سوف تكون مسلمة اللا نهاية صحيحة في بعض العوالم المحتملة وخاطئة في عوالم أخرى؛ أما ما إذا كانت صحيحة أو خاطئة في عالمنا هذا فليس في إمكاننا أن نؤكد.

عبر هذا الفصل استخدمنا المرادفين «فرد **individual**» و«مفرد **particular**» دون شرح. سوف يكون من المستحيل شرحهما على نحو وافٍ دون بحث مطوّل في نظرية الأنماط بطريقة لن تكون مناسبة للعمل الحالي، لكن بعض الكلمات القليلة قبل أن نترك هذا الموضوع قد تقوم بتقليل بعض الغموض الذي سوف يغلف معنى هذين الكلمتين إن لم تُطرح هذه الكلمات.

في العبارة العادية يمكننا التمييز بين فعل يعبر عن وصف أو علاقة وبين موصوف يعبر عن موضوع الوصف أو حدود العلاقة. «عاش قيصر» تعزو صفة إلى قيصر؛ «قتل بروتس قيصر» تعبر عن علاقة بين بروتس وقيصر. باستخدام كلمة «موضوع» بمعناها العام، قد نطلق على كل من بروتس وقيصر موضوعي هذه القضية: حقيقة أن بروتس هو الفاعل نحويًّا وقيصر هو المفعول به غير ذات صلة منطقية، حيث إن نفس الحدث قد يُعبر عنه في الكلمات التالية «قُتِل قيصر من قِبَل بروتس»، حيث قيصر نائب فاعل نحويًّا. على ذلك في أبسط أنواع القضايا، سوف نحظى بصفة أو علاقة قائمة لموضوع واحد أو بين موضوعين اثنين أو أكثر بالمعنى الأشمل لكلمة موضوع. (قد يكون لعلاقة أكثر من حدين مثل: «**A** يعطي **B** إلى **C**) هي علاقة من ثلاثة

حدود) الآن غالبًا ما يحدث عند التدقيق عن قرب أن نجد أن المواضيع الظاهرة ليست مواضيع فعلية لكنها قابلة للتحليل؛ مع ذلك النتيجة الوحيد لهذا هو حلول المواضيع الجديدة محلها. يحدث كذلك أن الفعل قد يتحول نحويًّا إلى موضوع: على سبيل المثال، قد نقول «القتل هو علاقة قائمة بين بروتس وقيصر»، لكن في مثل هذه الحالات يكون النحو خادعًا، ويجب أن ترشد العبارة المباشرة الصحيحة التي تتبع القواعد النحو الفلسفي، حيث يظهر بروتس وقيصر باعتبارهما موضوعين والقتل باعتباره الفعل.

يقودنا ذلك إلى مفهوم الحدود التي متى جاءت في قضية، لا يمكن أن تأتي إلا كمواضيع ومن غير الممكن أبدًا أن تأتي على أي صورة أخرى. هذا جزء من التعريف المدرسي العتيق للجوهر؛ لكن البقاء عبر الزمن الذي ينتمي للمفهوم لا يشكل أي جزء من المفهوم الذي نُعنى به. سوف نُعرّف «أسماء العَلَم» باعتبارها تلك الحدود التي يمكن أن تأتي كمواضيع فقط في القضايا (مع استخدام «موضوع» بمعناه الشامل المشروح للتو). يمكننا بعد ذلك تعريف «الأفراد» أو «المفردات» باعتبارها الأشياء التي من الممكن تسميتها بأسماء العَلَم. (سوف يكون من الأفضل لو عرَّفناها مباشرة، بدلًا من تعريفها باستخدام وسائل من نوع رمزي ، بحيث تُرّمز عن طريقها؛ لكن كي نقوم بذلك علينا أن نغوص أعمق في الميتافيزيقا على نحو أكثر من المرغوب هنا). بالتأكيد من الوارد أن يكون هناك نكوص لا ينتهي: بحيث إن ما يبدو كمفرد هو في الواقع فئة أو تركيب من نوع ما وذلك مع كل فحص أقرب.

إذا كان هذا هو الحال، فمسلمة اللا نهاية هي صحيحة بالتأكيد. لكن إذا لم يكن هذا هو الحال سيكون من الممكن نظريًّا للتحليل بالتأكيد أن يصل إلى المواضيع الخاتمة، وهذه هي المواضيع التي تزود بمعنى «المفردات» أو «الأفراد». إنه عددها هو ذلك الذي يفترض أن تطبق عليه مسلمة اللا نهاية. إذا كان صحيحًا بالنسبة لها، فهو صحيح لفئاتها ولفئات فئات فئاتها وهكذا؛ بالمثل إذا كان خاطئًا بالنسبة لها فهو خطأ عبر كل التسلسل الهرمي. لذلك من الطبيعي إبراز المسلمة المعنية بها، بدلًا من تلك المعنية بأي مرحلة أخرى في التسلسل الهرمي. لكن سواء كانت المسلمة صحيحة أو خاطئة، يبدو أنه لا وجود لوسيلة معروفة لاستكشاف ذلك.

❊ ❊ ❊

الهوامش:

(1) مفارقة كانتور. (المترجم).

(2) في هذا الموضوع، انظر **Principia Mathematica, vol. ii. *120ff**.

وفي موضوع المعضلات المقابلة التي تتعلق بالنسب، انظر نفس المرجع **vol. iii. *303ff**. (المؤلف).

(3) مفارقة راسل. (المترجم).

(4) **Vol. i. Introduction, chap. ii., *12 and *20; vol. ii., Prefatory Statement**. (المؤلف).

(5) **Mathematical Logic as based on the theory of types, vol. xxx., 1908, pp. 222 – 262. (المؤلف).**

(6) **Les Paradoxes de la logique, 1906, pp. 627 – 650. (المؤلف).**

(7) **واحدة من محاورات أفلاطون، وهي أحد أكثر محاورات أفلاطون غموضًا وغرابة. (المترجم).**

(8) **برنارد بولزانو: عالم رياضيات ومنطق وفيلسوف تشيكي (1781 – 1848). (المترجم).**

بولزانو، Paradoxien des Unendlichen, 13 (المؤلف).

(9) **ديدكايند، Was sind und was sollen die Zahlen? No. 66. (المؤلف).**

(10) **حُوكم سقراط على أفكاره بتهمة إفساد الشباب وحُكم عليه بالموت بشرب شراب الشوكران السام. (المترجم).**

(11) **تشير نظرية الكم إلى أن الطاقة تأتي في صورة كمات محددة غير متصلة. وهناك تصور حاليًا يذهب إلى أن الواقع والزمن والمكان ربما قد تكون في صورة كمات كذلك، كبكسل الصور الرقمية تمامًا. (المترجم).**

الفصل الرابع عشر

عدم التوافق incompatibility
ونظرية الاستنباط theory of deduction

إلى الآن كنا قد استكشفنا -في شيء من العجالة- جانب فلسفة الرياضيات الذي لا يتطلب فحصًا ناقدًا لفكرة الفئة. مع ذلك وجدنا أنفسنا في الفصل السابق في مواجهة معضلات جعلت من مثل هذا الفحص أمرًا حتميًّا. قبل أن نقدر على التصدي له، علينا التفكر في جوانب أخرى معينة لفلسفة الرياضيات، تلك التي تجاهلناها حتى الآن. في المعالجة التركيبية، تأتي الجوانب التي سوف نُعنى بها الآن أولًا: هي أكثر أساسية من أي شيء كنا قد ناقشناه حتى الآن. سوف تعنينا ثلاثة موضوعات قبل أن نصل إلى نظرية الفئات، تحديدًا: 1 - نظرية الاستنباط. 2 - الدوال القضوية. 3 - الأوصاف. من بين هذه الموضوعات، الثالث غير مفترض منطقيًّا على نحو مسبق في نظرية الفئات، لكنه مثال أبسط لنمط النظريات التي نحتاجها للتعامل مع الفئات. سوف نُعنى بالموضوع الأول -نظرية الاستنباط- في هذا الفصل.

الرياضيات هي علم استنباطي: بالبدء من مقدمات معينة، يصل إلى مختلف النظريات المكونة له عن طريق عمليات صارمة للاستنباط. من الصحيح أن الاستنباطات الرياضية في الماضي كانت تفتقر في الغالب بشكل كبير للتحدد والانضباط، من الصحيح كذلك أنه من النادر الوصول إليهما على نحو مثالي. لكن طالما كان هناك افتقاد للانضباط والتحدد في البرهان الرياضي، فالبرهان معيب؛ لا يوجد في حوزتنا ما ندافع به عن الإلحاح على أن الحس المشترك يكشف صحة النتيجة. حيث إنه إذا كان لنا أن نركن إلى ذلك، سوف يكون من الأفضل لو استغنينا عن البرهان بالكلية، بدلًا من استجلاب المغالطة من أجل إنقاذ الحس المشترك. طالما وُضعت المقدمات، لا استجداء للحس المشترك أو «للبداهة» أو أي شيء فيما عدا المنطق الاستنباطي الصارم، هو الوحيد الذي ينبغي أن تحتاج إليه الرياضيات.

لاحظ كانط أن المشتغلين بالهندسة في عصره لا يستطيعون البرهنة على نظرياتهم عن طريق البرهان غير المدعوم، لكنهم احتاجوا إلى استجداء الشكل، فابتدع نظرية للاستنباط الرياضي، وفقًا لها ليس التدليل منطقيًّا في صرامة أبدًا، لكنه يتطلب دعم ما نطلق عليه «بداهة». لقد كانت النزعة الكلية للرياضيات مع ازدياد سعيها نحو الانضباط والتحدد ضد النظرية الكانطية[1]. الأشياء التي في رياضيات زمن كانط ولا يمكن البرهنة عليها، لا يمكن معرفتها – على سبيل المثال مسلمة المتوازيات[2]. ما يمكن أن يُعرَّف في الرياضيات عن طريق المناهج الرياضية هو ما يمكن الاستدلال عليه من المنطق البحت. ما هو غير ذلك

مما ينتمي للمعرفة الإنسانية يجب أن يؤكد عبر سبيل آخر – إمبيريقيًّا (تجريبيًّا) أو عن طريق الحواس أو عن طريق الخبرة بشكل ما، لكن لا باعتباره معرفة مسبقة. يمكن العثور على الأسس الإيجابية لهذه النظرية في أماكن مختلفة في **Principia Mathematica**، وهناك دفاع موضع جدل في **Principles of Mathematics**. لا يمكننا هنا إلا أن نُرجع القارئ إلى تلك الأعمال، حيث إن الموضوع ضخم للغاية بالنسبة لمعالجة على عجالة. في ذات الوقت سوف نجزم بأن كل الرياضيات هي استنباطية، ونمضي نحو التساؤل عما هو مضمن في الاستنباط.

في الاستنباط، لدينا قضية أو أكثر نطلق عليها مقدمات منها نستدل على قضية نطلق عليها النتيجة. من أجل خدمة أهدافنا، سوف يكون من الأسهل أن ندغم المقدمات **premisses** معًا في قضية واحدة عندما يكون هناك عدة مقدمات في الأصل، كي نكون قادرين على الحديث عن المقدمة فضلًا عن الحديث عن النتيجة **conclusion**. بذلك قد نعتبر الاستنباط كعملية يمكن عن طريقها العبور من معرفة بقضية معينة، مقدمة ما إلى معرفة بقضية معينة أخرى، النتيجة. لكننا لن نعتبر مثل هذه العملية كاستنباط منطقي ما لم تكن صحيحة، أي ما لم تكن هناك مثل هذه العلاقة بين المقدمة والنتيجة بحيث يكون لدينا الحق للاعتقاد في النتيجة إذا ما كنا نعرف أن المقدمة صحيحة **correct**. هذه هي العلاقة ذات الأهمية الرئيسة في النظرية المنطقية للاستنباط.

كي نكون قادرين بشكل سليم على التدليل على صدق قضية، يجب أن نعرف أن بعض القضايا الأخرى صادقة وأن هناك بينهما علاقة من

النوع الذي يُدعى «بالاستلزام implication»، أي أن المقدمة «تستلزم» النتيجة (كما قلنا). (سوف نُعرّف هذه العلاقة في إيجاز) أو قد نعرف أن قضية معينة أخرى كاذبة، وأن هناك علاقة بينهما من النوع الذي يدعى «فصل disjunction»، نعبر عنها بواسطة «p أو q»[3] وبذلك فمعرفة أن واحدة كاذبة تسمح لنا بالتدليل على أن الأخرى صادقة. من جديد، ما نرغب في التدليل عليه قد يكون «كذب» قضية ما، لا صدقها. من الممكن الاستدلال على ذلك من صدق قضية أخرى، بشرط معرفتنا بأن الاثنتين «غير متوافقتين incompatible» أي أنه إذا كانت واحدة صادقة فالأخرى كاذبة. من الممكن الاستدلال على ذلك أيضًا من كذب قضية أخرى، تحت نفس الملابسات التي استُدل فيها على صدق تلك الأخرى من صدق تلك الواحدة، أي أنه من كذب p قد نستدل على كذب q عندما q تستلزم p. هذه الأربعة كلها هي حالات استدلال. عندما تتفحص عقولنا الاستدلال، يبدو من الطبيعي النظر إلى «الاستلزام» باعتباره العلاقة الأساسية الأولية، حيث إنه هو العلاقة التي يجب أن تقوم بين p و q إذا ما كان لنا أن نقدر على الاستدلال على صدق q من صدق p. لكن لأسباب فنية ليس هذا هو التصور الأولي الأفضل كي نختاره. قبل أن نمضي صوب التصورات الأولية والتعريفات، دعنا نتفكر على نحو أعمق في دوال القضايا المتنوعة التي تطرحها علاقات القضايا المذكورة مسبقًا.

أبسط هذه الدوال هي النافية negative، «ليس p». هذه هي دالة p التي تكون صادقة عندما يكون p كاذبًا. من الأنسب الحديث عن صدق قضية

أو كذبها باعتبار ذلك «قيمة الصدق **truth value**»[4] الخاصة بها، أي أن الصدق هو «قيمة الصدق» لقضية صادقة والكذب لقضية كاذبة. على ذلك يحظى «ليس **p**» بمقابل قيمة الصدق بالنسبة إلى **p**.

من الممكن أن نتناول تاليًا «الفصل»، «**p** أو **q**». هذه دالة تكون قيمة الصدق الخاصة بها صادقة عندما تكون **p** صادقة، وكذلك عندما تكون **q** صادقة، لكنها كاذبة عندما يكون كل من **p** و **q** كاذبين.

بعد ذلك قد نتناول «الوصل **conjunction**» ، «**p** و **q**» تحظى بصدق قيمة الصدق الخاصة بها عندما يكون **p** و **q** كلاهما صادقين، غير ذلك تحظى بكذب قيمة الصدق الخاصة بها.

بعد ذلك نتناول «عدم التوافق **incompatibility**» أي «**p** و **q** ليس كلاهما صادقًا». «هذا هو نفي الوصل؛ هو كذلك فصل نفي **p** و **q** أي هو «ليس **p** أو ليس **q**». تكون قيمة الصدق الخاصة بها صادقة عندما تكون **p** كاذبة وبالمثل عندما تكون **q** كاذبة؛ تكون قيمة الصدق الخاصة بها كاذبة عندما يكون **p** و **q** كلاهما صادقين.

أخيرًا نتناول «الاستلزام **implication**» أي «**p** تستلزم **q**» أو «إذا **p** إذَنْ **q**». من اللازم أن تُفهم هذه الدالة بمعناها الأوسع الذي سوف يسمح لنا بالاستدلال على صدق **q** إذا ما عرفنا صدق **p**. على ذلك نؤولها باعتبارها تعني: «لو لم تكن **p** كاذبة، فإن **q** صادقة» أو «إما **p** كاذبة أو **q** صادقة» (حقيقة أن «تستلزم» قابلة لمعانٍ أخرى لا تعنينا؛ هذا هو المعنى المناسب لنا) ما يعني أن «**p** تستلزم **q**» مقصود بها «ليس **p** أو **q**»: تكون قيمة الصدق الخاصة بها صادقة إذا كانت **p** كاذبة وبالمثل

إذا كانت q صادقة، وتكون كاذبة إذا كانت p صادقة و q كاذبة.

بذلك فإن لدينا خمس دوال: النفي والفصل والوصل وعدم التوافق والاستلزام، كان من المحتمل أن نضيف دوالَّ أخرى، على سبيل المثال «الكذب المشترك joint falsehood»، «ليس p وليس q»، لكن الخمس السابقة سوف تكفي. يختلف النفي عن الأربع الأخرى في كونه دالة من قضية واحدة، بينما البقية هي دوال من قضيتين. لكن الخمس تتفق في أن قيمة الصدق الخاصة بها تعتمد فقط على ذلك الذي للقضية التي هي الحجة الخاصة بها. بتحديد صدق أو كذب «p» أو «p و q» (كما يقتضي الحال) فإننا نحدد صدق أو كذب النفي والفصل والوصل وعدم الاتفاق والاستلزام. دالة القضايا التي تحظى بهذه الخاصية تُدعى «دالة الصدق».

يُستنفد المعنى الكلي لدالة الصدق بواسطة جملة الحال التي تكون صادقة أو كاذبة عندها. على سبيل المثال: «ليس p» هي ببساطة دالة p التي تكون صادقة عندما تكون p كاذبة، وكاذبة عندما تكون p صادقة: لا يوجد أي معنى أبعد يمكن عزوه لها. ينطبق نفس الشيء على «p أو q» والبقية. يستتبع ذلك أن دالتيّ الصدق اللذين لهما نفس قيمة الصدق لكل قيم متغير الدالة غير متمايزتين. على سبيل المثال «p و q» هما نفي «ليس p أو ليس q» والعكس بالعكس؛ على ذلك من الممكن تعريف أي منهما باعتباره نفيًا للأخرى. لا يوجد معنى أبعد لدالة الصدق يتجاوز ويعلو الحال الذي تكون عنده صادقة أو كاذبة.

من الواضح أن الدوال الخمس السابقة ليست جميعها مستقلة. يمكننا تعريف بعضها بمصطلحات البعض الآخر، لا توجد صعوبة

كبيرة في اختزال العدد إلى اثنتين؛ الاثنتان المختارتان في **Principia Mathematica** هما النفي والفصل. من ثم يُعرَّف الاستلزام باعتباره «ليس **p** أو **q**»؛ عدم التوافق باعتباره «ليس **p** أو ليس **q**»؛ الوصل باعتباره نفي عدم التوافق. لكن شيفر[5] أوضح أننا قد نقنع بتصور واحد أولي لكل الخمس، ومكننا هذا -عن طريق نيكود[6]- من اختزال الفرضيات الأولية المتطلبة في نظرية الاستنباط إلى مبدئين غير صوريين وواحد صوري. لأجل هذا الهدف من الممكن أن نأخذ إما دالة عدم التوافق وإما دالة الكذب المشترك باعتبارها الواحدة غير القابلة للتعريف. سوف نختار الأولى.

تصورنا الأولي الآن هو دالة صدق معينة تُدعى «عدم التوافق»، والتي سوف نشير لها بـ **p / q**. في الحال يمكن تعريف النفي باعتباره عدم توافق القضية مع نفسها، أي «ليس **p**» تُعرَّف باعتبارها «**p / p**». الفصل هو عدم توافق ليس **p** وليس **q** أي هو **(p / p) | (q / q)**. الاستلزام هو عدم توافق **p** وليس **q** أي **p | (q / q)**. الفصل هو نفي عدم التوافق أي هو **(p / q) | (p / q)**. على ذلك فكل دوالنا الأربع الأخرى معرفة بمصطلحات عدم التوافق.

من الواضح أن لا نهاية لتخليق دوال الصدق، سواء بطرح المزيد من متغيرات الدوال أو بتكرار متغيرات الدوال. ما نحن معنيون به هو صلة هذا الموضوع بالاستدلال.

إذا ما عرفنا أن **p** صادقة وأن **p** تستلزم **q**، يمكننا المواصلة لتأكيد **q**. هناك دائمًا شيء ما نفسي لا يمكن تجنبه فيما يتعلق بالاستدلال:

الاستدلال هو منهج نصل عن طريقه إلى معرفة جديدة، وما ليس بنفسي فيما يتعلق به هو العلاقة التي تسمح لنا بالاستدلال على نحو صحيح؛ لكن الممر الفعلي من التأكيد على p إلى التأكيد على q هو عملية نفسية، لا يجب أن نسعى إلى تقديمها بمصطلحات منطقية بحتة.

في الممارسة الرياضية، عندما نستدل، يكون في حوزتنا دائمًا تعبير ما يحتوي على قضايا مختلفة، فلنقل p و q، ومن المعروف صدقه بالنسبة لكل قيم p و q وذلك حسب صياغته، لدينا كذلك تعبير آخر، جزء من السابق، معروف كذلك صدقه بالنسبة إلى كل قيم p و q؛ وبحسب مبادئ الاستدلال نحن قادرون على إسقاط هذا الجزء من تعبيرنا الأصلي، والتأكيد على الباقي.

من الممكن جعل هذا الحديث المجرد نوعًا ما أوضح عن طريق بعض الأمثلة.

دعنا نفترض أننا نعرف المبادئ الخمسة الصورية للاستدلال والمعددة في **Principia Mathematica**. (كان نيكود قد اختزلها إلى واحد، لكن نظرًا إلى كونها فرضية معقدة سوف نبدأ بالخمس) الخمس فرضيات هي كالتالي:

1 – «p أو p» تستلزم P، أي لو كان أي من p صادقة أو p صادقة، إذَنْ p صادقة.

2 – q تستلزم «p أو q»، أي أن الفصل «p أو q» صادق عندما يكون أحد بديليه صادقًا.

3 – «p أو q» تستلزم «q أو p». لن يكون هذا متطلبًا إذا كانت لدينا صيغة أمثل نظريًّا، حيث إنه في مفهوم الفصل لا ترتيب مضمَّن، لذلك «p أو q» و «q أو p» ينبغي أن يكونا متماثلين. لكن حيث إن رموزنا في أي صيغة متاحة تطرح ترتيبًا ما بشكل حتمي، فإننا نحتاج إلى افتراضات مناسبة كي نبين أن الترتيب غير ذي صلة.

