الفصل السابع

الرياضيات للمرحلة الثانوية

د. إيريك مان ود. سكوت تشامبرلين

Eric L. Mann, Ph.D., & Scott A. Chamberlin, Ph.D.

بالنسبة إلى الطلاب الموهوبين في الرياضيات، غالبًا ما يحمل الانتقال من المرحلة الابتدائية إلى الثانوية (المرحلة المتوسطة إلى الأول الثانوي) تغييرًا في الفرص والتحديات، وإذا ما حظي الطلاب ببرنامج للموهوبين والنابغين يلبي احتياجاتهم في المرحلة الابتدائية، فإنهم سيجدون أن خيارات الرياضيات المتمايزة في المرحلة الثانوية محدودة؛ حيث تكون البرامج المتخصصة أقل شيوعًا، وفي المرحلة الثانوية، تكون برامج التسريع ومقررات التسكين المتقدم أو برامج البكالوريا العالمية من أكثر الطرائق استخدامًا، وكل واحد منها له مزاياه، لكن هذا نظرًا إلى أن أي واحد منها لا يكفي في الصفوف الثانوية، وبعد إجراء نظرة سريعة على توقعات التعلم في المعايير الرسمية الجوهرية العامة للرياضيات التي وضعت بإشراف جمعية الحكام الوطنية ومجلس كبار مسؤولي المدارس، في ما يتعلق باحتياجات الطلاب الموهوبين، سوف تُستكشَف جوانب القوة والضعف لكل طريقة من طرائق التدريس الأكثر استخدامًا على مستوى المرحلة الثانوية، وتتخذ توصيات لتمايز برامج المنهاج كلها وإثرائها. هذا الفصل سوف يختتم بمناقشة دور الرياضيات في تطوير الموهبة والإبداع في تخصصات (ستيم) على مستوى المدرسة الثانوية.

التوقعات التعلمية ومعايير المنهج

الجهود الرامية إلى تطوير من المعايير الأكاديمية النموذجية المبنية على محتوى دقيق، وتطبيق للمعرفة (على العكس من الانتشار) عن طريق استخدام مهارات التفكير ذات الرتبة العالية، سبقت طرح المعايير الرسمية الجوهرية المشتركة للرياضيات المدرسية بزمن طويل، ففي العام 1894، نظمت جمعية التربية الوطنية في جامعة هارفارد اجتماعًا للجنة العشرة، التي أصدرت تقريرًا عن الاجتماع تضمن التوصيات الآتية في ما يتعلق بتدريس الرياضيات في المرحلة الثانوية:

> **«يجب أن تظل طريقة التدريس موضوعية دائمًا في تنشيط قدرات الطلاب العقلية. أما الكتب المدرسية فيجب أن تكون خاضعة لإشراف المعلم، بينما يتعين بناء الرسوم والإيضاحات والمسائل على أشياء مألوفة، ويجب تشجيع الدارس نفسه على تصميم أكبر عدد منها، أما القوانين فيجب أن تستخرج استقرائيًا بدلًا من ذكرها بطريقة جازمة وجامدة، وفي هذا النظام، سوف تأتي القوانين في نهاية الموضوع بدلًا من بدايته»** (p.105).

ويمكن العثور على تشابهات كثيرة بين هذه الوثيقة والمعايير الخاصة بالممارسة الرياضية في معايير (CCSS-M) التي تؤكد في جزء منها ضرورة أن يتوصل الطلاب إلى فهم للمسائل، ووضع تفسيرات مقنعة قابلة للتطبيق، واستخدام الأدوات بطريقة سليمة وإستراتيجية، والبحث عن الانتظام في الرياضيات بدلاً من الاكتفاء بمجرد تعلم القوانين والخطوات. وقد اقترح جونسين وشيفيلد (Johnsen & Sheffield, 2012) إضافة معيار آخر من معايير ممارسة الرياضيات إلى المعايير الثمانية في (CCSS-M): «حل المسائل بطرائق فريدة وطرح أسئلة رياضيات جديدة للتحقق منها» (p.16)، وبالتوازي مع هذه الجهود طورت شراكة مهارات القرن الواحد والعشرين بالتعاون مع جمعية الرياضيات الأمريكية، والمجلس الوطني لمعلمي الرياضيات، خريطة مهارات القرن الواحد والعشرين التي تحدد مهارات التعلم والابتكار الضرورية المعقدة لإعداد طلابنا، وبيئة العمل الذين سيجدون أنفسهم فيها في المستقبل.

الرسالة هنا هي أنه لم يعد يكفي (ولم يكن ذلك في الواقع أبدًا) أن نقدم للطلاب محتوى بغير سياق أو فرص تمكنهم من الانتقال إلى أبعد من إتقان الكتب المقررة، بل يحتاج الطلاب ويستحقون «بيئات غرف صفية متحدية، ومناهج تطور الموهبة الرياضية والإبداع والحماس وترعاها» (المجلس الوطني لمشرفي الرياضيات، 2012). يعدُّ ملحق معايير (CCSS-M)

خطـوة فـي هذا الاتجاه؛ حيث يتناول إعداد مقررات رياضيات للمرحلة الثانوية؛ ما يوفر مسـارات لـكل مـن الطريقـة التقليدية المشـاهدة في الولايـات المتحدة، والطريقـة التكاملية على السـاحة العالمية. وتوجد أيضًا نسخ (مضغوطة) من هذه المسارات، فعلى العكس من ضغط المنهج الذي يحـذف منـه المحتوى الذي أتقنه الطالب لإفسـاح المجال لتسـريع تعلم الطالـب للرياضيات، فإن (CCSS-M) تشـتمل على المحتوى كله في النسـخ غير المضغوطة المقدمة بطريقة التسـريع. وما تجـدر ملاحظتـه هنـا هو أن المسـارات الأربعة كلها تقترح مقـرر رياضيات للمرحلـة الثانوية مدة ثلاث سنوات دراسية؛ لإعداد الطلاب للالتحاق بمقررات في مستويات رياضيات أعلى مثل ما قبل التفاضل والتكامل، والتفاضل والتكامل، أو الإحصاء المتقدم.

لذلـك فـإن أي برنامـج رياضيـات خاص بالطـلاب الموهوبيـن والنابغيـن يركـز فقط على المحتـوى والممارسـات والميـول فـي (CCSS-M) لا يكفي لمثـل هؤلاء الطلاب؛ لأنهم يسـتطيعون القيام بأكثر من ذلك.

