بحذف المعيارين l_2 و l_∞ للمتجه $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ على النحو الآتي

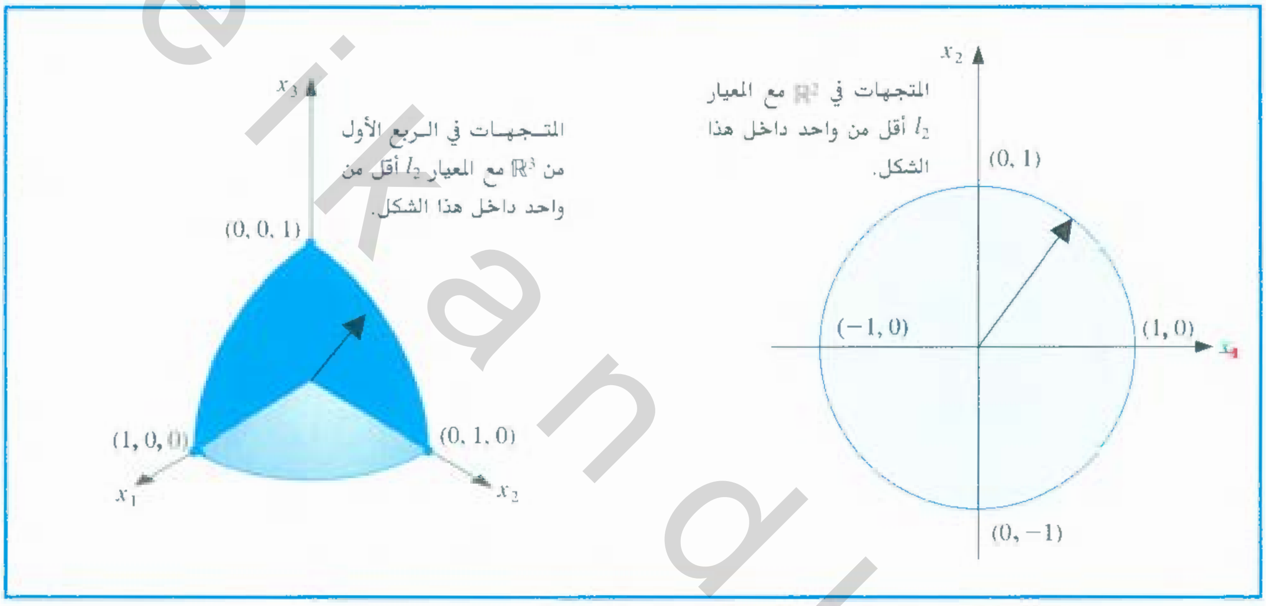
$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right\}^{1/2} \quad و \quad \|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|.$$ ■

تعريف 2.7

في المسافة المعيارية يعتبر الخط المستقيم أقصر مسافة ما بين نقطتين. وتسمى بالمسافة الإقليدية، لأنها تعنينا هندسة إقليدية.

يسمى المعيار l_2 معيارًا إقليديًّا Euclidean norm للمتجه $\mathbf{x}$، لأنه يمثّل مفهوم المسافة من نقطة الأصل في حالة كون x في $\mathbb{R}^1 \equiv \mathbb{R}$، $\mathbb{R}^2$ أو $\mathbb{R}^3$. وعلى سبيل المثال فإن معيار l_2 للمتجه $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^t$ يعطي طول الخط المستقيم الواصل ما بين النقطتين $(0, 0, 0)$ و (x_1, x_2, x_3). ويبيّن شكل (1.7) حدود المتجهات في $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ التي لها معيار l_2 أقل من 1. وشكل (2.7) هو توضيح مماثل للمعيار l_∞. ■

شكل 1.7



مثال 1 للمتجه $\mathbf{x} = (-1, 1, -2)^t$ في $\mathbb{R}^3$ معايير

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{6} \quad و \quad \|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|-1|, |1|, |-2|\} = 2.$$

ومن السهل أن نرى تحقق خصائص تعريف (1.7) لمعيار l_∞، لأنها تنبع من نفس النتائج لقيم مطلقة. وعلى سبيل المثال فإذا كان $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ و $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^t$ فإن