4 – إذا كان إما p صادقة وإما «q أو r» صادقة، إذَنْ فإما q صادقة أو «p أو r» صادقة. (يخدم الالتفاف في هذه القضية زيادة قدرتها الاستنباطية).

5 – إذا كان q تستلزم r، إذَنْ «p أو q» تستلزم «p أو r».

هذه هي المبادئ الصورية للاستنباط موظفة في **Principia Mathematica**. لمبدأ الاستنباط الصوري استخدام مزدوج، ومن أجل جعل ذلك واضحًا، قمنا بإيراد الخمس فرضيات السابقة. له استخدام باعتباره مقدمة استدلال، واستخدام باعتباره مؤسسًا لحقيقة أن المقدمة تستلزم النتيجة. في مخطط الاستدلال، لدينا قضية p وقضية «p تستلزم q»، منهما نستدل على q. الآن عندما نكون معنيين بمبادئ الاستدلال، على نظامنا للفرضيات الأولية أن يكشف عن كل من p و«p تستلزم q» لاستدلالاتنا. ما يعني أن قواعد الاستدلال الخاصة بنا لا تستخدم كقواعد فقط وهو استخدامها للتأسيس لكون «p تستلزم q» لكن تستخدم كمقدمات جوهرية أيضًا، أي باعتبارها p مخططنا. فلتفترض على سبيل المثال أننا نرغب في البرهنة على أنه إذا كانتp تستلزم q، ثم إذا كانت q تستلزم r يستتبع ذلك أن p تستلزم r. لدينا هنا

علاقة من ثلاث قضايا تنص على الاستلزام. ضع:

$p = p_1$ تستلزم $q = p_2$، q تستلزم r، r تستلزم $p = p_3$

إذَنْ علينا البرهنة على أن p_1 تستلزم أن p_2 تستلزم p_3. الآن خذ خامس مبادئنا السابقة، استبدل ليس p بـ p، وتذكر أن «ليس p أو q» هي مماثلة لـ «p تستلزم q» من خلال التعريف. على ذلك يسفر مبدأنا الخامس عن:

«إذا كانت q تستلزم r، إذَنْ 'p تستلزم q' تستلزم 'p تستلزم r'» أي «p_2 تستلزم أن p_1 تستلزم p_3». فلتطلق على هذا الفرضية A.

لكن رابع مبادئنا، عندما نستبدل ليس p وليس q بـ p و q وعندما نتذكر تعريف الاستلزام، يصبح:

«إذا كانت p تستلزم أن q تستلزم r، إذَنْ q تستلزم أن p تستلزم r"

بكتابة p_2 مكان p و p_1 مكان q و p_3 مكان r، يصبح هذا:

«إذا كانت p_2 تستلزم أن p_1 تستلزم p_3، إذَنْ p_1 تستلزم أن p_2 تستلزم p_3» نطلق على هذا B.

الآن برهنا عن طريق أدوات المبدأ الخامس على أن:

« p_2 تستلزم أن p_1 تستلزم p_3» وهو ما كنا أطلقنا عليه A.

الآن بات لدينا هنا مثالٌ لمخطط استدلال، حيث A تمثل p مخططنا، و B تمثل «p تستلزم q» هكذا وصلنا إلى q، تحديدًا،

«p_1 تستلزم أن p_2 تستلزم p_3»

وهي الفرضية اللازم البرهنة عليها. في هذا البرهان يقع تكييف مبدئنا الخامس الذي أسفر عن A كمقدمة جوهرية؛ بينما تكييف مبدئنا الرابع الذي أسفر عن B يستخدم للتزويد بصورة الاستدلال. التوظيفات الصورية والمادية للمقدمات في نظرية الاستنباط مضفورة على نحو وثيق، وليس من الهام جدًّا الحفاظ عليها منفصلة، بشرط إدراكنا لتمايزها في النظرية.

الطريقة الأسبق للوصول إلى نتائج جديدة من مقدمة هي واحدة موضحة في الاستنباط السابق. الفرضيات الأولية أيًّا ما قد تكون تعتبر مؤكدة بالنسبة لكل القيم الممكنة للقضايا المختلفة p و q و r التي تقع فيها. لذلك قد نستبدل (فلنقل) بأي تعبير قيمته دائمًا قضية، مثل ليس p و«s تستلزم t» وهكذا. عن طريق هذه الاستبدالات نحصل فعليًّا على مجموعات لحالات خاصة لقضيتنا الأصلية، لكن من منظور عملي نحصل على ما هو في الواقع قضايا جديدة. يجب تأمين مشروعية الاستبدالات من هذا النوع عن طريق مبدأ الاستنباط غير الصوري[7].

قد ننص الآن على المبدأ الصوري الواحد للاستدلال الذي اختزل نيكود الخمسة المذكورة مسبقًا إليه. لأجل هذه الغاية سوف نبين أولًا كيف يمكن تعريف دوال صدق معينة بمصطلحات عدم التوافق. رأينا بالفعل أن:

p | (q / q) تعني «p تستلزم q».

نلاحظ الآن أن :

$p \mid (q / r)$ تعني «p تستلزم كل من q و r»

بالنسبة لهذا التعبير نقصد أن «p غير متوافقة مع عدم توافق q و r» أي أن «p تستلزم أن q و r منفيٌّ عدم توافقهما» أي أن «p تستلزم أن q و r كلاهما صادق» – وكما رأينا وصل q و r هو نفي عدم توافقهما.

لاحظ بعد ذلك أن $t \mid (t / t)$ تعني «t تستلزم نفسها». هذه حالة خاصة من $p \mid (q / q)$.

دعنا نكتب $\overline{p}$ باعتبارها نفي p؛ على ذلك $\overline{p / s}$ سوف تعني نفي p / s أي سوف تعني وصل p و s. يستتبع ذلك أن:

$$(s / q) \mid \overline{p / s}$$

تعبر عن عدم توافق s / q مع وصل p و s؛ بمعنى آخر تنص على أنه لو كان p و s كلاهما صادق، فإن s / q كاذبة، أي أن s وq كلاهما صادق؛ وبكلمات لا تزال أبسط، تنص على أن p وs معًا تستلزمان s وq معًا.

الآن ضع $P = p \mid (q / r)$

$\pi = t \mid (t / t)$ ،

$Q = (s / q) \mid \overline{p / s}$

من ثم فإن مبدأ نيكود الصوري الوحيد للاستنباط هو:

$$P \mid \pi / Q$$

بمعنى آخر P تستلزم كل من π و Q.

وظف نيكود إضافة إلى ذلك مبدأً غير صوري واحدًا ينتمي إلى نظرية الأنماط (والذي لا نحتاج لأن يشغلنا)، وواحدًا مقابلًا للمبدأ الذاهب إلى أنه، مع p كمعطى ومع أن p تستلزم q كمعطى؛ يمكننا تأكيد q. هذا المبدأ هو:

«إذا كان (r / q) | p صادقة و p صادقة فمن ثم q صادقة».

من هذا النظام تأتي نظرية الاستنباط بمجملها، فيما عدا إذا ما كنا معنيين بالاستنباط من «دوال قضوية» أو معنيين بوجودها أو بحقيقتها العامة، تلك الدوال التي سوف نتفكر فيها في الفصل التالي.

هناك -إن لم أكن مخطئًا- تشوش معين في عقول بعض المؤلفين بخصوص العلاقة بين القضايا، بحسب أي منها يكون الاستدلال صالحًا. من أجل أن يكون الاستدلال على q من p صالحًا، من اللازم فقط أن تكون p صادقة ويجب أن تكون القضية «ليس p أو q» صادقة. عندما يكون هذا هو الحال، من الواضح أن q يجب أن تكون صادقة. لكن الاستدلال سوف يحدث فقط في الحقيقة عندما تكون القضية «ليس p أو q» معروفة فقط عبر معرفة «ليس p» أو معرفة q. عندما تكون p كاذبة، تكون «ليس p أو q» صادقة، لكن هذا بلا أهمية للاستدلال، الذي يتطلب أن p يجب أن تكون صادقة. عندما يكون من المعروف بالفعل أن q صادقة، فمن المعروف كذلك بالطبع أن «ليس p أو q» صادقة، لكن ذلك مرة أخرى غير مفيد للاستدلال، حيث إن q معروفة بالفعل، ولذلك لا تحتاج إلى أن يُستدل عليها. في الحقيقة يظهر الاستدلال فقط عندما تمكن معرفة «ليس p أو q» دون معرفتنا بالفعل

أي من البديلين يجعل الفصل صادقًا. الآن فالأحوال التي عندها يحدث هذا هي تلك التي فيها توجد علاقات معينة للصورة بين p و q. على سبيل المثال، نعرف أنه لو استلزمت r نفي s، إذَنْ s تستلزم نفي r. بين «r تستلزم ليس s» و«s تستلزم ليس r» هناك علاقة صورية تمكننا من معرفة أن الأولى تستلزم الثانية، دون أن نكون قد عرفنا أولًا أن الأولى كاذبة أو أن الثانية صادقة. عند مثل هذه الأحوال تكون علاقة الاستلزام مفيدة عمليًّا من أجل ترسيم الاستدلال.

لكن هذه العلاقة الصورية متطلبة فقط من أجل أن نكون قادرين على معرفة أنه إما أن المقدمة كاذبة وإما أن النتيجة صادقة. إنه صدق «ليس p أو q» هو المتطلب من أجل صلاح الاستدلال؛ ما هو متطلب أكثر من ذلك متطلب فقط من أجل إمكانية الاستدلال. درس بروفيسور كلارنس إرفينج لويس[8] بشكل خاص العلاقة الصورية الأضيق التي قد ندعوها «القابلية الصورية للاستنباط **formal deductibility**». ذهب إلى أن العلاقة الأوسع التي يعبر عنها بـ «ليس p أو q» لا يجب أن تُدعى «بالاستلزام». غير أن المسألة مسألة كلمات. بفرض أن استخدامنا للكلمات متسق، لن تمثل الكيفية التي نُعرِّفها بها الكثير. تتمثل النقطة الجوهرية للفارق بين النظرية التي أدافع عنها وتلك النظرية التي يدافع بروفيسور لويس عنها في التالي: يدَّعي هو التالي، عندما تكون قضية واحدة q «قابلة للاستنباط الصوري» من قضية أخرى p، تكون العلاقة التي ندركها فيما بينهما ودعاها هو «الاستلزام الصارم **strict implication**» وهي ليست العلاقة المعبر عنها عن طريق «ليس p أو

q» لكنها علاقة أضيق، قائمة فقط عندما يكون هناك روابط صورية معينة بين p و q. أدعي أنا أنه سواء كانت هناك مثل هذه العلاقة التي تحدث عنها أو لو لم تكن هناك، فهي بأي حال علاقة لا تحتاج الرياضيات إليها، ولذلك هي علاقة لا ينبغي قبولها في نظامنا للمفاهيم الأساسية، وذلك بناءً على أسس اقتصادية عامة، عندما تقوم علاقة «القابلية الصورية للاستنباط» بين القضيتين، فهي الحالة التي يمكننا فيها إدراك إما أن الأولى كاذبة وإما أن الثانية صادقة، وليس من الضروري القبول بأي شيء أبعد من هذه الحقيقة في مقدماتنا؛ وبذلك ختامًا، فإن أسباب التفصيلة التي أوردها بروفيسور لويس ضد وجهة النظر التي أدافع عنها من الممكن أن تلتقي جميعًا في نقطة، وتعتمد بالنسبة لمعقوليتها على افتراض غير واعٍ وباطني لمنظور أرفضه. لذلك أستنتج -كمفهوم أساسي- أنه لا حاجة إلى القبول بأي صورة للاستلزام غير قابلة للتعبير عنها كدالة صدق.

❊ ❊ ❊

الهوامش:

(1) كانط: أحد أشهر الفلاسفة الألمان وأكثرهم تأثيرًا على الفلسفة المثالية (1724 – 1804). (المترجم).

(2) هي المسلمة الخامسة من مسلمات إقليدس وتنص على أنه: «من أي نقطة خارج مستقيم ما، يمر مستقيم واحد يوازي المستقيم المذكور. (المترجم).

(3) سوف نستخدم الحروف **p, q, r, s, t** كي نشير إلى قضايا مختلفة. (المؤلف).

(4) يعود هذا المصطلح إلى فريجه. (المؤلف).

(5) هنري موريس شيفر: منطقي بولندي المولد، هاجر إلى الولايات المتحدة الأمريكية (1882 – 1964) (المترجم).

Trans. Am. Math. Soc., Vol. xiv. pp. 481 – 488. (المؤلف).

(6) جون جورج بيير نيكود: فيلسوف ومنطقي فرنسي (1893 – 1924). (المترجم).

Proc. Camb. Phil. Soc. Vol. xix., i., January 1917. (المؤلف).

(7) لم يوضح مثل هذا المبدأ في **Principia Mathematica** أو في مقال نيكود المذكور مسبقًا. لكن هذا يبدو سهوًا. (المؤلف).

(8) كلارنس إرفينج لويس: فيلسوف أمريكي (1883 – 1964) (المترجم).

انظر – **Mind, vol. xxi., 1912, pp. 522 – 531; vol. xxiii., 1914, pp. 240 – 247**. (المؤلف).

❊ ❊ ❊

الفصل الخامس عشر

الدوال القضوية

عندما كنا نناقش القضايا في الفصل السابق، لم نحاول طرح تعريف لكلمة «قضية». لكن على الرغم من أن الكلمة لا يمكن تعريفها صوريًّا، من الضروري أن نقول شيئًا بخصوص معناها من أجل أن نتجنب التشوش الشائع للغاية فيما يتعلق «بالدوال القضوية» التي سوف تكون موضوع الفصل الراهن.

نقصد «بقضية» صيغة أولية من الكلمات تعبر عما هو صادق أو كاذب. أقول «أولية» لأنني لا أرغب في استثناء إلى جانبها الرموز الفعلية أو حتى مجرد الأفكار إذا كان لها سمة رمزية. لكنني أعتقد أن كلمة «قضية» ينبغي أن تُقصر على ما قد يُدعى -من ناحية ما- «رموزًا»، ومن ثم على مثل تلك الرموز عندما تزود بصياغة للصدق والكذب.

على ذلك سوف تكون «اثنان واثنان أربعة» و«اثنان واثنان خمسة» قضيتين، وكذلك «سقراط رجل» و«سقراط ليس

رجلًا» قضيتين. «العبارة: «أيًّا ما قد يكون العددين a و b فإن $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ هي قضية؛ لكن المعادلة المجردة «$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$» بمفردها ليست كذلك، حيث إنها لا تجزم بشيء محدد إلا إذا أُخبرنا أو اقتُدنا إلى افتراض أن a و b ينبغي أن يحظيا بكل القيم الممكنة، أو ينبغي أن يحظيا بهذه القيم وتلك. يُجزم بالافتراض الأول من بين هذين الافتراضين على نحو مضمر كقاعدة عند استعراض المعادلات الرياضية، وبذلك تصبح قضايا؛ لكن لو لم يُجزم بمثل هذا، تظل «دوالّ قضوية». في الحقيقة، «الدالة القضوية» هي تعبير يحتوي على مكون واحد أو أكثر بحيث إنه عندما تُعين قيم لهذه المكونات يصبح التعبير قضية. بمعنى آخر، هو دالة قيمها قضايا. لكن هذا التعريف الأخير يجب أن يُستعمل في حرص. لن تكون الدالة الوصفية دالة قضوية إلا إذا كانت قيمها قضايا، لكن في مثل هذه الحالة توصف القضايا فقط: في الدالة القضوية، يجب أن تستعرض القيم قضايا بالفعل.

من السهل ضرب أمثلة لدوال قضوية: «x هو بشري» هي دالة قضوية؛ طالما بقى x غير محدد، هي ليست بالصادقة أو بالكاذبة، لكن عند تعيين قيمة لـ x تصبح قضية صادقة أو كاذبة. أي معادلة رياضية هي دالة قضوية. طالما لم تكن للمتغيرات قيم محددة، فالمعادلة بالكاد هي تعبير ينتظر التحديد كي تصبح قضية صادقة أو كاذبة. إذا كانت معادلة تحتوي على متغير واحد، تصبح صادقة عندما يُجعل المتغير مساويًا لجذر المعادلة، وإلا تصبح كاذبة؛ لكنها لو «مطابقة رياضية identity»

سوف تكون صحيحة عندما يكون المتغير أي عدد. معادلة منحنى في مستوى أو سطح في الفضاء معادلة قضوية، صادقة بالنسبة إلى قيم الإحداثيات المنتمية إلى نقاط على المنحنى أو السطح، وخاطئة بالنسبة للقيم الأخرى. تعبيرات المنطق التقليدي على شاكلة «كلA هو B » هي دوال قضوية: يجب تعيين A و B كفئات محددة قبل أن تصبح مثل هذه التعبيرات صادقة أو كاذبة.

يعتمد مفهوم «الأحوال cases» أو «الحالات instances» على الدوال القضوية. على سبيل المثال، تفكر في نوع العملية المطروحة من خلال ما يدعى «بالتعميم generalisation» ودعنا نتناول مثالًا ما أوليًّا للغاية، فلنقل «البرق يُتبع بالرعد». لدينا عدد من «الحالات» في هذا، أي عدد من القضايا على شاكلة: «هذا وميض البرق وأُتبع بالرعد». عمّ تكون هذه الوقائع « الحالات «؟ هي حالات دالة قضوية: «إذا كان x هو وميض برق، فإن x يُتبع بالرعد». تكمن عملية التعميم (لسنا معنيين لحسن الحظ بصلاحها) في العبور من عدد من مثل هذه الحالات إلى الحقيقة العامة للدالة القضوية: «إذا كان x هو وميض برق، فإن x يُتبع بالرعد» سوف تكتشف أن الدوال القضوية هي دائمًا مضمنة عندما نتحدث عن حالات أو أحوال أو أمثلة على نحو مماثل.

لا نحتاج إلى أن نسأل السؤال التالي أو أن نحاول أن نجيب عنه: «ما الدالة القضوية؟» الدالة القضوية القائمة بمفردها تمامًا قد تعتبر مجرد مخطط، مجرد صدفة، وعاء خاليًا من المعنى، ليست شيئًا له دلالة بالفعل. نحن معنيون بالدوال القضوية -عند الحديث بشكل عام- عبر

سبيلين: الأول مضمن في مفهومي «صادقة في كل الحالات» و«صادقة في بعض الحالات»؛ الثاني مُضمَّن في نظرية الفئات والعلاقات. سوف نأجل ثاني هذين الموضوعين إلى فصل تالٍ؛ أما الأول فيجب أن يشغلنا الآن.

عندما نقول إن شيئًا ما «صادق دائمًا» أو «صادق في كل الحالات» يبدو من الواضح أن «الشيء» المضمن من غير الوارد أن يكون قضية. القضية إما صادقة وإما كاذبة فقط، وهناك نهاية للأمر. لا توجد حالات أو أحوال لـ«سقراط رجل» أو لـ «مات نابليون في سانت هيلينا». هذه قضايا ولن يكون هناك معنى لأن نقول عنها أنها صادقة «في كل الحالات». هذه الجملة قابلة للتطبيق على الدوال القضوية فقط. على سبيل المثال انظر في أمر الشيء من ذلك النوع الذي يقال غالبًا عند مناقشة السببية. (نحن غير معنيين بصدق أو كذب ما يقال، لكننا معنيون بتحليله المنطقي فقط). أُخبرنا أن**A** في كل الحالات يأتي متبوعًا بـ **B**. الآن إذا كانت هناك «حالات» لـ **A**، يجب أن يكون **A** مفهومًا عامًّا ما، من الدال أن نقول عنه «x_1 هو **A**» و«x_2 هو **A**» و«x_3 هو **A**» وهكذا، حيث x_1 و x_2 و x_3 هي مفردات لا يماثل أحدها الآخر. ينطبق هذا على سبيل المثال على الحالة السابقة للبرق. نقول إن البرق (**A**) يُتبع بالرعد (**B**). لكن الومضات المنفصلة هي مفردات، غير متماثلة، لكنها تتقاسم الخاصية المشتركة لكونها برقًا. الطريقة الوحيدة للتعبير عن خاصية مشتركة بشكل عام هي بقول أن الخاصية المشتركة لعدد من الأشياء هي دالة قضوية تصبح صادقة عندما يُعتبر أي واحد من هذه

الأشياء هو قيمة المتغير. في هذه الحالة تكون كل الأشياء «حالات» صدق للدالة القضوية – على الرغم من أن الدالة القضوية لا يمكن أن تكون صادقة أو كاذبة بذاتها، إلا أنها تكون صادقة في حالات معينة وكاذبة في حالات معينة أخرى، ما لم تكن «صادقة دائمًا» أو «كاذبة دائمًا». عندما نرجع إلى مثالنا، ونقول إن A في كل الحالات يُتبع بـ B، نعني أنه أيًّا ما قد تكون قيمة x، إذا كانت x هي A، فهو يُتبع بـ B، هذا هو ما نعنيه عندما نجزم بأن دالة قضوية معينة هي «صادقة دائمًا».

الجملة المتضمنة كلمات على شاكلة «كل» «مجمل» «ما» «الـ» «بعض» تتطلب دوالَّ قضوية من أجل تأويلها. يمكن شرح الطريقة التي تأتي بها الدالة القضوية عن طريق كلمتين من الكلمات السابقة تحديدًا «كل» و«بعض».

