

## حلول المعادلات بمتغير واحد

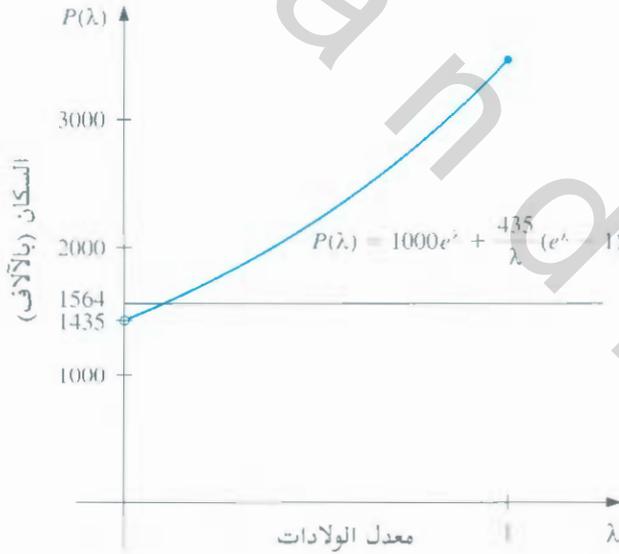
## Solution of Equations in One Variable

## مقدمة

يمكن نمذجة النمو السكاني عبر فترات زمنية قصيرة بافتراض أن النمو السكاني يكون متصلًا وبمعدل نمو يتناسب مع العدد الفعلي للسكان في الوقت المعين. فلو افترضنا أن  $N(t)$  يساوي عدد السكان عند الزمن  $t$ ، و  $\lambda$  يساوي معدل الولادات (ثابت) للسكان، فيمكن التعبير عن النمو السكاني بالصيغة التفاضلية

$$\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t)$$

وحل هذه الصيغة هو  $N(t) = N_0 e^{\lambda t}$ ، حيث تمثل  $N_0$  عدد السكان الابتدائي



وهذا النموذج الأسّي يكون مطابقاً للواقع فقط عندما يكون المجتمع محصناً دون هجرة. وإذا ما سمحنا بمعدل هجرة  $v$  فإن الصيغة التفاضلية أعلاه تصبح

$$\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t) + v$$

$$N(t) = N_0 e^{\lambda t} + \frac{v}{\lambda} (e^{\lambda t} - 1) \quad \text{وحلها هو}$$

ليكن مجتمع ما بعدد سكان ابتدائي قدره 1,000,000 نسمة، وأن 435,000 مهاجر انضموا إلى هذا المجتمع خلال السنة الأولى، ووجد في نهاية السنة الأولى أن تعداد مجتمع هذا كان 1,564,000 نسمة. ولتحديد معدل ولادات هذا المجتمع؛ علينا تحديد قيمة  $\lambda$  من الصيغة

$$1,564,000 = 1,000,000 e^{\lambda} + \frac{435,000}{\lambda} (e^{\lambda} - 1)$$

إن الطرائق العددية التي نقدمها في هذا الباب تستخدم في تقريب الحلول لمثل هذه الصيغ، في الحالات التي يتعذر إيجاد حلول لها بالطرائق الجبرية. وسنتناول حل هذه الصيغة بعينها في التمرين (24) من الفصل (3.2).

## The Bisection Method

## طريقة التنصيف 1.2

سنتناول في هذا الفصل واحدة من المسائل الرئيسة للتقريب العددي، وهي مسألة إيجاد جذور الصيغ. ويتضمن هذا الأسلوب إيجاد جذر أو حل لصيغة بالصيغة  $f(x) = 0$ ، للدالة  $f$ ، ويسمى جذر هذه الصيغة صغراً للدالة  $f$  أيضاً.

إن مسألة إيجاد تقريب لجذور الصيغة يعود إلى ما قبل العام 1700 قبل الميلاد، فقد كان من ضمن مجموعة Yale البابلية جدول بالرموز السمارية يعود إلى تلك الحقبة. ويعطي عدداً ذا الأساس 60، ويعادل العدد 1,414222، كقيمة تقريبية للجذر  $\sqrt{2}$ ، وهي تمهيدية تقترب دقتها إلى حد  $10^{-5}$ . ويمكن إيجاد هذا التقريب بتطبيق أسلوب تناولناه في التمرين (19) من الفصل (2.2).

يعتمد الأسلوب الأول على مبرهنة القيمة الوسطية، ويسمى "طريقة التنصيف". وهنا نفترض أن  $f$  تمثل دالة متصلة ومعروفة على الفترة  $[a, b]$  مع كون كل من الدوال  $f(a)$  و  $f(b)$  ذات إشارة مختلفة. ووفقاً لمبرهنة القيمة الوسطية، فمن المؤكد وجود العدد  $p$  في الفترة  $(a, b)$  بحيث يكون  $f(p) = 0$ . وعلى الرغم من أن العملية قائمة على وجود عدد من الجذور يزيد عن واحد في الفترة  $(a, b)$  فإننا - ولغرض التبسيط - نفترض وحدانية الجذر. وتستدعي الطريقة تكرار تنصيف الفترات الجزئية للفترة  $[a, b]$ ، وتحديد النصف الذي يحتوي  $p$  في كل خطوة.

ليكن  $a_1 = a$  و  $b_1 = b$  في البداية، وليمثل  $p_1$  منتصف الفترة  $[a, b]$ . أي أن:

$$p_1 = a_1 + \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

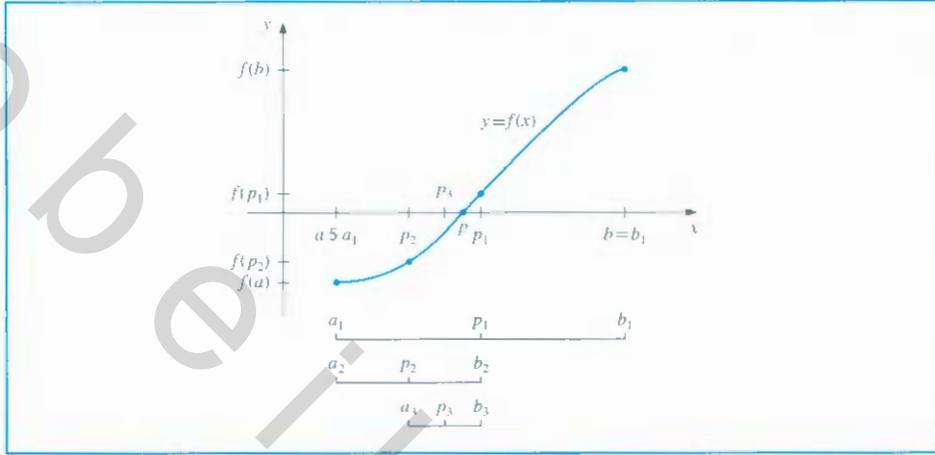
إذا كانت  $f(p_1) = 0$  فإن  $p = p_1$  وبهذا نكون قد انتهينا من الحل. أما إذا كانت  $f(p_1) \neq 0$  فإن إشارة  $f(p_1)$  هي إما إشارة  $f(a_1)$  أو إشارة  $f(b_1)$ . فإذا كانت  $f(p_1)$  و  $f(a_1)$  لهما الإشارة نفسها، تكون  $p \in (p_1, b_1)$  ونعطي القيم  $a_2 = p_1$  و  $b_2 = b_1$ . أما إذا كانت  $f(p_1)$  و  $f(a_1)$  لهما إشارتان مختلفتان، فعندها تكون  $p \in (a_1, p_1)$ ، ونعطي القيم  $a_2 = a_1$  و  $b_2 = p_1$ . وعندئذٍ

كما يشير اسمها "ثنائية التجزئة"، هو التقسيم (في هذه الحالة هي الفترة) لجزأين (في هذه الحالة متكافئين) اثنين.

في علم الحاسوب، فإن عملية تقسيم مجموعة باستمرار إلى نصفين للبحث عن حل للمسألة - كما تفعل طريقة التنصيف - تُعرف بأنها عملية البحث الثنائي binary.

نعيد تكرار الخطوة على الفترة  $[a_2, b_2]$ ، وبهذا نحصل على الطريقة الموضحة في الخوارزمية (1.2). (انظر شكل 1.2).

شكل 1.2



### التنصيف Bisection

لإيجاد حل لـ  $f(x) = 0$  للدالة  $f$  المتصلة على الفترة  $[a, b]$  مع اختلاف إشارة  $f(a)$  و  $f(b)$ .  
 المدخلات: نقاط النهاية  $a, b$  الحدود المسموح بها  $TOL$ ، أكبر عدد لمرات التكرار  $N_0$ .  
 المخرجات: حل تقريبي  $p$  أو عبارة "فشل".

الخطوة	المضمون
1	ضع $FA = f(a)$ ، $i = 1$ .
2	ما دام $i \leq N_0$ فننفذ الخطوات 3 - 6 الآتية.
3	ضع $p = a + (b - a) / 2$ (احسب $P_i$ ) $FP = f(p)$
4	إذا حصل $FP = 0$ أو $(b - a) / 2 < TOL$ . المُخرج ( $p$ ) استكملت العملية بنجاح. توقف
5	ضع $i = i + 1$
6	إذا حصل $FA \cdot FP > 0$ فضع $a = p$ (واحسب $a_i, b_i$ ). $FA = FP$ وخلاف ذلك ضع $b = p$
7	المُخرجات (فشلت الطريقة بعد $N_0$ من التكرارات و $N_0 = \cdot N_0$ ) توقف.

يمكن تطبيق عمليات إيقاف أخرى في الخطوة (4) من الخوارزمية (1.2) أو في أي أسلوب



تكرار ضمن هذا الباب. ويمكننا على سبيل المثال اختيار حد السماح  $\epsilon > 0$  وتوليد  $p_1, \dots, p_n$  لتتحقق أحد الشروط الآتية:

$$|p_N - p_{N-1}| < \epsilon \tag{1.2}$$

$$\frac{|p_N - p_{N-1}|}{|p_N|} < \epsilon, \quad p_N \neq 0 \tag{2.2}$$

أو

$$|f(p_N)| < \epsilon \tag{3.2}$$

وتجدر الإشارة هنا إلى بعض الصعوبات التي يمكن أن تظهر عند تطبيق أي من قواعد الإيقاف هذه. فعلى سبيل المثال يمكن أن تؤول نهاية المتتالية  $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$  مع خاصية الفروقات  $p_n - p_{n-1}$  إلى الصفر. حيث ليس للمتتالية نفسها نهاية محدودة. (انظر تمرين 7). ومن المحتمل أن تقترب  $f(p_n)$  من الصفر أيضاً. حيث تختلف  $p_n$  منطقيًا عن  $1$ . (انظر تمرين 16) تعد المتباينة (2.2) أفضل قاعدة إيقاف؛ لكونها تقترب من اختبار الخطأ النسبي دون أي معلومات إضافية حول  $f$  أو  $p$ .

وعند استخدام الحاسوب لتوليد التقريبات؛ فمن الأفضل تحديد الحد الأعلى لعدد مرات التكرار. وهذا من شأنه استبعاد إمكانية إدخال عدد لانهائي من التهورات. وهي حالة يمكن حدوثها عندما لا يكون للمتتالية نهاية محدودة (عند ترميز البرنامج ترميزاً خطأً أيضاً). وقد تصنف الخطوة (2) من الخوارزمية (1.2) ذلك. حيث حددنا  $N_0$  مع إيقاف العملية عندما يكون  $i > N_0$ .

لاحظ أنه عند البدء بخوارزمية التنصيف. يتعين إيجاد الفترة  $[a, b]$  مع  $f(a) \cdot f(b) < 0$ . ومن المعلوم في كل خطوة أن مدى الفترة المتضمن صفراً لـ  $f$  ينقص بمقدار 2. لذا يفضل اختيار الفترة الابتدائية  $[a, b]$  أصغر ما يمكن. وعلى سبيل المثال إذا كانت  $f(x) = 2x^3 - x^2 + x - 1$  يكون لدينا كل من  $f(0) \cdot f(1) < 0$  و  $f(-4) \cdot f(4) < 0$

وبناءً عليه فإن خوارزمية التنصيف يمكن استخدامها لأي من الفترتين  $[-4, 4]$  أو  $[0, 1]$  وعلى أي حال فإن استخدام الفترة  $[0, 1]$  بدلاً من  $[-4, 4]$  سيقصّر عدد مرات التكرار المطلوبة إلى 3 مرات. للوصول إلى الدقة المحددة. ويوضح المثال الآتي خوارزمية التنصيف. وتتوقف عملية التكرار في هذا المثال عندما يكون الخطأ النسبي أقل من 0.0001. أي عندما نَحُون

$$\frac{|p - p_n|}{|p|} < 10^{-4}$$

الصيغة  $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$  لها جذر ضمن  $[1, 2]$ ؛ لأن  $f(1) = -5$  و  $f(2) = 14$  وتعطي خوارزمية التنصيف القيم في جدول (1.2). ونلاحظ بعد 13 تكراراً أن  $p_{13} = 1.365112305$  يقرب الجذر  $p$  بخطأ مقداره

$$|p - p_{13}| < |b_{14} - a_{14}| = |1.365234375 - 1.365112305| = 0.000122070$$

$$\text{ولكون } |a_{14}| < |p| \text{ فإن } \frac{|p - p_{13}|}{|p|} < \frac{|b_{14} - a_{14}|}{|a_{14}|} \leq 9.0 \times 10^{-5}$$

وبناءً عليه فإن التقريب إلى أربع منازل عشرية على الأقل صحيح. والقيمة لصحيحة لـ  $p$  لتسع منازل هي 1.365230013. لاحظ أن  $p_9$  تكون أقرب إلى  $p$  من التقريب الأخير  $p_{13}$ .

مثال 1

جدول 1.2

$f(p_n)$	$p_n$	$b_n$	$a_n$	$n$
2.375	1.5	2.0	1.0	1
-1.79687	1.25	1.5	1.0	2
0.16211	1.375	1.5	1.25	3
-0.84839	1.3125	1.375	1.25	4
-0.35098	1.34375	1.375	1.3125	5
-0.09641	1.359375	1.375	1.34375	6
0.03236	1.3671875	1.375	1.359375	7
-0.03215	1.36328125	1.3671875	1.359375	8
0.000072	1.365234375	1.3671875	1.36328125	9
-0.01605	1.364257813	1.365234375	1.36328125	10
-0.00799	1.364746094	1.365234375	1.364257813	11
-0.00396	1.364990235	1.365234375	1.364746094	12
-0.00194	1.365112305	1.365234375	1.364990235	13

قد نستغرب حدوث ذلك؛ لأن  $|f(p_9)| < |f(p_{13})|$ ، ولكن ليس بالإمكان التأكد منه إلا عند معرفة الجواب الصحيح.

وعلى الرغم من وضوح مفهوم طريقة التنصيف، إلا أنها تتضمن عيوباً ملموسة؛ فهي بطيئة في تقاربها (أي أن  $N$  قد تكون كبيرة قليلاً قبل الحصول على قيمة صغيرة ملموسة لـ  $|p - p_N|$ ) بالإضافة إلى إمكانية تجاهل وسيط جيد للمقاربة دون الوقوف عنده. وعلى الرغم من ذلك، فإن الطريقة هذه تتسم بالجودة؛ كونها تتقارب إلى حل محدود دائماً، ولهذا السبب فهي تستخدم بداية في طرائق أخرى أكثر جدوى غالباً، وسنتناولها في آخر هذا الباب.

ليكن  $f \in C[a, b]$  و  $f(a) \cdot f(b) < 0$ ، عندئذ تولد طريقة التنصيف المتتالية  $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$  التي تقترب من الجذر  $p$  للدالة  $f$  حيث

$$n \geq 1 \quad \text{عندما} \quad |p_n - p| \leq \frac{b - a}{2^n}$$

البرهان لكل  $n \geq 1$  يكون لدينا

$$p \in (a_n, b_n) \quad \text{و} \quad b_n - a_n = \frac{1}{2^{n-1}}(b - a)$$

وبما أن  $p_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$  لكل  $n \geq 1$  فإن ذلك يؤدي إلى

$$|p_n - p| \leq \frac{1}{2}(b_n - a_n) = \frac{b - a}{2^n}$$

$$|p_n - p| \leq (b - a) \frac{1}{2^n} \quad \text{ولأن}$$

فإن المتتالية  $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$  تتقارب نحو  $p$  مع معدل تقارب  $O(1/2^n)$ . أي أن

$$p_n = p + O\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

ومن الضروري إدراك أن المبرهنة (1.2) تعطي حداً فقط لخطأ التقريب، وربما يكون هذا الحد ليس

## مبرهنة 1.2

دقيقًا بالقدر المطلوب. وقد طُبِّق هذا الحد في مسألة المثال (1) للدلالة على ذلك ويضمن فقط

$$|p - p_9| \leq \frac{2 - 1}{2^9} \approx 2 \times 10^{-3}$$

حيث إن الخطأ الحقيقي أصغر من ذلك كثيرًا، وهو

$$|p - p_9| = |1.365230013 - 1.365234375| = 4.4 \times 10^{-6}$$

لتحديد عدد مرات التكرار الضرورية لحل  $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$  بدقة  $10^{-3}$  وباستخدام مثال 2

$a_1 = 1$  و  $b_1 = 2$  يجب إيجاد عدد صحيح  $N$  يحقق

$$|p_N - p| \leq 2^{-N}(b - a) = 2^{-N} < 10^{-3}$$

سنستخدم اللوغارتمات لتحديد  $N$ . وعلى الرغم من أن اللوغارتمات لأي أسس تعي بالغرض، إلا

أننا سنستخدم الأساس 10. ولأن  $2^N < 10^3$  تؤدي إلى كون  $3 < \log_{10} 2^N < \log_{10} 10^3 = 3$

فإننا نحتاج إلى أن يكون لدينا

$$N > \frac{3}{\log_{10} 2} \approx 9.96 \text{ ومن ثم } -N \log_{10} 2 < -3$$

وبناءً على ذلك، فإن 10 تكرارات ستُضَمَّن بدقة ضمن  $10^{-3}$  تقريبًا، ويظهر الجدول (1.2) أن

القيمة  $p_9 = 1.365234375$  ضمن  $10^{-4}$  بدقة. ومرة أخرى فإن تحليل الخطأ يعطي حدًا لعدد

مرات التكرار فقط. ومن الضروري أن يُعلم أن هذا الحد يكون في حالات كثيرة أكبر كثيرًا من

العدد الحقيقي المطلوب.

إن عدد التكرارات في طريقة التنصيف تفترض أن الحسابات تجري باستخدام حساب الخانات

غير المنتهية. وعندما تُنفَّذ في الحاسبة يتعين عندئذ أخذ تقريب الخطأ في الحسان. ويتحتم

إيجاد حساب نقطة التنصيف للفترة  $[a_n, b_n]$  على سبيل المثال وفق الصيغة

$$p_n = a_n + \frac{b_n - a_n}{2}$$

بدلاً من الصيغة الجبرية المكافئة لها

$$p_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$

فالصيغة الأولى تضيف تصحيحًا بسيطًا وهو  $(b_n - a_n)/2$  للقيمة المعلومة  $a_n$ . وعندما تكبر

$b_n - a_n$  قريبة من الدقة العظمى للآلة فإن ثمة خطأ ضمن هذا التصحيح على الرغم من أنه لن

يؤثر بوضوح في القيمة المحسوبة لـ  $p_n$ . لذا عندما يحدث ذلك فإن من الممكن لـ  $(b_n - a_n)/2$

تكرار نقطة التنصيف التي لا تكون أصلًا في الفترة  $[a_n, b_n]$ .

ملحوظة أخيرة، لتحديد أي جزء من الفترة  $[a_n, b_n]$  يتضمن الجذر  $f$ ، فمن امستحسن توظيف

دالة Signum التي تُعرّف بالآتي:

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{if } x < 0 \\ 0, & \text{if } x = 0 \\ 1, & \text{if } x > 0 \end{cases}$$

الكلمة اللاتينية **signum**

تعني رمز "token" أو إشارة

"sign"، لذا فالاقتران الرمزي

يعيد بشكل طبيعي إشارة الرقم

(ما لم يكن الرقم صفرًا).

إن الاختبار سيكون

$$\text{sgn}(f(a_n)) \cdot \text{sgn}(f(p_n)) > 0 \text{ بدلاً من } f(a_n) \cdot f(p_n) > 0$$

وسيعطي النتائج نفسها، لكنه يتجنب احتمال التضخيم أو التقليل في عملية ضرب  $f(a_n)$  و  $f(p_n)$ .

## EXERCISE SET

## مجموعة التمارين 1.2

1. استخدم طريقة التنصيف لإيجاد  $p_3$  للدالة  $f(x) = \sqrt{x} - \cos x$  في الفترة  $[0, 1]$ .
2. ليكن  $f(x) = 3(x+1)(x-\frac{1}{2})(x-1)$ . استخدم طريقة التنصيف لإيجاد  $p_3$  للفترات الآتية:  
أ.  $[-2, 1.5]$  ب.  $[-1.25, 2.5]$
3. استخدم طريقة التنصيف لإيجاد حلول دقيقة لحد  $10^{-2}$  للصيغة  $x^3 - 7x^2 + 14x - 6 = 0$  وللفترات الآتية:  
أ.  $[0, 1]$  ب.  $[1, 3.2]$  ج.  $[3.2, 4]$
4. استخدم طريقة التنصيف لإيجاد حلول دقيقة لحد  $10^{-2}$  للصيغة  $x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4 = 0$  وللفترات الآتية:  
أ.  $[-2, -1]$  ب.  $[0, 2]$  ج.  $[2, 3]$  د.  $[-1, 0]$
5. استخدم طريقة التنصيف لإيجاد حلول دقيقة لحد  $10^{-5}$  للمسائل الآتية:  
أ.  $x - 2^{-x} = 0$  لكل  $0 \leq x \leq 1$ .  
ب.  $e^x - x^2 + 3x - 2 = 0$  لكل  $0 \leq x \leq 1$ .  
ج.  $2x \cos(2x) - (x+1)^2 = 0$  لكل  $-3 \leq x \leq -2$  و  $-1 \leq x \leq 0$ .  
د.  $x \cos x - 2x^2 + 3x - 1 = 0$  لكل  $0.2 \leq x \leq 0.3$  و  $1.2 \leq x \leq 1.3$ .
6. استخدم طريقة التنصيف لإيجاد حلول دقيقة لحد  $10^{-5}$  للمسائل الآتية:  
أ.  $3x - e^x = 0$  لكل  $1 \leq x \leq 2$ .  
ب.  $x + 3 \cos x - e^x = 0$  لكل  $0 \leq x \leq 1$ .  
ج.  $x^2 - 4x + 4 - \ln x = 0$  لكل  $1 \leq x \leq 2$  و  $2 \leq x \leq 4$ .  
د.  $x + 1 - 2 \sin \pi x = 0$  لكل  $0 \leq x \leq 0.5$  و  $0.5 \leq x \leq 1$ .
7. أ. ارسم الشكل  $y = x$  و  $y = 2 \sin x$ .  
ب. استخدم طريقة التنصيف لإيجاد حلول دقيقة لحد  $10^{-5}$  لأول قيمة موجبة لـ  $x$  حيث  $x = 2 \sin x$ .
8. أ. ارسم الشكل  $y = x$  و  $y = \tan x$ .  
ب. استخدم طريقة التنصيف لإيجاد حلول دقيقة لحد  $10^{-5}$  لأول قيمة موجبة لـ  $x$  حيث  $x = \tan x$ .
9. أ. ارسم الشكل  $y = e^x - 2$  و  $y = \cos(e^x - 2)$ .  
ب. استخدم طريقة التنصيف لإيجاد حلول دقيقة لحد  $10^{-5}$  لقيمة ضمن  $[0.5, 1.5]$  حيث  $e^x - 2 = \cos(e^x - 2)$ .
10. ليكن  $f(x) = (x+2)(x+1)^2 x(x-1)^3(x-2)$  لأي صفر لـ  $f$ ، تتقارب طريقة التنصيف عند تطبيقها على الفترات الآتية:  
أ.  $[-1.5, 2.5]$  ب.  $[-0.5, 2.4]$  ج.  $[-0.5, 3]$  د.  $[-3, -0.5]$
11. ليكن  $f(x) = (x+2)(x+1)x(x-1)^3(x-2)$  لأي صفر لـ  $f$ ، تتقارب طريقة التنصيف عند تطبيقها على الفترات الآتية:  
أ.  $[-3, 2.5]$  ب.  $[-2.5, 3]$  ج.  $[-1.75, 1.5]$  د.  $[-1.5, 1.75]$

12. أوجد تقريبًا صحيحًا إلى  $\sqrt{3}$  للحد  $10^{-4}$  مستخدمًا خوارزمية التنصيف (افتراض  $f(x) = x^2 - 3$ ).

13. أوجد تقريبًا صحيحًا إلى  $\sqrt{25}$  للحد  $10^{-4}$  مستخدمًا خوارزمية التنصيف.

14. استخدم البرهنة (1.2) لإيجاد الحد لعدد التكرارات اللازمة للوصول لى تقريب بدقة  $10^{-3}$  لحل  $x^3 + x - 4 = 0$  واقعا في الفترة [1, 4]. أوجد تقريبًا للجذر بنفس درجة الدقة هذه.

15. استخدم البرهنة (1.2) لإيجاد الحد لعدد التكرارات اللازمة للوصول لى تقريب بدقة  $10^{-4}$  لحل  $x^3 - x - 1 = 0$  واقعا في الفترة [1, 2]. أوجد تقريبًا للجذر بنفس درجة الدقة هذه.