خيارات المنهج

التسريع

يعدُّ التسـريع أحد أركان البرامج النموذجية الخاصة بالطلاب الموهوبين، لكنه يُقدَّم عادة عـن طريـق توفير الوصـول المبكر لمقررات عالية المسـتوى بـلا تكييف المقرر ليناسـب الطالب، وقـد عرَّفَـت مقدمـةُ تقريرِ (أمـة مخدوعة: كيف تعيق المدارس ألمع طلاب أمريكا) (*A Nation Deceived: How Schools Hold Back America's Brightest Students,* Colangelo, Assouline, & Gross, 2004)[1] التسـريعَ بأنـه: «تدخّل يحرك الطلاب بوسـاطة برنامج تربوي بمعدلات أسـرع، أو بأعمار أقل من المعتاد، إنه يعني مواءمة مسـتوى المنهج وصعوبته وسـرعته مع اسـتعداد الطالب ودافعيتـه»، وقد شـدد جونتر وسـريرامان (Junter & Sriraman, 2011) علـى أهمية تضمين ضغط المنهـاج (بحـذف الواجبـات المتكررة) والتمايز، إضافة إلى التسـريع، وهـذا أكثر من مجرد نقل الطالب إلى صفوف أعلى على سلم المنهاج.

---

1 ترجمة التقرير متوافرة في الموقع الالكتروني:
http://www.accelerationinstitute.org/nation_deceived/international/nd_v1_ar.pdf

واعتمادًا على تنفيذ (CCSS-M)، قد يجد الطلاب عند ضغط المنهاج أن هذه المقررات ليست أكثر من التحرك بسرعة أكبر؛ فمثلًا يفتح وصف منهاج دراسة مسار تسريع تقليدي في (CCSS-M) للصف السابع، بالقول: «هذا المقرر يختلف عن مقرر الصف السابع غير المسرع من حيث إلا أن المحتوى الإضافي... يتطلب سرعة أعلى للتدريس والتعلم». لهذا، فإن هذا المقرر يقدم القليل لطلاب الصف السابع الموهوبين الذين يكونون قد أكملوا الجبر في الصف السادس (يكون عادة محتوى الصف التاسع)؛ لأنه خطوة إلى الوراء في تدرج المقررات والمحتوى الموضح في مسار (CCSS-M).

وعلى الرغم من أن قرار التسريع يجب أن يُبنى على مصادر بيانات متعددة لكل طالب، إلا أن مثل هذه المقرارات تكون مدفوعة بعوامل أخرى؛ فمثلًا قال تقرير حديث مشترك للمجلس الوطني لمعلمي الرياضيات وجميعة الرياضيات الأمريكية عن الطلاب الذين يكملون التفاضل والتكامل و ما قبل التفاضل والتكامل:

> **«ما يعرفه أعضاء مجتمع الرياضيات لزمن طويل أن ما يدفع مزيدًا من الطلاب إلى برامج الرياضيات المتقدمة في وقت مبكر ليس عدم الفاعلية، وإنما السلبية وعدم الإنتاجية». كثير من الطلاب يتنقلون بسرعة في المقررات التمهيدية ليتمكنوا من دراسة التفاضل والتكامل في المرحلة الثانوية، والنتجية هي أنه حتى لو استطاعوا النجاح في التفاضل والتكامل للمرحلة الثانوية، فإنهم قد أرسوا أساسًا ضعيفًا سيبنون عليه المعرفة الرياضية المطلوبة لمهن (ستيم).**

ويوجد دليل مقنع هو أنه عندما تطبق برامج مدروسة وهادفة، فإن التسريع يكون إستراتيجية لتلبية احتياجات بعض الطلاب، لكنه ليس إستراتيجية كافية أو عامة لبرنامج طلاب الثانوية الموهوبين، فهو يمكن أن يكون لطفل واحد أو عائلة أو حالة.

مقررات التسكين المتقدم

لا يزال برنامج التسكين المتقدم لمجلس الكلية يشهد نموًّا مضطردًا، فقد لخص هيرتبيرج - ديفيز وكالاهان 2008 (Hertberg-Davis and Callahan) إستنتاجاتهم عن تصورات الطلاب لمقررات التسكين المتقدم، وبرامج البكالوريا العالمية، وجاء فيها: إن أكثر من مليون طالب

شاركوا في هذه البرامج في العام 2005. وأظهرت بيانات العام 2013، زيادة في عدد المسجلين في برنامج التسكين المتقدم بلغت 205% (1081102 في العام 2005 مقابل 2218578 في العام 2013)، ومع أنها خضعت إلى مراجعات إيجابية في مؤلفات تربية الموهوبين، إلا أن مقررات التسكين المتقدم في كثير من المدارس الثانوية تمثل الخيار الوحيد في برنامج تربية الموهوبين.

وقد انطلقت دعوات من القطاعين الخاص والعام لتحسين فرص الوصول إلى مقررات التسكين المتقدم؛ من أجل تعزيز تدريس تخصصات (ستيم) من الروضة – صف 12، ومن الجهات الرائدة في دعم هذا الجهد مبادرة الرياضيات والعلوم الوطنية التي تسعى إلى زيادة عدد الطلاب الذين يلتحقون ببرامج الرياضيات والعلوم واللغة الإنجليزية وينجحون في اختبارتها، وإلى توسيع الفرص أمام الطلاب المحرومين، ومع أن زيادة الوصول إلى مقررات التسكين المتقدم تتطلب زيادة في الموارد، إلا أن تقديمها بصفتها حلًّا لتلبية الاحتياجات التربوية للطلاب الموهوبين والنابغين كافة، يظل في أفضل الحالات طريقة محدودة.

تهدف مقررات التسكين المتقدم إلى إلحاق الطلاب ببرامج مساوية للمقررات التعريفية بمستوى الجامعة، وتصممها لجان من معلمين متمرسين وأساتذة جامعيين، ومع ذلك وجد كالاهان 2003 أنه: «لا توجد دراسة تثبت أن برامج التسكين المتقدم والبكالوريا العالمية مساوية لمقررات الجامعة، بالإضافة إلى أن ما كتب لا يتضمن أي برهان على أن علامات الامتحان تتوقع النجاح في مقررات الجامعة ذات المستوى العالي، أو أن هذه المقررات تكسب الطلاب فهمًا عميقًا بمستوى مقررات الجامعة التمهيدية، يضاف إلى ذلك أن مراجعة منهج الرياضيات والعلوم المقدم في التسكين المتقدم والبكالوريا الدولية، التي أجرتها لجنة الأكاديمية الوطنية، توصلت إلى وجود عيوب في هذه المناهج من حيث تطوير الأفكار الرئيسة للتخصصات والمهارات فوق المعرفية، وتحديد المعرفة المسبقة المطلوبة»

وقد توصلت دراسات نوعية عن تصورات الطلاب الموهوبين لبرامج التسكين المتقدم والبكالوريا الدولية إلى أن معظمهم يفضلون مقررات التسكين المتقدم على بدائل التعليم العام: «... لأن في هذه فرصة للهروب من عبء مقرر أقل تحديًا».