في التحليل الأخير هناك شيئان فقط يمكن القيام بهما حيال الدالة القضوية: أحدهما هو الجزم بأنها صادقة في كل الحالات، والآخر هو الجزم بأنها صادقة في حالة واحدة على الأقل، أو في بعض الحالات (كما سوف نقول مفترضين أنه لن يكون هناك استلزام ضروري لتعدد الحالات). من الممكن اختزال كل الاستخدامات الأخرى للدوال القضوية إلى هاتين الاثنتين. عندما نقول إن الدالة القضوية صادقة «في كل الحالات» أو «دائمًا» (كما نقول أيضًا عندما لا نقوم بأي طرح زمني)، نقصد أن كل قيمها صادقة. إذا كانت «φx» دالة و a هو النوع الصحيح للأشياء كي يكون متغير دالة لـ «φx»، إذن φa سوف تكون صادقة، أيًّا ما قد تكون a المختارة. على سبيل المثال، «لو كان a بشريًّا

فإن a فانٍ» هي صادقة سواء كان a بشريًّا أو لم يكن؛ في الحقيقة كل قضية على هذه الصورة هي صادقة. على ذلك فإن الدالة القضوية «إذا كان x بشريًّا، فإن x فانٍ» هي «صادقة في كل الحالات» أو من جديد عبارة «لا وجود لكائنات أحادي القرن[1]» هي مماثلة لعبارة «الدالة القضوية 'x' ليس كائن 'أحادي قرن' صادقة في كل الحالات». الجزم في الفصل السابق فيما يتعلق بالقضايا على سبيل المثال «'p أو q' تستلزم 'q أو p'» هو في الواقع جزم بأن دوال قضوية معينة صادقة في كل الحالات. نحن لا نجزم في المبدأ السابق –على سبيل المثال– بكون p أو q هذه أو تلك هي فقط الصادقة على نحو خاص، لكن بكونها صادقة لأي p أو q متعلقة بما يمكن أن يُجعل ذا مغزى. اشتراط أن دالة يجب أن تكون ذات مغزى بالنسبة إلى متغير دالة معطى مماثل تمامًا لاشتراط أنها يجب أن تحظى بقيمة لمتغير الدالة هذا، سواء كانت صادقة أو كاذبة. تنتمي دراسة شروط الدلالة (المغزى) إلى مذهب الأنماط، والذي لن نتتبعه لما هو أكثر من الصورة التي رسمناها له في الفصل السابق.

ليست مبادئ الاستنباط هي التي تتألف فقط من تأكيدات جازمة بأن بعض الدوال القضوية المعينة هي صادقة بل كل الفرضيات الأولية للمنطق تفعل كذلك. لو لم يكن هذا هو الحال، سيتوجب عليها ذكر أشياء أو مفاهيم معينة –سقراط أو احمرار أو شرق أو غرب أو ما ليس– ومن الواضح أنه ليس من اختصاص المنطق القيام بتأكيدات عما هو صادق فيما يتعلق بمثل هذا الشيء أو هذا المفهوم ولا يتعلق بذلك

الشيء أو ذلك المفهوم الآخر. جزء من تعريف المنطق (لكنه ليس تعريفه بالكامل) أن كل فرضياته هي عامة بشكل كامل، أي أنها جميعًا تتألف من تأكيدات جازمة بأن بعض الدوال القضوية التي لا تحتوي على حدود ثابتة هي دائمًا صادقة. سوف نعود في فصلنا الأخير إلى مناقشة الدوال القضوية التي لا تحتوي على حدود ثابتة. في الوقت الحالي سوف نواصل صوب الشيء الآخر الذي يمكن القيام به حيال الدالة القضوية، تحديدًا الجزم بأنها «صادقة أحيانًا» أي صادقة على الأقل في واحدة من الحالات.

عندما نقول «هناك رجال» يعني هذا أن الدالة القضوية «x هو رجل» صادقة أحيانًا. عندما نقول «بعض الرجال هم إغريق» يعني هذا أن الدالة القضوية «x هو رجل وهو إغريقي» هي صادقة أحيانًا. عندما نقول إن «آكلو لحوم البشر ما زالوا موجودين في أفريقيا» فهذا يعني أن الدالة القضوية «x هو آكل لحوم بشر الآن في أفريقيا» هي صادقة أحيانًا أي أنها صادقة بالنسبة إلى بعض قيم x. كي نقول إن «هناك على الأقل n فرد في العالم» كأن نقول إن الدالة القضوية «α هي فئة أفراد وعنصر للعدد الأصلي n» هي صادقة أحيانًا، أو كما قد نقول إنها صادقة عند قيم معينة لـ α. هذه الصورة من التعبير هي أكثر ملاءمة عندما يكون من اللازم الإشارة إلى المكوِّن المتغير الذي نتخذه كمتغير دالة بالنسبة إلى دالتنا القضوية. على سبيل المثال، تحتوي الدالة القضوية السابقة التي من الممكن اختصارها إلى « α هي فئة من n فرد» على متغيرين α و n. مسلمة اللانهاية بلغة الدوال القضوية هي: «الدالة القضوية 'إذا كان n

عددًا استقرائيًّا، فمن الصحيح لبعض قيم α أن α هي فئة من n فرد' هي صادقة لكل قيم n الممكنة». ها هنا «دالة مُروّضة» α هي فئة من «n فرد» يُقال إنها صحيحة أحيانًا بالنسبة إلى α؛ ويُقال إن الجزم بأن هذا يحدث إذا كان n عددًا استقرائيًّا صادق دائمًا بالنسبة إلى n.

العبارة الذاهبة إلى أن دالة φ x صادقة دائمًا هي نفي العبارة الذاهبة إلى أن ليس φ x صادقة أحيانًا، والعبارة الذاهبة إلى أن φ x صادقة أحيانًا هي نفي العبارة الذاهبة إلى أن ليس φ x صادقة دائمًا. على ذلك فإن عبارة «كل الرجال فانون» هي نفي العبارة الذاهبة إلى أن الدالة «x هو رجل غير فانٍ» هي صادقة أحيانًا. وعبارة «توجد كائنات أحادي القرن» هي نفي عبارة أن دالة «x ليس كائن أحادي القرن» صادقة دائمًا. نقول إن φ x «غير صادقة أبدًا» أو «كاذبة دائمًا» إذا كان ليس φ x صادقة دائمًا. نستطيع -إذا اخترنا- أن نأخذ أحد الزوجين «دائمًا» و«أحيانًا» كتصور أولي ونُعرِّف الآخر عن طريق الأول وأدوات النفي. على ذلك إذا ما اخترنا «أحيانًا» واعتبرناها تصورنا الأولي، يمكننا تعريف: «(x) φ صادقة دائمًا، باعتبارها تعني أن (من الكاذب أن ليس φ x صادقة أحيانًا)» لكن لأسباب تتصل بنظرية الأنماط يبدو من الأصح أن نعتبر كل من «دائمًا» و«أحيانًا» كتصورين مبدئيين، ونُعرِّف من خلالهما نفي القضايا التي يأتيان فيها. ما يعني أنه بافتراض أننا قد عرَّفنا نفي قضايا من النوع الذي تنتمي إليه φ x بالفعل (أو تبنيناه كتصور أولي) نُعرِّفه كالتالي: «نفي (x) φ دائمًا، هو (ليس φ x أحيانًا)، ونفي (x) φ أحيانًا، هو (ليس φ x دائمًا)» على نحو مماثل يمكننا إعادة تعريف الفصل وبقية دوال الصدق،

بتطبيق ذلك على القضايا المحتوية على متغيرات ظاهرة، بمصطلحات التعريفات والتصورات الأولية الخاصة بالقضايا غير المحتوية على متغيرات ظاهرة. تُدعى القضايا غير المحتوية على متغيرات ظاهرة «قضايا ابتدائية». من هذا يمكننا أن نصعد خطوة بخطوة مستخدمين مثل هذه المناهج كما أشرنا لها للتو، نحو نظرية دوال الصدق كما هي مطبقة على القضايا المحتوية على متغير واحد واثنين وثلاثة... أو أي عدد حتى n، حيث n هو أي عدد متناهٍ معين[2]. الصور المتخذة باعتبارها هي الأبسط في المنطق الصوري التقليدي هي في الواقع بعيدة عن كونها كذلك، وكلها تتضمن الجزم بكل قيم أو ببعض قيم دالة قضوية مركبة. فلنبدأ بأن ننظر في «كل S هو P» سوف نتناولها باعتبار أن S مُعرّفة عن طريق دالة قضوية φx ، و P عن طريق دالة قضوية ψx. على النحو الذي معه، إذا كان S هو رجال، فإن φx سوف تكون «x هو رجل»؛ وإذا كان P هو فانون فإن ψx سوف تكون «هناك زمن عنده x يموت» إذن «كل S هو P» تعني أن φx تستلزم ψx صادقة من الملاحظ أن «كل S هو P» لا تنطبق فقط على تلك الحدود التي هي Sات بالفعل، بل تقول شيئًا على ذات القدر عن الحدود التي ليست Sات. افترض أننا صادفنا x ولا نعرف ما إذا كان S أو لا؛ لا تزال عبارتنا «كل S هو P» تخبرنا شيئًا ما عن x، تحديدًا أنه إذا كان x أحد S، إذن x هو أحد P. وهذا صحيح من كل وجه كذلك عندما يكون x ليس أحد S مثلما هو عندما x أحد S. إذا لم يكن ذلك صادقًا على نحو متكافئ في كلتا الحالتين، فإن القياس للخلف لن يكون منهجًا

صالحًا؛ هذا المنهج شديد الأهمية وهو ينحصر في استخدام النتائج في الحالات حيث الفرضية كاذبة (كما يتبين فيما بعد)[3]. يمكننا صياغة الأمر بطريقة أخرى. من أجل أن نفهم «كل S هو P» من غير الضروري أن نكون قادرين على تعديد الحدود التي هي Sات؛ بشرط أننا نعرف ما المقصود بأن يكون الحد S وما المقصود بأن يكون P، يمكننا فهم ما الذي يجزم به فعليًّا «كل S هو P» بشكل كامل، أيًّا ما كانت قلة ما قد نعرفه عن الحالات الفعلية لأي منهما. يبين لنا هذا أن الحدود الفعلية التي هي Sات ليست هي ذات الصلة فقط بعبارتنا «كل S هو P» لكنها كل الحدود التي يكون بالنسبة لها افتراض أن كونها Sات له دلالته، أي كل الحدود التي هي Sات معًا وكذلك كل الحدود التي هي ليست Sات – أي «النمط» المنطقي المناسب برمته. وما ينطبق على العبارات التي عن الكل، ينطبق على العبارات التي هي عن البعض. «هناك رجال» كمثال، تعني أن «x هو بشري» صادقة لبعض قيم x. هنا كل قيم x (كل القيم لـ «x هو بشري» ذات دلالة سواء كانت صادقة أو كاذبة) على علاقة بالأمر، وليس فقط تلك التي هي في الحقيقة بشر. (يصبح هذا واضحًا إذا ما تفكرنا كيف يمكننا البرهنة على أن مثل هذه العبارة كاذبة) كل تأكيد يتعلق بـ «كل» أو «بعض» لا يتضمن بذلك الحجج التي تجعل دالة ما صادقة فقط، لكن كل ما يجعلها ذات دلالة، أي كل ما له قيمة بالنسبة لها على الإطلاق، سواء كانت صادقة أو كاذبة.

يمكننا الآن المواصلة مع تأويلاتنا للصور التقليدية للمنطق الصوري العتيق. نفترض أن S هو تلك الحدود x التي تكون φ x بالنسبة لها

صادقة و P هي تلك التي تكون $\psi\ x$ بالنسبة لها صادقة. (كما سوف نرى في فصل تالٍ، كل الفئات تشتق بهذه الطريقة من الدوال القضوية) من ثم:

«كل S هو P» تعني أن $\varphi\ x$ تستلزم $\psi\ x$ هي صادقة دائمًا»

«بعض S هو P» تعني أن $\varphi\ x$ و $\psi\ x$ صادقة أحيانًا»

«لا S هو P» تعني أن $\varphi\ x$ تستلزم ليس $\psi\ x$ هي صادقة دائمًا»

«بعض S ليس P» تعني أن $\varphi\ x$ و ليس $\psi\ x$ صادقة أحيانًا»

من الملاحظ أن الدوال القضوية المؤكدة هنا لكل أو بعض القيم ليست $\varphi\ x$ و $\psi\ x$ نفسيهما، لكن دوال الصدق لـ $\varphi\ x$ و $\psi\ x$ لنفس متغير الدالة x. أسهل طريقة لإدراك ما المقصود هي بالبدء لا من $\varphi\ x$ و $\psi\ x$ في العموم، لكن من $\varphi\ a$ و $\psi\ a$، حيث a هو ثابت ما. افترض أننا بصدد «كل الرجال هم فانون»: سوف نبدأ بـ:

«إذا كان سقراط بشريًّا، فإن سقراط فانٍ».

ومن ثم سوف نعتبر سقراط وقد استبدل المتغير x به حيثما أتى سقراط. الشيء الواجب التأكيد عليه أنه، على الرغم من أن x يظل متغيرًا بلا أي قيمة محددة، إلا أنه يجب أن يحظى بنفس القيمة في $\varphi\ x$ كما في $\psi\ x$ عندما نؤكد على أن «$\varphi\ x$ تستلزم $\psi\ x$» صادقة دائمًا. يستدعي هذا أننا سوف نبدأ بدالة قيمها على شاكلة أن «$\varphi\ a$ تستلزم $\psi\ a$» بدلًا من دالتين منفصلتين $\varphi\ x$ و $\psi\ x$؛ حيث إننا لو بدأنا بدالتين منفصلتين لن يمكننا أبدًا تأمين أن x سوف يحظى بنفس القيمة في الاثنتين بينما بقى غير محدد.

من أجل الاختصار، نقول إن «φ x تستلزم ψ x دائمًا» عندما نقصد أن «φ x تستلزم ψ x» هي دائمًا صادقة. تدعى القضايا التي على صورة «φ x تستلزم ψ x دائمًا» «بالاستلزام الصوري»؛ هذا الاسم يُسبغ على نحو متكافئ لو كانت هناك متغيرات متعددة.

تُظهر التعريفات السابقة إلى أي مدى أصبحت مثل هذه القضايا بعيدة عن الصور الأبسط للقضايا على شاكلة «كل S هو P»، تلك التي يبدأ بها المنطق التقليدي. إنه نموذج لقصور التحليل المُضمَّن حيث يعالج المنطق التقليدي «كل S هو P» كقضية من نفس صورة «x هو P» – كمثال، هو يعالج «كل الرجال هم فانون» كقضية من نفس صورة «سقراط هو فانٍ» كما رأينا للتو، الأولى هي على صورة «φ x تستلزم ψ x دائمًا» بينما الثانية على صورة «ψ x». التشديد على فصل هاتين الصورتين –والذي يعود لبيانو وفريجه– قد لعب دورًا حيويًّا جدًّا في تقدم المنطق الرمزي.

سوف نرى أن «كل S هو P» و«لا S هو P» لا يختلفان فعليًّا في الصورة باستثناء استبدال ψ x بـ ليس ψ x، ونفس الشيء ينطبق على «بعض S هو P» و «بعض S هو ليس P». من اللازم أيضًا ملاحظة أن القواعد التقليدية للتحويل كاذبة، إذا ما تبنينا المنظور الذاهب إلى أن قضايا على شاكلة «كل S هو P» لا تتضمن «وجود» الSات، أي لا تستدعي وجوب وجود حدود هي Sات (وهو المنظور الوحيد السائغ). تؤدي التعريفات السابقة إلى النتيجة التالية، إذا كان φ x كاذبة دائمًا، أي أنه إذا لم يكن هناك أي Sات، إذَنْ

«كل S هو P» و«لا S هو P» سوف تكون كلتاهما صادقة، أيًّا ما قد تكون P. بحسب التعريف في الفصل السابق، «φ x تستلزم ψ x» تعني أن «ليس φ x أو ψ x» والتي تكون صادقة دائمًا طالما ليس φ x دائمًا صادقة. للوهلة الأولى، قد تقود هذه النتيجة القارئ إلى أن يرغب في تعريفات مختلفة، لكن القليل من الخبرة العملية تبين له سريعًا أن أي تعريفات مختلفة لن تكون ملائمة وسوف تحجب التصورات الهامة. القضية «φ x تستلزم ψ x دائمًا وφ x هي صادقة أحيانًا» هي مركبة بالضرورة، وسوف يكون من الجبن الشديد النص عليها باعتبارها تعريف «كل S هو P». بحسب تعريفاتنا «كل S هو P» لا تستلزم «بعض S هو P» حيث إن الأولى تسمح بعدم وجود S والثانية لا تسمح؛ على ذلك أصبح التحويل بالصدفة غير صالح، وأصبحت بعض أنظمة القياس المنطقي مغلوطة، على سبيل المثال **Darapti**[4]: «كل M هو S وكل M هو P وبالتالي بعض S هو P» وهو ما يفشل إذا لم يكن هناك M.

لمفهوم «الوجود» صيغ عديدة، سوف تشغلنا أحدها في الفصل القادم؛ لكن الصيغة الأساسية هي تلك المشتقة مباشرة من مفهوم «صادق أحيانًا». نقول إن الحجة a «تحقق» دالةx φ إذا كانت φ a صادقة؛ هذا هو نفس المعنى الذي يحمله قولنا أن جذور معادلة تحقق المعادلة. الآن إذا كانت φ x صادقة أحيانًا، قد نقول إن هناك xات تكون φ x صحيحة معها أو قد نقول إن «متغيرات الدالة المحقِّقة لـ φ x موجودة». هذا هو المعنى الأساسي لكلمة «وجود». المعاني

الأخرى إما مشتقة من هذا وإما تجسد تشوشًا أكبر للفكر. قد نقول بشكل صائب «الرجال يوجدون بمعنى أن «x هو رجل» هي صادقة أحيانًا. لكن إذا ما قمنا بقياس منطقي كاذب: «الرجال يوجدون، سقراط رجل، بذلك سقراط يوجد»، نحن نتحدث هراء، لا معنى له، حيث إن سقراط هو ليس مثل «الرجال»، هو مجرد متغير دالة لدالة قضوية معطاة. المغالطة مماثلة إلى حد كبير للحجة الذاهبة إلى أن: «الرجال هم متعددون وسقراط هو رجل، بذلك فإن سقراط متعدد». من الواضح أن النتيجة في هذه الحالة هي هراء تام، لكن في حالة الوجود هذا غير واضح، لأسباب سوف تظهر بشكل كامل في الفصل التالي. في الوقت الراهن دعنا فقط نسجل كملاحظة الحقيقة التي مفادها، بالرغم من أنه من الصحيح أن نقول «الرجال يوجدون»، إلا أنه من غير الصحيح أو بالأحرى من غير ذي المعنى أن نعزو وجود إلى مفرد ما x صادف أن كان رجلًا. بشكل عام، «الحدود التي تحقق φ x توجد» تعني أن «φ x صادقة أحيانًا»؛ لكن «a يوجد» (حيث a حد يحقق φ x) مجرد ضوضاء أو بنية تخلو من الدلالة. سوف نجد أنه بوضع هذه المغالطة البسيطة صوب أعيننا، يمكننا حل العديد من الألغاز الفلسفية العتيقة المتعلقة بمعنى الوجود. «مفاهيم المنوالية **modality**»: لازم **necessary** وممكن **possible** ومستحيل **impossible**. (وأحيانًا عرضي **contingent** وجازم **assertoric** تستخدم عوضًا عن ممكنًا»، هي مجموعة أخرى من المفاهيم، سمحت الفلسفة لنفسها بالوقوع في تشوشات يائسة حيالها، وذلك من خلال عدم فصل القضايا والدوال

القضوية بالشكل الكافي. كان المنظور التقليدي أنه من بين القضايا الصادقة كان بعضها لازمًا، بينما بعضها الآخر عرضيًّا أو جازمًا؛ وفي ذات الحين من بين القضايا الكاذبة البعض كان مستحيلًا، تحديدًا تلك التي كانت نقائضها لازمة، بينما حدث وكان البعض الآخر غير صادق فقط. في الحقيقة، رغم ذلك لم يكن هناك أي تفسير واضح أبدًا لما أُضيف للحقيقة عن طريق مفهوم اللزوم. في حالة الدوال القضوية، تقسيم الثلاث طيات واضح. إذا كانت φx قيمة غير محددة لدالة قضوية معينة، فستكون لازمة لو أن الدالة صادقة دائمًا، وممكنة لو أنها صادقة أحيانًا، ومستحيلة لو أنها غير صادقة أبدًا. يبرز هذا النوع من الأمور في علاقة بالاحتمال. على سبيل المثال، افترضْ أن كرة x سُحبت من حقيبة تحتوي على عدد من الكرات: إذا كانت كل الكرات بيضاء، فإن «x هي بيضاء» لازمة؛ إذا كان البعض أبيض، فإنها ممكنة؛ إذا لم تكن بيضاء، فإنها مستحيلة. هنا كل ما هو معروف عن x أنها تحقق دالة قضوية معينة، تحديدًا «كانت x كرة في الحقيبة». هذا أمر عام فيما يتعلق بمعضلات الاحتمال وليس بغير الشائع في الحياة العملية. في مثل هذه الحالات المتعلقة بالمنوالية في العموم، الدالة القضوية هي ذات صلة. من أجل التفكير الواضح في اتجاهات متنوعة عديدة، مسلك الحفاظ على الدوال القضوية منفصلة في صرامة عن القضايا هو أمر في أقصى درجات الأهمية، وقد كان الفشل في القيام بذلك في الماضي عارًا وخزيًا للفلسفة.

الهوامش:

(1) أحادي القرن: هو كائن خرافي على هيئة حصان خرافي أبيض اللون ذو قرن واحد. (المترجم).

(2) منصوص على منهج الاستنباط في **Principia Mathematica, vol. i. *9**. (المؤلف).

(3) هو برهان الخلف حيث تتعقب فرضية لنفيها بإثبات أنها تقود إلى نتائج فاسدة. (المترجم).

(4) كلمة تمثل حجة الجدال المنطقي في الشكل الثالث، وفيه هناك مقدمتان عامتان ونتيجة خاصة. (المترجم).

❊ ❊ ❊

الفصل السادس عشر

الأوصاف descriptions

تعاملنا في الفصل السابق مع كلمتي كل وبعض، في هذا الفصل سوف نتناول الحرف (الـ the) في المفرد، وفي الفصل القادم سوف نتناول حرف (ال) في الجمع. قد يبدو من المبالغ فيه تكريس فصلين لحرف واحد، لكن بالنسبة للفيلسوف الرياضي هو حرف على درجة بالغة من الأهمية، تمامًا كحال نحويّ براونينج[1] مع الكلمات التي تلتصق بالكلمات التي تسبقها في اللغة اليونانية وربما تكاد لا تنطق مع القراءة السريعة مثل ε δ، سوف أتناول تعاليم هذا الحرف ولو كنت (ميتًا كلوح خشب)[2]، لا في السجن فقط[3].

كنا قد حظينا بالفعل بفرصٍ للإتيان على ذكر «الدوال الوصفية» أي تلك التعبيرات على شاكلة «والد x» أو «جيب x». سوف تُعرَّف هذه الدوال عن طريق تعريف «الأوصاف» في البداية.