16. ليكن  $f(x) = (x - 1)^{10}$ ،  $p = 1$  و  $p_n = 1 + \frac{1}{n}$ . أثبت أن  $|f(x_n)| < 10^{-3}$  عندما  $n > 1$  ولكن  $|p - p_n| < 10^{-3}$  يتطلب كون  $n > 1000$ .

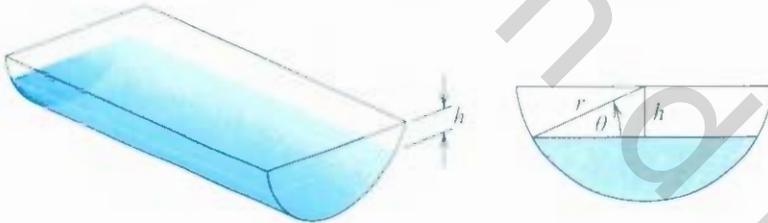
17. ليكن  $\{p_n\}$  عبارة عن متتالية معرفة بـ  $p_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ . أثبت أن  $\{p_n\}$  غير متقاربة حتى لو كان  $\lim_{n \rightarrow \infty} (p_n - p_{n-1}) = 0$ .

18. تتضمن الدالة  $f(x) = \sin \pi x$  أصفارًا عند كل عدد صحيح. أثبت أنه عندما تكون  $-1 < a < 0$  و  $2 < b < 3$ ، فإن طريقة التنصيف تتقارب إلى:

أ. إذا كان  $a + b < 2$  ب. إذا كان  $a + b > 2$  أ. إذا كان  $a + b = 2$

19. حوض بطول  $L$  له مقطع على شكل نصف دائرة قطرها  $r$  (انظر شمل)، وعند ملئه بالماء لغاية البعد  $h$  عن السطح العلوي فإن حجم الماء يكون

$$V = L \left[ 0.5\pi r^2 - r^2 \arcsin\left(\frac{h}{r}\right) - h(r^2 - h^2)^{1/2} \right]$$

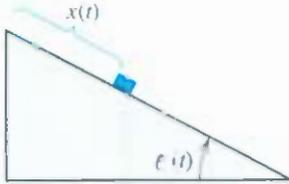


ليكن  $L = 10$  ft،  $r = 1$  ft و  $V = 12.4$  ft<sup>3</sup>. أوجد عمق الماء في الحوض لحد 0.0.

20. بدأ جسم بالحركة من السكون على سطح مائل (انظر شكل) بزاوية  $\theta$ ، ويتغير بمعدل ثابت  $\frac{d\theta}{dt} = \omega < 0$  ومع نهاية  $t$  من الثواني. فإن موقع الجسم يكون

$$x(t) = -\frac{g}{2\omega^2} \left( \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2} - \sin \omega t \right)$$

ليكن الجسم قد تحرك 1.7 ft في 1 s. أوجد ضمن  $10^{-5}$  المعدل  $\omega$  الذي تتغير عنده  $\theta$ . ليكن  $g = 32.17$  ft/s<sup>2</sup>.



## Fixed – Point Iteration

## 2.2 تكرار النقطة الثابتة

العدد  $P$  هو نقطة ثابتة للدالة  $g$  إذا كانت  $g(p) = p$ . سنناقش في هذا الفصل مسألة إيجاد حلول لمسائل النقطة الثابتة وعلاقة ذلك بمسائل إيجاد الجذر التي نرغب في حلها، ومسائل كلا الحالتين فئات متكافئة من حيث المعطيات الآتية:

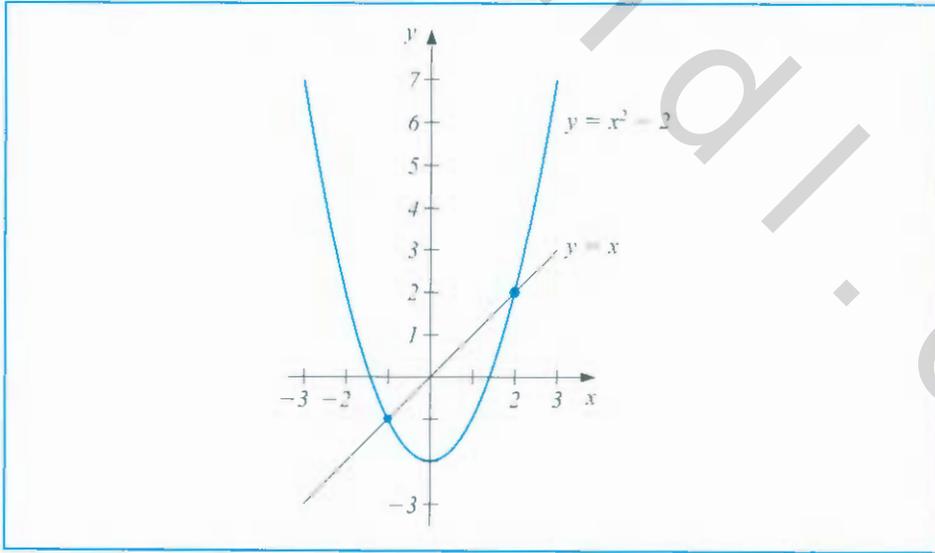
- في مسألة إيجاد الجذر  $f(p) = 0$ ، نستطيع تعريف الدوال  $g$  بنقطة ثابتة عند  $P$  بعدة طرائق، ومثال ذلك عندما  $g(x) = x - f(x)$  أو  $g(x) = x + 3f(x)$ .
- وبالعكس، إذا كان للدالة  $g$  نقطة ثابتة عند  $P$ ، فإن للدالة  $f(x) = x - g(x)$  صفرًا عند  $P$ . وعلى الرغم من أن المسائل التي نرغب في حلها تكون بصيغة إيجاد الجذر، فإن صيغة النقطة الثابتة أسهل من حيث التحليل، وثمة اختيارات قوية جدًا للنقطة الثابتة تؤدي إلى أساليب إيجاد الجذر.

نحتاج في البداية إلى أن نطمئن لهذا النوع الجديد من المسائل، ثم نقرر متى يكون للدالة نقطة ثابتة، وكيف يمكن تقريب النقاط الثابتة ضمن دقة محددة.

مثال 1 للدالة  $g(x) = x^2 - 2$  لكل  $-2 \leq x \leq 3$  نقاط ثابتة عند  $x = -1$  و  $x = 2$  بما أن

$$g(2) = 2^2 - 2 = 2 \quad \text{و} \quad g(-1) = (-1)^2 - 2 = -1$$

ويمكن ملاحظة هذا في شكل (2.2).

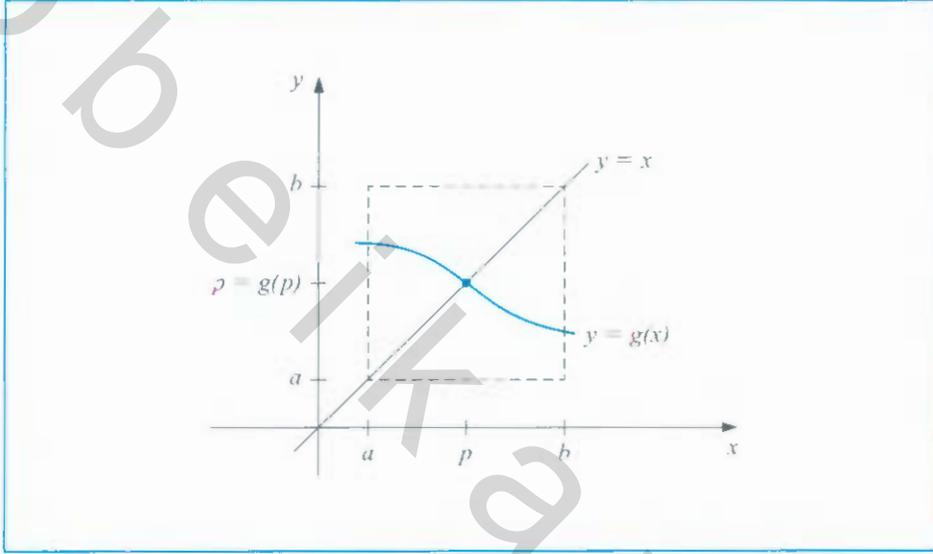


شكل 2.2

تحقق البرهنة الآتية حالات مناسبة لوجود النقطة الثابتة ووحدانيتها.

نتائج النقطة الثابتة تظهر في مجالات رياضية عديدة، وهي أدوات رئيسة للاقتصاديين لبرهنة نتائج تتعلق بالتوازن *equilibria*، وعلى الرغم من كون فكرة الأسلوب قديمة، فإن المصطلح قد استخدم للمرة الأولى من قبل الرياضي الهولندي براور (1866-1881) *E. J. Brouwer* في بداية الحقبة 1900

**مبرهنة 2.2** أ. إذا كانت  $g \in C[a, b]$  و  $g(x) \in [a, b]$  لكل  $x \in [a, b]$  فيوجد للدالة  $g$  نقطة ثابتة في  $[a, b]$ .  
 ب. وبالإضافة إلى ذلك، إذا كانت  $g'(x)$  موجودة في  $(a, b)$ ، ويوجد ثابت موجب  $k < 1$  حيث  $|g'(x)| \leq k$  لكل  $x \in (a, b)$  فإن النقطة الثابتة في  $[a, b]$  تكون وحيدة.  
 (انظر شكل 3.2).



شكل 3.2

**البرهان**

أ. إذا كان  $g(a) = a$  أو  $g(b) = b$  فإن للدالة  $g$  نقطة ثابتة في طرف الفترة. وخلاف ذلك فإن  $g(a) > a$  و  $g(b) < b$ . الدالة  $h(x) = g(x) - x$  متصلة ضمن  $[a, b]$ . مع  $h(a) = g(a) - a > 0$  و  $h(b) = g(b) - b < 0$  واستناداً إلى مبرهنة القيمة الوسطية، توجد  $p \in (a, b)$  تحقق  $h(p) = 0$ . هذا العدد  $p$  هو نقطة ثابتة للدالة  $g$ . لأن  $0 = h(p) = g(p) - p$  تؤدي إلى  $g(p) = p$ .

ب. بالإضافة إلى ذلك، ليكن  $|g'(x)| \leq k < 1$ ، وإن  $p$  و  $q$  كليهما نقطة ثابتة في  $[a, b]$ . وإذا كان  $p \neq q$  فإن مبرهنة القيمة الوسطية تضمن لنا وجود عدد  $\xi \in (p, q)$  وفق القيم في  $[a, b]$  حيث

$$\frac{g(p) - g(q)}{p - q} = g'(\xi)$$

إذن

$$|p - q| = |g(p) - g(q)| = |g'(\xi)| |p - q| \leq k |p - q| < |p - q|$$

وهذا تناقض. ومصدر هذا التناقض افتراض  $p \neq q$ . إذن  $p = q$  وتكون النقطة الثابتة في  $[a, b]$  وحيدة.

## مثال 2

أ. ليكن  $g(x) = (x^2 - 1)/3$  في الفترة  $[-1, 1]$ . تفيد مبرهنة القيمة المتطرفة في ظهور الحد الأدنى المطلق للدالة  $g$  عندما  $x = 0$  و  $g(0) = -\frac{1}{3}$ . وإن الحد الأعلى المطلق للدالة  $g$  يظهر عند  $x = \pm 1$  أيضاً، وله قيمة  $g(\pm 1) = 0$ . بالإضافة إلى ذلك، فإن الدالة  $g$  متصلة أيضاً، وإن

$$x \in (-1, 1) \text{ لكل } |g'(x)| = \left| \frac{2x}{3} \right| \leq \frac{2}{3}$$

وإن الدالة  $g$  تحقق عندئذ فرضيات المبرهنة (2.2) جميعها، ولها نقطة ثابتة وحيدة ضمن  $[-1, 1]$  وإن النقطة الثابتة الوحيدة  $p$  في الفترة  $[-1, 1]$  يمكن تحديدها جبرياً في هذا المثال. فإذا كان

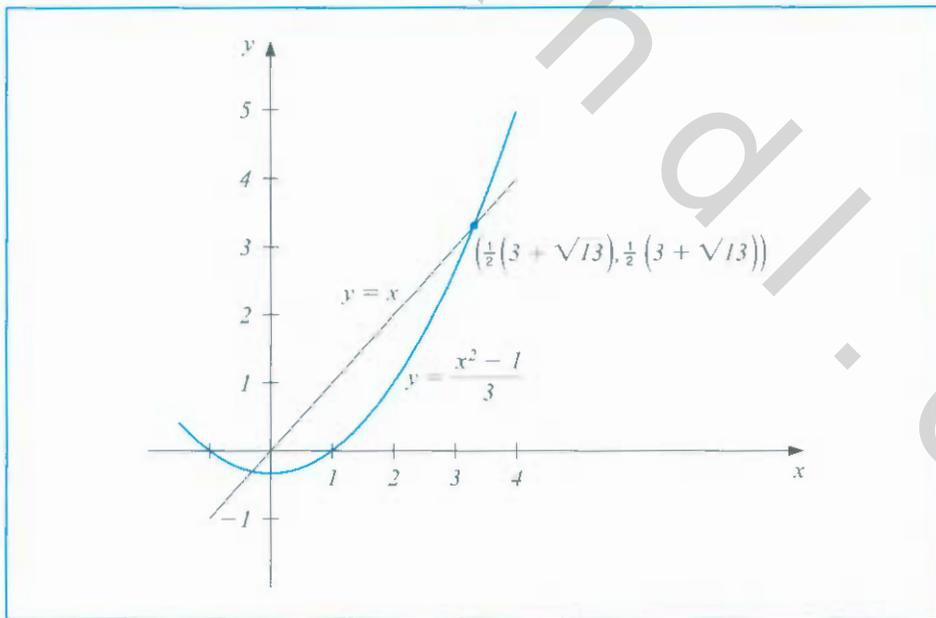
$$p^2 - 3p - 1 = 0 \text{ ثم } p = g(p) = \frac{p^2 - 1}{3}$$

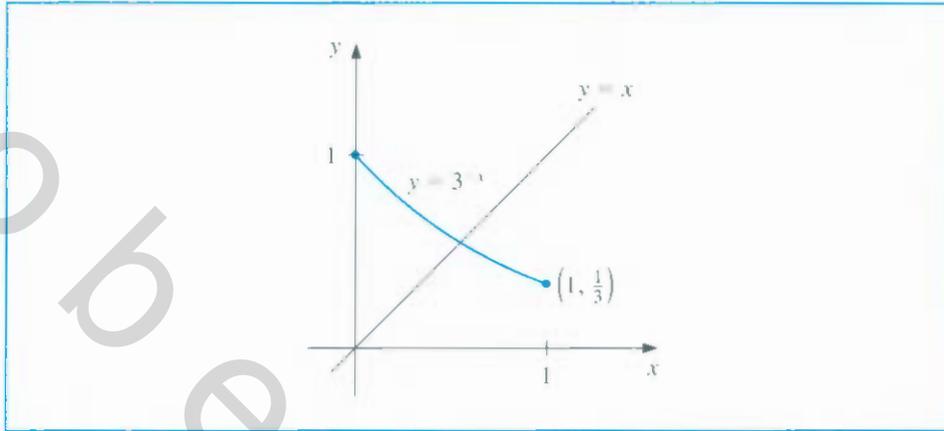
التي تعطي بحسب الصيغة التربيعية

$$p = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{13})$$

لاحظ أن للدالة  $g$  نقطة ثابتة وحيدة أيضاً هي  $p = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{13})$  للفترة  $[3, 4]$ . وعلى أي حال  $g(4) = 5$  و  $g'(4) = \frac{8}{3} > 1$  بناءً عليه فإن الدالة  $g$  لا تحقق فرضيات المبرهنة (2.2) عند  $[3, 4]$ . وعندئذ فإن فرضيات المبرهنة (2.2) كافية لضمان نقطة ثابتة وحيدة لكنها غير ضرورية. (انظر شكل 4.2).

## شكل 4.2





شكل 5.2

ب. ليكن  $g(x) = 3^{-x}$ . بما أن  $g'(x) = -3^{-x} \ln 3 < 0$  في  $[0, 1]$ . فإن الدالة  $g$  متناقصة على  $[0, 1]$ . من ثم

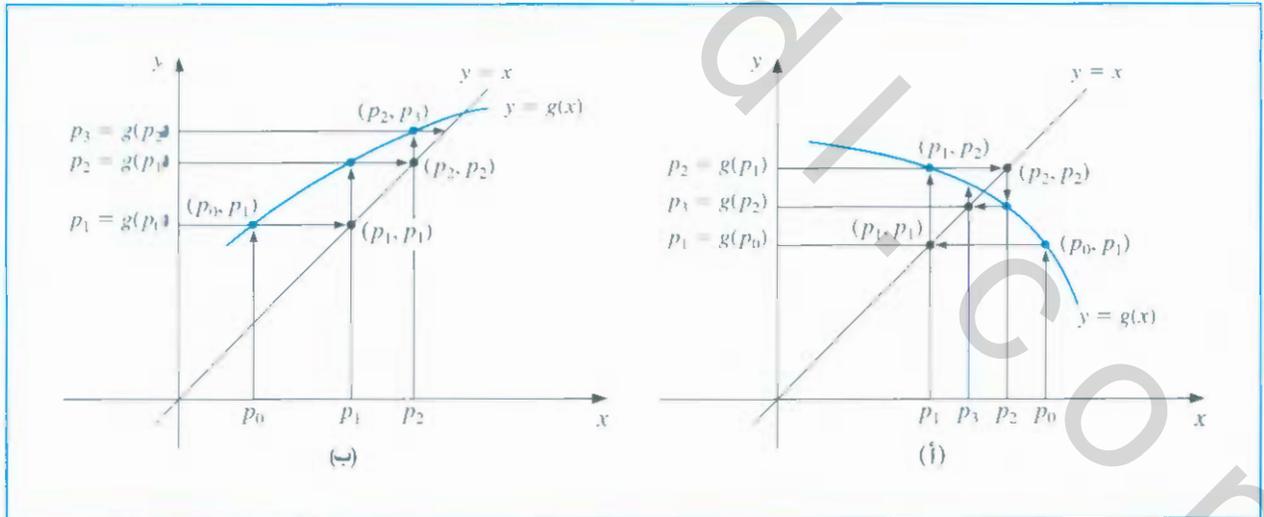
$$0 \leq x \leq 1 \text{ لكل } g(1) = \frac{1}{3} \leq g(x) \leq 1 = g(0)$$

عندئذ إذا كان  $x \in [0, 1]$  فإن  $g(x) \in [0, 1]$ . وللدالة  $g$  نقطة ثابتة في  $[0, 1]$ . حيث

$$g'(0) = -\ln 3 = -1.098612289$$

و  $|g'(x)| \not\approx 1$  في  $(0, 1)$ . وأن البرهنة (2.2) لا يمكن استخدامها لتحديد الوحدانية. فإن الدالة  $g$  متناقصة دائماً. ويتضح من شكل (5.2) حتمية كون النقطة الثابتة وحيدة.

شكل 5.2



نختار تقريباً ابتدائياً  $p_0$  وتوليد المتتالية  $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$  بجعل  $p_n = g(p_{n-1})$  لكل  $n \geq 1$  لتقريب النقطة الثابتة للدالة  $g$ . وإذا تقاربت المتتالية إلى  $p$  و  $g$  متصلة فإن

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} g(p_{n-1}) = g\left(\lim_{n \rightarrow \infty} p_{n-1}\right) = g(p)$$

وسيوجد حل لـ  $x = g(x)$ . ويسمى هذا الأسلوب "تكرار النقطة الثابتة" أو "التكرار الدالية". والعملية مفصلة في الخوارزمية (2.2) وموضحة في شكل (6.2).

### تكرار النقطة الثابتة Fixed-Point Iteration

لإيجاد حل لـ  $p = g(p)$  بوجود التقريب الابتدائي  $p_0$ ؛

المدخلات: تقريب ابتدائي  $p_0$ ، الحدود المسموح بها  $TOL$ ، أكبر عدد لمرات التكرار  $N_0$ .  
المخرجات: حل تقريبي  $p$  أو عبارة (فشل).

الخطوة	المضمون
1	ضع $i = 1$
2	ما دام $i \leq N_0$ فننفذ الخطوات 3 - 6 الآتية.
3	ضع $p = g(p_0)$ (احسب $p_i$ ).
4	إذا كان $ p - p_0  < TOL$ فالخرج (استكملت العملية بنجاح). توقف.
5	ضع $i = i + 1$
6	ضع $p_0 = p$ (تحديث $p_0$ ).
7	المُخرجات (فشلت الطريقة بعد $N_0$ من التكرارات و $N_0 = \infty$ ) توقف.



ويوضح المثال الآتي التكرارات الدالية.

مثال 3 الصيغة  $0 = 10 - x^3 + 4x^2$  لها جذر وحيد في  $[1, 2]$ . وتوجد عدة طرائق لتغيير الصيغة إلى صيغة النقطة الثابتة  $x = g(x)$  مستخدمين ترتيباً جبرياً بسيطاً. فلإيجاد الدالة  $g$  الموضح في الفقرة (ج) على سبيل المثال؛ نستطيع ترتيب الصيغة  $0 = 10 - x^3 + 4x^2$  على النحو الآتي:

$$4x^2 = 10 - x^3 \quad \text{ولذلك} \quad x^2 = \frac{1}{4}(10 - x^3) \quad \text{و} \quad x = \pm \frac{1}{2}(10 - x^3)^{1/2}$$

ولإيجاد حل موجب؛ نختار  $g_3(x)$ . وليس من الضروري اشتقاق الدوال المبينة هنا، لكن عليك التأكد من أن النقطة الثابتة لكل منها هي في الواقع حل للصيغة الأصلية  $0 = 10 - x^3 + 4x^2$ .  
أ.  $x = g_1(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$

ب.  $x = g_2(x) = \left(\frac{10}{x} - 4x\right)^{1/2}$

$$ج. \quad x = g_3(x) = \frac{1}{2}(10 - x^3)^{1/2}$$

$$د. \quad x = g_4(x) = \left(\frac{10}{4+x}\right)^{1/2}$$

$$هـ. \quad x = g_5(x) = x - \frac{x^3 + 4x^2 - 10}{3x^2 + 8x}$$

وعند  $p_0 = 1.5$ ، يبين جدول (2.2) نتائج تكرار النقطة الثابتة لكل الخيارات الخمسة للدالة  $g$ . الجذر الحقيقي هو 1.365230013 كما لوحظ في المثال (1) من الفصل (1.2). وبمقارنة نتائج خوارزمية التنصيف المعطاة ضمن ذلك المثال، يمكن ملاحظة النتائج الرائعة للاختيارات (ج)، (د)، (هـ) حيث تتطلب طريقة التنصيف 27 تكراراً لهذه الدقة. ولعله من المفيد ملاحظة أن الاختيار (أ) كان غير متقارب. وأن (ب) كان غير معرف بسبب احتوائه على جذر تربيعي لعدد سالب. ■

جدول 2.2

$n$	(أ)	(ب)	(ج)	(د)	(هـ)
0	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5
1	-0.875	0.8165	1.286953768	1.348399725	1.373333333
2	6.732	2.9969	1.402540804	1.367376372	1.365262015
3	-469.7	$(-8.65)^{1/2}$	1.345458374	1.364957015	1.365230014
4	$1.03 \times 10^6$		1.375170253	1.365264748	1.365230013
5			1.360094193	1.365225594	
6			1.367846968	1.365230576	
7			1.363887004	1.365229942	
8			1.365916734	1.365230022	
9			1.364878217	1.365230012	
10			1.365410062	1.365230014	
15			1.365223680	1.365230013	
20			1.365230236		
25			1.365230006		
30			1.365230013		

ومع أن دوالاً مختلفة في المثال (3) هي مسائل النقطة الثابتة لمسألة إيجاد الجذر نفسها، إلا أنها تختلف إلى حد كبير بوصفها أساليب لتقريب حل مسألة إيجاد الجذر. واغرض منه إيضاح أن السؤال الحقيقي الذي يتطلب الإجابة هو:

• كيف يمكننا إيجاد مسألة النقطة الثابتة التي تنتج متتالية تتقارب على نحو موثوق ومتكرر لحل مسألة إيجاد الجذر؟

تطينا المبرهنة الآتية ونتيجتها بعض المفاتيح بشأن المسارات التي يتعين علينا سوكها. وربما يُعدّ رفضنا لبعض منها أكثر أهمية.

### مبرهنة 3.2 النقطة الثابتة Fixed-Point Theorem

ليكن  $g \in C[a, b]$  حيث  $g(x) \in [a, b]$  لكل قيم  $x$  في  $[a, b]$ . وبالإضافة إلى ذلك، لتكن الدالة  $g'$  موجودة في  $(a, b)$  وأن ثابت  $0 < k < 1$  موجود مع

$$|g'(x)| \leq k \quad \text{لكل } x \in (a, b)$$

لذا لأي عدد  $p_0$  ضمن  $[a, b]$ . فإن المتتالية

$$p_n = g(p_{n-1}) \text{ لكل } n \geq 1$$

تتقارب إلى نقطة ثابتة وحيدة  $p$  ضمن  $[a, b]$ .

**البرهان** تشير المبرهنة (2.2) إلى أن النقطة الثابتة الوحيدة موجودة ضمن  $[a, b]$ . حيث إن الدالة  $g$  تنقل  $[a, b]$  إلى نفسها. فإن المتتالية  $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$  معرفة لكل  $n \geq 0$ . و  $p_n \in [a, b]$  لكل  $n$  وباستخدام مبرهنة القيمة الوسطية، وحقيقة كون  $|g'(x)| \leq k$ . يكون لدينا لكل  $n$

$$|p_n - p| = |g(p_{n-1}) - g(p)| = |g'(\xi_n)| |p_{n-1} - p| \leq k |p_{n-1} - p|$$

حيث إن  $\xi_n \in (a, b)$  وبتطبيق هذه المتباينة نستنتج أن

$$|p_n - p| \leq k |p_{n-1} - p| \leq k^2 |p_{n-2} - p| \leq \dots \leq k^n |p_0 - p| \quad (4.2)$$

وحيث إن  $0 < k < 1$  يكون لدينا  $\lim_{n \rightarrow \infty} k^n = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |p_n - p| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} k^n |p_0 - p| = 0$$

ومن ثم فإن  $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$  تتقارب إلى  $p$ .

