

الحلول العددية للمعادلات التفاضلية الجزئية

Numerical Solutions to Partial Differential Equations

مقدمة

الجسم المتناحي (isotropic) هو الجسم الذي يكون التوصيل الحراري على كل نقطة فيه مستقلاً عن اتجاه تيار الحرارة خلال تلك النقطة. ويمكن إيجاد انحراف $u \equiv u(x, y, z, t)$ في جسم متناحٍ عن طريق حل المعادلة التفاضلية الجزئية

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial u}{\partial z} \right) = c\rho \frac{\partial u}{\partial t}$$

حيث إن c, k و ρ دوالٌ في (x, y, z) وتمثل التوصيل الحراري. الحرارة النوعية وكثافة الجسم عند النقطة (x, y, z) على التوالي. عندما تكون c, k و ρ ثوابت. تعرف هذه المعادلة بمعادلة الحرارة البسيطة الثلاثية الأبعاد. ويعبر عنها بـ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{c\rho}{k} \frac{\partial u}{\partial t}$$

إذا كانت حدود الجسم بسيطة نسبياً أمكن إيجاد حلٍ لهذه المعادلة باستخدام سلاسل فورييه. في معظم الأحيان حيث لا تكون c, k و ρ ثابتة أو عندما تكون الحدود غير منتظمة يجب إيجاد حلٍ للمعادلة التفاضلية الجزئية بطرائق التقريب. وستُعرض في هذا الباب مقدمة عن هذا النوع من الطرائق.

إن المعادلة التفاضلية الجزئية التي سنُفرضها في الفصل (1.12) هي المعادلة الإهليلجية (معادلة ناقصية) (elliptic equation) التي تعرف بمعادلة بواسون (Poisson equation)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = f(x, y)$$

نفترض في هذه المعادلة أن f يصف مدخلات المسألة على منطقة مستوية R بالحدود S . تظهر معادلات من هذا النوع في دراسة مسائل فيزيائية متعددة ومستقلة عن الزمن، مثل توزيع الحرارة المنتظم في منطقة في مستوى، ثم تعرّضها لقوى الجاذبية في المستوى، ومسائل ثنائية الأبعاد في حالة استقرار (منتظمة) ومحتوية على سوائل غير قابلة للانضغاط. ويجب وضع تحديدات إضافية للحصول على حل وحيد لمعادلة بواسون. فعلى سبيل المثال إن

دراسة توزيع الحرارة مستقر الحالة في منطقة في المستوى يتطلب كون $f(x, y) \equiv 0$ ونتجاً بالتبسيط إلى

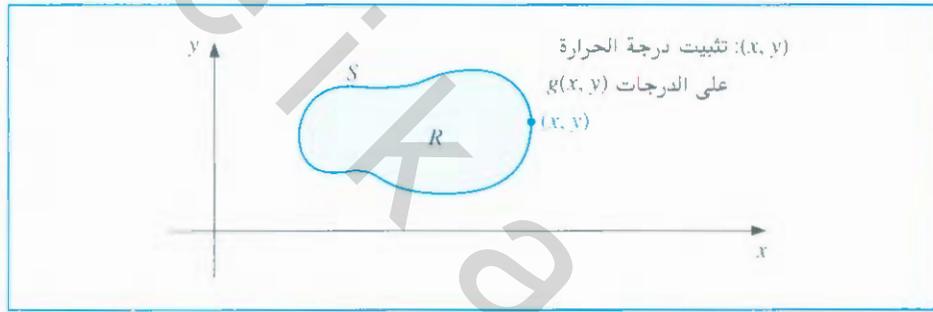
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

التي تسمى معادلة لابلاس Laplace's equation.

إذا كانت الحرارة داخل المنطقة قابلة للتحديد بتوزيعها على حدود المنطقة فإن المحددات تسمى حالات ديريشليه الحدودية (Dirichlet boundary Conditions) وتُعطى بـ

$$u(x, y) = g(x, y)$$

لـ (x, y) جميعها على S . حدود المنطقة R . (انظر شكل 1.12)



شكل 1.12

النقطة (x, y) داخل الشكل هي (x, y) بحيث تكون درجة الحرارة ثابتة عند $g(x, y)$ درجة سنقتض في الفصل (2.12) الحل العددي لمسألة تحتوي معادلة تفاضلية جزئية تكافئية على

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0$$

الصيغة

إن المسألة الفيزيائية التي افترضت هنا تُعنى بانسياب الحرارة خلال قضيب طوله l (انظر الشكل 2.12) وفيه حرارة متجانسة ضمن كل مقطع عرضي.

إن هذا يتطلب أن يكون القضيب معزولاً تماماً على سطحه الخارجي. الثابت α مستقل عن المكان في القضيب ويتحدد بخواص توصيل الحرارة للمادة التي يتكون منها القضيب.



شكل 2.12

إن إحدى المجموعات النمطية للتحديدات في مسألة انسياب الحرارة من هذا النوع هي كيفية تحديد توزيع الحرارة الابتدائية في القضيب

$$u(x, 0) = f(x)$$

ووصف السلوك على طرفي القضيب. وعلى سبيل المثال إذا ثبتت حرارة الطرفين عند U_1 و U_2

عمل بيير - سيمون لابلاس

Pierre - Simon Laplace (1749-1827)

في كثير من الحقول الرياضية منتجا

أبحاثاً إبداعية في الاحتمالات والفيزياء

الرياضية. ولقد نشر إنتاجه الرئيس في

نظرية الحرارة في الفترة (1820-1817)

ملحوظة: قَدَم جوهان ديريشليه

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet

(1805-1859)

مساهمات كبيرة في حقول نظرية الأعداد

وتقارب السلاسل ويمكن في الحفظة

اعتباره مؤسس سلاسل فورييه. لأنه كان

واحد من كتّاب بحث عميق في الموضوع

بحسب ريمان

فإن حالات الحدود تأخذ الصيغة

$$u(l, t) = U_2 \text{ و } u(0, t) = U_1$$

ويتقارب توزيع الحرارة من توزيع الحرارة المنتج للنهاية

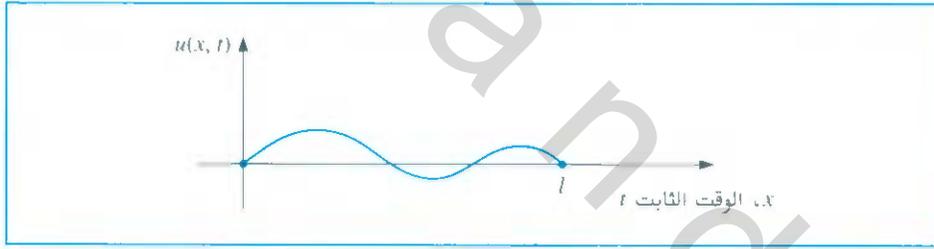
$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = U_1 + \frac{U_2 - U_1}{l}x$$

وبدلاً من هذا فإذا كان القضيب معزولاً بحيث لا تنساب الحرارة خلال الطرفين فإن حالات

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0 \text{ و } \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 \text{ الحدود تكون}$$

منتجة حرارة ثابتة في القضيب بوصفها حالة نهائية. إن المعادلة التفاضلية الجزئية ذات القطع المكافئ مهمة أيضاً في دراسة انتشار الغاز، وفي الحقيقة، تعرف في بعض الأوساط باسم معادلة الانتشار diffusion equation.

المسألة التي درست في فصل (3.12)، هي معادلة الموجة (wave equation) أحادية البعد، وهي مثال للمعادلة التفاضلية الجزئية ذات القطع الزائد. افترض أن سلكاً مرناً طوله l قد شد بين داعمين على المستوى الأفقي نفسه. (انظر شكل 3.12)



شكل 3.12

إذا جعلنا السلك يهتز في مستوى عمودي فإن الإزاحة العمودية $u(x, t)$ لنقطة x عند الزمن t تحقق المعادلة التفاضلية الجزئية

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \text{ لكل } 0 < x < l \text{ و } 0 < t$$

بشرط أن تأثيرات التخميد مهملة وأن السعة كبيرة جداً. ولكي نضع محددات على هذه المسألة افترض الموقع الابتدائي لسلك، وأن سرعته معطاة بـ

$$u(x, 0) = f(x) \text{ و } \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \text{ لكل } 0 \leq x \leq l$$

إذا كانت نقطتا النهاية ثابتتين نحصل على $u(0, t) = 0$ و $u(l, t) = 0$ أيضاً.

هناك مسائل فيزيائية أخرى تحتوي على معادلة تفاضلية جزئية زائدة وهي التي تحدث في دراسة الدعام المتهزئة حيث يُثبت أحد طرفيها أو كلاهما، وكذلك في انتقال الكهرباء في خط طويل خاضع لبعض التسرب في التيار إلى الأرض.

إن سميات المعادلات التفاضلية الجزئية تسمى قطع مخروطية

المعادلات التفاضلية الجزئية الناقصية (الإهليلجية) Elliptic Partial Differential Equations

1.12

المعادلات التفاضلية الجزئية الناقصية (الإهليلجية) Elliptic Partial Differential Equations

إن المعادلة التفاضلية الجزئية الناقصية التي نتناولها هنا هي معادلة بواسون

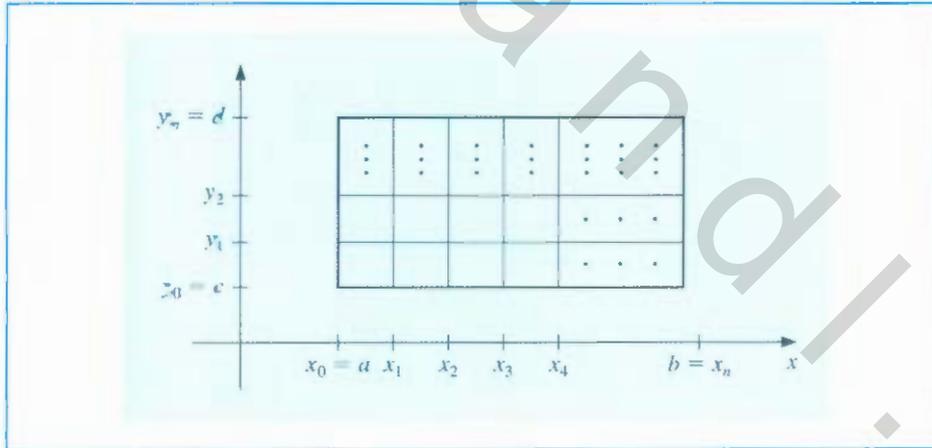
$$\nabla^2 u(x, y) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = f(x, y) \quad (1.12)$$

على $R = \{(x, y) \mid a < x < b, c < y < d\}$ مع

$$u(x, y) = g(x, y) \text{ لكل } (x, y) \in S$$

حيث S تعبر عن حدود R . إذا كان f و g متصلين على مجاليهما فعدنذا يوجد حلٌ وحيد لهذه المعادلة.

إن الطريقة المستخدمة هي تكيف لطريقة الفرق المحدود للمسائل الحطية ذات القيم الحدودية التي بحثت في الفصل (3.11). إن الخطوة الأولى هي اختيار عددين صحيحين n و m وتعريف حجمي الخطوة $h = (b - a)/n$ و $k = (d - c)/m$. خذ تجزئة للفترة $[a, b]$ تحوي n من الأجزاء المتساوية بعرض h . وجزئ الفترة $[c, d]$ إلى m من الأجزاء المتساوية بعرض k . (انظر شكل 4.12)



شكل 4.12

ضع تقسيماً على المستطيل R برسم خطوط عمودية وأخرى أفقية على النقاط بالإحداثيات

$$i = 0, 1, \dots, n \text{ لكل } x_i = a + ih \quad \text{حيث } (x_i, y_j)$$

$$j = 0, 1, \dots, m \text{ لكل } y_j = c + jk \quad \text{و}$$

الخطوط $x = x_i$ و $y = y_j$ هي خطوط تقسيم grid lines. وتقاطعاتها هي نقاط الشبكة mesh points للتقسيم.

لكل نقطة شبكة (x_i, y_j) داخل التقسيم، لكل $i = 1, 2, \dots, n - 1$ و $j = 1, 2, \dots, m - 1$

اسم سيمون ديمس بواسون
Simeon Denis Poisson
(1781-1842)
في إنتاجه حول الحركة في المستوى. وبعد ذلك في نظرية الاحتمال أنجز عمله في المعادلات التفاضلية عندما كان يافعا خلال السنوات الأولى من القرن التاسع عشر

نستخدم سلسلة تايلور في المتغير x حول x_i لتوليد معادلة الفرق المركزي

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) = \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j))}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, y_j) \quad (2.12)$$

حيث $\xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$

نستخدم سلسلة تايلور أيضا في المتغير y حول y_j لتوليد معادلة الفرق المركزي

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1}))}{k^2} - \frac{k^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, \eta_j) \quad (3.12)$$

حيث $\eta_j \in (y_{j-1}, y_{j+1})$

وباستخدام هذه المعادلات في المعادلة (1.12) يسمح لنا بالتعبير عن معادلة بواسون عند النقاط (x_i, y_j) كما يأتي:

$$\begin{aligned} & \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j))}{h^2} + \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1}))}{k^2} \\ &= f(x_i, y_j) + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, y_j) + \frac{k^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, \eta_j) \end{aligned}$$

لكل $i = 1, 2, \dots, n-1$ و $j = 1, 2, \dots, m-1$ والتعبير عن حالات الحدود كالآتي:

$$u(x_n, y_j) = g(x_n, y_j) \text{ و } u(x_0, y_j) = g(x_0, y_j) \text{ لكل } j = 0, 1, \dots, m$$

$$u(x_i, y_m) = g(x_i, y_m) \text{ و } u(x_i, y_0) = g(x_i, y_0) \text{ لكل } i = 1, 2, \dots, n-1$$

وبصيغة معادلة الفروق، فإن هذا ينتج في طريقة الفرق المحدود بخطأ قطع محلي من الرتبة $O(h^2 + k^2)$:

$$2 \left[\left(\frac{h}{k} \right)^2 + 1 \right] w_{ij} - (w_{i-1,j} + w_{i+1,j}) - \left(\frac{h}{k} \right)^2 (w_{i,j+1} + w_{i,j-1}) = -h^2 f(x_i, y_j) \quad (4.12)$$

لكل $i = 1, 2, \dots, n-1$ و $j = 1, 2, \dots, m-1$

$$w_{nj} = g(x_n, y_j) \text{ و } w_{0j} = g(x_0, y_j) \text{ لكل } j = 0, 1, \dots, m \quad (5.12)$$

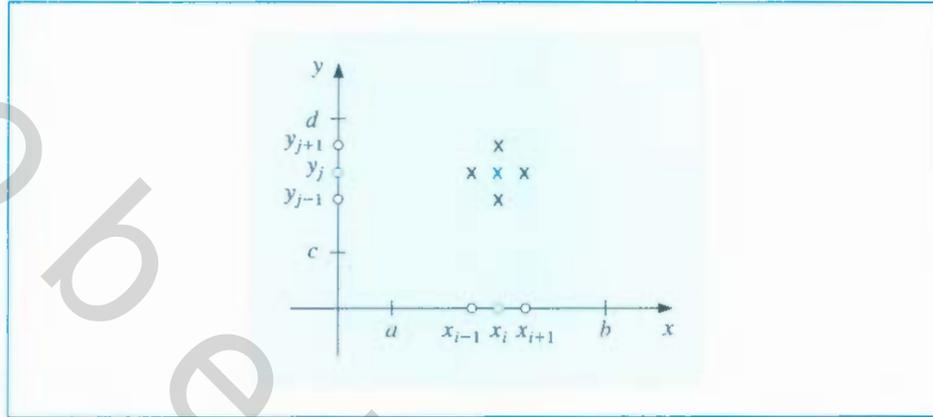
$$w_{im} = g(x_i, y_m) \text{ و } w_{i0} = g(x_i, y_0) \text{ لكل } i = 1, 2, \dots, n-1$$

حيث w_{ij} تقرب $u(x_i, y_j)$

إن المعادلة النمطية في (4.12) تحتوي تقريبات لـ $u(x, y)$ عند النقاط

$$(x_i, y_{j+1}), (x_{i-1}, y_j), (x_i, y_j), (x_{i+1}, y_j), (x_i, y_{j-1})$$

وبإعادة النظر إلى التقسيم حيث تقع هذه النقاط. يظهر أن كل معادلة تحتوي على تقريبات في منطقة نجمية الشكل حول (x_i, y_j) . (انظر شكل 5.12) إذا استخدمنا المعلومات من حالات الحدود (5.12) حيثما كان ذلك مناسباً في النظام المعطى بالمعادلة (4.12)، أي على النقاط (x_i, y_j) المجاورة جميعها لخلية حدودية. نحصل على نظام خطي $(n-1)(m-1) \times (n-1)(m-1)$ بمجهيل هي تقريبات w_{ij} لـ $u(x_i, y_j)$ على النقاط الداخلية لخلية. يُعبّر عن النظام الخطي المتضمن لهذه المجهيل من أجل حساب المصفوفات بفاعلية أكثر إذا ما أعيدت تسمية النقاط الداخلية للخلية. وهناك نظام محبذ لتسمية هذه النقاط.



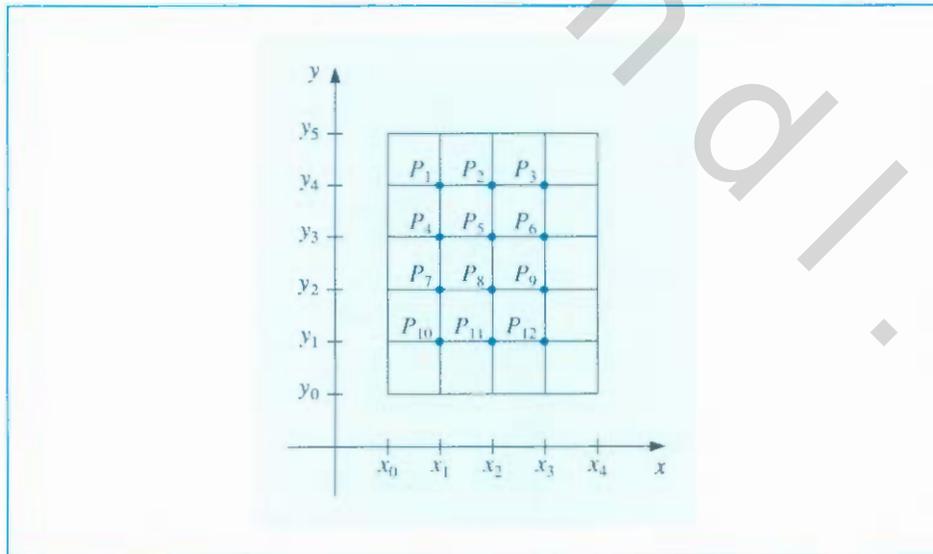
شكل 5.12

(انظر [Var 1, p.210]) يتلخص بوضع

$$w_l = w_{i,j} \text{ و } P_l = (x_i, y_j)$$

حيث $l = i + (m - 1 - j)(n - 1)$ لكل $i = 1, 2, \dots, n - 1$ و $j = 1, 2, \dots, m - 1$

إن هذا يعطي تسمية لنقاط الخلايا بالتتابع من اليسار إلى اليمين ومن الأعلى إلى الأسفل. وعلى سبيل المثال إذا كان $n = 4$ و $m = 5$ فإن التسمية الجديدة تنتج تقسيماً تظهر نقاطه في شكل (6.12). إن تسمية النقاط بهذه الطريقة يضمن أن النظام اللازم لتحديد w_{ij} هو مصفوفة مطوّقة ذات طوق عرضه $2n - 1$ على الأكثر.



