الاقتصاد القياسى

النظرية والتطبيق

مجدى الشوربجى
قسم التجارة الخارجية
كلية التجارة وإدارة الأعمال
جامعة حلوان

بسم الله الرحمن الرحيم

إهـــداء

إلى بلدي العزيزة مصر

أهدى هذه الصفحات

مجدى الشوربجى

الجـــزء الأول

تقديـــر نمــاذج الانحـــدار

ينقسم هذا الجزء إلى خمسة فصول : فى الفصل الأول يتم استعراض الصيغ الرياضية لنماذج الانحدار . وفى الفصل الثانى يتم تقدير نموذج الانحدار البسيط . وفى الفصل الثالث يتم تقدير نموذج الانحدار المتعدد . وفي الفصل الرابع يتم تقدير النماذج الديناميكية . أما الفصل الخامس فقد خصص لتقدير نماذج المعادلات الآنية .

المحتويات

CONTENTS

الجزء الأول
تقدير نماذج الانحدار

الفصل الثانى

الفصل الثالث

الفصل الرابع

الفصل الخامس

الجزء الثانى
مشاكل تقدير نماذج الانحدار

الفصل السادس

الفصل السابع

الفصل الثامن

الجزء الثالث
تقييم نماذج الانحدار المقدرة والتنبؤ

الفصل التاسع

الفصل العاشر

16

PREFACE تصديـــــر

إن الهدف من هذا الكتاب هو مساعدة كل من الباحثين ومتخذى القرارات وواضعى السياسات على استخدام الاقتصاد القياسى .

ولتحقيق هذا الهدف تم إعداد هذا الكتاب لكى يتميز بثلاثة نقاط أساسية : أولها عرض موضوعات الاقتصاد القياسى بصورة شاملة بأسلوب مبسط لا يصل إلى الإخلال ، وفى عمق لا يصل إلى التعقيد . وثانيها البعد عن البراهين الرياضية . وثالثها استخدام أمثلة تطبيقية محلولة لكل موضوع من موضوعات الاقتصاد القياسى .

ويود المؤلف هنا أن يتوجه بالشكر إلى الأستاذ الدكتور / سمير رياض مكارى من قسم الاقتصاد بجامعة حلوان على تفضله بمراجعة معظم فصول هذا الكتاب وإبداء العديد من الملاحظات القيمة .

ولا يفوتنى أن أتوجه بالشكر إلى الأستاذ الدكتور / مصطفى محمد عز العرب من قسم التجارة الخارجية بجامعة حلوان الذى تعلمت منه مبادئ الاقتصاد القياسى ، وعسى أن يجد فى هذا الكتاب ثمرة طيبة من ثمار غرسه .

وأخيراً وليس آخراً ، أتوجه بالشكر إلى كل من عاون فى إخراج هذا الكتاب ، أياً كانت درجة المعاونة .

والله أسال أن يوفقنا جميعاً لخدمة مصرنا العزيزة .

مجدى الشوربجى

القاهرة فى 10 أغسطس 1992

18

I مقدمة

INTRODUCTION

1.I تعريف الاقتصاد القياسى

Definition of Econometrics

الاقتصاد القياسى هو أحد فروع علم الاقتصاد الذى يختص بالقياس (التقدير) الكمى للعلاقة بين المتغيرات الاقتصادية مستخدماً النظرية الاقتصادية والرياضيات والأساليب الاحصائية ، بهدف اختبار النظريات الاقتصادية المختلفة من ناحية ومساعدة رجال الأعمال والحكومات فى اتخاذ القرارات ووضع السياسات من ناحية أخرى .

2.I أهداف الاقتصاد القياسى

The Goals of Econometrics

يهدف الاقتصاد القياسى إلى تحقيق ثلاثة أهداف هى على النحو التالى :

1.2.I اختبار النظريات الاقتصادية المختلفة

اختبار نظرية اقتصادية معينة هو التحقق من انطباق هذه النظرية مع الواقع . ومن ثم يمكن قبولها أو تعديلها أو رفضها أو التوصل إلى نظرية جديدة .