**تمهيدية 4.2** إذا كانت الدالة  $g$  تحقق فرضيات المبرهنة (3.2) فإن حدود الخطأ ضمن استخدام  $p_n$  لتقريب  $p$  هي

$$|p_n - p| \leq k^n \max\{p_0 - a, b - p_0\}$$

$$\text{و لكل } n \geq 1 \quad |p_n - p| \leq \frac{k^n}{1-k} |p_1 - p_0|$$

**البرهان** حيث  $p \in [a, b]$ . فإن الحد الأول الناتج من المتباينة (4.2) هو

$$|p_n - p| \leq k^n |p_0 - p| \leq k^n \max\{p_0 - a, b - p_0\}$$

وعندما  $n \geq 1$ . فإن العملية المستخدمة في برهنة المبرهنة (3.2) تعطي

$$|p_{n+1} - p_n| = |g(p_n) - g(p_{n-1})| \leq k |p_n - p_{n-1}| \leq \dots \leq k^n |p_1 - p_0|$$

ومن ثم عندما  $m > n \geq 1$  يكون

$$\begin{aligned} |p_m - p_n| &= |p_m - p_{m-1} + p_{m-1} - \dots - p_{n+1} + p_{n+1} - p_n| \\ &\leq |p_m - p_{m-1}| + |p_{m-1} - p_{m-2}| + \dots + |p_{n+1} - p_n| \\ &\leq k^{m-1} |p_1 - p_0| + k^{m-2} |p_1 - p_0| + \dots + k^n |p_1 - p_0| \\ &= k^n |p_1 - p_0| (1 + k + k^2 + \dots + k^{m-n-1}) \end{aligned}$$

واستناداً إلى المبرهنة (3.2)  $\lim_{m \rightarrow \infty} p_m = p$ ، وبهذا نجد

$$|p - p_1| = \lim_{m \rightarrow \infty} |p_m - p_n| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} k^n |p_1 - p_0| \sum_{i=0}^{m-n-1} k^i \leq k^n |p_1 - p_0| \sum_{i=0}^{\infty} k^i$$

لكن  $\sum_{i=0}^{\infty} k^i$  سلسلة هندسية بنسبة مشتركة  $k$  و  $0 < k < 1$ . وهذه المتتالية تتقارب إلى

$$1/(1 - k) \text{ الذي يعطي الحد الثاني}$$

$$|p - p_n| \leq \frac{k^n}{1 - k} |p_1 - p_0|$$

ترتبط المتباينتان كالتالي في هذه التمهيدية معدل تقارب  $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$  للحد  $k$  بالمشقة الأولى. وإن معدل التقارب يعتمد على العامل  $k^n$ . فكلما كانت قيمة  $k$  صغيرة كان التقارب أسرع. ويكون بطيئاً جداً عندما تقترب  $k$  من 1. وأعيد في المثال الآتي اعتماد طرائق النقطة اثابته المستخدمة في المثال (3.2) في ضوء النتائج المبينة في المبرهنة (3.2) ونتيجتها.

#### مثال 4

أ. مع  $g_1(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$ ، لدينا  $g_1(1) = 6$  و  $g_1(2) = -12$ ، لذا للدالة  $g_1$  لا تنقل  $[1, 2]$  إلى نفسها. وأكثر من ذلك  $g_1'(x) = 1 - 3x^2 - 8x$ ، ومن ثم فإن  $|g_1'(x)| > 1$  لكل  $x$  ضمن  $[1, 2]$ . وعلى الرغم من أن المبرهنة (3.2) لا تضمن فشل الطريقة عند هذا الاختيار للدالة  $g$ ، فلا يوجد سبب لتوقع حصول التقارب.

ب. مع  $g_2(x) = [(10/x) - 4x]^{1/2}$ ، يمكن أن نرى الدالة  $g_2$  لا تنقل  $[1, 2]$  إلى نفسها، وأن المتتالية  $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$  غير معرفة عندما  $p_0 = -1.5$ . وأكثر من ذلك، لا توجد فترة تحتوي  $p \approx 1.365$  بحيث  $|g_2'(p)| \approx 3.4$  لأن  $|g_2'(x)| < 1$  ولا يوجد أي مبرر لتوقع أن هذه الطريقة ستتقارب.

ج. للدالة  $g_3(x) = \frac{1}{2}(10 - x^3)^{1/2}$

$$g_3'(x) = -\frac{3}{4}x^2(10 - x^3)^{-1/2} < 0$$

لذا  $g_3$  متناقصة حتماً ضمن  $[1, 2]$ . وعلى أي حال  $|g_3'(2)| \approx 2.12$ ، لذا فإن الشرط  $1 < k < |g_3'(x)|$  يقع ضمن  $[1, 2]$ . وعند التمعن في المتتالية  $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$  بدءاً بـ  $p_0 = 1.5$  نجد أن افتراض الفترة  $[1, 1.5]$  بدلاً من  $[1, 2]$  كافياً. ضمن هذه الفترة، ما زال صحيحاً كون  $g_3$  و  $g_3'(x) < 0$  متناقصة حتماً. لكن أيضاً

$$1 < 1.28 \approx g_3(1.5) \leq g_3(x) \leq g_3(1) = 1.5$$

لكل  $x \in [1, 1.5]$ . وهذا يرينا أن  $g_3$  تنقل الفترة  $[1, 1.5]$  إلى نفسها. ولكون  $|g_3'(x)| \leq |g_3'(1.5)| \approx 0.66$  صحيحاً أيضاً ضمن هذه الفترة، فإن المبرهنة (3.2) تؤكد التقارب الذي نحن بصدده.

د. مع  $g_4(x) = (10/(4 + x))^{1/2}$ ، يكون لدينا

$$|g_4'(x)| = \left| \frac{-5}{\sqrt{10}(4 + x)^{3/2}} \right| \leq \frac{5}{\sqrt{10}(5)^{3/2}} < 0.15$$

لكل  $x \in [1, 2]$

والحد على المقدار  $g_4'(x)$  أقل كثيراً من الحد الذي ظهر في (د) على المقدار  $g_3'(x)$  الذي ينسر

تقاربًا أكثر تسارعًا باستخدام  $g_4$ .

$$g_5(x) = x - \frac{x^3 + 4x^2 - 10}{3x^2 + 8x} \quad \text{هـ. المتتالية أدناه}$$

تتقارب بسرعة أكثر مما هي عليه عند اختيارنا الأخرى. وسنرى في البنود الآتية من أين جاء هذا الاختيار والسبب وراء فاعليته هذه.

## EXERCISE SET

## مجموعة التمارين 2.2

1. استخدم المعالجة الجبرية لإثبات أن لكل من الدوال الآتية نقطة ثابتة عند  $p$  تحديداً عندما

$$f(p) = 0, \text{ حيث } f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 3$$

$$\text{أ. } g_1(x) = (3 + x - 2x^2)^{1/4} \quad \text{ب. } g_2(x) = \left(\frac{x+3-x^4}{2}\right)^{1/2}$$

$$\text{ج. } g_3(x) = \left(\frac{x+3}{x^2+2}\right)^{1/2} \quad \text{د. } g_4(x) = \frac{3x^4 + 2x^2 + 3}{4x^3 + 4x - 1}$$

2. أنفذ أربعة تكرارات إذا أمكن على كل دالة  $g$  ذكرت في التمرين (1) أعلاه. وليكن  $p_0 = 1$  و  $p_{n+1} = g(p_n)$  لكل  $n = 0, 1, 2, 3$ .

ب. أي من هذه الدوال تعطي أفضل تقريب للحل؟

3. استخدم الطرائق الأربع الآتية لحساب  $21^{1/3}$ . ورتبها بحسب سرعة التقارب لكل منها عندما يكون  $p_0 = 1$ :

$$\text{أ. } p_n = \frac{20p_{n-1} + 21/p_{n-1}^2}{21} \quad \text{ب. } p_n = p_{n-1} - \frac{p_{n-1}^3 - 21}{3p_{n-1}^2}$$

$$\text{ج. } p_n = p_{n-1} - \frac{p_{n-1}^4 - 21/p_{n-1}}{p_{n-1}^2 - 21} \quad \text{د. } p_n = \left(\frac{21}{p_{n-1}}\right)^{1/2}$$

4. استخدم الطرائق الأربع الآتية لحساب  $7^{1/5}$ . ورتبها بحسب سرعة التقارب لكل منها عندما يكون:

$$\text{أ. } p_n = p_{n-1} \left(1 + \frac{7 - p_{n-1}^5}{p_{n-1}^2}\right)^3 \quad \text{ب. } p_n = p_{n-1} - \frac{p_{n-1}^5 - 7}{p_{n-1}^2}$$

$$\text{ج. } p_n = p_{n-1} - \frac{p_{n-1}^5 - 7}{5p_{n-1}^4} \quad \text{د. } p_n = p_{n-1} - \frac{p_{n-1}^5 - 7}{12}$$

5. استخدم طريقة تكرار النقطة الثابتة لتحديد حل بدقة  $10^{-2}$  لـ  $x^4 - 3x^2 - 3 = 0$  في  $[1, 2]$ . استخدم  $p_0 = 1$ .

6. استخدم طريقة تكرار النقطة الثابتة لتحديد حل بدقة  $10^{-2}$  لـ  $x^3 - x - 1 = 0$  في  $[1, 2]$ . استخدم  $p_0 = 1$ .

7. استخدم المبرهنة (2.2) لإثبات أن  $g(x) = \pi + 0.5 \sin(x/2)$  لها نقطة ثابتة وحيدة في  $[0, 2\pi]$ . استخدم تكرار النقطة الثابتة لإيجاد تقريب للنقطة الثابتة بدقة  $10^{-2}$ . استخدم التمهيدية (4.2) لتقدير عدد مرات التكرار المطلوبة لتحقيق هذه الدقة، ثم قارن هذا التقدير النظري بالعدد الفعلي المطلوب.

8. استخدم المبرهنة (2.2) لإثبات أن  $g(x) = 2^{-x}$  لها نقطة ثابتة وحيدة في  $[1, \frac{1}{2}]$ . استخدم تكرار النقطة الثابتة لإيجاد تقريب للنقطة الثابتة بدقة  $10^{-4}$ . استخدم التمهيدية (4.2) لتقدير عدد

- التكرارات المطلوبة لتحقيق هذه الدقة  $10^{-4}$ . ثم قارن هذا التقدير النظري بالعدد الفعلي المطلوب.
9. استخدم طريقة تكرار النقطة الثابتة لإيجاد التقريب إلى  $\sqrt{3}$  بدقة  $10^{-4}$ . قارن هذه التمهيديّة وعدد التكرارات المطلوبة بإجابة التمرين (10) من الفصل (1.2).
10. استخدم طريقة تكرار النقطة الثابتة لإيجاد التقريب إلى  $\sqrt[3]{25}$  بدقة  $10^{-4}$ . قارن هذه التمهيديّة وعدد التكرارات المطلوبة بإجابة التمرين (11) من الفصل (1.2).
11. حدّد الفترة  $[a, b]$  التي يتقارب عندها التكرار بالنقطة الثابتة لكل من لصيغ الآتية:

أ. قدّر عدد التكرارات المطلوبة لتحقيق التقريبات بدقة  $10^{-5}$ .

ب. نفذ الحسابات.

أ.  $x = \frac{2 - e^x + x^2}{3}$       ب.  $x = \frac{5}{x^2} + 2$       ج.  $x = \left(\frac{e^x}{3}\right)^{1/2}$

ج.  $x = 5^{-x}$       د.  $x = 6^{-x}$       هـ.  $x = 0.5(\sin x + \cos x)$

12. استخدم الفترة المعطاة لكل من الصيغ الآتية، أو حدّد الفترة  $[a, b]$  التي يتقارب عندها التكرار بالنقطة الثابتة:

أ. قدّر عدد التكرارات المطلوبة لتحقيق التقريبات بدقة  $10^{-5}$ .

ب. نفذ الحسابات.

أ.  $2 + \sin x - x = 0$  باستخدام  $[2, 3]$       ب.  $x^3 - 2x - 5 = 0$  باستخدام  $[2, 3]$

ج.  $3x^2 - e^x = 0$       د.  $x - \cos x = 0$

13. أوجد الأصفار كلها لـ  $f(x) = x^2 + 10 \cos x$  باستخدام تكرار النقطة الثابتة لآلة التكرار المناسب g. أوجد الأصفار بدقة  $10^{-4}$ .

14. استخدم طريقة تكرار النقطة الثابتة لتحديد حل بدقة  $10^{-4}$  لـ  $x = \tan x$  لـ  $x$  ضمن  $[4, 5]$ .
15. استخدم طريقة تكرار النقطة الثابتة لتحديد حل بدقة  $10^{-2}$  لـ  $2 \sin \pi x + x = 0$  لـ  $x$  ضمن  $[1, 2]$ . استخدم  $p_0 = 1$ .

16. ليكن A ثابتاً موجباً و  $g(x) = 2x - Ax^2$ :
- أ. أثبت أنه في حالة تقارب تكرار النقطة الثابتة لحد ليس صفراً، فإن الحد هو  $p = 1/A$ ، ويمكن أخيراً إيجاد معكوس العدد باستخدام عمليات الضرب والطرح فقط.

- ب. أوجد فترة حول  $1/A$  يتقارب عندها تكرار النقطة الثابتة، وتضمن وجود  $\epsilon_0$  في الفترة.
17. أوجد الدالة g معرفاً على  $[0, 1]$  التي لا تحقق أيّاً من فرضيات المبرهنة 2.2: ولها نقطة ثابتة وجيدة في  $[0, 1]$ .

18. أ. أثبت أن المبرهنة (2.2) صحيحة إذا استبدل  $|g'(x)| \leq k$  بـ  $g'(x) \leq k$  لكل  $x \in (a, b)$  (تلميح: الوجدانية فقط موضع النقاش).

- ب. أثبت أن المبرهنة (3.2) لا تتحقق في حالة استبدال  $|g'(x)| \leq k$  بـ  $g'(x) \leq k$ . (ملحوظة: أثبت أن  $g(x) = 1 - x^2$  لكل  $x$  في الفترة  $[0, 1]$  يحقق مثال المعنوس).

19. أ. استخدم المبرهنة (3.2) لإثبات كون المتتالية
- $$x_n = \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}} \quad n \geq 1$$

- تتقارب إلى  $\sqrt{2}$  عندما يكون  $x_0 > \sqrt{2}$ .
- ب. استخدم حقيقة كون  $(x_0 - \sqrt{2})^2 < 0$  عندما يكون  $x_0 \neq \sqrt{2}$  لإثبات أنه في حالة كين

ج. استخدم تمهيدية الفترتين (أ) و (ب) لإثبات كون المتتالية في (أ) تتقارب إلى  $\sqrt{2}$  عندما يكون  $x_0 > 0$ .

20. أ. أثبت أنه لو كان  $A$  أي عدد موجب، فإن المتتالية

$$x_n = \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{A}{2x_{n-1}}$$

تتقارب إلى  $\sqrt{A}$  عندما يكون  $x_0 > 0$ .

ب. ماذا يحدث لو أن  $x_0 < 0$  ؟

21. استبدل الافتراض "العدد الموجب  $k < 1$  موجود مع  $|g'(x)| \leq k$ " بافتراض "g تحقق شرط لبشتز عند الفترة  $[a, b]$  مع ثابت لبشتز  $L < 1$ ". (انظر التمرين (25) من الفصل 1.1). أثبت أن استنتاجات هذه المبرهنة ما زالت متحققة.

22. افترض أن الدالة  $g$  قابلة للاشتقاق باستمرار عند الفترة  $(c, d)$  التي تتضمن النقطة الثابتة  $p$  للدالة  $g$ . أثبت أنه إذا كانت  $|g'(p)| < 1$  فإن  $\delta > 0$  موجودة بحيث لو كان  $|p_0 - p| \leq \delta$ ، فإن تكرار النقطة الثابتة يتقارب.

23. يتعرض الجسم عند سقوطه عمودياً في الهواء لمقاومة اللزوجة إلى جانب قوة الجاذبية. افترض أن جسمًا بكتلة  $m$  أسقط من ارتفاع  $s_0$ ، وأن ارتفاع الجسم بعد  $t$  من الثواني هو

$$s(t) = s_0 - \frac{mg}{k}t + \frac{m^2g}{k^2}(1 - e^{-kt/m})$$

بحيث إن  $g = 32.17 \text{ ft/s}^2$ ، و  $k$  يمثل معامل مقاومة الهواء بوحدات lb-s/ft. افترض  $s_0 = 300 \text{ ft}$ ،  $m = 0.25 \text{ lb}$  و  $k = 0.1 \text{ lb-s/ft}$  أوجد ضمن  $0.01 \text{ s}$  الوقت الذي يستغرقه الجسم للوصول إلى الأرض.

24. ليكن  $g \in C^1[a, b]$  و  $p$  ضمن  $(a, b)$  مع  $g(p) = p$  و  $|g'(p)| > 1$ . أثبت وجود  $\delta > 0$  بحيث لو كانت  $|p_0 - p| < \delta$  فإن  $|p_1 - p| < |p_0 - p|$ . من ثم فهمها كان التقريب الابتدائي  $p_0$  متقارباً إلى  $p$ ، فإن التكرار الآتي  $p_1$  أكثر بعداً. وأخيراً فإن تكرار النقطة الثابتة لا يتقارب إذا كان  $p_0 \neq p$ .

## Newton's Method

## 3.2 طريقة نيوتن

طريقة نيوتن (أو نيوتن-رافسون) هي إحدى أكثر الطرائق العددية كفاءة في حل مسائل إيجاد الجذر. وهناك عدة أساليب لتقديم هذه الطريقة.

فإذا كنا نريد الخوارزمية فقط يمكننا اعتماد أسلوب الشكل البياني، كما هو الحال غالباً في التفاضل والتكامل. ويمكن أيضاً اشتقاق طريقة نيوتن بوصفها أسلوباً لإيجاد تقارب أسرع مما تعطيه أنواع أخرى من التكرار الدالي، كما كان في الفصل (4.2). وستعرض لاحقاً طريقة ثالثة لاستخدام طريقة نيوتن تعتمد كثيرة حدود تايلور.

لنفترض أن  $f \in C^2[a, b]$ ، وليكن  $p_0 \in [a, b]$  تقريباً للحل  $f(x) = 0$  بحيث  $f'(p_0) \neq 0$  و  $|p - p_0|$  صغير. لنفترض أننا وجدنا كثيرة حدود تايلور الأولى للدالة  $f(x)$  حول  $p_0$  وحسبناها عند  $x = p$  لنحصل على

$$f(p) = f(p_0) + (p - p_0)f'(p_0) + \frac{(p - p_0)^2}{2}f''(\xi(p))$$

حيث إن  $\xi(p)$  تقع ما بين  $p_0$  و  $p$ . وبما أن  $f(p) = 0$ ، تعطي هذه الصيغة

كارسح نيوتن

Isaac New on (1642-1726)

واحد من العلماء الأكثر عبقرية في كل الأزمنة في أواخر القرن السابع عشر th 1 كانت فترة تذبذب العلوم والاضيات وقد لانس عمل نيوتن كل جانب من الرياضيات تقريباً وقد قَدَمَ طريقته لحل المعادلات لإيجاد جذر المعادلة  $x^3 - 2x - 5 = 0$ . وهي مسألة تم تناولها في التمرين (5). وعلى الرغم من أنه عرض الطريقة بالنسبة لكثيرات الحدود. فمن الواضح أنه أدرك تطبيقاتها الواسعة

$$0 = f(p_0) + (p - p_0)f'(p_0) + \frac{(p - p_0)^2}{2} f''(\xi(p))$$

ويمكن اشتقاق طريقة نيوتن على افتراض أنه ما دامت  $|p - p_0|$  صغيرة، فإن الحد الذي يتضمن  $(p - p_0)^2$  سيكون أصغر كثيراً. لذا

$$0 \approx f(p_0) + (p - p_0)f'(p_0)$$

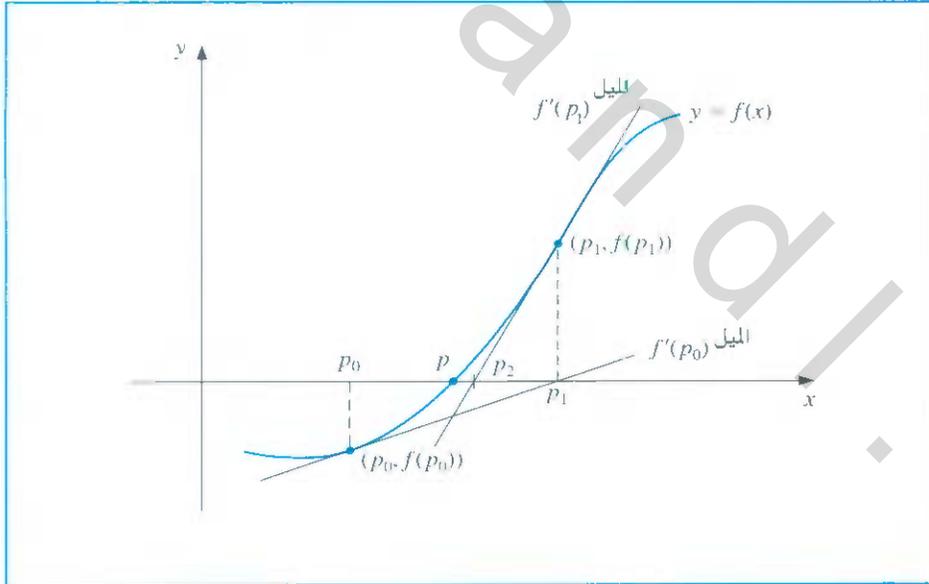
وبحل  $p$  نحصل على

$$p \approx p_1 \equiv p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)}$$

وهذه خطوة نحو طريقة نيوتن التي تبدأ بتقريب ابتدائي  $p_0$  ثم توليد المتتالية  $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$  باستخدام

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})} \quad \text{لكل } n \geq 1 \quad (5.2)$$

ويوضح شكل (7.2) كيفية إيجاد التقريب باستخدام المماسات المتتالية. (انظر الترين (15) أيضاً) تبدأ بتقريب ابتدائي  $p_0$ . يمثل التقريب  $p_1$  مقطع محور  $x$  من قبل خط المماس للدالة  $f$  عند  $(p_0, f(p_0))$ ، يمثل التقريب  $p_2$  مقطع محور  $x$  من قبل خط المماس للدالة  $f$  عند  $(p_1, f(p_1))$  وهكذا. وتتبع الخوارزمية (3.2) هذا الأسلوب.



شكل 7.2

### خوارزمية نيوتن Newton's Algorithm

لإيجاد حل لـ  $f(x) = 0$  مع تقريب ابتدائي  $p_0$ :

المدخلات: تقريب أولي  $p_0$ ، الحدود المسموح بها  $TOL$ ، أكبر عدد للتكرارات  $N_0$ .  
المخرجات: حل تقريبي  $p$  أو عبارة "فشل".

أعطى جوزيف رافسون

Joseph Raphson (1648–1715)

توضيحاً للطريقة المنسوبة إلى إسحق نيوتن عام 1690 معترفاً بأن نيوتن هو مصدر الاكتشاف. فنيوتن ورافسون لم يستخدموا بالضبط المشتقة في شرحهما، لأن كليهما تناولا كثيرات الحدود فقط. رياضيون آخرون وخصوصاً جيمس كريكوري

James Gregory (1636 –1675)

كانوا يدركون العملية قيد البحث عند هذا الوقت أو قبله.

ALGORITHM  
الخوارزمية  
3.2

الخطوة	المضمون
1	ضع $i = 1$
2	ما دام $i \leq N_0$ فننفذ الخطوات 3 - 6 الآتية.
3	ضع $p = p_0 - f(p_0)/f'(p_0)$ (احسب $P_i$ ).
4	إذا كان $ p - p_0  < TOL$ المخرج (p) (استكملت العملية بنجاح). توقف.
5	ضع $i = i + 1$
6	ضع $p_0 = p$ (تحديث $p_0$ ).
7	المخرجات (فشلت الطريقة بعد $N_0$ من التكرارات و $N_0 = \infty$ ) توقف.