قد تكون «الأوصاف» من نوعين، محددة definite وغير محددة indefinite (أو مبهمة ambiguous). الوصف غير المحدد هو عبارة

تأتي على صورة «مثل كيت وكيت»، والوصف المحدد هو عبارة تأتي على صورة «مثل الكيت والكيت»[4] (في صيغة المفرد). دعنا نبدأ بالأول.

«من الذي قابلت؟». «قابلت رجلًا» «هذا وصف غير محدد أبدًا»، لذلك فنحن لم نمضِ بعيدًا بهذه الصياغة. سؤالنا هو: ما الذي أُجزم به بالفعل عندما أؤكد على أنني «قابلت رجلًا»؟ دعنا نفترض أنني في الحقيقة قد قابلت جونز. من الواضح أن ما أجزم به ليس «أنني قابلت جونز». قد أقول «قابلت رجلًا، لكنه لم يكن جونز»؛ في تلك الحالة، بالرغم من أنني كذبت، إلا أنني لم أناقض نفسي، مثلما يجب أن أفعل إذا كنت أقصد بالفعل عندما قلت قابلت رجلًا أنني قابلت جونز. من الواضح كذلك أن الشخص الذي أتحدث معه يمكنه أن يفهم ما أقول، حتى لو كان أجنبيًّا، ولم يسمع أبدًا بجونز.

لكن في إمكاننا أن نمضي أبعد: ليس جونز فقط الذي لم يلج إلى عبارتي، بل كذلك لم يلج إليها أي رجل فعلي. يصبح هذا جليًّا عندما تكون العبارة كاذبة، حيث إنه حينئذ لا يوجد أي سبب يجعل من المفترض بجونز أن يلج إلى القضية دونًا عن أي شخص آخر. في الحقيقة ستظل العبارة ذات دلالة، على الرغم من أن صحتها قد لا تكون ممكنة، حتى لو لم يكن هناك أي رجل على الإطلاق. «قابلت كائن أحادي قرن» أو «قابلت أفعوان بحر» هما عبارتان جازمتان على نحو مثالي، إذا ما كنا نعرف ما الذي سوف يكونه مخلوق أحادي قرن أو أفعوان بحر، أي ما هو تعريف هذين الوحشين الخرافيين. على ذلك

يمكن فقط أن نطلق على كل منهما المفهوم الذي يلج إلى القضية. على سبيل المثال، في حالة «أحادي القرن»، هناك هذا المفهوم فقط، لا يوجد هناك في مكان ما بين الظلال شيء ما غير واقعي قد يُدعى «أحادي قرن». لذلك من الواضح أن هذه القضية -لو حُللت بالشكل الصحيح- فإنها لا تحتوي على مُكوِّن «أحادي قرن»، على الرغم من احتوائها على مفهوم «أحادي القرن»[5] حيث إنها دالة (على الرغم من كذبها).

سؤال (عدم الواقعية **unreality**) الذي يجابهنا عند هذه النقطة، هو سؤال هام للغاية. لقد تعاملت الغالبية العظمى من المناطقة -الذين تعاملوا مع هذا السؤال- عبر مسارات خاطئة وقد ضللهم النحو. لقد اعتبروا في الحقيقة الصورة النحوية كدليل أكيد بشكل أكبر مما عليه الحال بالفعل. ولم يكونوا يعرفون ما هي الاختلافات الهامة في الصورة النحوية. «قابلت جونز» و«قابلت رجلًا» سوف تعتبران بشكل تقليدي كقضيتين من نفس النوع، لكن في الحقيقة الفعلية هما من جنسين مختلفتين تمامًا: الأولى تُسمِّي شخصًا فعليًّا، جونز؛ بينما تتضمن الثانية دالة قضوية، وتصبح عند توضيحها: الدالة «قابلت **x** و **x** هو بشري» صادقة أحيانًا. (نذكر أننا تبنينا اتفاقًا على استخدام «أحيانًا» باعتبارها لا تستلزم الوقوع أكثر من مرة). من الواضح أن هذه القضية ليست على صورة «قابلت **x**»، التي تبرر وجود قضية «قابلت كائن أحادي قرن» على الرغم من الحقيقة التي مفادها أنه لا وجود لمثل هذا الشيء «كائن أحادي قرن». بسبب غياب نظام الدوال القضوية، كثير من

المناطقة اقتيدوا إلى نتيجة مفادها أن هناك كيانات غير واقعية. حاجج -مينونج[6] على سبيل المثال- أن في استطاعتنا الحديث عن «الجبل الذهبي» و«المربع المستدير» وما إلى غير ذلك؛ في استطاعتنا خلق قضايا حقيقية، هذه الأشياء هي مواضيعها؛ لذلك يجب أن تحظى بنوع ما من الوجود المنطقي؛ لأنه بغير ذلك سوف تكون القضايا التي تقع فيها بلا معنى. يبدو لي أنه في مثل هذه النظريات هناك قصور في ذلك الإحساس بالواقعية، الذي ينبغي الحفاظ عليه حتى في أكثر الدراسات تجريدية. لا يجب أن يلح المنطق على قبول كائن أحادي قرن بأكثر مما قد يفعل علم الحيوان؛ فالمنطق معنيٌّ بالعالم الواقعي، تمامًا كما هو علم الحيوان معني بالعالم الواقعي الحقيقي، على الرغم من ملامحه الأكثر عمومية وتجريدية. لا يعدو قولنا إن لكائنات أحادي القرن وجودًا في شعار النبالة أو في الأدب أو في المخيلة كونه مراوغة بائسة وهزيلة. ما يوجد في شعار النبالة ليس حيوانًا، من لحم ودم، يتحرك ويتنفس بنفسه. ما يوجد هو صورة أو وصف في كلمات. بالمثل، الإلحاح على أن وجود هاملت -على سبيل المثال- في عالمه الخاص به، تحديدًا عالم مخيلة شكسبير، هو وجود حقيقي تمامًا مماثل لوجود (فلنقل) نابليون في العالم العادي، هو بمثابة التلفظ بما هو مشوِّش عن قصد أو أن هناك من هو مشوَّش إلى درجة من النادر تصديقها. هناك عالم واحد فقط، العالم «الواقعي»: مخيلة شكسبير هي جزء منه، والأفكار التي تملكته حين كتب هاملت كانت واقعية. كما هي الأفكار التي تتملك منا عندما نقرأ المسرحية. لكنها من جوهر خيالي تمامًا، الأفكار والمشاعر

وما إلى غير ذلك عند شكسبير وقرائه هي الواقعية فقط، ولا يوجد إلى جانبها أي هاملت موضوعي. عندما تنص على كل المشاعر التي أثارها نابليون في كُتَّاب وقراء التاريخ، فأنت لم تلمس الرجل الفعلي؛ لكن في حالة هاملت قد بلغت آخره. لو لم يفكر أحدهم في هاملت، فلن يكون من شيء هناك قد بقى منه؛ لكن لو لم يفكر أحدهم في نابليون فسوف يرى سريعًا أن هناك مَن فعل. حس الواقعية حيوي وهام في المنطق، وكل من تلاعب به عن طريق التظاهر بأن لهاملت نوعًا آخر من الواقعية يضر الفكر. من الضروري للغاية أن يكون هناك حس قوي بالواقعية عند وضع أطر تحليل صحيح للقضايا عن كائنات أحادي القرن والجبال الذهبية والمربعات المستديرة ومثل هذه الأجسام الكاذبة.

ينبغي علينا في خضم انسياقنا للإحساس بالواقعية أن نصر على عدم القبول بأي شيء «غير واقعي» عند تحليل القضايا. لكن، في النهاية إذا لم يكن هناك ما هو غير واقعي، كيف لنا أن نسأل هل من الممكن القبول بأي شيء غير واقعي؟ الإجابة هي أننا عند تعاملنا مع القضايا، نحن نتعامل للوهلة الأولى مع رموز، وإذا ما عزونا دلالة لمجموعة من الرموز بلا دلالة، سوف نقع في خطأ القبول بأشياء غير واقعية، في الهيئة الوحيدة التي يكون فيها ذلك ممكننا، تحديدًا في هيئة شيء موصوف. في الفرضية «قابلت كائن أحادي القرن» تصنع الكلمات الأربع كلها معًا قضية ذات مغزى، ومفردة «أحادي القرن» بمفردها ذات مغزى، لها نفس المغزى الذي لمفردة «الرجل». لكن «أحادي قرن» لا تشكل أي مجموعة تابعة لها أي معنى قائم بذاته. على ذلك لو أننا عزونا كذبًا

معنى لهذه العبارة، نجد أنفسنا مثقلين بـ «أحادي قرن» وبمعضلة كيف من الوارد أن يكون هناك شيء مثل هذا في عالم ليس فيه كائنات أحادي قرن. «أحادي قرن» هو وصف غير محدد، لا يصف شيئًا. ليس وصفًا غير محدد يصف شيئًا غير واقعي. مثل هذه القضية التي على شاكلة «x غير واقعي» يكون لها معنى فقط عندما يكون «x» وصفًا محددًا أو غير محدد؛ في تلك الحالة سوف تكون القضية صادقة إذا ما كان «x» وصفًا، لا يصف شيئًا. لكن سواء كان «x» يصف شيئًا أو لا يصف شيئًا، هو في كل الأحوال ليس مكونًا في القضية التي يقع فيها؛ مثل «هو أحادي قرن» ليست مجموعة تابعة، تحظى بأي معنى بنفسها. كل هذه النتائج تأتي من الحقيقة التي مفادها، عندما يكون «x» وصفًا، فإن «x هو غير واقعي» أو «x هو غير موجود» ليستا بالهراء الذي لا معنى له، لكنها ذات دلالة دائمًا وصادقة أحيانًا.

قد نمضي الآن مواصلين صوب تعريف معنى القضايا التي تحتوي على أوصاف مبهمة في العموم. افترضْ أننا نرغب في صياغة عبارة عن «كيت وكيت» حيث «كيت وكيت» هي تلك الأشياء التي تحظى بالخاصية العامة φ أي تلك الأشياء x التي بالنسبة لها الدالة القضوية φ x صادقة. (على سبيل المثال لو أخذنا «رجل» كمثال «لكيت وكيت»، φ x سوف تكون «x هو بشري») افترض الآن أننا نرغب في تأكيد الخاصية ψ لـ «كيت وكيت» أي أننا نرغب في تأكيد أن «كيت وكيت» تحظى بتلك الخاصية التي تكون لـ x عندما تكون ψ x صادقة. (على سبيل المثال، في حالة «قابلت رجلًا» سوف تكون ψ x

«قابلت x»). الآن فالقضية «كيت وكيت» تحظى بالخاصية ψ ليست قضية من النوع x ψ. إذا كانت كذلك يجب أن تكون «كيت وكيت» مماثلة لـ x بالنسبة إلى x مناسبة؛ وعلى الرغم من أن هذا قد يكون صحيحًا (بمعنى ما) في بعض القضايا، إلا أنه بالتأكيد غير صحيح في حالة مثل هذه التي لـ «كائن أحادي قرن». إنها فقط هذه الحقيقة التي مفادها أن عبارة «كيت وكيت» تحظى بالخاصية ψ ليست من النوع x ψ، التي تجعل من الممكن لـ «كيت وكيت» أن تكون -بمعنى معين قابل للتعريف بوضوح- «غير واقعية». التعريف هو كالتالي:

عبارة أن «شيء يحظى بالخاصية φ لديه الخاصية ψ».

تعني أن:

«التأكيد المشترك لـ x φ و x ψ ليس كاذبًا دائمًا».

طالما كان المنطق ساريًا، هذه هي نفس القضية التي قد يُعبَّر عنها عن طريق «بعض φات هي ψات»؛ لكن بلاغيًّا هناك فارق؛ لأنه في حالة الواحد هناك طرح للمفرد، أما في الحالة الأخرى فالطرح للجمع. مع ذلك فهذه ليست النقطة الهامة. النقطة الهامة كامنة في أنه عند التحليل السليم، نجد أن القضايا التي هي لفظيًّا عن «كيت وكات» لا تحتوي على أي مكون مُمَثل عن طريق هذه الجملة. وذلك هو السبب وراء أنه من الوارد أن تكون مثل هذه القضايا ذات مغزى حتى عندما لا يكون هناك شيء مثل هذا، على شاكلة كيت وكيت.

ينتج تعريف الوجود كما هو مطبق على الأوصاف المبهمة مما قد

قيل في نهاية الفصل السابق. قلنا إن «رجال يوجدون» أو «رجل يوجد» إذا ما كانت الدالة القضوية «x هو رجل» صادقة أحيانًا؛ وعلى نحو عام «كيت وكيت» يوجد إذا ما كان «x هو كيت وكيت» صادقة أحيانًا. من الممكن أن نقول هذا على نحو آخر. القضية «سقراط هو رجل» مكافئة بلا شك للقضية «سقراط هو بشري»، لكنها ليست نفس القضية تمامًا. الـ هي «سقراط هو بشري» تعبر عن علاقة فاعل بمسنده، أما الـ هي «سقراط هو رجل» تعبر عن الهوية المطابقة، إنه لخزي للجنس البشري اختياره توظيف نفس الكلمة «هو» من أجل هذين التصورين المختلفين تمامًا- خزي تداركته بالتأكيد اللغة المنطقية الرمزية. الهوية في «سقراط هو رجل» هي مطابقة بين كيان مسمًّى (القبول بسقراط كاسم، مرتهن بتوصيف يناقش لاحقًا) وكيان موصوف على نحو مبهم. كيان موصوف على نحو مبهم سوف «يوجد» عندما تكون قضية مثل هذه صادقة مرة واحدة على الأقل، أي عندما تكون هناك قضية صادقة واحدة على الأقل على صورة «x هو كيت وكيت»، حيث «x» هو اسم. إنها خاصية للأوصاف المبهمة (مقارنة بالمحددة)، إن من الوارد أن يكون هناك أي عدد من القضايا الصادقة على الصورة السابقة – سقراط هو رجل، أفلاطون هو رجل إلخ. على ذلك «يوجد رجل» تنتج عن سقراط أو أفلاطون أو أي أحد آخر. على الجانب الآخر، مع الأوصاف المحددة للصورة المقابلة للقضية، تحديدًا «x هو الكيت والكيت» (حيث x هو اسم) يمكن أن تكون صادقة لقيمة واحدة فقط لـ x على الأكثر. يحملنا هذا إلى موضوع الأوصاف المحددة، التي يجب أن

تُعرَّف بطريقة مماثلة لتلك الموظفة من أجل الأوصاف المبهمة لكن أكثر تركبًا نوعًا ما.

نصل الآن إلى الموضوع الرئيس للفصل الحالي، تحديدًا تعريف حرف ال (في المفرد). أحد أهم النقاط في تعريف «كيت وكيت» تنطبق على نحو مكافئ على «الكيت والكيت»؛ التعريف الواجب البحث عنه هو تعريف لقضايا تقع فيها هذه الجملة، وليس تعريفًا للجملة نفسها بمعزل عن الجملة. في حالة «كيت وكيت» كان من الواضح تمامًا أنه: لا يمكن لأحدهم افتراض أن «رجلًا» كان كيانًا محددًا، يمكن تعريفه بنفسه. سقراط هو رجل وأفلاطون هو رجل. أرسطو هو رجل لكن لا يمكننا أن نستدل على أن «رجلًا» يعني نفس ما يعنيه «سقراط» وكذلك نفس ما يعنيه «أفلاطون» وكذلك نفس ما يعنيه «أرسطو»، حيث إن لهذه الأسماء الثلاثة معانيَ مختلفة. مع ذلك، عندما عدّدنا كل الرجال في العالم ، لم يتبقَّ شيء يمكن أن نقول عنه «هذا رجل». ليس ذلك فقط بل ليس هناك ما يمكن أن نقول عنه هذا الـ «رجل»، الكيان الجوهري الذي هو رجل غير محدد دون أن يكون أي شخص على وجه الخصوص». من الواضح تمامًا بالتأكيد أنه أيًّا ما يكون في العالم هو محدد: إذا كان هناك رجل، فهو رجل واحد محدد ولا أحد آخر. لذلك فلا يمكن أن يكون هناك كيان مثل «رجل» يمكن العثور عليه في العالم عوضًا عن رجال معينين. ووفقًا لذلك من الطبيعي ألا نُعرِّف «رجل» نفسه، لكننا نُعرِّف فقط القضايا التي يقع فيها.

في حالة «الكيت والكيت» هذا صحيح على نحو مكافئ، على

الرغم من كونه غير واضح للوهلة الأولى. قد نوضح أن هذا هو الحال الذي يجب أن تكون عليه الأمور وذلك عن طريق التفكر في الفارق بين اسم وبين وصف محدد. انظر في الفرضية «سكوت هو المؤلف لويفرلي»[7]. لدينا هنا اسم «سكوت» ووصف «مؤلف ويفرلي» يُجزَم بانطباقهما على نفس الشخص. يمكن توضيح التمايز بين الاسم وبين كل الرموز الأخرى على الوجه التالي: الاسم هو رمز بسيط معناه شيء ما يمكن أن يأتي كفاعل فقط أي، شيء على شاكلة ذلك الذي في الفصل الثامن، الذي عرَّفناه «كفرد» و«كمفرد». والرمز «البسيط» هو ذلك الذي لا أجزاء له، هي رموز. على ذلك «سكوت» هو رمز بسيط؛ لأنه على الرغم من امتلاكه لأجزاء (تحديدًا حروف منفصلة)، فهذه الأجزاء ليست رموزًا. على الجانب الآخر، «المؤلف لويفرلي» ليس رمزًا بسيطًا لأن كلماته المنفصلة التي تكوّن الجملة هي أجزاء، هي رموز. إذا كان أيًّا ما يبدو «كفرد» قابلًا بالفعل لتحليل أبعد -كما قد يكون عليه الحال- سينبغي أن نُرضي أنفسنا بما قد يطلق عليه «أفراد نسبيون» وهي حدود لا يمكن تحليلها أبدًا ولا يمكن أن تأتي إلا كفاعل عبر كل النص. وفي تلك الحالة علينا أن نُرضي أنفسنا وفقًا لذلك «بالأسماء النسبية». من منطلق معضلتنا الحالية، تحديدًا تعريف الأوصاف، من الممكن تجاهل هذه المعضلة سواء كانت هذه أسماء مطلقة أو مجرد أسماء نسبية حيث إنها معنية بمراحل مختلفة في التسلسل الهرمي «للأنماط»، حيثما نرغب في مقارنة مثل هذين الزوجين «سكوت» و«المؤلف لويفرلي» اللذان ينطبقان كلاهما على نفس الشيء ولا نُصَّعد من أمر معضلة الأنماط.

لذلك يمكننا في الوقت الراهن معالجة الأسماء باعتبارها قابلة لأن تكون مطلقة؛ لا شيء مما نقوله يعتمد على هذا الجزم، لكن عن طريق ذلك من الممكن اختصار الكلام.

لدينا الآن شيئان كي نقارنهما: 1 – اسم: وهو رمز بسيط يفيد بشكل مباشر عن فرد الذي هو معناه ويحظى بهذا المعنى قائمًا بذاته مستقلًّا عن معاني كل الكلمات الأخرى؛ 2 – وصف: وهو مكون من كلمات عديدة، معانيها ثابتة بالفعل، ومنها ينتج ما يمكن اعتباره «كمعنى» الوصف، أيًّا ما كان.

لا تماثل قضية تحتوي وصفًا ما سوف تصبح عليه القضية عندما يستبدل باسم، حتى لو كان الاسم يُسمِّي نفس الشيء الذي يصفه الوصف. من الواضح أن «سكوت هو المؤلف لويفرلي» هي قضية مختلفة عن «سكوت هو سكوت»: الأولى هي حقيقة في التاريخ الأدبي والثانية هي بديهية بسيطة. وإذا ما وضعنا أي أحد آخر غير سكوت مكان «المؤلف لويفرلي» سوف تصبح قضيتنا كاذبة، وبذلك لن تبقى بالتأكيد نفس القضية. لكن قد يقال إن قضيتنا هي بالضرورة من نفس نوع (فلنقل) «سكوت هو سير والتر» التي فيها اسمان يقال إنهما ينطبقان على نفس الشخص. الرد كالتالي، إذا كان «سكوت هو سير والتر» تعني بالفعل أن «الشخص المسمى ‹سكوت› هو الشخص المسمى ‹سير والتر›»، إذَنْ تُستخدم الأسماء كأوصاف، أي أن الفرد بدلًا من أن يُسمى هو يوصف باعتباره الشخص الذي يحظى بذلك الاسم. هذه طريقة تستخدم الأسماء بها كثيرًا حال الممارسة، وكقاعدة لن يكون هناك

شيء في الصياغة يوضح ما إذا كانت تستخدم بهذه الطريقة أو باعتبارها أسماء. عندما يستخدم اسم مباشرة، لمجرد الإشارة لما نتحدث عنه، هو ليس مضمنًا في الصدق المجزوم به أو في الكذب المجزوم به إذا حدث وكان جزمنا كاذبًا: إنه بالكاد جزء من الرمزية التي نعبر بها عن أفكارنا. ما نريد التعبير عنه هو شيء من الممكن (على سبيل المثال) ترجمته إلى لغة أجنبية؛ هو شيء بالنسبة له الكلمات الفعلية أداة، لكنها ليست مضمنة فيه. على الجانب الآخر، عندما ننشئ قضية عن «الشخص المدعو سكوت» فالاسم الفعلي «سكوت» يلج إلى ما نجزم به، لا إلى مجرد اللغة المستخدمة في القيام بالجزم. سوف تصبح قضيتنا قضية مختلفة الآن لو أننا استبدلنا «الشخص المدعو ‹سير والتر›» لكن طالما نستخدم الأسماء كأسماء، سواء نقول «سكوت» أو نقول «سير والتر» هي غير ذات صلة بما نجزم به سواء كنا نتحدث الإنجليزية أو الفرنسية. على ذلك طالما كانت الأسماء المستخدمة مستخدمة كأسماء فإن «سكوت هو سير والتر» هي نفس الفرضية البسيطة مثل «سكوت هو سكوت». هذا يكمل البرهان الذاهب إلى أن «سكوت هو المؤلف لويفرلي» ليست هي نفس القضية التي تنتج عن استبدال اسم بـ«المؤلف لويفرلي»، ولا يهم الاسم الذي قد نستبدله.