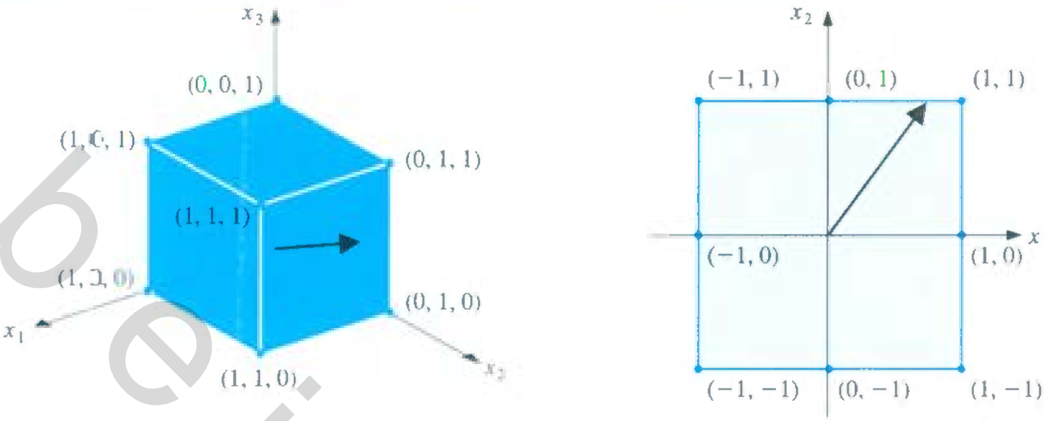
$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i + y_i| \le \max_{1 \le i \le n} (|x_i| + |y_i|) \le \max_{1 \le i \le n} |x_i| + \max_{1 \le i \le n} |y_i| = \|\mathbf{x}\|_\infty + \|\mathbf{y}\|_\infty$$

ولكي نثبت أن

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_2 \le \|\mathbf{x}\|_2 + \|\mathbf{y}\|_2 \quad لكلٍّ من \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

فإننا نحتاج إلى المتباينة المشهورة التي تقدمها المبرهنة الآتية.

شكل 2.7



المتجهات في $\mathbb{R}^2$ مع المعيار l_2 أقل من واحد داخل هذا الشكل.

المتجهات في الربع الأول من $\mathbb{R}^3$ مع المعيار l_2 أقل من واحد داخل هذا الشكل.

مبرهنة 3 7 متباينة كوشي – بنياكوفسكي – شيوارتز لعمليات الجمع

Cauchy–Bunyakovsky–Schwarz Inequality for Sums

لكلٍّ من $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ و $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^t$ في $\mathbb{R}^n$، فإن

$$x^t y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le \left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right\}^{1/2} \left\{\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right\}^{1/2} = \|x\|_2 \cdot \|y\|_2 \qquad (1.7)$$

■

هنالك العديد من الصيغ لهذه المتباينة . ومن ثم العديد من المكتشفين وجستينلويس كوشي (1789–1857) Augustin Louis Cauchy وضع هذه المتباينة عام 1821 في *Cours d'Analyse Algébrique* و كتاب دقيق لحساب التفاضل والتكامل لصيغة التكاملية للمتباينة ظهرت في عمل فيكتور ياكوفليج بنياكوفسكي (1804–1889) Viktor Yakovlevich Bunyakovsky عام 1859 . وان هرمن امندوس شوارتز (1921–1843) Hermann Amandus Schwarz استخدم صيغة تكامل مضاعف لهذه المتباينة عام 1885 تفاصيل أخرى عن التاريخ يمكن يجدها في [Stee]

البرهان إذا كان $y = 0$ أو $x = 0$ فإن النتيجة فورية ؛ لأن جانبي المتباينة هما صفر. افترض $y \ne 0$ و $x \ne 0$ لكل $\lambda \in \mathbb{R}$

$$0 \le \|x - \lambda y\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \lambda y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

و

$$2\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \|x\|_2^2 + \lambda^2 \|y\|_2^2$$

ولكون $\|x\|_2 > 0$ و $\|y\|_2 > 0$، نفترض $\lambda = \|x\|_2 / \|y\|_2$ لإعطاء

$$\left(2\frac{\|x\|_2}{\|y\|_2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) \le \|x\|_2^2 + \frac{\|x\|_2^2}{\|y\|_2^2}\|y\|_2^2 = 2\|x\|_2^2$$

وبذلك

$$2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le 2\|x\|_2^2 \frac{\|y\|_2}{\|x\|_2} = 2\|x\|_2\|y\|_2$$

ونتيجة لذلك فإن

$$x'y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le \|x\|_2\|y\|_2 = \left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right\}^{1/2}\left\{\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right\}^{1/2}$$

ويمكن مع هذه النتيجة أن نرى بأنه لكل $x, y \in \mathbb{R}^n$ فإن

$$\|x+y\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \le \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2 + \|y\|_2^2$$

التي تعطي خاصية المعيار الأخيرة

$$\|x+y\|_2 \le \left(\|x\|_2^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2 + \|y\|_2^2\right)^{1/2} = \|x\|_2 + \|y\|_2$$

ولما كان معيار المتجه يعطي قياسًا للمسافة بين متجه عشوائي والمتجه الصفري، فإن المسافة بين متجهين تعرف بأنها معيار الفرق بين المتجهين.