شكل 6.12

افترض مسألة توزيع الحرارة في الحالة المستقرة في صفيحة معدنية مربعة نقيحة ذات أبعاد 0.5 m في 0.5 m . تثبت درجة حرارة حديدين متجاورين عند 0°C . وتزداد الحرارة على الحديد الآخرين خطياً عند إحدى الزوايا من 0°C إلى 100°C حيث يلتقي الضلعان.

مثال 1

إذا وضعنا الضلعين اللذين في الحالة الحدودية صفر على الإحداثي x والإحداثي y أمكن

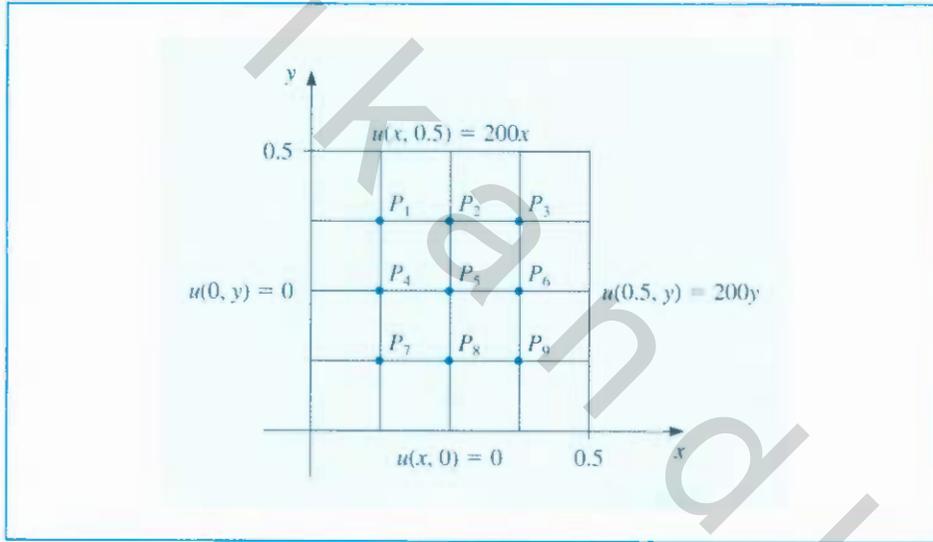
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0 \quad \text{التعبير عن المسألة بالمعادلة}$$

لكل (x, y) في المجموعة $R = \{(x, y) \mid 0 < x < 0.5, 0 < y < 0.5\}$ وفي الحالات الحدودية

$$u(0, y) = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad u(x, 0.5) = 200x, \quad u(0.5, y) = 200y$$

إذا كان $n = m = 4$ فإن المسألة تخضع للتقسيم المعطى في شكل (7.12). وتكون معادلة الفرق (4.12) كما يأتي:

$$4w_{i,j} - w_{i+1,j} - w_{i-1,j} - w_{i,j-1} - w_{i,j+1} = 0 \quad \text{لكل } i = 1, 2, 3 \text{ و } j = 1, 2, 3$$



شكل 7.12

وبالتعبير عن هذا بدلالة التسمية الجديدة لنقاط التقسيم $w_i = u(P_i)$ يتضمن أن المعادلات على

النقاط P_i تصبح

$$\begin{aligned} P_1 : & \quad 4w_1 - w_2 - w_4 = w_{0,3} + w_{1,4} \\ P_2 : & \quad 4w_2 - w_3 - w_1 - w_5 = w_{2,4} \\ P_3 : & \quad 4w_3 - w_2 - w_6 = w_{4,3} + w_{3,4} \\ P_4 : & \quad 4w_4 - w_5 - w_1 - w_7 = w_{0,2} \\ P_5 : & \quad 4w_5 - w_6 - w_4 - w_2 - w_8 = 0 \\ P_6 : & \quad 4w_6 - w_5 - w_3 - w_9 = w_{4,2} \\ P_7 : & \quad 4w_7 - w_8 - w_4 = w_{0,1} + w_{1,0} \\ P_8 : & \quad 4w_8 - w_9 - w_7 - w_5 = w_{2,0} \\ P_9 : & \quad 4w_9 - w_8 - w_6 = w_{3,0} + w_{4,1} \end{aligned}$$

حيث نحصل على الأطراف اليمنى للمعادلات من الحالات الحدودية.

وفي الحقيقة، تتضمن الحالات الحدودية ما يأتي:

$$u_{1,0} = u_{2,0} = u_{3,0} = u_{0,1} = u_{0,2} = u_{0,3} = 0,$$

$$u_{8,4} = u_{4,3} = 75 \text{ و } u_{1,4} = u_{4,1} = 25, \quad u_{2,4} = u_{4,2} = 50$$

إن النظام الخطي المرتبط بهذه المسألة يكون على الصيغة

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \\ w_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 50 \\ 150 \\ 0 \\ 0 \\ 50 \\ 0 \\ 0 \\ 25 \end{bmatrix}$$

إن قيم w_1, w_2, \dots, w_9 التي قد وجدت بتطبيق طريقة جاوس-سيدل على هذه المصفوفة معطاة في جدول (12.1).

إن هذه الإجابات صحيحة؛ لأن الحل الحقيقي $u(x, y) = 400xy$ يحقق

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0$$

ولذلك فإن خطأ القطع يكون صفرًا عند كل خطوة.

إن المسألة التي افرضناها في المثال (1) فيها الحجم نفسه لكل خلية. وهو 25. وعلى كل إحداثي. وتتطلب حل نظام خطي 9×9 فقط. إن هذا يبسط الوضع. ولا يحتاج إلى المسائل الحسابية التي تظهر عندما يكون النظام أكبر. تستخدم الخوارزمية (1.12) طريقة جاوس-سيدل Gauss-Seidel بتكرار لحل النظام الخطي الناتج. كما أنها تسمح بحجوم خلية غير متساوية على الإحداثيات.

الفرق المنتهي في معادلة بواسون Finite-Difference Equation

لتقريب حل معادلة بواسون

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = f(x, y), \quad a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d$$

تحت الشروط الحدودية

$$u(x, y) = g(x, y) \text{ إذا كان } x = a \text{ أو } x = b \text{ و } c \leq y \leq d$$

$$\text{و } u(x, y) = g(x, y) \text{ إذا كان } y = c \text{ أو } y = d \text{ و } a \leq x \leq b$$

المدخلات: نقاط النهاية a, b, c, d ، أعداد صحيحة $m \geq 3, n \geq 3$ حد الخطأ لمسوح به TOL أكبر عدد من التكرارات N .

المخرجات: التقريبات $w_{i,j}$ للقيم $u(x_i, y_j)$ لكل $i = 1, \dots, n-1$ ولكل $j = 1, \dots, m-1$

أو رسالة تفيد بأنه قد تم تجاوز العدد الأكبر من التكرارات.

جدول 1.12

w_i	i
18.75	1
37.50	2
56.25	3
12.50	4
25.00	5
37.50	6
6.25	7
12.50	8
18.75	9

ALGORITHM

الخوارزمية

1.12

المضمون	الخطوة
ضع $h = (b - a)/n$ $k = (d - c)/m$	1
لكل $i = 1, \dots, n - 1$ ضع $x_i = a + ih$ (تحدد الخطوتان 2 و 3 نقاط الشبكة).	2
لكل $j = 1, \dots, m - 1$ ضع $y_j = c + jk$.	3
لكل $i = 1, \dots, n - 1$ لكل $j = 1, \dots, m - 1$ ضع $w_{i,j} = 0$	4
ضع $\lambda = h^2/k^2$ $\mu = 2(1 + \lambda)$ $l = 1$	5
ما دام $l \leq N$ فننفذ الخطوات 20-7. (تنفذ الخطوات 20-7 تكرارات جاوس - سيدل).	6
ضع $z = (-h^2 f(x_1, y_{m-1}) + g(a, y_{m-1}) + \lambda g(x_1, d) + \lambda w_{1,m-2} + w_{2,m-1})/\mu$ $NORM = z - w_{1,m-1} $ $w_{1,m-1} = z$	7
لكل $i = 2, \dots, n - 2$ ضع $z = (-h^2 f(x_i, y_{m-1}) + \lambda g(x_i, d) + w_{i-1,m-1} + w_{i+1,m-1} + \lambda w_{i,m-2})/\mu$ إذا كان $ w_{i,m-1} - z > NORM$ فضع $ w_{i,m-1} - z $ ضع $w_{i,m-1} = z$	8
ضع $z = (-h^2 f(x_{n-1}, y_{m-1}) + g(b, y_{m-1}) + \lambda g(x_{n-1}, d) + w_{n-2,m-1} + \lambda w_{n-1,m-2})/\mu$ إذا كان $ w_{n-1,m-1} - z > NORM$ فضع $ w_{n-1,m-1} - z $ ضع $w_{n-1,m-1} = z$	9
لكل $j = m - 2, \dots, 2$ نفذ الخطوات 11، 12 و 13.	10
ضع $z = (-h^2 f(x_1, y_j) + g(a, y_j) + \lambda w_{1,j+1} + \lambda w_{1,j-1} + w_{2,j})/\mu$ إذا كان $ w_{1,j} - z > NORM$ فضع $ w_{1,j} - z $ ضع $w_{1,j} = z$	11
لكل $i = 2, \dots, n - 2$ ضع $z = (-h^2 f(x_i, y_j) + w_{i-1,j} + \lambda w_{i,j+1} + w_{i+1,j} + \lambda w_{i,j-1})/\mu$ إذا كان $ w_{i,j} - z > NORM$ فضع $ w_{i,j} - z $ ضع $w_{i,j} = z$	12
ضع $z = (-h^2 f(x_{n-1}, y_j) + g(b, y_j) + w_{n-2,j} + \lambda w_{n-1,j+1} + \lambda w_{n-1,j-1})/\mu$ إذا كان $ w_{n-1,j} - z > NORM$ فضع $ w_{n-1,j} - z $ ضع $w_{n-1,j} = z$	13
ضع $z = (-h^2 f(x_1, y_1) + g(a, y_1) + \lambda g(x_1, c) + \lambda w_{1,2} + w_{2,1})/\mu$ إذا كان $ w_{1,1} - z > NORM$ فضع $ w_{1,1} - z $ ضع $w_{1,1} = z$	14



لكل $i = 2, \dots, n-2$ ضع $z = (-h^2 f(x_i, y_1) + \lambda g(x_i, c) + w_{i-1,1} + \lambda w_{i,2} + w_{i+1,1}) / \mu$ إذا كان $ w_{i,1} - z > NORM$ فضع $ w_{i,1} - z $ ضع $w_{i,1} = z$	15
ضع $z = (-h^2 f(x_{n-1}, y_1) + g(b, y_1) + \lambda g(x_{n-1}, c) + w_{n-2,1} + \lambda w_{n-1,2}) / \mu$ إذا كان $ w_{n-1,1} - z > NORM$ فضع $ w_{n-1,1} - z $ ضع $w_{n-1,1} = z$	16
إذا كان $NORM \leq TOL$ فعندئذ نفذ الخطوتين 18 و 19.	17
لكل $i = 1, \dots, n-1$ لكل $j = 1, \dots, m-1$ المخرجات $(x_i, y_j, w_{i,j})$	18
(العملية كانت ناجحة) توقف.	19
ضع $l = l + 1$	20
المخرجات (تم تجاوز أكبر عدد من التكرارات) (لم تنجح العملية) توقف.	21



على الرغم من أن عملية التكرار لجاوس - سيدل متضمنة في الخوارزمية (1.12) للتبسيط، فإن من المهم استخدام طريقة مباشرة مثل طريقة جاوس للحذف عندما يكون النظام صغيراً أي من الرتبة 100 أو أقل، لأن موجبية التحديد تضمن الاستقرار بالنسبة إلى أخطاء التدوير. وعلى نحو خاص، فإن تعميم خوارزمية كراوت للتحليل (7.6) (انظر [Va-1,p.221]) كافية لحل هذا النظام، لأن المصفوفة تكون بصيغة قطاعات متماثلة ثلاثية القطر

$$\begin{bmatrix} A_1 & C_1 & 0 & \dots & 0 \\ C_1 & A_2 & C_2 & \dots & 0 \\ 0 & C_2 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & C_{m-1} & A_{m-1} \end{bmatrix}$$

حيث كل قطاع بحجم $(n-1) \times (n-1)$.

أما في الأنظمة الكبيرة فيجب استخدام طريقة التكرار وبالتحديد طريقة SOR المعروفة في الخوارزمية (3.7). إن اختيار ω الأعظمية في هذه الحالة يأتي من تحليل L إلى مصفوفتها القطرية D والمصفوفتين المثلثية العلوية U والمثلثية السفلية L .

$$A = D - L - U$$

وهي مصفوفة طريقة جاكوبي

$$B = D^{-1}(L + U)$$

وعندئذ يكون نصف القطر spectral للمصفوفة B (انظر [Var1]) هو

$$\rho(B) = \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{m}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \right]$$

ومن ثم فإن قيمة ω التي ستستخدم هي

$$\omega = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - [\rho(B)]^2}} = \frac{4}{2 + \sqrt{4 - \left[\cos\left(\frac{\pi}{m}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \right]^2}}$$

من الممكن أن ندخل طريقة القطاع في الخوارزمية لنحصل على تقارب أسرع في عملية SOR. لنعرض هذه الطريقة؛ انظر ([Var1, pp.221]).

افتراض معادلة بواسون

مثال 2

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = xe^y, \quad 0 < x < 2, \quad 0 < y < 1$$

مع الحالات الحدودية

$$u(0, y) = 0, \quad u(2, y) = 2e^y, \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$u(x, 0) = x, \quad u(x, 1) = ex, \quad 0 \leq x \leq 2$$

سنستخدم الخوارزمية (1.12) لنجد تقريب الحل الصحيح $m = 5, n = 6$ ، $u(x, y) = xe^y$

إن معيار التوقف في طريقة جاوس - سيدل في الخطوة 17 تتطلب

$$\left| w_{ij}^{(l)} - w_{ij}^{(l-1)} \right| \leq 10^{-10}$$

لكل $i = 1, \dots, 5$ ولكل $j = 1, \dots, 4$.

ولذلك فقد حصلنا على حل معادلة الفرق بدقة. وتوقفت العملية عند $l = 61$. وقد عُرضت

النتائج والقيم الصحيحة في جدول (2.12).

جدول 2.12

$ u(x_i, y_j) - w_{i,j}^{(61)} $	$u(x_i, y_j)$	$w_{i,j}^{(61)}$	y_j	x_i	j	i
1.30×10^{-4}	0.40713	0.40726	0.2000	0.3333	1	1
2.08×10^{-4}	0.49727	0.49748	0.4000	0.3333	2	1
2.23×10^{-4}	0.60737	0.60760	0.6000	0.3333	3	1
1.60×10^{-4}	0.74185	0.74201	0.8000	0.3333	4	1
2.55×10^{-4}	0.81427	0.81452	0.2000	0.6667	1	2
4.08×10^{-4}	0.99455	0.99496	0.4000	0.6667	2	2
4.37×10^{-4}	1.2147	1.2152	0.6000	0.6667	3	2
3.15×10^{-4}	1.4837	1.4840	0.8000	0.6667	4	2
3.64×10^{-4}	1.2214	1.2218	0.2000	1.0000	1	3
5.80×10^{-4}	1.4918	1.4924	0.4000	1.0000	2	3
6.24×10^{-4}	1.8221	1.8227	0.6000	1.0000	3	3
4.51×10^{-4}	2.2255	2.2260	0.8000	1.0000	4	3
4.51×10^{-4}	2.2255	2.2260	0.8000	1.0000	4	3
4.27×10^{-4}	1.6285	1.6290	0.2000	1.3333	1	4
6.79×10^{-4}	1.9891	1.9898	0.4000	1.3333	2	4
7.35×10^{-4}	2.4295	2.4302	0.6000	1.3333	3	4
5.40×10^{-4}	2.9674	2.9679	0.8000	1.3333	4	4
3.71×10^{-4}	2.0357	2.0360	0.2000	1.6667	1	5
5.84×10^{-4}	2.4864	2.4870	0.4000	1.6667	2	5
6.41×10^{-4}	3.0369	3.0375	0.6000	1.6667	3	5
4.89×10^{-4}	3.7092	3.7097	0.8000	1.6667	4	5

EXERCISE SET

مجموعة التمارين 1.12

1. استخدم طريقة الفرق المحدود لتقريب حلّ المسألة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2$$

$$u(x, 0) = x^2, \quad u(x, 2) = (x-2)^2, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$u(0, y) = y^2, \quad u(1, y) = (y-1)^2, \quad 0 \leq y \leq 2$$

استخدم $h = k = \frac{1}{2}$. وقارن النتائج بالحلّ الفعلي $u(x, y) = (x-y)^2$

2. استخدم طريقة الفرق المحدود لتقريب حلّ المسألة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 1 < x < 2, \quad 0 < y < 1$$

$$u(x, 0) = 2 \ln x, \quad u(x, 1) = \ln(x^2 + 1), \quad 1 \leq x \leq 2$$

$$u(1, y) = \ln(y^2 + 1), \quad u(2, y) = \ln(y^2 + 4), \quad 0 \leq y \leq 1$$

استخدم $h = k = \frac{1}{3}$. وقارن النتائج بالحلّ الفعلي $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

3. أوجد تقريب حلول المعادلات التفاضلية الجزئية الناقصية الآتية باستخدام الخوارزمية

1.12 :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = x, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(1, y) = y, \quad 0 \leq y \leq 1$$

استخدم $h = k = 0.2$. وقارن النتائج بالحلّ الفعلي $u(x, y) = xy$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -(\cos(x+y) + \cos(x-y)), \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \frac{\pi}{2}$$

$$u(0, y) = \cos y, \quad u(\pi, y) = -\cos y, \quad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

$$u(x, 0) = \cos x, \quad u\left(x, \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

استخدم $h = \pi/10$ و $k = \pi/5$. وقارن النتائج بالحلّ الفعلي $u(x, y) = \cos x \cos y$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (x^2 + y^2)e^{xy}, \quad 0 < x < 2, \quad 0 < y < 1$$

$$u(0, y) = 1, \quad u(2, y) = e^{2y}, \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$u(x, 0) = 1, \quad u(x, 1) = e^x, \quad 0 \leq x \leq 2$$

استخدم $h = 0.2$ و $k = 0.1$. وقارن النتائج بالحلّ الفعلي $u(x, y) = e^{xy}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}, \quad 1 < x < 2, \quad 1 < y < 2$$

$$u(x, 1) = x \ln x, \quad u(x, 2) = x \ln(4x^2), \quad 1 \leq x \leq 2$$

$$u(1, y) = y \ln y, \quad u(2, y) = 2y \ln(2y), \quad 1 \leq y \leq 2$$

استخدم $h = k = 0.1$. وقارن النتائج بالحلّ الفعلي $u(x, y) = xy \ln xy$

4. كرّر التمرين 3(a) باستخدام الاستكمال الخارجي بأخذ $h_0 = 0.2$ ، $h_1 = h_0/2$ و $h_2 = h_0/4$.
5. أنشئ خوارزمية شبيهة بالخوارزمية (1.12) إلا أن المطلوب هو استخدام طريقة SOR مع ω الأعظمية بدلاً من طريقة جاوس - سيدل لحل النظام الخطي.
6. كرّر التمرين (3) باستخدام الخوارزمية التي أنشئت في التمرين (5).
7. كابل ثنائي المحور مصنوع من موصل داخلي مساحة مقطعه العرضي 0.1، أنشئ مربع وموصل خارجي بمساحة 0.5 إنش مربع. إن الطاقة الكامنة على نقطة في المقطع العرضي للكابل توصف بمعادلة لابلاس.
- افتراض أن الموصل الداخلي بقي على 0 فولت. والموصل الخارجي بقي على 110 فولت. أوجد الطاقة الكامنة بين الموصلين باستخدام تقسيم طول المسافة الأفقية للخلية $h = 0.1$ إنشا. وطول المسافة العمودية $k = 0.1$ in على المنطقة

$$D = \{ (x, y) \mid 0 \leq x, y \leq 0.5 \}$$

- أوجد تقريب حل معادلة لابلاس على كل نقطة في التقسيم. واستخدم مجموعتي الحالات الحدودية لاشتقاق نظام خطي ليتم حله بطريقة جاوس - سيدل.
8. صفيحة مستطيلة من الفضة بطول 6 cm وعرض 5 cm. نتجت حرارة متجانسة على كل نقطة بمعدل $q = 1.5 \text{ cal}/(\text{cm}^2 \cdot \text{s})$. افترض أن x تمثل المسافة على حافة طول الصفيحة الذي هو 6 cm و y تمثل المسافة على حافة عرض الصفيحة الذي هو 5 cm.