### جدول 3.2

$p_n$	$n$
0.7853981635	0
0.7071067810	1
0.7602445972	2
0.7246674808	3
0.7487198858	4
0.7325608446	5
0.7434642113	6
0.7361282565	7

إن تباينات أسلوب التوقف المصاحبة لطريقة التنصيف يمكن تطبيقها في طريقة نيوتن. حيث نختار حد السماح  $\epsilon > 0$ ، ثم نوجد  $p_1, \dots, p_N$  حتى

$$|p_N - p_{N-1}| < \epsilon \quad (6.2)$$

$$\frac{|p_N - p_{N-1}|}{|p_N|} < \epsilon, \quad p_N \neq 0 \quad (7.2)$$

$$|f(p_N)| < \epsilon \quad (8.2)$$

تستخدم صيغة من المتباينة (6.2) في الخطوة 4 من الخوارزمية (3.2). لاحظ أن المتباينة (8.2) قد لا تعطي الكثير من المعلومات حول الخطأ الحقيقي  $|p_N - p|$ . (انظر التمرين (16) من الفصل 1.2) وإن طريقة نيوتن عبارة عن أسلوب تكرارات دالية بصيغة  $p_n = g(p_{n-1})$  حيث

$$g(p_{n-1}) = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})} \quad \text{لكل } n \geq 1 \quad (9.2)$$

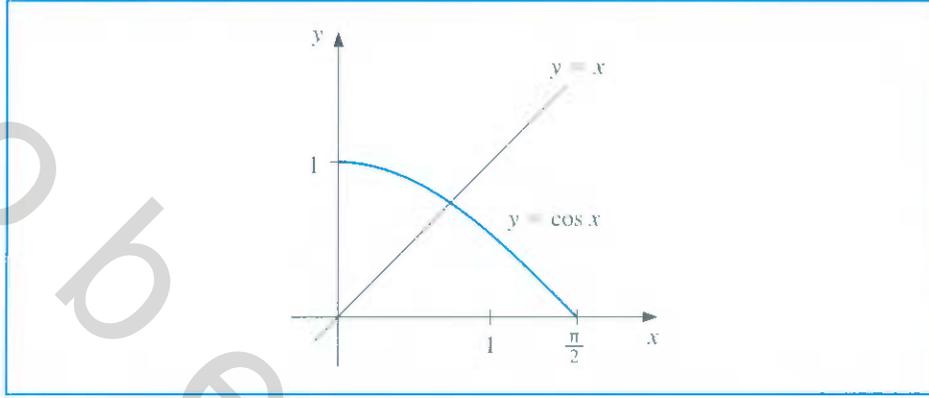
وفي الواقع هذا أسلوب تكرارات دالية تستخدم ليعطي تقارباً متسارعاً كما رأيناه في الفقرة (هـ) من المثال (3) من الفصل (2.2). ويتضح من الصيغة (9.2) أن طريقة نيوتن لا يمكنها الاستمرار إذا كان  $f'(p_{n-1}) = 0$  لبعض قيم  $n$ . وفي الواقع سنرى أن الطريقة أكثر جدوى عندما تُحدد  $f'$  بعيداً عن الصفر وبالقرب من  $p$ .

لنفترض أننا نريد تقريب حل للدالة  $f(x) = \cos x - x = 0$ . إن حل مسألة إيجاد الجذر هذه هو حل لمسألة النقطة الثابتة  $x = \cos x$  أيضاً، ويشير الرسم في شكل (8.2) إلى أن نقطة ثابتة واحدة تقع في الفترة  $[0, \pi/2]$ . ويوضح الجدول (3.2) نتائج تكرار النقطة الثابتة مع  $p_0 = \pi/4$ ، ومنها نستنتج أن أفضل قيمة هي  $p \approx 0.74$ .

ولتناول هذه المسألة على نحو مختلف؛ عرّف  $f(x) = \cos x - x$ ، وطبق طريقة نيوتن. وما دام  $f'(x) = -\sin x - 1$ ، فإن المتتالية تتولد عن طريق

$$p_n = p_{n-1} - \frac{\cos p_{n-1} - p_{n-1}}{-\sin p_{n-1} - 1} \quad \text{لكل } n \geq 1$$

مثال 1



شكل 8.2

ويتضمن جدول (4.2) تقريبات تولدت مع  $p_0 = \pi/4$ . ونلاحظ تقريباً متميزاً عند  $n = 3$ . ونتوقع أن يكون هذا التقريب دقيقاً للمنازل الموضحة بسبب التوافق بين  $P_3$  و  $F_4$ . ويشير اشتقاق سلسلة تايلور لطريقة نيوتن في بداية هذا الفصل إلى ضرورة دقة التقدير الابتدائي. والافتراض الضروري هو كون الحد المتضمن  $(p - p_0)^2$  صغيراً مقارنة بـ  $|p - p_0|$  على أنه من الممكن حذفه. وهذا بالتأكيد لن يتحقق ما لم يكن  $p_0$  تقريباً جيداً إلى  $p$ . وإذا لم يكن  $p_0$  قريباً بما يكفي من الجذر الحقيقي فإن هناك سبباً ضعيفاً لملاحظة تقارب طريقة نيوتن نحو الجذر. وعلى أي حال قد ينتج في بعض الحالات وحتى في حالة التقريب الضعيف تقارب. (ويوضح التمرينان (20) و (21) بعض هذه الحالات).

وتوضح مبرهنة التقارب التالية لطريقة نيوتن الأهمية المبرهنة لاختيار  $p_0$ .

ليكن  $f \in C^2[a, b]$ . إذا كان  $p \in [a, b]$  حيث  $f(p) = 0$  و  $f'(p) \neq 0$ . فيوجد  $\delta > 0$  بحيث تولد طريقة نيوتن المتتالية المتقاربة  $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$  إلى  $p$  ولأي تقريب ابتدائي  $p_0 \in [p - \delta, p + \delta]$ .

**البرهان** البرهان مبني على تحليل طريقة نيوتن بوصفه أسلوب تكرارات دالية  $p_n = g(p_{n-1})$  لكل  $n \geq 1$  مع

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

ليكن  $k$  ضمن  $(0, 1)$ . في البداية توجد الفترة  $[p - \delta, p + \delta]$  على أن  $g$  تنقلها إلى نفسها حيثما  $|g'(x)| \leq k$  لكل  $x \in [p - \delta, p + \delta]$ .

وحيث إن  $f'$  متصلة. وإن  $f'(p) \neq 0$ . فإن الفقرة (a) من تمرين (27) فصل (1.1) يؤدي إلى حتمية وجود  $\delta_1 > 0$  حيث  $f'(x) \neq 0$  لكل  $x \in [p - \delta_1, p + \delta_1] \subseteq [a, b]$ . وأخيراً تكون الدالة  $g$  معرفة ومتصلة ضمن  $[p - \delta_1, p + \delta_1]$ . كما أن

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

لـ  $x \in [p - \delta_1, p + \delta_1]$ . بحيث إن  $f \in C^2[a, b]$ . تكون  $g \in C^1[p - \delta_1, p + \delta_1]$ . وبفرض  $f(p) = 0$  فإن

جدول 4.2

$p_n$	$n$
0.7853981635	0
0.7395361337	1
0.7390851781	2
0.7390851332	3
0.7390851332	4

## مبرهنة 5.2

$$g'(p) = \frac{f(p)f''(p)}{[f'(p)]^2} = 0$$

ولأن  $g'$  متصلة و  $0 < k < 1$ . فإن الفقرة (ب) من التمرين (27) في الفصل (1.1) يؤدي إلى  
حتمية وجود  $\delta$  مع  $0 < \delta < \delta_1$ ، وأن

$$|g'(x)| \leq k \quad \text{لكل } x \in [p - \delta, p + \delta]$$

ونحتاج الآن إلى إثبات كون الدالة  $g$  تنقل  $[p - \delta, p + \delta]$  إلى  $[p - \delta, p + \delta]$ . فإذا كان  
 $x \in [p - \delta, p + \delta]$  فإن مبرهنة القيمة الوسطى تؤدي إلى أنه لعدد ما  $\xi$  بين  $x$  و  $p$ ، يكون لدينا  
بالتالي  $|g(x) - g(p)| = |g'(\xi)| |x - p|$

$$|g(x) - p| = |g(x) - g(p)| = |g'(\xi)| |x - p| \leq k|x - p| < |x - p|$$

وحيث إن  $x \in [p - \delta, p + \delta]$ ، فإن  $|x - p| < \delta$  و  $|g(x) - p| < \delta$ ، ومن ثم فإن الدالة  $g$   
تنقل  $[p - \delta, p + \delta]$  إلى  $[p - \delta, p + \delta]$ .

إن الفرضيات كلها لمبرهنة النقطة الثابتة متحققة الآن، وأخيراً فالمتتالية  $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$  المعرفة بـ

$$p_n = g(p_{n-1}) = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})} \quad \text{لكل } n \geq 1$$

تتقارب إلى  $p$  لأي  $p_0 \in [p - \delta, p + \delta]$ .

تنص المبرهنة (5.2) على أنه: "في حالة الافتراضات المعقولة تتقارب طريقة نيوتن عند تحقق  
اختيار تقريب ابتدائي ذي دقة معقولة". وتؤدي إلى أن الثابت  $k$  الذي يحد اشتقاق الدالة  $g$ ،  
ويشير أخيراً إلى سرعة التقارب للطريقة يتناقص إلى الصفر مع استمرار العملية أيضاً. وهذا  
التمهيد مهم لطريقة نيوتن، لكن من النادر استخدامها عند التطبيق؛ لأنها لا تعلمنا كيفية  
تحديد  $\delta$ . في التطبيق العملي يُختار تقريب ابتدائي، وتولد التقريبات التالية بطريقة نيوتن،  
وهذه عموماً إما أن تتقارب بسرعة إلى الجذر، وإما أنه سيكون واضحاً أن التقارب غير ممكن.  
إن طريقة نيوتن تمثل أسلوباً فائق القوة، لكن لها جانباً سلبياً رئيساً، وهو حاجتنا إلى معرفة  
قيمة اشتقاق الدالة  $f$  عند كل تقريب. وغالباً ما يكون  $f'(x)$  أكثر صعوبة، ويحتاج إلى عمليات  
حسابية أكثر لحسابه مقارنة بـ  $f(x)$ .

ولإحاطة بمسألة تقييم الاشتقاق لطريقة نيوتن؛ نقدم شيئاً مختلفاً قليلاً. ومن خلال التعريف

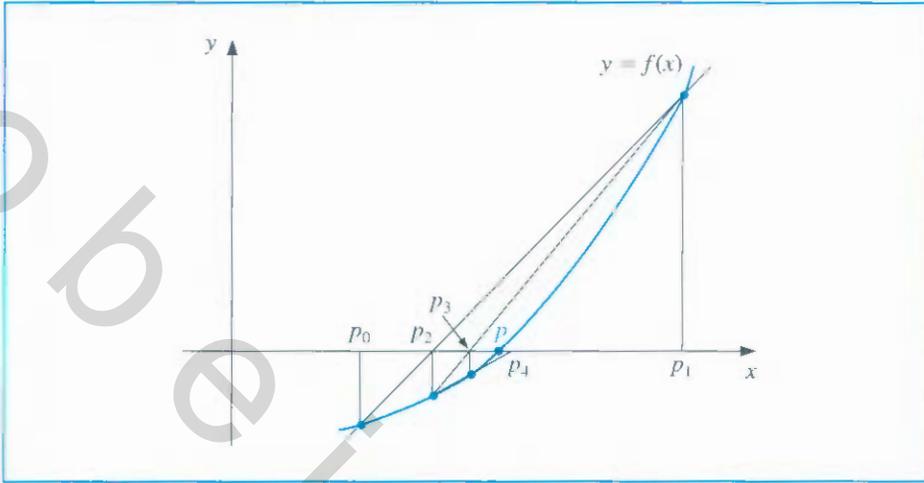
$$f'(p_{n-1}) = \lim_{x \rightarrow p_{n-1}} \frac{f(x) - f(p_{n-1})}{x - p_{n-1}}$$

وبجعل  $x = p_{n-2}$ ، لدينا

$$f'(p_{n-1}) \approx \frac{f(p_{n-2}) - f(p_{n-1})}{p_{n-2} - p_{n-1}} = \frac{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}{p_{n-1} - p_{n-2}}$$

وباستخدام هذا التقريب إلى  $f'(p_{n-1})$  في صيغة نيوتن نحصل على

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})(p_{n-1} - p_{n-2})}{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})} \quad (10.2)$$



شكل 9.2

ويدعى هذا الأسلوب "طريقة القاطع Secant Method" ونعرضه في الخوارزمية (4.2). (انظر شكل 9.2) مبدئين بتقريبين ابتدائيين  $p_0$  و  $p_1$ ، فإن التقريب  $p_2$  عبارة عن تقاطع  $x$  مع الخط الواصل بين  $(p_0, f(p_0))$  و  $(p_1, f(p_1))$ . والتقريب  $p_3$  عبارة عن تقاطع  $x$  مع الخط الواصل بين  $(p_1, f(p_1))$  و  $(p_2, f(p_2))$  وهكذا.

### القاطع Secant

لإيجاد حل لـ  $f(x) = 0$  مع تقريب ابتدائي  $p_0$  و  $p_1$ ،  
 المدخلات: تقريب ابتدائي  $p_0$  و  $p_1$ ، الحدود المسموح بها  $TOL$ ، أكبر عدد لمرات التكرار  $N_0$ .  
 المخرجات: حل تقريبي  $p$  أو عبارة "فشل".

الخطوة	المضمون
1	ضع $i = 2$ و $q_0 = f(p_0)$ و $q_1 = f(p_1)$ .
2	ما دام $i \leq N_0$ فننفذ الخطوات 3 - 6 الآتية.
3	ضع $p = p_1 - q_1(p_1 - p_0)/(q_1 - q_0)$ (احسب $P_i$ ).
4	إذا كان $ p - p_1  < TOL$ فإن المخرج ( $p$ ) استكملت العملية بنجاح. توقف.
5	ضع $i = i + 1$ .
6	ضع $p_0 = p_1$ $q_0 = q_1$ $p_1 = p$ $q_1 = f(p)$
7	المخرجات (فشلت الطريقة بعد $N_0$ من التكرارات و $N_0 = 'N_0$ ) توقف.

إن كلمة قاطع مشتقة من الكلمة اللاتينية secan التي تعني القاطع. إن طريقة القاطع تستخدم خط القاطع. وهو الخط الواصل بين نقطتين تقطعان المنحنى لتقريب الجذر.

### ALGORITHM الخوارزمية 4.2

ويتضمن المثال الآتي مسألة سبقت دراستها في المثال (1) عندما استخدمنا طريقة نيوتن مع

$$p_0 = \pi/4$$

استخدم طريقة القاطع لإيجاد حل لـ  $x = \cos x$ . قارنا في المثال (1) تكرار الدالة وطريقة نيوتن بتقريب ابتدائي  $p_0 = \pi/4$ . وهنا نحتاج إلى تقريبين ابتدائيين. ويدرج جدول (5.2) الحسابات مع  $p_1 = \pi/4$ ،  $p_0 = 0.5$  والصيغة

$$p_n = p_{n-1} - \frac{(p_{n-1} - p_{n-2})(\cos p_{n-1} - p_{n-1})}{(\cos p_{n-1} - p_{n-1}) - (\cos p_{n-2} - p_{n-2})}$$

من الخوارزمية (4.2).

وبمقارنة النتائج هنا بتلك التي في المثال (1)، نرى أن  $p_5$  دقيق للغاية الرتبة الكسرية العاشرة. إن تقارب طريقة القاطع أسرع كثيراً من تكرار الدالة. لكنها أبطأ قليلاً من طريقة نيوتن التي تعطي هذه الرتبة من الدقة مع  $p_3$ ، وهذا صحيح عموماً. (انظر التمرين (14) من الفصل 4.2).

تستخدم طريقة نيوتن أو طريقة القاطع في تنقية الجواب المعطى بأسلوب آخر غالباً مثل طريقة التنصيف. لكون هذه الطرائق تتطلب تقريباً ابتدائياً جيداً، لكنها عموماً تعطي تقارباً سريعاً. وإن كل زوج من التقريبات المتتالية في طريقة التنصيف يحوِّط جذر الصيغة  $p$ ، أي أنه للعدد الصحيح الموجب  $n$  كله جذر ما بين  $a_n$  و  $b_n$ . وهذا يؤدي إلى أنه لأي  $n$ ، فإن تكرارات

$$|p_n - p| < \frac{1}{2} |a_n - b_n|$$

التي تحقِّق حدًّا خطأً سهل الحساب للتقريبات. إن إحاطة الجذر ليس مضموناً لطريقة نيوتن أو طريقة القاطع. ويتضمن جدول (4.2) نتائج لطريقة نيوتن طبقت على  $f(x) = \cos x - x$  حيث وُجد جذر تقريبي مقداره 0.7390851332. لاحظ أن هذا الجذر ليس محوِّطاً بـ  $p_0$ ،  $p_1$  أو  $p_2$ . إن تقريبات طريقة القاطع في هذه المسألة مغطاة في جدول (5.2). فالتقريبان الابتدائيان  $p_0$  و  $p_1$  يحيطان الجذر، لكن زوج التقريبين  $p_3$  و  $p_4$  قد فشل في عمل ذلك.

إن طريقة الموقع الخاطئ False Position تولد تقريبات بطريقة القاطع نفسها، لكنها تتضمن اختباراً لضمان كون الجذر محوِّطاً دائماً ما بين تكرارات متتالية. وعلى الرغم من أنها ليست الطريقة التي نوصي بها عموماً، إلا أنها توضح كيفية اتحاد المحوِّطات.

يُختار  $p_0$  و  $p_1$  مع  $f(p_0) \cdot f(p_1) < 0$  في البداية. ويُختار التقريب  $p_2$  بأسلوب طريقة القاطع نفسه، مثل تقاطع  $x$  مع الخط الواصل بين  $(p_0, f(p_0))$  و  $(p_1, f(p_1))$ . ولتحديد خط قاطع نستخدم حساب  $p_3$ ، ونحتاج إلى تدقيق  $f(p_2) \cdot f(p_1)$ . فإذا كان هذا المقدار سالباً فإن  $p_1$  و  $p_2$  يحيطان الجذر، ونختار  $p_3$  على أنه تقاطع  $x$  مع الخط الواصل بين  $(p_1, f(p_1))$  و  $(p_2, f(p_2))$ . وبالعكس ذلك نختار  $p_3$  على أنه تقاطع  $x$  مع الخط الواصل بين  $(p_0, f(p_0))$  و  $(p_2, f(p_2))$ . ومن ثم نبدل القياس على  $p_0$  و  $p_1$ . وبأسلوب نفسه عند إيجاد  $p_3$ ، فإن إشارة  $f(p_3) \cdot f(p_2)$

## مثال 2

### جدول 5.2

$p_n$	$n$
0.5	0
0.7853981635	1
0.7363841388	2
0.7390581392	3
0.7390851493	4
0.7390851332	5

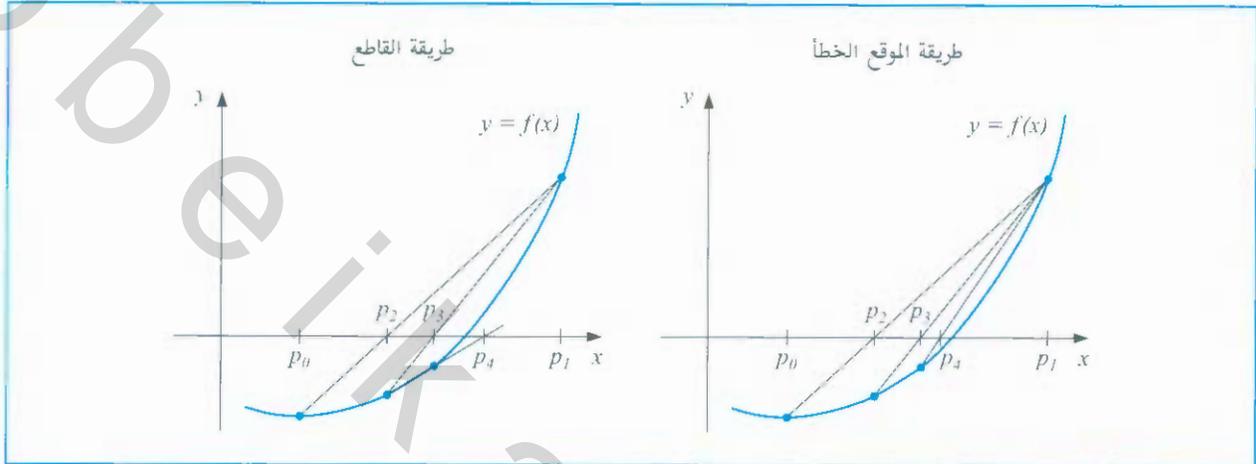
### إن اصطلاح

#### Regule Falsi

الذو يعني القاعدة لرائفة أو الموقع الزام يشير إلى كون تقنية استخدام النتج رائفة. ولكن ضمن أسلوب خص. لإيجاد تقارب لنتيجة صححة. ويمكن إيجاد مسائل الموقع الخطي، على برديات Rhind يعود تاريخها إلى 1350 تقريبا قبل الميلاد.

تحدد ما إذا كان علينا استخدام  $P_2$  و  $P_3$  أو  $P_3$  و  $P_4$  لحساب  $P_4$ ، وتعاد تسمية  $P_1$  و  $P_2$  في الحالة الأخيرة. وتضمن تكرار التسمية هذه أن الجذر محاط بتكرارات متتالية. ولعمية موضحة في الخوارزمية (5.2)، ويوضح شكل (10.2) كيف تختلف التكرارات عما هي عليه في طريقة القاطع؛ إذ التقريبات الثلاثة الأولى متماثلة، إلا الرابع فمختلف.

شكل 10.2



### الموقع الخطأ False Position

لإيجاد حل لـ  $f(x) = 0$  مع كون  $f$  دالة متصلة على الفترة  $[p_0, p_1]$ ، بحيث  $f(p_0) \cdot f(p_1) < 0$ .

المدخلات: تقريب ابتدائي  $p_0$  و  $p_1$  الحدود المسموح بها  $TOL$ ، أكبر عدد لمرات التكرار  $N_0$ .  
المخرجات: حل تقريبي  $p$  أو عبارة "فشل".

الخطوة	المضمون
1	ضع $i = 2$ $q_1 = f(p_1)$ و $q_0 = f(p_0)$
2	ما دام $i \leq N_0$ فننفذ الخطوات 3 - 5 الآتية:
3	ضع $p = p_1 - q_1(p_1 - p_0)/(q_1 - q_0)$ (احسب $P_i$ )
4	إذا كان $ p - p_1  < TOL$ فإن المخرج $(p)$ (استكملت العملية بنجاح). توقف.
5	ضع $q = f(p)$ و $i = i + 1$
6	إذا $q \cdot q_1 < 0$ ضع $p_0 = p_1$ و $q_0 = q_1$

ALGORITHM  
الخوارزمية  
5.2

7	ضع $p_1 = p$ $q_1 = q$
8	المخرجات (فشلت الطريقة بعد $N_0$ من التكرارات و $(N_0 = \cdot, N_0)$ توقف).



### جدول 6.2

$p_n$	$n$
0.5	0
0.7853981635	1
0.7363841388	2
0.7390581392	3
0.7390848638	4
0.7390851305	5
0.7390851332	6

وضح جدول (6.2) نتائج طريقة الموقع الخطأ المطبقة على  $f(x) = \cos x - x$  مع التقريبات نفسها التي استخدمناها في طريقة القاطع في المثال (2). لاحظ أن التقريبات تتفق من خلال  $p_3$ . وأن طريقة الموقع الخطأ تتطلب تكرارات إضافية لإعطاء الدقة نفسها لطريقة القاطع. يتطلب الضمان المضاف إلى طريقة الموقع الخطأ حسابات أكثر مقارنة بطريقة القاطع، بالضبط مثل التبسيط الذي توفره طريقة القاطع مقارنةً بطريقة نيوتن التي تأتي على حساب تكرارات إضافية. ويمكن رؤية أمثلة أخرى على خصائص هذه الطرائق الإيجابية والسلبية من خلال التمرينين العمليين (17) و (18).

### EXERCISE SET

### مجموعة التمارين 3.2

- ليكن  $f(x) = x^2 - 6$  و  $p_0 = 1$ . استخدم طريقة نيوتن لإيجاد  $p_2$ .
- ليكن  $f(x) = -x^3 - \cos x$  و  $p_0 = -1$ . استخدم طريقة نيوتن لإيجاد  $p_2$ . هل يمكن استخدام  $p_0 = 0$ ؟
- ليكن  $f(x) = x^2 - 6$ . أوجد  $p_3$  عندما  $p_0 = 3$  و  $p_1 = 2$ .  
أ. استخدم طريقة القاطع.  
ب. استخدم طريقة الموقع الخطأ.  
ج. أيهما أقرب إلى  $\sqrt{6}$ ؟
- ليكن  $f(x) = -x^3 - \cos x$ . أوجد  $p_3$  عندما  $p_0 = -1$  و  $p_1 = 1$ .  
أ. استخدم طريقة القاطع.  
ب. استخدم طريقة الموقع الخطأ.
- استخدم طريقة نيوتن لإيجاد حلول دقيقة لغاية  $10^{-4}$  للمسائل الآتية:  
أ.  $x^3 - 2x^2 - 5 = 0$ ,  $[1, 4]$ .  
ب.  $x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ ,  $[-3, -2]$ .  
ج.  $x - \cos x = 0$ ,  $[0, \pi/2]$ .  
د.  $x - 0.8 - 0.2 \sin x = 0$ ,  $[0, \pi/2]$ .
- استخدم طريقة نيوتن لإيجاد حلول دقيقة لغاية  $10^{-5}$  للمسائل الآتية:  
أ.  $e^x + 2^{-x} + 2 \cos x - 6 = 0$  لكل  $1 \leq x \leq 2$ .  
ب.  $\ln(x-1) + \cos(x-1) = 0$  لكل  $1.3 \leq x \leq 2$ .  
ج.  $2x \cos 2x - (x-2)^2 = 0$  لكل  $2 \leq x \leq 3$  و  $3 \leq x \leq 4$ .  
د.  $(x-2)^2 - \ln x = 0$  لكل  $1 \leq x \leq 2$  و  $e \leq x \leq 4$ .  
هـ.  $e^x - 3x^2 = 0$  لكل  $0 \leq x \leq 1$  و  $3 \leq x \leq 5$ .  
و.  $\sin x - e^{-x} = 0$  لكل  $0 \leq x \leq 1$  و  $3 \leq x \leq 4$  و  $6 \leq x \leq 7$ .
- كرر العمل على تمرين (5) مستخدماً طريقة القاطع.
- كرر العمل على تمرين (6) مستخدماً طريقة القاطع.
- كرر العمل على تمرين (5) مستخدماً طريقة الموقع الخطأ.
- كرر العمل على تمرين (6) مستخدماً طريقة الموقع الخطأ.
- استخدم الطرائق الثلاث في هذا الفصل لإيجاد حلول دقيقة لغاية  $10^{-5}$  للمسائل الآتية:  
أ.  $3x - e^x = 0$  for  $1 \leq x \leq 2$ .  
ب.  $x + 3 \cos x - e^x = 0$  for  $0 \leq x \leq 1$ .