تعريف 4.7 إذا كان $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$ و $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)'$ متجهات في $\mathbb{R}^n$ فإن المسافتين l_2 و l_∞ بين x و y تعرفان على النحو التالي:

$$\|x-y\|_\infty = \max_{1\le i\le n}|x_i - y_i| \quad \text{و} \quad \|x-y\|_2 = \left\{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right\}^{1/2} \qquad \blacksquare$$

مثال 2 للنظام الخطي

$$\begin{aligned}
3.3330x_1 + 15920x_2 - 10.333x_3 &= 15913\\
2.2220x_1 + 16.710x_2 + 9.6120x_3 &= 28.544\\
1.5611x_1 + 5.1791x_2 + 1.6852x_3 &= 8.4254
\end{aligned}$$

حلّ $(x_1, x_2, x_3)' = (1, 1, 1)'$. فإذا طُبِّق حذف جاوس Gaussian elimination في حساب تقريب لخمس خانات مستخدمين تمحور العمود الأعظم maximal column pivoting وفقًا للخوارزمية (2.6) فإن الحل سيكون

$$\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)' = (1.2001, 0.99991, 0.92538)'$$

ومقاييس $x - \tilde{x}$ معطاة من خلال

$$\begin{aligned}
\|x-\tilde{x}\|_\infty &= \max\{|1-1.2001|, |1-0.99991|, |1-0.92538|\}\\
&= \max\{0.2001, 0.00009, 0.07462\} = 0.2001
\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}
\|x-\tilde{x}\|_2 &= \left[(1-1.2001)^2 + (1-0.99991)^2 + (1-0.92538)^2\right]^{1/2}\\
&= \left[(0.2001)^2 + (0.00009)^2 + (0.07462)^2\right]^{1/2} = 0.21356
\end{aligned}$$

وعلى الرغم من كون $\tilde{x}_2$ و $\tilde{x}_3$ تقريبين جيدين لـ x_2 و x_3، فإن المركبة $\tilde{x}_1$ هي تقريب ضعيف لـ x_1 وإن $|x_1 - \tilde{x}_1|$ تهيمن على المعايير. ■

إن مفهوم المسافة في $\mathbb{R}^n$ يستخدم أيضًا في تعريف محدودية متتالية متجهات في هذا الفضاء.

تعريف 5.7 نقول: إن المتتالية $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ حيث $\mathbf{x}^{(k)}$ متجهات على $\mathbb{R}^n$ تقاربية، وتقترب إلى $\mathbf{x}$ بالنسبة إلى المعيار $\|\cdot\|$ إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد صحيح $N(\varepsilon)$ يحقق

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\| < \varepsilon \quad \text{لكل} \quad k \geq N(\varepsilon)$$ ■

مبرهنة 6.7 نقول: إن المتتالية $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ حيث متجهات على $\mathbb{R}^n$ تقاربية، وتقارب إلى $\mathbf{x}$ بالنسبة إلى $\|\cdot\|_\infty$ إذا وفقط إذا كان $\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$. ■

البرهان افترض أن $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ تتقارب إلى $\mathbf{x}$ بالنسبة إلى $\|\cdot\|_\infty$. إذا كان لأي $\varepsilon > 0$ يوجد عدد صحيح $N(\varepsilon)$ بحيث إن لقيم $k \geq N(\varepsilon)$ جميعها

$$\max_{i=1,2,\ldots,n} |x_i^{(k)} - x_i| = \|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_\infty < \varepsilon$$

وتؤدي هذه النتيجة إلى أن $|x_i^{(k)} - x_i| < \varepsilon$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$. وبذلك فإن $\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i$ لكل i.

وبالعكس افترض أن $\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$ عند $\varepsilon > 0$ معلومة. يمثل $N_i(\varepsilon)$ لكل i عددًا صحيحًا مع خاصية كون $|x_i^{(k)} - x_i| < \varepsilon$ متى كان $k \geq N_i(\varepsilon)$.

