

## الحلول العددية لأنظمة المعادلات غير الخطية

Numerical Solutions of  
Nonlinear Systems of Equations

## مقدمة

يمكن التنبؤ بمقدار الضغط اللازم لإغراق جسم كبير ثقيل في تربة طرية متجانسة واقعة فوق أرض ذات قاعدة صلبة من خلال مقدار الضغط اللازم لإغراق أجسام أصغر في التربة نفسها. وعلى نحو خاص فإن مقدار الضغط  $P$  اللازم لإغراق صفيحة دائرية نصف قطرها  $r$  لمسافة  $d$  في أرض طرية، حيث يمكن تقدير أرض القاعدة الصلبة التي تقع على مسافة  $d > D$  تحت السطح بمعادلة على الصيغة

$$p = k_1 e^{k_2 r} + k_3 r$$

حيث  $k_1, k_2$  و  $k_3$  ثوابت تعتمد على  $d$  وعلى تجانس التربة، وليس على نصف قطر الصفيحة. ولتحديد أصغر حجم لقرص قابل لتحمل ثقل كبير، فقد أغرقت ثلاثة أقراص ذوات أنصاف أقطار مختلفة إلى المسافة نفسها. وسجلت الأثقال (الأحمال) المطلوبة لهذا الإغراق كما هو مبين في شكل المرافق.



إن هذا ينتج المعادلات غير الخطية الآتية:

$$m_1 = k_1 e^{k_2 r_1} + k_3 r_1$$

$$m_2 = k_1 e^{k_2 r_2} + k_3 r_2$$

$$m_3 = k_1 e^{k_2 r_3} + k_3 r_3$$

في المجاهيل الثلاثة  $k_1$ ،  $k_2$  و  $k_3$ . وعادة ما يكون هناك حاجة إلى طرائق عددية لتقريب حل أنظمة المعادلات عندما تكون المعادلات غير خطية. ويعالج التمرين (12) في الفصل (2.10) تطبيقاً من النوع الموصوف هنا.

إن حل النظام من المعادلات الخطية هو مشكلة يجب تجنبها ما أمكن، وعادة ما يحدث ذلك بتقريب النظام غير الخطي بنظام معادلات خطي. وعندما يكون ذلك غير مرضٍ. يجب مجابهة المشكلة مباشرة. إن الطريقة الأكثر مباشرة تكون بتكليف طرائق من الفصل الثاني لتقريب حلول معادلة غير خطية واحدة بمتغير واحد، وتطبق عندما نواجه مسألة متجه يحنوي على المتغيرات كلها بدلاً من المسألة ذات المتغير الواحد.

إن الأداة الرئيسة في الفصل الثاني كانت طريقة نيوتن، وهي طريقة عادة ما تكون متقاربة تربيعياً. وإن هذه أول طريقة نعدّها لحل أنظمة معادلات غير خطية. وإن طريقة نيوتن عند تعديلها لأنظمة المعادلات مكلفة بالتطبيق. ولذلك سنصف في الفصل (3.10) كيف يمكن استخدام تعديل طريقة القاطع Secant Method للحصول على تقريبات بطريقة أسهل. مع خسارة في سرعة التقارب المذهلة التي تتصف بها طريقة نيوتن.

ويصف الفصل (4.10) طريقة التناقص الأشد انحداراً Steepest Descent. إن هذه الطريقة متقاربة خطياً فقط. ولكنها لا تتطلب البدء بالتقريبات الدقيقة اللازمة للرائق الأسرع في التقارب. وغالباً ما تستخدم لإيجاد تقريب ابتدائي لطريقة نيوتن أو أي من تعديلاتها.

نعطي في الفصل (5.10) مقدمة لطرائق الاتصال التي تستخدم الوسيط (براميتز) للانتقال من مسألة قابلة للحل بسهولة إلى حل للمسألة الأصلية غير الخطية.

لقد حُذفت معظم براهين النتائج مبرهنة؛ لأنها تستخدم طرائق تدرّس عادة في حساب التفاضل والتكامل المتقدم. وإن أحد المراجع الجيدة العامة لهذه المادة هو كتاب أورتيجا (Ortega) بعنوان

*Numerical Analysis—A Second Course [Or2]. A*

وهناك مرجع آخر أشمل وهو [OR].

## النقاط الثابتة للدوال بمتغيرات متعددة

1 10

### Fixed Points for Functions of Several variables

يكون نظام المعادلات غير الخطية على الصيغة

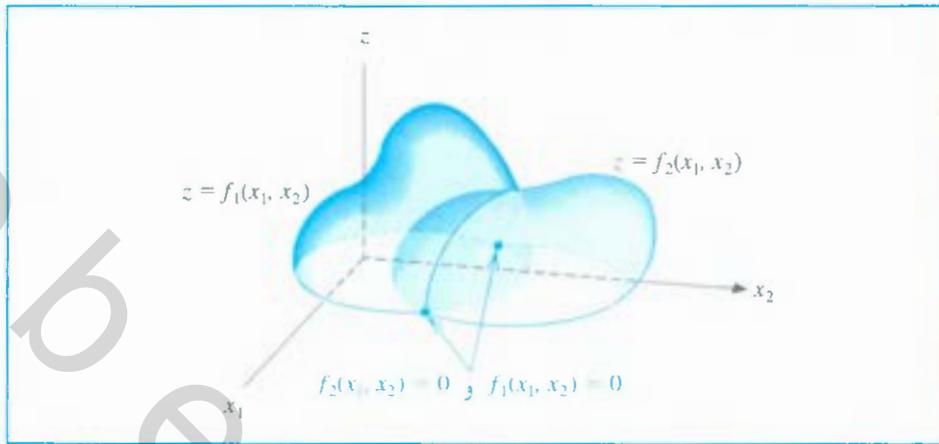
$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

$$\vdots$$

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

(1.10)



شكل 1.10

حيث يمكن النظر إلى كل دالة  $f_i$  على أنها تطبيق (mapping) المتجه  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$  في الفضاء  $\mathbb{R}^n$  ذي  $n$  بعداً إلى الخط الحقيقي  $\mathbb{R}$ . ويعطي شكل (1.10) تمثيلاً هندسياً لنظام غير خطي عندما  $n = 2$ . يمكن تمثيل هذا النظام المكوّن من  $n$  من المعادلات غير الخطية في  $n$  من الجاهيل، عن طريق تعريف  $\mathbf{F}$  ليتطبيق  $\mathbb{R}^n$  إلى  $\mathbb{R}^n$  كما يلي

$$\mathbf{F}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n))^t$$

إذا ما استخدمنا التعبير المتجهي لتمثيل المتغيرات  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ، فإن النظام (1.10) يأخذ الصيغة

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (2.10)$$

وإن الدوال  $f_1, f_2, \dots, f_n$  هي دوال إحداثيات  $\mathbf{F}$  (Coordinate functions).

مثال 1 يمكن وضع النظام غير الخطي  $3 \times 3$

$$\begin{aligned} 3x_1 - \cos(x_2x_3) - \frac{1}{2} &= 0 \\ x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06 &= 0 \\ e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} &= 0 \end{aligned}$$

على صيغة المعادلة (2.10) عن طريق تعريف دوال الإحداثيات  $f_1, f_2, f_3$  من  $\mathbb{R}^3$  إلى  $\mathbb{R}$  كالآتي:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3) &= 3x_1 - \cos(x_2x_3) - \frac{1}{2} \\ f_2(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06 \\ f_3(x_1, x_2, x_3) &= e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} \end{aligned}$$

وبعد تعريف  $\mathbf{F}$  من  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  بواسطة

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{x}) &= \mathbf{F}(x_1, x_2, x_3) \\ &= (f_1(x_1, x_2, x_3), f_2(x_1, x_2, x_3), f_3(x_1, x_2, x_3))^t \\ &= \left( 3x_1 - \cos(x_2x_3) - \frac{1}{2}x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06 \right. \\ &\quad \left. e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} \right)^t\end{aligned}$$

قبل مناقشة حلّ نظام مُعطى بصيغة المعادلة (1.10) أو المعادلة (2.10) نحتاج إلى بعض النتائج حول الاتصال وقابلية الاشتقاق لدوال من  $\mathbb{R}^n$  إلى  $\mathbb{R}^n$ . وعلى الرغم من أنه يمكن عرض هذه الدراسة مباشرة (انظر التمرين 12). نستخدم طريقة بديلة تسمح لنا بعرض المفاهيم مبرهنة الأصعب حول النهايات والاتصال بدلالة الدوال من  $\mathbb{R}^n$  إلى  $\mathbb{R}$ .

**تعريف 1.10** . لتكن  $D \subset \mathbb{R}^n$  . ولتكن  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  دالة. نقول: إن نهاية الدالة  $f$  عند  $\mathbf{x}_0$  ونكتب

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$$

إذا كان لأي  $\varepsilon > 0$  يوجد عدد  $\delta > 0$  بحيث إن

$$|f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon$$

كلما كان  $\mathbf{x} \in D$  و

$$0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$$

إن وجود النهاية مستقل عن القياس المستخدم، كما بُحث في الفصل (1.7). ويمكن استخدام أي قياس مناسب ليحقق الشرط في هذا تعريف. وإن قيمة  $\delta$  المنتهية تعتمد على القياس الذي اختير. ولكن وجود  $\delta$  مستقل عن القياس. ومع إمكانية استخدام قياسات متعددة فإن الاتصال مستقل عن اختيار أي قياس منتهٍ.

لتكن  $f$  دالة من مجموعة  $D \subset \mathbb{R}^n$  إلى  $\mathbb{R}$ . نقول: إن  $f$  متصلة على  $\mathbf{x}_0 \in D$  إذا كان  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$  موجودة

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$$

وكان

وبالإضافة إلى ذلك تكون  $f$  متصلة على مجموعة  $D$  إذا كانت  $f$  متصلة على كل نقطة في  $D$ . ويُعبّر عن هذا المفهوم بكتابة  $f \in C(D)$ .

والآن يمكننا تعريف مفاهيم النهاية والاتصال للدوال من  $\mathbb{R}^n$  إلى  $\mathbb{R}^n$  باقتراض دوال الإحداثيات من  $\mathbb{R}^n$  إلى  $\mathbb{R}$ .

## تعريف 2.10

إن تعريفات الاتصال للدوال بمتغيرات عددها  $n$  تنبع من تلك الدوال بمتغير واحد عن طريق استخدام القياس بدلا من القيمة المطلقة حيثما كان ذلك ضرورياً.

تعريف 3.10 ليكن  $F$  دالة من  $\mathbb{R}^n \subset D$  إلى  $\mathbb{R}^n$  على الصيغة

$$F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))^t$$

حيث  $f_i$  تطبيق من  $\mathbb{R}^n$  إلى  $\mathbb{R}$  لكل  $i$ . نعرّف

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = L = (L_1, L_2, \dots, L_n)^t$$

إذا فقط إذا كان  $\lim_{x \rightarrow x_0} f_i(x) = L_i$  لكل  $i = 1, 2, \dots, n$ .

الدالة  $F$  متصلة على  $D$  إذا كان  $\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = F(x_0)$  موجودة وبالإضافة إلى ذلك فإن  $F$  متصلة على  $D$  إذا كانت  $F$  متصلًا على كل  $x$  في  $D$ . ويعبر عن هذا المفهوم بكتابة  $F \in C(D)$ .

للدوال من  $\mathbb{R}$  إلى  $\mathbb{R}$  يمكن غالباً برهنة الاتصال ببرهنة أن الدالة قابلة للاشتقاق. (انظر مبرهنة 6.1). وعلى الرغم من أن هذه مبرهنة تعميم لدوال في عدة متغيرات، فإن المشتقة (أو المشتقة الكلية) لدالة في عدة متغيرات معقدة ولا تناقش هنا. وبدلاً من ذلك نعطي هذه مبرهنة التي تربط اتصال دالة في عدة متغيرات  $n$  على نقطة بالمشتقات الجزئية لتلك الدالة على تلك النقطة.

مبرهنة 4.10 لتكن  $f$  دالة من  $\mathbb{R}^n \subset D$  إلى  $\mathbb{R}$  و  $x_0 \in D$ . إذا وجدت المشتقات الجزئية جميعها للدالة  $f$  ووجدت  $\delta > 0$  و  $K > 0$  بحيث كلما كان  $\|x - x_0\| < \delta$  و  $x_0 \in D$  حصلنا على

$$\left| \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \right| \leq K \quad \text{لكل } j = 1, 2, \dots, n,$$

عندها  $f$  متصلة على  $x_0$ .

لقد تطوّرت في الباب 2 عملية إرجاعية لحلّ المعادلة  $f(x) = 0$  عن طريق تحويل المعادلة أولاً إلى صيغة النقطة الثابتة  $x = g(x)$ . سنناقش طريقة ماثلة للدوال من  $\mathbb{R}^n$  إلى  $\mathbb{R}^n$ .

تعريف 5.10 للدالة  $G$  من  $\mathbb{R}^n \subset D$  إلى  $\mathbb{R}^n$  نقطة ثابتة عند  $p \in D$  إذا كان  $G(p) = p$ .

وتعمم مبرهنة الآتية مبرهنة النقطة الثابتة (fixed point) (3.2) للحالة ذات الأبعاد  $n$ . وإن هذه مبرهنة حالة خاصة من مبرهنة التطبيق التقلصي (Contraction Mapping Theorem) ويوجد برهانها في [Or2, p. 153].

مبرهنة 610 لتكن  $D = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$  وكل  $\{i = 1, 2, \dots, n\}$  لمجموعة من الثوابت

$a_1, a_2, \dots, a_n$  و  $b_1, b_2, \dots, b_n$ ، افترض  $G$  دالة متصلة من  $\mathbb{R}^n \subset D$  إلى  $\mathbb{R}^n$  ومحققة للخاصية

$$G(x) \in D \quad \text{كلما } x \in D \text{ عندئذ يكون للدالة } G \text{ نقطة ثابتة في } D.$$

وبالإضافة إلى ذلك افترض أن مركبات  $G$  الدالية جميعها لها مشتقات جزئية متصلة، ويوجد ثابت أن  $K < 1$  بالخاصية

$$\mathbf{x} \in D \quad \text{حيثما} \quad \left| \frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right| \leq \frac{K}{n}$$

لكل  $j = 1, 2, \dots, n$  وكل مركبة دالية  $g_i$ . عندئذ تكون المتتالية  $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$  المعرفة بأي نقطة عشوائية  $\mathbf{x}^{(0)}$  في  $D$  والناجمة عن

$$k \geq 1 \quad \mathbf{x}^{(k)} = G(\mathbf{x}^{(k-1)})$$

متقاربة إلى نقطة ثابتة  $\mathbf{p} \in D$  ويكون

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{p}\|_{\infty} \leq \frac{K^k}{1 - K} \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|_{\infty} \quad (3.10)$$

مثال 2 افترض النظام غير الخطي من المثال (1) المعطى كالآتي:

$$3x_1 - \cos(x_2x_3) - \frac{1}{2} = 0$$

$$x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06 = 0$$

$$e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0$$

إذا حُلَّت المعادلة  $i$  للمجهول  $x_i$ ، فإن النظام يتحول إلى مسألة النقطة الثابتة

$$x_1 = \frac{1}{3} \cos(x_2x_3) + \frac{1}{6}$$

$$x_2 = \frac{1}{9} \sqrt{x_1^2 + \sin x_3 + 1.06} - 0.1 \quad (4.10)$$

$$x_3 = -\frac{1}{20} e^{-x_1x_2} - \frac{10\pi - 3}{60}$$

افترض أن  $G: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  معرف بالصيغة  $G(\mathbf{x}) = (g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), g_3(\mathbf{x}))'$  حيث

$$g_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{3} \cos(x_2x_3) + \frac{1}{6}$$

$$g_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{9} \sqrt{x_1^2 + \sin x_3 + 1.06} - 0.1$$

$$g_3(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{20} e^{-x_1x_2} - \frac{10\pi - 3}{60}$$

ستستخدم النظريتان (4.10) و (6.10) لبرهنة أن  $G$  له نقطة ثابتة وحيدة في

$$D = \{(x_1, x_2, x_3)' \mid -1 \leq x_i \leq 1, i = \{1, 2, 3\}\}$$

لكل  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)'$  في  $D$

$$|g_1(x_1, x_2, x_3)| \leq \frac{1}{3} |\cos(x_2x_3)| + \frac{1}{6} \leq 0.50$$

$$|g_2(x_1, x_2, x_3)| = \left| \frac{1}{9} \sqrt{x_1^2 + \sin x_3 + 1.06} - 0.1 \right| \leq \frac{1}{9} \sqrt{1 + \sin 1 + 1.06} - 0.1 < 0.09,$$

$$|g_3(x_1, x_2, x_3)| = \frac{1}{20}e^{-x_1x_2} + \frac{10\pi - 3}{60} \leq \frac{1}{20}e + \frac{10\pi - 3}{60} < 0.61 \quad \text{و}$$

لذلك  $-1 \leq g_i(x_1, x_2, x_3) \leq 1$  لكل  $i = 1, 2, 3$ ، وهكذا  $\mathbf{G}(\mathbf{x}) \in D$  حيثما  $\mathbf{x} \in D$

إن إيجاد محدود للمشتقات الجزئية على  $D$  يعطي

$$\left| \frac{\partial g_3}{\partial x_3} \right| = 0 \quad \text{و} \quad \left| \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \right| = 0, \quad \left| \frac{\partial g_1}{\partial x_1} \right| = 0$$

وكذلك

$$\left| \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \right| \leq \frac{1}{3}|x_3| \cdot |\sin x_2x_3| \leq \frac{1}{3} \sin 1 < 0.281$$

$$\left| \frac{\partial g_1}{\partial x_3} \right| \leq \frac{1}{3}|x_2| \cdot |\sin x_2x_3| \leq \frac{1}{3} \sin 1 < 0.281$$

$$\left| \frac{\partial g_2}{\partial x_1} \right| = \frac{|x_1|}{9\sqrt{x_1^2 + \sin x_3 + 1.06}} < \sqrt{9} \frac{1}{0.218} < 0.238$$

$$\left| \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \right| = \frac{|\cos x_3|}{18\sqrt{x_1^2 + \sin x_3 + 1.06}} < \sqrt{18} \frac{1}{0.218} < 0.119$$

$$\left| \frac{\partial g_3}{\partial x_1} \right| = \frac{|x_2|}{20}e^{-x_1x_2} \leq \frac{1}{20}e < 0.14$$

$$\left| \frac{\partial g_3}{\partial x_2} \right| = \frac{|x_1|}{20}e^{-x_1x_2} \leq \frac{1}{20}e < 0.14 \quad \text{و}$$

بما أن المشتقات الجزئية للدوال  $g_1, g_2, g_3$  منتهية على  $D$ ، فإن مبرهنة (4.10) تضمن أن هذه الدوال متصلة على  $D$ ، ووفقاً لذلك، فإن  $\mathbf{G}$  متصلة على  $D$ ، وبالإضافة إلى ذلك، فإن لكل

$$\left| \frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right| \leq 0.281 \quad \text{لكل } i = 1, 2, 3 \text{ و } j = 1, 2, 3$$

ويتحقق الشرط في الفقرة الثاني من مبرهنة (6.10) بالقيمة  $K = 3(0.281) = 0.843$ .