12. استخدم الطرائق الثلاث في هذا الفصل لإيجاد حلول دقيقة لغاية  $10^{-7}$  للمسائل الآتية:

أ.  $x^2 - 4x + 4 - \ln x = 0$  لكل  $1 \leq x \leq 2$  و  $2 \leq x \leq 4$ .

ب.  $x + 1 - 2 \sin \pi x = 0$  لكل  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$  و  $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ .

13. استخدم طريقة نيوتن للتقريب بدقة  $10^{-4}$  لتقريب قيمة  $x$  والتي تعطي النقطة الأقرب إلى

$(1, 0)$  على المنحنى  $y = x^2$ . [ملحوظة: صغر إلى  $[d(x)]^2$ ، حيث يمثل  $d(x)$  المسافة بين  $(x, x^2)$  إلى  $(1, 0)$ ].

14. استخدم طريقة نيوتن للتقريب بدقة  $10^{-4}$  لتقريب قيمة  $x$  والتي تعطي النقطة الأقرب إلى

$(2, 1)$  على المنحنى  $y = 1/x$ .

15. فيما يأتي توضيح لطريقة نيوتن بالشكل البياني: افترض أن  $f'(x)$  موجود ضمن  $[a, b]$ ،

وأن  $f'(x) \neq 0$  ضمن  $[a, b]$ ، وأكثر من ذلك، افترض حتمية وجود  $p \in [a, b]$  و وحدة بحيث

$f(p) = 0$ ، وليكن  $p_0 \in [a, b]$  بصورة غير منهجية. لتكن نقطة على خط المماس لـ  $f$  عند

$(p_0, f(p_0))$  قاطعاً محور  $x$ . ليمثل  $p_n$  تقاطع خط المماس لـ  $f$  لمحور  $x$  عند  $(p_{n-1}, f(p_{n-1}))$  اشتق

الصيغة التي توضح هذه الطريقة.

16. استخدم طريقة نيوتن لحل الصيغة

$$p_0 = \frac{\pi}{2} \text{ مع } 0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x^2 - x \sin x - \frac{1}{2} \cos 2x$$

طبق التكرار مستخدماً طريقة نيوتن حتى تحقق الدقة  $10^{-5}$ . وضح لماذا تكون التمهيدية غير

اعتيادية بالنسبة إلى طريقة نيوتن. أيضاً حل الصيغة باستخدام القيم  $p_0 = 5\pi$  و  $p_0 = 10\pi$ .

17. عديدة حدود من الرتبة الرابعة

$$f(x) = 230x^4 + 18x^3 + 9x^2 - 221x - 9$$

لها صفران حقيقيان، أحدهما ضمن  $[-1, 0]$  والآخر ضمن  $[0, 1]$ . حاول تقريب هذين الصفرين

لغاية  $10^{-6}$  مستخدماً:

أ. طريقة الموقع الخطأ

ب. طريقة القاطع

ج. طريقة نيوتن

استخدم النقاط الطرفية لكل فترة على نحو تقريبات ابتدائية في (أ) و(ب) والنقطة لوسطية في (ج).

18. للدالة  $f(x) = \tan \pi x - 6$  صفر عندما  $\approx 0.447431543 \approx \arctan 6 / (1/\pi)$  ليكن  $p_0 = 0$

و  $p_1 = 0.48$ . استخدم عشر تكرارات لكل من الطرائق الآتية لتقريب هذا الجذر أي الصرائق

أنجح؟ ولماذا؟

أ. طريقة التنصيف

ب. طريقة الموقع الخطأ

ج. طريقة القاطع

19. يمكن كتابة صيغة التكرار لطريقة القاطع بصيغة أبسط هي

$$p_n = \frac{f(p_{n-1})p_{n-2} - f(p_{n-2})p_{n-1}}{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}$$

وضح لماذا تبدو صيغة التكرار هذه عموماً أقل دقة من تلك المعطاة في الخوارزمية (4.2).

20. للصيغة  $x^2 - 10 \cos x = 0$  حلان  $\pm 1.3793646$  استخدم طريقة نيوتن لتقريب لحلول لغاية

دقة  $10^{-5}$  مع هذه القيم لـ  $p_0$ :

أ.  $p_0 = -100$       ب.  $p_0 = -50$       ج.  $p_0 = -25$

د.  $p_0 = 25$       هـ.  $p_0 = 50$       و.  $p_0 = 100$

21. للصيغة  $4x^2 - e^x - e^{-x} = 0$  أربعة حلول  $x_1$  و  $x_2$ . استخدم طريقة نيوتن لتقريب الحل لغاية  $10^{-5}$  مع هذه القيم لـ  $p_0$ :

أ. $p_0 = -10$	ب. $p_0 = -5$	ج. $p_0 = -3$
د. $p_0 = -1$	هـ. $p_0 = 0$	و. $p_0 = 1$
ز. $p_0 = 3$	ح. $p_0 = 5$	ط. $p_0 = 10$

22. استخدم Maple لتحديد عدد مرات التكرار اللازمة لطريقة نيوتن مع  $p_0 = \pi/4$  لإيجاد جذر  $f(x) = \cos x - x$  ضمن  $10^{-100}$ .

23. الدالة  $f(x) = \ln(x^2 + 1) - e^{0.4x} \cos \pi x$  له عدد لانهائي من الأصفار. أ. حدد ضمن  $10^6$  الأصفار السالبة فقط.

ب. حدد ضمن  $10^6$  أصغر أربعة أصفار موجبة.

ج. حدد تقريباً ابتدائياً معقولاً لإيجاد أصغر صفر موجب من الرتبة  $n$  لـ  $f$ . (ملحوظة: ارسم شكلاً تقريبياً لـ  $f$ .)

د. استخدم الفقرة (ج) لتحديد الصفر الخامس والعشرين الأصغر الموجب لـ  $f$ .

24. أوجد تقريباً دقيقاً ضمن  $10^{-4}$  لصيغة المجتمع

$$1,564,000 + 1,000,000e^{\lambda} + \frac{435,000}{\lambda}(e^{\lambda} - 1)$$

التي شرحت في مقدمة هذا الفصل. استخدم هذه القيمة للتنبؤ بحجم المجتمع عند نهاية السنة الثانية، مفترضاً أن معدل الهجرة السنوي 435,000 شخص خلال هذه السنة.

25. عددان مجموعهما 20. إذا أضيف كل عدد إلى جذره التربيعي فإن حاصل ضرب المجموعين يكون 155.55. حدد هذين العددين ضمن  $10^4$ .

26. القيمة التراكمية لحساب التوفير مبنية على دفعات دورية اعتيادية يمكن تحديدها من خلال صيغة الأقساط المستحقة

$$A = \frac{P}{i}[(1+i)^n - 1]$$

في هذه الصيغة، تمثل  $A$  الرصيد في هذا الحساب، وتمثل  $P$  المبلغ المدع اعتيادياً، وتمثل  $i$  معدل الفائدة خلال فترة محددة، ولعدد  $n$  من هذه الفترات. يرغب أحد المهندسين في امتلاك حساب توفير بمبلغ \$750,000 عند تقاعده بعد 20 سنة، ويستطيع إيداع \$1500 شهرياً لتحقيق هذا الهدف. فما أقل معدل فائدة لاستثمار هذا المبلغ مفترضاً حسابها شهرياً؟

27. مسائل حول كمية الأموال المطلوب تسديدها بقرض ضمن فترة زمنية محددة تتضمن الصيغة

$$A = \frac{P}{i}[1 - (1+i)^{-n}]$$

المعروفة بصيغة الأقساط الاعتيادية. في هذه الصيغة، تمثل  $A$  مبلغ القرض، و  $P$  مبلغ الدفعات المسددة كلها، وتمثل  $i$  معدل الفائدة خلال فترة محددة ولعدد  $n$  من هذه الفترات. افترض وجود حاجة إلى قرض مقداره \$130,000 ومدته 30 سنة لشراء دار، وأن المقترض بوسعه تسديد القرض بدفعات شهرية لا تزيد على \$1000. فما أعلى معدل فائدة تناسب قدرة المقترض؟

28. إن حقن دواء لمريض يؤدي إلى تركيز الدم وفقاً للصيغة  $c(t) = Ate^{-t/3}$  ملجم لكل ملتر. بعد زمن  $t$  ساعة من حقن  $A$  من الوحدات. والتركيز الأعلى الآمن هو 1 mg/ml.

أ. ما الكمية الواجب حقنها للوصول إلى هذا التركيز الآمن؟

ب. وجب حقن كمية إضافية من هذا الدواء للمريض عقب انخفاض التركيز إلى 0.25 mg/ml.

حدد متى يجب إعطاء هذه الزيادة إلى أقرب دقيقة.

ج. افترض أن التركيز من حقن متتالية بسمه (تراكمية)، وأن 75% من الكمية اُخِي حُقنت تعطى خلال الجرعة الثانية. فمتى تكون الجرعة الثالثة؟

$$29. \text{ لتكن } f(x) = 3^{3x+1} - 7 \cdot 5^{2x}$$

أ. استخدم أوامر solve and fsolve لمحاولة إيجاد جذور  $f$  جميعها.

ب. ارسم  $f(x)$  لإيجاد تقريبات ابتدائية لجذور  $f$ .

ج. استخدم طريقة نيوتن لإيجاد جذور  $f$  ضمن  $10^{-10}$ .

د. أوجد الحلول الصحيحة لـ  $f(x) = 0$  دون استخدام Maple.

$$30. \text{ أعد التمرين (29) مستخدماً } f(x) = 2^{x^2} - 3 \cdot 7^{x+1}$$

31. إن النموذج اللوجستي للنمو السكاني تعبر عنه الصيغة

$$P(t) = \frac{P_L}{1 - ce^{-kt}}$$

بحيث إن  $P_L$ ،  $c$  و  $k > 0$  عبارة عن ثوابت، و  $P(t)$  تمثل عدد السكان عند الزمن  $t$  وإن  $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = P_L$ . استخدم بيانات التعداد السكاني للسنوات 1950، 1960 و 1970 المبينة في الجدول أدناه لتحديد الثوابت أعلاه لنموذج النمو اللوجستي. استخدم النموذج اللوجستي للتنبؤ بعدد سكان الولايات المتحدة عام 1980 وعام 2010 مفترضاً  $t = 0$  في عام 1950. قارن بين التنبؤ عام 1980 والعدد الحقيقي.

32. نموذج كومبرتس للنمو السكاني هو

$$P(t) = P_L e^{-ce^{-kt}}$$

حيث إن  $P_L$ ،  $c$  و  $k > 0$  عبارة عن ثوابت، و  $P(t)$  تمثل عدد السكان عند الزمن  $t$ . أعد التمرين (27) مستخدماً نموذج كومبرتس للنمو السكاني بدلاً من النموذج اللوجستي.

33. يتغلب اللاعب A (يربح 21 نقطة مقابل 0) على اللاعب B في لعبة كرة المضرب باحتمال

$$P = \frac{1+p}{2} \left( \frac{p}{1-p+p^2} \right)^{21}$$

حيث تمثل  $P$  احتمال ربح A لأي مباراة محددة (دون ارتباط ذلك بمن يستهل الضرب). انظر (Keller, J.J., p. 267.) حدد - ضمن  $10^{-3}$  - القيمة الصغرى لـ  $P$  التي تضمن تغلب A على  $P$  بنصف عدد المباريات بينهما على الأقل.

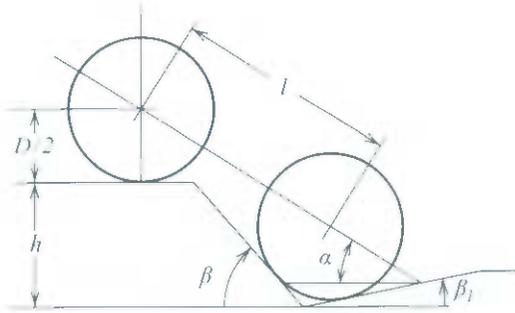
34. عند تصميم مركبة السباق يؤخذ في الحسبان نوعان من كيفية فشل المركبة في تحاوز العقبات. يحدث الأول عندما تلامس بطن المركبة الأرض في أثناء تجاوزها العقبة، ويحدث الثاني عندما تلامس مقدمة المركبة الأرض في أثناء تجاوزها العقبة. والشكل أدناه مأخوذ من [Bek]، ويوضح العناصر المصاحبة للنوع الثاني من الفشل. ويلاحظ فيه إمكانية تطابق الزاوية الكبرى  $\alpha$  التي يمكن للمركبة ميلانها حيث تمثل  $\beta$  الزاوية الكبرى التي لا يظهر عندها فشل المركبة من النوع الأول مع الصيغة

$$A \sin \alpha \cos \alpha + B \sin^2 \alpha - C \cos \alpha - E \sin \alpha = 0$$

حيث

$$A = l \sin \beta_1, \quad B = l \cos \beta_1, \quad C = (h + 0.5D) \sin \beta_1 - 0.5D \tan \beta_1$$

$$E = (h + 0.5D) \cos \beta_1 - 0.5D$$



أ. أثبت الادعاء الآتي:

"عندما  $\alpha = 33^\circ$  فإن الزاوية  $l = 89 \text{ in}$ ,  $h = 49 \text{ in}$ ,  $D = 55 \text{ in}$ , and  $\beta_1 = 11.5$ "  
 ب. أوجد  $\alpha$  في حالة كون  $l$ ,  $h$  و  $\beta_1$  مساوية لما هو في الفقرة (أ) لكن  $D = 30 \text{ in}$ .

## 4.2 تحليل الخطأ لطرائق التكرار Error Analysis for Iterative

سنفحص في هذا الفصل رتبة التقارب لأساليب التكرار الدالية، ونتناول طريقة نيوتن من خلال كونها طريقة لإيجاد التقارب السريع. سنأخذ في الحسبان طرائق تسريع التقارب لطريقة نيوتن في حالات خاصة أيضاً. ونحتاج إلى عملية لقياس مدى التسارع في تقارب المتتالية في البداية.

نعريف 6.2 افترض المتتالية  $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$  تتقارب إلى  $p$  و  $p_n \neq p$  لقيم  $n$  كلها. فعند وجود الثوابت  $\lambda$  و  $\alpha$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|^\alpha} = \lambda \quad \text{حيث}$$

نقول: إن المتتالية  $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$  تتقارب إلى  $p$  بالرتبة  $\alpha$ . مع خطأ مقارب يساوي الثابت  $\lambda$ .  
 ويوصف أسلوب التكرار ذو الصيغة  $p_n = g(p_{n-1})$  بأنه من الرتبة  $\alpha$  إذا تقاربت المتتالية  $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$  للحل  $p = g(p)$  من الرتبة  $\alpha$ .

وتتقارب المتتالية ذات الرتبة العليا للتقارب عموماً بسرعة أكبر من المتتالية ذات الرتبة الدنيا. إن ثابت المقاربة يؤثر في سرعة التقارب. ولكنه ليس في مستوى أهمية الرتبة. وتتطلب حالتان من الرتبة اهتماماً خاصاً منا وهما:

- إذا كانت  $\alpha = 1$  و  $\lambda < 1$  فإن المتتالية متقاربة خطياً.
  - إذا كانت  $\alpha = 2$  فإن المتتالية متقاربة تربيعياً.
- ويقارن المثال الآتي بين الحالتين، بحيث نرى لماذا نحاول إيجاد طرائق تؤدي إلى متتاليات ذات تقارب من الرتبة أعلى.

مثال 1 افترض  $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$  متقاربة خطياً إلى (0) مع

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|p_{n+1}|}{|p_n|} = 0.5$$

وأن  $\{\tilde{p}_n\}_{n=0}^{\infty}$  متقاربة تربيعياً إلى الصفر مع ثابت الخطأ المقارب نفسه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\tilde{p}_{n+1}|}{|\tilde{p}_n|^2} = 0.5$$

ولغرض التبسيط، افترض أن

$$\frac{|\tilde{p}_{n+1}|}{|\tilde{p}_n|^2} \approx 0.5 \quad \text{و} \quad \frac{|p_{n+1}|}{|p_n|} \approx 0.5$$

أما أسلوب التقارب الخطي، فلن هذا يعني

$$|p_n - \alpha| \approx |p_n| \approx 0.5|p_{n-1}| \approx (0.5)^2|p_{n-2}| \approx \dots \approx (0.5)^n|p_0|$$

بحيث يكون لأسلوب التقارب التربيعي

$$\begin{aligned} |\tilde{p}_n - 0| = |\tilde{p}_n| &\approx 0.5|\tilde{p}_{n-1}|^2 \approx (0.5)[0.5|\tilde{p}_{n-2}|^2]^2 = (0.5)^3|\tilde{p}_{n-2}|^4 \\ &\approx (0.5)^3[(0.5)|\tilde{p}_{n-3}|^2]^4 = (0.5)^7|\tilde{p}_{n-3}|^8 \\ &\approx \dots \approx (0.5)^{2^n-1}|\tilde{p}_0|^{2^n} \end{aligned}$$

ويوضح جدول (7.2) السرعة النسبية لتقارب المتتالية إلى الصفر عندما  $|p_0| = |\tilde{p}_0| = 1$ .

متتالية التقارب التربيعي sequence $\{\tilde{p}_n\}_{n=0}^{\infty}$ $(0.5)^{2^n-1}$	متتالية التقارب الخطي sequence $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ $(0.5)^n$	$n$
$5.0000 \times 10^{-1}$	$5.0000 \times 10^{-1}$	1
$1.2500 \times 10^{-1}$	$2.5000 \times 10^{-1}$	2
$7.8125 \times 10^{-3}$	$1.2500 \times 10^{-1}$	3
$3.0518 \times 10^{-5}$	$6.2500 \times 10^{-2}$	4
$4.6566 \times 10^{-10}$	$3.1250 \times 10^{-2}$	5
$1.0842 \times 10^{-19}$	$1.5625 \times 10^{-2}$	6
$5.8775 \times 10^{-39}$	$7.8125 \times 10^{-3}$	7

جدول 7.2

ويقع التقارب التربيعي للمتتالية ضمن  $10^{-38}$  من الصفر بالحد السابع. ونحتاج إلى 126 حداً

على الأقل لضمان هذه الدقة بالنسبة إلى التقارب الخطي للمتتالية.

وتتقارب المتتاليات المتقاربة تربيعياً عموماً بسرعة أكبر من تلك التي تتقارب فقط خطياً.

ليكن  $g \in C[a, b]$  بحيث  $g(x) \in [a, b]$  لكل  $x \in [a, b]$ . وافترض بالإضافة إلى ذلك أن  $g'$

متصلة على  $(a, b)$ ، وأن الثابت الموجب  $k < 1$  موجود بحيث

$$|g'(x)| \leq k \quad \text{لكل } x \in (a, b)$$

فإذا كانت  $g'(p) \neq 0$  فإنه لأي عدد  $p_0$  في  $[a, b]$ ، فإن المتتالية

### مبرهنة 7.2

$$n \geq 1 \quad p_n = g(p_{n-1})$$

تتقارب خطياً فقط إلى نقطة ثابتة ووحيدة  $p$  في  $[a, b]$ .

**البرهان** نحن نعلم من مبرهنة النقطة الثابتة (3.2) من الفصل (2.2) أن المتتالية تتقارب إلى  $p$  بحيث تكون  $g'$  موجودة ضمن  $(a, b)$ ، ويمكننا تطبيق مبرهنة القيمة الوسطى للدالة  $g$  لإثبات أنه ولأي  $n$

$$p_{n+1} - p = g(p_n) - g(p) = g'(\xi_n)(p_n - p)$$

بحيث تقع  $\xi_n$  ما بين  $p_n$  و  $p$ . وحيث إن  $g'$  متصلة على  $(a, b)$ ، يكون لدينا

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g'(\xi_n) = g'(p)$$

عندئذ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|} = |g'(p)| \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n+1} - p}{p_n - p} = \lim_{n \rightarrow \infty} g'(\xi_n) = g'(p)$$

وبناءً على ما تقدم، إذا كانت  $g'(p) \neq 0$  فإن تكرار النقطة الثابتة ينتج تقارباً خطياً مع خطأ مقارب ثابت  $|g'(p)|$ .

وتشير مبرهنة (7.2) إلى أن تقارباً من الرتبة العليا لطرائق النقطة الثابتة يمكن ظهوره فقط عندما  $g'(p) = 0$ . وتوضح التمهيدية الآتية شروطاً إضافية تضمن التقارب التربيعي الذي نريد.

ليكن  $p$  حلاً للصيغة  $x = g(x)$ . افترض أن  $g'(p) = 0$ . وأن  $g''$  حيث  $|g''(x)| < M$  متصلة على فترة مفتوحة  $I$  تحتوي على  $p$ . عندها يوجد عدد  $\delta > 0$ ، بحيث  $p_0 \in [p - \delta, p + \delta]$ ، والمتتالية  $p_n = g(p_{n-1})$  عند  $n \geq 1$  تتقارب تربيعياً على الأقل إلى  $p$ . وعلاوة على ذلك، لقيم  $n$  الكبيرة بقدر كافٍ، تكون

## مبرهنة 8.2

$$|p_{n+1} - p| < \frac{M}{2} |p_n - p|^2$$

**البرهان** اختر  $k$  ضمن  $(0, 1)$  و  $\delta > 0$  بحيث عندما تكون الفترة  $[p - \delta, p + \delta]$  في الفترة  $I$  يكون لدينا  $|g'(x)| \leq k$  و  $g''$  متصلة. وبما أن  $1 > k \geq |g'(x)|$ ، فإن المنطق الذي استخدم في مبرهنة (5.2) من الفصل (3.2) يثبت أن حدود المتتالية  $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$  تكون ضمن  $[p - \delta, p + \delta]$  وتوسيع  $g(x)$  إلى كثيرة حدود تايلور الخطية وإلى  $x \in [p - \delta, p + \delta]$  يعطي

$$g(x) = g(p) + g'(p)(x - p) + \frac{g''(\xi)}{2}(x - p)^2$$

بحيث تقع  $\xi$  ما بين  $x$  و  $p$ . والفرضيتان  $g'(p) = 0$  و  $g(p) = p$  تؤديان إلى حصول

$$g(x) = p + \frac{g''(\xi)}{2}(x - p)^2$$

وعندما  $x = p_n$  خصوصاً فإن

$$p_{n+1} = g(p_n) = p + \frac{g''(\xi_n)}{2}(p_n - p)^2$$

مع وجود  $\xi_n$  ما بين  $p_n$  و  $p$ . وبذلك فإن

$$p_{n+1} - p = \frac{g''(\xi_n)}{2}(p_n - p)^2$$

حيث  $1 < k < |g'(x)|$  على  $[p - \delta, p + \delta]$  وأن الدالة  $g$  تنقل  $[p - \delta, p + \delta]$  إلى نفسها، فإنه بناءً على مبرهنة النقطة الثابتة تتقارب  $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$  إلى  $p$ . لكن  $\xi_n$  ما بين  $p_n$  و  $p$  لكل  $n$ . فإن  $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$  تتقارب أيضاً إلى  $p$ . وإن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|^2} = \frac{|g''(p)|}{2}$$

وهذه التمهيدية تؤدي إلى أن المتتالية  $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$  تتقارب تربيعياً عندما  $g''(p) \neq 0$  وتتقارب من الرتبة أعلى عندما  $g''(p) = 0$ . ولأن  $g''$  متصلة ومحددة حصرياً بـ  $M$  في الفترة  $[p - \delta, p + \delta]$ . وهذا يعني أنه لقيم  $n$  الكبيرة بقدر كافٍ تكون

$$|p_{n+1} - p| < \frac{M}{2}|p_n - p|^2$$

وتعلمنا النظريتان (7.2) و (8.2) أن بحثنا عن تقارب تربيعي بطرائق النقطة الثابتة يجب أن يكون في اتجاه الدوال ذوات المشتقة صفر عند النقطة الثابتة.

إن أسهل طريقة لإنشاء مسألة النقطة الثابتة متوافقة مع مسألة إيجاد الجذر  $f(x) = 0$  هي بطرح مضاعف  $f(x)$  من  $x$ . دعنا عندئذ نفترض أن

$$p_n = g(p_{n-1}) \quad \text{لكل } n \geq 1$$

للدالة  $g$  وفقاً للصيغة

$$g(x) = x - \phi(x)f(x)$$

حيث إن دالة  $\phi$  قابل للاشتقاق وقد اختير لاحقاً.

ومن أجل تقارب تربيعي وفق أسلوب تكرار اشتقاقه من  $g$ ، فإننا نحتاج إلى  $g'(p) = 0$  وحيث إن

$$g'(x) = 1 - \phi'(x)f(x) - f'(x)\phi(x)$$

يكون لدينا

$$g'(p) = 1 - \phi(p)f(p) - f'(p)\phi(p) = 1 - \phi'(p) \cdot 0 - f'(p)\phi(p) = 1 - f'(p)\phi(p)$$

وأن  $g'(p) = 0$  فقط وفي أثناء  $\phi(p) = 1/f'(p)$  فقط.