دعنا نعرف $N(\varepsilon) = \max_{i=1,2,\ldots,n} N_i(\varepsilon)$. فإذا كان $k \geq N(\varepsilon)$ فإن

$$\max_{i=1,2,\ldots,n} |x_i^{(k)} - x_i| = \|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_\infty < \varepsilon$$

وهذا يؤدي إلى أن $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ تتقارب إلى $\mathbf{x}$ بالنسبة إلى $\|\cdot\|_\infty$. ■ ■ ■

مثال 3 ليكن $\mathbf{x}^{(k)} \in \mathbb{R}^4$ معرفًا من خلال

$$\mathbf{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}, x_4^{(k)})^t = \left(1, 2 + \frac{1}{k}, \frac{3}{k^2}, e^{-k}\sin k\right)^t$$

ولكون

$\lim_{k\to\infty} 1 = 1$، $\lim_{k\to\infty} (2 + 1/k) = 2$، $\lim_{k\to\infty} 3/k^2 = 0$ و $\lim_{k\to\infty} e^{-k}\sin k = 0$ فإن المبرهنة (6.7) تؤدي إلى أن المتتالية $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ تتقارب إلى $(1, 2, 0, 0)^t$ بالنسبة إلى $\|\cdot\|_\infty$.

وإن المبرهنة المباشرة بأن المتتالية في التمرين (3) تتقارب إلى $(1, 2, 0, 0)^t$ بالنسبة إلى معيار l_2 صعب إلى حد ما. والأسهل من ذلك هو برهنة النتيجة (المبرهنة) التالية وتطبيقها على هذه الحالة الخاصة.

مبرهنة 7.7 لكل $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$، يكون

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|\mathbf{x}\|_\infty$$ ■

البرهان

ليكن x_j عبارة عن إحداثي لـ x بحيث $\|\mathrm{x}\|_\infty = \max_{1\le i\le n}|x_i| = |x_j|$. وبذلك فإن

$$\|\mathrm{x}\|_\infty^2 = |x_j|^2 = x_j^2 \le \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \|\mathrm{x}\|_2^2$$

ومن ثم فإن

$$\|\mathrm{x}\|_\infty \le \|\mathrm{x}\|_2 \quad \text{و} \quad \|\mathrm{x}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le \sum_{i=1}^{n} x_j^2 = n x_j^2 = n\|\mathrm{x}\|_\infty^2$$

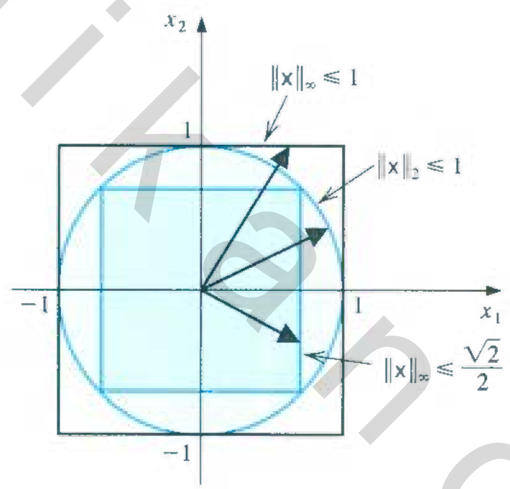
ولذلك يكون

$$\|\mathrm{x}\|_2 \le \sqrt{n}\,\|\mathrm{x}\|_\infty$$

■ ■ ■

ويوضِّح شكل (3.7) هذه النتيجة عندما $n = 2$.

شكل 3.7



مثال 4

وجدنا في مثال (3) أن المتتالية $\{\mathrm{x}^{(k)}\}$ المعرفة من خلال

$$\mathrm{x}^{(k)} = \left(1, 2+\frac{1}{k}, \frac{3}{k^2}, e^{-k}\sin k\right)^t$$

تتقارب إلى $\mathrm{x} = (1, 2, 0, 0)^t$ بالنسبة إلى $\|\cdot\|_\infty$. وعند أي $\varepsilon > 0$، نجد عددًا صحيحًا $N(\varepsilon/2)$ مع الخاصية

$$\|\mathrm{x}^{(k)} - \mathrm{x}\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$$

متى كان $k \ge N(\varepsilon/2)$. ومن خلال المبرهنة (7.7) نحصل على

$$\|\mathrm{x}^{(k)} - \mathrm{x}\|_2 < \sqrt{4}\|\mathrm{x}^{(k)} - \mathrm{x}\|_\infty < 2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon$$

عندما $k \ge N(\varepsilon/2)$. وبذلك فإن $\{\mathrm{x}^{(k)}\}$ تتقارب إلى x بالنسبة إلى $\|\cdot\|_2$ أيضًا. ■