وإن عمليــة الحذف لجاوس بالتعويض الإرجاعي تتطلب $4n^3/3 - n/3$ من عمليات الضرب/ القسمة و $4n^3/3 - 3n^2/2 + n/6$ من عمليات الجمع/ الطرح لحل الأنظمة الخطية n. (انظر التمرين 8 (أ)). يجب أخذ الحيطة التامة في ملاحظة العمليات التي لا حاجة إلى تنفيذها. فعلى سـبيل المثال في عملية الضرب عندما يكون أحد المضاعفات هو الباب 1. أو في عملية الطرح عندما يكون العـدد المطروح صفرا. فإن عدد عمليات الضرب/ القسـمة اللازمـة يمكن إنقاص إلى n^3. ويمكن إنقاص عدد عمليات الجمع/ الطرح إلى $n^3 - 2n^2 + n$. (انظر تمرين 8 (د))

وهناك مصفوفة مهمة مرتبطة بأي مصفوفة A وتسمى منقولاً (transpose). ويعبّر عنها بالرمز A^t.

تعريف 12.6 منقــول المصفوفــة $n \times m$ المعبَّــر عنها $A = [a_{ij}]$ هو المصفوفــة $m \times n$ المعبَّر عنها $A^t = [a_{ji}]$ حيث لكل i يكون العمود i في المصفوفة A^t هو نفسه الصف i في المصفوفة A. أي أن $A^t = (a_{ji})$ وتسمى المصفوفة المربعة متماثلة (symmetric) إذا كان $A = A^t$. ■

على سبيل المثال المصفوفات

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & -6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -3 \\ 4 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

لها المنقولات

$$A^t = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \\ 0 & -1 & -6 \end{bmatrix}, \quad B^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}, \quad C^t = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -3 \\ 4 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

والمصفوفة C متماثلة، لأن $C^t = C$. ولكن المصفوفات A و B غير متماثلة.

وبرهان النتيجة الآتية يتضح مباشرة من تعريف المنقول.

مبرهنة 13.6 تتحقق العمليات الآتية حول منقول المصفوفة في كل حالة تكون العملية فيها ممكنة

أ. $(A^t)^t = A$ ب. $(A + B)^t = A^t + B^t$

ج. $(AB)^t = B^t A^t$ د. إذا كانت A^{-1} موجودة فإن $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$ ■

يمكن استخدام أي CAS لتنفيذ أي عمليات قابلة للتنفيذ على المصفوفات. ويمكن على سبيل المثال إجراء جمع المصفوفات باستخدام مكتبة الجبر الخطي في Maple بـ F−B.

أما الضرب في ثابت فهو معرّف بـ c*A. وضرب المصفوفات AB ينفّذ باستخدام A.B. يوجد منقول المصفوفة باستخدام Transpose(A). ويوجد معكوس المصفوفة باستخدام MatrixInverse(A).

مجموعة التمارين 3.6 EXERCISE SET

1. حدّد أيًا من المصفوفات الآتية غير منفردة (قابلة للانعكاس):

أ. $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 7 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$　　ب. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

ج. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$　　د. $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 0 & 0 \\ 9 & 11 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

2. حدّد أيًّا من المصفوفات الآتية غير منفردة، واحسب المعكوس لكل منها:

أ. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$　　ب. $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

ج. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 6 \end{bmatrix}$　　د. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

3. لديك مجموعتان من 4×4 من الأنظمة الخطية لهما مصفوفة المعاملات نفسها:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 6, \\ x_1 - x_3 + x_4 &= 4, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= -2, \\ -x_2 + x_3 - x_4 &= 5; \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1, \\ x_1 - x_3 + x_4 &= 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 2, \\ -x_2 + x_3 - x_4 &= -1. \end{aligned}$$

أ. حُلَّ الأنظمة الخطية باستخدام طريقة الحذف لجاوس على المصفوفة المزيدة.

$$\left[\begin{array}{cccc:cc} 1 & -1 & 2 & -1 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 5 & -1 \end{array}\right]$$

ب. حُلَّ الأنظمة الخطية بإيجاد معكوس المصفوفة A ثم الضرب في معكوس هذه المصفوفة.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

ج. أي الطريقتين تحتاج إلى عمليات أكثر؟

4. لديك أربعة أنظمة خطية 3×3 ذات مصفوفة معاملات واحدة:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= -1 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 &= -3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

أ. حُلَّ الأنظمة الخطية باستخدام طريقة الحذف لجاوس على المصفوفة المزيدة

$$\left[\begin{array}{ccc:cccc} 2 & -3 & 1 & 2 & 6 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 0 & 5 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

ب. حُلَّ الأنظمة الخطية بإيجاد معكوس المصفوفة A، ثم الضرب في معكوس هذه المصفوفة.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

ج. أي الطريقتين تحتاج إلى عمليات أكثر؟

5. العبارات الآتية مطلوبة لبرهان المبرهنة (11.6):

أ. برهن أن A^{-1} موجودة فهي وحيدة.