وبالطريقة نفسها يمكن برهنة أن  $\partial g_i / \partial x_j$  متصل على  $D$  لكل  $i = 1, 2, 3$  و  $j = 1, 2, 3$ . (القد افترض هذا في التمرين 3). ووفقاً لذلك، يوجد لـ  $\mathbf{G}$  نقطة ثابتة وحيدة في  $D$  ويوجد للنظام غير الخطي حل في  $D$ .

انظر أن امتلاك  $\mathbf{G}$  نقطة ثابتة في  $D$  لا يتضمن أن حل النظام الأصلي وحيد على هذا المجال؛ لأن حل المجهول  $x_2$  في المعادلة (4.10) قد احتوى على اختيار الجذر التربيعي الموجب. إن التمرين 7 (د) يتفحص الحالة التي تحدث إذا اختير الجذر التربيعي السالب في هذه الخطوة. بدلاً من ذلك.

لإيجاد تقريب للنقطة الثابتة  $\mathbf{P}$ ، نختار  $\mathbf{x}^{(0)} = (0.1, 0.1, -0.1)'$

إن متتالية المتجهات الناتجة عن

$$\begin{aligned}x_1^{(k)} &= \frac{1}{3} \cos x_2^{(k-1)} x_3^{(k-1)} + \frac{1}{6} \\x_2^{(k)} &= \frac{1}{9} \sqrt{\left(x_1^{(k-1)}\right)^2 + \sin x_3^{(k-1)}} + 1.06 - 0.1 \\x_3^{(k)} &= -\frac{1}{20} e^{-x_1^{(k-1)} x_2^{(k-1)}} - \frac{10\pi - 3}{60}\end{aligned}$$

تتقارب إلى الحل الوحيد للمعادلة (4.10). لقد نتجت النتائج في جدول (1.10) حتى تحقق

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_{\infty} < 10^{-5}$$

$\ \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\ _{\infty}$	$x_3^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_1^{(k)}$	$k$
	-0.10000000	0.10000000	0.10000000	0
0.423	-0.52340127	0.00944115	0.49998333	1
$9.4 \times 10^{-3}$	-0.52336331	0.00002557	0.49999593	2
$2.3 \times 10^{-4}$	-0.52359814	0.00001234	0.50000000	3
$1.2 \times 10^{-5}$	-0.52359847	0.00000003	0.50000000	4
$3.1 \times 10^{-7}$	-0.52359877	0.00000002	0.50000000	5

جدول 1.10

إن استخدام حد الخطأ (3.10) بالقيمة  $K = 0.843$  يعطي

$$\|\mathbf{x}^{(5)} - \mathbf{p}\|_{\infty} \leq \frac{(0.843)^5}{1 - 0.843} (0.423) < 1.15$$

التي لا تشير إلى الدقة الحقيقية لـ  $\mathbf{x}^{(5)}$  بسبب التقريب الابتدائي غير الدقيق إن الحل الفعلي هو

$$\mathbf{p} = \left(0.5, 0, -\frac{\pi}{6}\right)' \approx (0.5, 0, -0.5235987757)'$$

ولذلك فالخطأ الحقيقي هو

$$\|\mathbf{x}^{(5)} - \mathbf{p}\|_{\infty} \leq 2 \times 10^{-8}$$

إن إحدى الطرائق لتسريع تقارب عملية النقطة الثابتة الإرجاعية تكون باستخدام  $x_1^{(k)}, \dots, x_{i-1}^{(k)}$  من  $x_1^{(k-1)}, \dots, x_{i-1}^{(k-1)}$  في حساب  $x_i^{(k)}$  كما في طريقة جاوس - سيدل للأضعة الخطية، ثم تصبح معادلات المركبات

$$\begin{aligned}x_1^{(k)} &= \frac{1}{3} \cos \left(x_2^{(k-1)}, x_3^{(k-1)}\right) + \frac{1}{6} \\x_2^{(k)} &= \frac{1}{9} \sqrt{\left(x_1^{(k)}\right)^2 + \sin x_3^{(k-1)}} + 1.06 - 0.1 \\x_3^{(k)} &= -\frac{1}{20} e^{-x_1^{(k)} x_2^{(k)}} - \frac{10\pi - 3}{60}\end{aligned}$$

وبأخذ  $\mathbf{x}^{(0)} = (0.1, 0.1, -0.1)'$  تعرض نتائج هذه الحسابات في جدول (2.10)

## جدول 2.10

$\ x^{(k)} - x^{(k-1)}\ _\infty$	$x_3^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_1^{(k)}$	$k$
	-0.10000000	0.10000000	0.10000000	0
0.423	-0.52304613	0.02222979	0.49998333	1
$2.2 \times 10^{-2}$	-0.52359807	0.00002815	0.49997747	2
$2.8 \times 10^{-5}$	-0.52359877	0.00000004	0.50000000	3
$3.8 \times 10^{-8}$	-0.52359877	0.00000000	0.50000000	4

إن نتيجة خطوة التراجع  $x^{(4)}$  دقيقة ضمن  $10^{-7}$  في المعيار  $l_\infty$ ، ولذلك فإن التقارب لهذه المسألة قد تسارع باستخدام طريقة جاوس - سيدل. وعلى كل حال فإن هذه الطريقة لا تؤدي دائماً إلى تسارع التقارب.

يعطي مابل الدالة fsolve لحل أنظمة معادلات. ويمكن حل مسألة النقطة الثابتة في مثال (2) بالأوامر الآتية:

```
>g1:=x1=(2*cos(x2*x3)+1)/6;
>g2:=x2=sqrt(x1^2+sin(x3)+1.06)/9-0.1;
>g3:=x3=-(3*exp(-x1*x2)+10*Pi-3)/60;
>fsolve({g1,g2,g3},{x1,x2,x3},{x1=-1..1,x2=-1..1,x3=-1..1});
```

إن الأوامر الثلاثة الأولى تعرّف النظام. والأمر الأخير يدخل العملية fsolve. الجواب الناتج

هو  $(x_3 = -0.5235987758, x_1 = 0.5000000000, x_2 = -0.2102454409 \cdot 10^{-10})$

وعموماً fsolve(eqns,vars,options) يحل نظام المعادلات الممثل بالوسيط eqns للمتغيرات الممثلة بالوسيط vars تحت الوسيطات الاختيارية الممثلة بـ options. وتحت options نحدد منطقة يطلب فيها من البرنامج أن يبحث عن حل، وإن هذا التحديد ليس إلزامياً، وإن Maple يحدد فضاء البحث الخاص بها إذا حُذفت الخيارات options.

## EXERCISE SET

## مجموعة التمارين 1.10

1. برهن أن الدالة  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  المعرفة بالصيغة

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_3, x_1 \cos x_2, x_2^2 + x_3)^t$$

متصلة على كل نقطة في  $\mathbb{R}^3$ .

2. أعط مثلاً لدالة  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  تكون متصلة على كل نقطة في  $\mathbb{R}^3$  ما عدا (1,0).

3. برهن أن المشتقات الجزئية الأولى في مثال (2) متصلة على  $D$ .

4. للنظام اللاخطي  $-x_1(x_1 + 1) + 2x_2 = 18$

$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 6)^2 = 25$$

حلان.

أ. قَرِّب الحلين بالتطبيق.

ب. استخدم التقريبات من الفقرة (أ) بوصفها تقريبات ابتدائية لعملية إرجاعية لدالة مناسبة،

وحَدِّدِ الحلول ضمن  $10^{-5}$  في معيار  $l_\infty$ .

5. يمكن تحويل النظام غير الخطي

$$\begin{aligned}x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 + 8 &= 0 \\x_1x_2^2 + x_1 - 10x_2 + 8 &= 0\end{aligned}$$

$$x_1 = g_1(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + x_2^2 + 8}{10} \quad \text{إلى مسألة النقطة الثابتة}$$

$$x_2 = g_2(x_1, x_2) = \frac{x_1x_2^2 + x_1 + 8}{10}$$

أ. استخدم مبرهنة (6.10) لبرهنة أن  $G = (g_1, g_2)'$  بتطبيق  $D \subset \mathbb{R}^2$  إلى  $\mathbb{R}^2$  له نقطة ثابتة في

$$D = \{(x_1, x_2)' \mid 0 \leq x_1, x_2 \leq 1.5\}$$

ب. طبق تكراراً دالياً لتقريب الحل.

ج. هل تسرع طريقة جاوس - سيدل التقارب؟

6. يوجد للنظام غير الخطي  $5x_1^2 - x_2^2 = 0$ ,

$$x_2 - 0.25(\sin x_1 + \cos x_2) = 0$$

حلّ بالقرب من  $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})'$ .

أ. أوجد دالة  $G$  ومجموعة  $D$  في  $\mathbb{R}^2$  بحيث  $G : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  ويكون للدالة  $G$  نقطة ثابتة وحيدة

في  $D$ .

ب. طبق التكرار الدالي لتقريب الحلّ ضمن  $10^{-5}$  في معيار  $l_\infty$ .

ج. هل تسرع طريقة جاوس - سيدل التقارب؟

7. استخدم مبرهنة (6.10) لتبرهن أن  $G : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  له نقطة ثابتة وحيدة في  $D$ . صَبِّحْ

التكرار الدالي لتقريب الحلّ ضمن  $10^{-5}$  باستخدام  $\|\cdot\|_\infty$ :

$$G(x_1, x_2, x_3) = \left( \frac{\cos(x_2x_3) + 0.5}{3}, \frac{1}{25}\sqrt{x_1^2 + 0.3125} - 0.03, -\frac{1}{20}e^{-x_1x_2} - \frac{10\pi - 3}{60} \right)'. \quad \text{أ.}$$

$$D = \{(x_1, x_2, x_3)' \mid -1 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, 3\}$$

$$G(x_1, x_2, x_3) = \left( \frac{13 - x_2^2 + 4x_3}{15}, \frac{11 + x_3 - x_1^2}{10}, \frac{22 + x_3^3}{25} \right)'. \quad \text{ب.}$$

$$D = \{(x_1, x_2, x_3)' \mid 0 \leq x_i \leq 1.5, i = 1, 2, 3\}$$

$$G(x_1, x_2, x_3) = (1 - \cos(x_1x_2x_3), 1 - (1 - x_1)^{1/4} - 0.05x_2^2 + 0.15x_3, \quad \text{ج.}$$

$$x_1^2 + 0.1x_2^2 - 0.01x_3 + 1)';$$

$$D = \{(x_1, x_2, x_3)' \mid -0.1 \leq x_1 \leq 0.1, -0.1 \leq x_2 \leq 0.3, 0.5 \leq x_3 \leq 1.1\}$$

$$G(x_1, x_2, x_3) = \left( \frac{1}{3}\cos(x_2x_3) + \frac{1}{6}, -\frac{1}{9}\sqrt{x_1^2 + \sin x_3 + 1.06} - 0.1, -\frac{1}{20}e^{-x_1x_2} - \frac{10\pi - 3}{60} \right)'. \quad \text{د.}$$

$$D = \{(x_1, x_2, x_3)' \mid -1 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, 3\}$$

8. استخدم التكرار الدالي لإيجاد حلول لأنظمة غير الخطية الآتية بحيث تكون دقيقة ضمن

$10^{-5}$ ، باستخدام  $\|\cdot\|_\infty$ :

$$\begin{array}{ll}
 \text{أ.} & x_2^2 + x_2 - x_1 = 0 \\
 & x_1^2 - x_2^2 - x_2 = 0 \\
 \text{ب.} & 3x_1^2 - x_2^2 = 0 \\
 & 3x_1x_2^2 - x_1^3 - 1 = 0 \\
 \text{ج.} & x_1^2 + x_2 - 37 = 0 \\
 & x_1 - x_2^2 - 5 = 0 \\
 \text{د.} & x_1^2 + 2x_2^2 - x_2 - 2x_3 = 0 \\
 & x_1^2 - 8x_2^2 + 10x_3 = 0 \\
 & \frac{x_1^2}{7x_2x_3} - 1 = 0 \\
 \text{هـ.} & x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0
 \end{array}$$

9. استخدم طريقة جاوس - سيدل لتقريب النقاط الثابتة في التمرين (7) ضمن  $10^{-5}$  مستخدماً  $\|\cdot\|_\infty$ .

10. كرر التمرين (8) باستخدام طريقة جاوس - سيدل.

11. افترضنا في التمرين (11) من الفصل (9.5) مسألة تنبؤ لمجتمع نوعين من الكائنات الحية اللذين يتنافسان على كمية الطعام نفسها. وافترضنا في تلك المسألة. أنه يمكن التنبؤ بحل نظام المعادلتين للنوعين كما يلي:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1(t)}{dt} &= x_1(t)(4 - 0.0003x_1(t) - 0.0004x_2(t)) \\
 \frac{dx_2(t)}{dt} &= x_2(t)(2 - 0.0002x_1(t) - 0.0001x_2(t)).
 \end{aligned}$$

نرغب في هذا التمرين أن نفترض مسألة تحديد التوازن بين مجتمع هذين النوعين. وإن المعيار الرياضي اللازم تحقيقه لكي يكون هذان المجتمعان في حالة توازن هو تحقيق المعادلتين الآتيتين:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{dx_2(t)}{dt} = 0$$

إن هذا يحدث عندما ينقرض النوع الأول ويكون تعداد مجتمع النوع الثاني 20 000 أو عندما ينقرض النوع الثاني ويكون مجتمع النوع الأول 13 333. هل يمكن أن يحدث التوازن في أي حالة أخرى؟

12. برهن أن الدالة  $F$  التطبيق على  $\mathbb{R}^n \subset D$  إلى  $\mathbb{R}^n$  تكون متصلة على  $x_0 \in D$ . بالضبط إذا كان لأي عدد  $\varepsilon > 0$  يوجد عدد  $\delta > 0$  بحيث تتحقق لأي معيار  $\|\cdot\|$ ، الخاصية  $\|F(x) - F(x_0)\| < \varepsilon$  عندما  $x_0 \in D$  ويكون  $\|x - x_0\| < \delta$ .

## Newton's Method

## طريقة نيوتن 2.10

لقد تحوّلت المسألة في المثال (2) من الفصل السابق إلى مسألة النقطة الثابتة عن طريق الحل الجبري للمعادلات الثلاث للمتغيرات الثلاثة  $x_1, x_2, x_3$ . وعلى كل حال فمن المستغرب أن تنجح هذه الطريقة. وسنفترض في هذا الفصل طريقة لوغارتمية لتنفيذ هذا التحويل في أحوال أعم. لإنشاء خوارزمية تنتج طريقة مناسبة للنقطة الثابتة في حالة البعد الواحد؛ وجدنا دالة  $\phi$  بحيث إن الخاصية

$$g(x) = x - \phi(x)f(x)$$

تعطي تقارباً تربيعياً للنقطة الثابتة  $p$  للدالة  $g$ . (انظر الفصل 4.2) لقد ظهرت طريقة نيوتن من هذا الشرط باختيار  $\phi(x) = 1/f'(x)$ . بافتراض  $f'(x) \neq 0$  إن استخدام طريقة مشابهة في حالة  $n$  من الأبعاد تتطلب التعامل مع مصفوفة

$$A(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} a_{11}(\mathbf{x}) & a_{12}(\mathbf{x}) & \cdots & a_{1n}(\mathbf{x}) \\ a_{21}(\mathbf{x}) & a_{22}(\mathbf{x}) & \cdots & a_{2n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1}(\mathbf{x}) & a_{n2}(\mathbf{x}) & \cdots & a_{nn}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

حيث كل عنصر  $a_{ij}(\mathbf{x})$  دالة من  $\mathbb{R}^n$  إلى  $\mathbb{R}$ . إن هذا يتطلب إيجاد مصفوفة  $A(\mathbf{x})$  بحيث إن

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - A(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x})$$

تعطي تقارباً تربيعياً لحل المعادلة  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  بافتراض أن  $A(\mathbf{x})$  لها معكوس بالقرب من النقطة الثابتة  $\mathbf{p}$  في  $\mathbf{G}$ .

وتوازي مبرهنة الآتية مبرهنة (8.2) في الفصل (4.2). ويتطلب برهانها القدرة على التعبير عن  $\mathbf{G}$  بدلالة سلسلة تايلور في  $n$  من المتغيرات حول  $\mathbf{p}$ .

### مبرهنة 7.10

لتكن  $\mathbf{p}$  حلاً للمعادلة  $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ . افترض أنه يوجد عدد  $\delta > 0$  بحيث

(i)  $\partial g_i / \partial x_j$  متصل على  $N_\delta = \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| < \delta\}$  لكل  $i = 1, 2, \dots, n$  و  $j = 1, 2, \dots, n$ ؛

(ii)  $\partial^2 g_i(\mathbf{x}) / (\partial x_j \partial x_k)$  متصل و  $|\partial^2 g_i(\mathbf{x}) / (\partial x_j \partial x_k)| \leq M$  لثابت ما  $M$  عندما  $\mathbf{x} \in N_\delta$  كل

$$k = 1, 2, \dots, n; \text{ و } j = 1, 2, \dots, n \text{ و } i = 1, 2, \dots, n$$

(iii)  $\partial g_i(\mathbf{p}) / \partial x_k = 0$  لكل  $i = 1, 2, \dots, n$  و  $k = 1, 2, \dots, n$ ؛

عندئذ يوجد عدد  $\delta \leq \delta$  بحيث إن المتتالية الناتجة عن  $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{G}(\mathbf{x}^{(k-1)})$  تتقرب تربيعياً إلى

$\mathbf{p}$  لأي اختيار  $\mathbf{x}^{(0)}$  يحقق  $\|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{p}\|_\infty < \delta$ . بالإضافة إلى ذلك فإن

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{p}\|_\infty \leq \frac{n^2 M}{2} \|\mathbf{x}^{(k-1)} - \mathbf{p}\|_\infty^2 \quad \text{لكل } k \geq 1$$

لكي تستخدم مبرهنة (7.10)؛ افترض أن  $A(\mathbf{x})$  مصفوفة  $n \times n$  مدخلاتها دوال من  $\mathbb{R}^n$  إلى  $\mathbb{R}$

على صيغة المعادلة (5.10). حيث ستختار المدخلات المنتهية لاحقاً. وافترض بالإضافة إلى ذلك

أن  $A(\mathbf{x})$  لها معكوس بالقرب من  $\mathbf{p}$  الذي هو حل للمعادلة  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ . وافترض أن  $b_{ij}(\mathbf{x})$  تمثل

المدخلة ذات الصف  $i$  والعمود  $j$  في  $A(\mathbf{x})^{-1}$ .

