Divided Differences 2.3 الفروقات المنقسمة

استخدم الاستكمال الداخلي المكرّر في الفصل السابق لتوليد تقريبات كثيرة حدود بنجاح ومن الرتبة عالية عند نقطة محددة. وتستخدم طرائق الفرق المنقسم المطروحة ضمن هذا الفصل وبنجاح لكثيرات توليد الحدود نفسها. وستكون معالجتنا لطرائق الفرق المنقسم مختصرة، لأن النتائج في هذا الفصل لن يكون لها استخدام واسع ضمن المادة اللاحقة. ومعظم المصادر القديمة في التحليل العددي فيها معالجات واسعة لطرائق الفرق المنقسم. وإذا ما تطلب الأمر توسعًا في المعالجة، فإن كتاب هلدبراند [Hild] يعدّ مصدرًا جيدًا حصريًا.

افترض أن $P_n(x)$ كثيرة حدود لاجرانج النونية والمتوافقة مع الدّالة f عند الأعداد المميزة $x_0, x_1, \ldots, x_n$. إن تمثيلات جبرية بديلة تكون مفيدة في حالات معينة. على الرغم من وحدانية كثيرة الحدود هذه. تستخدم فروقات f المنقسمة بالنسبة إلى $x_0, x_1, \ldots, x_n$ للتعبير عن $P_n(x)$ بالصيغة

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots$$
$$+ a_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) \qquad (5.3)$$

لثوابت مناسبة $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

ولتحديد أول هذه الثوابت a_0، لاحظ أنه إذا كتب $P_n(x)$ بصيغة (5.3) فإن حساب $P_n(x)$ عند a_0 يترك فقط الحد الثابت a_0. أي أن

$$a_0 = P_n(x_0) = f(x_0)$$

وبالمثل، عند حساب $P(x)$ عند x_1، فالحدود اللاصفرية الوحيدة في حساب $P_n(x_1)$ هي حدود الثوابت والحدود الخطية

$$f(x_0) + a_1(x_1 - x_0) = P_n(x_1) = f(x_1)$$

وبذلك

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \qquad (6.3)$$

وكما في مجالات عديدة كان إسحق نيوتن رائدا في صيغ الفرق فقد طور صيغا للاستكمال الداخلي في بدايات 1675 مستخدما رمزه Δ في جداول الفروق. لقد اعتمد حلولا عامة لصيغ الفروق بحيث إن أمثلته الواضحة التي أعطاها ويضمنها صيغ لاجرانج. كانت أحيانا تعرف بأسماء أخرى

ونقدم الآن تعبير الفرق المنقسم الذي يشبه تعبير أيتكن Δ^2 المستخدم في الفصل (5.2). ويُرمز إلى الفرق المنقسم الصفري zeroth divided difference للدّالة f بالنسبة إلى x_i بالرمز $f[x_i]$، وهو عبارة عن قيمة f عند x_i.

$$f[x_i] = f(x_i) \qquad (7.3)$$

وبقية الفروقات المنقسمة تعرّف استقرائيًا. فالفرق المنقسم الأول لـ f بالنسبة إلى x_i و x_{i+1} يُرمز إليه بـ $f[x_i, x_{i+1}]$ ويعرّف بالصيغة

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i} \qquad (8.3)$$

والفرق المنقسم الثاني $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$ يعرّف بالصيغة

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{x+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$$

وبنفس الطريقة. بعد أن تحدد أول $(k-1)$ من الفروقات المنقسمة

$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+k-1}]$ و $f[x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+k-1}, x_{i+k}]$

فإن الفرق المنقسم من الرتبة k نسبة إلى $x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+k}$ يُعطى بالصيغة

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i} \tag{9.3}$$

وتنتهي العملية مع فرق منقسم واحد من الرتبة n وهو

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_n] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

ومع هذه الصيغة. يمكن تكرار صياغة الصيغة (6.3) على الصورة $a_1 = f[x_0, x_1]$. وتوجد كثيرة حدود استكمال داخلي في الصيغة (5.3)

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots$$
$$+ a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

ووفق المتوقع من حساب a_0 و a_1. فإن الثوابت المطلوبة هي

$$a_k = f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k]$$

جدول 7.3

x	$f(x)$	الفروق المنقسمة الأولى	الفروق المنقسمة الثانية	الفروق المنقسمة الثالثة
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0, x_1] = \dfrac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$	
		$f[x_1, x_2] = \dfrac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \dfrac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3] = \dfrac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$	
		$f[x_2, x_3] = \dfrac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2}$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \dfrac{f[x_2, x_3, x_4] - f[x_1, x_2, x_3]}{x_4 - x_1}$
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2, x_3, x_4] = \dfrac{f[x_3, x_4] - f[x_2, x_3]}{x_4 - x_2}$	
		$f[x_3, x_4] = \dfrac{f[x_4] - f[x_3]}{x_4 - x_3}$		$f[x_2, x_3, x_4, x_5] = \dfrac{f[x_3, x_4, x_5] - f[x_2, x_3, x_4]}{x_5 - x_2}$
x_4	$f[x_4]$		$f[x_3, x_4, x_5] = \dfrac{f[x_4, x_5] - f[x_3, x_4]}{x_5 - x_3}$	
		$f[x_4, x_5] = \dfrac{f[x_5] - f[x_4]}{x_5 - x_4}$		
x_5	$f[x_5]$			

لكل n ، … ,1 ,0 = k وبذلك يمكن إعادة كتابة $P_n(x)$ بالصيغة (انظر [Hild, pp. 43–47])

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \ldots, x_k](x - x_0) \cdots (x - x_{k-1}) \qquad (10.3)$$

وقيمة $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ مستقلة عن ترتيب الأعداد $x_0, x_1, \ldots, x_k$، وتتضح في التمرين (21) أيضًا.