عندما نستخدم متغيرًا ونتحدث عن دالة قضوية، فلنقل φx ، فسوف تكمن عملية تطبيق عبارات عامة عن φx على حالات خاصة في استبدال الحرف «x» باسم، بفرض أن φ دالة تحظى بأفراد لأجل متغير الدالة الخاص بها. على سبيل المثال، افترض أن φx هي «صادقة دائمًا»؛

فلنستخدم -فلنقل- «قانون المطابقة» x = x . من ثم قد نستبدل «x» بأي اسم نختاره، وسوف نحصل على قضية صادقة. افترض في الوقت الراهن أن «سقراط» و«أفلاطون» و«أرسطو» هي أسماء (هو افتراض نزق للغاية)، يمكننا أن نستدل من قانون المطابقة على أن سقراط هو سقراط وأن أفلاطون هو أفلاطون وأن أرسطو هو أرسطو. لكننا سوف نرتكب مغالطة إذا ما حاولنا الاستدلال دون مقدمات أبعد أن المؤلف لويفرلي هو المؤلف لويفرلي. ينتج هذا عن ما كنا قد برهنا عليه للتو، أنه إذا ما استبدلنا في قضية «المؤلف لويفرلي» باسم، نحصل على قضية مختلفة. ما يعني أنه بتطبيق النتيجة على حالتنا الراهنة: إذا كان «x» هو اسم، فإن «x = x» ليست مماثلة للقضية «المؤلف لويفرلي هو المؤلف لويفرلي»، ولا يهم الاسم الذي قد يكونه «x». هكذا من الحقيقة التي مفادها أن كل القضايا التي هي على صورة «x = x» صادقة، لا يمكننا أن نستدل على أن المؤلف لويفرلي هو المؤلف لويفرلي دون المزيد من الصخب. في الحقيقة القضايا التي على شاكلة «الكيت والكيت هو الكيت والكيت» ليست صادقة دائمًا: من الضروري أن يكون الكيت والكيت موجودا (مصطلح سوف نشرحه بعد قليل). من الكاذب أن الملك الحالي لفرنسا هو الملك الحالي لفرنسا أو أن المربع الدائري هو المربع الدائري. عندما نستبدل اسمًا بوصف، قد تصبح الدالة القضوية «الصادقة دائمًا» كاذبة، إذا ما كان الوصف لا يصف شيئًا. لا يوجد أي غرابة في ذلك بمجرد أن ندرك أننا عندما نستبدل بوصف فإن النتيجة ليست قيمة للدالة القضوية موضع التساؤل (ما تم البرهنة عليه في الفقرة السابقة).

نحن الآن في وضع يخول لنا تعريف القضايا التي يقع فيها وصفًا محددًا. الشيء الوحيد الذي يميز «الكيت والكيت» من «كيت وكيت» هو استلزام الفرادة. لا يمكننا الحديث عن «الساكنون لندن»؛ لأن ساكن لندن هو صفة ليست متفردة. لا يمكننا الحديث عن الملك الحالي لفرنسا لأنه غير موجود؛ لكن في إمكاننا الحديث عن «الملك الحالي لإنجلترا»[8]. على ذلك تستلزم القضايا عن «الكيت والكيت» دائمًا القضايا المقابلة عن «كيت وكيت» مع إضافة أنه لا وجود لأكثر من «كيت وكيت» واحد. لا يمكن أن تكون قضية مثل «سكوت هو المؤلف لويفرلي» إذا لم تكن ويفرلي قد كتبت أبدًا أو إذا كان هناك العديد من الناس قد كتبوها؛ ولا يمكن أن تنشأ أي قضية أخرى عن طريق استبدال «x» بـ «المؤلف لويفرلي» في الدالة القضوية φx . قد نقول إن «المؤلف لويفرلي» تعني قيمة x التي عندها 'x كتب ويفرلي' صادقة»، هكذا على سبيل المثال تتضمن «المؤلف لويفرلي كان إسكتلنديًّا» التالي:

1 – «x كتب ويفرلي» ليست كاذبة دائمًا؛

2 – «إذا كان x و y كتبا ويفرلي، فإن x و y متماثلان» هي صداقة دائمًا؛

3 – «إذا كان x كتب ويفرلي، فإن x كان إسكتلنديًّا» هي صادقة دائمًا.

تنص هذه القضايا الثلاث عند ترجمتها إلى اللغة المعتادة على أن:

1 – على الأقل شخص واحد كتب ويفرلي؛

2 – على الأكثر شخص واحد كتب ويفرلي؛

3 – أيًّا مَن كان مَن كتب ويفرلي كان إسكتلنديًّا.

«تستلزم 'المؤلف لويفرلي' هذه الثلاثة بمجملها». وبالعكس تستلزم الثلاثة معًا (لا اثنين منهما فقط) أن المؤلف لويفرلي كان إسكتلنديًّا. على ذلك فمن الممكن اعتبار الثلاثة كتعريف لما هو مقصود بالقضية «المؤلف لويفرلي كان إسكتلنديًّا».

قد نبسِّط نوعًا ما من هذه القضايا الثلاثة. الأولى والثانية مكافئتان لـ: «هناك حد c بحيث تكون 'x كتب ويفرلي' صادقة عندما x هي c وكاذبة عندما x ليس c». بمعنى آخر، هناك حد c بحيث 'x كتب ويفرلي' هي دائمًا مكافئة لـ 'x هو c'» (تكون قضيتان «متكافئتين» عندما تكون كلتاهما صادقة أو كلتاهما كاذبة). لدينا هنا دالتان لـ x كي نبدأ بهما، «x كتب ويفرلي» و«x هو c» وتصاغ دالة c عن طريق أخذ تكافؤ هاتين الدالتين لـ x لكل قيم x في الاعتبار؛ نمضي بعد ذلك نحو الجزم بأن الدالة الناتجة لـ c هي «صادقة أحيانًا» أي أنها صادقة لقيمة واحدة لـ c على الأقل. (من الواضح أنه من غير الممكن أن تكون صادقة لأكثر من قيمة واحدة لـ c). يُعرّف هذان الشرطان معًا باعتبارهما يزودان بمعنى «المؤلف لويفرلي موجود».

الآن قد نُعرِّف «الحد الذي يحقق الدالة φ x موجود». هذه هي الصورة العامة التي تعد الحالة السابقة حالة خاصة منها. «المؤلف لويفرلي» هو «الحد الذي يحقق الدالة 'x كتب ويفرلي'». وسوف تتضمن «الكيت والكيت» دائمًا إشارة إلى دالة قضوية ما، تحديدًا تلك

التي تُعرِّف الخاصية التي تجعل شيئًا كيت وكيت. تعريفنا هو كالتالي:

«الحد الذي يحقق الدالة φ x موجود»

تعني أن:

«هناك حد x بحيث تكون φ x مكافئة دائمًا لـ «x هو c'».

من أجل تعريف «المؤلف لويفرلي كان إسكتلنديًّا»، علينا أن نأخذ في اعتبارنا ثالث قضايانا، تحديدًا، «أيًّا مَن كان مَن كتب ويفرلي كان إسكتلنديًّا». سوف تتحقق بمجرد إضافة أن ذلك الـ c يجب أن يكون إسكتلنديًّا. على ذلك فإن «المؤلف لويفرلي كان إسكتلنديًّا» هي كالتالي:

«هناك حد c بحيث

1 – 'x كتب ويفرلي' هي مكافئة دائمًا لـ 'x هو c'؛

٢ – c هو إسكتلندي».

وبوجه عام: «الحد الذي يحقق φ x يحقق ψ x» تُعرَّف على أنها تعني:

«هناك حد x بحيث إن:

1 – φ x هي دائمًا مكافئة لـ 'x هو c'،

2 – ψ x هي صادقة».

هذا هو تعريف القضايا التي يقع فيها الوصف.

من الممكن أن يكون لدينا الكثير من المعارف المتعلقة بحد موصوف،

أي أن نعرف قضايا عديدة متعلقة «بالكيت والكيت»، دون أن نعرف فعلًا ما هو «الكيت والكيت» أي دون أن نعرف أي قضية على صورة «x هو الكيت والكيت»، حيث x هو اسم. في رواية بوليسية رُكِّمت القضايا والفرضيات حول «الرجل الذي فعل الفعل، على أمل أنها سوف تكفي في النهاية لتبيان أنه كان A هو الذي فعل الفعل. قد نمضي أبعد كثيرا حتى نقول إنه، في كل هذه المعارف التي من الممكن التعبير عنها بكلمات -مع استثناء «هذا» و«تلك» والقليل من الكلمات الأخرى التي يختلف معناها في المناسبات المختلفة- لا تأتي الأسماء بمعناها الصارم، لكن ما تبدو كأسماء هي فعليًّا أوصاف. قد نتساءل على نحو دالٍّ عما إذا كان هوميروس[9] موجود، وهو ما لا نستطيع القيام به لو كان «هوميروس» اسمًا. قضية «الكيت والكيت» هي دالة، سواء كانت صادقة أو كاذبة؛ لكن لو كان a هو الكيت والكيت (حيث a هو اسم)، فالعبارة (a موجود) بلا معنى. يمكن الجزم بالوجود على نحو دال بالنسبة للأوصاف فقط، سواء كانت محددة أو غير محددة؛ حيث إنه إذا كان a اسم، فإنه يجب أن يُسمِّي شيئًا: ما لا يُسمِّي شيئًا ليس اسمًا، ولذلك إذا ما قُصِد به أن يكون اسمًا، فهو رمز خالٍ من المعنى، بينما وصف مثل «الملك الحالي لفرنسا» لا يصبح غير قابل للوقوع على نحو دال بناء فقط على أنه لا يصف شيئًا، السبب وراء ذلك في أنه رمز مركب، يشتق معناه من رموزه تلك المُكوِنة له. وعلى ذلك عندما نسأل عما إذا كان هوميروس موجودًا، فإننا نستخدم كلمة «هوميروس» كوصف مختصر: يمكننا استبداله ببساطة (فلنقل) بـ«مؤلف الإلياذة والأوديسة». تنطبق نفس الاعتبارات

على كل الاستخدامات تقريبًا لكل ما تبدو كأسماء حقيقية.

عندما تقع أوصاف في قضايا، من الضروري تمييز ما قد يدعى بحدوث «أولي» وحدوث «ثانوي». التمييز باختصار هو كالتالي. يحظى الوصف بحدوث «أولي» عندما تكون القضية التي يقع فيها ناتجة عن استبدال «x» بوصف في دالة قضوية φ x ما؛ يحظى الوصف بحدوث «ثانوي» عندما تكون نتيجة استبدال x بوصف في φ x التزويد بجزء من القضية المعنية فقط. سوف يوضح مثال ذلك. فلتتفكر في «الملك الحالي لفرنسا هو أصلع». هنا «الملك الحالي لفرنسا» يحظى بحدوث أولي، والقضية كاذبة. كل قضية فيها وصف لا يصف شيئًا يحظى بحدوث أولي هي كاذبة. لكن تفكر الآن في «الملك الحالي لفرنسا ليس أصلع». هذا مبهم. إذا كنا لنتناول «x هو أصلع» في البداية، ثم نستبدل x بـ «الملك الحالي لفرنسا»، ومن ثم نُكذب الناتج، يكون حينها حدوث «الملك الحالي لفرنسا» هو حدوث ثانوي وقضيتنا صادقة؛ لكننا إذا كنا لنتناول «x ليس أصلع» ثم نستبدل x بـ «الملك الحالي لفرنسا»، من ثم سوف يحظى «الملك الحالي لفرنسا» بحدوث أولي والقضية كاذبة. تشوش الحدوث الأولي والثانوي هو مصدر مهيأ للمغالطات حيثما تكون الأوصاف معنية.

تأتي الأوصاف في الرياضيات بشكل رئيس كدوال وصفية، أي في الصورة التي يحظى فيها الحد بالعلاقة R بالنسبة إلى y أو الـ R لـ y كما قد نقول، على نحو يماثل «الأب لـ y هو ثري» والجمل الشبيهة. قولنا -على سبيل المثال- أن «الأب لـy هو ثري»، كأن نقول إن الدالة القضوية

لـ c هي كالتالي: «c هو غني، وx أنجب y مكافئة دائمًا لـ x هو c» هي «صادقة أحيانًا» أي أنها صادقة بالنسبة إلى قيمة واحدة لـ c على الأقل. من الواضح أنه من غير الممكن أن تكون صادقة لأكثر من قيمة واحدة.

نظرية الأوصاف التي أُجملت على نحو مختصر في هذا الفصل هي في أقصى درجات الأهمية، في كلٍّ من المنطق ونظرية المعرفة. لكن أجزاء النظرية الأكثر فلسفةً ليست ضرورية من حيث خدمة أهداف الرياضيات. ولهذا السبب عمدت إلى تجاهلها في الشرح السابق، الذي قصر نفسه على المتطلبات الصرفة للرياضيات.

❊ ❊ ❊

الهوامش:

(1) روبرت براونينج: هو شاعر وكاتب مسرحي إنجليزي، ويُعد من أشهر شعراء العصر الفيكتوري (1812 – 1889). أما عالم النحو (النحويّ) فهو بطل إحدى قصائده بعنوان (جنازة النحوي) وهي قصيدة تأتي على لسان مريد عالم النحو ذلك بعد أن لقي حتفه، تبدأ القصيدة برحلة صعوده قمة تل لدفن المتوفى في إشارة لسموه حيث إن هذا التل تأتيه الضياء قبل أن تنعكس منه على الأرض، يتحدث المريد طوال الرحلة عن خصال معلمه وكيف أنفق حياته في رحلة البحث عن المعرفة، مضحيًا بكل الملذات في سبيلها، مؤمنًا في خلود الروح، ومنفقًا حياته من أجل المعرفة ومن أجل حياته الباقية، لا تلك الفانية كما قد يفعل العامة. (المترجم)

(2) جملة (**dead from the waist down**) التي ترجمتها على (ميتًا كلوح خشب) هي بالأساس تعبير مقصود به أنه لا يمكن إثارته جنسيًّا وقد ورد في قصيدة براونينج، وربما تجدر الإشارة إلى أنه في القرن السادس عشر كان يوصف المثقفون باعتبارهم فاوستيين نسبة إلى فاوست الذي باع روحه للشيطان، فهم سحرة وجذابون للنساء في مقابل مثقفي القرن التاسع عشر الذين هم شاحبون وذابلون وقد وهبوا نفسهم للمعرفة. (المترجم).

(3) سُجن برتراند راسل عام 1918 في أعقاب مناهضته للحرب العالمية الأولى، وذلك لمدة ستة أشهر، استغلها في تأليف هذا الكتاب الذي بين أيدينا، والذي صدر عام 1919 لأول مرة. (المترجم).

(4) على الأرجح يقصد راسل التمييز بين النكرة والمعرفة، إلا أن التعريف في اللغة العربية لا يستلزم التعريف بـ (ال) فقط؛ فالتعريف قد يأتي بالإضافة وبغيرها، إلا أنني حاولت الالتزام بالتعريف بـ (ال) بأكبر قدر ممكن، إلا أنه كان لا بد من التأكيد على هذا الفارق بين اللغتين وبترجيح مقصد راسل. (المترجم).

(5) يعمد راسل إلى استخدم حرف (**a**) قبل الكلمات النكرة في قضاياه، ولا يستخدم ذلك الحرف عند الحديث عن الكلمة أو المفردة نفسها في السياق خارج القضايا، وهو بذلك يميز بين المفردة داخل القضية وبين مفهومها أو دلالتها العامة

خارج القضية بحيث يثبت تنكيرها داخل القضية ويذكرها في السياق دون تعريف أو تنكير، وقد تكرر ذلك مع أغلب الكلمات التي يأتي على ذكرها في قضاياه ثم يتحدث عنها في السياق خارج القضايا.. هذه الخاصية غير موجودة في اللغة العربية، ولذلك في هذا الجزء ولتمييز الكلمة داخل القضية عنها خارج القضية، قمت بتنكيرها في القضية وتعريفها خارجها في أكثر الأحيان. إلا أن هذا ينطبق على هذا الجزء فقط؛ لأنه في الجزء التالي من الفصل سيتحدث عن القضايا التي تحتوي على حدود مُعرَّفة بالفعل، تلك التي ميزها بـ(ال) وبأنها تأتي على صورة (الكيت والكيت)، في ذلك الجزء الثاني يكون التعريف والتنكير موافقًا للنص الإنجليزي؛ لأن راسل في هذا الجزء لم يستخدم تلك المفردة المعبرة عن المفهوم أو الدلالة العامة التي سبق وأرودها في الجزء الأول دون تعريف أو تنكير. (المترجم).

(6) أليكسيوس مينونج: فيلسوف نمساوي (1853 – 1920). (المترجم).

Untersuchungen zur Gegenstandstheorie und psychologist, 1904. (المؤلف).

(7) رواية تاريخية نشرت عام 1814 بقلم سير والتر سكوت الروائي وكاتب المسرح والشاعر الإسكتلندي (1771 – 1832). (المترجم).

(8) كان الملك جورج الخامس هو ملك بريطانيا العظمى وإيرلندا وإمبراطور الهند في الفترة من عام 1910 إلى 1936، أي إبان كتابة ونشر هذا الكتاب في طبعته الأولى. (المترجم).

(9) هوميروس: شاعر ملمحي إغريق، يُعتقد أنه مؤلف الإلياذة والأوديسة. (المترجم).

❊ ❊ ❊

الفصل السابع عشر

الفئات

في الفصل الحالي سوف نُعنى بـ (ال) في الجمع: الساكنون في لندن، الأبناء لرجال أغنياء، وهكذا. بمعنى آخر سوف نُعنى بالفئات. رأينا في الفصل الثاني أن العدد الأصلي يُعرَّف باعتباره فئة فئات، ورأينا في الفصل الثالث أن العدد 1 يُعرَّف باعتباره فئة كل فئات الوحدة، أي كل تلك الفئات التي تحتوي على عنصر واحد فقط، كما ينبغي أن نقول لكن لا تزال هناك دائرة مفرغة. بالتأكيد عند تعريف العدد 1 باعتباره فئة كل فئات الوحدة، فيجب تعريف «فئات الوحدة»، وذلك كي لا نجزم بأننا نعرف المقصود «بواحد»؛ في الحقيقة هي تُعرَّف بطريقة قريبة الشبه من تلك المستخدمة في الأوصاف: يقال إن فئة α هي فئة «وحدة» إذا كانت الدالة القضوية «x هو أحد α دائمًا مكافئة لـ x هو c» (باعتبارها كدالة لـ c) ليست كاذبة دائمًا، أي أنها -في لغة أكثر اعتيادية- إذا كان هناك حد c بحيث إن x سوف يكون عنصرًا في α عندما x هو c، ولا شيء آخر. يزودنا ذلك بتعريف لفئة وحدة إذا ما كنا نعرف ما هي الفئات بالفعل بوجه عام. إلى الآن كنا قد عالجنا «الفئة» كتصور أولي في خضم تناولنا للحساب. لكن لأجل أسباب كُشِف عنها في الفصل الثالث

عشر -إن لم يكن ذلك لأجل أسباب أخرى- لا يمكننا القبول «بالفئة» كتصور أولي. علينا أن نسعى خلف تعريف على نفس مسار تعريف الأوصاف، أي تعريف يعزو معنى للقضايا التي تقع الكلمات أو الرموز الممثِّلة بشكل واضح لفئات في التعبير اللفظي أو الرمزي الخاص بها، لكنه تعريف سوف يعزو معنى يستبعد بالكلية كل ذكر للفئات من تحليل صحيح لمثل تلك القضايا. من ثم سوف نكون قادرين على أن نقول إن الرموز الخاصة بالفئات هي مجرد مواءمة، لا تمثل أشياء تُدعى «فئات»، وأن الفئات في الحقيقة مثل الأوصاف، هي خيالات منطقية، أو (كما قد نقول) هي رموز غير كاملة».

نظرية الفئات أقل اكتمالًا من نظرية الأوصاف وهناك أسباب (سوف نكشف عن أُطُرها العامة باختصار) تفسر اعتبار تعريف الفئات الذي سوف يُطرح غير مقنع على نحو نهائي. يبدو أن هناك أمورًا ما غامضة أكثر عمقًا متطلبة؛ لكن الأسباب وراء اعتبار التعريف الذي سوف يُطرح صحيحًا إلى حد كبير وأنه على المسار الصحيح جارفة.

أول شيء علينا النظر فيه وإدراكه هو لماذا لا يمكن اعتبار الفئات كجزء من الفرش النهائي للعالم. من الصعب شرح ما يعنيه الواحد بهذه العبارة بدقة، لكن أحد التبعات التي تقتضيها العبارة قد تُستخدم لسبر أغوار معناها. إذا كان لدينا لغة رمزية كاملة مع تعريف لكل شيء قابل للتعريف ورمز غير مُعرّف لكل شيء غير قابل للتعريف، فسوف تمثل الرموز غير المُعرَّفة في هذه اللغة ما أعنيه «بالفرش النهائي» للعالم رمزيًّا. ما زلت أصر على أنه لا رموز -سواء كانت تخص «الفئة» بشكل

عام أو تخص فئات مفردة- سوف تُضمَّن في نظام الرموز غير المُعرَّفة هذا. على الجانب الآخر، يتوجب على كل الأشياء المفردة هناك في العالم أن تحظى بأسماء، سوف تُضمَّن بين الرموز غير المُعرَّفة. قد نحاول تجنب هذه النتيجة عن طريق استخدام الأوصاف. على سبيل المثال، انظرْ في أمر «الشيء الأخير الذي رآه قيصر قبل أن يموت». هذا وصف لمفردة ما؛ قد نستخدمه كتعريف للمفردة (من أحد المنطلقات الجائزة تمامًا). لكن إذا كانت «a» اسمًا لنفس المفردة، فإن القضية التي تأتي فيها «a» ليست مماثلة لما تصبح عليه القضية عندما نستبدل «a» بـ «الشيء الأخير الذي رآه قيصر قبل أن يموت». إذا لم تحتوِ لغتنا على الاسم «a» أو اسم ما آخر لنفس المفردة، فلن تكون لدينا أي وسيلة للتعبير عن القضية التي عبَّرنا عنها عن طريق «a»، خلافًا لتلك التي عبَّرنا عنها عن طريق الوصف. على ذلك لن تُمكِّن الأوصاف لغة مثالية من الاستغناء عن الأسماء بالنسبة إلى كل المفردات. في هذا الخصوص، نلح على فئات تختلف عن المفردات ولا تحتاج لأن تُمثل عن طريق رموز غير مُعرَّفة. مهمتنا الأولى هي المدّ بأسباب تدعم هذا الرأي.