وإذا جعلنا  $\phi(x) = 1/f'(x)$  فإننا نضمن أن  $\phi(p) = 1/f'(p)$ ، ومن ثم نحصل على عملية

$$p_n = g(p_{n-1}) = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}$$

التقارب التربيعية

هذه هي طريقة نيوتن.

من خلال ما سبق، جعلنا القيد  $f'(p) \neq 0$ ، حيث  $P$  هو الحل لـ  $f(x) = 0$ . ومن تعريف طريقة نيوتن. من الواضح أن ثمة صعوبات قد تظهر فيما لو ذهبنا  $f'(p_n)$  إلى الصفر آنياً مع  $f(p_n)$ . إن طريقة نيوتن وطريقة القاطع خصوصاً تؤديان عمومًا إلى مشاكل إذا كان  $f'(p) = 0$  في أثناء  $f(p) = 0$ . ولتفحص هذه الصعوبات بتفصيل أكثر، نقدم التعريف الآتي:

## تعريف 92

لنفترض أن  $P$  حل للدالة  $f(x) = 0$ . نقول: إن  $P$  صفرًا (أو جذرًا) مضاعفًا  $m$  من المرات للدالة  $f$  حيث  $x \neq p$ ، ويمكننا كتابة  $f(x) = (x - p)^m q(x)$ ، حيث  $\lim_{x \rightarrow p} q(x) \neq 0$ . وخلاصة القول، تمثل  $q(x)$  ذلك الجزء من  $f(x)$  الذي لا يسهم في صفرية  $f$ . تعطي التمهيدية الآتية سبلاً لتحديد أصفار بسيطة لدالة ما ولها مضروب الواحد.

## مبرهنة 10.2

$f \in C^1[a, b]$  لها صفر بسيط عند  $P$  في  $(a, b)$  إذا وفقط إذا كان

$$f'(p) \neq 0 \text{ لكن } f(p) = 0$$

## البرهان

إذا كان لـ  $f$  صفر بسيط عند  $P$  ضمن  $(a, b)$ ، فإن  $f(p) = 0$  و  $f(x) = (x - p)q(x)$  بحيث  $\lim_{x \rightarrow p} q(x) \neq 0$ . حيث  $f \in C^1[a, b]$ .

$$f'(p) = \lim_{x \rightarrow p} f'(x) = \lim_{x \rightarrow p} [q(x) + (x - p)q'(x)] = \lim_{x \rightarrow p} q(x) \neq 0$$

وعلى عكس ذلك. إذا كان  $f(p) = 0$  لكن  $f'(p) \neq 0$  فإن  $f$  تمتد في كثيرة حدود تايلور الصفرية حول  $P$ .

عندئذ تكون  $f(x) = f(p) + f'(\xi(x))(x - p) = (x - p)f'(\xi(x))$  حيث  $\xi(x)$  ما بين  $x$  و  $P$ . ولكون  $f \in C^1[a, b]$ ، فإن

$$\lim_{x \rightarrow p} f'(\xi(x)) = f' \left( \lim_{x \rightarrow p} \xi(x) \right) = f'(p) \neq 0$$

وندعُ  $\xi = f' \circ q$  تعطينا  $f(x) = (x - p)q(x)$  حيث  $\lim_{x \rightarrow p} q(x) \neq 0$ . وعلى هذا النحو فإن لـ  $f$  صفرًا بسيطًا عند  $P$ .

وقد أخذ التعميم الآتي للمبرهنة (10.2) في الحسبان في التمرين (12).

بالنسبة إلى كثيرات الحدود فإن  $f$  عبارة عن صفر المضاعف  $m$  إلى  $f$  إذا كان  $f(x) = (x - p)^m q(x)$  حيث إن  $q(x)$  عبارة عن كثيرة الحدود مع  $q(p) \neq 0$ .

## مبرهنة 11.2

للدالة  $f \in C^m[a, b]$  صفر مضاعف  $m$  مرة عند  $P$  في الفترة  $(a, b)$  إذا وفقط إذا كان

$$f^{(m)}(p) \neq 0 \text{ لكن } 0 = f(p) = f'(p) = f''(p) = \dots = f^{(m-1)}(p)$$

تفيد تمهيدية المبرهنة (10.2) بأن الفترة حول  $P$  موجودة، حيث تتقارب طريقة نيوتن تربيعياً إلى  $P$  ولأي تقريب ابتدائي  $p_0 = P$ . حيث  $P$  هي صفر بسيط. ويوضح المثال الآتي أن التقارب التربيعي قد لا يظهر إذا لم يكن الصفر بسيطاً.

## مثال 4

افترض  $f(x) = e^x - x - 1$ . وكون  $f(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$  و  $f'(0) = e^0 - 1 = 0$ . لكن  $f''(0) = e^0 = 1$ ، فإن لـ  $f$  صفرًا للمضروب 2 عند  $p = 0$ . في الحقيقة يمكن التعبير عن  $f(x)$

بالصيغة

$$f(x) = (x - 0)^2 \frac{e^x - x - 1}{x^2}$$

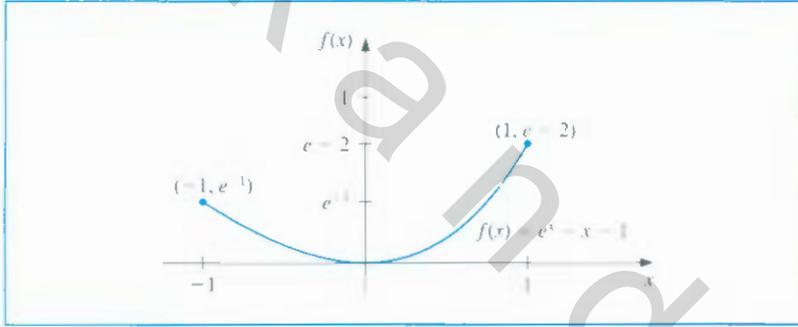
حيث نجد عن طريق "قاعدة لوبيتال" أن

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2} \neq 0$$

الحدود الناتجة بطريقة نيوتن المطبقة على  $f$  مع  $p_0 = 1$  مبينة في الجدول (8.2). وتتقارب المتتالية بوضوح تام إلى  $(0)$ . ولكن ليس تربيعياً. ويبين شكل (11.2) رسماً لـ  $f$ .

جدول 8.2

$p_n$	$n$	$p_n$	$n$
$2.7750 \times 10^{-3}$	9	1.0	0
$1.3881 \times 10^{-3}$	10	0.58198	1
$6.9411 \times 10^{-4}$	11	0.31906	2
$3.4703 \times 10^{-4}$	12	0.16800	3
$1.7416 \times 10^{-4}$	13	0.08635	4
$8.8041 \times 10^{-5}$	14	0.04380	5
$4.2610 \times 10^{-5}$	15	0.02206	6
$1.9142 \times 10^{-6}$	16	0.01107	7
		0.005545	8



شكل 11.2

توجد طريقة واحدة تتناول مسألة الجذور المضاعفة. وهي أن نعرف

$$\mu(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

وإذا كان  $p$  هو الصفر للدالة  $f$  مضاعفاً  $m$  مرة وكانت  $f(x) = (x - p)^m q(x)$  فإن

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \frac{(x - p)^m q(x)}{m(x - p)^{m-1} q(x) + (x - p)^m q'(x)} \\ &= (x - p) \frac{q(x)}{m q(x) + (x - p) q'(x)} \end{aligned}$$

ولها صفر عند  $p$ . على أي حال  $q(p) \neq 0$  وعندئذ

$$\frac{q(p)}{mq(p) + (p-p)q'(p)} = \frac{1}{m} \neq 0$$

و  $P$  هو صفر بسيط لـ  $h$ . ويمكن إذن تطبيق طريقة نيوتن على  $h$  لتعطينا

$$g(x) = x - \frac{\mu(x)}{\mu'(x)} = x - \frac{f(x)/f'(x)}{\{[f'(x)]^2 - [f(x)][f''(x)]/[f'(x)]^2\}}$$

أو

$$g(x) = x - \frac{f(x)f'(x)}{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)} \quad (11.2)$$

### جدول 9.2

$p_n$	$n$
$-2.3421061 \times 10^{-1}$	1
$-8.4582783 \times 10^{-3}$	2
$-1.1889524 \times 10^{-5}$	3
$-6.863823 \times 10^{-6}$	4
$-2.8085217 \times 10^{-7}$	5

إذا كانت  $g$  تملك الشروط المطلوبة للاستمرار، فإن تكرار الدالة على  $g$  ستكون متقاربة بغض النظر عن مضروب الصفر لـ  $f$ . عيب هذه الطريقة الوحيد من الناحية البرهنة هو الحسابات الإضافية لـ  $f''(x)$  مع عمل مختبري أكثر لحساب التكرارات. وعلى أي حال يمكن عند التطبيق أن تسبب الجذور المتعددة مشاكل جديدة في جدولة التكرار؛ لكون مقام الصيغة (11.2) يتضمن الفرق بين عددين كل منهما قريب من الصفر.

### مثال 3

يبين جدول (9.2) تقريبات مضاعف الصفر عند  $x = 0$  إلى  $f(x) = e^x - x - 1$  باستخدام  $p_n = g(p_{n-1})$  لكل  $n \geq 1$ ، حيث  $g$  معطى في الصيغة (11.2). وسجلت النتائج باستخدام حاسبة ذات عشر منازل من الدقة. وقد اختير التقريب الابتدائي بموجب  $p_0 = 1$  ليكون بالإمكان مقارنة المدخلات بتلك التي في جدول (8.2)، والذي لا يبيئه جدول (9.2) هو عدم ظهور تحسن للتقريب الصفري  $-2.8085217 \times 10^{-7}$  خلال الحسابات المتتالية باستخدام هذه الحاسبة؛ لكون البسط والمقام كليهما يقترب إلى الصفر.

### مثال 4

قمنا في مثال (3) من الفصل (2.2) بحل  $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$  بإيجاد الصفر  $p = 1.36523001$ . ولقارنة التقارب لصفر الصيغة المضاعف مرة واحدة في واحد بطريقة نيوتن، وطريقة نيوتن المختصرة المبينة في الصيغة (11.2)؛ افترض

$$p_n = p_{n-1} - \frac{p_{n-1}^3 + 4p_{n-1}^2 - 10}{3p_{n-1}^2 + 8p_{n-1}} \quad (i)$$

من طريقة نيوتن ومن كون  $p_n = g(p_{n-1})$ ، حيث الدالة  $g$  على صورة الصيغة (11.2). نحصل على:

$$p_n = p_{n-1} - \frac{(p_{n-1}^3 + 4p_{n-1}^2 - 10)(3p_{n-1}^2 + 8p_{n-1})}{(3p_{n-1}^2 + 8p_{n-1})^2 - (p_{n-1}^3 + 4p_{n-1}^2 - 10)(6p_{n-1} + 8)} \quad (ii)$$

خذ  $p_0 = 1.5$ . تكون التكرارات الثلاثة الأولى لـ (i) و (ii) مبينة في جدول (10.2). وتوضح النتائج التقارب المتسارع لكلا الطريقتين في حالة الصفر البسيط.

### جدول 10.2

(ii)	(i)	
1.35689898	1.37333333	$p_1$
1.36519585	1.36526201	$p_2$
1.36523001	1.36523001	$p_3$

EXERCISE SET

مجموعة التمارين 4.2

1. استخدم طريقة نيوتن لإيجاد حلول دقيقة ضمن  $10^{-5}$  للمسائل الآتية:

- أ.  $x^2 - 2xe^{-x} + e^{-2x} = 0$  لكل  $0 \leq x \leq 1$   
 ب.  $\cos(x + \sqrt{2}) + x(x/2 + \sqrt{2}) = 0$  لكل  $-2 \leq x \leq -1$   
 ج.  $x^3 - 3x^2(2^{-x}) + 3x(4^{-x}) - 8^{-x} = 0$  لكل  $0 \leq x \leq 1$   
 د.  $e^{6x} + 3(\ln 2)^2 e^{2x} - (\ln 8)e^{4x} - (\ln 2)^3 = 0$  لكل  $-1 \leq x \leq 0$

2. استخدم طريقة نيوتن لإيجاد حلول دقيقة ضمن  $10^{-5}$  للمسائل الآتية:

- أ.  $1 - 4x \cos x + 2x^2 + \cos 2x = 0$  لكل  $0 \leq x \leq 1$   
 ب.  $x^2 + 6x^5 + 9x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 1 = 0$  لكل  $-3 \leq x \leq -2$   
 ج.  $\sin 3x + 3e^{-2x} \sin x - 3e^{-x} \sin 2x - e^{-3x} = 0$  لكل  $3 \leq x \leq 4$   
 د.  $e^{3x} - 27x^6 + 27x^4 e^x - 9x^2 e^{2x} = 0$  لكل  $3 \leq x \leq 5$

3. كرر التمرين (1) مستخدماً طريقة نيوتن-رافسون المختصرة والموضحة في الصيغة (11.2). هل يوجد ثمة تحسن في سرعة ما كان عليه التمرين (1) أو دقته؟  
 4. كرر التمرين (2) مستخدماً طريقة نيوتن-رافسون المختصرة والموضحة في الصيغة (11.2). هل يوجد ثمة تحسن في سرعة ما كان عليه التمرين (2) أو دقته؟  
 5. استخدم طريقة نيوتن وطريقة نيوتن-رافسون المختصرة في الصيغة (11.2) لإيجاد حل دقيق ضمن  $10^{-5}$  للمسألة الآتية:

$$e^{6x} + 1.441e^{2x} - 2.079e^{4x} - 0.3330 = 0 \quad \text{لكل } -1 \leq x \leq 0$$

هذا شبيه بالمسألة 1 (د) مع استبدال المعاملات بتقريباتها ذات المنازل الأربع. قارن بين النتائج في 1 (د) و 2 (د).

6. أثبت أن المتتاليات الآتية تتقارب خطياً إلى  $p = 0$ . كم كانت  $n$  كبيرة قب أن يكون لصيا  $|p_n - p| \leq 5 \times 10^{-2}$   
 أ.  $p_n = \frac{1}{n}$ ,  $n \geq 1$   
 ب.  $p_n = \frac{1}{n^2}$ ,  $n \geq 1$

7. أثبت أنه لأي عدد صحيح موجب  $k$ , فإن المتتالية المعرفة وفق  $p_n = 1/n^k$  تتقارب خطياً إلى  $p = 0$ .  
 ب. لأي زوج من الأعداد الصحيحة  $k$  و  $m$ , حدّد العدد  $N$  بحيث  $1/N^k < 10^{-m}$ .  
 8. أثبت أن المتتالية  $p_n = 10^{-2n}$  تتقارب تربيعياً إلى الصفر.  
 ب. أثبت أن المتتالية  $p_n = 10^{-n^k}$  لا تتقارب تربيعياً إلى الصفر، بغض النظر عن مقدار الأس  $k > 1$ .  
 9. أ. كَوّن متتالية تتقارب إلى الصفر من الرتبة 3.  
 ب. افترض أن  $\alpha > 1$ . كَوّن متتالية تتقارب إلى الصفر من الرتبة  $\alpha$ .  
 10. افترض أن  $p$  صفر للدالة  $f$  مضاعفاً  $m$  مرة. حيث إن  $f^{(m)}$  متصلة على الفترة المفتوحة والمتضمنة لـ  $p$ . أثبت أن طريقة النقطة الثابتة الآتية لها  $g'(p) = 0$ :

$$g(x) = x - \frac{mf(x)}{f'(x)}$$

11. أثبت أن خوارزمية التنصيف (1.2) تعطي متتالية بحد خطأ يتقارب خطياً إلى الصفر.  
 12. افترض أن الدالة  $f$  لها  $m$  من المشتقات المتصلة. عدّل برهان المبرهنة (10.2) لإثبات أن الدالة  $f$  لها صفر مضاعف  $m$  مرة عند  $p$  إذا وفقط إذا كان  $f^{(m)}(p) \neq 0$  لكن  $0 = f(p) = f'(p) = \dots = f^{(m-1)}(p)$

13. إن طريقة التكرار لحل  $f(x) = 0$  معطاة ضمن طريقة النقطة الثابتة  $x = g(x)$ ، حيث

$$n = 1, 2, 3, \dots \quad p_n = g(p_{n-1}) = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})} - \frac{f''(p_{n-1})}{2f'(p_{n-1})} \left[ \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})} \right]^2$$

له  $g'(p) = g''(p) = 0$ . وهذا يعطي عمومًا تقاربًا مكعبًا ( $\alpha = 3$ ). وسّع تحليل المثال (1) لمقارنة التقارب التربيعي بالتقارب التكعيبي.

14. من الممكن إثبات (انظر على سبيل المثال [DaB, pp 228-229]) أنه إذا كانت  $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$  متقاربة وفقًا لطريقة القاطع لـ  $p$  الذي هو حل لـ  $f(x) = 0$ ، فإن الثابت  $C$  يظهر حيث  $|p_{n+1} - p| \approx C|p_n - p|$  عند قيم كبيرة نسبيًا لـ  $n$ . افترض أن  $\{p_n\}$  تتقارب إلى  $P$  من الرتبة  $\alpha$ ، وأثبت أن  $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$ . (إرشاد: هذا يؤدي إلى أن رتبة التقارب لطريقة القاطع هي 1.62 تقريبًا).

## Accelerating Convergence

## 5.2 تسريع التقارب

تشير المبرهنة (7.2) إلى ندرة الوصول إلى حالة مقبولة جدًا في تقارب تربيعي. والآن سنأخذ في الحسبان أسلوبًا يدعى "طريقة أيكن Aitken's  $\Delta^2$  method" التي يمكن استخدامها لتسريع تقارب المتتالية ذات التقارب الخطي بغض النظر عن أصلها وطبيعتها تطبيقها. افترض أن  $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$  متتالية تتقارب خطيًا إلى  $P$ . وللسعي في تكوين متتالية  $\{\hat{p}_n\}_{n=0}^{\infty}$  تتقارب بتسارع أكبر إلى  $P$  مما هي عليه  $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ . دعنا أولاً نفترض أن إشارات

$$p_n - P, p_{n+1} - P \quad \text{و} \quad p_{n+2} - P$$

تتفق مع كون  $n$  كبيرة نسبيًا بأن

$$\frac{p_{n+1} - P}{p_n - P} \approx \frac{p_{n+2} - P}{p_{n+1} - P}$$

وبذلك

$$(p_{n+1} - P)^2 \approx (p_{n+2} - P)(p_n - P)$$

لذا

$$p_{n+1}^2 - 2p_{n+1}P + P^2 \approx p_{n+2}p_n - (p_n + p_{n+2})P + P^2$$

و

$$(p_{n+2} + p_n - 2p_{n+1})P \approx p_{n+2}p_n - p_{n+1}^2$$

وبحل  $p$  نحصل على

$$p \approx \frac{p_{n+2}p_n - p_{n+1}^2}{p_{n+2} - 2p_{n+1} + p_n}$$

وبجمع الحدود  $p_n^2$  و  $2p_n p_{n+1}$  و طرحها في البسط وتجميع الحدود تجميعًا مناسبًا نحصل على

$$\begin{aligned} p &\approx \frac{p_n p_{n+2} - 2p_n p_{n+1} + p_n^2 - p_{n+1}^2 + 2p_n p_{n+1} - p_n^2}{p_{n+2} - 2p_{n+1} + p_n} \\ &= \frac{p_n(p_{n+2} - 2p_{n+1} + p_n) - (p_{n+1}^2 - 2p_n p_{n+1} + p_n^2)}{p_{n+2} - 2p_{n+1} + p_n} = p_n - \frac{(p_{n+1} - p_n)^2}{p_{n+2} - 2p_{n+1} + p_n} \end{aligned}$$

وتستند طريقة أيكن  $\Delta^2$  إلى الافتراض بأن المتتالية  $\{\hat{p}_n\}_{n=0}^{\infty}$  والمعروفة بـ

$$\hat{p}_n = p_n - \frac{(p_{n+1} - p_n)^2}{p_{n+2} - 2p_{n+1} + p_n} \quad (2.12)$$

تتقارب بسرعة أكثر إلى  $P$  مما عليه المتتالية الأصلية  $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ .

المتتالية  $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ . حيث تتقارب  $p_n = \cos(1/n)$  خطياً إلى  $P = 1$ . والحدود قليلة لأوى للمتتاليتين  $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$  و  $\{\hat{p}_n\}_{n=1}^{\infty}$  معطاة في جدول (11.2). وهي حتماً تظهر أن  $\{\hat{p}_n\}_{n=1}^{\infty}$  تتقارب أسرع من  $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$  إلى  $P = 1$ . ويعود أصل رمز  $\Delta$  ملازمة هذا الأسلوب إلى التعريف الآتي.

الفرق التتابعي  $\Delta p_n$  (ويقراً "دلتا  $p_n$ ") للمتتالية  $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$  يعرف بالصيغة

$$\Delta p_n = p_{n+1} - p_n \quad \text{لكل } n \geq 0$$

والقوى الأعلى للمشغل  $\Delta$  تعرف بوجه تكراري بالصيغة

$$\Delta^k p_n = \Delta(\Delta^{k-1} p_n) \quad \text{لكل } k \geq 2$$

يؤدي التعريف إلى

$$\Delta^2 p_n = \Delta(p_{n+1} - p_n) = \Delta p_{n+1} - \Delta p_n = (p_{n+2} - p_{n+1}) - (p_{n+1} - p_n)$$

وعندئذ  $\Delta^2 p_n = p_{n+2} - 2p_{n+1} + p_n$  ويمكن كتابة صيغة  $\hat{p}_n$  المعطاة في الصيغة (2.12) بالصيغة

$$\hat{p}_n = p_n - \frac{(\Delta p_n)^2}{\Delta^2 p_n} \quad \text{لكل } n \geq 0 \quad (13.2)$$

وعند نقطة النقاش هذه حول طريقة أيكن  $\Delta^2$ . نكون قد توصلنا إلى أن المتتالية  $\{\hat{p}_n\}_{n=0}^{\infty}$  تتقارب إلى  $P$  أكثر سرعة من المتتالية الأصلية  $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ . لكننا لم نوضح ما نعنيه بعبارة "أكثر سرعة تقارب". وتوضح البرهنة (2.13) هذا الأسلوب وتبرره. وبرهان هذه البرهنة متروك في التمرين (16).

افتراض أن  $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$  متتالية تتقارب خطياً إلى  $P$ ، وأن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n+1} - P}{p_n - P} < 1$$

عندئذ فالمتتالية  $\{\hat{p}_n\}_{n=0}^{\infty}$  تتقارب نحو  $P$  أسرع من  $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$  على النحو

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\hat{p}_n - P}{p_n - P} = 0$$

وبتطبيق اختصار طريقة أيكن  $\Delta^2$  على متتالية متقاربة خطياً وناتجة عن تكرار النقطة لثلاثة يمكننا تسريع التقارب في الإطار التربيعي. هذا الأسلوب معروف بطريقة سيفسن، ويختلف نوعاً ما عن تطبيق طريقة أيكن  $\Delta^2$  مباشرة نحو التقارب الخطي لمتتالية التكرار بالنقطة الثابتة. وتبني طريقة أيكن  $\Delta^2$  الحدود وفقاً للترتيب

## مثال 1

## تعريف 12.2

### جدول 11.2

$\hat{p}_n$	$p_n$	$n$
0.96178	0.54030	1
0.98213	0.87758	2
0.98979	0.94496	3
0.99342	0.96891	4
0.99541	0.98007	5
	0.98614	6
	0.98981	7

## مبرهنة 13.2

استخدم ألكندر آيتكن

(1895-1967)

Alexander Aitken

هذا الأسلوب عام 1926 لتسريع معدل التقارب لسلسلة في ورقة بحثية حول المعادلات الجبرية (AI) هذه العملية شبيهة بالتي استخدمت قبل ذلك كثيراً من قبل الرياضي الياباني تاكازو سيكي (1642-1708) كوا

Takakazo Seki Kowa

$p_0, p_1 = g(p_0), p_2 = g(p_1), \hat{p}_0 = \{\Delta^2\}(p_0), p_3 = g(p_2), \hat{p}_1 = \{\Delta^2\}(p_1), \dots$   
 حيث تشير  $\{\Delta^2\}$  إلى استخدام الصيغة (13.2). وتبني طريقة ستيفنسن الحدود الأربعة الأولى  $\hat{p}_0$  و  $p_0, p_1, p_2$  نفسها. وعلى أي حال فعند هذه الخطوة يفترض أن تكون  $\hat{p}_0$  أفضل تقريب إلى  $P$  من  $p_2$ ، وتطبيق تكرار النقطة الثابتة لـ  $\hat{p}_0$  بدلاً من  $p_2$ . وباستخدام هذه الملاحظة تكون المتتالية الناتجة

$$p_0^{(0)}, p_1^{(0)} = g(p_0^{(0)}), p_2^{(0)} = g(p_1^{(0)}), p_0^{(1)} = \{\Delta^2\}(p_0^{(0)}), p_1^{(1)} = g(p_0^{(1)}), \dots$$

وينتج كل ثالث حد بالصيغة (13.2)، حيث تستخدم في الحدود الأخرى تكرار النقطة الثابتة للحد الذي يسبقه. والعملية موضحة ضمن الخوارزمية (6.2).

### خوارزمية ستيفنسن Steffensen's Algorithm

لإيجاد حل لـ  $p = g(p)$  مع تقريب ابتدائي  $p_0$ :

المدخلات: تقريب ابتدائي  $p_0$ . الحدود المسموح بها  $TOL$ ، أكبر عدد لمرات التكرار  $N_0$ .  
 المخرجات: حل تقريبي  $P$  أو عبارة "فشل".