افتراض أن الحرارة u على الأطراف قد بقيت على درجات الحرارة الآتية:

$$u(x, 0) = x(6 - x), \quad u(x, 5) = 0, \quad 0 \leq x \leq 6$$

$$u(0, y) = y(5 - y), \quad u(6, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq 5$$

حيث يقع المركز على نقطة الصفيحة بالإحداثيات (0,0) وتقع حافتا المستطيل على الإحداثي x والإحداثي y . إن الحرارة في حالة الاستقرار $u = u(x, y)$ تحقق معادلة بواسون

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = -\frac{q}{K}, \quad 0 < x < 6, \quad 0 < y < 5$$

حيث K ثابت توصيل الحرارة، ويساوي $1.04 \text{ cal}/(\text{cm} \cdot \text{deg} \cdot \text{s})$. أوجد تقريب الحرارة $u(x, y)$ باستخدام الخوارزمية (1.12) بأخذ $h = 0.4$ و $k = \frac{1}{3}$.

2.12 المعادلات التفاضلية الجزئية المكافئة Parabolic Partial Differential

إن المعادلة التفاضلية الجزئية المكافئة التي ندرسها هي معادلة الحرارة أو الانتشار على الصيغة

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (6.12)$$

تحت الشروط

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad \text{و} \quad u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t > 0$$

وان الطريقة التي نستخدمها لإيجاد تقريب لحل هذه المسألة تحتوي الفروق المحدودة. وهي مماثلة للطريقة المستخدمة في الفصل (1.12).

أولاً: نختار عدداً صحيحاً $m > 0$ ونعرف $m = l/m$ وبعدها نختار حجم الخطوة الزمنية k .

إن نقاط تقسيم هذه الحالة هي (x_i, t_j) حيث $x_i = ih$ لكل $i = 0, 1, \dots, m$ و $t_j = jk$ لكل $j = 0, 1, \dots, n$.

نحصل على طريقة الفرق باستخدام سلسلة تايلور في t لتكوين مقسوم الفرق.

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_j + k) - u(x_i, t_j)}{k} = \frac{k}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j) \quad (7.12)$$

لقيم ما $\mu_j \in (t_j, t_{j+1})$ وسلسلة تايلور في x لتكوين مقسوم الفرق

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i + h, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i - h, t_j)}{h^2} = \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j) \quad (8.12)$$

حيث $\xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$

تتضمن المعادلة التفاضلية الجزئية المكافئة (6.12) أن نقاط التقسيم الداخلية (x_i, t_j) لكل

$i = 1, 2, \dots, m-1$ و $j = 1, 2, \dots, n$ تعطينا

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = 0$$

ولذلك تصبح طريقة الفرق باستخدام مقسومي الفرق (7.12) و (8.12) على الصيغة

$$\frac{w_{i,j+1} - w_{ij}}{k} - \alpha^2 \frac{w_{i+1,j} - 2w_{ij} + w_{i-1,j}}{h^2} = 0 \quad (9.12)$$

حيث w_{ij} تقرب $u(x_i, t_j)$

إن خطأ القطع المحلي لمعادلة الفرق هو

$$\tau_{ij} = \frac{k}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j) - \alpha^2 \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j) \quad (10.12)$$

حل المعادلة (9.10) لإيجاد $w_{i,j+1}$ يعطي

$$w_{i,j+1} = \left(1 - \frac{2\alpha^2 k}{h^2}\right) w_{ij} + \alpha^2 \frac{k}{h^2} (w_{i+1,j} + w_{i-1,j}) \quad (11.12)$$

لكل $i = 1, 2, \dots, m-1$ و $j = 1, 2, \dots, n$

بما أن الحالة الابتدائية $u(x, 0) = f(x)$ لكل $0 \leq x \leq l$ تتضمن أن $w_{i,0} = f(x_i)$ لكل

$i = 0, 1, \dots, m$ فإنه يمكن استخدام هذه القيم في المعادلة (11.12) لإيجاد قيمة $w_{i,1}$

لكل $i = 1, 2, \dots, m-1$. أما الحالات الإضافية $u(0, t) = 0$ و $u(l, t) = 0$ فتتضمن

أن $w_{0,1} = w_{m,1} = 0$ لذلك يكون من الممكن إيجاد المدخلات جميعها التي على الصيغة

$w_{i,1}$. إذا أعدنا تطبيق الطريقة حال معرفة التقريبات $w_{i,1}$ جميعها فإنه يمكن إيجاد قيم

$w_{i,2}, w_{i,3}, \dots$ بطريقة مماثلة. إن الطبيعة الصريحة لطريقة الفرق تتضمن إمكانية كتابة المصفوفة

$(m-1) \times (m-1)$ المقترنة بهذا النظام على الصيغة ثلاثية الأقطار

$$A = \begin{bmatrix} (1-2\lambda) & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \lambda & (1-2\lambda) & \lambda & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & (1-2\lambda) \end{bmatrix}$$

حيث $\lambda = \alpha^2(k/h^2)$

إذا افترضنا

$$w^{(0)} = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_{m-1}))^t$$

$$j = 1, 2, \dots, \text{ لكل } w^{(j)} = (w_{1j}, w_{2j}, \dots, w_{m-1,j})^t \text{ و}$$

فإن الحل التقريبي يُعطى بالصيغة

$$j = 1, 2, \dots \text{ لكل } w^{(j)} = Aw^{(j-1)} \text{ و}$$

ولذلك يمكن الحصول على $w^{(j)}$ من $w^{(j-1)}$ بعملية ضرب مصفوفة بسيطة.

إن هذا يعرف بطريقة الفرق الأمامي Forward - Difference method. إذا كان حلُّ المعادلة

التفاضلية الجزئية يملك أربع مشتقات جزئية متصلة في x ، ومشتقتين في t فإن المعادلة (10.12)

تتضمن الطريقة من الرتبة $O(k + h^2)$.

افتراض معادلة الحرارة

مثال 1

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 \leq t$$

في الحالات الحدودية

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad 0 < t$$

والحالات الابتدائية

$$u(x, 0) = \sin(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

إن حلَّ هذه المسألة هو

$$u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x)$$

سيُقرَّب الحل عند $t = 0.5$ باستخدام طريقة الفرق الأمامي، أولاً بأخذ $h = 0.1$ ، $k = 0.0005$

و $\lambda = 0.05$ ثم بأخذ $h = 0.1$ ، $k = 0.01$ و $\lambda = 1$.

لقد عُرضت النتائج في جدول (3.12).

جدول 3.12

$ u(x_i, 0.5) - w_{i,50} $	$w_{i,50}$ $k = 0.01$	$ u(x_i, 0.5) - w_{i,1000} $	$w_{i,1000}$ $k = 0.0005$	$u(x_i, 0.5)$	x_i
	0		0	0	0.0
8.199×10^7	8.19876×10^7	6.411×10^{-5}	0.00228652	0.00222241	0.1
1.557×10^8	-1.55719×10^8	1.219×10^{-4}	0.00434922	0.00422728	0.2
2.138×10^8	2.13833×10^8	1.678×10^{-4}	0.00598619	0.00581336	0.3
2.506×10^8	-2.50642×10^8	1.973×10^{-4}	0.00703719	0.00683389	0.4
2.627×10^8	2.62685×10^8	2.075×10^{-4}	0.00739934	0.00719188	0.5
2.490×10^8	-2.49015×10^8	1.973×10^{-4}	0.00703719	0.00683389	0.6
2.112×10^8	2.11200×10^8	1.678×10^{-4}	0.00598619	0.00581336	0.7
1.531×10^8	-1.53086×10^8	1.219×10^{-4}	0.00434922	0.00422728	0.8
8.036×10^7	8.03604×10^7	6.511×10^{-5}	0.00228652	0.00222241	0.9
	0		0	0	1.0

يتوقع أن يكون خطأ القطع في المثال (1) من الرتبة $O(k + h^2)$ على الرغم من الحصول على

هذا بأخذ $h = 0.1$ و $k = 0.0005$ ، فإنه بالتأكيد غير ذلك بأخذ $h = 0.1$ و $k = 0.01$ ولكي

نبين هذه الصعوبة، يجب دراسة الاستقرار في طريقة الفرق الأمامي.

إذا حصل خطأ $e^{(0)} = (e_1^{(0)}, e_2^{(0)}, \dots, e_{m-1}^{(0)})'$ في تمثيل البيانات الابتدائية

$$w^{(0)} = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_{m-1}))'$$

(أو في أي خطوة، علماً بأن اختيار الخطوة الابتدائية هو للملاءمة)، فإن خط $Ae^{(0)}$ يتنامى

في $w^{(1)}$: لأن

$$w^{(1)} = A(w^{(0)} + e^{(0)}) = Aw^{(0)} + Ae^{(0)}$$

تتواصل هذه العملية في الخطوة n ، ويكون الخطأ في $w^{(n)}$: لأن $e^{(0)}$ مساوٍ لـ $A^n e^{(0)}$. ومن ثم تكون الطريقة مستقرة بالضبط عندما لا تكبر هذه الأخطاء في حال ازدياد n . ولكن يكون هذا صحيحاً إذا فقط إذا كان لأي خطأ ابتدائي $e^{(0)}$ نحصل على $\|e^{(0)}\| \leq \|A^n e^{(0)}\|$ لجميع n . إذن يجب أن نحصل على $\|A^n\| \leq 1$. وهو شرط يتطلب أن $\rho(A^n) = (\rho(A))^n \leq 1$ بحسب النظرية (15.7). ومن ثم تكون طريقة الفرق الأمامي مستقرة فقط إذا كان $\rho(A) \leq 1$ ومن الممكن برهنة أن القيم الذاتية للمصفوفة A هي

$$\mu_i = 1 - 4\lambda \left(\sin \left(\frac{i\pi}{2m} \right) \right)^2 \quad i = 1, 2, \dots, m-1$$

(انظر تمرين 13). ومن ثم يختزل شرط الاستقرار إلى تحديد ما إذا كان

$$\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq m-1} \left| 1 - 4\lambda \left(\sin \left(\frac{i\pi}{2m} \right) \right)^2 \right| \leq 1$$

التي تبسط إلى

$$0 \leq \lambda \left(\sin \left(\frac{i\pi}{2m} \right) \right)^2 \leq \frac{1}{2} \quad i = 1, 2, \dots, m-1$$

بما أن الاستقرار يتطلب تحقق هذه المتراجحة عندما $h \rightarrow 0$ ، أو على نحو مكافئ عندما $m \rightarrow \infty$ ، فإن كون

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left[\sin \left(\frac{(m-1)\pi}{2m} \right) \right]^2 = 1$$

يعني أن الاستقرار سيحدث فقط إذا كان $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$.

بما أن $\lambda = \alpha^2(k/h^2)$ فإن هذه المتراجحة تتطلب اختيار h و k بحيث

$$\alpha^2 \frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}$$

في المثال (1) كان لدينا $\alpha = 1$. ولذلك فإن هذا الشرط يتحقق عندما $h = 0.1$ و $k = 0.0005$ ،

ولكن عندما زادت k لتصبح 0.01 دون أي زيادة في h ، أصبحت النسبة

$$\frac{0.01}{(0.1)^2} = 1 > \frac{1}{2}$$

وظهرت مشكلات الاستقرار.

بالتوافق مع مصطلحات الباب الخامس، نقول إن طريقة الفرق الأمامي مستقرة بشروط، ونلاحظ

أن الطريقة تتقارب إلى حلّ المعادلة (6.12) بمعدل تقارب $O(k + h^2)$ على شرط أن

$$\alpha^2 \frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}$$

وتتحقق شروط الاتصال اللازمة على الحل.

(يمكن الرجوع إلى [IK,pp502-505] للحصول على برهان مفصل)؛ للحصول على طريقة تكون مستقرة دون شروط (Unconditionally stable)؛ نعد طرائق الفرق الضمني التي تنتج من مقسوم الفرق الخلفي للمشتقة $(\partial u / \partial t)(x_i, t_j)$ على الصيغة

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_j) - u(x_i, t_{j-1})}{k} + \frac{k}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j)$$

حيث μ_j في (t_{j-1}, t_j) .

إن تعويض هذه المعادلة مع معادلة (8.12) لـ $\partial^2 u / \partial x^2$ في المعادلة التفاضلية الجزئية يعطي

$$\begin{aligned} & \frac{u(x_i, t_j) - u(x_i, t_{j-1})}{k} - \alpha^2 \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{h^2} \\ &= -\frac{k}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j) - \alpha^2 \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j) \end{aligned}$$

لبعض $\xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$.

إن طريقة الفرق - الخلفي (Backward - Difference method) التي تنتج هي

$$\frac{w_{ij} - w_{i,j-1}}{k} - \alpha^2 \frac{w_{i+1,j} - 2w_{ij} + w_{i-1,j}}{h^2} = 0 \quad (12.12)$$

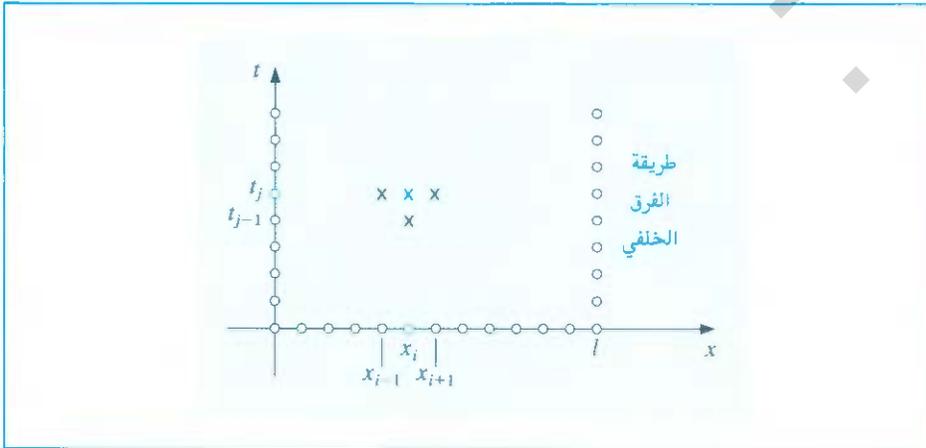
لكل $j = 1, 2, \dots$ و $i = 1, 2, \dots, m-1$

تحتوي طريقة الفرق - الخلفي في كل خطوة نمطية على النقاط الشبكية

(x_{i+1}, t_j) و (x_{i-1}, t_j) ، (x_i, t_{j-1}) ، (x_i, t_j)

وتتعامل مع تقريبات على النقاط المشار إليها بعلامة x في شكل (8.12).

شكل 8.12



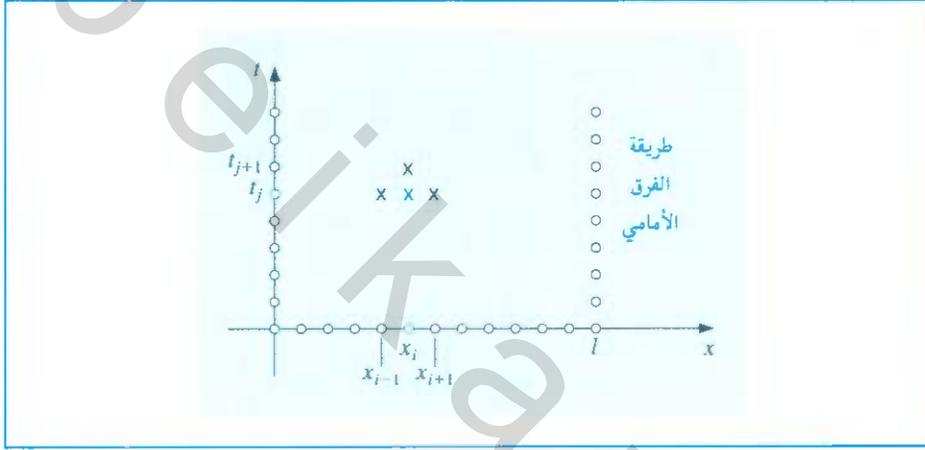
وبما أن الحالات الحدودية والابتدائية المرتبطة بهذه المسألة تعطي معلومات على النقاط الشبكية المشار إليها بدائرة، فإن الشكل يظهر عدم إمكانية استخدام أي عملية صريحة لحل المعادلة (12.12).

تذكر أنه في طريقة الفرق - الأمامي قد استخدمت تقريبات على النقاط

$$(x_{i+1}, t_j) \text{ و } (x_{i-1}, t_j), (x_i, t_j), (x_i, t_{j+1})$$

ومن ثم كانت هناك طريقة صريحة متاحة لإيجاد التقريبات بناءً على الحالات الحدودية والابتدائية. (انظر شكل 9.12)

شكل 9.12



وإذا افترضنا مرة أخرى أن λ تعبر عن $\alpha^2(k/h^2)$ فإن طريقة الفرق الخلفي تصبح

$$(1 + 2\lambda)w_{ij} - \lambda w_{i+1,j} - \lambda w_{i-1,j} = w_{i,j-1}$$

$$\text{لكل } j = 1, 2, \dots \text{ و } i = 1, 2, \dots, m-1$$

وبمعرفةنا بأن $w_{i,0} = f(x_i)$ لكل $i = 1, 2, \dots, m-1$ و $w_{m,j} = w_{0,j} = 0$ لكل

$j = 1, 2, \dots$ فإن طريقة الفرق هذه تملك التمثيل بالمصفوفات

$$\begin{bmatrix} (1+2\lambda) & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & 0 & -\lambda & (1+2\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1,j} \\ w_{2,j} \\ \vdots \\ w_{m-1,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{1,j-1} \\ w_{2,j-1} \\ \vdots \\ w_{m-1,j-1} \end{bmatrix} \quad (13.12)$$

أو $Aw^{(j)} = w^{(j-1)}$ لكل $i = 1, 2, \dots$. ومن ثم يجب علينا الآن حل نظام خطي للحصول على $w^{(j)}$ من $w^{(j-1)}$. بما أن $\lambda > 0$ فإن المصفوفة حتماً ثلاثية الأقطار. ويمكننا استخدام أي من خوارزمية كراوت للتحليل (7.6) أو خوارزمية (3.7) SOR لحل هذا النظام. ونحل الخوارزمية (2.12) المعادلة (13.12) باستخدام تحليل كراوت الذي هو مقبول، إلا إذا كنت n كبيرة في هذه الخوارزمية. ونفترض لأغراض التوقف وجود حد على t .