لقد رأينا بالفعل أنه لا يمكن اعتبار الفئات كأصناف للأفراد بسبب التناقض المتعلق بالفئات كونها ليست عناصر في نفسها (فُسِّر ذلك في الفصل الثالث عشر)، وبسبب أننا نستطيع البرهنة على أن عدد الفئات أكبر من عدد الأفراد.

لا يمكننا تناول الفئات عن طريق التمديد البحت باعتبارها -ببساطة- أكوامًا أو تكتلات. إذا كان علينا محاولة القيام بذلك ، سوف نجد أنه

من المستحيل فهم الكيفية التي قد توجد بها فئة مثل الفئة الخالية، تلك التي لا تحظى بأي عناصر على الإطلاق ولا يمكن اعتبارها «ككومة»؛ وسوف نجد كذلك أنه من الصعب للغاية فهم الكيفية التي حدث بها وكانت فئة تحظى بعنصر واحد فقط غير مماثلة لذلك العنصر الواحد. لا أقصد الجزم بأن هناك مثل هذه الكيانات «الأكوام» أو نفي ذلك. لم أُستدعَ كمنطقيّ رياضيّ كي أحرز رأيًا في هذا الشأن. كل ما ألح عليه هو أنه لو كانت هناك مثل هذه الأشياء الأكوام، لا يمكننا تعريفها بواسطة الفئات المُركبَّة من مكوِّناتها.

سوف نقترب أكثر وأكثر من نظرية مرضية إذا ما حاولنا تعريف الفئات باستخدام الدوال القضوية. تُعرَّف كل فئة -كما شرحناها في الفصل الثاني- عن طريق دالة قضوية ما، هي صادقة بالنسبة لعناصر الفئة وكاذبة بالنسبة للأشياء الأخرى. لكن إذا كان من الممكن تعريف فئة عن طريق دالة قضوية واحدة، فمن الممكن على نحو مكافئ تعريفها عن طريق أي واحدة أخرى تكون صادقة عندما تكون الأولى صادقة وتكون كاذبة عندما تكون الأولى كاذبة. لهذا السبب من غير الممكن تعريف فئة عن طريق أي واحدة من مثل هذه الدوال القضوية بدلًا من أي واحدة أخرى – وبالنظر لدالة قضوية ما هناك دائمًا دوال قضوية أخرى عديدة تكون صادقة عندما تكون هذه الدالة صادقة وكاذبة عندما تكون الدالة كاذبة. نقول إن دالتين قضويتين «متكافئتان صوريًّا» عندما يحدث هذا. تكون قضيتان «متكافئتين»، عندما تكون كلتاهما صادقة أو كلتاهما كاذبة؛ تكون دالتان قضويتان $\varphi\,x$ و $\psi\,x$ «متكافئتين صوريًّا»

عندما تكون $\varphi\ x$ مكافئة دائمًا لـ $\psi\ x$. إنها الحقيقة التي مفادها أن هناك دوالَّ أخرى مكافئة صوريًّا للدالة المعطاة هي التي تجعل من المستحيل تعريف فئة عن طريق دالة؛ لذلك نرغب في أن تكون الفئات على النحو الذي معه لا تحظى فئتان متمايزتان بنفس العناصر بالضبط، وعلى ذلك يتوجب على دالتين متكافئتين صوريًّا تحديد نفس الفئة.

عندما كنا قد قررنا أن الفئات من غير الوارد أن تكون أشياء من نفس نوع عناصرها، وأنه من غير الوارد أن تكون مجرد أكوام أو تكتلات وكذلك من غير الوارد تعريفها من خلال الدوال القضوية، أصبح من الصعب للغاية إدراك ماهيتها، إذا ما كان لها أن تكون ما هو أكثر من خيالات رمزية. وإذا ما كان في مقدورنا العثور على أي طريقة للتعامل معها باعتبارها خيالات رمزية، فإننا نزيد من الأمن المنطقي لوضعنا، حيث إننا نتجنب الحاجة إلى الجزم بأن هناك فئات دون أن نكون مكرهين على القيام بجزم مضاد، يذهب إلى أنه ما من فئات هناك. إننا نحجم بالكاد عن كلا الجزمين. يعد هذا مثالًا لنصل أوكام[1]، تحديدًا «لا يجب مضاعفة الكيانات من غير ضرورة». لكن عندما نرفض الجزم بأن هناك فئات، لا يُفترض بنا أن نجزم بشكل دوجمائي بعدم وجود أي منها. إننا بالكاد لا أدريين حيالها: يمكننا أن نقول مثل لابلاس[2]: «**je n'ai pas besoin de cette hypothèse**»[3].

دعنا نبرز الشروط التي يجب أن يوفيها رمز إذا كان له أن يصلح كفئة. أعتقد أننا سوف نجد الشروط التالية لازمة وكافية:

1 – يجب أن تحدد كل دالة قضوية فئة، مكونة من متغيرات الدالة

تلك التي تكون الدالة صحيحة بالنسبة لها. بالنظر إلى أي قضية (صادقة أو كاذبة) -فلنقل هي عن سقراط- يمكننا تخيل استبدال سقراط بأفلاطون أو بأرسطو أو بغوريلا أو بالرجل على القمر أو بأي فرد آخر في العالم. بوجه عام، بعض هذه الاستبدالات سوف تزود بدالة صادقة والبعض الآخر بدالة كاذبة. سوف تتكون الفئة المحددة من كل تلك الاستبدالات التي تزود بدالة صادقة. بالتأكيد، لا يزال علينا تقرير ما الذي نعنيه «بكل تلك التي، إلخ». كل ما نلاحظه في الوقت الراهن هو أن فئة يُحكَّم عليها بأنها محددة بواسطة دالة قضوية، وأن كل دالة قضوية تحدد فئة مناسبة.

2 – يجب أن تُحدِّد دالتان قضويتان متكافئتان صوريًّا نفس الفئة، ويجب أن تُحدِّد دالتان قضويتان غير متكافئتين صوريًّا فئتين مختلفتين. على ذلك، تُحدَّد الفئة عن طريق عضويتها (كونها عنصرًا)، ولا يمكن لفئتين أن يكون لهما نفس العضوية. (إذا حُدِّدت فئة عن طريق دالة φx ، نقول إن a هي «عنصر» في فئة إذا كانت φa صادقة).

3 – علينا العثور على طريقة لتعريف فئات الفئات، لا الفئات فقط. رأينا في الفصل الثاني أن الأعداد الأصلية تُعرَّف باعتبارها فئات فئات. العبارة المعتادة للرياضيات الأولية، «التوافيق **m combinations** من **n** شيء في المرة» تمثل فئة فئات، تحديدًا فئة كل الفئات من **m** حد التي من الممكن انتقاؤها من فئة معطاة من **n** حد. دون منهج رمزي ما للتعامل مع فئات الفئات سوف ينهار المنطق الرياضي.

4 – تحت كل الظروف يجب أن يكون افتراض أن فئة هي عنصرًا في

نفسها أو ليست عنصرًا في نفسها غير ذي معنى. ينشأ هذا عن التناقض الذي ناقشناه في الفصل الثالث عشر.

5 – أخيرًا، يجب أن يكون من الوارد طرح قضايا عن كل الفئات المكونة من أفراد، أو عن كل الفئات المكونة من أشياء من أي «نمط» منطقي واحد، والتوفية بهذا الشرط هي الأصعب. إذا لم يكن هذا هو الحال فسوف تقع الكثير من استخدامات الفئات في الضلال – على سبيل المثال، الاستقراء الرياضي. عند تعريف خَلَف حد معطى، نحتاج إلى أن نكون قادرين على أن نقول إن عنصرًا في الخَلَف ينتمي إلى كل الفئات الوراثية التي ينتمي إليها الحد المعطى، وهذا يتطلب ذلك النوع من الكلية في مسألتنا. يكمن السبب وراء وجود صعوبة تتعلق بهذا الشرط أنه من الممكن البرهنة على استحالة الحديث عن كل الدوال القضوية التي من الممكن أن تحظى بمتغيرات دالة من نمط معطى.

من أجل أن نبدأ، سوف نتجاهل هذا الشرط الأخير والمعضلات التي يطرحها. من الممكن تناول أول شرطين معًا. ينصان على أنه يجب أن تكون هناك فئة واحدة –لا أكثر ولا أقل– لكل زمرة دوال قضوية متكافئة صوريًّا؛ على سبيل المثال يجب أن تكون فئة الرجال مماثلة لتلك الخاصة بذوات القدمين التي لا ريش لها أو لتلك الخاصة بالحيوانات العاقلة أو لتلك الخاصة بكائنات الياهو أو لتلك الخاصة بأيٍّ من السمات التي قد يفضل أحدهم تعريف البشر بها. الآن، عندما نقول إن دالتين قضويتين متكافئتان صوريًّا قد لا تكونان متماثلتين، على الرغم من أنهما تُعرِّفان نفس الفئة، قد يُبرهن على صدق الجزم

عن طريق تبيان أن العبارة قد تكون صادقة بالنسبة لدالة واحدة وكاذبة بالنسبة للأخرى. مثل «أعتقد في أن كل الرجال فانون» قد تكون صادقة، بينما «أعتقد في أن كل الحيوانات العاقلة فانية» قد تكون كاذبة، حيث إنني قد أعتقد على نحو خاطئ في أن العنقاء حيوان عاقل غير فانٍ. يقودنا ذلك إلى أن علينا أخذ العبارات عن الدوال في الاعتبار، أو (على نحو أكثر صحة) أخذ دوال الدوال في الاعتبار.

بعض الأشياء التي قد تقال عن دالة، قد تعتبر كأنها قيلت عن الفئة المُعرَّفة عن طريق الدالة، بينما ذلك ممتنع على البعض الآخر. تتضمن عبارة «كل الرجال فانون» الدالتين «x هو بشري» و«x هو فانٍ» أو إذا شئنا، يمكننا أن نقول إنها تتضمن فئتي الرجال والفانين. يمكننا تأويل العبارة بأيٍّ من الطريقتين، بسبب أن قيمة الصدق الخاصة بها لا تتغير إذا ما استبدلنا «x هو بشري» أو «x هو فانٍ» بأي دالة صورية مكافئة. لكن كما رأينا للتو لا يمكن اعتبار أن عبارة «أعتقد في أن كل الرجال فانون» هي عن الفئة المحددة عن طريق أي دالة؛ لأن قيمة الصدق الخاصة بها قد تتغير عن طريق الاستبدال بدالة مكافئة صوريًّا (تترك الفئة دون تغيير). سوف نطلق على العبارة المتضمنة دالة φ x دالة «ماصدق extensional» للدالة φ x، إذا كانت مثل «كل الرجال فانون»، أي إذا كانت قيمة الصدق الخاصة بها لا تتغير عن طريق الاستبدال بأي دالة مكافئة صوريًّا؛ وعندما لا تكون دالة دالة الماصدق، سوف ندعوها «مفهوم intensional»، على ذلك فإن «أعتقد في أن كل الرجال فانون» هي دالة مفهوم لـ «x هو بشري» أو «x هو فانٍ». هكذا من الممكن اعتبار دوال الماصدق

لدالة φ x كدوال للفئة المحددة عن طريق φ x وذلك لأهداف عملية، بينما لا يمكن اعتبار دوال المفهوم كذلك.

من الملاحظ أن الدوال النوعية للدوال التي نحظى بفرصة لطرحها في المنطق الرياضي هي ماصدق. هكذا، على سبيل المثال فالدالتان الأساسيتان للدوال هما: « φ x صادقة دائمًا» و« φ x صادقة أحيانًا». لكلٍّ منهما قيمة الصدق الخاصة بها لا تتغير لو استُبدلت φ x بأي دالة مكافئة صوريًّا. بلغة الفئات، إذا ما كانت α هي الفئة المحددة بواسطة φ x ، فإن « φ x صادقة دائمًا» مكافئة لـ «كل شيء هو عنصر في α» و« φ x هي صادقة أحيانًا» مكافئة لـ «α تحظى بعناصر» أو بصياغة أفضل «α تحظى بعنصر واحد على الأقل». فلنتناول من جديد، الظرف الذي تعاملنا معه في الفصل السابق المتعلق بوجود «الحد الذي يحقق φ x». الظرف هو أن هناك حد c بحيث φ x مكافئة دائمًا لـ «x هو c». من الواضح أن هذه دالة ماصدق. هذا مكافئ للجزم الذاهب إلى أن الفئة المُعرَّفة عن طريق الدالة φ x هي فئة وحدة، أي هي فئة تحظى بعنصر واحد؛ بمعنى آخر هذه فئة هي عنصر في 1.

بالنظر إلى دالة دالة قد تكون أو قد لا تكون ماصدق، في إمكاننا دائمًا اشتقاق دالة نفس الدالة بحيث تكون متصلة بها وماصدق بشكل مؤكد منها، ذلك عن طريق الخطة التالية: فلتجعل دالة الدالة الأصلية الخاصة بنا واحدة تعزو لـ φ x الخاصية f، ثم انظر في الجزم الذاهب إلى أن «هناك دالة تحظى بالخاصية f ومكافئة صوريًّا لـ x». هذه دالة ماصدق لـ φ x ؛ هي صادقة عندما تكون عبارتنا صادقة،

وهي مكافئة صوريًّا للدالة الأصلية φ x لو كانت هذه الدالة الأصلية دالة ماصدق، لكن عندما تكون الدالة الأصلية دالة مفهوم، فالجديدة هي أكثر صدقًا غالبًا من القديمة. على سبيل المثال انظر مجددًا في أمر «أعتقد في أن كل الرجال فانون»، باعتبارها دالة «x هو بشري». دالة الماصدق المشتقة هي: «هناك دالة مكافئة صوريًّا لـ x هو بشري وبحيث أعتقد في أنني أعتقد في أنه أيًّا ما كان ما يحققها فهو فانٍ». يبقى هذا صادقًا عندما نستبدل «x هو بشري» بـ «x هو حيوان عاقل»، حتى لو اعتقدت بشكل خاطئ في أن العنقاء عاقلة وغير فانية.

نمنح اسم «دالة الماصدق المشتقة» للدالة المبنية على النحو السابق، تحديدًا لدالة: «هناك دالة تحظى بالخاصية f ومكافئة صوريًّا لـ φ x»، حيث الدالة الأصلية قد كانت «الدالة φ x تحظى بالخاصية f».

قد ننظر لدالة الماصدق المشتقة باعتبارها تحظى بالفئة المحددة عن طريق الدالة φ x من أجل متغير الدالة الخاص بها، ونجزم بـ f هذه الفئة. من الممكن الأخذ بهذا كتعريف لقضية عن الفئة. أي قد نُعرِّف قائلين:

كي نجزم بأن «الفئة المحددة عن طريق الدالة φ x تحظى بالخاصية f» هو كأن نجزم بأن φ x تحقق دالة الماصدق المشتقة من f.

يزود هذا بمعنى لأي عبارة عن فئة، من الممكن النص عليها بشكل ذي مغزى عن دالة؛ وسوف يظهر فنيًّا أنها تسفر عن النتائج المتطلبة من أجل جعل نظرية محققة رمزيًّا[4].

ما كنا قد قلناه للتو فيما يتعلق بتعريف الفئات كافٍ لتحقيق الشروط الأربعة الأولى. الطريقة التي يُؤمِّن بها الشرط الثالث والرابع -تحديدًا إمكانية فئات الفئات وإمكانية أن تكون الفئة عنصرًا في نفسها أو ليست عنصرًا في نفسها هي نوعًا ما فنية؛ هي مشروحة في **Principia Mathematica**، لكن من الممكن التسليم بها هنا. ينتج عن ذلك اعتبار أن مهمتنا في حكم المكتملة إلا فيما يتعلق بشرطنا الخامس. لكن هذا الشرط -الأكثر أهميةً والأكثر صعوبةً- لم يُوفَّ به بالنسبة إلى أي شيء كنا قد قلناه إلى الآن. الصعوبة على اتصال بنظرية الأنماط، ويجب مناقشتها باختصار[5].

رأينا في الفصل الثالث عشر أن هناك تسلسلًا هرميًّا للأنماط المنطقية، ومن المعيب أن نسمح باستبدال شيء منتم إلى أحدها بشيء منتم للآخر. الآن بات من غير الصعب تبيان أن الدوالَّ المتنوعة التي بإمكانها تناول شيء معطى **a** باعتباره متغير دالة ليست جميعها من نمط واحد. دعنا نطلق عليها جميعها دوال **a**. قد نتناول في البداية من بينها تلك التي لا تتضمن إحالة لأي تجمع للدوال؛ تلك التي سوف نطلق عليها «دوال **a** حملية **predicative**». إذا ما واصلنا الآن مع الدوال التي تتضمن إحالة إلى الجملة الكلية لدوال **a** الحملية، سوف نرتكب مغالطة لو اعتبرناها من نفس نمط دوال **a** الحملية. فلتنظر في أمر عبارة معتادة وتستخدم يوميًّا مثل «**a** هو فرنسي نموذجي». كيف سنُعرِّف «فرنسي نموذجي»؟ قد نُعرِّفه باعتباره واحدًا «يمتلك كل الخصائص التي يمتلكها أغلب الفرنسيين». لكن لو لم نقصر «كل الخصائص» على ما لا يتضمن إحالة

إلى أي جملة كلية totality للخواص، فسيتوجب علينا أن نلاحظ أن أغلب الفرنسيين ليسوا نموذجيين بالمعنى السابق، وعلى ذلك فالتعريف يبين أنه ألا تكون نموذجيًّا هو أمر لازم بالضرورة للفرنسي النموذجي. لا يعد هذا تناقضًا منطقيًّا، حيث إنه ما من سبب هناك يستوجب وجود أي فرنسي نموذجي؛ لكن ذلك يظهر الحاجة إلى فصل الخواص التي تتضمن إحالة إلى جملة الخواص الكلية من تلك التي لا تفعل.

عندما نخلق شيئًا جديدًا عن طريق عبارات عن «كل» أو «بعض» القيم التي يمكن لمتغير أن يتخذها على نحو ذي مغزى، لا يجب أن يكون هذا الشيء الجديد من ضمن القيم التي كان من الوارد أن يتخذها متغيرنا السابق، حيث إن الأمر لو كان كذلك، فإن الجملة الكلية للقيم التي كان من الوارد أن يمتد عليها المتغير سوف تكون قابلة للتعريف فقط بالنسبة إلى نفسها، وسيتوجب علينا التورط في دائرة مفرغة. على سبيل المثال، إذا ما قلت إن «نابليون قد امتلك كل الخصائص التي تصنع جنرالًا عظيمًا»، فسيتوجب علي أن أُعرِّف «خصائص» عبر السبيل الذي لا يتضمن ما أقوله الآن، أي أنه لا يجب أن يكون «امتلاك كل الخصائص التي تصنع جنرالًا عظيمًا» هو نفسه خاصية بالمعنى المفترض. هذا واضح تمامًا وهو المبدأ الذي يقود إلى نظرية الأنماط، التي تُجتنب عن طريقها تناقضات الدوائر المفرغة. بالتطبيق على دوال a، قد نفترض أن «الخصائص» سوف تعني «دوال حملية». من ثم عندما أقول «نابليون قد امتلك كل الخصائص، إلخ.» أعني أن «نابليون يحقق كل الدوال الحملية، إلخ». تعزو هذه العبارة خاصية إلى نابليون، لكنها

ليست خاصية حملية؛ بذلك نهرب من الدائرة المفرغة. لكن حيثما جاءت «كل الدوال التي»، يجب قصر الدوال موضع البحث والتساؤل في نمط واحد إذا ما كان لنا أن نجتنب دائرة مفرغة؛ وكما أوضح نابليون والفرنسي النموذجي لا يصير النمط محددًا عن طريق ذلك الذي لمتغير الدالة. سوف يستدعي الأمر نقاشًا أكثر اكتمالًا من أجل إظهار هذه النقطة على نحو كامل، لكن ما قيل قد يكفي لتوضيح أن الدوال التي من الممكن أن تتخذ متغير دالة معطى هي من سلسلة غير متناهية من الأنماط. يمكننا أن نؤسس عن طريق أدوات فنية متنوعة لمتغير يتخلل أول **n** من هذه الأنماط، حيث **n** متناهية، لكننا لا نستطيع التأسيس لمتغير يتخللها جميعًا، وإذا ما استطعنا، سوف تخلق تلك الحقيقة المجردة في الحال نمط دالة جديدًا بنفس متغيرات الدالة، وسوف تطلق العملية برمتها لتجري المرة بعد المرة.

نطلق على دوال **a** الحملية النمط الأول لدوال **a**؛ نطلق على دوال **a**المتضمنة إحالة للجملة الكلية للنمط الأول النمط الثاني، وهكذا. لا يمكن لأي متغير دالة **a** أن يتخلل كل هذه الأنماط المختلفة: لا بد أن يتوقف بعد قليل عند واحدة محددة.

هذه الاعتبارات على صلة وثيقة بتعريفنا لدالة الماصدق المشتقة. تحدثنا هناك عن «دالة مكافئة صوريًّا لـ**x** φ». من الضروري اتخاذ قرار بشأن نمط دالتنا. أي قرار سوف ينفذ، لكن هناك قرار ما لا يمكن اجتنابه. دعنا نطلق على الدالة المفترضة المكافئة صوريًّا ψ. من ثم تظهر ψ كمتغير ويجب أن تكون من نمط ما محدد. كل ما نعرفه بالضرورة

عن نمط φ أنها تتخذ متغيرات دالة من نمط معطى – أنها (فلنقل) دالة a. لكن هذا –كما رأينا للتو– لا يحدد نمطها. إذا ما كان لنا أن نقدر على التعامل مع كل الفئات التي عناصرها من نفس النمط الذي لـ a (كما يستدعي متطلبنا الخامس)، فيجب أن نكون قادرين على تعريف كل هذه الفئات عن طريق دوال من نمط واحد ما؛ ما يعني أنه يجب أن يكون هناك نمط ما لدوال a، فلنقل n، بحيث إن أي دالة a هي مكافئة نوعيًّا لدالة a ما من نمط n. لو أن هذا هو الحال، فمن ثم أي دالة ماصدق قائمة بالنسبة لكل دوال a من النمط n سوف تكون قائمة بالنسبة لأي دالة a أيًّا ما كانت. يعد هذا بالأساس كوسيلة فنية لإدراج افتراض يؤدي إلى هذه النتيجة التي مفادها أن الفئات نافعة. يُطلق على هذا الافتراض «المسلمة الاختزالية reducibility» ويمكن النص عليه كالتالي:

«هناك نمط لدوال a (فلنقل τ) بحيث إنه بالنظر إلى أي دالة a، هي مكافئة صوريًّا لدالة ما من النمط موضع البحث».