2.2.I مساعدة رجال الأعمال والحكومات فى اتخاذ القرارات

يساعد الاقتصاد القياسى رجال الأعمال والحكومات فى اتخاذ القرارات الحالية من خلال توفيره لتقديرات كمية (قيم مطلقة أو نسب مئوية) للعلاقات الاقتصادية بين المتغيرات . فالاقتصاد القياسى يمكنه توفير – على سبيل المثال – تقديرات عن مرونتى العرض والطلب بأنواعهما المختلفة ويلاحظ أن هذه التقديرات محل اهتمام كل من رجال الأعمال والحكومات

فرجل الأعمال لا يستطيع أن يتخذ قراراً بزيادة سعر سلعة ما لزيادة إيراداته إلا بعد معرفة مرونة الطلب السعرية لهذه السلعة . وكذلك الحكومة لا يمكنها إتخاذ قراراً ما للتأثير على مستويات الإنتاج والاستهلاك فى المجتمع إلا بعد معرفة مرونتى العرض والطلب بأنواعهما المختلفة .

3.2.I مساعدة رجال الأعمال والحكومات فى وضع السياسات

يساعد الاقتصاد القياسى رجال الأعمال والحكومات فى وضع السياسات من خلال توفير تنبؤات بقيم المتغيرات الاقتصادية فى المستقبل . هذه التنبؤات يمكنها أن تجيب على العديد من الأسئلة المتعلقة بالمستقبل منها على سبيل المثال ما يلى :

1 – ماهو الأثر المحتمل لزيادة سعر السلعة الأصلية على الكمية المطلوبة من السلعة الأصلية ؟

2 – ماهو الأثر المحتمل لزيادة اسعار السلع البديلة على الكمية المطلوبة ،
السلعة الأصلية ؟

3 – ماهو الأثر المحتمل لزيادة اسعار السلع المكملة على الكمية المطلوبة ،
السلعة الأصلية ؟

4 – ماهو الأثر المحتمل لزيادة الدخل المتاح للإنفاق على الكمية المطلوبة ،
السلعة الأصلية ؟

5 – ماهو الأثر المحتمل للسياسة النقدية على التضخم والبطالة ؟

6 – ماهو الأثر المحتمل للسياسة المالية على الإنفاق الاستثمارى وتو
الدخل ؟

7 – ماهو الأثر المحتمل لسياسة سعر الصرف الأجنبى على التضـ
والإنتاج وميزان المدفوعات ؟

يتضح مما سبق ، إن آجابة الأسئلة من (1) إلى (4) قد يفيد ر
الأعمال فى وضع سياسة خاصة بالطلب على سلعة ما ؟ أما أجابة با
الأسئلة فقد تفيد الحكومة فى وضع السياسة الاقتصادية الكلية .

3.I منهاج الاقتصاد القياسى

The Methodology of Econometrics

يتحدد منهاج الاقتصاد القياسى فى الخطوات التالية :

1.3.I بناء النموذج القياسى

إن بناء نموذج ما هو عبارة عن التعبير عن النظرية الاقتصادية فى شكل معادلة أو مجموعة من المعادلات . والمعادلة (الدالة) عبارة عن علاقة بين متغير تابع ومتغير مستقل واحد أو عدة متغيرات مستقلة . والمتغير التابع هو المتغير الذى يتأثر بتغير المتغير المستقل . ومن ثم يكون المتغير المستقل (المتغير التفسيرى) هو المتغير الذى يؤثر فى المتغير التابع .

ويتوقف نوع الصيغة الرياضية لمعادلة ما (خطية أو غير خطية) على ما تقترحه النظرية الاقتصادية أو ما يوحى به شكل انتشار النقاط أو ما أثبتته الدراسات التطبيقية السابقة[1] .

فمن المعلوم أن نظرية الاستهلاك الكينزية ، تقرر أن الإنفاق الإستهلاكى يعتمد على الدخل المتاح للإنفاق . هذه النظرية يمكن التعبير عنها فى شكل رياضى كما يلى :

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X \qquad (1.I)$$

حيث أن :

Y = الإنفاق الإستهلاكى (متغير تابع)

، X = الدخل المتاح للإنفاق (متغير مستقل)

، β_1 , β_0 = معاملات الدالة

، β_0 = حد ثابت أو قيمة Y عندما $X = 0$

، β_1 = ميل الدالة أو التغير فى Y نتيجة تغير X بوحدة واحدة

(1) سوف يتم مناقشة الصيغ الرياضية المختلفة لنماذج الانحدار فى الفصل الأول .