بما أن  $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - A(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x})$  يكون لدينا  $g_i(\mathbf{x}) = x_i - \sum_{j=1}^n b_{ij}(\mathbf{x}) f_j(\mathbf{x})$  ويكون

$$\left. \begin{aligned} i = k & \text{ , إذا كان } , 1 - \sum_{j=1}^n \left( b_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(\mathbf{x}) + \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k}(\mathbf{x}) f_j(\mathbf{x}) \right) \\ i \neq k & \text{ , إذا كان } , - \sum_{j=1}^n \left( b_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(\mathbf{x}) + \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k}(\mathbf{x}) f_j(\mathbf{x}) \right) \end{aligned} \right\} = \frac{\partial g_i}{\partial x_k}(\mathbf{x})$$

وتؤدي مبرهنة (7.10) إلى أننا نحتاج إلى  $\partial g_i(\mathbf{p})/\partial x_k = 0$  لكل  $i = 1, 2, \dots, n$  و  $k = 1, 2, \dots, n$ . إن هذا يعني أنه لكل  $i = k$ ، يكون

$$0 = 1 - \sum_{j=1}^n b_{ij}(\mathbf{p}) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\mathbf{p})$$

ولذلك يكون

$$\sum_{j=1}^n b_{ij}(\mathbf{p}) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\mathbf{p}) = 1 \quad (6.10)$$

عندما  $i \neq k$ ، يكون

$$0 = - \sum_{j=1}^n b_{ij}(\mathbf{p}) \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(\mathbf{p})$$

ولذلك فإن

$$\sum_{j=1}^n b_{ij}(\mathbf{p}) \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(\mathbf{p}) = 0 \quad (7.10)$$

وبتعريف المصفوفة  $J(\mathbf{x})$  كما يلي:

$$J(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (8.10)$$

نرى أن الشرطين (6.10) و (7.10) يتطلبان أن

$$A(\mathbf{p}) = J(\mathbf{p})^{-1} J(\mathbf{p}) = I$$

ومن ثم فإن اختيارًا مناسبًا للمصفوفة  $A(\mathbf{x})$  هو  $A(\mathbf{x}) = J(\mathbf{x})$ ، لأنه يحقق الشرط (iii) من مبرهنة (7.10).

تعرف الدالة  $G$  بالمعادلة

$$G(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - J(\mathbf{x})^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

وننشأ عملية التكرار التالي من اختيار  $\mathbf{x}^{(0)}$  وتوليد المعادلة (9.10)

$$\mathbf{x}^{(k)} = G(\mathbf{x}^{(k-1)}) = \mathbf{x}^{(k-1)} - J(\mathbf{x}^{(k-1)})^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k-1)}) \quad (9.10)$$

تسمى هذه العملية بعملية نيوتن للأنظمة غير الخطية (Newton's method for nonlinear systems) ويتوقع أن تعطي تقاربًا تربيعيًا عمومًا. على أن يكون معلومًا لدينا قيمة بداية دقيقة على نحو كافٍ، وتكون  $J(\mathbf{p})^{-1}$  موجودة.

وتسمى المصفوفة  $J(x)$  مصفوفة جاكوبيان (Jacobian matrix) ولها عدد من التطبيقات في التحليل. ويمكن أن تكون معلومة لدى القارئ، وخصوصاً في تطبيقات التكامل المضاعف لالة في متغيرات متعددة حول منطقة تحتاج إلى تحويل المتغيرات. إن ضعف طريقة نيوتن تظهر من الحاجة إلى حساب المصفوفة  $J(x)$  وإيجاد عكوسها في كل خطوة. ومن الناحية العملية، يتم تجنب الحساب الصريح للمصفوفة  $J(x)^{-1}$  بتنفيذ العملية بطريقة ثنائية الخطوة.

أولاً: يجب إيجاد متجه  $y$  الذي يحقق  $J(x^{(k-1)})y = -F(x^{(k-1)})$ ، ثم لتقريب الجديد  $x^{(k)}$  يجمع مع  $x^{(k-1)}$ . وتستخدم الخوارزمية 1.10 العملية ثنائية الخطوة.

### طريقة نيوتن للأنظمة Newton's Method for systems

لإيجاد تقريب لحل نظام غير خطي  $F(x) = 0$  إذا علم تقريب مبدئي  $x$ . المدخلات: عدد  $n$  من المعادلات والمجاهيل؛ تقريب مبدئي  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ . حد خطأ مسوح به  $TOL$ ، أكبر عدد من التكرارات (التراجعات)  $N$ . المخرجات: حل تقريبي  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$  أو عبارة تفيد بأن عدد التكرارات قد تم تخطيه.

الخطوة	المضمون
1	ضع $k = 1$
2	عندما $(k \leq N)$ نفذ الخطوات 3 - 7.
3	احسب $F(x)$ و $J(x)$ حيث $J(x)_{i,j} = (\partial f_i(x) / \partial x_j)$ لكل $1 \leq i, j \leq n$ .
4	حل النظام الخطي $n \times n$ . $J(x)y = -F(x)$ لإيجاد $y$ .
5	ضع $x = x + y$
6	إذا كان $\ y\  < TOL$ فإن المخرجات $(x)$ ( كانت العملية ناجحة). توقف.
7	ضع $k = k + 1$
8	المخرجات (تم تخطي العدد الأكبر من التكرارات $N$ ). ( العملية لم تنجح). توقف.

أثبت أن النظام غير الخطي الآتي من المثال (2) في الفصل (1.10)

$$3x_1 - \cos(x_2x_3) - \frac{1}{2} = 0$$

$$x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06 = 0$$

$$e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0$$

كان أول ظهور للمصفوفة جاكوبيان في عام 1815 في بحث نشره كوشي (Cauchy). ولكن جاكوبي (Jacobi)

كتب

*De determinantibus  
functionalibus*

في عام 1841 وبرهن العديد من النتائج عن هذه المصفوفة



مثال 1

له حلُّ تقريبي عند  $(0.5, 0, -0.52359877)'$ .

نستخدم طريقة نيوتن للحصول على هذا التقريب المبدئي  $\mathbf{x}^{(0)} = (0.1, 0.1, -0.1)'$

$$\mathbf{F}(x_1, x_2, x_3) = (f_1(x_1, x_2, x_3), f_2(x_1, x_2, x_3), f_3(x_1, x_2, x_3))'$$

حيث

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 - \cos(x_2x_3) - \frac{1}{2},$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06,$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3}. \quad \text{و}$$

إن مصفوفة جاكوبيان  $J(\mathbf{x})$  لهذا النظام هي

$$J(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 3 & x_3 \sin x_2x_3 & x_2 \sin x_2x_3 \\ 2x_1 & -162(x_2 + 0.1) & \cos x_3 \\ -x_2e^{-x_1x_2} & -x_1e^{-x_1x_2} & 20 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k-1)} \\ x_3^{(k-1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1^{(k-1)} \\ y_2^{(k-1)} \\ y_3^{(k-1)} \end{bmatrix} \quad \text{و}$$

$$\begin{bmatrix} y_1^{(k-1)} \\ y_2^{(k-1)} \\ y_3^{(k-1)} \end{bmatrix} = - \left( J(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, x_3^{(k-1)}) \right)^{-1} \mathbf{F}(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, x_3^{(k-1)}) \quad \text{حيث}$$

وهكذا يجب في الخطوة  $k$  فقط حلُّ النظام الخطي  $J(\mathbf{x}^{(k-1)}) \mathbf{y}^{(k-1)} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k-1)})$  لإيجاد  $\mathbf{y}^{(k-1)}$  حيث

$$J(\mathbf{x}^{(k-1)}) = \begin{bmatrix} 3 & x_3^{(k-1)} \sin x_2^{(k-1)} x_3^{(k-1)} & x_2^{(k-1)} \sin x_2^{(k-1)} x_3^{(k-1)} \\ 2x_1^{(k-1)} & -162(x_2^{(k-1)} + 0.1) & \cos x_3^{(k-1)} \\ -x_2^{(k-1)} e^{-x_1^{(k-1)} x_2^{(k-1)}} & -x_1^{(k-1)} e^{-x_1^{(k-1)} x_2^{(k-1)}} & 20 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}^{(k-1)} = \begin{bmatrix} y_1^{(k-1)} \\ y_2^{(k-1)} \\ y_3^{(k-1)} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k-1)}) = \begin{bmatrix} 3x_1^{(k-1)} - \cos x_2^{(k-1)} x_3^{(k-1)} - \frac{1}{2} \\ (x_1^{(k-1)})^2 - 81(x_2^{(k-1)} + 0.1)^2 + \sin x_3^{(k-1)} + 1.06 \\ e^{-x_1^{(k-1)} x_2^{(k-1)}} + 20x_3^{(k-1)} + \frac{10\pi - 3}{3} \end{bmatrix}$$

تظهر النتائج باستخدام طريقة التكرار هذه في جدول (3.10).

جدول 3.10

$\ x^{(k)} - x^{(k-1)}\ $	$x_3^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_1^{(k)}$	$k$
	-0.10000000	0.10000000	0.10000000	0
0.422	-0.52152047	0.01946686	0.50003702	1
$1.79 \times 10^{-2}$	-0.52355711	0.00158859	0.50004593	2
$1.58 \times 10^{-3}$	-0.52359845	0.00001244	0.50000034	3
$1.24 \times 10^{-5}$	-0.52359877	0.00000000	0.50000000	4
0	-0.52359877	0.00000000	0.50000000	5

إن المثال السابق يشرح إمكانية تقارب طريقة نيوتن بسرعة فائقة حالما يوجد تقريب يكون قريباً من الحل الحقيقي. وعلى كل حال فليس من السهل دائماً تحديد قيد بدء تؤدي إلى حل. والطريقة صعبة التنفيذ مقارنة بغيرها. نفترض في الفصل الآتي طريقة للتخصص من الضف الأخير. وعادة ما يمكن إيجاد نقاط بدء بالطريقة التي سنبحث فيها في الفصل (4.10). ويمكن إيجاد التقريب المبدئي لحلول الأنظمة غير الخطية  $2 \times 2$  و  $3 \times 3$  غالباً باستخدام تسهيلات التطبيقات البيانية في مابل Maple.

إن النظام غير الخطي

$$\begin{aligned}x_1^2 - x_2^2 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 + x_2^2 - 6 &= 0\end{aligned}$$

له حلان  $(0.625204094, 2.179355825)$  و  $(-1.334532188, -2.109511920)$

لاستخدام مابل Maple نعرّف أولاً المعادلتين

```
>eq1:=x1^2-x2^2+2*x2=0;
>eq2:=2*x1+x2^2-6=0;
```

لكي نحصل على التطبيق البياني لمعادلتين على المجموعة  $3 \leq x_1, x_2 \leq -3$  أدخل الأوامر

```
>with(plots);
>implicitplot([eq1,eq2],x1=-3..3,x2=-3..3);
```

ويمكننا من التطبيق في شكل (2.10) أن نقدر أن هناك حلولاً بالقرب من  $(2.2, 0.64)$

و  $(-1.3, -2.1)$ . ويعطينا هذا نقاط ابتداء جيدة لطريقة نيوتن.

تبدو المسألة بثلاثة أبعاد أصعب. افترض النظام غير الخطي

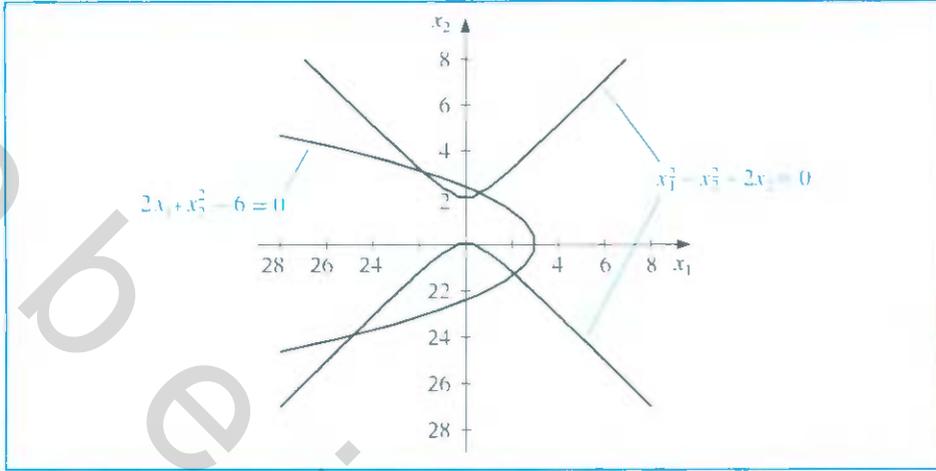
$$\begin{aligned}2x_1 - 3x_2 + x_3 - 4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 4 &= 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4 &= 0\end{aligned}$$

عرّف المعادلات الثلاث باستخدام أوامر Maple

```
>eq1:=2*x1-3*x2+x3-4=0;
>eq2:=2*x1+x2-x3+4=0;
>eq3:=x1^2+x2^2+x3^2-4=0;
```

إن المعادلة الثالثة تصف كرة نصف قطرها 2 ومركزها  $(0, 0, 0)$ . ولذلك كل من  $x_1$  و  $x_2$

و  $x_3$  يقع في  $[-2, 2]$ . إن أوامر Maple للحصول على التطبيق في هذه الحالة هي



شكل 2.10

```
>with(plots);
>implicitplot3d({eq1,eq2,eq3},x1=-2..2,x2=-2..2,x3=-2..2);
```

يوجد خيارات متعددة للتطبيق في ثلاثي الأبعاد. وهي متاحة في Maple لعزل حلّ النظام غير الخطي. ويمكننا على سبيل المثال تدوير التطبيق لنتمكن من رؤية أفضل لأجزاء السطوح. ثم يمكننا التركيز على مناطق حدوث التقاطعات وتغيير صيغة الإحداثيات للحصول على منظر أدق لإحداثيات التقاطع. إن التقريب المبدئي المعقول لهذه المسألة هو

$$(x_1, x_2, x_3)' = (-0.5, -1.5, 1.5)'$$

## EXERCISE SET

## مجموعة التمارين 2.10

1. استخدم طريقة نيوتن بأخذ  $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$  لحساب  $\mathbf{x}^{(2)}$  لكل نظام غير خطي مما يلي:

أ.  $4x_1^2 - 20x_1 + \frac{1}{3}x_2^2 + 8 = 0$       ب.  $\sin(4\pi x_1 x_2) - 2x_2 - x_1 = 0$

ج.  $x_1(1 - x_1) + 4x_2 = 12$       د.  $5x_1^2 - x_2^2 = 0$

هـ.  $\frac{1}{2}x_1 x_2^2 + 2x_1 - 5x_2 + 8 = 0$       و.  $x_2 - 0.25(\sin x_1 + \cos x_2) = 0$

2. استخدم طريقة نيوتن بأخذ  $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$  لحساب  $\mathbf{x}^{(2)}$  لكل نظام غير خطي مما يلي:

أ.  $3x_1 - \cos(x_2 x_3) - \frac{1}{2} = 0$       ب.  $x_1^2 + x_2 - 37 = 0$

ج.  $4x_1^2 - 625x_2^2 + 2x_2 - 1 = 0$       د.  $x_1 - x_2^2 - 5 = 0$

هـ.  $e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0$       و.  $x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0$

ز.  $15x_1 + x_2^2 - 4x_3 = 13$       ح.  $10x_1 - 2x_2^2 + x_2 - 2x_3 - 5 = 0$

ط.  $x_1^2 + 10x_2 - x_3 = 11$       ي.  $8x_2^2 + 4x_3^2 - 9 = 0$

ث.  $x_2^3 - 25x_3 = -22$       ج.  $8x_2 x_3 + 4 = 0$

3. استخدم التسهيلات المتاحة في التطبيق في Maple لتقريب حلول الأنظمة غير الخطية الآتية:

ب.  $\varepsilon i \pi (4\pi x_1 x_2) - 2x_2 - x_1 = 0$

$\left(\frac{4\pi - 1}{4\pi}\right)(e^{2x_1} - e) + 4ex_2^2 - 2ex_1 = 0$

د.  $5x_1^2 - x_2^2 = 0$

$x_2 - 0.25(\sin x_1 + \cos x_2) = 0$

4. استخدم التسهيلات المتاحة في التطبيق في Maple لتقريب حلول الأنظمة غير الخطية الآتية:

ب.  $x_1^2 + x_2 - 37 = 0$

$x_1 - x_2^2 - 5 = 0$

$x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0$

$-4 \leq x_1 \leq 8, -2 \leq x_2 \leq 2, -6 \leq x_3 \leq 0$

د.  $10x_1 - 2x_2^2 + x_2 - 2x_3 - 5 = 0$

$8x_2^2 + 4x_3^2 - 9 = 0$

$8x_2 x_3 + 4 = 0$

$0 \leq x_1 \leq 2, -2 \leq x_2 \leq 0, 0 \leq x_3 \leq 2$

$0 \leq x_1 \leq 2, 1 \leq x_2 \leq 2, -2 \leq x_3 \leq 0$

5. استخدم الأجوبة التي حصلت عليها في التمرين (3) بوصفها تقريبات مبدئية لطريقة نيوتن. كرر (عمليات تراجعية) للحصول على  $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| < 10^{-6}$ .

6. استخدم الأجوبة التي حصلت عليها في التمرين (4) بوصفها تقريبات مبدئية لطريقة نيوتن. كرر (عمليات تراجعية) للحصول على  $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| < 10^{-6}$ .

7. استخدم طريقة نيوتن لتجد حلًا للأنظمة غير الخطية الآتية في المجال المعطى كرر للحصول على  $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| < 10^{-6}$ .