إذا ما جزمنا بهذه المسلمة، فسوف نستخدم الدوال من هذا النمط في تعريف دالة الماصدق المقترنة. من الممكن اختزال كل العبارات عن كل فئات a (أي كل الفئات المُعرَّفة بواسطة دوال a) إلى عبارات عن كل دوال a من النمط τ. طالما كانت دوال الماصدق للدوال هي المضمنة، يزودنا هذا حال الممارسة بنتائج كانت لتستدعي في أي حال آخر المفهوم المستحيل لـ «كل دوال a». الاستقراء الرياضي هو أحد المناطق التي يكون فيها ذلك جوهريًّا.

تتضمن مسلمة الاختزالية كل ما هو ضروري بالفعل في نظرية

الفئات. لذلك يستحق الأمر التوقف لوهلة من أجل التساؤل عن إذا كان هناك أي سبب لافتراض صحتها.

هذه المسلمة مثلها كمثل مسلمة التضاعف ومسلمة اللانهاية هي ضرورية لأجل نتائج معينة، لا من أجل الوجود المحض للتفكير الاستنباطي. نظرية الاستنباط -كما هي موضحة في الفصل الرابع عشر- والقوانين الخاصة بالقضايا المتضمنة «كل» و«بعض» هي من القوام الأساسي للتفكير الرياضي: لن ينتهي بنا الحال دونها أو دون شيءٍ مشابهٍ لها إلى ألا نحصل على نفس النتائج فقط بل إلى ألا نحصل على أي نتائج على الإطلاق. لا يمكننا استخدامها كفرضيات واستنباط نتائج افتراضية، حيث إنها هي قواعد الاستنباط ومقدماته كذلك. يجب أن تكون صحيحة بشكل مطلق، وإلا لن يتأتى ما نستنبطه وفقًا لها حتى من المقدمات. من ناحية أخرى، مسلمة الاختزالية مثلها كمثل مسلمتينا السابقتين، من الممكن النص بشكل جيد للغاية عليها -كلما استخدمت- باعتبارها فرضية، بدلًا من افتراض كونها صحيحة بالفعل. يمكننا الاستدلال على نتائجها فرضًا؛ يمكننا كذلك استنباط نتائج الجزم باعتبارها خاطئة. لذلك فهي ملائمة فقط، لا ضرورية. وبالنظر إلى تعقد نظرية الأنماط وإلى لا يقين الكل فيما عدا مبادئها الأكثر عمومية، من المستحيل القطع حاليًا بأنه قد لا يكون هناك سبيل للتخلص من مسلمة الاختزالية بالكامل. على الرغم من الجزم بصواب النظرية الموضحة بشكل مختصر في السابق، ما الذي في مقدورنا أن نقوله بالنسبة إلى صحة أو خطأ المسلمة؟

قد نلاحظ أن المسلمة هي صيغة عامة لتطابق اللا متمايزات **identity of indiscernibles** الخاص بليبنتز. افترض ليبنتز كمبدأ منطقي أن موضوعين مختلفين يجب أن يختلفا في محموليهما. المحمول هو البعض فقط مما ندعوه «بالدوال الحملية»، والتي سوف تتضمن كذلك العلاقات بحدود معطاة، وخواصَّ متنوعة لا يمكن حصرها كما هو الحال مع المحمول. على ذلك ففرضية ليبنتز أكثر صرامةً وتحددًا من تلك الخاصة بنا. ما من سبب جيد هناك للاعتقاد في صورته بقدر ما أستطيع أن أرى (وليس ذلك بالطبع بالموافق لمنطقه الذي يعتبر كل القضايا قابلة للاختزال إلى صورة الموضوع والمحمول). قد يكون هناك شيئان لهما نفس المحمول بالضبط بالمعنى الضيق لكلمة «محمول» التي كنا نستخدمها، وذلك كاحتمالية منطقية مجردة. كيف ستبدو مسلمتنا عندما نمر إلى ما بعد المحمول بهذا المعنى الضيق؟ في العالم الفعلي يبدو أن من المستحيل الشك في صحتها التجريبية فيما يتعلق بالمفردات، نتيجة للتمايز المكاني الزماني: لا وجود لمفردتين لهما نفس العلاقات المكانية والزمانية بالضبط بالنسبة إلى كل المفردات الأخرى. لكن هذه مصادفة، حقيقة تتعلق بعالمنا الذي تصادف أن وجدنا أنفسنا فيه. يهدف المنطق البحت وكذلك الرياضيات البحتة (وهما نفس الشيء) إلى أن يكونا صحيحين في عبارات ليبنتز وفي كل العوالم الممكنة، وليس فقط في عالم من تجمعات بائسة مختلطة حابلًا بنابل سجنتنا الصدفة فيه. ينبغي أن يحافظ المنطقيّ على سيادة معينة: لا يجب أن يتنازل ويستخلص البراهين من الأشياء التي يراها من حوله.

من هذا المنظور المنطقي الصارم، لا أرى أي سبب للاعتقاد في أن المسلمة الاختزالية هي لازمة منطقيًّا، وهو ما نعنيه بقولنا إنها صحيحة في كل العوالم الممكنة. لذلك فولوج هذه المسلمة إلى نظام منطقي هو قصور، حتى لو كانت المسلمة صحيحة تجريبيًّا. لهذا السبب لا يمكن اعتبار نظرية الفئات كاملة كما هي نظرية الأوصاف. هناك حاجة إلى عمل أكثر على نظرية الأنماط، على أمل الوصول إلى تعاليم للفئات لا تتطلب مثل هذا الجزم الملتبس. لكن من المعقول اعتبار النظرية المشروحة باختصار في هذا الفصل صائبة من حيث خطوطها العريضة، أي باختزال القضايا عن الفئات اسميًّا إلى قضايا عن دوالها المُعرِّفة. سوف يبدو من المناسب اجتناب الفئات ككيانات عن طريق هذا النهج، إلا أن التفاصيل ربما لا تزال تستدعي التعديل. ذلك لأنه يبدو من المحقق أننا قد ضمَّنا نظرية الفئات، على الرغم من رغبتنا في استبعادها بقدر ما نستطيع، وهو ما يجعل الأمر عرضة لشك كبير.

تختزل نظرية الفئات -كما هي مشروحة بشكل موجز في السابق- نفسها إلى مسلمة واحدة وتعريف واحد. من أجل الوضوح والتحدد سوف نعيدهما هنا. المسلمة هي:

هناك نمط τ بحيث إنه إذا كانت φ دالة يمكن أن تتناول شيئًا معطى a كمتغير دالة، فمن ثم هناك دالة ψ من النوع τ هي مكافئة صوريًّا لـ φ.

التعريف هو:

إذا كانت φ دالة يمكن أن تتناول شيئًا معطى a كمتغير دالة، و τ النمط المذكور في المسلمة السابقة، فمن ثم القول بأن الفئة المحددة

عن طريق φ لها الخاصية f هو قول بأن هناك دالة من النمط τ ، مكافئة نوعيًّا لـ φ وتحظى بالخاصية f.

❊ ❊ ❊

الهوامش:

(1) أحد أهم المبادئ المنطقية التي ترجع للفيلسوف وليم الأوكامي، ويُستخدم في مختلف العلوم الرياضية والمنطقية والفيزيائية والفلكية والاقتصادية ونظرية المعرفة، وهو يقتضي الأخذ بأبسط التفسيرات من بين كل التفسيرات المطروحة ووجوب عدم الإكثار من الموجودات دون مسوغ. (المترجم).

(2) بيير لابلاس: رياضي وفلكي فرنسي (1749 – 1827)، أنشأ معادلة لابلاس وابتكر تحويل لابلاس، وأسهم كثيرًا في تطوير الفيزياء وعلوم الفلك. (المترجم)

(3) يقال إنه عندما سئل لابلاس عن أن نيوتن ومختلف علماء الفيزياء والرياضيات عادة ما كانوا يتحدثون عن وجود إله، خالق ومنظم للكون لكنه لم يفعل ذلك، أجاب قائلًا هذه الجملة: «لم أكن في حاجة إلى هذه الفرضية». **je n'ai pas besoin de cette hypothèse** (المترجم).

(4) انظر **Principia Mathematica, vol. i. pp. 75 – 84 and *20**. (المؤلف).

(5) على القارئ الراغب في مناقشة أكثر اكتمالًا أن يرجع إلى **Principia Mathematica, Introduction, chap. ii.; also *12**. (المؤلف).

الفصل الثامن عشر

الرياضيات والمنطق

على مر التاريخ كانت الرياضيات والمنطق مبحثين متمايزين تمامًا. كانت الرياضيات مرتبطة بالعلوم، والمنطق مرتبطًا بالإغريق. لكنَّ الاثنين تطورا في العصور الحديثة: أصبح المنطق أكثر رياضية، وأصبحت الرياضيات أكثر تمنطقًا. نتج عن ذلك أنه قد بات من المستحيل تمامًا الآن رسم خطٍّ بين الاثنين؛ في الحقيقة الاثنان هما واحد. يختلفان كما يختلف الرجل والصبي: المنطق هو شباب الرياضيات، والرياضيات هي مبلغ رجولة المنطق. امتعض المنطقيون من هذا المنظور، أولئك الذين أفنوا أعمارهم في دراسة النصوص الكلاسيكية باتوا غير قادرين على تتبع جزئية في التفكير المنطقي الرمزي، وكذلك امتعض الرياضياتيون، أولئك الذين تعلموا التقنية دون أن يزعجهم التساؤل عن معناها أو مبررها. لحسن الحظ كلا النزعتين تصبح أندر فأندر.

من الواضح أن الكثير من عمل الرياضيات الحديثة هو على تخوم المنطق، وكثير من المنطق الحديث هو رمزي وصوري، بذلك صار من الواضح لدى كل دارس موجَّه أمر العلاقة الوثيقة جدًّا بين

المنطق والرياضيات. البرهان على تطابقهما هو مسألة تفاصيل: بدءًا بالمقدمات المعترف بشكل عام بانتمائها للمنطق، ووصولًا عن طريق الاستنباط للنتائج ذات الانتماء الواضح للرياضيات، وجدنا ألا وجود لنقطة يمكن رسم خط فاصل عندها، بحيث يكون المنطق على اليسار والرياضيات على اليمين. إذا كان هناك مَن لا يزال لا يقبل بتطابق المنطق والرياضيات، قد نتحداه أن يشير لنا على النقطة التي يعتبر المنطق قد انتهى عندها وبدأت الرياضيات في التعريفات والاستنباطات المتتابعة في **Principia Mathematica**. من ثم سوف يتضح أن الإجابة يجب أن تكون اعتباطية تمامًا.

في الفصول الأولى من هذا الكتاب بدأنا من الأعداد الطبيعية، عرَّفنا في البداية «العدد الأصلي» وأوضحنا كيفية تعميم مفهوم العدد، ثم حلَّلنا المفهوم المضمَّن في التعريف، حتى وجدنا أنفسنا نتعامل مع أساسيات المنطق. في معالجة تركيبية استنباطية كانت هذه الأساسيات لتأتي أولًا، بحيث لا نصل إلى الأعداد الطبيعية إلا بعد رحلة طويلة. على الرغم من أن مثل هذه المعالجة أصح منهجيًّا من تلك التي تبنيناها هنا، إلا أنها أكثر صعوبة على القارئ؛ لأن القضايا والمفاهيم المنطقية النهائية التي تبدأ بها بعيدة المنال وغير مألوفة مقارنة بالأعداد الطبيعية. كذلك فهي تمثل حدود المعرفة الحالية، ما وراءها لا يزال غير معروف؛ ولا يزال سلطان المعرفة عليه غير آمن للغاية.

كان من المعتاد أن يُقال إن الرياضيات هي علم «الكمية». «الكمية» كلمة غير محددة، لكن لأجل البرهان والحجاج قد نستبدلها بكلمة

«عدد». العبارة الذاهبة إلى أن الرياضيات هي علم العدد سوف تكون غير صحيحة من خلال سبيلين مختلفين. من ناحية، هناك فروع معروفة في الرياضيات لا علاقة لها بالأعداد – كل الهندسة التي لا تستخدم الإحداثيات والقياس. على سبيل المثال، الهندسة الإسقاطية والهندسة الوصفية، لا علاقة لها بالعدد أو حتى بالكمية بمعنى أكبر من وأصغر من، وذلك حتى نقطة تُطرح عندها الإحداثيات. من جانب آخر، أصبح من الممكن عبر تعريف الأعداد الأصلية وعبر نظرية الاستقراء والعلاقات السلفية وعبر النظرية العامة للسلاسل وعبر تعريفات العمليات الحسابية تعميم الكثير مما كان يُبرهن عليه في صلة بالأعداد فقط. كانت النتيجة أن أصبح الآن ما كان في السابق مبحثًا منفردًا للحساب، مقسمًا إلى عدد من المباحث المنفصلة، ليس منها ما هو معنيٌّ بشكل خاص بالأعداد. أكثر خواص الأعداد أولية تُعنى بعلاقات الواحد بالواحد، والتشابه بين الفئات. الجمع يُعنى ببناء فئات متخالفة، كل منها مشابه لمجموعة من الفئات من غير المعروف كونها متخالفة. الضرب مدمج في نظرية «المُنتخَبات»، أي أنه من نوع معين من علاقات الواحد لعديد. التناهي مدمج في الدراسة العامة للعلاقات السلفية، تلك التي تسفر عن نظرية الاستقراء الرياضي بالكامل. من الممكن تعميم الخواص الترتيبية للأنواع المختلفة من سلاسل الأعداد وعناصر نظرية اتصال الدوال ونهايات الدوال بحيث لم تعد تتضمن أي إحالة لازمة للأعداد. إنه مبدأ في كل التفكير المنطقي الصوري، يذهب إلى التعميم في أقصى درجاته حيث إننا نؤمِّن بذلك لعملية استقراء ما نتائج قابلة للتطبيق على نحو

أوسع؛ على ذلك فنحن بالكاد نتتبع دستورًا معترفًا به بشكل عام في الرياضيات بذلك التعميم للتفكير المنطقي الخاص بالحساب. ولقد خلقنا على نحو فاعل بذلك التعميم مجموعة من أنظمة الاستنباط الجديدة، ذاب فيها الحساب المنطقي وتوسع في الحال؛ لكن القول بأن أي من هذه الأنظمة الاستنباطية الجديدة -على سبيل المثال نظرية المُنتخَبات- هو منتمٍ للمنطق أو للحساب اعتباطي تمامًا، ولا يمكن تقريره بمعقولية.

يضعنا ذلك وجهًا لوجه مع السؤال: ما هو هذا الموضوع الذي قد يُطلق عليه رياضيات أو منطق دون تمييز؟ هل هناك أي وسيلة لتعريفه؟

هناك سمات معينة واضحة خاصة بالموضوع. نبدأ بأننا في هذا الموضوع لا نتعامل مع أشياء على وجه التخصيص أو خواص على وجه التخصيص: إنما نتعامل صوريًّا مع ما يمكن أن يقال عن أي شيء أو عن أي خاصية. نحن على أهبة الاستعداد لأن نقول إن واحدًا وواحدًا اثنان، لا أن نقول إن سقراط وأفلاطون اثنان؛ لأننا في موضعنا هذا كمناطقة أو كرياضياتيين متخصصون في الرياضيات البحتة لم نسمع أبدًا بسقراط وأفلاطون. عالم ليس فيه مثل هذين الشخصين، لا يزال عالمًا فيه واحد وواحد اثنان. ليس من المتاح لنا كرياضياتيين متخصصين في الرياضيات البحتة أو كمناطقة الإتيان على ذكر أي شيء على الإطلاق؛ لأننا بقيامنا بذلك نطرح ما هو غير ذي صلة وما هو ليس صوريًّا. يمكننا جعل هذا واضحًا عن طريق تطبيقه على حالة القياس المنطقي. يقول المنطق التقليدي: «كل الرجال فانون، وسقراط هو رجل، على ذلك

فسقراط فانٍ». بات من الواضح الآن أن ما نقصد إليه هو الجزم فقط -كبداية- بأن المقدمات تستلزم النتيجة، لا أن المقدمات والنتيجة صادقة بالفعل؛ حتى المنطق الأكثر تقليدية يشير إلى أن الصدق الفعلي للمقدمات غير ذي صلة بالمنطق. على ذلك فأول تغيير نجريه على القياس المنطقي التقليدي السابق هو النص عليه في الصورة التالية: «إذا كان كل الرجال فانون، وسقراط هو رجل، إذَنْ سقراط هو فانٍ». قد نلاحظ الآن أن المقصود هو الإبلاغ عن أن هذه الحجة صالحة بالنسبة إلى صورتها، لا بالنسبة إلى حدودها الواقعة فيها على وجه الخصوص. إذا ما حذفنا «سقراط هو رجل» من مقدماتنا، فقد كنا لنحظى بحجة غير صورية، تُقبل فقط لأن سقراط في الحقيقة هو رجل؛ في تلك الحالة ما كان لنا أن نُعمم الحجة. لكن عندما تكون الحجة صورية -كما هو الحال في حجتنا السابقة- فلا شيء يعتمد على الحدود الواقعة فيها. على ذلك قد نستبدل الرجال بـ α والفانين بـ β و سقراط بـ x حيث α و β هما أي فئتين أيًّا ما كانتا، و x هو أي فرد. من ثم نصل إلى العبارة: «لا يهم ما قد تكون عليه القيم الممكنة لـ x و α و β، إذا كانت كل αات هي βات و x هو أحد α، إذَنْ x هو أحد β»؛ بمعنى آخر، «الدالة القضوية ‹إذا كانت كل αات هي βات و x هو أحد α، إذَنْ x هو أحد β صادقة دائمًا». بات لدينا هنا في النهاية قضية منطق – تلك المطروحة فقط عن طريق العبارة التقليدية عن سقراط والرجال والفانين.

من الجلي أنه إذا ما كان التفكير المنطقي الصوري هو ما نهدف إليه، فيجب أن نصل في النهاية إلى عبارة مماثلة للسابقة، لا أشياء أو خواص

فعلية مذكورة فيها؛ سوف يحدث هذا عن طريق الرغبة المجردة في ألا نهدر وقتنا في البرهنة على حالة معينة على وجه الخصوص، بينما من الممكن البرهنة على الأمر برمته بشكل عام. سوف يكون من السخيف الاشتغال ببرهان مطول عن سقراط، ومن ثم الاشتغال من جديد ببرهان مطول مماثل تمامًا عن أفلاطون. إذا ما كنت حجتنا (فلنقل) قائمة بالنسبة إلى كل الرجال، فسوف نبرهن عليها متعلقة بـ «x»، مع الفرضية الذاهبة إلى أنه «إذا كان x رجلًا». من خلال هذه الفرضية سوف تتحصل حجتنا على صلاحيتها الفرضية حتى عندما لا يكون x رجلا. لكننا الآن سوف نجد أن حجتنا لا تزال صالحة إذا ما كنا لنفترض أن x هو قرد أو إوزة أو رئيس وزراء بدلًا من أن يكون رجلًا. بذلك لن نهدر وقتنا متخذين مقدمة على شاكلة «x هو رجل»، لكننا سوف نتخذ مقدمة على شاكلة «x هو أحد α» حيث α هي أي فئة أفراد أو على شاكلة «φ x» حيث φ هي أي دالة قضوية من نمط معين ما. على ذلك فغياب كل ذكر لأشياء أو خواص على وجه الخصوص في المنطق أو في الرياضيات البحتة هو نتيجة لازمة للحقيقة التي مفادها أن هذا المبحث هو -كما نقول- «صوري على نحو بحت».

عند هذه النقطة نجد أنفسنا وجهًا لوجه مع معضلة النص عليها أيسر من حلها. المعضلة هي: «ما مكونات قضية منطقية؟». لا أعرف الإجابة، لكن أعرض شرحًا للكيفية التي نشأت بها المعضلة.

فلتتناول على سبيل المثال القضية «كان سقراط قبل أرسطو». يبدو من الواضح هنا أن لدينا علاقة بين حدين، وأن مكونات القضية

(وكذلك الحقيقة المقابلة) هما ببساطة الحدان والعلاقة أي، سقراط وأرسطو وقبل. (أتجاهل حقيقة أن سقراط وأرسطو ليسا بسيطين؛ وكذلك حقيقة أن ما يبدو كاسميهما هما وصفان مقتطعان بالفعل. ليست أيٌّ من هاتين الحقيقتين على صلة بالموضوع الحالي). يمكننا تمثيل الصورة العامة لمثل هذه القضايا عن طريق «xRy» والتي قد تُقرأ «تحظى x بالعلاقة R بالنسبة إلى y». قد تأتي مثل هذه الصورة العامة في القضايا المنطقية، لكن لا يمكن لأي نموذج على وجه الخصوص أن يأتي فيها. هل نستدل على أن الصورة العامة نفسها هي مكون في مثل هذه القضايا المنطقية؟

بالنظر إلى قضية على شاكلة «سقراط هو قبل أرسطو»، لدينا مكونات معينة وكذلك صورة معينة. لكن الصورة ليست هي نفسها مكونًا جديدًا؛ إذا ما كانت كذلك، كنا لنحتاج إلى صورة جديدة من أجل الإحاطة بكل منها والمكونات الأخرى. في الحقيقة، في مقدورنا تحويل كل مكونات قضية إلى متغيرات، مع الحفاظ على الصورة بلا تغيير. هذا ما نفعله عندما نستخدم مثل هذا المخطط على شاكلة «xRy»، والذي يقوم مقام أي واحدة من فئة معينة من القضايا، تحديدًا تلك التي تجزم بعلاقات بين الحدود. يمكننا المضي قُدُمًا صوب تأكيدات عامة على شاكلة «xRy صادقة أحيانًا»، أي أن هناك حالات حيث تكون العلاقات الثنائية قائمة. سوف ينتمي هذا الجزم إلى المنطق (أو إلى الرياضيات) بالمعنى الذي نستخدم به الكلمة. لكن في هذا الجزم لم نأتِ على ذكر أي أشياء أو علاقات على وجه خاص؛ لا يمكن لأي أشياء أو علاقات

على وجه الخصوص أن تلج أبدًا إلى داخل قضية منطق بحت. لقد تُركنا مع صور بحتة باعتبارها المكونات الوحيدة الممكنة للقضايا المنطقية.