ب. برهن أنه إذا كانت A غير منفردة فإن $(A^{-1})^{-1} = A$.

ج. إذا كانت A و B مصفوفتين $n \times n$ غير منفردتين فإن $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

6. برهن العبارات الآتية أو أعطِ أمثلة مضادة تبرهن أنها غير صحيحة:

أ. حاصل ضرب مصفوفتين متماثلتين مصفوفة متماثلة.

ب. معكوس أي مصفوفة متماثلة غير منفردة هو مصفوفة متماثلة غير منفردة.

ج. إذا كانت A و B مصفوفتين $n \times n$ فإن $(AB)^t = A^t B^t$.

7. أ. برهن أن حاصل ضرب أي مصفوفتين مثلثتين سفليين $n \times n$ هو مصفوفة مثلثية سفلية.

ب. برهن أن حاصل ضرب أي مصفوفتين مثلثتين علويين $n \times n$ هو مصفوفة مثلثية علوية.

ج. برهن أن معكوس أي مصفوفة غير منفردة مثلثية سفلية $n \times n$ هو مصفوفة مثلثية سفلية.

8. افترض أن m من الأنظمة الخطية

$$A\mathbf{x}^{(p)} = \mathbf{b}^{(p)}, \quad p = 1, 2, \ldots, m$$

مطلوب حلها، حيث كل منها مصفوفة المعاملات $n \times n$ هي A.

أ. برهن أن تطبيق عملية الحذف لجاوس بالتعويض الإرجاعي على المصفوفة المزيدة

$$[\, A : \mathbf{b}^{(1)}\mathbf{b}^{(2)} \cdots \mathbf{b}^{(m)} \,]$$

يتطلب عمليات ضرب/ قسمة عددها $\frac{1}{3}n^3 + mn^2 - \frac{1}{3}n$

وعمليات جمع/ طرح عددها $\frac{1}{3}n^3 + mn^2 - \frac{1}{2}n^2 - mn + \frac{1}{6}n$

ب. برهن أن تطبيق طريقة جاوس–جوردان (انظر التمرين 12من الفصل 16) على المصفوفة المزيدة

$$[\, A : \mathbf{b}^{(1)}\mathbf{b}^{(2)} \cdots \mathbf{b}^{(m)} \,]$$

يتطلب عمليات ضرب/ قسمة عددها $\frac{1}{2}n^3 + mn^2 - \frac{1}{2}n$

وعمليات جمع/ طرح عددها $\frac{1}{2}n^3 + (m-1)n^2 + (\frac{1}{2} - m)n$

ج. بالنظر إلى الحالة الخاصة

$$\mathbf{b}^{(p)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow p \text{ الصف} \\ \\ \\ \end{array}$$

لكل $p = 1, \ldots, m$ حيث $n = m$ فإن الحل $\mathbf{x}^{(p)}$ هو العمود p في المصفوفة A^{-1}.

برهن أن طريقة الحذف لجاوس بالتعويض الإرجاعي تتطلب

عدد عمليات الضرب/ القسمة $\frac{4}{3}n^3 - \frac{1}{3}n$

وعدد عمليات الجمع/ الطرح $\frac{4}{3}n^3 - \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$

وأن طريقة جاوس – جوردان تتطلب

عدد عمليات الضرب/ القسمة $\frac{3}{2}n^3 - \frac{1}{2}n$

وعدد عمليات الجمع/ الطرح $\frac{3}{2}n^3 - 2n^2 + \frac{1}{2}n$

د. أنشئ خوارزمية باستخدام طريقة الحذف لجاوس لإيجاد A^{-1}، ولكن لا تنفذ عمليات ضرب إذا كان أحد المضاعفات معلومًا أنه 1، ولا تنفذ أي عمليات جمع/ طرح عندما يساوي أحد العناصر صفرًا.

برهن أن الحسابات اللازمة تُنقص إلى n^3 من عمليات الضرب/ القسمة و $n^3 - 2n^2 + n$ من عمليات الجمع/ الطرح.

هـ. برهن أن حل النظام الخطي $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ عندما تكون A^{-1} معلومة ما زال يتطلب n^2 من عمليات الضرب/ القسمة و $n^2 - n$ من عمليات الجمع/ الطرح.

و. برهن أن حل m من الأنظمة الخطية $A\mathbf{x}^{(p)} = \mathbf{b}^{(p)}$ للقيم $p = 1, 2, \ldots, m$ بالطريقة $\mathbf{x}^{(p)} = A^{-1}\mathbf{b}^{(p)}$ يتطلب mn^2 من عمليات الضرب و $m(n^2 - n)$ من عمليات الجمع إذا كانت A^{-1} معلومة.