ب.  $\ln(x_1^2 + x_2^2) - \sin(x_1 x_2) = \ln 2 + \ln \pi$

$e^{x_1 - x_2} + \cos(x_1 x_2) = 0$

استخدم  $x^{(0)} = (2, 2)^t$

د.  $6x_1 - 2\cos(x_2 x_3) - 1 = 0$

$9x_2 + \sqrt{-x_1^2 + \sin x_3 + 1.06} + 0.9 = 0$

$6Cx_3 + 3e^{-x_1 x_2} + 10\pi - 3 = 0$

استخدم  $x^{(0)} = (0, 0, 0)^t$

أ.  $3x_1^2 - x_2^2 = 0$

$3x_1 x_2^2 - x_1^3 - 1 = 0$

استخدم  $x^{(0)} = (1, 1)^t$

ج.  $x_1^3 + x_1^2 x_2 - x_1 x_3 + 6 = 0$

$e^{x_1} + e^{x_2} - x_3 = 0$

$x_2^2 - 2x_1 x_3 = 4$

استخدم  $x^{(0)} = (-1, -2, 1)^t$

8. للنظام غير الخطي

$4x_1 - x_2 + x_3 = x_1 x_4$

$-x_1 + 3x_2 - 2x_3 = x_2 x_4$

$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = x_3 x_4$

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$

ستة حلول.

أ. برهن أنه إذا كان  $(x_1, x_2, x_3, x_4)^t$  حلًا فإن  $(-x_1, -x_2, -x_3, x_4)^t$  حلًا أيضًا.

ب. استخدم طريقة نيوتن بثلاثة تقريبات مبدئية لتجد الحلول جميعها التي تحقق

$\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| < 10^{-5}$

$$3x_1 - \cos(x_2 x_1) - \frac{1}{2} = 0$$

$$x_1^2 - 625x_2^2 - \frac{1}{4} = 0$$

$$e^{-3x_1} + 20x_1 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0$$

9. للنظام غير الخطي

مصفوفة جاكوبيان منفردة على نقطة الحل. طبق طريقة نيوتن بأخذ  $x^{(0)} = (1, 1 - 1)^T$  لاحظ أن التقارب يمكن أن يكون بطيئاً أو يمكن ألا يحدث ضمن عدد معقول من التكرارات.

10. ما الصيغة التي تؤول إليها طريقة نيوتن عند تطبيقها على النظام الخطي  $Ax = b$  المعطى بالصيغة

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

حيث  $A$  مصفوفة لها معكوس؟

11. برهن أنه عندما يكون  $n = 1$  فإن طريقة نيوتن المعطاة بالمعادلة (9.10) تؤول إلى طريقة نيوتن المعهودة المعطاة بالمعادلة (5.2).

12. يمكن التنبؤ بمقدار الضغط اللازم لإغراق جسم كبير ثقيل في تربة طرية متجانسة واقعة فوق أرض ذات قاعدة صلبة. من خلال مقدار الضغط اللازم لإغراق أجسام أصغر في التربة نفسها.

وعلى نحو خاص، فإن مقدار الضغط  $P$  اللازم لإغراق صفيحة دائرية نصف قطرها  $r$  في أرض طرية بمسافة  $d$ ، حيث تقع أرض القاعدة الصلبة على مسافة  $D > d$  تحت السطح يمكن تقديره بمعادلة على الصيغة  $p = k_1 e^{k_2 r} + k_3 r$ .

حيث  $k_1, k_2, k_3$  وثوابت، حيث  $k_2 > 0$  تعتمد على  $d$  وعلى تجانس التربة، وليس على نصف قطر الصفيحة. (انظر [Bek, pp. 89–94]).

أ. أوجد قيم  $k_1, k_2, k_3$  إذا افترضنا أن صفيحة نصف قطرها 1 in، تتطلب ضغطاً مقداره  $10 \text{ lb/in}^2$  لترسو بمقدار 1 ft في حقل موحد. وصفيحة ذات نصف قطر 2 in تتطلب ضغطاً مقداره  $12 \text{ lb/in}^2$  لترسو قدماً واحدة، وأن الصفيحة ذات نصف قطر 3 in تتطلب ضغطاً مقداره  $15 \text{ lb/in}^2$  لترسو بالمسافة نفسها.

(مفترضين أن عمق الأرض الموحلة أكثر من 1 ft.)

ب. استخدم حساباتك من الفقرة (أ) لتتنبأ بأصغر حجم لصفيحة دائرية لازمة لتحمل ثقلاً مقداره 500 lb لكي ترسو مسافة أقل من 1 ft في حقل الأرض نفسها.

13. لإيجاد شكل مسقط معتمد على الجاذبية بحيث يجعل زمن نقل الجسيمات الحبيبية أقل ما يمكن، قام شيارلا وشارلتون وروبرتس [CCR] C. Chiarella, W. Charlton, and A.W. Roberts بحل المعادلات الآتية بطريقة نيوتن

$$n = 1, 2, \dots, N-1 \quad \text{لكل} \quad f_n(\theta_1, \dots, \theta_N) = \frac{\sin \theta_{n+1}}{v_{n+1}} (1 - \mu w_{n+1}) - \frac{\sin \theta_n}{v_n} (1 - \mu w_n) = 0 \quad (\text{i})$$

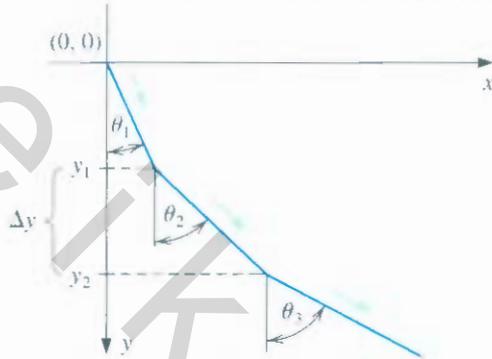
$$\text{حيث} \quad f_N(\theta_1, \dots, \theta_N) = \Delta y \sum_{i=1}^N \tan \theta_i - X = 0 \quad (\text{ii})$$

$$n = 1, 2, \dots, N \quad \text{لكل} \quad v_n^2 = v_0^2 + 2gn\Delta y - 2\mu\Delta y \sum_{j=1}^n \frac{1}{\cos \theta_j} \quad \text{أ.}$$

$$\text{ب. و} \quad w_n = -\Delta y v_n \sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i^3 \cos \theta_i} \quad \text{لكل} \quad n = 1, 2, \dots, N$$

الثابت  $v_0$  هو السرعة الابتدائية للمادة الحبيبية،  $X$  هو الإحداثي  $x$  لنهاية المسقط،  $\mu$  هي قوة الاحتكاك،  $N$  عند أجزاء المسقط و  $g = 32.17 \text{ft/s}^2$  هو ثابت الجاذبية الأرضية. المتغير  $v_i$  هو قياس زاوية الفقرة  $i$  للمسقط مع العمود كما هو مبين في الشكل الآتي، و  $v_i$  سرعة الجسيم الحبيبية في الفقرة  $i$  للمسقط.

حل (i) و (ii) للمعطيات الآتية  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_N)$  حيث  $\mu = 0$ ،  $X = 2$ ،  $\Delta y = 0.2$ ،  $N = 20$  و  $v_0 = 0$ . حيث يمكن الحصول على قيم  $w_n$  و  $v_n$  مباشرة من (أ) و (ب). كرر التراجع حتى تحصل على  $\|\theta^{(k)} - \theta^{(k-1)}\|_\infty < 10^{-2}$ .



14. تهدف تجربة بيولوجية ممتعة ( انظر [Schr2] ) إلى تحديد أعلى رتبة لحرارة الماء  $X_M$  التي يمكن للأنواع المختلفة من الهيدرا أن تعيش بها من دون أن تؤثر في مدة حياتها. إن إحدى الطرائق لحل هذه المسألة هي التوفيق بين مجموعة بيانات التجزئة باستخدام المربعات الصغرى الموزونة، ويكون التوفيق على الصيغة

$$f(x) = y = a(x - b)^c$$

تمثل قيم  $x$  رتبة حرارة الماء في البيانات. والثابت  $b$  هو المقارب لمنحنى  $f$ ، عليه فهو تقريب للقيمة  $X_M$ .

$$\text{أ. برهن أن اختيار } a, b, c \text{ لجعل } \sum_{i=1}^n \left[ w_i y_i - \frac{a}{(x_i - b)^c} \right]^2$$

أصغر ما يمكن يؤدي إلى حل النظام غير الخطي

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n w_i y_i}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{(x_i - b)^{2c}}}$$

$$0 = \sum_{i=1}^n \frac{w_i y_i}{(x_i - b)^c} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{(x_i - b)^{2c+1}} - \sum_{i=1}^n \frac{w_i y_i}{(x_i - b)^{c+1}} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{(x_i - b)^{2c}}$$

$$0 = \sum_{i=1}^n \frac{w_i y_i}{(x_i - b)^c} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\ln(x_i - b)}{(x_i - b)^{2c}} - \sum_{i=1}^n \frac{w_i y_i \ln(x_i - b)}{(x_i - b)^c} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{(x_i - b)^{2c}}$$

ب. حل النظام غير الخطي للأنواع الحية بالبيانات الآتية، واستخدم الأوزان  $w_i = \ln y_i$ .

	4	3	2	1	$i$
$y_i$	21.60	4.75	3.80	2.40	
$x_i$	30.2	31.2	31.5	31.8	

## Quasi - Newton Methods

## 3.10 أشباه طرائق نيوتن

في طريقة نيوتن لحل أنظمة المعادلات غير الخطية ضعف واضح يكمن في التكرار التراجعي، ويجب حساب مصفوفة جاكوبيان وحل نظام خطي  $n \times n$  يستخدم هذه المصفوفة. افترض مقدار الحساب المرتبط بتكرار تراجعي واحد في طريقة نيوتن. إن مصفوفة جاكوبيان المرتبطة بنظام  $n$  من المعادلات غير الخطية على الصيغة  $F(x) = 0$  يتطلب  $n^2$  من المشتقات الجزئية للدوال  $n$  التي هي مركبات  $F$  الواجب تحديدها وإيجاد قيمتها. وفي معظم الحالات يكون إيجاد القيم الصحيحة للمشتقات الجزئية غير مريح. على الرغم من أنه قد أصبحت هذه المسألة قابلة للتتبع مع انتشار أنظمة الحساب الرمزي كما في مابل Maple. وعندما يكون التقييم الصحيح غير عملي، يمكننا استخدام تقريبات الفرق المحدود لتقريب المشتقات الجزئية. وعلى سبيل المثال

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x^{(i)}) \approx \frac{f_j(x^{(i)} + e_k h) - f_j(x^{(i)})}{h} \quad (10.10)$$

حيث  $h$  صغيرة بالقيمة المطلقة، و  $e_k$  هو المتجه الذي عنصره غير الصفري الوحيد هو  $k$  في الإحداثي  $k$  لهذا التقريب. وعلى كل حال لا تزال هناك حاجة إلى تنفيذ ما لا يقل عن  $n^2$  من عمليات التقييم الدالي العددية. وذلك لتقريب جاكوبيان. ولا ينقص من مقدار الحساب الذي هو من الرتبة  $O(n^3)$  عموماً، والذي يلزم لحل النظام الخطي الذي يحتوي الجاكوبيان التقريبي هذا. ومن ثم فإن الجهد الحسابي لعملية واحدة في طريقة نيوتن لا يقل عن  $(n^2 + n)$  من عمليات التقييم الدالي العددي ( $n^2$  لتقييم مصفوفة جاكوبيان و  $n$  لتقييم  $F$ )، بالإضافة إلى  $O(n^3)$  من العمليات الحسابية لحل النظام الخطي. إن هذا الكم من الجهد الحسابي كبير. إلا في حالات قيم  $n$  الصغيرة نسبياً والدوال سهلة التقييم عددياً. سنعالج في هذا الفصل تعميماً لطريقة القاطع (Secant Method) لأنظمة المعادلات غير الخطية، وهو ما يعرف بطريقة برويدن. (انظر Boyden's method |Broyl).

تتطلب الطريقة  $n$  فقط من عمليات التقييم الدالي العددي لكل تكرار (إعادة). كما ينقص عدد العمليات الحسابية إلى  $O(n^2)$ . وإنها تنتمي إلى عائلة من الطرائق تُسمى "تحديث أقل تغير في القاطع" (least - change secant updates) الذي ينتج خوارزميات تُسمى أشباه نيوتن  $\leftarrow$  quasi Newton. إن هذه الطرائق تستعوض عن مصفوفة جاكوبيان في طريقة نيوتن باستخدام مصفوفة تقريب محدثة في كل تكرار. وإن سلبية هذه الطرائق تكمن في خسارة التقارب التريبيعي في طريقة نيوتن، الذي يستعاض عنه عموماً بتقارب يُسمى الخطي العالي Superlinear والذي يتضمن أن

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\|x^{(i+1)} - p\|}{\|x^{(i)} - p\|} = 0$$

حيث تعبر  $P$  عن حل المعادلة  $x^{(i+1)}$  و  $x^{(i)}$  و  $F(x) = 0$  وهي تقريبات متتالية لحل  $P$ . ونجد في معظم التطبيقات أن الاختزال إلى التقارب الخطي العالي مقبول على نحو أفضل بوصفه بديلاً لتقليل مقدار الحساب. وهناك سلبية أخرى لطرائق أشباه نيوتن؛ إذ إنها لا تصح نفسها بنفسها بخلاف ما يحدث في طريقة نيوتن.

إن طريقة نيوتن تصحح خطأ تقريب عموماً عن طريق التكرار المتتالي، ولكن طريقة برويدن لا تفعل ذلك إلا إذا أدخلت ضوابط خاصة بذلك. لشرح طريقة برويدن، افترض أن لديك تقريبا مبدئياً  $\mathbf{x}^{(0)}$  لحل للنظام  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ . نحسب التقريب الآتي  $\mathbf{x}^{(1)}$  بطريقة نيوتن نفسها. أو نستخدم في حالة عدم الملائمة لحساب  $J(\mathbf{x}^{(0)})$  بالضبط معادلات الفروق لمعادلة في المعادلة (10.10) لتقريب المشتقات الجزئية. وعلى كل حال فلحساب  $\mathbf{x}^{(2)}$  نبتعد عن طريقة نيوتن ونتفحص طريقة القاطع لمعادلة واحدة غير خطية. وطريقة القاطع تستخدم التقريب

$$f'(x_1) \approx \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

بوصفه بديلاً للمشتقة  $f'(x_1)$  في طريقة نيوتن. في الأنظمة الخطية،  $\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}$  هو متجه وإن عملية القسمة المقابلة له غير معرفة. وعلى كل حال تيسر العملية سيراً ممثلاً، بأن نستخلص عن المصفوفة  $J(\mathbf{x}^{(1)})$  في طريقة نيوتن للأنظمة باستخدام مصفوفة  $A_1$  ذات الخاصية

$$A_1(\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)}) \quad (11.10)$$

إن أي متجه في  $\mathbb{R}^n$  يمكن كتابته بوصفه مجموعاً لأحد مضاعفات  $\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}$  مع أحد مضاعفات المتجهة العمودية للمتجه  $\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}$ . ولكي نعرف المصفوفة  $A_1$  تعريفاً وحيداً، نحاج إلى تحديد سلوكها على المتجهة العمودية للمتجه  $\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}$ . وبما أنه لا يوجد أي معلومات حول تغير  $\mathbf{F}$  باتجاه عمودي على  $\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}$  فإننا نطلب أن

$$(\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)})^t \mathbf{z} = 0 \quad \text{ما دام} \quad A_1 \mathbf{z} = J(\mathbf{x}^{(0)}) \mathbf{z} \quad (12.10)$$

وهكذا فإن أي متجه عمودي على  $\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}$  لا يتأثر بالتحديث من  $J(\mathbf{x}^{(0)})$  التي استخدمت لحساب  $\mathbf{x}^{(1)}$ .  $A_1$  التي تستخدم لحساب  $\mathbf{x}^{(2)}$ . إن الشرطين (10.11) و (13.12) يعرفان  $A_1$  تعريفاً وحيداً (انظر [IDM]) على الصيغة

$$A_1 = J(\mathbf{x}^{(0)}) + \frac{[\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)}) - J(\mathbf{x}^{(0)})(\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)})](\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)})^t}{\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|_2^2}$$

إنها هذه المصفوفة التي تستخدم مكان  $J(\mathbf{x}^{(1)})$  لتحديد  $\mathbf{x}^{(2)}$  على الصيغة

$$\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)} - A_1^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)})$$

وحالما تحدد  $\mathbf{x}^{(2)}$ ، تتكرر العملية لتحديد  $\mathbf{x}^{(3)}$ ، باستخدام  $A_1$  بدلاً من  $J(\mathbf{x}^{(0)})$  واستخدام  $A_i \equiv J(\mathbf{x}^{(i)})$  واستخدام  $\mathbf{x}^{(2)}$  و  $\mathbf{x}^{(1)}$  بدلاً من  $\mathbf{x}^{(0)}$  و  $\mathbf{x}^{(1)}$ ، وعموماً حالما تحدد  $\mathbf{x}^{(i)}$  فإن  $\mathbf{x}^{(i+1)}$  تحسب من

$$A_i = A_{i-1} + \frac{\mathbf{y}_i - A_{i-1} \mathbf{s}_i}{\|\mathbf{s}_i\|_2^2} \quad (13.10)$$

$$\mathbf{x}^{(i+1)} = \mathbf{x}^{(i)} - A_i^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(i)}) \quad (14.10) \text{ و}$$

حيث يستخدم الرمز  $\mathbf{y}_i = \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(i)}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(i-1)})$ ، ويُستخدم  $\mathbf{s}_i = \mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(i-1)}$  لتبسيط المعادلات. وإذا ما نُفذت الطريقة كما لُخص في المعادلتين (13.10) و (14.10) فإن عدد عمليات التقييم الدالي العددي سينخفض من  $n^2 + n$  إلى  $n$ . تلك اللازمة لإيجاد قيمة  $(\mathbf{F}, \mathbf{x}^{(i)})$  ولكن لا يزال عدد  $O(n^3)$  من الحسابات مطلوباً لحل النظام الخطي  $n \times n$  المرتبط بذلك.