لا أرغب في أن أؤكد بشكل قاطع على أن الصور البحتة -مثل الصورة «xRy» تلج بالفعل إلى داخل القضايا من النوع الذي نتدارسه. سؤال تحليل مثل هذه القضايا هو سؤال صعب، تصاحبه اعتبارات متضاربة من ناحية ما أو الأخرى. لا يمكننا أن نباشر مثل هذا السؤال الآن، لكننا قد نقبل كتقريب أولي بالمنظور الذاهب إلى أن الصور هي ما يلج إلى داخل القضايا المنطقية كمكوناتها. وقد نوضح ما نقصده «بصورة» القضية كالتالي (على الرغم من أننا لا نُعرِّفها صوريًّا):

«صورة» القضية هي ما يبقى فيها دون تغيير عند استبدال كل مكون في القضية بآخر.

على ذلك تحظى «سقراط هو أسبق من أرسطو» بنفس الصورة التي لـ «نابليون هو أعظم من ويلينجتون»[1]، على الرغم من اختلاف كل مكون في القضيتين.

على ذلك من الممكن أن ننص على سمة جوهرية للقضايا المنطقية أو الرياضية (إلا أنها غير كافية)، ذلك أنها يجب أن تكون على النحو الذي من الممكن معه أن نحصل عليها من قضايا لا تحتوي على أي متغيرات (أي لا تحتوي على كلمات مثل كل وبعض وأحد وال إلخ.) عن طريق تحويل كل مكون إلى متغير والجزم بأن النتيجة صادقة دائمًا أو أنها صادقة أحيانًا أو أنها صادقة دائمًا بالنسبة إلى بعض المتغيرات وأنها صادقة أحيانًا بالنسبة إلى متغيرات أخرى، أو أي تنويعة على هذه

الشاكلة. وهناك طريقة أخرى للنص على نفس الشيء بقولنا بأن المنطق (أو الرياضيات) معنيٌّ فقط بالصور، وهو معنيٌّ بها فقط على النحو الذي فيه نص على كونها صادقة دائمًا أو صادقة أحيانًا – مع كل تباديل «دائمًا» و«أحيانًا» التي قد تقع.

في كل لغة هناك بعض الكلمات مهمتها الوحيدة الإشارة إلى الصورة. هذه الكلمات –لو تحدثنا بشكل عام– هي أكثر شيوعًا في اللغات التي تحظى باشتقاقات لغوية أقل. فلتنظر في أمر «سقراط هو بشري»، ليست «هو» هنا مكونًا في القضية، لكنها بالكاد تشير إلى صورة الموضوع والمحمول. بالمثل «هو» و«من» في «سقراط هو أسبق من أرسطو» تشير بالكاد إلى صورة؛ القضية مماثلة لـ«سقراط يسبق أرسطو» والتي فيها اختفت هاتان الكلمتان وقد أُشير إلى الصورة على نحو آخر. من الممكن الإشارة إلى الصورة –كقاعدة– دون كلمات خاصة: من الممكن لترتيب الكلمات أن يقوم بأغلب المطلوب. لكن لا يجب الإلحاح على هذا المبدأ. على سبيل المثال، من الصعب إدراك الكيفية التي يمكن أن نعبر بها بشكل مناسب عن الصور الجزيئية **molecular** للقضايا (أي ما نطلق عليها «دوال الصدق») دون أي كلمة على الإطلاق. رأينا في الفصل الرابع عشر أن كلمة واحدة أو رمزًا واحدًا كافٍ لأجل هذه الغاية، تحديدًا كلمة أو رمز يعبر عن عدم التوافق. لكن دون حتى كلمة واحدة أو رمز واحد سوف نجد أنفسنا في مواجهة صعوبات. غير أن هذه ليست النقطة الهامة لأجل غايتنا الحالية، ما يهمنا هو رصد تلك الصورة التي قد تكون الشأن الوحيد لقضية عامة،

حتى عندما لا توجد أي كلمة أو أي رمز في القضية تفيد عن الصورة. إذا ما رغبنا في الحديث عن الصورة نفسها، يجب أن نحظى بكلمة لأجلها؛ لكن إذا ما رغبنا في الحديث عن كل القضايا التي تحظى بالصورة -كما هو الحال في الرياضيات- سوف نجد عادة أنه لا يمكن عادة الاستغناء عن كلمة هي من أجل الصورة؛ من المحتمل أنه من غير الممكن الاستغناء عنها أبدًا نظريًّا.

بافتراض أنه من الممكن تمثيل صور القضايا عن طريق صور القضايا التي يُعبر فيها عنها دون أي كلمات خاصة من أجل الصور (وهو ما أظن أننا قد نقوم به)، ينبغي أن نصل إلى لغة، ينتمي فيها كل شيء صوري إلى قواعد اللغة وتراكيبها، لا إلى مفرداتها. في مثل هذه اللغة يمكننا التعبير عن كل قضايا الرياضيات، حتى لو لم نكن نعرف كلمة واحدة مفردة في اللغة. لو أُتقنت لغة المنطق الرياضي، فسوف تكون مثل هذه اللغة. ينبغي أن نحظى برموز من أجل المتغيرات، على شاكلة «x» و«R» و«y» منتظمة بطرق متنوعة؛ وسوف تحدد الطريقة التي تنتظم بها صدق أو كذب شيئًا ما كان يقال بالنسبة إلى كل قيم أو بعض قيم المتغيرات. لسنا بحاجة إلى معرفة أي كلمات؛ لأننا نحتاج إليها فقط كي نمنح قيما للمتغيرات، وهذا هو عمل المشتغل بالرياضيات التطبيقية، لا المشتغل بالرياضيات البحتة أو المنطقي. أحد العلامات المميزة لقضية منطقية أنه في لغة مناسبة يمكن الجزم بمثل هذه القضية في مثل هذه اللغة عن طريق شخص يعرف قواعد اللغة وتراكيبها دون أن يعرف كلمة واحدة من مفرداتها.

لكن في النهاية، هناك كلمات تعبر عن الصورة مثل «هو» و«مَن». وهناك رموز تحظى بمعانٍ صورية ثابتة في كل رمزية ابتكرت حتى الآن من أجل المنطق الرياضي. يمكننا اعتبار رمز عدم التوافق الذي وُظِّف في بناء دوال الصدق مثالًا على ذلك. يمكن أن تأتي مثل هذه الكلمات أو الرموز في المنطق. السؤال هو: كيف سنقوم بتعريفها؟

تعبر مثل هذه الكلمات أو الرموز عما يُدعى «بالثوابت المنطقية **logical constants**». يمكننا تعريف مثل هذه الثوابت المنطقية مثلما نُعرِّف الصور تمامًا؛ في الحقيقة هما في جوهرهما نفس الشيء. سوف يكون ثابت منطقي أساسي هو المشترك بين عدد من القضايا، يمكن أن ينتج أي منها من أي واحدة أخرى عن طريق استبدال الحدود أحدها بالآخر. على سبيل المثال، «نابليون هو أعظم من ويلينجتون» تنتج من «سقراط هو أسبق من أرسطو» عن طريق استبدال «سقراط» بـ «نابليون» و«أرسطو» بـ «ويلينجتون» و«أسبق» بـ «أعظم». يمكن الحصول على بعض القضايا بهذه الطريقة من نموذج أولي **prototype** «سقراط هو أسبق من أرسطو» في حين لا يمكن الحصول منها على بعضها الآخر؛ تلك التي يمكن الحصول عليها هي على صورة «**xRy**» أي تعبر عن علاقة ثنائية. من النموذج الأولي السابق لا يمكننا عن طريق استبدال حد بحد الحصول على قضايا على شاكلة «سقراط هو بشري» أو «الأثينيون أعطوا شراب الشوكران إلى سقراط»؛ لأن الأولى على صورة الموضوع والمحمول والثانية تعبر عن علاقة ثلاثة حدود.

إذا ما كان لنا أن نحظى بأي كلمات في لغتنا المنطقية البحتة، فيجب

أن تكون على النحو الذي تعبر به عن «ثوابت منطقية»، وسوف تكون «الثوابت المنطقية» دائمًا إما هي المشترك بين زمرة قضايا قابلة للاشتقاق من إحداها الأخرى على النحو المذكور سابقا عن طريق استبدال حد بحد، وإما مشتقة من هذا المشترك. وهذا المشترك هو ما نطلق عليه «صورة».

بهذا المعنى، فإن كل «الثوابت» التي تأتي في الرياضيات البحتة هي ثوابت منطقية. على سبيل المثال، العدد 1 هو مشتق من قضايا على صورة: «هناك حد c بحيث φ x هي صادقة عندما -وعندما فقط- x هو c». هذه دالة φ، وتنتج قضايا متنوعة مختلفة من إسباغ قيم مختلفة على φ. قد نتعامل مع دالة φ المذكورة سابقًا (وذلك مع تجاهل خطوات بينية غير ذات صلة بهدفنا الحالي) باعتبارها المقصودة بقولنا «الفئة المحددة عن طريق φ هي فئة وحدة» أو بقولنا «الفئة المحددة عن طريق φ هي عنصر في 1» (حيث 1 هو فئة فئات). بهذه الطريقة، تتحصل القضايا التي يأتي فيها 1 على معنى مشتقٍّ من صورة منطقية ثابتة معينة. وسوف نجد نفس الأمر مع كل الثوابت الرياضية: جميعها ثوابت منطقية أو اختصارات رمزية، يُعرَّف استخدامها الكامل في سياق سليم عن طريق الثوابت المنطقية.

لكن على الرغم من أن كل القضايا المنطقية (أو الرياضية) من الممكن التعبير عنها بشكل كامل عن طريق الثوابت المنطقية والمتغيرات معًا، لكن العكس غير صحيح، ليست كل القضايا التي من الممكن التعبير عنها بهذه الطريقة منطقية. إلى الآن كنا قد وجدنا سمة لازمة للقضايا

الرياضية لكنها غير وافية. كنا قد عرّفنا على نحو وافٍ صفة التصورات الأولية من الناحية التي يمكن تعريف كل تصورات الرياضيات من خلالها، لكننا لم نُعرِّف صفة القضايا الأولية التي من الممكن اشتقاق كل قضايا الرياضيات منها. هذا موضوع أكثر صعوبة، لا نعرف الإجابة الكاملة عنه بعد.

قد ننظر في أمر مسلمة اللانهاية كمثال لقضية لا يمكن الجزم يصدقها عن طريق المنطق على الرغم من أنه من الممكن التعبير عنها بمصطلحات منطقية. تحظى كل قضايا المنطق بسمة اعتدنا على التعبير عنها بقولنا إنها تحليلية أو إن نقائضها متناقضة ذاتيًّا. مع ذلك فأسلوب العبارة هذا غير كافٍ. قانون التناقض هذا هو بالكاد واحد من ضمن القضايا المنطقية؛ ليس له وضع رفيع خاص مسبق؛ ومن المحتمل أن يحتاج البرهان –الذاهب إلى أن نقيض قضية ما هو متناقض ذاتيًّا– إلى مبادئ أخرى للاستنباط إلى جانب قانون التناقض. مع ذلك، فسمة القضايا المنطقية التي نبحث عنها هي تلك التي شعر أولئك الذين قالوا بأنها كامنة في القابلية للاستنباط من قانون التناقض بأن عليهم تعريفها وقصدوا إلى ذلك. لا تنتمي هذه السمة التي قد ندعوها في الوقت الحالي «لغو **tautology**» بشكل واضح إلى الجزم الذاهب إلى أن عدد الأفراد في الكون هو **n**، أيًّا ما قد يكون العدد **n**. لولا تباين الأنماط لكان من الممكن البرهنة منطقيًّا على أن هناك فئات من **n** حد، حيث **n** هو أي عدد صحيح متناهٍ؛ أو أن هناك حتى فئات من $\aleph_0$ حد. لكن بسبب الأنماط، مثل هذه البراهين كما رأينا في الفصل الثالث عشر تكتنفها

المغالطة. لقد تُركنا إلى الرصد الإمبيريقي؛ كي نحدد ما إذا كان هناك من الأفراد في الكون ما يماثل **n** فرد. من بين العوالم «الممكنة» بالمعنى المقصود لدى ليبنتز، سوف تكون هناك عوالم تحتوي على فرد واحد واثنين وثلاثة و... لا يبدو أن هناك أي ضرورة منطقية لماذا ينبغي أن يكون هناك حتى فرد واحد[2] – في الحقيقة، لماذا ينبغي أن يكون هناك أي عالم على الإطلاق. إذا كان البرهان الأنطولوجي[3] على وجود الرب صالحًا، فسوف يثبت وجوب فرد واحد على الأقل. لكن بات من المعروف عدم صلاحه، وفي الحقيقة هو ينهض على منظور خاطئ للوجود – أي أنه يفشل في إدراك أن الوجود يمكن الجزم به فقط بالنسبة إلى شيء موصوف، لا شيئًا مسمًّى، لذلك لا معنى للحجاج الذاهب إلى أنه من «هذا هو الكيت والكيت» و«الكيت والكيت يوجد»، نصل إلى «هذا يوجد». إذا ما رفضنا الحجة الأنطولوجية، يبدو أننا مدفوعون إلى أن نستنتج أن وجود العالم هو صدفة – أي أنه غير لازم منطقيًّا. إذا كان الأمر كذلك، لا يمكن لمبدأ للمنطق الجزم «بالوجود» إلا تحت مظلة الفرضية، أي لا شيء يمكن أن يكون على صورة «الدالة القضوية كيت وكيت هي صادقة أحيانًا». عندما تأتي قضايا من هذه الصورة في المنطق، يجب أن تأتي كفرضيات أو كنتائج لفرضيات، لا كقضايا مكتملة مجزوم بها. سوف تكون كل القضايا المكتملة المجزوم بها على النحو الذي يؤكد على أن بعض الدوال القضوية صادقة دائمًا. على سبيل المثال، من الصادق دائمًا أنه إذا كان **p** تستلزم **q** و **q** تستلزم **r** ، إذَنْ **p** تستلزم **r**، أو أنه إذا كانت كل **α**ات هي **β**ات و **x** هو أحد **α** ،

إذَنْ x هو أحد β. قد تأتي مثل هذه القضايا في المنطق وصدقها مستقل عن وجود الكون. قد ننص على أنه إذا لم يكن هناك كون، فسوف تكون كل القضايا العامة صادقة؛ أما القضية التي تجزم بوجود فهي على النقيض من القضية العامة (كما رأينا في الفصل الخامس عشر)، وسوف تكون كاذبة دائمًا إذا لم يكن هناك كون موجود.

القضايا المنطقية هي تلك التي من الممكن معرفتها بشكل مسبق a priori دون دراسة العالم الفعلي. نعرف فقط من دراسة الحقائق الإمبيريقية أن سقراط هو رجل، لكننا نعرف صحة القياس المنطقي في صورته المجردة (أي عند النص عليه في ضوء المتغيرات) دون الحاجة إلى أي توسل بالخبرة. هذه سمة مميزة للطريقة التي نعرف بها القضايا المنطقية وليست كامنة فيها هي نفسها. مع ذلك فلها حمولتها على التساؤل عما قد تكون طبيعتها، حيث إن هناك بعض أنواع القضايا التي سوف يكون من الصعب جدًّا افتراض أننا نقدر على معرفتها دون الخبرة.

من الواضح أنه يجب البحث عن تعريف «المنطق» أو «الرياضيات» عن طريق محاولة منح مفهوم القضايا «التحليلية» تعريفًا جديدًا. على الرغم من أننا لم نعد نستطيع أن نُقنع بتعريف القضايا المنطقية باعتبارها تلك التي تأتي من قانون التناقض، إلا أننا لا نزال نستطيع القبول بأنها فئة قضايا مختلفة بالكامل عن تلك التي توصلنا إلى معرفتها إمبيريقيًّا، بل يتحتم علينا القبول بذلك. تحظى جميعها بالسمة التي اتفقنا منذ وهلة على دعوتها «باللغو». هذا بالإضافة إلى الحقيقة التي مفادها

أنه من الممكن التعبير عنها بالكامل عن طريق المتغيرات والثوابت المنطقية (الثابت المنطقي هو شيء يبقى ثابتًا في قضية حتى عند تغيير كل مكوناتها) – وهو ما سيزود بتعريف المنطق والرياضيات البحتة. في الوقت الراهن، لا أعرف كيف أُعرِّف «اللغو»[4]. سوف يكون من السهل التقدم بتعريف، قد يبدو مقنعًا لوهلة؛ لكنني لا أعرف أي تعريف قد أشعر حياله بأنه مقنع، على الرغم من شعورٍ بالألفة يكتنفني نحو سمة التعريف المطلوب. لذلك، عند هذه النقطة نكون قد وصلنا في الوقت الراهن إلى حدود معارفنا في رحلتنا النكوصية نحو الأسس المنطقية للرياضيات.

لقد بلغنا الآن نهاية ما قد ندعوه ملخص مقدمة الفلسفة الرياضية. من المستحيل نقل التصورات المعنية في هذا الموضوع على نحو مناسب طالما كنا محجمين عن استخدام الرموز المنطقية. وحيث إن اللغة المعتادة لا تحظى بكلمات تعبر بشكل طبيعي بدقة عما نرغب في التعبير عنه، فمن الضروري أن نجبر الكلمات على معانٍ غير معتادة، طالما كنا ملتزمين باللغة المعتادة؛ ومن المؤكد أن القارئ –بعد بعض الوقت إن لم يكن من البداية– سوف ينحرف صوب ربط الكلمات بالمعاني المعتادة، وبذلك يصل إلى مفاهيم خاطئة بالنسبة إلى ما كنا ننوي قوله. علاوةً على ذلك، فالنحو المعتاد وتراكيب الجمل هي خادعة على نحو مدهش. على سبيل المثال، هذا هو الحال مع الأعداد؛ «رجال عشرة» هي على نفس صورة «رجال بيض»، على ذلك قد يُعتقد في أن **10** هي صفة تصف «الرجال». إنه ما يكون عليه الحال من جديد حيثما

تُضمَّن دوالَّ قضوية، وخاصة تلك التي تتعلق بالوجود والأوصاف. الرمزية المنطقية ضرورية بشكل مطلق لأي معالجة منضبطة أو شاملة لموضوعنا، وذلك بسبب أن اللغة خادعة، وكذلك بسبب أنها مرسلة وغير منضبطة عند تطبيقها على المنطق (وهو ما لم تعد له أبدًا). لذلك لن يجفل أولئك القراء الذين يرغبون في الفوز بإتقان مبادئ الرياضيات -كما أرجو- من الجهد المبذول لأجل إتقان الرموز -وهو في الحقيقة جهد أقل كثيرًا مما قد يظن بعضهم. فيما قد جعل هذا الاستعراض المتعجل من الجلي بالتأكيد أن هناك معضلات غير محلولة لا تُعد ولا تُحصى في الموضوع، وأن هناك حاجة للقيام بالكثير من العمل. لو قاد هذا الكتاب الصغير أي طالب نحو دراسة جادة للمنطق الرياضي، فسوف يكون قد أدى غرضه الرئيس الذي كُتب من أجله.

* * *

الهوامش:

(1) آرثر ويلزلي: دوق ويلنجتون، قائد عسكري بريطاني من أصل إيرلندي، اشتهر بتحقيقه نصرًا على نابليون في معركة واترلو. (المترجم).

(2) القضايا الأولية في **Principia Mathematica** هي على النحو الذي يسمح بالاستدلال على وجود فرد واحد على الأقل. لكنني أرى الآن ذلك كعيب في النقاء المنطقي. (المؤلف).

(3) أحد مباحث الفلسفة التي تدرس مفاهيم الوجود. (المترجم).

(4) كان تلميذي السابق لودفيج فتجنشتاين الذي كان يعمل معي على المعضلة هو مَن أوضح لي أهمية «اللغو» من أجل تعريفٍ للرياضيات. لا أعرف ما إذا كان قد حل تلك المعضلة، بل لعلي لا أعرف ما إذا كان حيًّا أو ميتًا. (المؤلف).

لودفيج فتجنشتاين: فيلسوف نمساوي (1889 – 1951). ويعود كلام راسل عنه إلى عام 1918، وقتها كان فتجنشتاين أسيرًا في قبضة القوات الإيطالية. (المترجم).

❊ ❊ ❊

الفهرس

شكر وتقدير	5
رحلة المنطق وعلاقته بالرياضيات من أرسطو حتى راسل	7
تصدير	47
الفصل الأول – سلسلة الأعداد الطبيعية	49
الفصل الثاني – تعريف العدد	65
الفصل الثالث – التناهي والاستقراء الرياضي	79
الفصل الرابع – تعريف الترتيب	93
الفصل الخامس – أنواع العلاقات	113
الفصل السادس – تشابه العلاقات	127
الفصل السابع – الأعداد النسبية والحقيقية والمركبة	143
الفصل الثامن – الأعداد الأصلية غير المتناهية	165
الفصل التاسع – السلاسل غير المتناهية والأعداد الترتيبية	183
الفصل العاشر – النهايات والاتصال	195
الفصل الحادي عشر – النهايات واتصال الدوال	209
الفصل الثاني عشر – المُنتخَبات ومسلمة التضاعف	223
الفصل الثالث عشر – مسلمة اللا نهاية والأنماط المنطقية	243
الفصل الرابع عشر – عدم التوافق ونظرية الاستنباط	261
الفصل الخامس عشر – الدوال القضوية	277
الفصل السادس عشر – الأوصاف	293
الفصل السابع عشر – الفئات	315
الفصل الثامن عشر – الرياضيات والمنطق	333