لتكن A مصفوفة $n \times n$. قارن عدد العمليات اللازمة لحل n من الأنظمة الخطية المحتوية على A بطريقة الحذف لجاوس بالتعويض الإرجاعي وبطريقة إيجاد معكوس A أولًا، ثم بضرب طرفي $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ في المصفوفة A^{-1} للأعداد $n = 3, 10, 50, 100$.

هل من المفيد على الإطلاق أن تحسب A^{-1} لغرض حل الأنظمة الخطية؟

9. استخدم الخوارزمية التي أُنشئت في التمرين (8) (د) لإيجاد معكوس كل مصفوفة غير منفردة في التمرين (1).

10. غالبًا ما يكون من المفيد تجزئة المصفوفات إلى مجموعة من المصفوفات المصغرة؛ فيمكن على سبيل المثال تجزئة المصفوفتين

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & -3 \\ 6 & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 7 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

إلى

$$\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & -3 \\ \hdashline 6 & 5 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} A_{11} & A_{12} \\ \hdashline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] \quad \text{و} \quad \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -1 & 7 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 5 \\ \hdashline -2 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} B_{11} & B_{12} \\ \hdashline B_{21} & B_{22} \end{array}\right]$$

أ. برهن أن حاصل ضرب A في B في هذه الحالة هو

$$AB = \left[\begin{array}{c:c} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ \hdashline A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{array}\right]$$

ب. إذا جُزّئ B بدلًا من التجزئة السابقة إلى

$$B = \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -1 & 7 & 0 \\ \hdashline 3 & 0 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} B_{11} & B_{12} \\ \hdashline B_{21} & B_{22} \end{array}\right]$$

فهل ستبقى النتيجة (أ) متحققة؟

ج. أعط اقتراحًا أو تخمينا عن الشروط الضرورية لتتحقق النتيجة في الفقرة (أ) في الحالة العامة.

11. ورقة بحث بعنوان "موجات المجتمع" "Population Waves," Bernadelli [Ber] (انظر أيضًا [Se])

يضع بيرناديللي فرضية عن نوع مبسط من البيتل طول مدى حياته 3 سنوات. وإن معدل حياة أنثى هذا النوع $\frac{1}{2}$ في السنة الأولى من الحياة، و$\frac{1}{3}$ في السنة الثانية إلى السنة الثالثة، وتلد بمعدل 6 إناث جديدة قبل نهاية حياتها في نهاية السنة الثالثة. ويمكن تمثيل ما تساهم به أنثى البيتل في مجتمع نوعها بمصفوفة يعبّر عنها بمعنى احتمالي، وذلك بالمصفوفة $A = [a_{ij}]$ حيث تمثّل a_{ij} مساهمة أنثى البيتل الواحدة في العمر j نحو المجتمع الأنثوي ذي العمر i في السنة التالية، أي أن

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

أ. إن ما تساهم به أنثى البيتل في المجتمع بعد سنتين يتحدد من عناصر A^2 وبعد ثلاث سنوات A^3 وهكذا. احسب A^2 وA^3 وحاول إعطاء عبارة عامة حول مساهمة أنثى البيتل في المجتمع خلال n سنة، حيث n عدد صحيح موجب.

ب. استخدم نتائجك في الفقرة (أ) لتصف ما سيحدث في السنوات القادمة في مجتمع لبيتل المكوّن من 6000 أنثى من فئات الأعمار الثلاث.

ج. أوجد A^{-1}، وصف أهميتها لمجتمع هذا النوع.

12. إن دراسة سلاسل الغذاء موضوع مهم في تحديد انتشار الملوثات البيئية في المادة الحيّة وتراكمها. افترض أن لسلسلة غذاء ثلاث روابط: الرابط الأول يتألف من النباتات من الأنواع $v_1, v_2, \ldots, v_n$ التي تزود الأنواع جميعها نباتية الغذاء $h_1, h_2, \ldots, h_m$ في الرابط الثاني بالغذاء المطلوب. ويتألف الرابط الثالث من الحيوانات آكلة اللحوم $c_1, c_2, \ldots, c_k$ التي تعتمد في غذائها كليًا على الأنواع آكلة النبات في الرابط الثاني. إن العنصر a_{ij} في المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

تمثّل النباتات جميعها من النوع v_i المستهلكة من قبل الحيوانات نباتية الغذاء من النوع h_j.

أما العنصر b_{ij} في المصفوفة

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mk} \end{bmatrix}$$

فيمثّل عدد الحيوانات النباتية الغذاء من النوع h_j التي تستهلكها الحيوانات من لنوع c_j.

أ. وضّح أن نباتات النوع v_i التي تنتهي أخيرًا بحيوانات النوع c_j تعطى بالعنصر في الصف i والعمود j في المصفوفة AB.

ب. ما الأهمية الطبيعية للمصفوفات A^{-1}, B^{-1} و $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$؟