(انظر الخطوة 4 في الخوارزمية (1.10)).

$$A_i s_{i+1} = -F(x^{(i)}) \quad (15.10)$$

لا يمكن تبرير استخدام الطريقة بهذه الصيغة، بسبب الاختزال من التقارب التربيعي لطريقة نيوتن إلى التقارب الخطي العالي. وعلى كل حال يمكن إدخال تحسين معتمد عن طريق استخدام معادلة شيرمان ومورسون الخاصة بإيجاد معكوس المصفوفة. (انظر على سبيل المثال [DM, p. 55])

معادلة شيرمان - موريسون [Sherman - Morrison formula]

مبرهنة 8.10

إذا كانت  $A$  مصفوفة لها معكوس و  $y$  و  $x$  متجهين، فإن  $A + xy'$  لها معكوس، حيث إن

$$(A + xy')^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}xy'A^{-1}}{1 + y'A^{-1}x} \quad \text{و} \quad y'A^{-1}x \neq -1$$

إن طريقة شيرمان - موريسون تسمح بحساب  $A_i^{-1}$  مباشرة من  $A_{i-1}^{-1}$ ، لاغية الحاجة إلى إيجاد معكوس المصفوفة عند كل تكرار. بافتراض  $A = A_{i-1}$ ،  $x = (y_i - A_{i-1}s_i) / \|s_i\|_2^2$  و  $y = s_i$  فإن المعادلة (3.10) ومبرهنة (8.10) معاً تقتضيان

$$\begin{aligned} A_i^{-1} &= \left( A_{i-1} + \frac{y_i - A_{i-1}s_i}{\|s_i\|_2^2} s_i' \right)^{-1} \\ &= A_{i-1}^{-1} - \frac{A_{i-1}^{-1} \left( \frac{y_i - A_{i-1}s_i}{\|s_i\|_2^2} s_i' \right) A_{i-1}^{-1}}{1 + s_i' A_{i-1}^{-1} \left( \frac{y_i - A_{i-1}s_i}{\|s_i\|_2^2} \right)} \\ &= A_{i-1}^{-1} - \frac{(A_{i-1}^{-1}y_i - s_i) s_i' A_{i-1}^{-1}}{\|s_i\|_2^2 + s_i' A_{i-1}^{-1} y_i - \|s_i\|_2^2} \\ &= A_{i-1}^{-1} + \frac{(s_i - A_{i-1}^{-1}y_i) s_i' A_{i-1}^{-1}}{s_i' A_{i-1}^{-1} y_i} \end{aligned} \quad (16.10)$$

ولذلك ينتج

إن هذا الحساب يحوي عملية ضرب مصفوفة - متجه فقط في كل خطوة. ولذلك يتطلب  $O(n^2)$  فقط من العمليات الحسابية.

لقد تم تجاوز حساب  $A_i$  وكذلك ضرورة حل النظام الخطي (15.10). إن الخوارزمية (2.10) تتبع من هذا الإنشاء. وتدخل المعادلة (16.10) تقنية التكرار (14.10).

برويدن Broyden

لإيجاد تقريبي لحلّ نظام غير خطي  $F(x) = 0$  إذا علم تقريبي مبدئي  $x$ .

المدخلات: عدد  $n$  من المعادلات والمجاهيل؛ تقريبي مبدئي  $x = (x_1, \dots, x_n)'$ . حد خطأ مسموح به  $TOL$ . أكبر عدد من التكرارات (التراجعات)  $N$ .  
المخرجات: حلّ تقريبي  $x = (x_1, \dots, x_n)'$  أو عبارة تفيد بأن عدد التكرارات قد تم تخطيه.

إن معادلة شيرمان - موريسون

(Sherman - Morrison)

جاءت من ملخص ورقة بحث قدمه جاك شيرمان ووينيفرد موريسون عام 1949 في اجتماع معهد الإحصاء الرياضي في بولدر، كولورادو.

Institute of Mathematical Statistics



الخطوه	المضمون
1	ضع $A_0 = J(\mathbf{x})$ حيث $J(\mathbf{x})_{i,j} = \partial f_i / \partial x_j(\mathbf{x})$ لكل $1 \leq i \leq n$ و $1 \leq j \leq n$ (ملحوظة: $\mathbf{v} = \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)})$ ).
2	ضع $A = A_0^{-1}$ (استخدم طريقة جاوس للحذف).
3	ضع $\mathbf{s} = -A\mathbf{v}$ (ملحوظة: $\mathbf{s} = \mathbf{s}_1$ ) $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{s}$ (ملحوظة: $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(1)}$ ) $k = 2$ .
4	ما دام $(k \leq N)$ فننفذ الخطوات 5 - 13.
5	ضع $\mathbf{w} = \mathbf{v}$ (احفظ $\mathbf{v}$ ) $\mathbf{v} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ (ملحوظة: $\mathbf{v} = \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)})$ ) $\mathbf{y} = \mathbf{v} - \mathbf{w}$ (ملحوظة: $\mathbf{y} = \mathbf{y}_k$ ).
6	ضع $\mathbf{z} = -A\mathbf{y}$ (ملحوظة: $\mathbf{z} = -A_{k-1}^{-1}\mathbf{y}_k$ ).
7	ضع $\mathbf{p} = -\mathbf{s}'\mathbf{z}$ (ملحوظة: $\mathbf{p} = \mathbf{s}'_k A_{k-1}^{-1}\mathbf{y}_k$ ).
8	ضع $\mathbf{u}' = \mathbf{s}'A$
9	ضع $A = A + \frac{1}{\mathbf{p}}(\mathbf{s} + \mathbf{z})\mathbf{u}'$ (انظر $A = A_k^{-1}$ ).
10	ضع $\mathbf{s} = -A\mathbf{v}$ (ملحوظة: $\mathbf{s} = -A_k^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$ ).
11	ضع $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{s}$ (ملحوظة: $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(k+1)}$ ).
12	إذا كان $\ \mathbf{s}\  < TOL$ فعندئذٍ المخرجات $(\mathbf{x})$ (كانت العملية ناجحة). توقف
13	ضع $k = k + 1$ .
14	المخرجات (تم تخطي العدد الأكبر من التكرارات $N$ ). (العملية لم تنجح). توقف



مثال 1 لقد حل النظام غير الخطي الآتي بطريقة نيوتن في المثال (1) من الفصل (10 2)

$$3x_1 - \cos(x_2 x_3) - \frac{1}{2} = 0$$

$$x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06 = 0$$

$$e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0$$

إن مصفوفة جاكوبيان لهذا النظام هي

$$J(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 3 & x_3 \sin x_2 x_3 & x_2 \sin x_2 x_3 \\ 2x_1 & -162(x_2 + 0.1) & \cos x_3 \\ -x_2 e^{-x_1 x_2} & -x_1 e^{-x_1 x_2} & 20 \end{bmatrix}$$

افترض  $\mathbf{x}^{(0)} = (0.1, 0.1, -0.1)^T$

و  $\mathbf{F}(x_1, x_2, x_3) = (f_1(x_1, x_2, x_3), f_2(x_1, x_2, x_3), f_3(x_1, x_2, x_3))^T$

حيث

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 - \cos(x_2 x_3) - \frac{1}{2},$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} -1.199950 \\ -2.269833 \\ 8.462025 \end{bmatrix}$$

فإن

وبما أن

$$\begin{aligned} A_0 &= J(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 9.999833 \times 10^{-4} & -9.999833 \times 10^{-4} \\ 0.2 & -32.4 & 0.9950042 \\ -9.900498 \times 10^{-2} & -9.900498 \times 10^{-2} & 20 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

نحصل على

$$\begin{aligned} A_0^{-1} &= J(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 0.3333332 & 1.023852 \times 10^{-5} & 1.615701 \times 10^{-5} \\ 2.108607 \times 10^{-3} & -3.086883 \times 10^{-2} & 1.535836 \times 10^{-3} \\ 1.660520 \times 10^{-3} & -1.527577 \times 10^{-4} & 5.000768 \times 10^{-2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

وبذلك فإن

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} - A_0^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} 0.4998697 \\ 1.946685 \times 10^{-2} \\ -0.5215205 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)}) = \begin{bmatrix} -3.394465 \times 10^{-4} \\ -0.3443879 \\ 3.188238 \times 10^{-2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} 1.199611 \\ 1.925445 \\ -8.430143 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} 0.3998697 \\ -8.053315 \times 10^{-2} \\ -0.4215204 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{s}_1^T A_0^{-1} \mathbf{y}_1 = 0.3424604$$

$$A_1^{-1} = A_0^{-1} + (1/0.3424604) [(s_1 - A_0^{-1}y_1) s_1' A_0^{-1}]$$

$$= \begin{bmatrix} 0.3333781 & 1.11050 \times 10^{-5} & 8.967344 \times 10^{-6} \\ -2.021270 \times 10^{-3} & -3.094849 \times 10^{-2} & 2.196906 \times 10^{-3} \\ 1.022214 \times 10^{-3} & -1.650709 \times 10^{-4} & 5.010986 \times 10^{-2} \end{bmatrix}$$

$$x^{(2)} = x^{(1)} - A_1^{-1}F(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} 0.4999863 \\ 8.737833 \times 10^{-3} \\ -0.5231746 \end{bmatrix}$$

9

يعرض جدول (4.10) تكرارات إضافية. وإن التكرار الخامس في طريقة برويدن ذو دقة أقل قليلاً من دقة التكرار الرابع بطريقة نيوتن المعطاة في المثال في نهاية الفصل السابق.

$\ x^{(k)} - x^{(k-1)}\ _2$	$x_3^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_1^{(k)}$	$k$
$7.8 \times 10^{-3}$	-0.5236918	$8.672157 \times 10^{-4}$	0.5000066	3
$8.1 \times 10^{-4}$	-0.5235954	$6.083352 \times 10^{-5}$	0.5000003	4
$6.24 \times 10^{-5}$	-0.5235989	$-1.448889 \times 10^{-6}$	0.5000000	5
$1.51 \times 10^{-6}$	-0.5235988	$6.059030 \times 10^{-9}$	0.5000000	6

جدول 4 10

هناك أيضاً عمليات متاحة تبقي التقارب التريبيعي. ولكنها تقلل عدد عمليات التقييم العالي على نحو كبير. إن الطرائق من هذا النوع قد اقترحت في الأصل من قبل براون [Brow,k]. ويمكن الرجوع إلى [MG] لإجراء مسح ومقارنة بين بعض الطرائق الشائعة الاستخدام من هذا النوع. وعلى كل حال، فإن تنفيذ هذه الطرائق تنفيذاً فاعلاً أصعب كثيراً من طريقة برويدن [Broyden].

## EXERCISE SET

## مجموعة التمارين 3.10

1. استخدم طريقة برويدن بافتراض أن  $x^{(0)} = 0$  لحساب  $x^{(2)}$  لكل من الأنظمة غير الخطية الآتية:

ب.  $\sin(4\pi x_1 x_2) - 2x_2 - x_1 = 0$

أ.  $4x_1^2 - 20x_1 + \frac{1}{4}x_2^2 + 8 = 0$

د.  $\left(\frac{4\pi - 1}{4\pi}\right)(e^{2x_1} - e) + 4ex_2^2 - 2ex_1 = 0$

ج.  $\frac{1}{2}x_1 x_2^2 + 2x_1 - 5x_2 + 8 = 0$

د.  $\ln(x_1^2 + x_2^2) - \sin(x_1 x_2) = \ln 2 + \ln \pi$

ج.  $3x_1^2 - x_2^2 = 0$

د.  $e^{x_1 - x_2} + \cos(x_1 x_2) = 0$

ج.  $3x_1 x_2^2 - x_1^3 - 1 = 0$

أ. استخدم  $x^{(0)} = (2, 2)^T$

أ. استخدم  $x^{(0)} = (1, 1)^T$

2. استخدم طريقة برويدن بافتراض أن  $x^{(0)} = 0$  لحساب  $x^{(2)}$  لكل من الأنظمة غير الخطية الآتية:

ب.  $x_1^2 - x_2 - 37 = 0$

أ.  $3x_1 - \cos(x_2 x_3) - \frac{1}{2} = 0$

د.  $x_1 - x_2^2 - 5 = 0$

ج.  $4x_1^2 - 625x_2^2 + 2x_2 - 1 = 0$

د.  $x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0$

ج.  $e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0$

$$\begin{aligned} 6x_1 - 2\cos(x_2x_3) - 1 &= 0 \quad \text{د.} \\ 9x_2 + \sqrt{x_1^2 + \sin x_3} + 1.06 + 0.9 &= 0 \\ 60x_3 + 3e^{-x_1x_2} + 10\pi - 3 &= 0 \\ \mathbf{x}^{(0)} &= (0, 0, 0)' \quad \text{استخدم} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_1^2x_2 - x_1x_3 + 6 &= 0 \quad \text{ج.} \\ e^{x_1} + e^{x_2} - x_3 &= 0 \\ x_2^2 - 2x_1x_3 &= 4 \\ \mathbf{x}^{(0)} &= (-1, -2, 1)' \quad \text{استخدم} \end{aligned}$$

3. استخدم طريقة برويدن لتقريب حلول الأنظمة غير الخطية في التمرين (1) باستخدام التقريبات

الابتدائية  $\mathbf{x}^{(0)}$ . استخدم التكرار حتى تحصل على  $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_\infty < 10^{-6}$

$$\text{أ. } (0, 0)' \quad \text{ب. } (0, 0)' \quad \text{ج. } (1, 1)' \quad \text{د. } (2, 2)'$$

4. استخدم طريقة برويدن لتقريب حلول الأنظمة غير الخطية في التمرين (2) باستخدام التقريبات

الابتدائية  $\mathbf{x}^{(0)}$ . استخدم التكرار حتى تحصل على  $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_\infty < 10^{-6}$

$$\text{أ. } (1, 1, 1)' \quad \text{ب. } (2, 1, -1)' \quad \text{ج. } (-1, -2, 1)' \quad \text{د. } (0, 0, 0)'$$

5. استخدم طريقة برويدن لتقريب حلول الأنظمة غير الخطية باستخدام التقريبات الابتدائية  $\mathbf{x}^{(0)}$ .

استخدم التكرار حتى تحصل على  $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_\infty < 10^{-6}$ .

$$\begin{aligned} 5x_1^2 - x_2^2 &= 0 \quad \text{ب.} & x_1(1 - x_1) + 4x_2 &= 12 \quad \text{أ.} \\ x_2 - 0.25(\sin x_1 + \cos x_2) &= 0 & (x_1 - 2)^2 + (2x_2 - 3)^2 &= 25 \\ 10x_1 - 2x_2^2 + x_2 - 2x_3 - 5 &= 0 \quad \text{د.} & 15x_1 + x_2^2 - 4x_3 &= 13 \quad \text{ج.} \\ 8x_2^2 + 4x_3^2 - 9 &= 0 & x_1^2 + 10x_2 - x_3 &= 11 \\ 8x_2x_3 + 4 &= 0 & x_2^3 - 25x_3 &= -22 \end{aligned}$$

6. يوجد للنظام الخطي

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + x_3 &= x_1x_4 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= x_2x_4 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= x_3x_4 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 1 \end{aligned}$$

سنة حلول.

أ. برهن أنه إذا كان  $(x_1, x_2, x_3, x_4)'$  حلاً فإن  $(-x_1, -x_2, -x_3, x_4)'$  حلٌّ أيضاً.

ب. استخدم طريقة برويدن ثلاث مرات لتقريب كل حل. كرر العملية حتى تحصل على

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_\infty < 10^{-5}$$

7. يوجد للنظام غير الخطي

$$\begin{aligned} 3x_1 - \cos(x_2x_3) - \frac{1}{2} &= 0 \\ x_1^2 - 625x_2^2 - \frac{1}{4} &= 0 \\ e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} &= 0 \end{aligned}$$

مصفوفة جاكوبيان منفردة بالحل، طبق طريقة برويدن بأخذ  $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1, -1)'$  لاحظ أن التقارب ربما

يكون بطيئاً أو أنه لا يحدث ضمن عدد معقول من التكرارات.

8. برهن أنه إذا كان  $y \in \mathbb{R}^n$  و  $0 \neq y$  فإن  $z \in \mathbb{R}^n$  و  $z = z_1 + z_2$ ، حيث  $z_1 = (y^T y / \|y\|_2^2) y$  يكون موازياً للمتجه  $y$ ، وأن  $z_2$  عمودي على  $y$ .

9. برهن أنه إذا كان  $u, v \in \mathbb{R}^n$  فإن  $\det(I + uv^T) = 1 + v^T u$ .

10. أ. استخدم نتيجة التمرين (9) لتبرهن أنه إذا كانت  $A^{-1}$  موجودة و  $y \in \mathbb{R}^n$ ، فإن  $(A + xy^T)^{-1}$  تكون موجودة إذا وفقط إذا كان  $1 + y^T A^{-1} x \neq 0$ .

ب. بضرب الطرف الأيمن في المصفوفة  $A + xy^T$ ، برهن أنه عندما يكون  $1 + y^T A^{-1} x \neq 0$  نحصل على

$$(A + xy^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1} x y^T A^{-1}}{1 + y^T A^{-1} x}$$

11. تعامل التمرين (13) من الفصل (1.8) مع تحديد العلاقة الأسية بطريقة المربعات الصغرى على الصيغة  $R = bu^a$  لتقريب مجموعة من البيانات التي تربط الوزن بقاعدة تعرق حشرات العث مودست سفنكس. وتحوّلت المسألة في ذلك التمرين إلى علاقة لوغاريتم - لوغاريتم وقد أُدخِل في الفقرة (ج) حد تربيعي في محاولة لتحسين التقريب. بدلاً من تحليل المسألة، حدّد الثابتين  $a$  و  $b$  اللذين يجعلان  $\sum_{i=1}^n (R_i - bu_i^a)^2$  أصغر ما يمكن، لبيانات التصرين (13) من الفصل (1.8).

احسب الخطأ المرتبط بهذا التقريب، وقارنه بالخطأ الناتج من التقريبات السابقة لهذه المسألة.

## Steepest Descent Techniques

## طرائق التناقص الأشد انحداراً

4 10

إن ميزة طرائق نيوتن وأشباه نيوتن في حلّ أنظمة المعادلات غير الخطية تكمن في سرعة التقارب حالما عرف تقريب دقيق على نحو كافٍ. أما ضعف هذه الطرائق فيمكن في الحاجة إلى تقريب مبدئي دقيق للحل لكي نضمن التقارب. إن طريقة التناقص الأشد انحداراً التي تُفرض في هذا الفصل تتقارب إلى الحل فقط خطأً، ولكنها عادة ما تتقارب حتى في حلّة التقريبات. لذا تستخدم هذه الطريقة لإيجاد تقريبات ذات دقة كافية لتصبح مستخدمة في الطرائق الجينية على طريقة نيوتن بالطريقة نفسها التي تستخدم بها طريقة التنصيف للمعادلة الواحدة. إن طريقة التناقص الأشد انحداراً تحدّد نقطة صغرى محلية لدالة متعددة المتغيرات على دالة الصيغة  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

إن هذه الطريقة ذات قيمة بمعزل تامّ عن التطبيق المستخدم بوصفه طريقة بدء حل الأنظمة غير الخطية. (هناك تطبيقات أخرى تُبحث في التمارين).