إن توليد الفروقات المنقسمة مبين في جدول (7.3). ويمكن تحديد اثنين من الفروقات المنقسمة الرابعة، وفرق منقسم خامس من هذه البيانات أيضًا.

إن صيغة المخرجات في الخوارزمية (2.3) يمكن تحويرها لإنتاج الفروقات المنقسمة كلها. وقد نُفِّذ ذلك في المثال (1) أيضًا.

ALGORITHM

الخوارزمية

2.3

الفرق المنقسم لنيوتن Newton's Divided-Difference

لإيجاد معامل الفرق المنقسم لكثيرة حدود استكمال داخلي $P(x)$ على $(n + 1)$ من الأعداد المختلفة $x_0, x_1, \ldots, x_n$ للدّالة f.

المدخلات: أرقام $x_0, x_1, \ldots, x_n$. قيم $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ مثل $F_{0,0}, F_{1,0}, \ldots, F_{n,0}$

المخرجات: الأعداد $F_{0,0}, F_{1,1}, \ldots, F_{n,n}$ حيث

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} F_{i,i} \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

الخطوة	المضمون
1	عند $i = 1, 2, \ldots, n$ وعند $j = 1, 2, \ldots, i$ ضع $F_{i,j} = \dfrac{F_{i,j-1} - F_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}}$
2	المخرجات $(F_{0,0}, F_{1,1}, \ldots, F_{n,n})$: $(F_{i,i}$ is $f[x_0, x_1, \ldots, x_i])$ توقف.

■

مثال 1

استخدمت كثيرات حدود استكمال داخلي متنوعة لتقريب $f(1.5)$ في المثال (3) من الفصل (1.3)، باستخدام البيانات في الأعمدة الثلاثة الأولى من جدول (8.3). وتتضمن البيانات المتبقية الأخرى من جدول (8.3) فروقات منقسمة حسبت باستخدام الخوارزمية (2.3).

جدول 8.3

i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-3}, \ldots, x_i]$	$f[x_{i-4}, \ldots, x_i]$
0	1.0	0.7651977				
			−0.4837057			
1	1.3	0.6200860		−0.1087339		
			−0.5489460		0.0658784	
2	1.6	0.4554022		−0.0494433		0.0018251
			−0.5786120		0.0680685	
3	1.9	0.2818186		0.0118183		
			−0.5715210			
4	2.2	0.1103623				

إن معامل كثيرة حدود استكمال داخلي ضمن القطر في الجدول. وكثيرة الحدود هي

$$
\begin{aligned}
P_4(x) = 0.7651977 &- 0.4837057(x-1.0) - 0.1087339(x-1.0)(x-1.3) \\
&+ 0.0658784(x-1.0)(x-1.3)(x-1.6) \\
&+ 0.0018251(x-1.0)(x-1.3)(x-1.6)(x-1.9)
\end{aligned}
$$

لاحظ أن القيمة $P_4(1.5) = 0.5118200$ تتفق والنتيجة في الفصل (1.3) من المثال (3)، ويجب أن يكون لهما كثيرة الحدود نفسها أيضًا.

إن مبرهنة القيمة الوسطى تطبق في الصيغة (8.3) عندما $i = 0$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

لتشير إلى أنه عند وجود f'، فإن $f[x_0, x_1] = f'(\xi)$ لعدد ما ξ ما بين x_0 و x_1. تعمل المبرهنة الآتية على تعميم هذه النتيجة.

مبرهنة 6.3 لتكن $f \in C^n[a, b]$، ولتكن $x_0, x_1, \ldots, x_n$ أعدادًا مختلفة تنتمي للفترة $[a, b]$. عندئذ يوجد عدد ξ حيث $\xi \in (a, b)$ (عادة غير معلوم) بحيث يكون

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \qquad ■$$

البرهان ليكن $g(x) = f(x) - P_n(x)$

وحيث إن $f(x_i) = P_n(x_i)$ لكل $i = 0, 1, \ldots, n$، فإن الدالة g لها أصفار مختلفة في $[a, b]$. وتشير مبرهنة رول المعممة Generalized Rolle's Theorem إلى وجود عدد ξ في (a, b) مع $g^{(n)}(\xi) = 0$، ومن ثَمّ

$$0 = f^{(n)}(\xi) - P_n^{(n)}(\xi) \quad \text{و} \quad P_n^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(\xi)$$

ولكون $P_n(x)$ كثيرة حدود من الرتبة n، ومعاملها الأمامي $f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$. فإن

$$P_n^{(n)}(x) = n!\, f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$$

لكل قيم x. ونتيجة لذلك

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \qquad ■■■$$

يمكن وضع صيغة نيوتن للفرق المنقسم بصيغة مبسطة عندما تكون $x_0, x_1, \ldots, x_n$ مرتبة على التوالي بمسافات متساوية. في هذه الحالة نقدم الصيغة $h = x_{i+1} - x_i$ لكل $i = 0, 1, \ldots, n-1$ وندع $x = x_0 + sh$. لذا يمكن كتابة الفرق $x - x_i$ بصيغة $x - x_i = (s - i)h$ وأخيرًا فالصيغة (10.3) تصبح

$$
\begin{aligned}
P_n(x) = P_n(x_0 + sh) &= f[x_0] + shf[x_0, x_1] + s(s-1)h^2 f[x_0, x_1, x_2] + \cdots \\
&\quad + s(s-1)\cdots(s-n+1)h^n f[x_0, x_1, \ldots, x_n] \\
&= f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} s(s-1)\cdots(s-k+1)h^k f[x_0, x_1, \ldots, x_k]
\end{aligned}
$$