ويمثل الطلاب الناجحون في هذه البرامج مجموعة مختارة ذاتيًّا، وهي برامج تناسب ملف أي طالب له تاريخ نجاح طويل، ويتمتع بدافعية ذاتية، ويسعى إلى النجاح والتطابق مع توقعات

المدرسة. ومع أن هذا الملف يصف بدقة كثيرًا من طلاب المرحلة الثانوية الموهوبين، إلا أنه في الوقت ذاته يستثني طلابًا عديدين، «ومع أن التسكين المتقدم نُظِر إليه على أنه خبرة تعلمية أكثر تحديًا وأعلى جودة، إلا أن بعض الطلاب رأوا أن جمود الطريقة واتباعها أسلوب (القياس الذي يناسب الحجوم كلها) ليس أفضل طريقة للتدريس... فالطلاب الذين لم يلبوا شروط نموذج النجاح المدرسي الطويل لم يعتقدوا أن مقررات (المقياس الذي يناسب الحجوم كلها) يلبي احتياجاتهم».

من جانبه، أعرب مجلس البحوث الوطني عن قلقة من عدم مراعاة منهج التسكين المتقدم للتوازن بين اتساع التغطية وعمقها، ولاحظ أن هذا المنهج، باستثناء مقرر التفاضل والتكامل، «...لا يتطابق مع أي منهاج مصمم لتعزيز التعلم المفاهيمي العميق»، لذلك فإن اتساع المادة التي ستُغطى غالبًا ما يؤدي إلى تركيز التدريس على تقديم معلومات وأنماط تعليم المسائل، بدلاً من تسهيل مشاركة الطالب النشطة في عملية التعلم، وهذا أسلوب تدريس لا يتناسب مع معايير برامج تربية الموهوبين من قبل الروضة – صف 12 التي وضعتها الجمعية الوطنية للأطفال الموهوبين 2010.

أما الفلسفة التربوية في دليل المعلم لمقرر التفاضل والتكامل في التسكين المتقدم «...فتهتم أساسًا بتعزيز فهم الطلاب لمفاهيم التفاضل والتكامل وتزويدهم بالخبرة في طرائقها وتطبيقاتها... والارتباطات بين هذه التمثيلات مهمة أيضًا... وتُؤكَّد المفاهيم العريضة والطرائق القابلة للتطبيق على نطاق واسع» (Howell, 2007). وقد راجع فريق العمل التابع لنظام تقييم مناهج البرامج المتقدمة الذي شكلته وكالة تربية ولاية تكساس، البرامج المخصصة للطلاب الموهوبين، وصنفت المقررات إلى أربع فئات: المحتوى والعملية والمنتج والأثر، فكانت أعلى علامات التفاضل والتكامل في برنامج التسكين المتقدم في مجال المحتوى والعملية، ولكنها انخفضت في مجال الأثر (انظر الجداول 7.1 و 7.2)، وقد وجد فريق العمل أن:

> **«بعض البنود في مجال المنتج أظهرت إمكانية للتمايز، لكن مجال الأثر لم يظهر أي إستراتيجيات ملموسة لتلبية احتياجات الطلاب الموهوبين، ويضاف إلى ذلك أن الارتباطات في ميادين الوظيفة المرتبطة بالرياضيات، وتوفير مصادر متنوعة، ويدويات يمكن أن تزيد من فهم الطلاب الموهوبين في مجالي المحتوى والعملية، وإلى زيادة الاهتمام الشخصي كما يلاحظ**

ذلك في المجال الوجداني، وشملت التوصيات الأخرى لفريق العمل تزويد الطلاب الموهوبين بمقررات رياضيات بديلة عالية المستوى التي توفر الإمكانية لإستراتيجيات التمايز».

الجدول 7.1

معدل العلامات من تقييم فريق عمل تقييم المنهج المتقدم

الفئة	التفاضل والتكامل	الأحياء	اللغة الإنجليزية والإنشاء	التاريخ الأمريكي
المحتوى	1.9	2.6	2.6	2.1
العملية	1.9	2.7	2.7	2.6
المنتج	1.5	2.3	2.7	1.7
الأثر	1.0	1.7	2.7	2.7

1. يظهر أن العنصر غير موجود.
2. يشير إلى وجود إمكانية في الدرس، لكن تضمين العنصر غير واضح.
3. يبرز أن العنصر موجود.

(مصدر البيانات من: *G/T teacher toolkit II: A set of resources for teachers of G/T, AP, and Pre-AP classes* (Retrieved from http://www.texaspsp.org/toolkit2/Toolkit2.html), by Texas Education Agency, 2007, Austin, TX: Author. Copyright 2007 by Texas Education Agency. Adapted with permission.)

الجدول 7.2

فقرات مختارة من استنتاجات فريق العمل

الفئة	الفقرة	الوصف
المحتوى	4	يسمح بالتعلم المتعمق في الموضوع المختار ذاتيًّا.
	9	يوفر فرصًا للطلاب للمشاركة في أنشطة تتواءم مع جوانب قوتهم، وأفضلياتهم واهتماماتهم.
	11	تسمح بتسريع المحتوى في أحد جوانب القوة.
العملية	1	تطور مهارات الدراسة الحرة أو الموجهة ذاتيًّا.
	2	تركز على الواجبات ذات النهايات المفتوحة.

المنتج	1	يطور منتجات تتحدى الأفكار الحالية (وينتج) أفكارًا جديدة.
	2	يطور منتجات تستخدم أساليب ومواد وأشكالًا جديدة.
الأثر	1	يشجع تطوير الفهم الذاتي.
	2	يشجع النمو والتغيير في قدرات الطالب ووجهة نظره.
	3	يشرك المدربين/الموجهين الذين لديهم اهتمامات ومواهب مشتركة مع الطلاب.

ملاحظة: نتائج التفاضل والتكامل والأحياء المسجلة عند 1 غير متوافرة.

(المصدر من: Retrieved *G/T teacher toolkit II: A set of resources for teachers of G/T, AP, and Pre-AP classes* from http://www.texaspsp.org/toolkit2/Toolkit2.html), by Texas Education Agency, 2007, Austin, TX: Author. Copyright 2007 by Texas Education Agency. Adapted with permission.)