إن الربط بين تصغير دالة من  $\mathbb{R}^n$  إلى  $\mathbb{R}$  وحل نظام معادلات غير خطية هو سبب حقيقة أن النظام على الصيغة

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

تأتي تسمية هذه الطريقة من التطبيق الثلاثي الأبعاد بالإيماء في الاتجاه الأسفل

يكون حلًا عند  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$  تمامًا عندما يكون للدالة  $g$  المعرفة بالصيغة

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n [f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)]^2$$

القيمة الصغرى صفرًا.

إن طريقة التناقص الأشد انحدارًا لإيجاد قيمة محلية صغرى لدالة ما من  $\mathbb{R}^n$  إلى  $\mathbb{R}$  يمكن وصفها حدسًا كما يأتي:

1. أوجد قيمة  $g$  عند نقطة تقريب ابتدائية  $\mathbf{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})'$ .

2. حدّد اتجاهًا من  $\mathbf{x}^{(0)}$  يسهم في تقليل قيمة  $g$ .

3. تحرك مسافة مناسبة في هذا الاتجاه. وعبر عن القيمة الجديدة بالرمز  $\mathbf{x}^{(1)}$ .

4. كرّر العمليات من 1 إلى 3 باستخدام  $\mathbf{x}^{(1)}$  بدلًا من  $\mathbf{x}^{(0)}$ .

قبل وصف كيفية اختيار الاتجاه الصحيح والمسافة المناسبة الواجب تحركها في هذا الاتجاه، نحتاج إلى مراجعة بعض نتائج التفاضل والتكامل.

تنص مبرهنة القيمة القصوى (The Extreme Value Theorem) على أن للدالة بمتغير واحد القابلة للاشتقاق قيمة صغرى نسبية، عندما تكون المشتقة صفرًا فقط. لتعميم نتيجة الدوال هذه على متغيرات متعددة، نحتاج إلى تعريف الآتي

للدالة  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ، نعبر عن اتجاه  $g$  عند  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$  بالرمز  $\nabla g(\mathbf{x})$  ونعرفه بالصيغة

$$\nabla g(\mathbf{x}) = \left( \frac{\partial g}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \frac{\partial g}{\partial x_2}(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right)'$$

إن الاتجاه  $\nabla g(\mathbf{x})$  للدالة متعددة المتغيرات يشبه مشتقة الدالة وحيدة المتغير. بمعنى أن الدالة المتعددة المتغيرات القابلة للاشتقاق يمكن أن تملك قيمة صغرى نسبية عند  $\mathbf{x}$  فقط إذا كان اتجاهها عند  $\mathbf{x}$  هو المتجه الأصغر. يوجد للاتجاه خاصية أخرى مهمة مرتبطة بتصغير دوال متعددة المتغيرات. ليكن  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)'$  متجه الباب في  $\mathbb{R}^n$

$$\|\mathbf{v}\|_2^2 = \sum_{i=1}^n v_i^2 = 1$$

أي أن

تعرف المشتقة المتجهة (directional derivative) للدالة  $g$  على  $\mathbf{x}$  في اتجاه  $\mathbf{v}$  بالصيغة

$$D_{\mathbf{v}}g(\mathbf{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [g(\mathbf{x} + h\mathbf{v}) - g(\mathbf{x})] = \mathbf{v}' \cdot \nabla g(\mathbf{x})$$

إن المشتقة المتجهة للدالة  $g$  على  $\mathbf{x}$  في اتجاه  $\mathbf{v}$  تقيس التغير في قيمة الدالة  $g$ . وبالنسبة إلى التغير في المتغير في اتجاه  $\mathbf{v}$  هناك نتيجة في حساب التفاضل والتكامل للدوال متعددة المتغيرات تنص على أنه: عندما يكون  $g$  قابلاً للاشتقاق فإن الاتجاه الذي ينتج القيمة الكبرى للمشتقة المتجهة يحدث عندما يُختار  $\mathbf{v}$  ليكون موازياً لـ  $\nabla g(\mathbf{x})$ . على أن  $\nabla g(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ . ونتيجة لذلك يكون الاتجاه ذو النقص الأكبر في قيمة  $g$  عند  $\mathbf{x}$  هو الاتجاه المعطى بـ  $-\nabla g(\mathbf{x})$  (انظر شكل (3.10) لتوضيح حالة  $g$  دالة بمتغيرين).

إن الغرض هو تقليل  $g(\mathbf{x})$  إلى القيمة الصغرى وهي الصفر. ولذلك فإن الاختيار المناسب

للمتجه  $\mathbf{x}^{(1)}$  هو

إن جر الكلمة اتجاه gradient هو الكلمة اللاتينية "gradi" التي تعني "تسير". بهذا المعنى يكون gradient لسطح ما هو معدل سرعة سيره إلى أعلى التلة.

تعريف 9.10

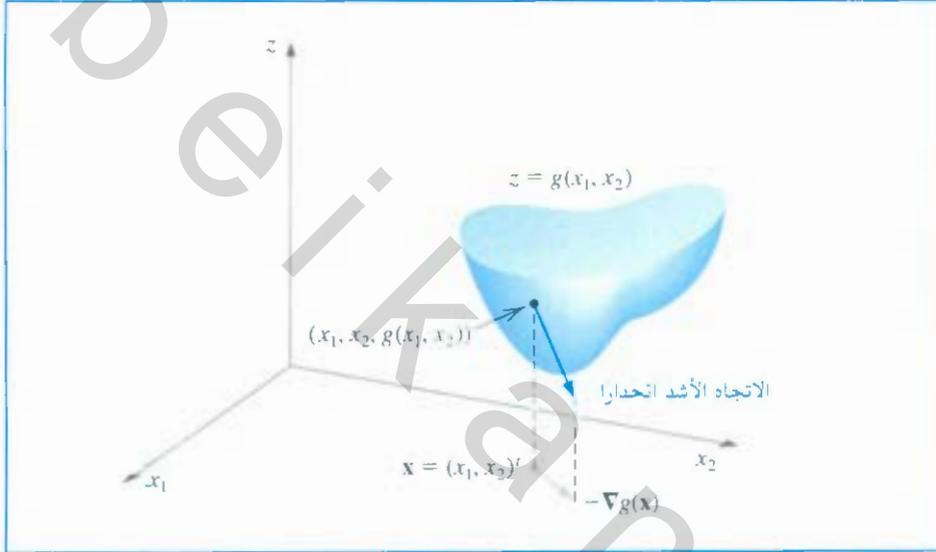
$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} - \alpha \nabla g(\mathbf{x}^{(0)}) \quad (17.10)$$

تختزل المسألة الآن إلى اختيار  $\alpha$  بحيث يصبح  $g(\mathbf{x}^{(1)})$  أقل كثيراً من  $g(\mathbf{x}^{(0)})$  لتحديد الاختيار المناسب لقيمة  $\alpha$ . نأخذ الدالة في متغير واحد

$$h(\alpha) = g(\mathbf{x}^{(0)} - \alpha \nabla g(\mathbf{x}^{(0)})) \quad (18.10)$$

إن قيمة  $\alpha$  التي تجعل  $h$  أقل ما يمكن هي القيمة المطلوبة للمعادلة (17.10).

شكل 3 10



إن إيجاد القيمة الصغرى للدالة  $h$  يتطلب اشتقاق  $h$ . ثم حل مسألة إيجاد الجذور لتحديد النقاط الحرجة لـ  $h$ . وإن هذه العملية مكلفة جداً عموماً. وبدلاً من ذلك نختار ثلاثة أعداد  $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$  التي نأمل أن تكون قريبة من النقطة التي تحصل عليها القيمة الصغرى للدالة  $h(\alpha)$ . ثم نبني كثيرة الحدود التربيعية  $P(x)$  التي توجد الاستكمال الداخلي للدالة  $h$  عند  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ . نعرف  $\hat{\alpha}$  في  $[\alpha_1, \alpha_3]$  بحيث تكون  $P(\hat{\alpha})$  القيمة الصغرى في  $[\alpha_1, \alpha_3]$ . ونستخدم  $P(\hat{\alpha})$  لتقريب القيمة الصغرى لـ  $h(\alpha)$ . ثم نستخدم  $\hat{\alpha}$  قيمة  $g$  الصغرى

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} - \hat{\alpha} \nabla g(\mathbf{x}^{(0)})$$

بما أن  $g(\mathbf{x}^{(0)})$  متاح. نختار أولاً  $\alpha_1 = 0$  لتقليل عمليات الحساب. بعد ذلك نجد عدداً  $\alpha_3$  بحيث  $h(\alpha_3) < h(\alpha_1)$  (بما أن  $\alpha_1$  لا تجعل  $h$  أصغر ما يمكن فإن عدداً مثل  $\alpha_3$  يكون موجوداً). أخيراً نختار  $\alpha_2$  ليكون مساوياً لـ  $\alpha_3/2$ .

إن القيمة الصغرى لـ  $P$  على  $[\alpha_1, \alpha_3]$  تحدث على النقطة الحرجة الوحيدة لـ  $P$  أو على نقطة النهاية اليمنى  $\alpha_3$ ؛ لأنه على افتراض  $h(\alpha_3) < h(\alpha_1) = P(\alpha_1)$  تحدد النقطة الحرجة بسهولة؛ لأن  $P$  كثيرة حدود تربيعية.

مثال 1 لإيجاد بداية معقولة لتقريب حلّ النظام غير الخطي

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 - \cos(x_2 x_3) - \frac{1}{2} = 0$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06 = 0$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0$$

نستخدم طريقة التناقص الأشد انحدارًا بأخذ  $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)'$

ليكن  $g(x_1, x_2, x_3) = [f_1(x_1, x_2, x_3)]^2 + [f_2(x_1, x_2, x_3)]^2 + [f_3(x_1, x_2, x_3)]^2$

فإن

$$\begin{aligned} \nabla g(x_1, x_2, x_3) &\equiv \nabla g(\mathbf{x}) = \left( 2f_1(\mathbf{x}) \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) + 2f_2(\mathbf{x}) \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) + 2f_3(\mathbf{x}) \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \right. \\ &\quad \left. 2f_1(\mathbf{x}) \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) + 2f_2(\mathbf{x}) \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) + 2f_3(\mathbf{x}) \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(\mathbf{x}), \right. \\ &\quad \left. 2f_1(\mathbf{x}) \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(\mathbf{x}) + 2f_2(\mathbf{x}) \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(\mathbf{x}) + 2f_3(\mathbf{x}) \frac{\partial f_3}{\partial x_3}(\mathbf{x}) \right) \\ &= 2\mathbf{J}(\mathbf{x})' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

عند  $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)'$  يكون لدينا  $g(\mathbf{x}^{(0)}) = 111.975$  و  $\|\nabla g(\mathbf{x}^{(0)})\|_2 = 419.554$

افترض  $\mathbf{z} = \frac{1}{z_0} \nabla g(\mathbf{x}^{(0)}) = (-0.0214514, -0.0193062, 0.999583)'$

بأخذ  $\alpha_1 = 0$  نحصل على  $g_1 = g(\mathbf{x}^{(0)} - \alpha_1 \mathbf{z}) = g(\mathbf{x}^{(0)}) = 111.975$  وكما اتفق، ضع  $\alpha_3 = 1$

لكي يكون  $g_3 = g(\mathbf{x}^{(0)} - \alpha_3 \mathbf{z}) = 93.5649$  وبما أن  $g_3 < g_1$  ونضع  $\alpha_2 = 0.5$

وهكذا فإن  $g_2 = g(\mathbf{x}^{(0)} - \alpha_2 \mathbf{z}) = 2.53557$

والآن نشكل كثيرة حدود الاستكمال الداخلي لنيوتن بطريقة الفرق المقسوم الأمامي

$$P(\alpha) = g_1 + h_1 \alpha + h_3 \alpha (\alpha - \alpha_2)$$

$$g(\mathbf{x}^{(0)} - \alpha \nabla g(\mathbf{x}^{(0)})) = g(\mathbf{x}^{(0)} - \alpha \mathbf{z}) \quad \text{الذي يستكمل}$$

عند  $\alpha_1 = 0$ ،  $\alpha_2 = 0.5$  و  $\alpha_3 = 1$  ووفقًا لما يلي:

$$\alpha_1 = 0, \quad g_1 = 111.975,$$

$$\alpha_2 = 0.5, \quad g_2 = 2.53557, \quad h_1 = \frac{g_2 - g_1}{\alpha_2 - \alpha_1} = -218.878,$$

$$\alpha_3 = 1, \quad g_3 = 93.5649, \quad h_2 = \frac{g_3 - g_2}{\alpha_3 - \alpha_2} = 182.059, \quad h_3 = \frac{h_2 - h_1}{\alpha_3 - \alpha_1} = 400.937.$$

$$P(\alpha) = 111.975 - 218.878\alpha + 400.937\alpha(\alpha - 0.5). \quad \text{وهكذا فإن}$$

لدينا  $P'(\alpha) = 0$  عندما  $\alpha = \alpha_0 = 0.522959$  بما أن  $g_0 = g(\mathbf{x}^{(0)} - \alpha_0 \mathbf{z}) = 2.32762$

أصغر من  $g_1$  و  $g_3$ ، نضع

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} - \alpha_0 \mathbf{z} = \mathbf{x}^{(0)} - 0.522959 \mathbf{z} = (0.0112182, 0.0100964, -0.522741)'$$

$$g(\mathbf{x}^{(1)}) = 2.32762 \quad \text{و}$$

يحتوي جدول (5.10) بقية النتائج، والحل الفعلي للنظام غير الخطي هو  $(0.5, 0, -0.5235988)$  ومن ثم فإن  $\mathbf{x}^{(2)}$  يمكن أن يكون كافياً لكونه تقريباً مبدئياً لطريقة نيوتن أو طريقة برويدن. إن من المناسب استخدام إحدى الطرائق سريعة التقارب في هذه المرحلة؛ لأنه يلزم إجراء (70) تكراراً لطريقة التناقص الأشد انحدرًا حتى نجد أن الخوارزمية (3.10) تطبق طريقة التناقص الأشد انحدرًا لتقريب القيمة الصغرى للدالة  $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_\infty < 0.01$ .

جدول 5 10

$g(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)})$	$x_3^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_1^{(k)}$	$k$
1.27406	-0.522059	-0.205453	0.137860	2
1.06813	-0.558494	0.00551102	0.266959	3
0.468309	-0.522006	-0.00811751	0.272734	4
0.381087	-0.533112	-0.0204026	0.308689	5
0.318837	-0.520923	-0.0147046	0.314308	6
0.287024	-0.528431	-0.00852549	0.324267	7

للبدء بالتكرار؛ نحدّد الصفر قيمة لـ  $\alpha_1$  والقيمة 1 لـ  $\alpha_3$ . إذا كان  $h(\alpha_3) \geq h(\alpha_1)$  مجري عمليات متتالية لقسمة العدد  $\alpha_3$  على 2، ونستخدم قيمة  $\alpha_3$  بالتتالي حتى نحصل على  $h(\alpha_3) \geq h(\alpha_1)$  و  $\alpha_3 = 2^{-k}$  لقيمة ما  $k$ . لاستخدام الطريقة لتقريب حلّ النظام

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

$$\vdots$$

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

نستخدم ببساطة  $\sum_{i=1}^n f_i^2$  بدلاً من  $g$ .

التناقص الأشد انحدرًا Steepest Descent

لتقريب حلّ  $P$  لمسألة التصغير إلى أقصى حد

$$g(\mathbf{p}) = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} g(\mathbf{x})$$

إذا أعطي تقريب مبدئي  $\mathbf{x}$ :

المدخلات: عدد  $n$  من المعادلات والمجاهيل، تقريب مبدئي  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)'$ ، حد خطأ مسموح به  $TOL$ ، أكبر عدد من التكرارات (التراجعات)  $N$ .  
المخرجات: حل تقريبي  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)'$  أو عبارة فشل.

الخطوة	المضمون
1	ضع $k = 1$ .
2	ما دام $(k \leq N)$ فننفذ الخطوات 3 - 15.



3	ضع $g_1 = g(x_1, \dots, x_n)$ (ملحوظة: $g_1 = g(x^{(k)})$ ) $z = \nabla g(x_1, \dots, x_n)$ (ملحوظة: $z = \nabla g(x^{(k)})$ ) $z_0 = \ z\ _2$
4	إذا كان $z_0 = 0$ نحصل على المخرجات ('Zero gradient') التدرج الصغرى. المخرجات $(x_1, \dots, x_n, g_1)$ ( تمت العملية. يمكن الحصول على قيمة صغرى). توقف
5	ضع $z = z/z_0$ (اجعل $z$ متجهه الباب) $\alpha_1 = 0$ ; $\alpha_3 = 1$ ; $g_3 = g(x - \alpha_3 z)$
6	ما دام $(g_3 \geq g_1)$ فننفذ الخطوتين 7 و 8.
7	ضع $\alpha_3 = \alpha_3/2$ ; $g_3 = g(x - \alpha_3 z)$
8	إذا كان $\alpha_3 < TOL/2$ نحصل على المخرجات (لا يوجد تحسن محتمل). المخرجات $(x_1, \dots, x_n, g_1)$ ( تمت العملية. ويمكن الحصول على قيمة صغرى). توقف
9	ضع $\alpha_2 = \alpha_3/2$ $g_2 = g(x - \alpha_2 z)$
10	ضع $h_1 = (g_2 - g_1)/\alpha_2$ ; $h_2 = (g_3 - g_2)/(\alpha_3 - \alpha_2)$ $h_3 = (h_2 - h_1)/\alpha_3$ . (ملحوظة: لقد استخدمت معادلة نيوتن ذات الفرق المقسوم إلى الأمام لإيجاد) التقريب $P(a) = g_1 + h_1 a + h_3 a(a - \alpha_2)$ الذي يستوفي $h(a)$ عند $(a = 0, a = \alpha_2, a = \alpha_3)$ .
11	ضع $a_0 = 0.5(\alpha_2 - h_1/h_3)$ (تحديث النقطة الحرجة لـ $P$ عند $a_0$ ). $g_0 = g(x - a_0 z)$
12	أوجد $a$ من $\{a_0, \alpha_3\}$ بحيث $g = g(x - a z) = \min\{g_0, g_3\}$
13	ضع $x = x - a z$
14	إذا كان $ g - g_1  < TOL$ فعندئذ تكون المخرجات $(x_1, \dots, x_n, g)$ ( كانت العملية ناجحة). توقف
15	ضع $k = k + 1$



المخرجات (تم تخطي العدد الأكبر من التكرارات $N$ ). ( العملية لم تنجح ). توقف.	16
-------------------------------------------------------------------------------------	----



يوجد كثير من البدائل في طريقة التناقص الأشد انحدارًا، ويتضمن بعضها طرائق معقدة لتحديد القيمة  $\alpha$  التي تنتج القيمة الصغرى للدالة أحادي المتغير  $h$  المعرفة بالمعادلة (18.10). طرائق أخرى كثيرة تستخدم حدود تايلور ذات الأبعاد المتعددة لتحل محل الدالة الأصلية  $g$  ذي المتغيرات المتعددة، ثم تجد القيمة الصغرى لكثيرة الحدود بدلاً من  $g$ . ومع وجود بعض المزايا لبعض هذه الطرائق التي شرحت، فإن طرائق التناقص الأشد جميعها انحدارًا ذات تقارب خطي عموماً. ويكون التقارب فيها مستقلاً عن التقريب المبني. وفي بعض حالات هذه الطرائق يمكن أن يحصل التقارب فيها على قيمة ما غير لقيمة الصغرى المطلقة للدالة  $g$ . ويمكن الرجوع إلى [OR] أو [RR] للحصول على شرح أوفى لطرائق التناقص الأشد انحدارًا.