معادلة الفرق الإرجاعي Heat Equation Backward - Difference

لإيجاد تقريب لحل المعادلة التفاضلية الجزئية المكافئة

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T$$

تحت الحالات الحدودية

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 < t < T$$

والحالات الابتدائية

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

المدخلات: نقطة النهاية l ، أكبر وقت T ، ثابت α ، أعداد صحيحة $m \geq 3$ ، $N \geq 1$.
المخرجات: تقريبات $w_{i,j}$ إلى $u(x_i, t_j)$ لكل $i = 1, \dots, m-1$ و $j = 1, \dots, N$

الخطوة	المضمون
1	ضع $h = l/m$ $k = T/N$ $\lambda = \alpha^2 k/h^2$
2	لكل $i = 1, \dots, m-1$ ضع $w_i = f(ih)$ (القيم الابتدائية) (تنفذ الخطوات 3-11 نظامًا خطيًا ثلاثي الأقطار باستخدام الخوارزمية 7.6).
3	ضع $l_1 = 1 + 2\lambda$ $u_1 = -\lambda/l_1$
4	لكل $i = 2, \dots, m-2$ ضع $l_i = 1 + 2\lambda + \lambda u_{i-1}$ $u_i = -\lambda/l_i$
5	ضع $l_{m-1} = 1 + 2\lambda + \lambda u_{m-2}$
6	لكل $j = 1, \dots, N$ نفذ الخطوات 7-11.
7	ضع $t = jk$ (t_j الحالية) $z_1 = w_1/l_1$
8	لكل $i = 2, \dots, m-1$ ضع $z_i = (w_i + \lambda z_{i-1})/l_i$
9	ضع $w_{m-1} = z_{m-1}$
10	لكل $i = m-2, \dots, 1$ ضع $w_i = z_i - u_i w_{i+1}$
11	المخرجات (t) (لاحظ t_j) لكل $i = 1, \dots, m-1$ ضع $x = ih$ المخرجات (x, w_i) (لاحظ $w_i = w_{i,j}$)
12	(العملية مكتملة). توقف

ALGORITHM

الخوارزمية

2.12

مثال 2 طريقة الفرق الإرجاعي الخوارزمية (2.12) بأخذ $h = 0.1$ و $k = 0.01$ ستستخدم لتقريب حل

معادلة الحرارة

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t$$

تحت المحددات

$$u(x, t) = u(1, t) = 0, \quad 0 < t, \quad u(x, 0) = \sin \pi x, \quad 0 \leq x \leq 1$$

التي افترضت في المثال (1). لكي نعرض الاستقرار غير المشروط لطريقة الفرق الإرجاعي، نقارن ثانية $w_{i,50}$ بـ $u(x_i, 0.5)$ حيث $i = 0, 1, \dots, 10$. إن النتائج المعروضة في جدول (4.12) لها القيمتان h و k المساويتان لتلك في العمودين الخامس والسادس في جدول (3.12)، التي تشرح استقرار هذه الطريقة.

$ w_{i,50} - u(x_i, 0.5) $	$u(x_i, 0.5)$	$w_{i,50}$	x_i
	0	0	0.0
6.756×10^{-4}	0.00222241	0.00289802	0.1
1.285×10^{-3}	0.00422728	0.00551236	0.2
1.769×10^{-3}	0.00581836	0.00758711	0.3
2.079×10^{-3}	0.00683989	0.00891918	0.4
2.186×10^{-3}	0.00719188	0.00937818	0.5
2.079×10^{-3}	0.00683989	0.00891918	0.6
1.769×10^{-3}	0.00581836	0.00758711	0.7
1.285×10^{-3}	0.00422728	0.00551236	0.8
6.756×10^{-4}	0.00222241	0.00289802	0.9
	0	0	1.0

جدول 4.12

إن السبب وراء عدم خضوع طريقة الفرق الإرجاعي لمشكلات الاستقرار التي تواجهها طريقة الفرق الأمامي يمكن أن يتضح عن طريق تحليل القيم الذاتية للمصفوفة A . إن القيم الذاتية لطريقة الفرق الإرجاعي (انظر التمرين 14) هي

$$\mu_i = 1 + 4\lambda \left[\sin \left(\frac{i\pi}{2m} \right) \right]^2 \quad \text{لكل } i = 1, 2, \dots, m-1$$

وبما أن $\lambda > 0$ فإن $\mu_i > 1$ لكل $i = 1, 2, \dots, m-1$. إن هذا يتضمن أن A^{-1} موجودة. لأن الصفر ليس قيمة ذاتية للمصفوفة A . وينتج الخطأ $e^{(0)}$ في البيانات الابتدائية خطأ مقماره $e^{(0)}$ عند الخطوة A^{-1} . بما أن كل قيمة ذاتية للمصفوفة A هي مقلوب القيمة الذاتية المقابلة لها في A . فإن نصف القطر الطيفي للمصفوفة A^{-1} محدود الأعلى بالعدد 1. والطريقة مستقرة مع الاستقلال عن اختيار $\lambda = \alpha^2(k/h^2)$. وبلغت الباب الخامس نسمي طريقة الفرق الإرجاعي باسم الطريقة المستقرة بلا شروط (Unconditionally stable method). إن خطأ القطع المحلي لهذه الطريقة هو من الرتبة $O(k+h^2)$ على أن حل المعادلة التفاضلة يحقق شروط الاشتقاق العادية. وفي هذه الحالة تتقارب الطريقة إلى حل المعادلة التفاضلية الجزئية بمعدل التقارب نفسه. (انظر [IK,p.508]).

إن ضعف طريقة الفرق الإرجاعي ينتج عن حقيقة أن خطأ القطع المحلي فيه جزء من رتبة $O(k)$ ، متطلباً أن تكون الفترات الزمنية أصغر كثيراً من الفترات المكانية. ومن الواضح أن يكون من المهم وجود طريقة فيها خطأ القطع المحلي من الرتبة $O(k^2 + h^2)$.

إن الخطوة الأولى في هذا الاتجاه هي أن نستخدم معادلة فروق ذات خطأ $O(k^2)$ في $u(x, t)$ بدلاً من تلك التي استخدمناها سابقاً والتي كان خطأها $O(k)$. ويمكن عمل هذا باستخدام سلسلة تايلور في t للدالة $u(x, t)$ عند النقطة (x_i, t_j) ومن ثم إيجاد القيم عند (x_{i+1}, t_{j+1}) و (x_{i-1}, t_{j-1})

ريتشاردسون

- (L. F. Richardson) - الذي مر معنا أن

اسم مقترن بالاستعداد الخارجي -

قد ساهم في عملهم في تقريب

المعادلات التفاضلية الجزئية

لايجاد معادلة الفرق المركزي

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_{j-1})}{2k} + \frac{k^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i, \mu_j)$$

حيث $\mu_j \in (t_{j-1}, t_{j+1})$

إن طريقة الفرق التي تنتج من تعويض هذا وفرق المقسوم العادي للمشتقة $(\partial^2 u / \partial x^2)$ ، أي معادلة (8.12) في المعادلة التفاضلية تسمى طريقة ريتشاردسون، وتعطي الصيغة

$$\frac{w_{i,j+1} - w_{i,j-1}}{2k} - \alpha^2 \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h^2} = 0 \quad (14.12)$$

إن خطأ القطع المحلي لهذه الطريقة يكون من رتبة $O(k^2 + h^2)$ ، ولكن من المؤسف له أن الطريقة تخضع لمشكلات استقرار خطيرة. (انظر التمرينين 11 و 12).

وهناك طريقة أكثر فائدة ألا وهي التي اشتقت عن طريق إيجاد الوسط الحسابي لطريقة الفرق الأمامي في t عند الخطوة j ، أي

$$\frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{k} - \alpha^2 \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h^2} = 0$$

التي لها خطأ قطع محلي هي

$$\tau_F = \frac{k}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j) + O(h^2)$$

وطريقة الفرق الإرجاعي في t عند الخطوة $(j+1)$ ، أي

$$\frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{k} - \alpha^2 \frac{w_{i+1,j+1} - 2w_{i,j+1} + w_{i-1,j+1}}{h^2} = 0$$

التي فيها خطأ القطع المحلي هو

$$\tau_B = -\frac{k}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \hat{\mu}_j) + O(h^2)$$

إذا افترضنا

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \hat{\mu}_j) \approx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j)$$

فإن طريقة الفرق المعدل

$$\frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{k} - \frac{\alpha^2}{2} \left[\frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h^2} + \frac{w_{i+1,j+1} - 2w_{i,j+1} + w_{i-1,j+1}}{h^2} \right] = 0$$

لها خطأ قطع محلي من الرتبة $O(k^2 + h^2)$ ، على شرط تحقق شروط قابلية الاشتقاق العادية. يعرف هذا بطريقة كرانك - نيكلسون (Crank - Nicolson method). وتمثل بصيغة المصفوفات

$$j = 0, 1, 2, \dots \text{ لكل } \mathbf{A}\mathbf{w}^{(j+1)} = \mathbf{B}\mathbf{w}^{(j)} \quad (15.12)$$

حيث

$$\lambda = \alpha^2 \frac{k}{h^2}, \quad \mathbf{w}^{(j)} = (w_{1,j}, w_{2,j}, \dots, w_{m-1,j})^t$$

بعد عمله بوصفه عالماً

في الفيزياء الرياضية في الحرب

العالمية الثانية أجز كرانك

(John Crank 1916)

الحيل العددية للمعادلات التفاضلية

الجزئية. وخصوصاً في مسائل توصيل

الحرارة

إن طريقة كرانك - نيكلسون مبنية

على مشترك مع نيكولسون

Phyllis Nicolson (1968-1971)

وهو عالم فيزياء في جامعة ليدز

والمصفوفتان A و B معطتان كالآتي:

$$A = \begin{bmatrix} (1 + \lambda) & -\frac{\lambda}{2} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\lambda}{2} & (1 + \lambda) & -\frac{\lambda}{2} & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda}{2} & (1 + \lambda) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{\lambda}{2} & (1 + \lambda) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} (1 - \lambda) & \frac{\lambda}{2} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\lambda}{2} & (1 - \lambda) & \frac{\lambda}{2} & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\lambda}{2} & (1 - \lambda) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\lambda}{2} & (1 - \lambda) \end{bmatrix}$$

بما أن A مصفوفة موجبة التحديد، سائدة قطرياً حتماً وثلاثية الأقطار فإنها غير منفردة. ويمكن استخدام إما خوارزمية كراوت للتحليل (7.6) وإما الخوارزمية (3.7) SR للحصول على $w^{(j)}$ من $w^{(j+1)}$ لكل $j = 0, 1, 2, \dots$.

إن الخوارزمية (3.12) تدمج تحليل كراوت في طريقة كرانك - نيكلسون. وكما في الخوارزمية (2.12)، يجب تعيين طول محلول لفترة الزمن لكي تحدد طريقة التوقف. للتحقق من أن طريقة كرانك - نيكلسون مستقرة بلا شروط وتملك تقارباً من الرتبة $O(h^2 + k^2)$ يمكن الرجوع إلى [IK, pp.508 - 512].

كرانك - نيكلسون Crank - Nicolson

لتقريب حل المعادلة التفاضلية الجزئية المكافئة

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T$$

الخاضعة للأحوال الحدودية

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 < t < T$$

والشروط الابتدائية

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

المدخلات: نقطة النهاية l . أكبر وقت T . ثابت α . أعداد صحيحة $m \geq 3$, $N \geq 1$.

المخرجات: تقريبات $w_{i,j}$ لـ $u(x_i, t_j)$ لكل $i = 1, \dots, m-1$ و $j = 1, \dots, N$.

الخطوة	المضمون
1	<p>ضع</p> $h = l/m$ $k = T/N$ $\lambda = \alpha^2 k/h^2$ $w_m = 0$



2	لكل $i = 1, \dots, m-1$ ضع $w_i = f(ih)$ (القيم الابتدائية) (تنفيذ الخطوات 3 - 11 نظامًا خطيًا ثلاثي الأقطار باستخدام الخوارزمية (7.6))
3	ضع $l_1 = 1 + \lambda$ $u_1 = -\lambda/(2l_1)$
4	لكل $i = 2, \dots, m-2$ ضع $l_i = 1 + \lambda + \lambda u_{i-1}/2$ $u_i = -\lambda/(2l_i)$
5	ضع $l_{m-1} = 1 + \lambda + \lambda u_{m-2}/2$
6	لكل $j = 1, \dots, N$ نفذ الخطوات 7 - 11.
7	ضع $t = jk$ (الحالية j) $z_1 = \left[(1-\lambda)w_1 + \frac{\lambda}{2}w_2 \right] / l_1$
8	لكل $i = 2, \dots, m-1$ ضع $z_i = \left[(1-\lambda)w_i + \frac{\lambda}{2}(w_{i+1} + w_{i-1} + z_{i-1}) \right] / l_i$
9	ضع $w_{m-1} = z_{m-1}$
10	لكل $i = m-2, \dots, 1$ ضع $w_i = z_i - u_i w_{i+1}$
11	المخرجات (t) (لاحظ $t = jk$) لكل $i = 1, \dots, m-1$ ضع $x = ih$ المخرجات (x, w_i) (لاحظ $w_i = w_{i,j}$)
12	توقف. (الطريقة مكتملة) .



ستستخدم طريقة كرانك - نيكلسون لإيجاد تقريب لحل المسألة في المثالين (1) و (2) المتمثلة بالمعادلة

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, \quad 0 < x < 1 \quad 0 < t$$

الخاضعة للشروط

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = \sin(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

لقد استخدمت الاختيارات $\lambda = 1$, $k = 0.01$, $N = 50$, $h = 0.1$, $m = 10$ في الخوارزمية (3.12) كما كان في المثالين السابقين.

تشير النتائج في جدول (5.12) إلى تفوق طريقة كرانك - نيكلسون من حيث الدقة على طريقة الفرق الإرجاعي. التي كانت الأفضل من بين الطريقتين السابقتين.

جدول 5.12

$ w_{i,50} - u(x_i, 0.5) $	$u(x_i, 0.5)$	$w_{i,50}$	x_i
	0	0	0.0
8.271×10^{-5}	0.00222241	0.00230512	0.1
1.573×10^{-4}	0.00422728	0.00438461	0.2
2.165×10^{-4}	0.00581836	0.00603489	0.3
2.546×10^{-4}	0.00683989	0.00709444	0.4
2.677×10^{-4}	0.00719188	0.00745954	0.5
2.546×10^{-4}	0.00683989	0.00709444	0.6
2.165×10^{-4}	0.00581836	0.00603489	0.7
1.573×10^{-4}	0.00422728	0.00438461	0.8
8.271×10^{-5}	0.00222241	0.00230512	0.9
	0	0	1.0

EXERCISE SET

مجموعة التمارين 2.12

1. أوجد تقريب حل المعادلة التفاضلية الجزئية باستخدام طريقة الفرق الإرجسي

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 2, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = u(2, t) = 0, \quad 0 < t, \quad u(x, 0) = \sin \frac{\pi}{2} x, \quad 0 \leq x \leq 2$$

استخدم $N = 2$, $m = 4$, $T = 0.1$. $u(x, t) = e^{-(\pi/2)^2 t} \sin(\pi/2)x$ بالحل الفعلي ثم قارن نتائجك بالحل الفعلي

2. أوجد تقريب حل المعادلة التفاضلية الجزئية الآتية باستخدام طريقة الفرق الإرجاعي

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad 0 < t, \quad u(x, 0) = 2 \sin 2\pi x, \quad 0 \leq x \leq 1$$

استخدم $m = 3$, $T = 0.1$, $N = 2$ $u(x, t) = e^{-(\pi^2/4)t} \sin(\pi/2)x$ بالحل الفعلي ثم قارن نتائجك بالحل الفعلي

3. كرر التمرين (1) باستخدام خوارزمية كرانك - نيكلسون.

4. كرر التمرين (2) باستخدام خوارزمية كرانك - نيكلسون.

5. استخدم طريقة الفرق الأمامي لإيجاد تقريب حل المعادلة التفاضلية الجزئية المكافئة الآتية:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 2, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = u(2, t) = 0, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = \sin 2\pi x, \quad 0 \leq x \leq 2$$

استخدم $k = 0.1$, $h = 0.4$ ثم قارن نتائجك عند $t = 0.5$ بالحل الفعلي $u(x, t) = e^{-4\pi^2 t} \sin 2\pi x$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = \sin x, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

استخدم $u(x, t) = e^{-t} \sin x$ بالحل الفعلي عند $t = 0.5$ ، ثم قارن نتائجك عند $k = 0.05, h = \pi/10$.
6. استخدم طريقة الفرق الأمامي لإيجاد تقريب لحل المعادلات التفاضلية الجزئية المكافئة الآتية:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{4}{\pi^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 4, \quad 0 < t \quad \text{أ.}$$

$$u(0, t) = u(4, t) = 0, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = \sin(\pi x/4)(1 + 2 \cos(\pi x/4)), \quad 0 \leq x \leq 4$$

استخدم $h = 0.2, k = 0.04$ ، ثم قارن نتائجك عند $t = 0.4$ بالحل الفعلي

$$u(x, t) = e^{-t} \sin(\pi x/2) + e^{-t/4} \sin(\pi x/4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{\pi^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \quad \text{ب.}$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = \cos \pi \left(x - \frac{1}{2}\right), \quad 0 \leq x \leq 1$$

استخدم $h = 0.1, k = 0.04$ ، ثم قارن نتائجك عند $t = 0.4$ بالحل الفعلي

$$u(x, t) = e^{-t} \cos \pi \left(x - \frac{1}{2}\right)$$

7. كرر التمرين (5) باستخدام خوارزمية الفرق الإرجاعي.

8. كرر التمرين (6) باستخدام خوارزمية الفرق الإرجاعي.

9. كرر التمرين (5) باستخدام خوارزمية كرانك - نيكلسون.

10. كرر التمرين (6) باستخدام خوارزمية كرانك - نيكلسون.

11. كرر التمرين (5) باستخدام طريقة ريتشاردسون.

12. كرر التمرين (6) باستخدام طريقة ريتشاردسون.