تساعد مقررات التسكين المتقدم على سد الفجوة في البرامج التربوية المقدمة للطلاب الموهوبين والنابغين الذين لا يسعون إلى التحدي فحسب، وإنما أيضًا إلى فرصة الانضمام إلى الطلاب الذين يشاركونهم الاهتمام ذاته، وإلى المعلم الذي يعتقدون أنه ملتزم وخبير، وقد توصلت دراسة هيتربيرج ديفيز وكالاهان 2008 إلى وجود تفضيل لبيئة التعلم في مقررات التسكين المتقدم بين الطلاب المشاركين في الدراسة، وذلك لعاملين رئيسين: «(أ) فرصة التعلم مع طلاب ذوي قدرات ودافعية واهتمامات دراسية متشابهة، (ب) العلاقة الناضجة التي أنشؤوها مع معلمي المساقات المتقدمة، ومعلمي البكالوريا» (p. 204). في الوقت ذاته فإن طبيعة البرنامج تستثني الطلاب ذوي القدرات العقلية والرغبة في النجاح، ولكنهم لم يحصلوا على الخبرات المطلوبة، وغالبًا ما يكون الطلاب من الفئات المحرومة؛ ما يؤدي إلى «فصول دراسية متجانسة نسبيًّا» (Hertberg-Davis & Callahan, p. 206). في محاولتنا لتوسيع تجمع موهبة (ستيم)، فإننا بحاجة إلى إجراءات لإزالة الحواجز (الحقيقية أو الوهمية) التي تجعل الطلاب ينسحبون من البرامج بدلاً من الالتحاق بها.

وتوفر مساقات التسكين المتقدمة بديلًا لفصول التدريس العامة المناسبة لبعض الطلاب، ومقارنة بالتسريع من حيث طريقة تقديم منهج متقدم مع بنية تحتية مهمة لتوفير مواد المنهج، وإعداد المعلمين، وتقييم الطلاب، ومكافأة الإنجاز، فإن المساقات المتقدمة تحتل مكانًا على متصل الخدمات المقدمة لطلاب المرحلة الثانوية الموهوبين والنابغين، وهنا نجد معنى

لتوصيات هيربرت-ديفيز وكالاهان 2008 التي تتسق مع قلق مجلس البحوث الوطنية بخصوص عيوب البرنامج، ومع جهود وزارة التربية الأمريكية United States Department of Education) (USDOE- «لزيادة عدد الطلاب الموهوبين والنابغين المحرومين من الفئات المحرومة الذين كان أداؤهم عن طريق برامج الموهوبين والنابغين بمستويات أداء أكاديمية عالية، وبالتحديد، من الضروري أن نطور مهارات معلمي المساقات المتقدمة المطلوبة للتدريس المتمايز، والتنويع في إستراتيجيات التدريس لتلبية الاحتياجات الفريدة، وهو أمر اعتُرف به في بعض الولايات؛ ففي ولاية جورجيا مثلاً من أجل أن تلبي مقررات المساقات المتقدمة متطلبات برامج الموهوبين، على المعلمين أن يكونوا حائزين على الترخيص المطلوب في موضوع التخصص، وأن يكونوا قد خضعوا للتدريب في هذه المساقات، وأن يكونوا قد أكملوا دورة تدريب مهني مدتها عشر ساعات في خصائص الطلاب الموهوبين والتدريس المتمايز»، أو أن يكونوا حاصلين على ترخيص رسمي في تدريس الموهوبين، وتنطبق هذه المتطلبات أيضًا على دورات دبلوم البكالوريا العالمية الخاصة باحتياجات الطلاب الموهوبين، وبإمكان القراء الراغبين في معرفة المزيد من المعلومات عن التدريس المتمايز لطلاب الرياضيات الموهوبين في المرحلة الثانوية العودة إلى كتاب جونسين وشيفيلد (Johnsen & Sheffield, 2013) **استخدام المعايير الرسمية العامة للرياضيات مع الطلاب الموهوبين والنابغين Using the Common Core State Standards for Mathematics With Gifted and Advanced Learners**، وكتاب **أسئلة جيدة أخرى: طرائق رائعة لتدريس الرياضيات المتمايز في المرحلة الثانوية More Good Questions: Great Ways to Differentiate Secondary Mathematics Instruction** (Small & Lin, 2010).

في الوقت الحالي، لا توجد مصادر كثيرة لدعم التمايز في غرف فصول المساقات المتقدمة، والسبب في ذلك يعود جزئيًّا إلى اتساع المحتوى المطلوب تغطيته في أسابيع استعدادًا للاختبارات. كتب روتجيك (Rusczyk, 2015) في كتابه **فخ التفاضل والتكامل The Calculus Trap**: «... يتعين تعريض الطلاب الموهوبين المهتمين للرياضيات من خارج المنهج الأساسي؛ لأن المنهج الرسمي غير مصمم للطلاب الموهوبين، وهذا الواقع صحيح في ما يتعلق بمنهج التفاضل والتكامل الموجود في معظم المدارس الثانوية وكليات المجتمع والجامعات (p.1)، وبدلاً من التركيز على تغطية المنهج وإضافة أدوات رياضيات جديدة إلى مجموعة مهارات الطالب الموهوب، يدعو هذا الكاتب إلى اعتماد منحى يسمح لطلابنا باستخدام الأدوات الموجودة لديهم، وتعلم كيفية تطبيقها على

المسائل ذات الصعوبة الشديدة. في جزء لاحق من هذا الفصل عن الإثراء، سوف يجد القارئ بعض الاقتراحات عن الطرائق الكفيلة بتحقيق ذلك.

مساقات البكالوريا العالمية

برنامج البكالوريا العالمية الذي طُوِّر في ستينيات القرن الماضي هو «منهج متكامل لما قبل المرحلة الجامعية مخصص للطلاب ذوي الدافعية العالية في السنتين الأخيرتين من المرحلة الثانوية»، ولكونه برنامجًا مخصصًا لإعداد الطلاب للجامعة عن طريق مقرر دراسي متكامل ومتعدد التخصصات، بدلاً من تقديم مقررات بمستوى الجامعة لطلاب المرحلة الثانوية، يمكن لبرنامج البكالوريا أن يوفر للطلاب والمعلمين مزيدًا من المرونة أكثر مما هو متوافر في قائمة خيارات مساقات التسكين المتقدم. وقد لاحظ مركز البحوث الوطنية أنه بينما يؤدي منهج البكالوريا ومتطلباتها وقياساتها إلى تنوع أقل في المحتوى مقارنة بمساقات التسكين المتقدم، فإنه أيضًا يوفر إستراتيجيات تدريس بديلة في مذكرات التدريس المرافقة التي تشتمل على استخدام صيغ واقتراحات تفصيلية لمساعدة الطلاب على رؤية الارتباطات بين المفاهيم، وعلى العكس من مقررات التسكين المتقدم التي تقدم مساقات منفصلة، فإن برنامج البكالوريا برنامج دراسي متكامل يغطي ستة مجالات دراسية بمساقات من مستوى أعلى، وبالإضافة إلى دراسة الموضوعات المقررة، ينهي طلاب دبلوم البكالوريا ثلاثة متطلبات إضافية:

أولاً: مساق مدته عامان في نظرية المعرفة يهدف إلى تعليم الطلاب التأمل الناقد، ويركز على سلسلة من المسائل، من بينها تلك المخصصة لمساعدة الطلاب على فهم طبيعة المعرفة في الرياضيات والعلوم.