الخطوة	المضمون
1	ضع $i = 1$
2	ما دام $i \leq N_0$ فننفذ الخطوات 3 - 6 الآتية.
3	ضع $p_1 = g(p_0)$ (احسب $p_1^{(i-1)}$ ) $p_2 = g(p_1)$ (احسب $p_2^{(i-1)}$ ) $P = p_0 - (p_1 - p_0)^2 / (p_2 - 2p_1 + p_0)$ (احسب $p_0^{(i)}$ )
4	إذا كان $ p - p_0  < TOL$ المخرج (P) (استكملت العملية بنجاح). توقف.
5	ضع $i = i + 1$
6	ضع $p_0 = P$ (تحديث $p_0$ )
7	المخرجات: (فشلت الطريقة بعد $N_0$ من التكرارات و $N_0 = \infty$ ) (لم تستكمل العملية بنجاح). توقف.

لاحظ أن  $\Delta^2 p_n$  قد تكون صفراً، التي ستظهر صفراً في مقام التكرار التالية، وهذا إن حدث نحدد المتتالية ونختار  $p_2^{(i-1)}$  بمثابة الإجابة التقريبية.

لحل  $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$  مستخدماً طريقة ستيفنسن، ضع  $x^3 + 4x^2 = 10$ ، اقسم على  $x + 4$  وأعط حللاً لـ  $x$ . تنتج هذه العملية طريقة النقطة الثابتة

$$g(x) = \left( \frac{10}{x+4} \right)^{1/2}$$

المستخدمة في المثال 3 (د) من الفصل (2.2).

كتب جوهان فريدريك ستيفنسن  
 (1873-1961)

Johan Fredrik Steffensen

كتاب عمقاً عام 1927 بعنوان الاستيفاء  
 الداخلي.



مثال 2

يعطي أسلوب ستيفنسن مع  $p_0 = 1.5$  القيم في جدول (12.2). وبتكرار نفسها لطريقة نيوتن تقريباً. (انظر مثال 4 من الفصل 4.2).

$k$	$p_0^{(k)}$	$p_1^{(k)}$	$p_2^{(k)}$
0	1.5	1.348399725	1.367376372
1	1.365265224	1.365225534	1.365230583
2	1.365230013		

جدول 12.2

يظهر من المثال (2) أن طريقة ستيفنسن تعطي تقارباً تريبعياً دون تقييم المشتقة. وقد أوضحت المبرهنة (14.2) هذه الحالة. ويمكن إيجاد برهان هذه المبرهنة في [He2, pp. 90–92] أو [IK, pp. 103–107].

افترض أن  $x = g(x)$  لها حل  $p$  حيث  $g'(p) \neq 1$ . إذا وجد  $\delta > 0$  حيث  $p \in \mathcal{C}^3[p - \delta, p + \delta]$  فإن طريقة ستيفنسن تعطي تقارباً تريبعياً لأي  $p_0 \in [p - \delta, p + \delta]$ .

مبرهنة 14.2

## EXERCISE SET

## مجموعة التمارين 5.2

- المتتاليات الآتية متقاربة خطياً. وُلد الحدود الخمسة الأولى للمتتالية  $\{p_n\}$  مستخدماً طريقة أيزنك  $\Delta^2$ :
  - $p_0 = 0.5, p_n = (2 - e^{pn-1} + p_{n-1}^2)/3, n \geq 1$
  - $p_0 = 0.75, p_n = (e^{pn-1}/3)^{1/2}, n \geq 1$
  - $p_0 = 0.5, p_n = 3^{-n-1}, n \geq 1$
  - $p_0 = 0.5, p_n = \cos p_{n-1}, n \geq 1$
- افترض الدالة  $f(x) = e^{6x} + 3(\ln 2)^2 e^{2x} - (\ln 8)e^{4x} - (\ln 2)^3$ . استخدم طريقة نيوتن مع  $p_0 = 0$  لتقريب صفر الدالة  $f$  وُلد حدوداً لغاية  $|p_{n+1} - p_n| < 0.0002$ . كون متتالية أيزنك  $\Delta^2$  وهي  $\{p_n\}$ . هل تحسن التقارب؟
- ليكن  $g(x) = \cos(x - 1)$  و  $p_0^{(0)} = \frac{\pi}{2}$ . استخدم طريقة ستيفنسن لإيجاد  $p_0^{(1)}$ .
- ليكن  $g(x) = 1 + (\sin x)^2$  و  $p_0^{(0)} = 1$ . استخدم طريقة ستيفنسن لإيجاد  $p_0^{(1)}$  و  $p_0^{(2)}$ .
- طبقت طريقة ستيفنسن على الدالة  $g(x)$  باستخدام  $p_0^{(0)} = 1$  و  $p_2^{(0)} = 3$  لإيجاد  $p_0^{(1)}$  فما  $p_0^{(0)}$ ؟
- طبقت طريقة ستيفنسن على الدالة  $g(x)$  باستخدام  $p_0^{(0)} = 1$  و  $p_1^{(0)} = \sqrt{2}$  لإيجاد  $p_0^{(1)}$  فما  $p_2^{(0)}$ ؟
- استخدم طريقة ستيفنسن لإيجاد - ضمن دقة  $10^{-4}$  - جذر  $x^3 - x - 1 = 0$  ضمن  $[1, 2]$ ، وقارن هذا بنتائج التمرين (6) من الفصل (2.2).
- استخدم طريقة ستيفنسن لإيجاد - ضمن دقة  $10^{-4}$  - جذر  $x - 2^{-x} = 0$  ضمن  $[0, 1]$ ، وقارن هذا بنتائج التمرين (8) من الفصل (2.2).
- استخدم طريقة ستيفنسن مع  $p_0 = 2$  لحساب تقريب إلى  $\sqrt{3}$  ضمن دقة  $10^{-4}$ . قارن هذه التمهيديّة بنتائج التمرين (9) من الفصل (2.2) ونتائج التمرين (12) من الفصل (1.2).
- استخدم طريقة ستيفنسن مع  $p_0 = 3$  لحساب تقريب إلى  $\sqrt[3]{25}$  ضمن دقة  $10^{-4}$ . قارن هذه التمهيديّة بنتائج التمرين (10) من الفصل (2.2) ونتائج التمرين (13) من الفصل (1.2).

11. استخدم طريقة ستيفنسن لتقريب حلول الصيغ الآتية ضمن  $10^{-5}$ :
- أ.  $x = (2 - e^x + x^2)/3$  حيث الدالة  $g$  دالة التمرين 11(أ) من الفصل (2.2).
- ب.  $x = 0.5(\sin x + \cos x)$  حيث الدالة  $g$  دالة التمرين 11(ب) من الفصل (2.2).
- ج.  $x = (e^x/3)^{1/2}$  حيث الدالة  $g$  دالة التمرين 11(ج) من الفصل (2.2).
- د.  $x = 5^{-x}$  حيث الدالة  $g$  دالة التمرين 11(د) من الفصل (2.2).
12. استخدم طريقة ستيفنسن لتقريب حلول الصيغ الآتية ضمن  $10^{-5}$ :
- أ.  $2 + \sin x - x = 0$  حيث الدالة  $g$  دالة التمرين 12(أ) من الفصل (2.2).
- ب.  $x^3 - 2x - 5 = 0$  حيث الدالة  $g$  دالة التمرين 12(ب) من الفصل (2.2).
- ج.  $3x^2 - e^x = 0$  حيث الدالة  $g$  دالة التمرين 12(ج) من الفصل (2.2).
- د.  $x - \cos x = 0$  حيث الدالة  $g$  دالة التمرين 12(د) من الفصل (2.2).
13. تتقارب المتتاليات الآتية إلى الصفر. استخدم طريقة أيكن  $\Delta^2$  لتوليد  $\{\hat{p}_n\}$  إلى حين ظهور  $|\hat{p}_n| \leq 5 \times 10^{-2}$ :
- أ.  $p_n = \frac{1}{n}, n \geq 1$  ب.  $p_n = \frac{1}{n^2}, n \geq 1$
14. توصف المتتالية  $\{p_n\}$  بأنها متقاربة بأقصى خطية إلى  $p$  إذا كان
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|} = 0$$
- أ. أثبت أنه إذا كان  $p \rightarrow p_n$  من الرتبة  $\alpha$  و  $\alpha > 1$ ، فإن  $\{p_n\}$  تتقارب بأقصى خطية إلى  $p$ .
- ب. أثبت أن  $p_n = 1/n^n$  تتقارب بأقصى خطية إلى الصفر. لكنها لا تتقارب إلى الصفر من الرتبة  $\alpha$  ولأي  $\alpha > 1$ .
15. افترض أن  $\{p_n\}$  تتقارب بأقصى خطية إلى  $p$ . أثبت أن
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|p_{n+1} - p_n|}{|p_n - p|} = 1$$
16. برهن على صحة البرهنة (13.2) [ملحوظة: ليكن  $\lambda = (p_{n+1} - p)/(p_n - p)$ ، وأثبت أن  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ ، ثم ضع  $(\hat{p}_{n+1} - p)/(p_n - p)$  بدلالة  $[\lambda, \delta_n, \delta_{n+1}]$ .
17. لتكن كثيرة حدود تايلور النونية لـ  $P_n(x)$  ممتدة حول  $x_0 = 0$ :
- أ. حيث  $x$  ثابت، أثبت أن  $\hat{p}_n = P_n(x)$  يحقق فرضيات البرهنة (13.2).
- ب. ليكن  $x = 1$ ، استخدم طريقة أيكن  $\Delta^2$  لتوليد المتتالية  $\hat{p}_8, \hat{p}_7, \dots, \hat{p}_0$ .
- ج. هل طريقة أيكن تُعجل التقارب في هذه الحالة؟

## 6.2 أصفار كثيرات الحدود وطريقة مولر Zeros of Polynomials and Muller's Method

الشكل العام لكثيرة الحدود من الرتبة  $n$  تكون على الصورة

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

حيث تسمى  $a_i$ 's معاملات  $p$  وهي ثوابت، وإن  $a_n \neq 0$ . والدالة الصفرية  $P(x) = 0$  لكل  $x$  هي كثيرة حدود درجتها غير محددة.

كارول-غريديك جاوس

(1777-1855)

Carl Friedrich Gauss

أحد عظم الرياضيين في كل الأزمنة  
قد برهن هذه النتيجة ضمن أطروحته  
للدكتوراة، ونشرها عام 1799.

مبرهنة 15.2 المبرهنة الرئيسية للجبر Fundamental Theorem of Algebra

إذا كانت  $P(x)$  كثيرة حدود رتبته  $n \geq 1$ ، ومعاملاتها أعداد حقيقية أو مركبة، فيوجد للـ  $P(x) = 0$  جذر (قد يكون مركباً) واحد على الأقل.

مع أن المبرهنة (15.2) رئيسة لأي دراسة حول دوال ابتدائية، فإن البرهان المعتاد يتطلب أساليب دراسة مبرهنة الدالة المركب. ونحيل القارئ إلى [SaS, p. 155]؛ بهدف تطوير نظم المواضيع المطلوب إثباتها.

ونعرض تمهيدية مهمة للمبرهنة (15.2) كما يلي:

إذا كانت  $P(x)$  كثيرة حدود من الرتبة  $n \geq 1$  مع معاملات أعداد حقيقية أو مركبة، عندئذ يوجد ثوابت وحيدة  $x_1, x_2, \dots, x_k$  قد تكون مركبة، وأعداد صحيحة موجبة وحيدة  $m_1, m_2, \dots, m_k$  تحقق  $\sum_{i=1}^k m_i = n$  و

$$P(x) = a_n(x - x_1)^{m_1}(x - x_2)^{m_2} \dots (x - x_k)^{m_k}$$

تنص تمهيدية (16.2) على أن مجموعة الأصفار لكثيرة الحدود تكون وحيدة، وأنه إذ عدّ كل صفر  $x_i$  لعدد من المرات قدر مضاعفه  $m_i$ ، فإن كثيرة حدود من الرتبة  $n$  لها  $n$  من الأصفار تماماً. تستخدم التمهيدية الآتية لمبرهنة الجبر الرئيسية غالباً في هذا الباب وفي الأبواب الأخيرة.

لتكن  $P(x)$  و  $Q(x)$  كثيرتي حدود كل منهما من الرتبة  $n$  على الأكثر. إذا كانت  $x_1, x_2, \dots, x_k$  حيث  $k > n$ ، أعداداً مختلفة حيث  $P(x_i) = Q(x_i)$  لـ  $i = 1, 2, \dots, k$ ، فإن  $P(x) = Q(x)$  لقيم  $x$  جميعها.

ولاستخدام طريقة نيوتن في تحديد تقريب لأصفار كثيرة الحدود  $P(x)$ ؛ فإننا نحتاج إلى تقييم  $P(x)$  و  $P'(x)$  عند قيم محددة. وحيث إن  $P(x)$  و  $P'(x)$  كليهما كثيرتا حدود، فإن كفاءة الحسابات تتطلب كون تقييم هذه الدوال قد ورد بأسلوب التداخل الذي تناولناه في الفصل (1.2). تتعامل طريقة هورنر Horner's Method مع أسلوب التداخل هذا، وهي تتطلب  $n$  من الضرب فقط و  $n$  من الجمع لتقييم كثيرة حدود غير منهجية من الرتبة  $n$  تمهيدية لذلك.

تمهيدية 18.2 طريقة هورنر Horner's Method

لتكن

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

إذا كان  $b_n = a_n$  وكان

$$b_k = a_k + b_{k+1} x_0 \quad \text{لكل } k = n-1, n-2, \dots, 1, 0$$

فإن  $b_0 = P(x_0)$ . وبالإضافة إلى ذلك، إذا كان

$$Q(x) = b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + \dots + b_2 x + b_1$$

فإن

$$P(x) = (x - x_0) Q(x) + b_0$$

مبرهنة 15.2

تمهيدية 16.2

تمهيدية 17.2

كان وليام هورنر William Horner (1786-1837) طفلاً عبقرياً، وقد أصبح رئيساً لمدرسة في بريستول في سن 18. طريقة هورنر لحل معادلات جبرية قد نُشرت عام 1819 في philosophical Transactions في الجمعية الملكية

تمهيدية 18.2

كان باولو روفيني Paolo Ruffini (1765-1822) قد أوضح طريقة مشابهة جعلته يفوز بميدالية ذهبية من الجمعية الرياضية الإيطالية للعلوم لم يكن روفيني ولا هورنر أول من اكتشف هذه الطريقة. وقد كانت في الصين قبل ذلك بنحو 500 سنة على الأقل.

البرهان من تعريف  $Q(x)$ 

$$\begin{aligned}
(x - x_0)Q(x) + b_0 &= (x - x_0)(b_n x^{n-1} + \dots + b_2 x + b_1) + b_0 \\
&= (b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x) \\
&\quad - (b_n x_0 x^{n-1} + \dots + b_2 x_0 x + b_1 x_0) + b_0 \\
&= b_n x^n + (b_{n-1} - b_n x_0) x^{n-1} + \dots + (b_1 - b_2 x_0) x + (b_0 - b_1 x_0)
\end{aligned}$$

وبافتراض  $b_k - b_{k+1} x_0 = a_k$  و  $b_n = a_n$  يكون

$$b_0 = P(x_0) \text{ و } (x - x_0)Q(x) + b_0 = P(x)$$

استخدم طريقة هورنر لتقييم  $P(x) = 2x^4 - 3x^2 + 3x - 4$  at  $x_0 = -2$

حينما نستخدم حاسبة يدوية في طريقة هورنر، ننشئ -أولاً- جدولاً يبين اسم التجزئة التشبيهية الذي يُعتمد غالباً. أما هذه المسألة، فيكون الجدول كالآتي:

	المعامل $x^4$	المعامل $x^3$	المعامل $x^2$	المعامل $x$	الحد الثابت
$x_0 = -2$	$a_4 = 2$	$a_3 = 0$	$a_2 = -3$	$a_1 = 3$	$a_0 = -4$
		$b_4 x_0 = -4$	$b_3 x_0 = 8$	$b_2 x_0 = -10$	$b_1 x_0 = 14$
	$b_4 = 2$	$b_3 = -4$	$b_2 = 5$	$b_1 = -7$	$b_0 = 10$

بناءً عليه

$$P(x) = (x + 2)(2x^3 - 4x^2 + 5x - 7) + 10$$

وميزة إضافية لاستخدام أسلوب هورنر (أو التجزئة التشبيهية) هي كون

$$P(x) = (x - x_0)Q(x) + b_0$$

حيث إن

$$Q(x) = b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + \dots + b_2 x + b_1$$

قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى  $x$  التي تعطي

$$P'(x_0) = Q(x_0) \text{ و } P'(x) = Q(x) + (x - x_0)Q'(x) \quad (14.2)$$

وعند استخدام طريقة (نيوتن-رافسون) لإيجاد صفر التقريب لكثيرة الحدود، فإنه يمكن تقييم  $P(x)$  و  $P'(x)$  بالأسلوب نفسه.

## مثال 2 أوجد تقريباً لأحد أصفار

$$P(x) = 2x^4 - 3x^2 + 3x - 4$$

مستخدماً طريقة نيوتن والتجزئة التشبيهية لتقييم  $P(x_n)$  و  $P'(x_n)$  لكل تكرار  $x_n$  عندما تكون  $x_0 = -2$  تقريباً ابتدائياً.

## مثال 1

إن كلمة "مقلد" *"synthetic"* لها جذورها في لغات مختلفة وفي اللغة الإنجليزية الأساسية توحي بأن شيئاً "مزيف" أو "مستبدل" ولكنها في الرياضيات تأخذ مفهوم شيء ما دمج معاً معامل الهندسة المتدا الأَشكال في مجسها بدلاً من كونها أشياء فردية هي سمة في الهندسة التحليلية. في تقسة المقلدة لكثيرات الحدود فإن القى المختلفة للمتغيرات لا تعطي حصياً، بل تبقى مدمجة معاً.

سبق أن وجدنا  $P(-2)$  في المثال (1) من خلال

$$x_0 = -2 \quad \begin{array}{r|rrrrr} 2 & 0 & -3 & 3 & -4 \\ & -4 & 8 & -10 & 14 \\ \hline 2 & -4 & 5 & -7 & 10 & = P(-2) \end{array}$$

وباستخدام المبرهنة (18.2) والصيغة (14.2) نحصل على

$$P'(-2) = Q(-2) \quad \text{و} \quad Q(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 7$$

لذا يمكن إيجاد  $P'(-2)$  من خلال تقييم  $Q(-2)$  بالأسلوب نفسه

$$x_0 = -2 \quad \begin{array}{r|rrrr} 2 & -4 & 5 & -7 \\ & -4 & 16 & -42 \\ \hline 2 & -8 & 21 & -49 & = Q(-2) = P'(-2) \end{array}$$

وإن

$$x_1 = x_0 - \frac{P(x_0)}{P'(x_0)} = x_0 - \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} = -2 - \frac{10}{-49} \approx -1.796$$

ونعيد العملية لإيجاد  $x_2$ :

$$-1.796 \quad \begin{array}{r|rrrrr} 2 & 0 & -3 & 3 & -4 \\ & -3.592 & 6.451 & -6.197 & 5.742 \\ \hline 2 & -3.592 & 3.451 & -3.197 & 1.742 & = P(x_1) \\ & -3.592 & 12.902 & -29.368 & \\ \hline 2 & -7.184 & 16.353 & -32.565 & = Q(x_1) = P'(x_1) \end{array}$$

لذا  $P(-1.796) = 1.742$ ,  $P'(-1.796) = Q(-1.796) = -32.565$

$$x_2 = -1.796 - \frac{1.742}{-32.565} \approx -1.7425$$

وبأسلوب مماثل، نجد أن  $x_3 = -1.73897$ . وإن صفراً حقيقياً لخمس منازل عشرية يعين  $(-1.73896)$ .

لاحظ أن كثرة الحدود  $Q(x)$  تعتمد على التقريب المستخدم والتغير من تكرار لى أخرى. تحسب الخوارزمية (7.2)  $P(x_0)$  و  $P'(x_0)$  باستخدام طريقة هورنر.

### خوارزمية هورنر Horner's Algorithm

لحساب قيم كثيرة الحدود

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = (x - x_0) Q(x) + b_0$$

ومشتقتها عند  $x_0$ :



المدخلات: الرتبة  $n$  والمعامل  $a_0, a_1, \dots, a_n, x_0$ .  
المخرجات:  $y = P(x_0)$ ,  $z = P'(x_0)$ .

الخطوة	المضمون
1	ضع $y = a_n$ (احسب $b_n \downarrow P$ ) $z = a_n$ (احسب $b_{n-1} \downarrow Q$ )
2	لكل $j = n-1, n-2, \dots, 1$ ضع $y = x_0 y + a_j$ (احسب $b_j \downarrow P$ ) $z = x_0 z + y$ (احسب $b_{j-1} \downarrow Q$ )
3	ضع $y = x_0 y + a_0$ (احسب $b_0 \downarrow P$ )
4	المخرجات $(y, z)$ . توقف.



إذا كانت  $N$  تمثل التكرار عدد  $x_N$  بطريقة نيوتن بمثابة صفر التقريب إلى  $P$  فإن  
 $P(x) = (x - x_N)Q(x) + b_0 = (x - x_N)Q(x) + P(x_N) \approx (x - x_N)Q(x)$   
 ومن ثم فإن  $x - x_N$  عبارة عن عامل تقرب إلى  $P(x)$ . ويجعل التقريب إلى  $P$  صفراً، وأن عامل  
 التقريب  $Q_1(x) \equiv Q(x)$  نجد أن

$$P(x) \approx (x - \hat{x}_1)Q_1(x)$$

ونستطيع إيجاد صفر تقرب ثانٍ إلى  $P$  عبر تطبيق طريقة نيوتن على  $Q_1(x)$ . فإذا كانت  $P(x)$   
 كثيرة حدود من الرتبة  $n$  مع  $n$  من الأصفار الحقيقية، فعند تطبيق هذه العملية على نحو متتالي سينتج  
 في النهاية  $(n-2)$  من أصفار التقريب إلى  $P$  وعامل تقرب تربيعي  $Q_{n-2}(x)$ . وعند هذه المرحلة  
 يمكن حل  $Q_{n-2}(x) = 0$  بالصيغة التربيعية لإيجاد آخر صفر تقرب إلى  $P$ . وعلى الرغم من أن هذه  
 الطريقة يمكن استخدامها لإيجاد أصفار التقريب جميعها، فإنها تعتمد على تكرار استخدام التقريبات،  
 ومن ثم يمكن أن تؤدي إلى نتائج غير دقيقة.

تسمى العملية التي شرحت تَوَّان الانكماش. ومن صعوبات تحقق الدقة عبر استخدام الانكماش أنه  
 عند إيجادنا لأصفار التقريب إلى  $P(x)$ . فإن طريقة نيوتن تطبق على كثيرة الحدود المختزلة  $Q_k(x)$ ،  
 ومفادها أن كثيرة الحدود تمتلك صفة كون

$$P(x) \approx (x - \hat{x}_1)(x - \hat{x}_2) \cdots (x - \hat{x}_k)Q_k(x)$$

وصفر تقرب  $\hat{x}_{k+1}$  إلى  $Q_k$  لا يقرب جذر  $P(x) = 0$  عموماً بوجود جذر الصيغة المختزلة نفسها  
 $Q_k(x) = 0$ . ويزداد عدم الدقة مع ازدياد قيمة  $k$ . وللحد من هذه الصعوبة، يمكننا استخدام الصيغ  
 المختزلة لإيجاد تقريبات  $\hat{x}_2, \hat{x}_3, \dots, \hat{x}_k$  لأصفار  $P$ . وبعدئذ تتحسن التقريبات بتطبيق طريقة نيوتن  
 لكثيرة الحدود الأصلية  $P(x)$ .

تكمّن المشكلة الوحيدة عند تطبيق طرائق القاطع، الموقع الفاشل، أو نيوتن على متعددات الحدود في  
 احتمال أن يكون لكثيرة الحدود جذور معقدة حتى عندما تكون المعاملات جميعها أعداداً حقيقية.  
 ويمكننا البدء بتقريب ابتدائي مركب للتغلب على هذه الصعوبة وعمل جميع الحسابات مستخدمين  
 العمليات الرياضية المركبة. وتتمثل أسس الأسلوب البديل بالمبرهنة الآتية.

إذا كان  $z = a + bi$  صفراً مركباً مضاعفاً عدد  $m$  من المرات لكثيرة الحدود  $P(x)$  ذات  
 المعاملات الحقيقية فإن  $\bar{z} = a - bi$  صفراً مضاعفاً عدد  $m$  من المرات لكثيرة الحدود  $P(x)$ . وأن

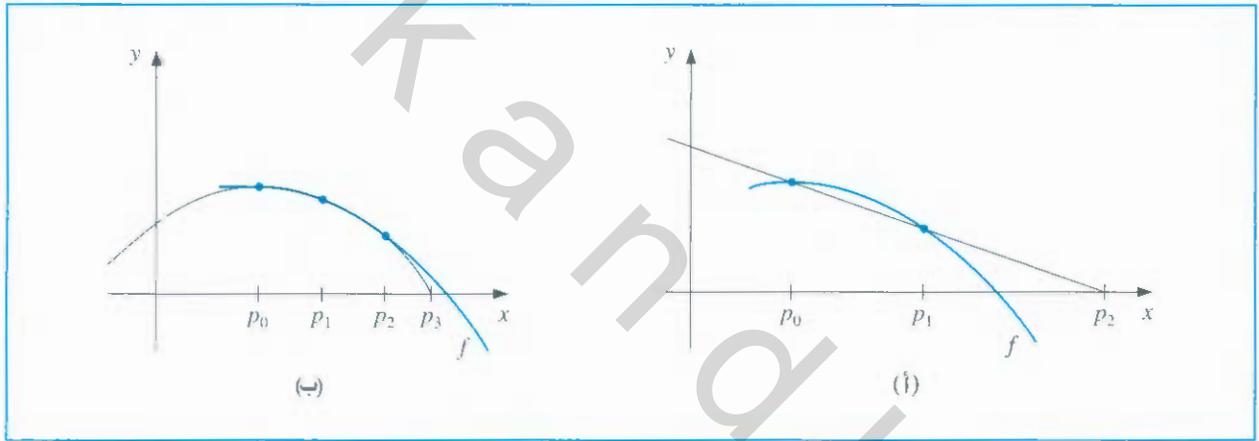
$$\blacksquare. P(x) \text{ قاسم لكثيرة الحدود } (x^2 - 2ax + a^2 + b^2)^m$$

مبرهنة 19.2

يمكن تجزئة التجزئة التشبيهية المتضمنة كثيرات حدود تربيعية إلى عامس المتعدد تقريباً ليكون أحد الحدود متعدداً تربيعياً وجذوره المركبة تقريبات إلى جذور كثيرة الحدود الأصلية. لقد شُرحَ هذا الأسلوب مع بعض التفصيلات في طبعتنا الثانية [BFR]. وبدلاً من الذهاب مع هذه الخطوط. سنأخذ الآن في الحسبان طريقةً عُرضت لأول مرة من قبل [Miller] D.E. Müller ويمكن استخدام هذا الأسلوب لأي مسألة بخصوص إيجاد الجذر، لكنها مفيدة لتقريب جذور متعدّدات الحدود حصرياً.