13. برهن أن القيم المميزة للمصفوفة A الناتجة عن الطريقة الثلاثية الأقطار ذات الرتبة $(m-1)$

في المعطاة بالصيغة

$$\left. \begin{array}{l} j = i + 1 \text{ أو } j = i - 1, \lambda \\ j = i, 1 - 2\lambda \\ \text{غير ذلك}, 0 \end{array} \right\} = a_{ij}$$

هي القيم المميزة $\mu_i = 1 + 4\lambda \left(\sin \frac{i\pi}{2m}\right)^2$ ، وأن المتجهات الذاتية

$$v_j^{(i)} = \sin(ij\pi/m) \text{ حيث } v^{(i)}$$

14. برهن أن مصفوفة A الطريقة ثلاثية الأقطار ذات الرتبة $(m-1)$ في المعطاة بالصيغة

$$\left. \begin{array}{l} j = i + 1 \text{ أو } j = i - 1, -\lambda \\ j = i, 1 + 2\lambda \\ \text{غير ذلك}, 0 \end{array} \right\} = a_{ij}$$

حيث $\lambda > 0$ ، تكون موجبة التحديد وسائدة قطرياً وذات قيم مميزة

حيث $\mu_i = 1 + 4\lambda \left(\sin \frac{i\pi}{2m}\right)^2$ ، وأن المتجهات القطرية المقابلة هي $v^{(i)}$ حيث

$$v_j^{(i)} = \sin(ij\pi/m)$$

15. عدّل الخوارزميتين (2.12) و (3.12) لتحتوي المعادلة التفاضلية الجزئية المكافئة

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

16. استخدم نتائج التمرين (15) لتقرب حل المعادلة

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = \sin \pi x + x(1 - x)$$

بأخذ $h = 0.1$ و $k = 0.01$. قارن إجابتك عند $t = 0.25$ بالحل الفعلي

$$u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x + x(1 - x)$$

17. غير الخوارزميتين (2.12) و (3.12) لكي تستوعبا المعادلة التفاضلية الجزئية

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = \phi(t), \quad u(l, t) = \Psi(t), \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

حيث $f(l) = \Psi(0)$ و $f(0) = \phi(0)$

18. إن الحرارة $u(x, t)$ في قضيب طويل دقيق ذي مقطع عرضي ثابت ومصنوع من مادة ذات توصيل حراري منتظم تتبع معادلة الحرارة أحادية البعد.

إذا ما تولدت الحرارة في المادة، على سبيل المثال عن طريق مقاومة تيار كهربائي أو تفاعل ذري

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{Kr}{\rho C} = K \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t$$

تصبح معادلة الحرارة

حيث l الطول، ρ الكثافة، C الحرارة النوعية، و K ثابت الانتشار الحراري للقسيب. يمثّل

الدالة $r = r(x, t, u)$ الحرارة الناتجة لكل وحدة حجم. افترض أن

$$l = 1.5 \text{ cm}, \quad K = 1.04 \text{ cal/cm} \cdot \text{deg} \cdot \text{s}, \quad \rho = 10.6 \text{ g/cm}^3, \quad C = 0.056 \text{ cal/g} \cdot \text{deg}$$

و

$$r(x, t, u) = 5.0 \text{ cal/cm}^3 \cdot \text{s}$$

إذا أبقى طرفا القضيب عند 0°C فإن

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t > 0$$

افترض توزيع الحرارة الابتدائي على الصيغة

$$u(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{l}, \quad 0 \leq x \leq l$$

استخدم نتائج التمرين (15) لتعطي تقريب توزيع الحرارة بأخذ $h = 0.15$ و $k = 0.0225$.

19. يحلّل ساقار وبيين Sagar and Payne [SP] العلاقات بين الشدة والمقاومة لخصائص المادة

لأسطوانة معرّضة للحرارة والتبريد بالتناوب، وافرض المعادلة

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{4K} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \frac{1}{2} < r < 1, \quad 0 < T$$

حيث $T = T(r, t)$ هي درجة الحرارة. r المسافة نصف القطرية من مركز الأسطوانة. t الزمن و K معامل الانتشار.

أ. أوجد تقريبات القيمة $T(r, 10)$ لأسطوانة نصف قطرها الخارجي 1، إذا أعطيت الشروط الابتدائية والحدودية:

$$T(1, t) = 100 + 40t, \quad T\left(\frac{1}{2}, t\right) = t, \quad 0 \leq t \leq 10$$

$$T(r, 0) = 200(r - 0.5), \quad 0.5 \leq r \leq 1$$

استخدم تعديلاً لطريقة الفرق الإرجاعي بأخذ $K = 0.1$ ، $k = 0.5$ ، $h = \Delta r = 0.1$.

ب. استخدم توزيع الحرارة في الفقرة (أ) لحساب الشد I عن طريق تقريب التكامل

$$I = \int_{0.5}^1 \alpha T(r, t) r dr$$

حيث $\alpha = 10.7$ و $t = 10$.

استخدم طريقة شبه المنحرف بأخذ $n = 5$.

المعادلات التفاضلية الجزئية الناقصية

3.12

Hyperbolic Partial Differ-ential Equations

نفترض في هذا الفصل الحل العددي لمعادلة الموجة (wave equation) التي هي مثال على

المعادلة التفاضلية الجزئية الناقصية. تعطي معادلة الموجة بالمعادلة التفاضلية

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (16.12)$$

تحت الشروط

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad \text{لكل } t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \quad \text{لكل } 0 \leq x \leq l$$

حيث α ثابت.

اختر عدداً صحيحاً $m > 0$ وفترة زمنية حجمها $k > 0$. بأخذ $h = l/m$. تعرف نقاط الشبكة

(x_i, t_j) بما يلي:

$$t_j = jk \quad \text{و} \quad x_i = ih$$

لكل $i = 0, 1, \dots, m$ و $j = 0, 1, \dots$.

إن معادلة الموجة عند أي نقطة داخل الشبكة (x_i, t_j) تصبح

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = 0. \quad (17.12)$$

يمكن الحصول على طريقة الفرق باستخدام مقسوم الفرق المركزي للمشتقات الجزئية الثانية

المعطاة بالصيغة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j)$$

حيث $\mu_j \in (t_{j-1}, t_{j+1})$ و $\xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j)$$

تعويض هذه القيم في المعادلة (17.12) يعطي

$$\frac{u(x_{i+1}, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_{j-1}))}{k^2} - \alpha^2 \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{h^2}$$

$$= \frac{1}{12} \left[k^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i, \mu_j) - \alpha^2 h^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j) \right]$$

إن إهمال حد الخطأ

$$\tau_{i,j} = \frac{1}{12} \left[k^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i, \mu_j) - \alpha^2 h^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j) \right]$$

يؤدي إلى معادلة الفرق

$$\frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{k^2} - \alpha^2 \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h^2} = 0$$

إذا كان $\lambda = \alpha k/h$ أمكننا كتابة معادلة الفرق بالصيغة

$$w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1} - \lambda^2 w_{i+1,j} + 2\lambda^2 w_{i,j} - \lambda^2 w_{i-1,j} = 0$$

وبحل $w_{i,j+1}$ التقريب من الخطوة الزمنية الأكثر تقدماً. نحصل على

$$w_{i,j+1} = 2(1 - \lambda^2)w_{i,j} + \lambda^2(w_{i+1,j} + w_{i-1,j}) - w_{i,j-1} \quad (18.12)$$

تتحقق هذه المعادلة لكل $i = 1, 2, \dots, m-1$ و $j = 1, 2, \dots$

إن الشروط الحدودية تعطي

$$w_{0,j} = w_{m,j} = 0 \quad \text{لكل } j = 1, 2, 3, \dots \quad (19.12)$$

ويتضمن الشرط الابتدائي

$$w_{i,0} = f(x_i) \quad \text{لكل } i = 1, 2, \dots, m-1 \quad (20.12)$$

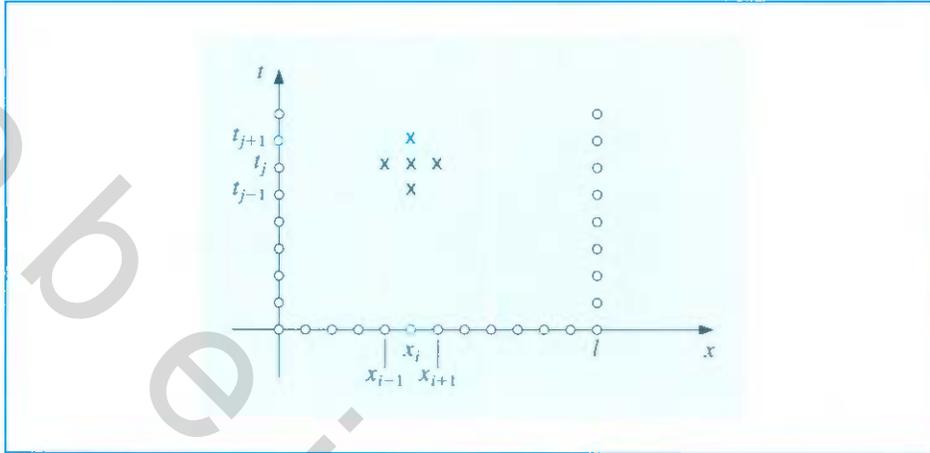
وبكتابة مجموعة المعادلات بصيغة المصفوفات نحصل على

$$\begin{bmatrix} w_{1,j+1} \\ w_{2,j+1} \\ \vdots \\ w_{m-1,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(1-\lambda^2) & \lambda^2 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda^2 & 2(1-\lambda^2) & \lambda^2 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \lambda^2 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda^2 & 2(1-\lambda^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1,j} \\ w_{2,j} \\ \vdots \\ w_{m-1,j} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} w_{1,j-1} \\ w_{2,j-1} \\ \vdots \\ w_{m-1,j-1} \end{bmatrix}$$

(21.12)

إن المعادلتين (18.12) و (19.12) تتضمنان أن الخطوة الزمنية عدد $(j+1)$ تتطلب قيماً من

الخطوتين الزمئيتين عدد z وعدد $(j-1)$. (انظر شكل 10.12)



شكل 10.12

إن هذا ينتج مشكلة ابتداء بسيطة، لأن القيم من أجل $j = 0$ معطاة في المعادلة (20.12)، أما القيم من أجل $j = 1$ التي نحتاج إليها في المعادلة (18.12) لنحسب $w_{i,2}$ يجب الحصول عليها من شرط السرعة الابتدائي.

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

إن إحدى الطرائق تكون بالتعويض عن $\partial u / \partial t$ بالتقريب من الفرق الأمامي

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, 0) = \frac{u(x_i, t_1) - u(x_i, 0)}{k} - \frac{k}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \bar{t}_i) \quad (22.12)$$

لبعض \bar{t}_i في $(0, t_1)$

حُلُّ المقدار $u(x_i, t_1)$ يعطي

$$\begin{aligned} u(x_i, t_1) &= u(x_i, 0) + k \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, 0) + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \bar{t}_i) \\ &= u(x_i, 0) + kg(x_i) + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \bar{t}_i) \end{aligned}$$

ونتيجة لذلك

$$i = 1, \dots, m-1 \text{ لكل } w_{i,1} = w_{i,0} + kg(x_i) \quad (23.12)$$

على كل حال، إن هذا يعطي تقريباً ذا خطأ من الرتبة $O(k)$ فقط.

ومن الممكن إيجاد تقريب أفضل لـ $u(x_i, 0)$.

افتراض المعادلة

$$u(x_i, t_1) = u(x_i, 0) + k \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, 0) + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, 0) + \frac{k^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i, \bar{t}_i)$$

لبعض \bar{t}_i في $(0, t_1)$ التي تأتي من مد $u(x_i, t_1)$ بكثيرة حدود ماكلورين الثاني في t

إذا كان f''' موجوداً فإن

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, 0) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, 0) = \alpha^2 \frac{d^2 f}{dx^2}(x_i) = \alpha^2 f''(x_i)$$

$$u(x_i, t_1) = u(x_i, 0) + kg(x_i) + \frac{\alpha^2 k^2}{2} f''(x_i) + \frac{k^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i, \hat{t}_i) \quad \text{و}$$

منتجة التقريب ذا الخطأ $O(k^3)$

$$w_{i,1} = w_{i,0} + kg(x_i) + \frac{\alpha^2 k^2}{2} f''(x_i)$$

إذا كان $f \in C^4[0, 1]$ ولم يكن $f''(x_i)$ متاحًا، فيمكننا استخدام معادلة الفرق في المعادلة (4.12) لكتابة

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi_i)$$

لبعض ξ_i في (x_{i-1}, x_{i+1}) .

إن هذا يتضمن

$$u(x_i, t_1) = u(x_i, 0) + kg(x_i) + \frac{k^2 \alpha^2}{2h^2} [f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))] + O(k^3 + h^2 k^2)$$

بافتراض $\lambda = (k\alpha/h)$ يكون لدينا

$$\begin{aligned} u(x_i, t_1) &= u(x_i, 0) + kg(x_i) + \frac{\lambda^2}{2} [f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))] + O(k^3 + h^2 k^2) \\ &= (1 - \lambda^2) f(x_i) + \frac{\lambda^2}{2} f(x_{i+1}) + \frac{\lambda^2}{2} f(x_{i-1}) + kg(x_i) + O(k^3 + h^2 k^2) \end{aligned}$$

وهكذا يمكن استخدام معادلة الفرق

$$w_{i,1} = (1 - \lambda^2) f(x_i) + \frac{\lambda^2}{2} f(x_{i+1}) + \frac{\lambda^2}{2} f(x_{i-1}) + kg(x_i) \quad (24.12)$$

لإيجاد $w_{i,1}$ لكل $i = 1, 2, \dots, m-1$

تستخدم الخوارزمية (4.12) المعادلة (24.12) لتقريب $w_{i,1}$ على الرغم من أنه يمكن استخدام المعادلة (23.12) أيضًا. ومن المفترض وجود حد أعلى لقيمة t التي يجب استخدامها في طريقة التوقف. وأن $k = T/N$ حيث N معطاة أيضًا.

الفرق المنتهي في معادلة الموجة Wave Equation Finite - Difference

لإيجاد تقريب لحل معادلة الموجة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T$$

تحت الشروط الحدودية

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 < t < T$$

والشروط الابتدائية

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

المدخلات: نقطة النهاية i ، أقصى زمن T ، ثابت α ، أعداد صحيحة $N \geq 2$ ، $m \geq 2$.

المخرجات: تقريبات $w_{i,1}$ لـ $u(x_i, t_j)$ لكل $i = 0, \dots, m$ و $j = 0, \dots, N$



الخطوة	المضمون
1	ضع $h = l/m$ $k = T/N$ $\lambda = k\alpha/h$
2	لكل $j = 1, \dots, N$ ضع $w_{0,j} = 0$ $w_{m,j} = 0$
3	ضع $w_{0,0} = f(0)$ $w_{m,0} = f(l)$
4	لكل $i = 1, \dots, m-1$ (الابتداء لـ $t = 0$ و $t = k$) ضع $w_{i,0} = f(ih)$ $w_{i,1} = (1 - \lambda^2)f(ih) + \frac{\lambda^2}{2}[f((i+1)h) + f((i-1)h)] + kg(ih)$
5	لكل $j = 1, \dots, N-1$ (نفذ ضرب المصفوفات). لكل $i = 1, \dots, m-1$ ضع $w_{i,j+1} = 2(1 - \lambda^2)w_{i,j} + \lambda^2(w_{i+1,j} + w_{i-1,j}) - w_{i,j-1}$
6	لكل $j = 0, \dots, N$ ضع $t = jk$ لكل $i = 0, \dots, m$ ضع $x = ih$ المخرجات $(x, t, w_{i,j})$
7	توقف. (لقد اكتملت العملية).



مثال 1 افترض المسألة الناقصية

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, \quad 0 < x < 1 \quad 0 < t$$

تحت الشروط الحدودية

$$0 < t, \quad \text{لكل } u(0, t) = u(1, t) = 0$$

والشروط الابتدائية

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad \text{و } u(x, 0) = \sin(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

من السهل التحقق من أن حل هذه المسألة هو

$$u(x, t) = \sin \pi x \cos 2\pi t$$

لقد استخدمت خوارزمية الفرق المحدود (4.12) بأخذ $T = 1$ و $m = 10$ و $N = 20$ الذي يتضمن

أن $\lambda = 1$ و $h = 0.1$, $k = 0.05$. ويعطي جدول (6.12) نتائج التقريب $w_{i,N}$ لكل $i = 0, 1, \dots, 10$

إن القيم الظاهرة في الجدول صحيحة بالنسبة إلى عدد الخانات المعطاة.

جدول 6.12

$w_{i,20}$	\bar{x}_i
0.0000000000	0.0
0.3090 69944	0.1
0.58778 52523	0.2
0.8090 69944	0.3
0.95106 65163	0.4
1.0000000000	0.5
0.95106 65163	0.6
0.8090 69944	0.7
0.58778 52523	0.8
0.3090 69944	0.9
0.00000 00000	1.0

إن نتائج المثال كانت صحيحة جداً، بل أكثر من ذلك فقد كانت صحيحة أكثر مما يوحي به خطأ القطع من الرتبة $O(k^2 + h^2)$. إن سبب هذا هو كون الحل الفعلي للمعادلة قابلاً للاشتقاق إلى ما لانهاية. عندما تكون الحال كذلك فإن استخدام سلسلة تايلور يعطي

$$\frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{h^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) + 2 \left[\frac{h^2}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i, t_j) + \frac{h^4}{6!} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_i, t_j) + \dots \right]$$

9

$$\frac{u(x_i, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j-1}))}{k^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j) + 2 \left[\frac{k^2}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i, t_j) + \frac{h^4}{6!} \frac{\partial^6 u}{\partial t^6}(x_i, t_j) + \dots \right]$$

وبما أن $u(x, t)$ يحقق المعادلة التفاضلية الجزئية فإن

$$\frac{u(x_{i+1}, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_{j-1}))}{k^2} = \frac{\alpha^2 u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j)}{h^2} = 2 \left[\frac{1}{4!} \left(k^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i, t_j) - \alpha^2 h^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i, t_j) \right) + \frac{1}{5!} \left(k^4 \frac{\partial^6 u}{\partial t^6}(x_i, t_j) - \alpha^2 h^4 \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_i, t_j) \right) + \dots \right] \quad (25.12)$$

على كل حال، فاشتقاق معادلة الموجة يعطي

$$k^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i, t_j) = k^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) \right] = \alpha^2 k^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j) \right] = \alpha^2 k^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) \right] = \alpha^4 k^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i, t_j)$$

ونرى أنه بسبب $\lambda^2 = (\alpha^2 k^2 / h^2) = 1$ نحصل على

$$\frac{1}{4!} \left[k^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i, t_j) - \alpha^2 h^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i, t_j) \right] = \frac{\alpha^2}{4!} [\alpha^2 k^2 - h^2] \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i, t_j) = 0$$

وباستمرار هذه الطريقة، فإن الحدود جميعها في الطرف الأيمن من المعادلة (25.12) هي أصغار ويتضمن ذلك أن خطأ القطع المحلي يساوي صفراً.

إن الأخطاء الوحيدة في المثال (1) هي تلك الحاصلة في التقريب w_{i1} والتدوير

وكما الحال في طريقة الفرق الأمامي لمعادلة الحرارة، فإن لطريقة الفرق المحدود الصريح لمعادلة الموجة مشكلات في الاستقرار. وفي الحقيقة من الضروري أن تكون $\lambda = \alpha k / h \leq 1$ لكي تكون هذه الطريقة مستقرة.

(انظر [IK,p.489]) إن الطريقة الصريحة المعطاة في الخوارزمية (4.12)، بأخذ $\lambda \leq 1$ متقاربة بمعدل $O(h^2 + k^2)$ إذا كانت f و g قابلتين للاشتقاق على نحو كافٍ. وللتحقق من هذا، انظر [IK,p.491]. وعلى الرغم من أننا لا نبحث في هذه الطرائق، فهناك طرائق ضمنية مستقرة دون

شروط. إن البحث في هذه الطرائق يمكن الحصول عليه في [mi]، [Am,p199]، و [Sm,B].