ثانيًا: ينهي الطلاب أيضًا مشروع بحث أصيل يمكِّن الطلاب من دراسة موضوع من اختيارهم عن طريق متطلب المقالة الموسعة، وهذا يركز على تطوير مهارات التواصل المطلوبة في الكلية.

ثالثًا: متطلب الإبداع والخدمة الذي يشجع الطلاب على المشاركة في أنشطة خارج غرفة الفصل الدراسي.

تُقدَّم في برنامج البكالوريا أربعة مساقات في الرياضيات بمستويات مختلفة، وهذا وصف لأهدافها المعلنة:

- تطوير معرفة الرياضيات ومفاهيمها ومبادئها.
- تطوير التفكير المنطقي والناقد والإبداعي.
- توظيف قدرات الطلاب في التجريب والتعميم، وتهذيبها.

ويشجع الطلاب أيضًا على تقدير الأبعاد العالمية للرياضيات، وتعددية منظوراتها الثقافية والتاريخية (International Baccalaureate Organization, 2005–2014).

تختلف مساقات برنامج البكالوريا عن التسكين المتقدم في التفاضل والتكامل؛ من حيث إنها تغطي مجموعة متقدمة من المفاهيم والموضوعات الرياضية، إلى جانب المسار المتكامل الذي ناقشناه في الملحق أ من (CCSS–M). فمثلًا:

> **يُدرَّس مساق الرياضيات ذو المستوى العالي في البكالوريا على مدى سنتين، ويشمل ضمن المادة الأساسية قدرًا كبيرًا من التفاضل والتكامل مساوية إلى حد ما لمساق التفاضل والتكامل في التسكين المتقدم، وكذلك الحل العملي لمسائل الاحتمالات والجبر، وعلم المثلثات، والأعداد المركبة، والاستنتاج الرياضي، والمصفوفات، ويوجد إضافة إلى ذلك في منهج المستوى العالي وحدات اختيارية تُدرَّس إحداها زيادة على المنهج الأساسي، وتوجد وحدات في الجبر التجريدي والرسوم البيانية والتحليل والإحصاء والتقريب والهندسة الإقليدية والمقاطع المخروطية، ومع وجود خيارات التحليل والتقريب، تصبح تغطية التفاضل والتكامل مساوية تقريبًا لمستوى مساقات التفاضل والتكامل المتقدمة لما قبل مرحلة الجامعة** (National Research Council, 2002, p. 500).

وبالنسبة إلى الطلاب الباحثين عن التحدي، ومجتمع الأقران، فإن برنامج البكالوريا يوفر مجتمع الانغماس هذا، ويمكن العثور على تشابهات كثيرة بين برنامج البكالوريا ونماذج تربية الموهوبين المختلفة (مثل مستويات تحدي متباينة وفرص متابعة مناهج الاهتمام في التفكيرين الناقد والإبداعي...؛ الخ). في العام 2008، قالت جمعية تكساس للموهوبين والمبدعين إن برنامج البكالوريا «...يوفر للطلاب فرصًا للاستقصاء في مجالات الاهتمام، وإجراءات قياس مناسبة، وفرصًا لتلبية الاحتياجات الوجدانية، وجوانب القوة عند الطلاب الموهوبين، ويطبق أساليب

أصول التدريس السليمة التي تسهل تعلم الموهوبين» (Boswell, 2008, p. 2)، ومع ذلك فإن القضايا ذاتها التي أثيرت في النقاش السابق لبرامج التسكين المتقدم هي مثار جدل هنا أيضًا، فقد كانت دراسة هيربيرج-ديفيز وكالاهان (Callahan's, 2008) نتيجة أسئلة عدة لا جواب لها بخصوص ملاءمة كلا البرنامجين لطلاب الثانوية الموهوبين، ففي جواب لسؤال أحد أولياء الأمور عن الاختيار بين التسكين المتقدم والبكالوريا في برنامج تعرُّف الموهبة في جامعة ديوك، جاء في رد كالاهان (Callahan, 2006):

تُقدَّم في برنامج البكالوريا أربعة مساقات في الرياضيات بمستويات مختلفة، وهذا وصف لأهدافها المعلنة:

- تطوير معرفة الرياضيات ومفاهيمها ومبادئها.
- تطوير التفكير المنطقي والناقد والإبداعي.
- توظيف قدرات الطلاب في التجريب والتعميم، وتهذيبها.

كلا البرنامجين يقدمان محتوى أكثر تقدُّمًا وتحديًا من المساقات الأخرى، وكذلك الفرصة للحصول على اعتماد جامعي، ويولي مسجلو القبول أهمية كبيرة للنجاح في هذه البرامج، ومع ذلك فإن القيمة الحقيقية لفرص التعلم هذه تعتمد على الملاءمة بين أسلوب تعلم طفلك ودافعيته، والاستعداد للتحديات التي يوفرها البرنامجان. (الفقرة 9).

وكما هي الحال مع التسريع ومساقات التسكين المتقدم، فلا توجد طريقة واحدة من شأنها تلبية احتياجات الطلاب كافة.

اقتراحات لإثراء المنهج

تاريخ المجال

إن أي فهم لتاريخ الرياضيات يضيف لمسة إنسانية للمفاهيم التي يواجهها الطلاب في غرفة الفصل الدراسي، فالطلاب الذين يواجهون صعوبة في فهم مفاهيم الأعداد السالبة قد يستمتعون بمعرفة أن هذا المفهوم كان موضوعًا خلافيًّا، لدرجة جعلت أحد الباحثين الفرنسيين يعزو «الفشل في تدريس الرياضيات في فرنسا إلى اعتماد الأرقام السالبة»؛ ما جعله يعلن أن هذه الاضطرابات العقلية قد تمنع الطلاب الموهوبين من دراسة الرياضيات (Busset, 1843/2010, p. 47). ويعدّ

كتاب بيرلنجهوف وجوفيا (Berlinghoff & Gouvêa, 2004) **الرياضيات على مرّ العصور: تاريخ لطيف للمعلمين وآخرين Math Through the Ages: A Gentle History for Teachers and Others**، وكتاب بوزامنتييه (Posamentier, 2003) **عجائب الرياضيات لتحفيز المعلمين والطلاب Math Wonders to Inspire Teachers and Students** مصادر رائعة لإضافة الثراء والعمق لدراسة الرياضيات، أما بالنسبة إلى الطلاب الصغار فإن كتابي باباز (Pappas) **فضائح الرياضيات Mathematical Scandals ومتعة الرياضيات: اكتشاف العالم من حولك The Joy of Mathematics: Discovering the World Around You** يقدمان رؤى مثيرة للتفكير في تاريخ الرياضيات.