## EXERCISE SET

## مجموعة التمارين 4.10

1. استخدم طريقة التناقص الأشد انحدارًا آخذًا الخطأ المسموح به  $TOL = 0.05$ ، لتقريب حلول الأنظمة غير الخطية الآتية:

$$\begin{array}{ll} \text{أ.} & 4x_1^2 - 20x_1 + \frac{1}{4}x_2^2 + 8 = 0 \\ & \frac{1}{2}x_1x_2^2 + 2x_1 - 5x_2 + 8 = 0 \\ \text{ب.} & 3x_1^2 - x_2^2 = 0 \\ & 3x_1x_2^2 - x_1^3 - 1 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{ج.} & \ln(x_1^2 + x_2^2) - \sin(x_1x_2) = \ln 2 + \ln \pi \\ & e^{x_1 - x_2} + \cos(x_1x_2) = 0 \\ \text{د.} & \sin(4\pi x_1x_2) - 2x_2 - x_1 = 0 \\ & \left(\frac{4\pi - 1}{4\pi}\right)e^{2x_1 - e} + 4ex_2^2 - 2ex_1 = 0 \end{array}$$

2. استخدم طريقة التناقص الأشد انحدارًا آخذًا الخطأ المسموح به  $TOL = 0.05$ ، لتقريب حلول الأنظمة غير الخطية الآتية:

$$\begin{array}{ll} \text{أ.} & 15x_1 + x_2^2 - 4x_3 = 13 \\ & x_1^2 + 10x_2 - x_3 = 11 \\ & x_2^3 - 25x_3 = -22 \\ \text{ب.} & 10x_1 - 2x_2^2 + x_2 - 2x_3 - 5 = 0 \\ & 8x_2^2 + 4x_3^2 - 9 = 0 \\ & 8x_2x_3 + 4 = 0 \\ \text{ج.} & x_1^3 + x_1^2x_2 - x_1x_3 + 6 = 0 \\ & e^{x_1} + e^{x_2} - x_3 = 0 \\ \text{د.} & x_1 + \cos(x_1x_2x_3) - 1 = 0 \\ & (1 - x_1)^{x_2} + x_2 + 0.05x_3^2 - 0.15x_3 - 1 = 0 \\ & -x_1^2 - 0.1x_2^2 + 0.01x_2 + x_3 - 1 = 0 \\ & x_2^2 - 2x_1x_3 = 4 \end{array}$$

3. استخدم نتائج التمرين (1) وطريقة نيوتن لتقريب حلول الأنظمة الخطية في التمرين (1) ضمن  $10^{-6}$ .

4. استخدم نتائج التمرين (2) وطريقة نيوتن لتقريب حلول الأنظمة الخطية في التمرين (2) ضمن  $10^{-6}$ .

5. استخدم طريقة التناقص الأشد انحداراً لتقريب القيم الصغرى ضمن 0.005 للدوال الآتية:

$$أ. \quad g(x_1, x_2) = \cos(x_1 + x_2) + \sin x_1 + \cos x_2$$

$$ب. \quad g(x_1, x_2) = 100(x_1^2 - x_2)^2 + (1 - x_1)^2$$

$$ج. \quad g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1 - 2.5x_2 - x_3 + 2$$

$$د. \quad g(x_1, x_2, x_3) = x_1^4 + 2x_2^4 + 3x_3^4 + 1.01$$

6. أ. برهن أن كثيرة الحدود التريبية

$$P(\alpha) = g_1 + h_1\alpha + h_3\alpha(\alpha - \alpha_2)$$

تعمل على استكمال الدالة  $h$  المعرفة في (18.10)

$$h(\alpha) = g(x^{(0)}) - \alpha \nabla g(x^{(0)}) \quad \text{عند } \alpha_3, \alpha_2, \alpha = 0$$

ب. أثبت أن النقطة الحرجة لكثيرة الحدود  $P$  تحدث عند

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \left( \alpha_2 - \frac{h_1}{h_3} \right)$$

## Homotopy and Continuation Methods

## طرائق الاتصال والتوفيق

5.10

إن طرائق الاتصال *continuation* أو الناقل *Homotopy* للأنظمة غير الخطية تضع المسألة

المطلوب حلها ضمن مجموعة من المسائل. ولحل مسألة بالتحديد على الصيغة

$$F(x) = 0$$

التي لها الحل غير المعلوم  $x^*$ . نفترض عائلة من المسائل موصوفة باستخدام وسيط  $\lambda$  تأخذ قيمتها

في  $[0, 1]$ . إن أي مسألة ذات حل معلوم  $x(0)$  تقابل  $\lambda = 0$ . والمسألة ذات الحل غير المعلوم

$$x(1) = x^* \quad \text{تقابل } \lambda = 1$$

افترض على سبيل المثال  $x(0)$  هو تقريب مبدئي لحل المسألة  $F(x^*) = 0$ . عرّف

$$بالصيغة \quad G: [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$G(\lambda, x) = \lambda F(x) + (1 - \lambda) [F(x) - F(x(0))] = F(x) + (\lambda - 1)F(x(0)) \quad (19.10)$$

$$G(\lambda, x) = 0 \quad \text{سنحدد حلاً للمعادلة}$$

لقيم مختلفة للوسيط  $\lambda$ .

عندما  $\lambda = 0$  تأخذ هذه المعادلة الصيغة

$$0 = G(0, x) = F(x) - F(x(0))$$

ويكون  $x(0)$  حلاً. عندما  $\lambda = 1$ . تأخذ المعادلة الصيغة

$$0 = G(1, x) = F(x)$$

ويكون  $x(1) = x^*$  حلاً.

إن الدالة  $G$  مع الوسيط  $\lambda$  تزودنا بعائلة من الدوال التي تقودنا من القيمة المعلومة  $x(0)$  إلى الحل

$$x(1) = x^*$$

الناقل (a homotopy) هو تكوين متصل. أي دالة يتقل الفترة الحقيقية نقلاً متصلاً إلى مجموعة من الدوال

إن الدالة  $G$  تسمى ناقلاً (homotopy) بين الدالة  $G(0, \mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}(0))$  والدالة  $G(1, \mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x})$  إن مسألة الاتصال (continuation) هي "لتحديد طريقة للسير من حلّ معلوم  $\mathbf{x}(0)$  للمعادلة  $G(0, \mathbf{x}) = 0$  إلى حلّ غير معلوم  $\mathbf{x}(1) = \mathbf{x}^*$  للمعادلة  $G(1, \mathbf{x}) = 0$  لتي تحسب  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0$ ".  
نفترض أولاً أن  $\mathbf{x}(\lambda)$  هو الحل الوحيد للمعادلة

$$G(\lambda, \mathbf{x}) = 0 \quad \text{لكل } \lambda \in [0, 1] \quad (20.10)$$

يمكن النظر إلى المجموعة  $\{\mathbf{x}(\lambda) \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$  ذات الوسيط بوصفها منحنى في  $\mathbb{R}^n$  من  $\mathbf{x}(0)$  إلى  $\mathbf{x}(1) = \mathbf{x}^*$ . وتوجد طريقة الاتصال متتالية من الخطوات على هذا المنحنى مقبلة لـ  $\{\mathbf{x}(\lambda_k)\}_{k=0}^m$  حيث  $\lambda_0 = 0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_m = 1$ .

إذا كانت الدوال  $\mathbf{x}(\lambda) \rightarrow \lambda$  و  $G$  قابلة للاشتقاق فإن اشتقاق المعادلة (20.10) بالنسبة إلى  $\lambda$  يعطي

$$0 = \frac{\partial G(\lambda, \mathbf{x}(\lambda))}{\partial \lambda} + \frac{\partial G(\lambda, \mathbf{x}(\lambda))}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{x}'(\lambda)$$

ولإيجاد  $\mathbf{x}'(\lambda)$  نحصل على

$$\mathbf{x}'(\lambda) = - \left[ \frac{\partial G(\lambda, \mathbf{x}(\lambda))}{\partial \mathbf{x}} \right]^{-1} \frac{\partial G(\lambda, \mathbf{x}(\lambda))}{\partial \lambda}$$

إن هذا نظام من المعادلات التفاضلية بحالة ابتدائية  $\mathbf{x}(0)$ .

بما أن

$$G(\lambda, \mathbf{x}(\lambda)) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(\lambda)) + (\lambda - 1)\mathbf{F}(\mathbf{x}(0))$$

يمكننا تحديد كل من

$$\frac{\partial G}{\partial \mathbf{x}}(\lambda, \mathbf{x}(\lambda)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}(\lambda)) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}(\lambda)) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}(\lambda)) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}(\lambda)) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}(\lambda)) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}(\lambda)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}(\lambda)) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\mathbf{x}(\lambda)) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}(\lambda)) \end{bmatrix} = J(\mathbf{x}(\lambda))$$

$$\frac{\partial G(\lambda, \mathbf{x}(\lambda))}{\partial \lambda} = \mathbf{F}(\mathbf{x}(0)) \quad \text{مصفوفة جاكوبيان و}$$

ولذلك فإن نظام المعادلات التفاضلية يصبح

$$0 \leq \lambda \leq 1 \quad \mathbf{x}'(\lambda) = -[J(\mathbf{x}(\lambda))]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}(0)) \quad (21.10)$$

بالحالة الابتدائية  $\mathbf{x}(0)$ .

إن مبرهنة الآتية تعطي الشروط التي بموجبها يمكن استخدام طريقة الاتصال.

(انظر [OR, pp. 230–231].)

### مبرهنة 10.10

ليكن  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  قابلاً للاشتقاق على نحو متصل لكل  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . افترض أن مصفوفة جاكوبيان  $J(\mathbf{x})$  لها معكوس (لها نظير ضربي) لـ  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  جميعها، ويوجد ثابت  $M$  بحيث  $\|J(\mathbf{x})^{-1}\| \leq M$  لجميع

$x \in \mathbb{R}^n$ . عندئذ يوجد لكل  $x(0) \in \mathbb{R}^n$  دالة وحيدة  $x(\lambda)$  بحيث  $G(\lambda, x(\lambda)) = 0$  لـ  $\lambda$  جميعها في  $[0, 1]$ .

وبالإضافة إلى ذلك فإن  $x(\lambda)$  قابلة للاشتقاق على نحو متصل، ويكون

$$\lambda \in [0, 1] \text{ لكل } x'(\lambda) = -J(x(\lambda))^{-1}F(x(0))$$

ويُظهر المثال الآتي صيغة نظام المعادلات التفاضلية المرتبط بنظام معادلات غير خطية.

مثال 1 افترض أن النظام غير الخطي

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 - \cos(x_2x_3) - 0.5 = 0$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06 = 0$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0$$

إن مصفوفة جاكوبيان هي

$$J(x) = \begin{bmatrix} 3 & x_3 \sin x_2x_3 & x_2 \sin x_2x_3 \\ 2x_1 & -162(x_2 + 0.1) & \cos x_3 \\ -x_2e^{-x_1x_2} & -x_1e^{-x_1x_2} & 20 \end{bmatrix}$$

افترض أن  $x(0) = (0, 0, 0)^T$  ليصبح

$$F(x(0)) = \begin{bmatrix} -1.5 \\ 0.25 \\ 10\pi/3 \end{bmatrix}$$

نظام المعادلات التفاضلية هو

$$\begin{bmatrix} x_1'(\lambda) \\ x_2'(\lambda) \\ x_3'(\lambda) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 3 & x_3 \sin x_2x_3 & x_2 \sin x_2x_3 \\ 2x_1 & -162(x_2 + 0.1) & \cos x_3 \\ -x_2e^{-x_1x_2} & -x_1e^{-x_1x_2} & 20 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1.5 \\ 0.25 \\ 10\pi/3 \end{bmatrix}$$

وإن نظام المعادلات التفاضلية الذي نحتاج إلى حله فيما يتعلق بمسألة الاتصال التي لدينا

يكون عموماً على الصيغة

$$\frac{dx_1}{d\lambda} = \phi_1(\lambda, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\frac{dx_2}{d\lambda} = \phi_2(\lambda, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

⋮

$$\frac{dx_n}{d\lambda} = \phi_n(\lambda, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\begin{bmatrix} \phi_1(\lambda, x_1, \dots, x_n) \\ \phi_2(\lambda, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \phi_n(\lambda, x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix} = -J(x_1, \dots, x_n)^{-1} \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}(0)) \\ f_2(\mathbf{x}(0)) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}(0)) \end{bmatrix} \quad (22.10)$$

لكي نستخدم طريقة رونج - كوتا من الرتبة الرابعة لحل هذا النظام، نختار أولاً عدداً صحيحاً  $N > 0$  ونفترض  $h = (1 - 0)/N$ . نجزئ الفترة  $[0, 1]$  إلى  $N$  من الفترات الحزئية بنقاط الشبكة  $j = 0, 1, \dots, N$  لكل  $\lambda_j = jh$

نستخدم الرمز  $w_{ij}$  ليعبر عن تقريب  $x_i(\lambda_j)$  لكل  $i = 1, \dots, n$  و  $j = 0, 1, \dots, N$  وللحالات الابتدائية نفترض

$$w_{1,0} = x_1(0), \quad w_{2,0} = x_2(0), \quad \dots, \quad w_{n,0} = x_n(0).$$

افترض أن  $w_{1,j}, w_{2,j}, \dots, w_{n,j}$  قد حُسبت. نحصل على  $w_{1,j+1}, w_{2,j+1}, \dots, w_{n,j+1}$  باستخدام المعادلات  $(k_{1,i}, w_{1,j}, w_{2,j}, \dots, w_{n,j})$  لكل  $i = 1, 2, \dots, n$

$$k_{2,i} = h\phi_i\left(\lambda_j + \frac{h}{2}, w_{1,j} + \frac{1}{2}k_{1,1}, w_{2,j} + \frac{1}{2}k_{1,2}, \dots, w_{n,j} + \frac{1}{2}k_{1,n}\right)$$

لكل  $i = 1, 2, \dots, n$

$$k_{3,i} = h\phi_i\left(\lambda_j + \frac{h}{2}, w_{1,j} + \frac{1}{2}k_{2,1}, w_{2,j} + \frac{1}{2}k_{2,2}, \dots, w_{n,j} + \frac{1}{2}k_{2,n}\right)$$

لكل  $i = 1, 2, \dots, n$

$$k_{4,i} = h\phi_i(\lambda_j + h, w_{1,j} + k_{3,1}, w_{2,j} + k_{3,2}, \dots, w_{n,j} + k_{3,n})$$

لكل  $i = 1, 2, \dots, n$

$$w_{i,j+1} = w_{i,j} + \frac{1}{6}(k_{1,i} + 2k_{2,i} + 2k_{3,i} + k_{4,i})$$

وأخيراً

لكل  $i = 1, 2, \dots, n$

نستخدم التعبير المتجهي

$$\mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} k_{1,1} \\ k_{1,2} \\ \vdots \\ k_{1,n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} k_{2,1} \\ k_{2,2} \\ \vdots \\ k_{2,n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}_3 = \begin{bmatrix} k_{3,1} \\ k_{3,2} \\ \vdots \\ k_{3,n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}_4 = \begin{bmatrix} k_{4,1} \\ k_{4,2} \\ \vdots \\ k_{4,n} \end{bmatrix}$$

و

$$\mathbf{w}_j = \begin{bmatrix} w_{1,j} \\ w_{2,j} \\ \vdots \\ w_{n,j} \end{bmatrix}$$

لكي نبسط الشرح.

تعطينا المعادلة (22.10)  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(\lambda_0) = \mathbf{w}_0$  ولكل  $j = 0, 1, \dots, N$

$$\mathbf{k}_1 = h \begin{bmatrix} \phi_1(\lambda_j, w_{1,j}, \dots, w_{n,j}) \\ \phi_2(\lambda_j, w_{1,j}, \dots, w_{n,j}) \\ \vdots \\ \phi_n(\lambda_j, w_{1,j}, \dots, w_{n,j}) \end{bmatrix} = h [-J(w_{1,j}, \dots, w_{n,j})]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}(0))$$

$$= h [-J(\mathbf{w}_j)]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}(0));$$

$$\mathbf{k}_2 = h \left[ -J \left( \mathbf{w}_j + \frac{1}{2} \mathbf{k}_1 \right) \right]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}(0));$$

$$\mathbf{k}_3 = h \left[ -J \left( \mathbf{w}_j + \frac{1}{2} \mathbf{k}_2 \right) \right]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}(0));$$

$$\mathbf{k}_4 = h \left[ -J(\mathbf{w}_j + \mathbf{k}_3) \right]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}(0));$$

و

$$\mathbf{x}(\lambda_{j+1}) = \mathbf{x}(\lambda_j) + \frac{1}{6} (\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) = \mathbf{w}_j + \frac{1}{6} (\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)$$

وأخيراً يكون  $\mathbf{x}(\lambda_n) = \mathbf{x}(1)$  هو التقريب لـ  $\mathbf{x}^*$ .