إن طريقة القاطع تبدأ بتقريبين ابتدائيين  $p_0$  و  $p_1$ ، وتحدد التقريب الآتي  $p$  بوصفه تقاطع محور  $x$  مع الخط الواصل بين  $(p_0, f(p_0))$  و  $(p_1, f(p_1))$ . انظر شكل (12.2) (أ)؛ تستخدم طريقة مولر ثلاثة تقريبات ابتدائية  $p_0$  و  $p_1$  و  $p_2$ ، وتحدّد التقريب الآتي  $p_3$  مع الأخذ في الحسبان تقاطع محور  $x$  مع القطع المكافئ المارّ بـ  $(p_0, f(p_0))$  و  $(p_1, f(p_1))$  و  $(p_2, f(p_2))$ . انظر شكل (12.2) (ب).

شكل 12.2



إن برهان طريقة مولر تبدأ بافتراض كثيرة الحدود التربيعية

$$P(x) = a(x - p_2)^2 + b(x - p_2) + c$$

التي تمر بالنقاط  $(p_0, f(p_0))$  و  $(p_1, f(p_1))$  و  $(p_2, f(p_2))$ . من الممكن إيجاد قيم الثوابت

$a, b, c$  من الشروط

$$f(p_0) = a(p_0 - p_2)^2 + b(p_0 - p_2) + c \quad (15.2)$$

$$f(p_1) = a(p_1 - p_2)^2 + b(p_1 - p_2) + c \quad (16.2)$$

و

$$f(p_2) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c \quad (17.2)$$

لتكون

$$c = f(p_2) \quad (18.2)$$

$$b = \frac{(p_0 - p_2)^2[f(p_1) - f(p_2)] - (p_1 - p_2)^2[f(p_0) - f(p_2)]}{(p_0 - p_2)(p_1 - p_2)(p_0 - p_1)} \quad (19.2)$$

$$a = \frac{(p_1 - p_2)[f(p_0) - f(p_2)] - (p_0 - p_2)[f(p_1) - f(p_2)]}{(p_0 - p_2)(p_1 - p_2)(p_0 - p_1)} \quad (20.2)$$

ولتحديد  $p_3$  صفرًا لـ  $P$ : نطبق الصيغة التربيعية على  $P(x) = 0$ . وعلى أي حال. وبسبب صعوبات تدوير الخطأ الناتجة من طرح الأرقام نفسها تقريبًا. نطبق الصيغة بالأسلوب الموضح في المثال (5) من الفصل (1.2) وهو

$$p_3 - p_2 = \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

تعطي هذه الصيغة احتمالين لـ  $p_3$  اعتمادًا على الإشارة التي تسبق الحد المتطرف. في طريقة مولر. تُختار الإشارة لتتفق مع إشارة  $b$ . وسيجعل الاختيار وفق هذا الأسلوب المقام أعلى قيمة. مما سيؤدي إلى اختيار  $p_3$  على أنها أقرب صفر إلى  $P$  مما هو مع  $P_2$ . وعندئذ

$$p_3 = p_2 - \frac{2c}{b + \text{sgn}(b) \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

حيث إن  $a, b, c$  معطاة في الصيغة (15.2).

وبمجرد تحديد  $p_3$ . تعاد العملية من بدايتها باستخدام  $p_1$  و  $p_2$  و  $p_3$  بدلاً من  $p_0$  و  $p_1$  و  $p_2$  لغرض تحديد التقريب الآتي  $p_4$ . وتستمر الطريقة حتى ظهور استنتاج مقبول. وفي كل خطوة تتضمن الطريقة قيمة متطرفة لـ  $\sqrt{b^2 - 4ac}$ . لذا فالطريقة تعطي جذور التقريب المركبة عندما  $b^2 - 4ac < 0$ . وتوضح الخوارزمية (8.2) هذه العملية.

### خوارزمية مولر Müller's Algorithm

لإيجاد حل لـ  $f(x) = 0$  مع ثلاثة تقريبات  $p_0$  و  $p_1$  و  $p_2$  المدخلات:  $p_0$  و  $p_1$  و  $p_2$ . الحدود المسموح بها  $TOL$ . أكبر عدد لمرات التكرار  $N_0$ . المخرجات: حل تقريبي  $P$  أو عبارة "فشل".

الخطوة	المضمون
1	$h_1 = p_1 - p_0$ $h_2 = p_2 - p_1$ $\delta_1 = (f(p_1) - f(p_0)) / h_1$ $\delta_2 = (f(p_2) - f(p_1)) / h_2$ $d = (\delta_2 - \delta_1) / (h_2 + h_1)$ $i = 3$
2	ما دام $i \leq N_0$ فننفذ الخطوات 3 - 7 الآتية:
3	$b = \delta_2 + h_2 d$ $D = (b^2 - 4f(p_2)d)^{1/2}$ <p>(ملحوظة: قد يتطلب طرائق حسابية مركبة).</p>



4	إذا كان $ b - D  <  b + D $ فضع $E = b + D$ وإلا فضع $E = b - D$
5	ضع $h = -2f(p_2)/E$ $p = p_2 + h$
6	إذا كان $ h  < TOL$ فإن المخرج $(p)$ (كانت العملية ناجحة). توقف.
7	ضع $p_0 = p_1$ (رتب أمر التكرار الآتية): $p_1 = p_2$ $p_2 = p$ $h_1 = p_1 - p_0$ $h_2 = p_2 - p_1$ $\delta_1 = (f(p_1) - f(p_0))/h_1$ $\delta_2 = (f(p_2) - f(p_1))/h_2$ $d = (\delta_2 - \delta_1)/(h_2 + h_1)$ $i = i + 1$
8	المخرجات ( فضلت الطريقة بعد $N_0$ من التكرارات و $N_0 = \infty$ ) (لم تستكمل العملية بنجاح). توقف.



افتراض كثيرة الحدود  $f(x) = 16x^4 - 40x^3 + 5x^2 + 20x + 6$  باستخدام الخوارزمية (8.2) مع  $TOL = 10^{-5}$  وقيم مختلفة لـ  $p_0$  و  $p_1$  و  $p_2$  نحصل على النتائج في جدول (13.2).

مثال 3

جدول 13.2

أ.		
$p_0 = 0.5, p_1 = -0.5, p_2 = 0$		
$f(p_i)$	$p_i$	$i$
-29.4007 - 3.89872i	-0.555556 + 0.598352i	3
1.33223 - 1.19309i	-0.435450 + 0.102101i	4
0.375057 - 0.670164i	-0.390631 + 0.141852i	5
-0.146746 - 0.00744629i	-0.357699 + 0.169926i	6
$-0.183868 \times 10^{-2} + 0.539780 \times 10^{-3}i$	-0.356051 + 0.162856i	7
$0.286102 \times 10^{-5} + 0.953674 \times 10^{-6}i$	-0.356062 + 0.162758i	8

ب.

$p_0 = 0.5, p_1 = 1.0, p_2 = 1.5$		
$f(p_i)$	$p_i$	$i$
-1.37624	1.28785	3
0.126941	1.23746	4
$0.219440 \times 10^{-2}$	1.24160	5
$0.257492 \times 10^{-4}$	1.24168	6
$0.257492 \times 10^{-4}$	1.24168	7

ج		
$p_0 = 2.5, p_1 = 2.0, p_2 = 2.25$		
$f(p_i)$	$p_i$	$i$
-0.611255	1.96059	3
$0.748825 \times 10^{-2}$	1.97056	4
$-0.295639 \times 10^{-4}$	1.97044	5
$-0.259639 \times 10^{-4}$	1.97044	6

لقد استخدمنا طريقة مايل Maple لتوليد الفقرة (أ) من جدول (13.2). ولعمل ذلك، عرفنا الدالة  $f(x)$  والتقريب الابتدائي بحسب

```
>f:=x->16*x^4-40*x^3+5*x^2+20*x+6
>p0:=0.5; p1:=-0.5; p2:=0.0
```

وقد حسبنا كثيرة الحدود عند القيم الابتدائية

```
>f0:=f(p0); f1:=f(p1); f2:=f(p2)
```

وحسبنا  $a = 9, b = 10, c = 6$  و  $p_3 = -0.55555555558 + 0.5983516452i$  مستخدمين صيغة طريقة مولر

```
>c:=f2
>b:=((p0-p2)^2*(f1-f2)-(p1-p2)^2*(f0-f2))/((p0-p2)*(p1-p2)*(p0-p1))
>a:=((p1-p2)*(f0-f2)-(p0-p2)*(f1-f2))/((p0-p2)*(p1-p2)*(p0-p1))
>p3:=p2-(2*c)/(b+(b/abs(b))*sqrt(b^2-4*a*c))
```

وقد تولدت القيمة  $p_3$  مستخدمين طرائق الحساب المركبة كحساب

```
>f3:=f(p3)
```

الذي يعطي

$$f_3 = -29.40070112 - 3.898724738i$$

القيم الحقيقية لجذور الصيغة هي  $1.241677, 1.970446, -0.356062$  و  $\pm 0.162758i$  التي توضح دقة التقريبات من طريقة مولر.

يوضح المثال (3) أنه بإمكان طريقة مولر تقريب جذور كثيرة الحدود مع قيم ابتدائية متنوعة. وفي الواقع تتقارب طريقة مولر عمومًا إلى جذر كثيرة الحدود مع أي اختيار للتقريب الابتدائي، مع أنه بالإمكان إنشاء مسائل لا يحدث معها مثل هذا التقارب. افترض على سبيل المثال وعند قيمة معينة  $i$  أن  $f(p_i) = f(p_{i+1}) = f(p_{i+2}) \neq 0$ . تختزل الصيغة التربيعية إذن إلى دالة ثابتة لاصفري، ولا يمكنه قطع محور  $x$ . ولا يمثل هذا الحالة الاعتيادية على أي حال. وإن الغرض العام لبرمجيات تستخدم طريقة مولر تتطلب تقريبًا ابتدائيًا واحدًا فقط لكل جذر. حتى إنها توفّر هذا التقريب بوصفه اختيارًا.

## EXERCISE SET

## مجموعة التمارين 6.2

1. أوجد التقريبات ضمن  $10^{-4}$  للأصفار الحقيقية كلها لكثيرات الحدود الآتية مستخدماً طريقة

نيوتن:

أ.  $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5$       ب.  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$   
 ج.  $f(x) = x^3 - x - 1$       د.  $f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 3$   
 هـ.  $f(x) = x^3 + 4.001x^2 + 4.002x + 1.101$       و.  $f(x) = x^5 - x^4 + 2x^3 - 3x^2 + x - 4$

2. أوجد تقريبات ضمن  $10^{-5}$  للأصفار جميعها وكثيرات الحدود الآتية كلها من خلال إيجاد

الأصفار الحقيقية باستخدام طريقة نيوتن أولاً. ثم اختزال كثيرات الحدود ذات الرتبة الدنيا لتحديد أي الأصفار مركبة:

أ.  $f(x) = x^4 + 5x^3 - 9x^2 - 85x - 136$   
 ب.  $f(x) = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 16x - 40$   
 ج.  $f(x) = x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 2$   
 د.  $f(x) = x^5 + 11x^4 - 21x^3 - 10x^2 - 21x - 5$   
 هـ.  $f(x) = 16x^4 + 88x^3 + 159x^2 + 76x - 240$   
 و.  $f(x) = x^4 - 4x^2 - 3x + 5$   
 ز.  $f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4$   
 ح.  $f(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 6$

3. كرر التمرين (1) مستخدماً طريقة مولر.

4. كرر التمرين (2) مستخدماً طريقة مولر.

5. استخدم طريقة نيوتن ضمن  $10^{-3}$  لإيجاد الأصفار والنقاط الحرجة للدوال الآتية. استخدم هذه

المعلومات لرسم منحنى لـ  $f$ :

أ.  $f(x) = x^3 - 9x^2 + 12$       ب.  $f(x) = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 12x - 5$

6.  $f(x) = 10x^3 - 8.3x^2 + 2.295x - 0.21141 = 0$ . له جذر عند  $x = 0.29$ . استخدم طريقة نيوتن

مع تقريب ابتدائي  $x_0 = 0.28$  لمحاولة إيجاد هذا الجذر. وضح ماذا يحدث.

7. استخدم الطرائق الآتية كلها لإيجاد حل دقيق ضمن  $[0.1, 1]$  لحد  $10^{-4}$  لـ

$$600x^4 - 550x^3 + 200x^2 - 20x - 1 = 0$$

أ. طريقة التنصيف      ب. طريقة نيوتن      ج. طريقة القاطع

د. طريقة الموقع الفاشل      هـ. طريقة مولر

8. يتقاطع اثنان من السلالم بين جدارين، المسافة بينهما  $W$  على صورة الشكل المجاور على

أن يمتد كل منهما من أساس أحد الجدران إلى نقطة في الجدار الآخر. ويتقاطع السلما على

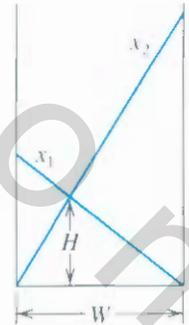
ارتفاع  $H$  من الأرضية. أوجد  $W$  إذا علمنا أن طول السلالم  $x_1 = 20$  ft و  $x_2 = 30$  ft وأن  $H = 8$  ft.

9. علبة على شكل أسطوانة دائرية مطلوب تصميمها لتتسع لـ  $1000 \text{ cm}^3$ . ويجب أن يكون

نصف قطر القمة والقاعدة كلاهما أكثر من نصف قطر العلبة الدائرية للعلبة بمتدار  $0.25$  cm كي

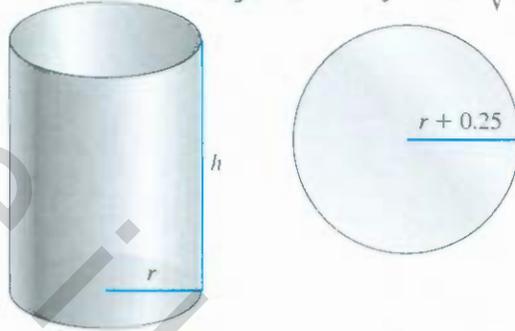
تستخدم هذه الزيادة لغرض اللحام مع جانب العلبة. ويجب أن تكون الطبقة المعدنية المستخدمة

في جانب العلبة أيضاً بطول يزيد  $0.25$  cm على طول محيط العلبة لغرض اللحام. أوجد ضمن



$10^{-4}$  أقل كمية من المعدن نحتاج إليها لصنع هذه العلبة.

10. واجه فيبوناشي تحدياً رياضياً في عام 1224 ضد جون بالرمو بحضور الإمبراطور وحيديرك الثاني؛ فقد جد جذر الصيغة  $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ . وقد أثبت أولاً أن الصيغة ليس لها جذور معقولة ولا جذر إقليدي معقول. بمعنى أنه لا جذر لأي من الصيغ  $a \pm \sqrt{b}$ ،  $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ ،  $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$  أو  $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$  حيث  $a$  و  $b$  عدنان معقولان.



وبعد ذلك قَرَّب الجذر الحقيقي الوحيد، ربما عن طريق استخدام أسلوب جبري لعمر الخيام متضمناً تقاطع دائرة مع قطع مكافئ، وكان جوابه معطى بنظام العدد ذي القاعدة الستينية وهو

$$1 + 22\left(\frac{1}{60}\right) + 7\left(\frac{1}{60}\right)^2 + 42\left(\frac{1}{60}\right)^3 + 33\left(\frac{1}{60}\right)^4 + 4\left(\frac{1}{60}\right)^5 + 40\left(\frac{1}{60}\right)^6$$

ما أعظم دقة تقريبية؟

## 7.2 مسح الطرائق والبرمجيات

### Survey of Methods and Software

في هذا الباب وجدنا حل الصيغة  $f(x) = 0$ ، حيث إن  $f$  عبارة عن دالة متصلة. وتبدأ الطرائق جميعها بتقريب ابتدائي وتوليد متتالية تتقارب إلى جذر الصيغة. في حال كون الطريقة ناجحة. فإذا كانت  $[a, b]$  فترة ما حيث  $f(a)$  و  $f(b)$  لهما إشارتان مختلفتان، فإن طريقة التنصيف وطريقة الموقع الفاشل ستتقارب. وعلى أي حال، فإن تقارب هذه الطرائق قد يكون بطيئاً. ويحصل التقارب الأسرع باستخدام طريقة القاطع أو طريقة نيوتن عموماً. التقريبات الابتدائية الجيدة مطلوبة لهذه الطرائق بواقع اثنين لطريقة القاطع وواحد لطريقة نيوتن، حيث يمكن استخدام طريقة التنصيف وطريقة الموقع الفاشل بوصفها طرائق بداية تمهيداً لطريقة القاطع أو طريقة نيوتن.

وستعطي طريقة مولر تقارباً سريعاً دون وجوب التقريب الابتدائي الجيد. وهي ليست ذات كفاءة تماثل كفاءة طريقة نيوتن، حيث إن رتبة تقاربها مع الجذر هي  $\alpha = 1.84$  مقارنة بطريقة نيوتن التربيعية من الرتبة  $\alpha = 2$ .

على أي حال، إنها أفضل من طريقة القاطع. حيث إن مرتبتها  $\alpha = 1.62$ . ولها ميزة مضافة لكونها قادرة على تقريب الجذور المركبة.

يستخدم الإنكماش مع طريقة مولر عموماً حالما يكون جذر التقريب لكثيرة الحدود قد حدّد. وبعد ذلك استخدمت طريقة مولر أو نيوتن في كثيرة الحدود الأصلية مع هذا الجذر بافتراض أنه تقريب ابتدائي. سيضمن هذا الإجراء كون الجذر الذي قرّب عبارة عن حل للصيغة الحقيقية وليس لصيغة الإنكماش. ونحن نوصي بطريقة مولر لإيجاد أصفار متعدّدات الحدود كلها سواءً أكانت حقيقية أم مركبة. ويمكن استخدام طريقة مولر في دالة متصل غير منتهي أيضاً. وتوجد طرائق أخرى متوفرة ذات رتبة عالية لتحديد جذور متعدّدات الحدود. فإذا كان هذا الموضوع يثير اهتماماً خاصاً، فإننا نوصي بإعطاء اهتمام لطريقة لاكوير التي تعطي تقارباً تكبيرياً وتقرّب الجذور المركبة أيضاً (لاحظ [Ho, pp. 176–179] لشرح كامل) طريقة جنكنز-تريب (لاحظ [JT]) وطريقة برنت. (لاحظ [Bre]).

وتوجد طريقة أخرى ذات أهمية هي طريقة كوشي، وهي مشابهة لطريقة مولر، لكنها تتحشى مسألة فشل طريقة مولر حينما تكون  $f(x_i) = f(x_{i+1}) = f(x_{i+2})$  عند قيمة  $x_i$ . ولشرح هذه الطريقة شرحاً مهماً مع تفصيلات أكثر لطريقة مولر، نوصي بـ ([Y6, Sections 4.10, 4.11, and 5.4]). ولدالة محددة  $f$  مع حد سماح، فثمة برنامج كفو يعطي حلاً واحداً أو أكثر لـ  $f(x) = 0$  تقريباً. وكلّ له خطأ مطلق أو نسبي ضمن حد السماح. ويجب توليد النتائج في زمن مناسب. وإذا لم ينفذ البرنامج هذه المهمة يتعيّن عليه إعطاء توضيح ذي معنى مقابل عدم تحقيق النجاح ومؤشر لكيفية معالجة سبب الفشل.

إن البرنامج الفرعي ZANLY - IMSL FORTRAN يستخدم طريقة مولر مع إنكماش لتقريب عدد من جذور  $f(x) = 0$ . ويستخدم البرنامج ZBREN المنسوب إلى برنت مزيجاً من استيفاء داخلي خطي واستيفاء خارجي معكوس يشبه طريقة مولر وطريقة التنصيف. إنها تتطلب وصف فترة  $[a, b]$  تتضمن جذراً.

والبرنامج (IMSL C f-zeros-fcn) وبرنامج (ZREAL FORTRAN) يستندان إلى تغيير طريقة مولر وأصفار التقريب لدالة حقيقية  $f$  عندما لا تتوفر سوى تقريبات ابتدائية ضعيفة. برامج إيجاد أصفار متعدّدات الحدود هي C f-zeros-poly و FORTRAN - ZPORC التي تستخدم طريقة جنكنز - تراوب لإيجاد أصفار كثيرة حدود حقيقية ZPLRC التي تستخدم طريقة لاكوير لإيجاد أصفار كثيرة حدود حقيقية. وبرنامج C c-zeros-poly و FORTRAN - ZPOCC الذي يستخدم طريقة جنكنز - تراوب لإيجاد أصفار كثيرة حدود مركبة.

تستخدم البرامج الفرعية NAG C C05adc و NAG FORTRAN C05ADF و C05AZF مزيجاً من طريقة التنصيف واستيفاء داخلي خطي واستيفاء خارجي لتقريب صفر حقيقي لـ  $f(x) = 0$  في الفترة  $[a, b]$ . البرنامج الفرعي C05AGF مشابه لـ C05ADF لكنه يتطلب قيمة واحدة للبدء بدلاً من الفترة ويعيد فترة تتضمن جذراً. ويستخدم البرنامج الفرعي NAG FORTRAN C05AJF و C05AXF طريقة اتصال مع تكرار القاطع لتقريب الصفر الحقيقي للدالة. وتزود NAG أيضاً ببرنامجين فرعيين C02AGF و C02AFF لتقريب أصفار كثيرة الحدود الحقيقية أو المركبة جميعها على التوالي. ويستخدم كلا البرنامجين طريقة لاكوير المختلة لإيجاد جذور كثيرة الحدود.

والبرنامج الفرعي FORTRAN fzero.f يستخدم مزيجاً من طريقتي التنصيف والقاطع المطوّرتين

من قبل ذكر T.J. Dekker لتقريب صفر حقيقي لـ  $f(x) = 0$  في الفترة  $[a, b]$ . إنه يتطلب تحديد فترة تتضمن جذراً، وتعيد فترة بعمق يتناسب مع حد سماح معلوم. والبرنامج الفرعي FORTRAN sdzro.f يستخدم مزيجاً من طريقة التنصيف واستيفاء داخلي واستيفاء خارجي لإيجاد صفر حقيقي لـ  $f(x) = 0$  في الفترة  $[a, b]$ . ويمكن استخدام البرنامجين rpzero و cpzero لتقريب كل أصفار كثيرة الحدود الحقيقية أو المركبة على التوالي. وتستخدم كلتا الطريقتين طريقة نيوتن لأنظمة سنتناولها في الباب العاشر. البرامج كلها معطاة بصيغة الدقة الفردية والمزدوجة. وهذه الطرائق متوفرة في الإنترنت من netlib على الموقع <http://www.netlib.org/slatec/src>.

وضمن MATLAB. تستخدم الدالة ROOTS لحساب الجذور كلها الحقيقية والمركبة لكثيرة الحدود. ويحسب دالة غير منهجي FZERO جذراً قريباً لتقريب ابتدائي محدد ضمن حد سماح محدد. ولدى العملية fsolve لإيجاد جذور الصيغ. وعلى سبيل المثال

```
>fsolve(x^2 - x - 1, x);
```

تعيد الأرقام 1.618033987 و -1.618033989 ويمكنك تحديد متغير أيضاً وفترة للبحث. على سبيل المثال

```
>fsolve(x^2 - x - 1,x,1..2);
```

تعيد العدد 1.618033989 فقط. ويستخدم الأمر fsolve أساليب متخصصة متنوعة تعتمد على صيغة معينة للصيغة أو لنظام من الصيغ.

لاحظ أنه على الرغم من تنوع الطرائق. فالبرامج المكتوبة بمهنية تستند أساساً إلى الطرائق والأسس التي نتناولها في هذا الباب. ويجب أن تكون قادراً على استخدام هذه البرامج بقراءة الأدلة المرفقة معها لاستيعاب معلمات النتائج الحاصلة وتوصيفاتها.

تتوافر ثلاثة كتب كلاسيكية في حل الصيغ اللاخطية. وهي من إعداد Traub [Tr] و Ostrowski [Os] و Householder [Ho] وبالإضافة إلى كتاب Brent [Bre] الذي يعد أساساً لطرائق إيجاد الجذر التي تستخدم حالياً.

obeykandi.com