مجموعة التمارين 3.12

EXERCISE SET

1. أوجد تقريب حل معادلة الموجة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = \sin \pi x, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

باستخدام خوارزمية الفرق المحدود (4.12) بأخذ $m = 4$ و $N = 4$ و $T = 1.0$ قارن نتائجك عند

$$u(x, t) = \cos \pi t \sin \pi x$$

2. أوجد تقريب حل معادلة الموجة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{16\pi^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 0.5, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = u(0.5, t) = 0, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x < 0.5$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sin 4\pi x, \quad 0 \leq x < 0.5$$

باستخدام خوارزمية الفرق المحدود بأخذ $N = 4$ و $m = 4$ و $T = 0.5$ قارن نتائجك عند $t = 0.5$

$$u(x, t) = \sin t \sin 4\pi x$$

3. أوجد تقريب حل معادلة الموجة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = \sin x, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

باستخدام خوارزمية الفرق المحدود بأخذ $(k = 0.05$ و $h = \pi/10)$ و $(k = 0.1$ و $h = \pi/20)$ وأخيراً بأخذ $(k = 0.05$ و $h = \pi/20)$. قارن نتائجك عند $t = 0.5$ بالحل الفعلي

$$u(x, t) = \cos t \sin x$$

4. كرّر التمرين (4) باستخدام التقريب

$$w_{i,1} = w_{i,0} + kg(x_i)$$

في الخطوة 4 من الخوارزمية (4.12).

5. أوجد تقريب حل معادلة الموجة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = \sin 2\pi x, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 2\pi \sin 2\pi x, \quad 0 \leq x \leq 1$$

باستخدام الخوارزمية (4.12) بأخذ $h = 0.1$, $k = 0.1$ قارن نتائجك عند $t = 0.3$ بلحل الفعلي

$$u(x, t) = \sin 2\pi x (\cos 2\pi t + \sin 2\pi t)$$

6. أوجد تقريب حل معادلة الموجة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 1, 0 < t$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

باستخدام الخوارزمية (4.12). وأخذ $h = 0.1$ و $k = 0.1$.

7. يتحكم ضغط الهواء $p(x, t)$ في أنبوب آلة بمعادلة الموجة

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, 0 < t$$

حيث l طول الأنبوب و c ثابت فيزيائي. فإذا كان الأنبوب مفتوحاً فإن الشروط الحدودية

تعطى بـ

$$p(l, t) = p_0 \quad \text{و} \quad p(0, t) = p_0$$

وإذا كان الأنبوب مغلقاً عند النهاية حيث $x = l$ تكون الشروط الحدودية

$$\frac{\partial p}{\partial x}(l, t) = 0 \quad \text{و} \quad p(0, t) = p_0$$

افتراض أن $c = 1$, $l = 1$ والشروط الابتدائية هي

$$\frac{\partial p}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1 \quad \text{و} \quad p(x, 0) = p_0 \cos 2\pi x$$

أ. قَرِّب ضغط أنبوب مفتوح مع القيم $p_0 = 0.9$ عند $x = \frac{1}{2}$ و $t = 1$ باستخدام الخوارزمية (4.12)

و $h = k = 0.1$.

ب. عدّل الخوارزمية (4.12) لمسألة الأنبوب المغلق. حيث $p_0 = 0.9$. وقَرِّب $p(0.5, 1)$

و $h = k = 0.1$ مستخدماً $p(0.5, 1)$.

8. في خط انتقال الكهرباء ذي الطول l الذي يحمل تياراً متناوباً ذا تكرار عالٍ يسمى حصاً

غير خاسر "lossless". يوصف الجهد V والتيار i

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, 0 < t$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, 0 < t$$

حيث L التوصيل لكل وحدة طول، C السعة لكل وحدة طول.

افتراض أن الخط 200 ft والثابتين C و L معطيان بـ

$$L = 0.3 \text{ henries/ft} \quad \text{و} \quad C = 0.1 \text{ farads/ft}$$

وافترض أيضاً أن الجهد والتيار يحققان

$$V(0, t) = V(200, t) = 0, \quad 0 < t$$

$$V(x, 0) = 110 \sin \frac{\pi x}{200}, \quad 0 \leq x \leq 200$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 200$$

$$i(0, t) = i(200, t) = 0, \quad 0 < t$$

$$i(x, 0) = 5.5 \cos \frac{\pi x}{200}, \quad 0 \leq x \leq 200$$

$$\frac{\partial i}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 200$$

3

قرب الجهد والتيار عند $t = 0.2$ و $t = 0.5$ باستخدام الخوارزمية (4.12) وأخذ $h = 10$ و $k = 0.1$.

4.12 مقدمة لطريقة العنصر المنتهي

An Introduction to the Finite - Element Method

إن طريقة العنصر المنتهي تشبه طريقة رايلييه - ريتز (Rayleigh - Ritz) لتقريب حل القيمة الحدودية ذات النقطتين. التي تقدمت في الفصل (5.11).

لقد طُورت في الأصل لاستخدامها في الهندسة المدنية، ولكنها تستخدم الآن لتقريب حل المعادلات التفاضلية الجزئية التي تظهر في حقول الرياضيات جميعها.

إن إحدى مزايا طريقة العنصر المنتهي على طرائق الفرق المنتهي هي سهولة التعامل مع الشروط الحدودية للمسألة. والكثير من المسائل الفيزيائية تخضع لشروط حدودية فيها مشتقات وحدود أشكالها غير منتظمة.

يصعب التعامل مع الشروط الحدودية من هذا النوع باستخدام طرائق الفرق المحدود؛ لأن كل شرط حدودي متعامل مع المشتقة يتطلب إيجاد تقريب له بطريقة مقسوم الفرق على نقاط التقسيم والشكل غير المنتظم للحدود يجعل وضع نقاط التقسيم (في الشبكة) صعباً.

إن طريقة العنصر المحدود تحتوي الشروط الحدودية بوصفها تكاملات في دوال يلزم إيجاد قيمها الصغرى، ومن ثم فإن عملية الإنشاء مستقلة عن الشروط الحدودية للمسألة.

نفترض في نقاشنا المعادلة التفاضلية الجزئية

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(p(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(q(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) + r(x, y) u(x, y) = f(x, y) \quad (26.12)$$

حيث $(x, y) \in D$ حيث D هي المنطقة المستوية ذات الحدود S .

نفترض شروط حدودية ذات الصيغة

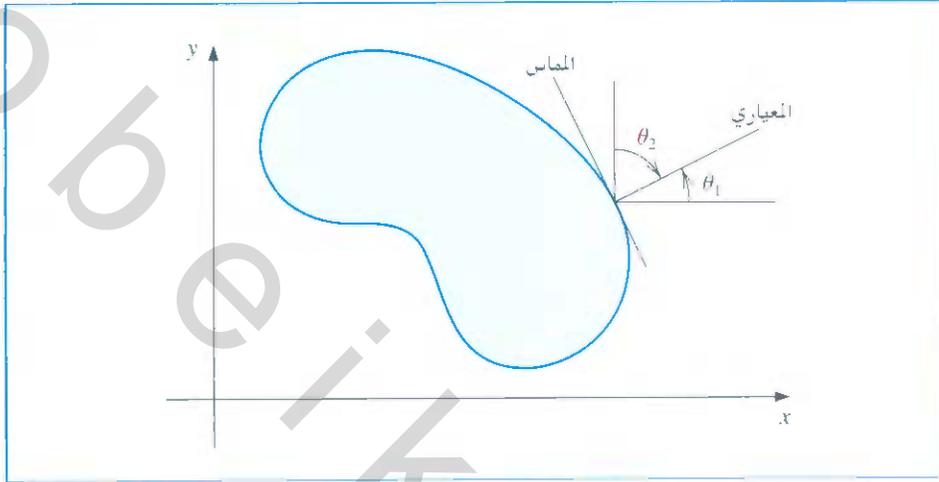
$$u(x, y) = g(x, y) \quad (27.12)$$

على جزء S_1 من الحدود، وعلى الجزء الباقي من الحدود S_2 يكون من اللازم للحل $u(x, y)$ أن يحقق

$$p(x, y) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \cos \theta_1 + q(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \cos \theta_2 + g_1(x, y) u(x, y) = g_2(x, y) \quad (28.12)$$

بسطت العناصر المنتهية في الخمسينيات من القرن العشرين بصناعة الطين وإن استخدام هذه التقنيات جاء وفقاً لبحث (TCMT) نشر في عام 1956 ولقد تطلب التطبيق الواسع لهذه الطرق مصادر حاسوبية كبيرة لم تكن متاحة حتى أوائل السبعينيات من القرن العشرين.

حيث θ_1 و θ_2 زاويتان في اتجاه العمود الخارجي (Outward normal) على الحدود عند النقطة (x, y) . (انظر شكل 11.12)



شكل 11.12

إن مسائل فيزيائية في حقول ميكانيكا الأجسام الصلبة والمرنة قد ارتبطت بمعادلات تفاضلية مماثلة للمعادلة (26.12). ويجعل الحل النمطي لسألة من هذا النوع الصيغة الدالية محتوية على تكاملات أصغر ما يمكن وعلى عائلة من الدوال المحددة بهذه المسألة.

افترض أن p, q, r, f جميعها متصلة على $D \cup S_1 \cup S_2$ ، ولها مشتقات جزئية ابتدائية متصلة G متصلة على S_1 ، وأن S_1 و S_2 متصلتان على S_2 . وبالإضافة إلى ذلك افترض أن

$$g_1(x, y) > 0 \text{ و } p(x, y) > 0, q(x, y) > 0, r(x, y) \leq 0$$

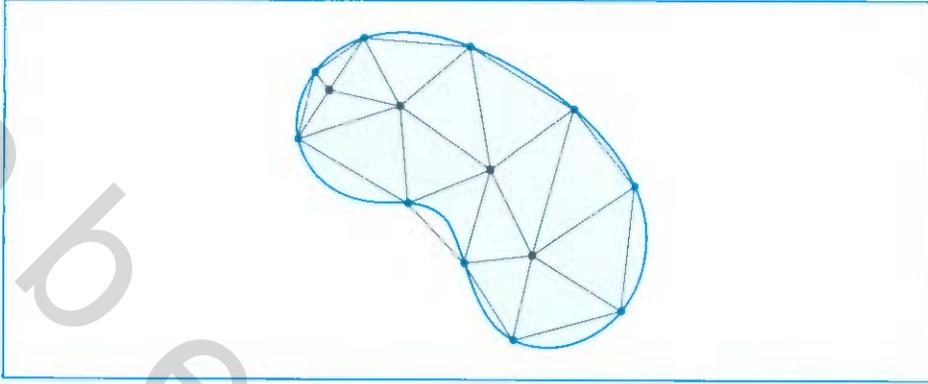
إن حل المعادلة (26.12) عندئذ يجعل العامل الدالي الآتي أصغر ما يمكن.

$$I[u] = \iint_D \left\{ \frac{1}{2} \left[p(x, y) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + q(x, y) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - r(x, y) w^2 \right] + f(x, y) w \right\} dx dy + \int_{S_2} \left\{ -g_2(x, y) w + \frac{1}{2} g_1(x, y) w^2 \right\} dS \quad (29.12)$$

على الدوال جميعها w القابلة للاشتقاق الثاني المتصل التي تحقق (27.12) على S_1 . إن طريقة العنصر المحدود تقرب الحل عن طريق إيجاد القيمة الصغرى للعامل الدالي I على عائلة دوال أصغر، كما فعلت طريقة رايلييه-ريتز Rayleigh-Ritz بالضبط لسألة القيمة الحدودية التي افترضت في الفصل (5.11).

إن الخطوة الأولى هي تقسيم المنطقة إلى عدد محدود من الأجزاء أو العناصر ذات شكل منظم إما إلى مستطيلات وإما إلى مثلثات. (انظر شكل 12.12)

وعموماً تكون مجموعة الدوال المستخدمة عبارة عن مجموعة كثيرات حدود في x و y منقطة وذات درجة ثابتة، ويتطلب التقريب أن تربط كثيرات الحدود معاً ربطاً يجعل الدالة الناتجة متصلة ذات مشتقة أولى أو ثانية قابلة للتكامل أو متصلة على المنطقة كلها.



شكل 12.12

الدوال من النوع الخطي في x و y

$$\phi(x, y) = a + bx + cy$$

شائعة الاستخدام بعناصر مثلثية. أما كثيرات الحدود من النوع الخطي الثنائي في x و y

$$\phi(x, y) = a + bx + cy + dxy$$

فُتستخدم مع عناصر مستطيلة.

ولغرض المناقشة؛ افترض أن المنطقة D قسمت إلى عناصر مثلثية. نعبّر عن مجموعة المثلثات بالرمز D . وتُسمى رؤوس المثلثات رؤوسًا (nodes).

تبحث الطريقة في إيجاد تقريب على الصيغة

$$\phi(x, y) = \sum_{i=1}^m \gamma_i \phi_i(x, y)$$

حيث $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m$ كثيرات حدود مستقلة خطياً وخطية على القطع. وتستخدم لتضمن $\phi(x, y) = g(x, y)$ أن الشرط الحدودي $\gamma_{n+1}, \gamma_{n+2}, \dots, \gamma_m$ متحقق على S_1 ، وتستخدم الثوابت الباقية $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ لكي تجعل العامل الدالي $I[\sum_{i=1}^m \gamma_i \phi_i]$ أصغر ما يمكن.

من المعادلة (29.12) يكون العامل الدالي على الصيغة

$$\begin{aligned} I[\phi] &= I \left[\sum_{i=1}^m \gamma_i \phi_i \right] \\ &= \iint_D \left(\frac{1}{2} \left\{ p(x, y) \left[\sum_{i=1}^m \gamma_i \frac{\partial \phi_i}{\partial x}(x, y) \right]^2 + q(x, y) \left[\sum_{i=1}^m \gamma_i \frac{\partial \phi_i}{\partial y}(x, y) \right]^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - r(x, y) \left[\sum_{i=1}^m \gamma_i \phi_i(x, y) \right]^2 \right\} + f(x, y) \sum_{i=1}^m \gamma_i \phi_i(x, y) \right) dy dx \\ &\quad + \int_{S_2} \left\{ -g_2(x, y) \sum_{i=1}^m \gamma_i \phi_i(x, y) + \frac{1}{2} g_1(x, y) \left[\sum_{i=1}^m \gamma_i \phi_i(x, y) \right]^2 \right\} dS. \quad (30.12) \end{aligned}$$

ولكي يظهر الأصغر، مفترضين I بمنزلة دالة لـ $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ يكون من الضروري حصول

$$\frac{\partial I}{\partial \gamma_j} = 0 \quad \text{لكل } j = 1, 2, \dots, n$$

ويعطي اشتقاق المعادلة (30.12)

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial \gamma_j} = & \iint_D \left\{ p(x, y) \sum_{i=1}^m \gamma_i \frac{\partial \phi_i}{\partial x}(x, y) \frac{\partial \phi_j}{\partial x}(x, y) \right. \\ & + q(x, y) \sum_{i=1}^m \gamma_i \frac{\partial \phi_i}{\partial y}(x, y) \frac{\partial \phi_j}{\partial y}(x, y) \\ & - r(x, y) \sum_{i=1}^m \gamma_i \phi_i(x, y) \phi_j(x, y) + f(x, y) \phi_j(x, y) \left. \right\} dx dy \\ & + \int_{S_2} \left\{ -g_2(x, y) \phi_j(x, y) + g_1(x, y) \sum_{i=1}^m \gamma_i \phi_i(x, y) \phi_j(x, y) \right\} dS \end{aligned}$$

وبذلك فإن

$$\begin{aligned} 0 = & \sum_{j=1}^n \iint_D \left\{ p(x, y) \frac{\partial \phi_i}{\partial x}(x, y) \frac{\partial \phi_j}{\partial x}(x, y) + q(x, y) \frac{\partial \phi_i}{\partial y}(x, y) \frac{\partial \phi_j}{\partial y}(x, y) \right. \\ & - r(x, y) \phi_i(x, y) \phi_j(x, y) \left. \right\} dx dy + \int_{S_2} g_1(x, y) \phi_i(x, y) \phi_j(x, y) dS \gamma_j \\ & + \iint_D f(x, y) \phi_j(x, y) dx dy - \int_{S_2} g_2(x, y) \phi_j(x, y) dS \end{aligned}$$

لكل $j = 1, 2, \dots, n$ ويمكن كتابة مجموعة المعادلات هذه على شكل نظام خطي $Ac = b$

حيث $c = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)'$ وحيث $A = (\alpha_{ij})$ و $b = (\beta_1, \dots, \beta_n)'$ تعرّف بـ

$$\alpha_{ij} = \iint_D \left[p(x, y) \frac{\partial \phi_i}{\partial x}(x, y) \frac{\partial \phi_j}{\partial x}(x, y) + q(x, y) \frac{\partial \phi_i}{\partial y}(x, y) \frac{\partial \phi_j}{\partial y}(x, y) \right. \quad (31.12) \\ \left. - r(x, y) \phi_i(x, y) \phi_j(x, y) \right] dx dy + \int_{S_2} g_1(x, y) \phi_i(x, y) \phi_j(x, y) dS$$

لكل $i = 1, 2, \dots, n$ و $j = 1, 2, \dots, m$

$$\beta_i = - \iint_D f(x, y) \phi_i(x, y) dx dy + \int_{S_2} g_2(x, y) \phi_i(x, y) dS - \sum_{k=n+1}^m \alpha_{ik} \gamma_k \quad (32.12)$$

لكل $i = 1, \dots, n$

إن الاختيار الخاص لقاعدة الدوال مهم؛ لأن الاختيار المناسب غالباً ما يجعل المصفوفة A موجبة التحديد وطوقية.

بالنسبة إلى المسألة ذات الرتبة الثانية (26.12)، نفترض أن D مضلع بحيث $D = \tau$ ، وأن S مجموعة من الخطوط المستقيمة المتجاورة.

لنبدأ العملية؛ نقسم المنطقة D إلى مجموعة من المثلثات T_1, T_2, \dots, T_M بحيث تكون رؤوس

المثلث الثلاثة قد عبّر عنها بالرموز

$$V_j^{(i)} = (x_j^{(i)}, y_j^{(i)}) \text{ لكل } j = 1, 2, 3$$

ولكي نبسط الرموز، نكتب $V_j^{(i)}$ بالصيغة $V_j = (x_j, y_j)$ عندما يكون عملنا مع المثلث الثابت T_i .

نربط مع كل رأس V_j كثيرة حدود خطية

$$\left. \begin{array}{l} j = k \text{ إذا كان } , 1 \\ j \neq k \text{ إذا كان } , 0 \end{array} \right\} = N_j^{(i)}(x_k, y_k) \text{ حيث } N_j^{(i)}(x, y) \equiv N_j(x, y) = a_j + b_j x + c_j y$$

إن هذا ينتج أنظمة خطية على الصيغة

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_j \\ b_j \\ c_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

حيث يكون العنصر 1 في الصف ذي العدد j في المتجه على اليمين (هنا $j = 2$).