تطوير التفكير الرياضي

يعدّ الإصرار على حل المسائل مهارة ضرورية، ففي مارس من عام 2010، طرح دان ميمير مصطلح (حلّالو المسائل المتعجلون). ومع أنه عزا جزءًا من المشكلة إلى العالم الذي نجد أنفسنا فيه، إلا أنه قال إن طريقة المنهج في كثير من فصول تدريس الرياضيات تسهم في هذه المشكلة، وإن حل ثلاثين مسألة في ليلة واحدة، أو الاختبارات الفصلية قد تساعد على تطوير الإصرار والمثابرة، لكنها لا تفعل شيئًا كثيرًا لتطوير الإصرار المطلوب لحل المسائل الصعبة، وتحدثت كاثي سيلي الرئيس السابق للمجلس الوطني لمعلمي الرياضيات، (Cathy Seeley, 2009) في كتابها: **الأسرع ليس الأذكى: رسائل عن الرياضيات والتدريس والتعلم في القرن الواحد والعشرين Faster Isn't Smarter: Messages About Math, Teaching, and Learning in the 21st Century**، عن أثر الضرر الكبير للاختبارات الفصلية والرياضيات التنافسية في ثقة الطلاب، ورغبتهم في حل مسائل جديدة.

وقال فيوري (Fiori, 2007): «إذا كنا محظوظين! فإذا قلت لأحد الرياضيين إنك حللت خمس مسائل في يوم واحد، فإن أول شيء سيخطر بباله ربما لم تكن مسائل مهمة ومثيرة فعلًا».

إن العثور على طرائق لجعل الطلاب ينخرطون في تفكير رياضي عميق أبعد من خبراتهم في مسابقات الرياضيات، حيث تكافأ فيها السرعة والحلول السريعة، أمر ضروري، لكنها أيضًا طرائق لمكافأة الطلاب الذين تبرز مواهبهم أكثر من النواحي التأملية، وفي الحقيقة توجد طرائق كثيرة لتطوير المفكرين الرياضيين، لكن أي عرض شامل لهذه الطرائق أكثر من أن يستوعبه هذا

الفصل، لذلك سوف نقدم لاحقًا مقدمة لثلاثة برامج تدريس: الدروس الاحترافية البريطانية، وحلقات الرياضيات الروسية، ومغامرات منطقة باي الرياضية (Britain's Masterclasses, Russian Mathematical Circles, and Bay Area Mathematical Adventures).

كان جورج بورتر (George Porter, 1997) –أول رئيس للجميعة الوطنية للأطفال الموهوبين في بريطانيا– أول من طرح البرامج الاحترافية لتلبية احتياجات الطلاب الموهوبين في الرياضيات، وقد ناقش سيويل (Sewell, 1997) طبيعة هذه الدروس في كتاب بعنوان: **دروس الرياضيات الاحترافية: توسيع الخيال Mathematic Masterclasses: Stretching he imagination**، وقال بورتر في مقدمة الدراسة إن الطلاب الذين يلتحقون بهذه الدروس ينجحون في الامتحانات بمستويات ممتازة، ويكملون دراستهم الثانوية، وهم في سن المراهقة، ويتخرجون في الجامعة قبل سن العشرين، ومع ذلك كانت هذه الدروس تضم أكثر من ربع مليون طالب سنويًا.

يضم الكتاب 12 فصلًا تشمل أمثلة عن الدروس المقدمة، منها دروس ذات تركيز تقليدي، ومنها يركز على موضوعات (ستيم).

أما في روسيا، فحلقات الرياضيات تقليد متبع منذ أكثر من قرن، وهذه الحلقات تضم طلابًا ومعلمين وخبراء رياضيات، يعملون معًا على حل المسائل على افتراض أن «دراسة الرياضيات يمكن أن تكون بها المنافسة الهدف الأول».

بعض فصول هذه الحلقات تكمل الموضوعات التي تتناولها المساقات الرسمية، بينما تثري فصول أخرى الخبرة الرياضية عن طريق تدريس موضوعات لا يدرسها الطلاب حتى الجامعة، وتُرتَّب المسائل لجعل الطلاب يشاركون في واجبات تتدرج في صعوبتها، ما يكسبهم خبرة تنطوي على مهارات حل المسائل.

وتسعى برامج مغامرات منطقة باي الرياضية –(The Bay Area Mathematical Adventures BAMA) إلى تعريف طلاب المرحلة الثانوية جماليات الرياضيات عن طريق محاضرات مكتوبة. إن القراءة عن المحاضرات قد لا يعجب خبراء الرياضيات بصفته عملية فاعلة لحل المسائل، ومع ذلك فإن الطلاب يحصلون على فرصة لتعرُّف جوانب أبعد من الموضوعات التي يدرسونها في غرفة الفصل التقليدية، وهي خبرة تغير الرياضيات من مجرد سلسلة من القوانين والخطوات

إلى خبرة عملية إبداعية واستكشافية، وما يكمل هذه السلسلة وجود حلقات يوتيوب مصورة بعنوان طموحات منهاجية تضم أكثر من مئة فيلم مخصصة لطلاب المرحلة الثانوية، ويتناول كل واحد من هذه الأفلام مسألة من مسابقات الرياضيات الأمريكية. انظر: http://www.youtube.com/playlist?list=PLevtNOOa6SZXVJvtROAFCC0oYt0ySTSo4.

لذلك، من أجل دعم الطلاب الموهوبين رياضيًا، والطلاب الذين يتمتعون بالخبرة والمثابرة والإبداع والاستعداد للأخطار والتغلب على الفشل، وهذا متطلب ليصبحوا مبتكرين رياضيين، فإننا نقترح إضافة معيار تاسع للممارسة الرياضية لتطوير الطلاب الموهوبين في الرياضيات، وهو معيار خاص بالإبداع والابتكار لحل المسائل بطريقة فريدة، وطرح أسئلة رياضية مثيرة.

وقد تحدثنا عن هذه البرامج البريطانية والروسية والأمريكية هنا ليس لأنها قائمة نهائية للمواد الإثرائية، وإنما لأنها عينة قليلة لثراء المصادر المتوافرة للاستخدام في غرفة الفصل الدراسي، ومع انتقال الطلاب إلى الجامعة وإلى ميدان العمل، فإنهم سيواجهون مشكلات حقيقية غير منظمة تتطلب مجموعة من الطرائق والمهارات لفهمها وحلها، وعن طريق مشاركتهم في جمال الرياضيات وطبيعتها الإبداعية بوساطة أعمال خبراء الرياضيات وكلماتهم، وبوساطة تهيئة الفرص لتصميم مسائلهم وحلها، فسوف يعد المعلمون هؤلاء الطلاب للعالم الذي سيواجهونه.