سنقرب حل النظام

مثال 2

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 - \cos(x_2 x_3) - 0.5 = 0$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06 = 0$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0$$

إن مصفوفة جاكوبيان هي

$$J(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 3 & x_3 \sin x_2 x_3 & x_2 \sin x_2 x_3 \\ 2x_1 & -162(x_2 + 0.1) & \cos x_3 \\ -x_2 e^{-x_1 x_2} & -x_1 e^{-x_1 x_2} & 20 \end{bmatrix}$$

ضع  $\mathbf{x}(0) = (0, 0, 0)^t$  لكي يكون

$$F(\mathbf{x}(0)) = (-1.5, 0.25, 10\pi/3)^t$$

بأخذ  $N=4$  و  $h=0.25$  نحصل على

$$\mathbf{k}_1 = h [-J(\mathbf{x}^{(0)})]^{-1} F(\mathbf{x}(0)) = 0.25 \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -16.2 & 1 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1.5 \\ 0.25 \\ 10\pi/3 \end{bmatrix}$$

$$= (0.125, -0.004222203325, -0.1308996939)^t$$

$$\mathbf{k}_2 = h [-J(0.0625, -0.002111101663, -0.06544984695)]^{-1} (-1.5, 0.25, 10\pi/3)^t$$

$$= 0.25 \begin{bmatrix} 3 & -0.9043289149 \times 10^{-5} & -0.2916936196 \times 10^{-6} \\ 0.125 & -15.85800153 & 0.9978589232 \\ 0.002111380229 & -0.06250824706 & 20 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1.5 \\ 0.25 \\ 10\pi/3 \end{bmatrix}$$

$$= (0.1249999773, -0.003311761993, -0.1309232406)'$$

$$\mathbf{k}_3 = h[-J(\mathbf{C}, 0.06249998865, -0.001655880997, -0.0654616203)]^{-1}(-1.5, 0.25, 10\pi/3)'$$

$$= (0.1249999844, -0.003296244825, -0.130920346)'$$

$$\mathbf{k}_4 = h[-J(\mathbf{C}, 0.1249999844, -0.003296244825, -0.130920346)]^{-1}(-1.5, 0.25, 10\pi/3)'$$

$$= (0.1249999945, -0.00230206762, -0.1309346977)'$$

و

$$\mathbf{x}(\lambda_{12}) = \mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_0 + \frac{1}{n}[\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4]$$

$$= (0.1249999697, -0.00329004743, -0.1309202608)'$$

وبالاستمرار نحصل على

$$\mathbf{x}(\lambda_{13}) = \mathbf{w}_2 = (0.2499997679, -0.004507400128, -0.2618557619)'$$

$$\mathbf{x}(\lambda_{14}) = \mathbf{w}_3 = (0.379996956, -0.003430352103, -0.3927634423)'$$

$$\mathbf{x}(\lambda_{15}) = \mathbf{x}(1) = \mathbf{w}_4 = (0.4999999954, 0.126782 \times 10^{-7}, -0.5235987758)'$$

إن النتائج التي حصلنا عليها هنا دقيقة جداً، لأن الإجابة الفعلية هي  $(0.5, 0, -0.52359877)'$  تقريباً.

في طريقة رونج - كوتا من الرتبة الرابعة، يتطلب حساب كل  $\mathbf{w}_i$  إيجاد معكوس المصفوفة  $N$  مرات، واحدة عند حساب كل من  $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4$ . وهكذا فإن استخدام  $N$  خطوة يتطلب  $4N$  من معكوس المصفوفات. وبالمقارنة فإن طريقة نيوتن تتطلب إيجاد معكوس مصفوفة في كل تكرار. ولذلك فإن العمل المطلوب في طريقة رونج - كوتا يساوي  $4N$  تقريباً من التكرارات في طريقة نيوتن.

ويكون أحد البدائل باستخدام طريقة رونج - كوتا من الرتبة الثانية مثل طريقة أويلر المعدلة، أو حتى طريقة أويلر لتخفيض عدد مرات إيجاد المعكوس. وهناك إمكانية ثالثة باستخدام قيم  $N$  صغيرة. ويشرح المثال الآتي هذه الأفكار.

يلخص جدول (6.10) المقارنة بين طريقة أويلر وطريقة النقطة الوسيطة وطريقة رونج - كوتا من

الرتبة الرابعة عند تطبيق هذه الطرائق في المثال (2) بأخذ التقريب المبدئي  $\mathbf{x}(0) = (1, 1, 0)'$ .

جدول 6.10

الطريقة	$N$	$\mathbf{x}(1)$	عدد عمليات الانكسار
يولر	1	$(0.5, -0.0168888133, -0.5235987755)'$	1
يولر	4	$(0.499999379, -0.004309160698, -0.523679652)'$	4
النقطة المتوسطة	1	$(0.4999966628, -0.00040240435, -0.523815371)'$	2
النقطة المتوسطة	4	$(0.500000066, -0.00001760089, -0.5236127761)'$	8
رونج-كوتا	1	$(0.4999989843, -0.1676151 \times 10^{-5}, -0.5235989561)'$	4
رونج-كوتا	4	$(0.4999999954, 0.126782 \times 10^{-7}, -0.5235987758)'$	16

يمكن استخدام طريقة الاتصال بوصفها طريقة منفصلة لا تتطلب اختياراً جيداً خصوصاً للمنجه

$x(0)$ . وعلى كل حال يمكن استخدام الطريقة لتعطي تقريبا مبدئيًا لطريقة نيوتن أو برويدن. فعلى سبيل المثال إن النتيجة التي حصلنا عليها في مثال (2) باستخدام طريقة أويلر و  $N = 2$  يمكن أن تكون كافية للبدء بطريقتي نيوتن أو برويدن الأكثر كفاءة. وتكون أفضل لهذا الغرض من طرائق الاتصال التي تتطلب حسابًا أكثر.

نلاحظ في طرائق رونج - كوتا أن الخطوات مماثلة لـ

$$k_i = h[-J(x(\lambda_i) + \alpha_{i-1}k_{i-1})]^{-1}F(x(0))$$

ويمكن كتابتها بوصفها حلًا للنظام الخطي

$$k_i = hF(x(\lambda_i) + \alpha_{i-1}k_{i-1})$$

### خوارزمية الاتصال Continuation Algorithm

لإيجاد تقريب حل النظام غير الخطي  $F(x) = 0$  عندما يعطي تقريبا مبدئيًا  $x$ .

المدخلات: عدد  $n$  من المعادلات والمجهول. عدد صحيح  $N > 0$ ، تقريب مبدئي

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$$

المخرجات: حل تقريبي  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$

الخطوة	المضمون
1	ضع $h = 1/N$ ; $b = -hF(x)$
2	لكل $i = 1, 2, \dots, N$ نفذ الخطوات 3-7.
3	ضع $A = J(x)$ حل النظام الخطي $Ak_1 = b$ لإيجاد $k_1$
4	ضع $A = J(x + \frac{1}{2}k_1)$ حل النظام الخطي $Ak_2 = b$ لإيجاد $k_2$ .
5	ضع $A = J(x + \frac{1}{2}k_2)$ حل النظام الخطي $Ak_3 = b$ لإيجاد $k_3$ .
6	ضع $A = J(x + k)$ حل النظام الخطي $Ak_3 = b$ لإيجاد $k_4$ .
7	ضع $x = x + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6$
8	المخرجات $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ توقف.



## EXERCISE SET

## مجموعة التمارين 5.10

1. للنظام غير الخطي
- $$f_1(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 + 2x_2 = 0$$
- $$f_2(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2^2 - 6 = 0$$

حلان (2.109511920, -1.334532188)' و (0.625204094, 2.179355825)'

استخدم طريقة الاتصال وطريقة أويلر حيث  $N = 2$  لتقريب هذين الحلين حيث

$$\mathbf{x}(0) = (0, 0)'. \quad \text{ب.} \quad \mathbf{x}(0) = (1, 1)'. \quad \text{ج.} \quad \mathbf{x}(0) = (3, -2)'$$

2. كرّر التمرين (1) باستخدام طريقة رونج - كوتا من الرتبة الرابعة و  $N = 1$ .

3. استخدم طريقة الاتصال وطريقة أويلر بأخذ  $N = 2$  على الأنظمة غير الخطية الآتية:

$$\text{أ.} \quad 4x_1^2 - 20x_1 + \frac{1}{4}x_2^2 + 8 = 0 \quad \text{ب.} \quad \sin(4\pi x_1 x_2) - 2x_2 - x_1 = 0$$

$$\frac{4\pi - 1}{4\pi} (e^{2x_1} - 2 + 4ex_2^2 - 2ex_1 = 0 \quad \frac{1}{2}x_1 x_2^2 + 2x_1 - 5x_2 + 8 = 0$$

$$\text{ج.} \quad 3x_1 - \cos(x_2 x_3) - \frac{1}{2} = 0 \quad \text{د.} \quad x_1^2 + x_2 - 37 = 0$$

$$4x_1^2 - 625x_2^2 + 2x_2 - 1 = 0$$

$$x_1 - x_2^2 - 5 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0$$

$$e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0$$

4. استخدم طريقة الاتصال وطريقة رونج - كوتا من الرتبة الرابعة و  $N = 1$  على الأنظمة غير الخطية الآتية. باستخدام  $\mathbf{x}(0) = 0$  هل الإجابات هنا يمكن مقارنتها بطريقة نيوتن أم أنها

تقريبات مبدئية مناسبة لطريقة نيوتن؟

$$\text{أ.} \quad x_1(1 - x_1) + 4x_2 = 12 \quad \text{ب.} \quad 5x_1^2 - x_2^2 = 0$$

$$(x_1 - 2)^2 + (2x_2 - 3)^2 = 25 \quad x_2 - 0.25(\sin x_1 + \cos x_2) = 0$$

$$\text{قارن مع 10.2(5c)} \quad \text{قارن مع 10.2(5d)}$$

$$\text{ج.} \quad 15x_1 + x_2^2 - 4x_3 = 13 \quad \text{د.} \quad 11x_1 - 2x_2^2 + x_2 - 2x_3 - 5 = 0$$

$$x_1^2 + 10x_2 - x_3 = 11 \quad 8x_2^2 + 4x_3^2 - 9 = 0$$

$$x_2^3 - 25x_3 = -22 \quad 8x_2 x_3 + 4 = 0$$

$$\text{قارن مع 10.2(6c)} \quad \text{قارن مع 10.2(6d)}$$

5. كرّر التمرين (4) باستخدام التقريبات المبدئية كما يأتي:

$$\text{أ. من 10.2(3c)} \quad \text{ب. من 10.2(3d)} \quad \text{ج. من 10.2(4c)} \quad \text{د. من 10.2(4d)}$$

6. استخدم طريقة الاتصال وطريقة رونج - كوتا من الرتبة الرابعة و  $N = 1$  على التمرين (7) في

الفصل (2.10). هل النتائج بجودة تلك التي حصلنا عليها هناك؟

7. كرّر التمرين (5) مستخدماً  $N = 2$ .

8. كرّر التمرين (8) في الفصل (2.10) باستخدام طريقة الاتصال وطريقة رونج - كوتا من الرتبة

الرابعة بأخذ  $N = 1$ .

9. كرّر التمرين (9) في الفصل (2.10) باستخدام طريقة الاتصال وطريقة رونج - كوتا من الرتبة

الرابعة بأخذ  $N = 2$ .

10. برهن أن طريقة الاتصال وطريقة أويلر بأخذ  $N = 1$  تعطيان النتيجة نفسها لطريقة نيوتن

بالتكرار الأول. أي أنه باستخدام  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^{(0)}$  نحصل دائماً على  $\mathbf{x}(1) = \mathbf{x}^{(1)}$ .

11. برهن أن الناقل المتصل (homotopy).  $G(\lambda, \mathbf{x}) = F(\mathbf{x}) - e^{-\lambda} F(\mathbf{x}(0))$ . المستخدم في طريقة

الاتصال ضمن طريقة أويلر و  $h = 1$  يكافئ أيضاً طريقة نيوتن لأي  $x^{(0)}$ . أي أنه بأخذ  $x(0) = x^{(0)}$  نحصل على  $x(1) = x^{(1)}$ .

12. استخدم الاختصار CMRK4 ليعني طريقة الاتصال مع طريقة رونج - كوتا من الرتبة الرابعة. بعد إتمام التمارين (4. 5. 6. 7. 8 و 9) أجب عن الأسئلة الآتية:

- هل CMRK4 مع  $N = 1$  متقارنة مع طريقة نيوتن؟ ادعم إجابتك بالنتائج من تمارين سابقة.
- هل يجب استخدام CMRK4 مع  $N = 1$  بوصفها طريقة لإيجاد تقريب مبدئي لطريقة نيوتن؟ ادعم إجابتك بالنتائج من تمارين سابقة.
- كّرر الفقرة (أ) بالطريقة CMRK4 مع  $N = 2$ .
- كّرر الفقرة (ب) بالطريقة CMRK4 مع  $N = 2$ .

لقد درسنا في هذا الباب طرائق لتقريب حلول أنظمة غير خطية

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

⋮

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

وإن طريقة نيوتن للأنظمة تتطلب تقريباً مبدئياً جيداً  $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})'$ ، وتنتج متتالية

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - J(x^{(k-1)})^{-1} F(x^{(k-1)})$$

تتقارب بسرعة لحل  $P$  إذا كان  $x^{(0)}$  قريباً من  $P$  على نحو كافٍ. وعلى كل حال فإن طريقة نيوتن تتطلب تقييماً أو تقريباً  $n^2$  من المشتقات الجزئية وحل نظام خطي  $n$  في  $n$  عند كل خطوة، مما يتطلب  $O(n^3)$  من العمليات الحسابية. وتقلل طريقة برويدن مقدار الحساب في كل خطوة دون التقليل من سرعة التقارب على نحو كبير.

إن هذه الطريقة تستخدم مصفوفة جاكوبيان  $J$  مع المصفوفة  $A_{k-1}$  التي يُحسب معكوسها (نظيرها الضربي) مباشرة عند كل خطوة. وتخترزل هذه الطريقة العمليات الحسابية من  $O(n^3)$  إلى  $O(n^2)$ . وبالإضافة إلى ذلك فإن التقييمات الدالية العددية الوحيدة المطلوبة هي تقييم الدوال  $f_i$  المتوفرة في  $n^2$  من التقييمات الدالية العددية في كل خطوة. وتتطلب طريقة برويدن أيضاً تقريباً مبدئياً جيداً. لقد عُرضت طريقة المنحدر الأشد انحداراً بوصفها طريقة للحصول على تقريبات مبدئية جيدة لطريقتي نيوتن وبرويدن. وعلى الرغم من أن طريقة التناقص الأشد انحداراً لا تعطي متتالية سريعة التقارب. فإنها لا تتطلب تقريباً مبدئياً جيداً.

إن طريقة التناقص الأشد انحداراً تقرب القيمة الصغرى لدالة كثيرة المتغيرات  $g$ . ولغرض التطبيق

نختار

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n [f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)]^2$$

إن القيمة الصغرى للدالة  $g$  هي 0. التي تحدث عندما تكون الدوال  $f_i$  أصفاراً على نحو مؤقت. وتستخدم طرائق الاتصال والنقل المتصل أيضاً لأنظمة غير الخطية، وهي موضوع البحوث الجارية. (انظر [AG]). تتضمن هذه الطرائق مسألة معطاة

$$F(x) = 0$$

في عائلة مسائل أحادية الوسيط باستخدام الوسيط  $\lambda$  التي تأخذ قيماً في  $[0, 1]$ . إن المسألة الأصلية تقابل  $\lambda = 1$ . وأي مسألة ذات حل معلوم تقابل  $\lambda = 0$ . فعلى سبب امثال. مجموعة المسائل

$$G(\lambda, x) = \lambda F(x) + (1 - \lambda)(F(x) - F(x_0)) = 0$$

التي فيها المتجه الثابت  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  تشكل ناقلاً متصلًا (homotopy). عندما تكون  $\lambda = 0$  يكون الحل  $x(\lambda = 0) = x_0$  ويكون حل المسألة الأصلية مقابل للمتجه  $x(\lambda = 1)$ . وتحاول طريقة الاتصال تحديد  $x(\lambda = 1)$  بحل متتالية المسائل التي تقابل  $\lambda_0 = 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_m = 1$

إن التقريب المبدئي لحل

$$\lambda_i F(x) + (1 - \lambda_i)(F(x) - F(x_0)) = 0$$

يكون الحل  $x(\lambda = \lambda_{i-1})$  للمسألة

$$\lambda_{i-1} F(x) + (1 - \lambda_{i-1})(F(x) - F(x_0)) = 0$$

إن حقيبة هومباك في نتلب (Hompacinetlib) تحل نظام معادلات غير خطية باستخدام طرائق متعددة للناقل المتصل. وإن طرائق الأنظمة غير الخطية في مكتبتي IMSL و NAG مبنية على البرنامجين HYBRD و HYBRJ الموجودين في MINPACK. وهي حقيبة لمجال عام. وتستخدم كلتا الصيقتين طريقة ليفنبرج - ماكوارد (Levenberg - Marquardt)، التي هي معدل موزون من طريقة نيوتن وطريقة التناقص الأشد انحداراً. ويتحيز الوزن نحو طريقة التناقص الأشد انحداراً حتى يُكتشف تقارب ما. وعند ذلك الوقت ينزاح الوزن نحو طريقة نيوتن الأسرع تقارباً. وتستخدم البرمجية HYBRD الفرق المحدود لتقريب الجاكوبيان، وتتطلب البرمجية HYBRJ استخدام لحساب الجاكوبيان.

إن برنامج NEQNf وهو IMSL يحل نظاماً غير خطي دون استخدام جاكوبيان المزود بمستخدم. والبرنامج NEQNJ مماثل للبرنامج NEQNf إلا أن على المستخدم أن يزوده ببرنامج فرعي لحساب الجاكوبيان.

وفي مكتبة NAG نجد C05NBF مماثلاً لـ HYBRD، والبرنامج C05PBF مماثل لـ C05NBF إلا أن على المستخدم أن يزوده ببرنامج فرعي لحساب الجاكوبيان. إن البرنامج C05PBF يعطي على HYBRJ في الحقيبة MINPACK. وتحتوي NAG أيضاً على تعديلات أخرى لطريقة ليفنبرج - ماكوارد.

إن معالجة مستفيضة لطرائق حل أنظمة المعادلات غير الخطية يمكن الحصول عليها في أورتيجا ورينبولت [Ortega & Rheinbolt (OR)]. وفي دينس وشنابل [Dennis & Schnabel (DenS)]. أما التطويرات الحديثة على طرائق التكرار والإعادة فيمكن الحصول عليها في أرغروس وزيداروفسكي [Argyros & Szidarovszky (AS)]. أما المعلومات عن استخدام طرائق الاتصال فهي متاحة في ألغور وجورج [Allgower & Georg (AG)].