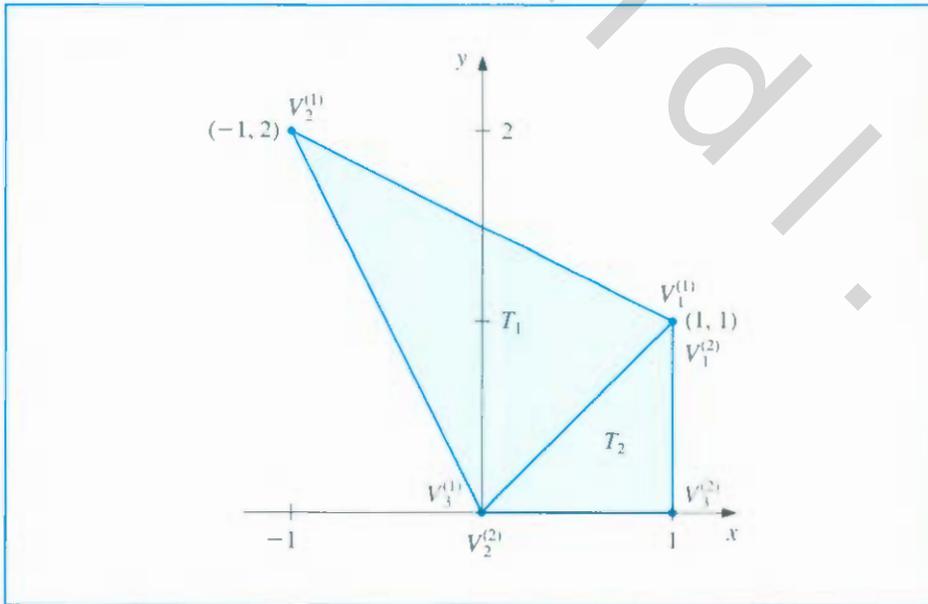
ليكن E_1, \dots, E_n عناوين للرؤوس في $D \cup S$.

من أجل كل رأس E_k ، نربط دالة ϕ_k بحيث يكون خطيًا على كل مثلث، ويمتلك القيمة 1 عند E_k وصفرًا على كل من الرؤوس الآخرين.

إن هذا الاختيار يجعل ϕ_k متطابقًا مع $N_j^{(i)}$ على المثلث T_i عندما يكون الرأس E_k الرأس المعبر عنه بالرمز $V_j^{(i)}$.

افترض أن مسألة العنصر المحدود تحتوي على مثلثين T_1 و T_2 كما في شكل (13.12).

مثال 1



شكل 13.12

إن الدالة الخطية $N_1^{(1)}(x, y)$ التي تأخذ القيمة 1 على النقطة (1,1) والقيمة صفراً على النقطة (0,0) والنقطة (-1,2) تحقق

$$\begin{aligned} a_1^{(1)} + b_1^{(1)}(1) + c_1^{(1)}(1) &= 1 \\ a_1^{(1)} + b_1^{(1)}(-1) + c_1^{(1)}(2) &= 0 \\ a_1^{(1)} + b_1^{(1)}(0) + c_1^{(1)}(0) &= 0 \end{aligned} \quad \text{و}$$

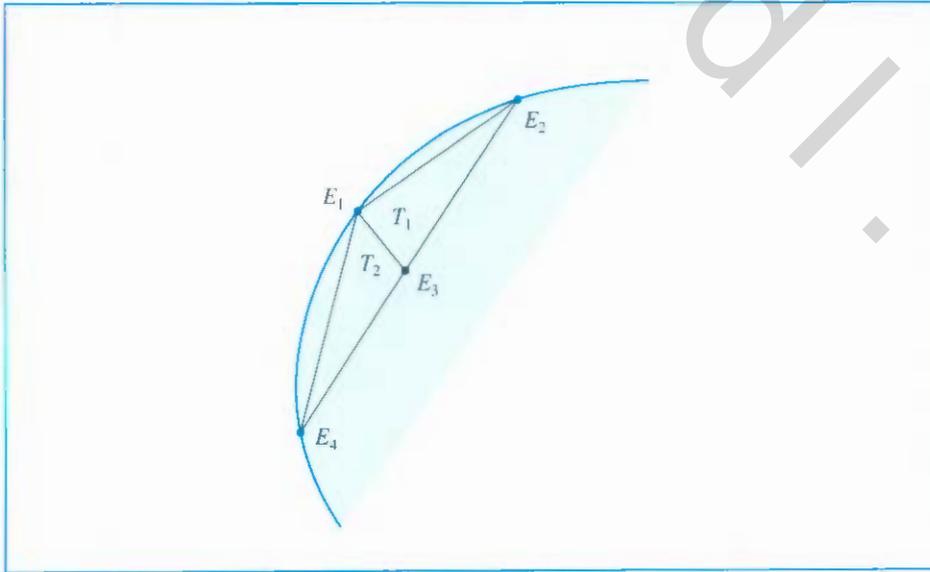
ولذلك يكون $N_1^{(1)}(x, y) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y$ و $a_1^{(1)} = 0, b_1^{(1)} = \frac{2}{3}, c_1^{(1)} = \frac{1}{3}$ وبطريقة مماثلة. فإن الدالة الخطية $N_1^{(2)}(x, y)$ التي تأخذ القيمة 1 عند (1,1) ولقيمة صفراً عند كل من (0,0) و (1,0) تحقق

$$\begin{aligned} a_1^{(2)} + b_1^{(2)}(1) + c_1^{(2)}(1) &= 1 \\ a_1^{(2)} + b_1^{(2)}(0) + c_1^{(2)}(0) &= 0 \\ a_1^{(2)} + b_1^{(2)}(1) + c_1^{(2)}(0) &= 0 \end{aligned}$$

لذلك يكون $a_1^{(2)} = 0, b_1^{(2)} = 0, c_1^{(2)} = 1$

ونتيجة لذلك يكون $N_1^{(2)}(x, y) = y$.

■ لاحظ أنه عند الحد المشترك بين T_1 و T_2 يكون $N_1^{(1)}(x, y) = N_1^{(2)}(x, y)$ لأن $y = x$. افترض أن الشكل (14.12) يمثل الجزء الأعلى الأيسر للمنطقة المعطاة في شكل (12.12). سنولد المدخلات في المصفوفة A التي تقابل النقاط المبينة في الشكل. وللتبسيط، نفترض أن E_1 ليست من أحد النقاط على S_2 .



شكل 14 12

إن العلاقة بين النقاط ورؤوس المثلثات لهذه المنطقة هي

$$E_1 = V_3^{(1)} = V_1^{(2)}, E_4 = V_2^{(2)}, E_3 = V_2^{(1)} = V_3^{(2)}, E_2 = V_1^{(1)}$$

بما أن ϕ_1 و ϕ_3 ليسا صفرين على T_1, T_2 فإن المدخلات $\alpha_{1,3} = \alpha_{3,1}$ ستحسب من

$$\begin{aligned} \alpha_{1,3} &= \iint_D \left[p \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial \phi_3}{\partial x} + q \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \frac{\partial \phi_3}{\partial y} - r \phi_1 \phi_3 \right] dx dy \\ &= \iint_{T_1} \left[p \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial \phi_3}{\partial x} + q \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \frac{\partial \phi_3}{\partial y} - r \phi_1 \phi_3 \right] dx dy \\ &\quad + \iint_{T_2} \left[p \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial \phi_3}{\partial x} + q \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \frac{\partial \phi_3}{\partial y} - r \phi_1 \phi_3 \right] dx dy \end{aligned}$$

على المثلث T_1 يكون

$$\phi_1(x, y) = N_3^{(1)}(x, y) = a_3^{(1)} + b_3^{(1)}x + c_3^{(1)}y$$

$$\phi_3(x, y) = N_2^{(1)}(x, y) = a_2^{(1)} + b_2^{(1)}x + c_2^{(1)}y$$

ولذلك يكون لـ (x, y) جميعها

$$\frac{\partial \phi_3}{\partial y} = c_2^{(1)} \text{ و } \frac{\partial \phi_1}{\partial x} = b_3^{(1)}, \frac{\partial \phi_1}{\partial y} = c_3^{(1)}, \frac{\partial \phi_3}{\partial x} = b_2^{(1)}$$

وبالمثل يكون على T_2

$$\phi_1(x, y) = N_1^{(2)}(x, y) = a_1^{(2)} + b_1^{(2)}x + c_1^{(2)}y$$

$$\phi_3(x, y) = N_3^{(2)}(x, y) = a_3^{(2)} + b_3^{(2)}x + c_3^{(2)}y$$

لذلك يكون لـ (x, y) جميعها

$$\frac{\partial \phi_3}{\partial y} = c_3^{(2)} \text{ و } \frac{\partial \phi_1}{\partial x} = b_1^{(2)}, \frac{\partial \phi_1}{\partial y} = c_1^{(2)}, \frac{\partial \phi_3}{\partial x} = b_3^{(2)}$$

وهكذا فإن

$$\begin{aligned} \alpha_{1,3} &= b_3^{(1)}b_2^{(1)} \iint_{T_1} p dx dy + c_3^{(1)}c_2^{(1)} \iint_{T_1} q dx dy \\ &\quad - \iint_{T_1} r(a_3^{(1)} + b_3^{(1)}x + c_3^{(1)}y)(a_2^{(1)} + b_2^{(1)}x + c_2^{(1)}y) dx dy \\ &\quad + b_1^{(2)}b_3^{(2)} \iint_{T_2} p dx dy + c_1^{(2)}c_3^{(2)} \iint_{T_2} q dx dy \\ &\quad - \iint_{T_2} r(a_1^{(2)} + b_1^{(2)}x + c_1^{(2)}y)(a_3^{(2)} + b_3^{(2)}x + c_3^{(2)}y) dx dy \end{aligned}$$

إن التكاملات الثنائية جميعها على D تختزل إلى تكاملات ثنائية على مثلثات.

إن الطريقة العادية تتألف من حساب التكاملات الممكنة جميعها على المثلثات، ومن ثم

تجميعهم تراكمياً α_{ij} في المدخلة A .

وبالمثل تُحسب التكاملات الثنائية ذات الصيغة

$$\iint_D f(x, y)\phi_i(x, y) dx dy$$

على مثلثات. ثم يؤخذ تراكمها في المدخلة الصحيحة β_i التابعة للمتجه b .

على سبيل المثال. لتحديد قيمة β_i . نحتاج إلى

$$\begin{aligned} -\iint_D f(x, y)\phi_1(x, y) dx dy &= -\iint_{T_1} f(x, y)[a_3^{(1)} + b_3^{(1)}x + c_3^{(1)}y] dx dy \\ &= -\iint_{T_2} f(x, y)[a_1^{(2)} + b_1^{(2)}x + c_1^{(2)}y] dx dy \end{aligned}$$

بما أن E_1 رأس لكل من T_1 . T_2 . فإن β_1 هي الجزء الذي يساهم به ϕ_1 محددًا على T_1 . والباقي

ما يساهم به ϕ_1 محددًا على T_2 . بالإضافة إلى ذلك فإن الفقاط الواقعة على S_2 تملك تكاملات

خطية مضافة إلى مدخلاتها في A و b .

تنفذ الخوارزمية (5.12) طريقة العنصر المحدود على المعادلة التفاضلية الناقصية من الرتبة الثانية.

تضع الخوارزمية قيم المصفوفة A جميعها والمتجه b أصفًا عند الابتداء. وبعد إجراء التكاملات

جميعها على المثلثات جميعها. وتجمع الخوارزمية هذه القيم للمدخلات الناسعة في A و b .

العنصر المنتهي FINITE - eLEMENT

لإيجاد تقريب لحل المعادلة التفاضلية الجزئية

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(p(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(q(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) + r(x, y)u = f(x, y), \quad (x, y) \in D$$

تحت الشروط الحدودية

$$u(x, y) = g(x, y) \quad \text{لكل } (x, y) \in S_1 \text{ و } (x, y) \in S_2$$

$$p(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \cos \theta_1 + q(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \cos \theta_2 + g_1(x, y)u(x, y) = g_2(x, y)$$

حيث $S_1 \cup S_2$ هو حد D . θ_1 و θ_2 من الزوايا المتجهة للعمود على الحد.

الخطوة 0: قسّم المنطقة D إلى مثلثات T_1, \dots, T_M .

بحيث T_1, \dots, T_K مثلثات ليس لها أضلاع على S_1 أو S_2 .

(لاحظ $K = 0$ تعني أنه لا يوجد أي مثلثات داخل D .)

T_{K+1}, \dots, T_N مثلثات لها ضلع واحد على الأقل على S_2 .

المثلثات المتبقية T_{N+1}, \dots, T_M .

(لاحظ أن $M = N$ تعني أن المثلثات جميعها لها أضلاع على S_2 .)

عبّر عن النقاط الثلاثة للمثلث T_i بالرموز

$$(x_3^{(i)}, y_3^{(i)}) \text{ و } (x_1^{(i)}, y_1^{(i)}), (x_2^{(i)}, y_2^{(i)})$$

ضع عناوين للرؤوس E_1, \dots, E_m حيث E_1, \dots, E_n تقع في $D \cup S_2$ و E_{n+1}, \dots, E_m تقع على S_1 .



(لاحظ أن $n = m$ تعني أن S_1 لا يوجد فيها رؤوس).
 المدخلات: الأعداد الصحيحة K, N, M, n, m , النقاط $(x_1^{(i)}, y_1^{(i)}), (x_2^{(i)}, y_2^{(i)}), (x_3^{(i)}, y_3^{(i)})$ لكل
 $i = 1, \dots, M$, النقاط E_j لكل $j = 1, \dots, m$.
 (لاحظ أن كل ما هو مطلوب هو إيجاد طريقة ربط رأس $(x_k^{(i)}, y_k^{(i)})$ برأس $(E_j = (x_j, y_j))$.
 المخرجات: ثوابت $a_j^{(i)}, b_j^{(i)}, c_j^{(i)}$ لكل $j = 1, 2, 3$ و $i = 1, \dots, M$ و $\gamma_1, \dots, \gamma_m$.

الخطوة	المضمون
1	لكل $l = n + 1, \dots, m$ ضع $\gamma_l = g(x_l, y_l)$ (لاحظ أن $E_l = (x_l, y_l)$)
2	لكل $i = 1, \dots, n$ ضع $\beta_i = 0$ لكل $j = 1, \dots, n$ ضع $\alpha_{i,j} = 0$
3	لكل $i = 1, \dots, M$ ضع $\Delta_i = \det \begin{vmatrix} 1 & x_1^{(i)} & y_1^{(i)} \\ 1 & x_2^{(i)} & y_2^{(i)} \\ 1 & x_3^{(i)} & y_3^{(i)} \end{vmatrix}$ $a_1^{(i)} = \frac{x_2^{(i)} y_3^{(i)} - y_2^{(i)} x_3^{(i)}}{\Delta_i}; \quad b_1^{(i)} = \frac{y_2^{(i)} - y_3^{(i)}}{\Delta_i}; \quad c_1^{(i)} = \frac{x_3^{(i)} - x_2^{(i)}}{\Delta_i}$ $a_2^{(i)} = \frac{x_3^{(i)} y_1^{(i)} - y_3^{(i)} x_1^{(i)}}{\Delta_i}; \quad b_2^{(i)} = \frac{y_3^{(i)} - y_1^{(i)}}{\Delta_i}; \quad c_2^{(i)} = \frac{x_1^{(i)} - x_3^{(i)}}{\Delta_i}$ $a_3^{(i)} = \frac{x_1^{(i)} y_2^{(i)} - y_1^{(i)} x_2^{(i)}}{\Delta_i}; \quad b_3^{(i)} = \frac{y_1^{(i)} - y_2^{(i)}}{\Delta_i}; \quad c_3^{(i)} = \frac{x_2^{(i)} - x_1^{(i)}}{\Delta_i}$ $N_j^{(i)}(x, y) = a_j^{(i)} + b_j^{(i)}x + c_j^{(i)}y \quad \text{لكل } j = 1, 2, 3$
4	لكل $i = 1, \dots, M$ (يمكن إيجاد قيم التكاملات في الخطوتين 4 و 5 باستخدام التكامل العددي). لكل $j = 1, 2, 3$ لكل $k = 1, \dots, j$ (احسب التكاملات الثنائية جميعها على المثلثات). ضع $z_{j,k}^{(i)} = b_j^{(i)} b_k^{(i)} \iint_{T_i} p(x, y) dx dy + c_j^{(i)} c_k^{(i)} \iint_{T_i} q(x, y) dx dy$ $- \iint_{T_i} r(x, y) N_j^{(i)}(x, y) N_k^{(i)}(x, y) dx dy$ ضع $H_j^{(i)} = - \iint_{T_i} f(x, y) N_j^{(i)}(x, y) dx dy$
5	لكل $i = K + 1, \dots, N$ (احسب تكاملات الخط جميعها). لكل $j = 1, 2, 3$ لكل $k = 1, \dots, j$ ضع $J_{j,k}^{(i)} = \int_{S_2} g_1(x, y) N_j^{(i)}(x, y) N_k^{(i)}(x, y) dS$ ضع $I_j^{(i)} = \int_{S_2} g_2(x, y) N_j^{(i)}(x, y) dS$



6	لكل $i = 1, \dots, M$ نفذ الخطوات 7 - 12. (تجميع التكاملات على كل مثلث في النظام الخطي).
7	لكل $k = 1, 2, 3$ نفذ الخطوات 8 - 12.
8	أوجد l بحيث $E_l = (x_k^{(i)}, y_k^{(i)})$
9	إذا كان $k > 1$ فعددتا لكل $j = 1, \dots, k-1$ نفذ الخطوتين 10 و 11.
10	أوجد t بحيث $E_t = (x_j^{(i)}, y_j^{(i)})$
11	إذا كان $l \leq n$ فعددتا $t \leq n$ لذا ضع $\alpha_{lt} = \alpha_{ll} + z_{k,j}^{(i)}$ $\alpha_{tl} = \alpha_{tl} + z_{k,j}^{(i)}$ وإلا فضع $\beta_l = \beta_l - \gamma_l z_{k,j}^{(i)}$ وإلا إذا كان $t \leq n$ فعددتا ضع $\beta_t = \beta_t - \gamma_t z_{k,j}^{(i)}$
12	إذا كان $l \leq n$ فضع $a_{ll} = \alpha_{ll} + z_{k,k}^{(i)}$ $\beta_l = \beta_l + H_k^{(i)}$
13	لكل $i = K+1, \dots, N$ نفذ الخطوات 14 - 19. (تجميع التكاملات الخطية في النظام الخطي)
14	لكل $k = 1, 2, 3$ نفذ الخطوات 15 - 19.
15	أوجد l بحيث $E_l = (x_k^{(i)}, y_k^{(i)})$
16	إذا كان $k > 1$ فعددتا ولكل $j = 1, \dots, k-1$ نفذ الخطوتين 17 و 18.
17	أوجد t بحيث $E_t = (x_j^{(i)}, y_j^{(i)})$
18	إذا كان $l \leq n$ فعددتا. $\alpha_{lt} = \alpha_{ll} + J_{k,j}^{(i)}$ لذا ضع $t \leq n$ $\alpha_{tl} = \alpha_{tl} + J_{k,j}^{(i)}$ وما عدا ذلك فضع $\beta_l = \beta_l - \gamma_l J_{k,j}^{(i)}$ وما عدا ذلك إذا كان $t \leq n$ فعددتا ضع $\beta_t = \beta_t - \gamma_t J_{k,j}^{(i)}$
19	إذا كان $l \leq n$ فعددتا ضع $\alpha_{ll} = \alpha_{ll} + J_{k,k}^{(i)}$ $\beta_l = \beta_l + I_k^{(i)}$