تدريس الرياضيات وموضوعات (ستيم)

درس عدد من الباحثين (Almarode, Subotnik, Crowe, Tai, Lee, and Nowlin ,2014) دور الكفاءة الذاتية والحفاظ على الاهتمام في تخصصات (ستيم)، عند الطلاب الذين يشاركون في برامج متابعة الموهبة، وبرامج المرحلة الثانوية المتخصصة، وقد توصل الباحثون إلى أن الحفاظ على اهتمام الفرد وتعزيزه في تخصصات (ستيم) يرتبط بقوة بإصرارهم، وبالحصول على شهادة جامعية في هذه التخصصات، ومع أن تحقيق ذلك ممكن في غرفة الفصل الدراسي العام، إلا أن تصورات الطلاب، كما وردت في دراسة هيتربيرج - ديفيز وكالاهان، نادرًا ما تتحقق، فالمواهب الرياضية يمكن تنميتها ورعايتها في البيئات التي تهتم بالشغف والإبداع، كما يقول المجلس الوطني لمشرفي الرياضيات (National Council of Supervisors of Mathematics, 2012).

ومع ذلك، فنحن ندرك ما يأتي:

«.... الأداء في مساقات الرياضيات يفشل كثيرًا في توقع من الذي سينجح في مجال الرياضيات، ويحدث فشل التوقع بسبب حقيقة أن أحدنا قد يخرج من الرياضيات، مثل معظم الميادين الأخرى، بتفكير تحليلي جيد، لكنه ضعيف إلى أن يصل إلى مستويات الرياضيات العليا (Sternberg, 1996, p. 313)».

وإذا لم يزَوَّد شخص ذو قدرة إبداعية في الرياضيات بمتنفس لذلك الإبداع حتى الجامعة أو ما بعدها، فسيكون من الصعب المحافظة على هذا الاهتمام؛ لذلك فإن توفير خيارات منهاجية متقدمة للطلاب الموهوبين والنابغين في المرحلة الثانوية في موضوعات (ستيم) بلا دمج هذه الخبرات في الممارسات الرياضية، أو من غير المرور بالصعوبات والمكافآت المرتبطة بممارسة الرياضيات مثلما يفعل المحترفون؛ أي منتج للرياضيات، وليس مستهلكًا لها، فإننا بذلك نهدر فرص تطوير الموهبة.

إن الرياضيات ـ وهذا قد يدهشك أو يصدمك إلى حد ما ـ ليست استنباطية في نتاجاتها، فمن يتعامل مع الرياضيات يضع افتراضات غامضة، ويتصور تعميمات فضفاضة، ويقفز إلى استنتاجات غير مبررة. إنه يرتب أفكاره، ويعيد ترتيبها، ثم يصبح مقتنعًا بصحة هذه الأفكار قبل كتابة برهان منطقي، ولا يتوقع أن يأتي الجزم مبكرًا، بل يأتي عادة بعد محاولات عدة، وبعد كثير من الفشل والإحباطات والبدايات الخطأ (Halmos, 1968, p. 286).

« . . . الأداء في مساقات الرياضيات، يفشل كثيرًا في توقع من الذي سينجح في مجال الرياضيات، ويحدث فشل التوقع بسبب حقيقة أن أحدنا قد يخرج من الرياضيات، مثل معظم الميادين الأخرى، بتفكير تحليلي جيد، لكنه ضعيف إلى أن يصل إلى مستويات الرياضيات العليا (Sternberg, 1996, p. 313)».

وفي الواقع لا توجد مفاجآت كثيرة في حل المسائل بالحلول المعروفة التي غالبًا ما تكون أجوبة معروفة توضع في نهاية الكتاب، أو في نسخة المعلم، لهذا فإن الموهوبين والنابغين في الرياضيات يستحقون أن نعطيهم الفرصة ليبدؤوا بدايات خطأ، وأن يعيدوا ترتيب أفكارهم والمحاولة مرة أخرى، وفي النهاية قد تسعدهم المفاجأة التي يكتشفونها، بالإضافة إلى أن المسؤولين عن تلبية احتياجات الطلاب يستحقون أن نعطيهم الفرصة ذاتها.

أسئلة للنقاش

1. لو أعطيت الفرصة لإعداد مساق لطلابك الموهوبين في الرياضيات، فما مجموعة خيارات البرامج الواردة في هذا الفصل التي قد تخدم طلابك أفضل؟
2. إن تطوير المثابرة والإصدار في حل المسائل أمر صعب، بالإضافة إلى أن عدم معرفة الطريقة (الصحيحة) لحل مسألة ما بسرعة غالبًا ما يسبب الإحباط، وبخاصة للطلاب الموهوبين الذين اعتادوا النجاح السريع، كيف تستطيع إيجاد بيئة تعلم تعطي قيمة للإصرار في بيئة اليوم التي تشدد على المحتوى واكتساب المهارات والمساءلة وعلامات الاختبار؟
3. إذا ما استبدل التسريع والمساقات المتقدمة بصفتها الطريقة السائدة لتقديم الخدمات للطلاب الموهوبين في غرف فصول المدرسة الثانوية، فما المساقات الجديدة التي يمكن تقديمها لتعميق فهم الطلاب المفاهيمي للرياضيات؟
4. يشير التأكيد الأخير على تدريس تخصصات (ستيم) إلى ضرورة اعتماد طريقة تدريس أكثر تكاملًا لمساعدة الطلاب على رؤية الارتباطات بين التخصصات، وهذه طريقة تبدو أنها تهتم بالرياضيات التطبيقية والاستعداد الوظيفي. هل تعزز مثل هذه الطريقة خبرات التعلم أو تضعفها عند طلاب الثانوية الموهوبين في الرياضيات؟

المراجع

Almarode, J. T., Subotnik, R. F. Crowe, E., Tai, R. H. Lee, G. M., & Nowlin, F. (2014). Specialized high schools and talent search programs: Incubators for adolescents with high ability in STEM disciplines. *Journal of Advanced Academics, 25,* 307-331.

Berlinghoff, W. P. & Gouvêa, F. Q. (2004). *Math through the ages: A gentle history for teachers and others (expanded edition).* Washington, DC: Mathematical Association of America.

Boswell, C. (2008). *Gifted learners and International Baccalaureate© primary years, middle years, and diploma programmes.* Austin, TX: Texas Association for Gifted and Talented.

Bressoud, D., Camp, D., & Teague, D. (2012). *Background to the MAA/NCTM statement on calculus.* Reston, VA: NCTM.

Bussett, F. C. (2010). *de L'enseignement des mathematiques dans les colleges*. Whitefish, MT: Kessinger Publishing. [Original work published 1843]

Callahan, C. M. (2003). *Advanced Placement and International Baccalaureate programs for talented students in American high schools: A focus on science and math* (Research Monograph 03176). Storrs: University of Connecticut National Research Center on the Gifted and Talented. Retrieved from http://www.gifted.uconn.edu/nrcgt/reports/rm03176/rm03176.pdf

Callahan, C. M. (2006). Advanced Placement or International Baccalaureate? *Digest of Gifted Research*. Durham, NC: Duke Talent Identification Program. Retrieved from http://tip.duke.edu/node/815

Colangelo, N.. Assouline, S. G., Gross, M. U. M. (2004). *A nation deceived: How schools hold back America's brightest students*. Iowa City: University of Iowa, The Connie Belin & Jacqueline N. Blank International Center for Gifted Education and Talent Development.

College Board. (2013). Annual AP program participation 1956-2013. Retrieved from http://media.collegeboard.com/digitalServices/pdf/ research/2013/2013-Annual-Participation.pdf

Fiori, N. (2007). Four practices that math classrooms could do without. *Phi Delta Kappan, 88,* 695-696.

Formin, D., Genkin, S., & Itenberg, I. (1996). *Mathematical circles: Russian experience.* Providence, RI: American Mathematical Society.

Georgia Resource Manual for Gifted Education Services. (2014-2015). Retrieved from http://www.gadoe.org/Curriculum-Instruction-and- Assessment/Curriculum-and-Instruction/Documents/Gifted%20 Education/2014-2015-GA-Gifted-Resource-Manual.pdf

Halmos, P. (1968). Mathematics as a creative art. *American Scientist, 56,* 375-389.

Hayes, D. F., & Shubin, T. (Eds.). (2004). *Mathematical adventures for students and amateurs.* Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Hertberg-Davis, H., & Callahan, C. M. (2008). A narrow escape: Gifted students' perceptions of advanced placement and international baccalaureate programs. *Gifted Child Quarterly, 52,* 199-216.

Hertberg-Davids, H., Callahan, C. M., & Kyburg, R. M. (2006). *Advanced Placement and International Baccalaureate programs: A "fit" for gifted learners?* (Research Monograph 0622). Storrs: University of Connecticut National Research Center on the Gifted and Talented. Retrieved from http://www.gifted.uconn.edu/nrcgt/hertcall.html

Howell, M. (2007). *AP® calculus teacher's guide.* New York, NY: The College Board. Retrieved from http://apcentral.collegeboard.com/apc/members/ repository/ap07_calculus_ teachersguide_2.pdf

International Baccalaureate Organization. (2005-2014). *Diploma programme curriculum: Group 5: Mathematics.* Retrieved from http://www.ibo.org/ diploma/curriculum/ group5/

Johnsen, S. K., & Sheffield, L. J., (2012), *Using the Common Core State Standards for mathematics with gifted and advanced learners.* Waco, TX. Prufrock Press.

Junter, K., & Sriraman, B. (2011). Does high achieving in mathematics = gifted and/or creative in mathematics. In B. Sriraman & K. H. Lee (Eds.), *The elements of creativity and giftedness in mathematics* (pp. 45-65). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publisher.

Meyer, D. (2010). Math class needs a makeover. Retrieved from http://www. ted.com/talks/ dan_meyer_math_curriculum_makeover?language=en

National Association for Gifted Children. (2004). *Position statement: Acceleration.* Washington, DC: Author. Retrieved from http://www. nagc.org/sites/default/files/ Position%20statement/Acceleration%20 Position%20statement.pdf

National Association for Gifted Children. (2010). *NAGC Pre-K-Grade 12 gifted education programing standards.* Washington, DC: Author. Retrieved from http://www.nagc. org/sites/default/files/standards/K-12%20program mingstandards.pdf

National Council of Supervisors of Mathematics. (2012). *Improving student achievement in mathematics by expanding opportunities for our most promising students of mathematics.* Denver, CO: Author.

National Educational Association. (1894). *Report of the Committee of Ten on secondary school studies with the reports of the conferences arranged by the committee.* New York, NY: American Book Company.

National Governors Association Center for Best Practices, & Council of Chief State School Officers. (2010a). *Common Core State Standards for mathematics.* Washington, DC: Author.

National Governors Association Center for Best Practices, & Council of Chief State School Officers. (2010b). *Common Core State Standards for mathematics Appendix A: Designing high school mathematics courses based on the Common Core State Standards.* Washington, DC: Author. Retrieved from http://www.corestandards.org/assets/ CCSSI_Mathematics_ Appendix_A.pdf

National Research Council. (2002). *Learning and understanding: Improving advanced study of mathematics and science in U.S. high schools.* Washington, DC: National Academy Press.

Pappas, T. (2001). *The joy of mathematics: Discovering mathematics all around you.* San Carlos, CA: Wide World Publishing/Tetra. [Original work published 1989]

Pappas, T. (2002). *Mathematical scandals.* San Carlos, CA: Wide World Publishing/Tetra. [Original work published 1997]

Partnership for 21st Century Skills. (2011). 21st century skills map - math. Washington, DC: Author. Retrieved from http://www.p21.org/storage/ documents/P21_Math_Map.pdf

Porter, G. (1997). *Mathematics masterclasses: Stretching the imagination.* London, England: Oxford University Press.

Posamentier, A. S. (2003). *Math wonders to inspire teachers and students.* Alexandria, VA: ASCD.

Reis, S. M, & Renzulli, J. S. (2005). *Curriculum compacting: An easy start to differentiating for high-potential students.* Waco, TX: Prufrock Press.

Rusczyk. R. (2015). *The calculus trap.* Retrieved from http://www.artof problemsolving. com/Resources/articles.php?page=calculustrap&

Seeley, C. L. (2009). *Faster isn't smarter: Messages about math, teaching, and learning in the 21st Century.* Sausalito, CA: Math Solutions.

Sewell, M. (Ed.). (1997). *Mathematics masterclasses: Stretching the imagination.* London, England: Oxford University Press.

Shubin, T. S., Hayes, D. F., & Alexanderson, G. L. (2011). *Expeditions in mathematics.* Washington, DC: Mathematical Association of America/ Spectrum.

Small, M., & Lin, A. (2010). *More good questions: Great ways to differentiate secondary mathematics instruction.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Sternberg, R. J. (1996). What is mathematical thinking? In R. J. Sternberg & T. Ben-Zeev (Eds.), *The nature of mathematical thinking* (pp. 303-318). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Texas Education Agency. (2007). *G/T teacher toolkit II: A set of resources for teachers of G/T, AP*, and Pre-AP* classes.* Retrieved from http://www. texaspsp.org/toolkit2/ documents/gttoolkit2.pdf

U.S. Department of Education. (2014). *Fiscal year 2014 application for new grants under the Javits Gifted and Talented Students Education Program* (CFDA 84.206A). Washington, DC: Author. Retrieved from http:// www2.ed.gov/programs/javits/2014-206a.pdf.