حل النظام الخطي $Ac = b$ حيث $A = (\alpha_{l,i})$, $b = (\beta_l)$ و $c = (\gamma_l)$ حيث $1 \leq l \leq n$ و $1 \leq i \leq n$ جميعاً.	20
المخرجات $(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ لكل $k = 1, \dots, m$ ضع $\phi_k = N_j^{(i)}$ على T_i إذا كان $E_k = (x_j^{(i)}, y_j^{(i)})$. عندئذ $\phi(x, y) = \sum_{k=1}^m \gamma_k \phi_k(x, y)$ يعطي تقريب الدالة $u(x, y)$ على $D \cup S_1 \cup S_2$	21
لكل $i = 1, \dots, M$ ولكل $j = 1, 2, 3$ المخرجات $(a_j^{(i)}, b_j^{(i)}, c_j^{(i)})$.	22
توقف. (تمت العملية).	23



مثال 2

درجة الحرارة، $u(x, y)$ ، في منطقة ثنائية الأبعاد D تحقق معادلة لابلاس

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ على } D$$

افترض المنطقة الظاهرة في شكل 15.12 بالشروط الحدودية المعطاة بـ

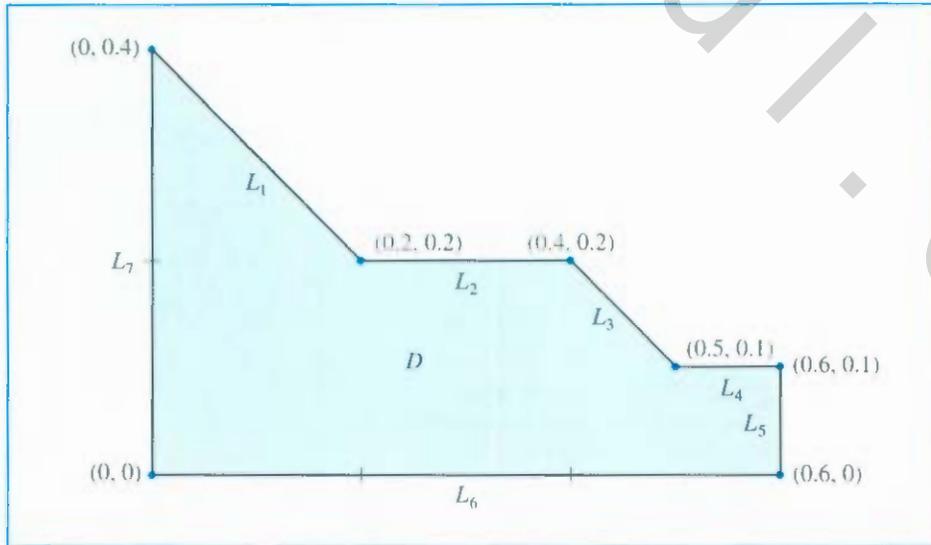
$$u(x, y) = 4 \text{ لكل } (x, y) \in L_6 \text{ و } (x, y) \in L_7$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = x \text{ لكل } (x, y) \in L_2 \text{ و } (x, y) \in L_4$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = y \text{ لكل } (x, y) \in L_5$$

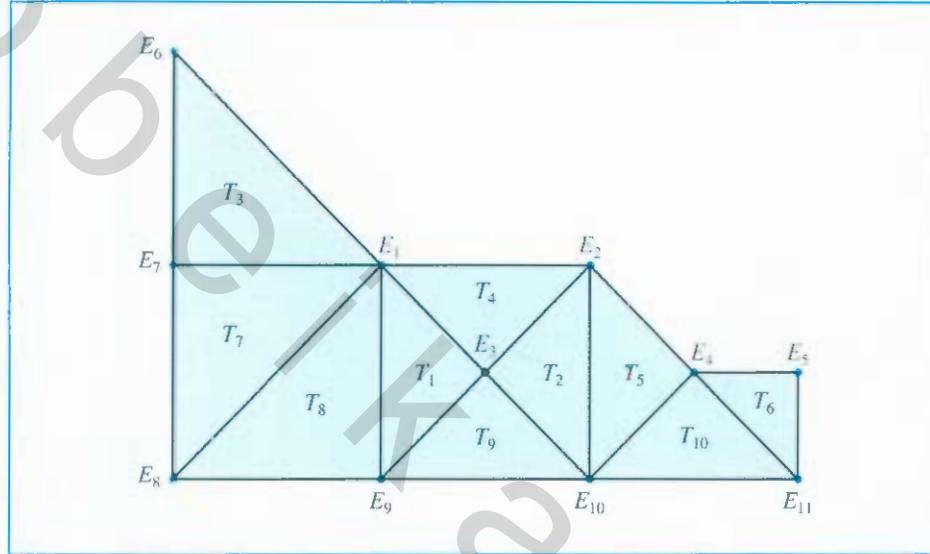
$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = \frac{x+y}{\sqrt{2}} \text{ لكل } (x, y) \in L_1 \text{ و } (x, y) \in L_3$$

حيث تعبر $\partial u / \partial n$ عن المشتقة المتجهة في اتجاه العمود على المنطقة D في النقطة (x, y) .



شكل 15.12

نبدأ أولاً بتقسيم D إلى مثلثات معنونة بالطريقة المقترحة في الخطوة 0 في الحوارية. في هذا المثال $S_1 = L_6 \cup L_7$ و $S_2 = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4 \cup L_5$. وتظهر تسمية المثلثات في شكل (16.12).



شكل 16.12

الشرط الحدودي $u(x, y) = 4$ على L_6 و L_7 يتضمن أن $\gamma_i = 4$ عندما $i = 5, 7, \dots, 11$. لتحديد قيم γ_i من أجل $i = 1, 2, \dots, 5$ ، طبق خطوات الخوارزمية المتبقية ووجد مصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2.5 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & -1 & -0.5 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & 2.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

والمتجه

$$b = \begin{bmatrix} 6.066\bar{6} \\ 0.063\bar{3} \\ 8.0000 \\ 6.056\bar{6} \\ 2.031\bar{6} \end{bmatrix}$$

ويكون حل المعادلة $Ac = b$ هو

$$c = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.0383 \\ 4.0782 \\ 4.0291 \\ 4.0496 \\ 4.0565 \end{bmatrix}$$

الذي يعطي التقريب الآتي لحل معادلة لابلاس والشروط الحدودية على المثلثات ذات العلاقة:

$$\begin{aligned}
 T_1: \quad \phi(x, y) &= 4.0383(1 - 5x + 5y) + 4.0291(-2 + 10x) + 4(2 - 5x - 5y) \\
 T_2: \quad \phi(x, y) &= 4.0782(-2 + 5x + 5y) + 4.0291(4 - 10x) + 4(-1 + 5x - 5y) \\
 T_3: \quad \phi(x, y) &= 4(-1 + 5y) + 4(2 - 5x - 5y) + 4.0383(5x) \\
 T_4: \quad \phi(x, y) &= 4.0383(1 - 5x + 5y) + 4.0782(-2 + 5x + 5y) + 4.0291(2 - 10y) \\
 T_5: \quad \phi(x, y) &= 4.0782(2 - 5x + 5y) + 4.0496(-4 + 10x) + 4(3 - 5x - 5y) \\
 T_6: \quad \phi(x, y) &= 4.0496(6 - 10x) + 4.0565(-6 + 10x + 10y) + 4(1 - 10y) \\
 T_7: \quad \phi(x, y) &= 4(-5x + 5y) + 4.0383(5x) + 4(1 - 5y) \\
 T_8: \quad \phi(x, y) &= 4.0383(5y) + 4(1 - 5x) + 4(5x - 5y) \\
 T_9: \quad \phi(x, y) &= 4.0291(10y) + 4(2 - 5x - 5y) + 4(-1 + 5x - 5y) \\
 T_{10}: \quad \phi(x, y) &= 4.0496(10x) + 4(3 - 5x - 5y) + 4(-2 + 5x - 5y)
 \end{aligned}$$

إن الحل الفعلي لمسألة القيمة الحدودية هو $u(x, y) = xy + 4$

يبين جدول (7.12) مقارنة بين قيمة u وقيمة ϕ على E_i لكل $i = 1, \dots, 5$

$ \phi(x, y) - u(x, y) $	$u(x, y)$	$\phi(x, y)$	y	x
0.0017	4.04	4.0383	0.2	0.2
0.0018	4.08	4.0782	0.2	0.4
0.0009	4.03	4.0291	0.1	0.3
0.0004	4.05	4.0496	0.1	0.5
0.0035	4.06	4.0565	0.1	0.6

جدول 7.12

ونمطياً يكون خطأ المسائل الناقصية من الرتبة الثانية من النوع (26.12) ذات دوال المعاملات المهدة من الرتبة $O(h^2)$. بحيث h هو أكبر قطر للعناصر المثلثية. ومن المتوقع أيضاً أن دوال القاعدة التي تكون ثنائية خطية ومقتطعة على العناصر المستطيلة ستعطي نتائج $O(h^2)$ ، حيث h أطول طول قطر في العناصر المستطيلة. ويمكن استخدام عائلات أخرى من الدوال بوصفها قواعد تعطي نتائج $O(h^4)$ ، ولكن الإنشاء أكثر تعقيداً.

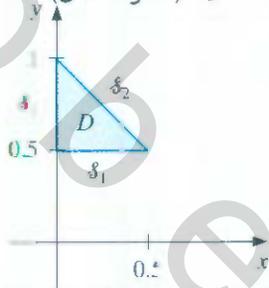
إن نظريات طرائق العنصر المحدود التي يمكن أن تعطي أخطاء ذات كفاءة صعبة الصياغة والتطبيق؛ لأن دقة التقريب تعتمد على خواص اتصال الحل وانتظام الحدود. ويمكن أيضاً تطبيق طريقة العنصر المحدود على المعادلات التفاضلية الجزئية المكافئة والناقصية، ولكن عملية إيجاد القيم الصغرى أكثر صعوبة.

إن أحد مصادر المسح الجيد حول مزايا طريقة العنصر المحدود وتقنياتها، المطبقة على مسائل فيزيائية متعددة هو البحث [Fi]. وللحصول على مناقشة أشمل، يمكنك الرجوع إلى [SF] [ZM] أو [AB].

EXERCISE SET

مجموعة التمارين 4.12

1. استخدم الخوارزمية (5.12) لتقريب حلّ المعادلة التفاضلية الجزئية الآتية (انظر الشكل)



$$\frac{\partial}{\partial x} \left(y^2 \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(y^2 \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right) - yu(x, y) = -x, \quad (x, y) \in D$$

$$u(x, 0.5) = 2x, \quad 0 \leq x \leq 0.5, \quad u(0, y) = 0, \quad 0.5 \leq y \leq 1$$

$$y^2 \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \cos \theta_1 + y^2 \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \cos \theta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(y-x) \quad \text{لكل } (x, y) \in S_2$$

افترض $M = 2$ ، T_1 له النقاط $(0, 0.5)$ ، $(0.25, 0.75)$ ، $(0, 1)$ ، و T_2 له النقاط $(0, 0.5)$ ، $(0.5, 0.5)$ ، $(0.25, 0.75)$.

2. كرّر التمرين (1)، باستخدام المثلثات الآتية بوصفها بديلاً:

$$T_1 : (0, 0.75), (0, 1), (0.25, 0.75)$$

$$T_2 : (0.25, 0.5), (0.25, 0.75), (0.5, 0.5)$$

$$T_3 : (0, 0.5), (0, 0.75), (0.25, 0.75)$$

$$T_4 : (0, 0.5), (0.25, 0.5), (0.25, 0.75)$$

3. أوجد تقريب حلّ المعادلة التفاضلية الجزئية

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) - 12.5\pi^2 u(x, y) = -25\pi^2 \sin \frac{5\pi}{2}x \sin \frac{5\pi}{2}y, \quad 0 < x, y < 0.4$$

الخاضعة لشرط ديريشليه الحدودي $u(x, y) = 0$

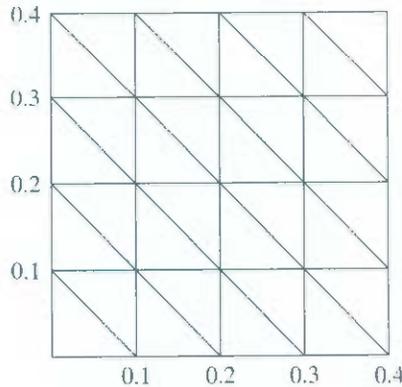
باستخدام خوارزمية العنصر المحدود (5.12)، والعناصر المعطاة في الشكل المرافق.

قارن الحل التقريبي بالحل الفعلي

$$u(x, y) = \sin \frac{5\pi}{2}x \sin \frac{5\pi}{2}y$$

على النقاط الداخلية وعلى النقاط

$$(0.125, 0.125), (0.125, 0.25), (0.25, 0.125), (0.25, 0.25)$$



4. كرر التمرين (3) للدالة

$$f(x, y) = -25\pi^2 \cos \frac{5\pi}{2} x \cos \frac{5\pi}{2} y$$

باستخدام شرط نيومان الحدودي

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = 0$$

إن الحل الفعلي لهذه المسألة هو

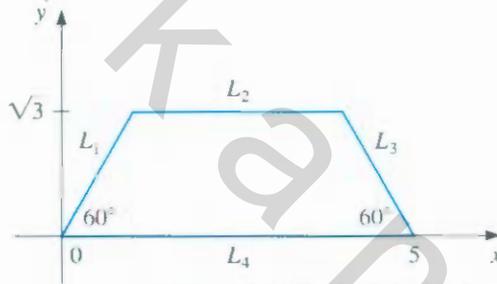
$$u(x, y) = \cos \frac{5\pi}{2} x \cos \frac{5\pi}{2} y$$

5. صفيحة فضة على شكل شبه منحرف (انظر الشكل المرفق)، وقد تولدت حرارة بانتظام على

$$q = 1.5 \text{ cal}/(\text{cm}^3 \cdot \text{s})$$

إن الحرارة ذات الحالة المستقرة $u(x, y)$ على هذه الصفيحة تحقق معادلة بواسون

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = \frac{-q}{k}$$



حيث k معامل التوصيل الحراري هو $1.04 \text{ cal}/(\text{cm} \cdot \text{deg} \cdot \text{s})$

افتراض أن الحرارة ثبتت عند 15 C على L_2 ، وأن خسارة الحرارة على الأضلاع المائلة L_1 و L_3

بحسب الشرط الحدودي $\partial u/\partial n = 4$ ، وأنه لا يوجد خسارة في الحرارة على L_4 ؛ أي أن $\partial u/\partial n = 0$.

أوجد التقريب لدرجة حرارة الصفيحة على النقاط $(1, 0)$ ، $(4, 0)$ و $(\frac{5}{3}, \sqrt{3}/2)$ باستخدام الخوارزمية

(5.12).

5.12 مسح الطرائق والبرمجيات Survey Of Methods and Software

افتراضنا في هذا الباب طرائق لتقريب حلول معادلات تفاضلية جزئية. لقد ركزنا اهتمامنا على معادلة بواسون بوصفها مثالاً لمعادلة تفاضلية جزئية ناقصية، ومعادلة الحرارة أو الانتشار بوصفها مثالاً لمعادلة تفاضلية جزئية مكافئة. ومعادلة الموجة بوصفها مثالاً لمعادلة تفاضلية جزئية ناقصية. لقد نوقش تقريب هذه المسائل باستخدام الفرق المنتهي.

إن معادلة بواسون على مستطيل تطلبت حل نظام خطي كبير، وينصح بحله باستخدام تقنيات إعادة (تكرار) مثل طريقة SOR.

لقد عرضت أربع طرائق من نوع الفرق المحدود لحل معادلة الحرارة. إن طرائق الفرق الأمامي وطرائق ريتشاردسون فيها مشكلات الثبات، ولذلك قُدمت طريقة الفرق الإرجاعي وطرائق كرانك - نيكلسون. وعلى الرغم من وجوب حل نظام خطي ثلاثي الأقطار عند كل خطوة زمنية

في هذه الطرائق الضمنية، إلا أنها أكثر استقرارًا من الطرائق المباشرة مثل طريقة العرق الأمامي وطريقة ريتشاردسون. إن طريقة الفرق المحدود لمعادلة الموجة مباشرة، وتعرض مشكلات في الاستقرار لاختيار بعض القيم المنفصلة للزمن والفضاء.

عرضنا في آخر فصل في الباب تقديمًا لطريقة العنصر المحدود لمعادلة تفاضلية جزئية ناقصية من نوع self-adjoint على مجال مضلع. وعلى الرغم من أن طرائقنا تكني للمسائل والأمثلة في هذا الكتاب، إلا أن هناك حاجة إلى تعميمات وتطويرات أقوى من هذه التقنيات تلزم للأغراض التجارية. نفترض برمجيتين من مكتبة IMSL. تستخدم البرمجية MOLCH لحل المعادلة التفاضلية الجزئية

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$$

تحت الشروط الحدودية

$$\alpha(x, t)u(x, t) + \beta(x, t)\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \gamma(x, t)$$

وإن الطريقة مبنية على تحديد مشترك لنقاط جاوس على إحداثي x لكل قيمة للزمن t ، وتستخدم شرائح هرميات التكعيبية بوصفها قاعدة دوال.

تستخدم البرمجية FPS2H لحل معادلة بواسون على مستطيل. وتبنى طريقة الحل على اختيار فروق محدودة من الدرجة الثانية أو الرابعة على شبكة متجانسة.

يوجد في مكتبة NAG عدد من البرمجيات للمعادلات التفاضلية الجزئية. تستخدم البرمجية D03EAF لحل معادلة لابلاس على أي منطقة في المستوى xy .

تستخدم البرمجية D03EAF لحل معادلة تفاضلية ناقصية واحدة بطريقة الخطوط.

توجد حقائب متخصصة مثل NASTRAN مركبة من تعليمات لطريقة العنصر المحدود.

وهذه الحقائب مرغوبة وشائعة في التطبيقات الهندسية. وإن حقيبة FISHPACK في مكتبة نتل تستخدم لحل المعادلات التفاضلية الجزئية الناقصية القابلة للفصل.

يصعب كتابة التعليمات العامة للمعادلات التفاضلية الجزئية؛ بسبب مسألة تحديد المجالات غير تلك الشائعة في الأشكال الهندسية. وإن البحث العلمي في حقل حلول المعادلات التفاضلية

نشط جدًا حاليًا.

ولقد قدمنا عينة صغيرة من الطرائق المستخدمة لتقريب حلول المسائل التي تحتوي

معادلات تفاضلية جزئية. وتحتوي المراجع على معلومات إضافية متعلقة بالموضوع العام هي

Morton and Mayers [MM] والكتاب الحديث مؤلفيه Lapidus and Pinder [LP], Twizell [Tw]

ويمكن الحصول على معلومات البرامج من Boisvert [RB] و Bank [Ban].

ومن الكتب التي تركز على طرائق الفرق المحدود Strikverda [Strik], Thomas [Th]

و Shashkov and Steinber [ShS]. إن Fix [SF] و Zienkiewicz and Morgan [ZM]

مصادر جيدة للمعلومات حول طريقة العنصر المحدود. ولقد عُولجت المعادلات التي تعتمد على

الزمن في Schiesser [Schi] و Gustafsson, Kreiss, and Olinger [GKO].

أما Birkhoff and Lynch [BL] و Roache [Ro] فقد عالجت حل المسائل الناقصية.

وإن طرائق التقسيم المتعدد تستخدم تقريبات التقسيم الخشن وطرائق الإعادة للحصول

على تقسيمات أسهل. تحوي قائمة المراجع الخاصة بهذه الطرائق كتب Briggs [Brigg]

و McCormick [Mc] و Bramble [Bram].