أى $MPC = \frac{\Delta Y}{\Delta X}$ (الميل الحدى للاستهلاك ويفترض أن تقع قيمته – طبقاً للنظرية الاقتصادية – بين الصفر والواحد الصحيح)

وتشير الإشارة الموجبة (+) فى المعادلة رقم (1.I) إلى وجود علاقة طردية بين الدخل المتاح للإنفاق كمتغير مستقل والإنفاق الإستهلاكى كمتغير تابع . بمعنى إذا زاد الدخل المتاح للإنفاق فسوف يزيد الإنفاق الإستهلاكى والعكس صحيح . إن المعادلة رقم (1.I) عبارة عن مثال للنموذج الرياضى .

ويلاحظ أن الإنفاق الإستهلاكى لا يتأثر بالدخل المتاح للإنفاق فقط وإنما يتأثر أيضاً بالعديد من المتغيرات مثل العادات والتقاليد والدين والمستوى الثقافى والاجتماعى . هذه المتغيرات يصعب أخذها فى الاعتبار بوضوح ومن ثم يجب أن تُعدل المعادلة رقم (1.I) لتصبح كما يلى :

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \in \quad (2.I)$$

حيث $\in$ عبارة عن حد الخطأ وهو يمثل كل المتغيرات التى تؤثر على الإنفاق الإستهلاكى والتى يصعب أخذها فى الاعتبار بوضوح . إن المعادلة رقم (2.I) عبارة عن مثال للنموذج القياسى .

2.3.I تقدير النموذج القياسى

إن تقدير النموذج القياسى المحدد فى المعادلة رقم (2.I) هو عبارة عن محاولة الوصول إلى تقديرات دقيقة لقيم معاملاته (β_1 , β_0) . إن عمليات التقدير هذه تتم – بعد تجميع البيانات عن Y , X ، وإعدادها للاستخدام – بواسطة تحليل الانحدار .

وبإجراء تحليل الانحدار على المعادلة رقم (2.I) يتم الحصول على المعادلة المقدرة التالية :

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X \qquad (3.I)$$

حيث أن :

$\hat{Y}$ ، = القيمة المقدرة لـ Y

$\hat{\beta}_0$ ، = القيمة المقدرة لـ β_0

$\hat{\beta}_1$ ، = القيمة المقدرة لـ β_1

3.3.I تقييم النموذج القياسى المقدر

هناك عدة مشاكل قياسية قد تواجه الباحث القياسى منها مشكلة الارتباط الذاتى من الدرجة الأولى ، ومشكلة عدم ثبات تباين حد الخطأ ، ومشكلة الازدواج الخطى . هذه المشاكل وغيرها يجب معالجتها قبل القيام بتقييم النموذج القياسى المقدر . ويتم هذا التقييم من خلال ثلاثة اختبارات رئيسية هى على النحو التالى :

1 - اختبار المعنوية الاقتصادية لنتائج تقدير النموذج القياسى

ويختص ببيان مدى اتفاق الإشارات والقيم المقدرة لمعاملات انحدار النموذج القياسى مع مثيلتها فى النظرية الاقتصادية . فإذا كانت الإشارات والقيم المقدرة لمعاملات الانحدار لا تتفق مع مثيلتها فى النظرية الاقتصادية ، فإن النموذج القياسى المقدر يجب أن يُعدل أو يرفض .

2 - اختبار المعنوية الاحصائية لنتائج تقدير النموذج القياسى

ويختص هذا الاختبار بعدة اختبارات فرعية منها :

* اختبار معنوية معادلة الانحدار المقدرة .

* اختبار معنوية معامل الانحدار المقدر .

3 - اختبار الأداء العام للنموذج القياسى المقدر

ويتم ذلك من خلال ما يلى :

* معامل التحديد بين القيم الفعلية والقيم المقدرة للمتغير التابع (R'^2) .

* و / أو اختبار معنوية الفرق بين القيمة المقدرة والقيمة الفعلية للمتغير التابع .

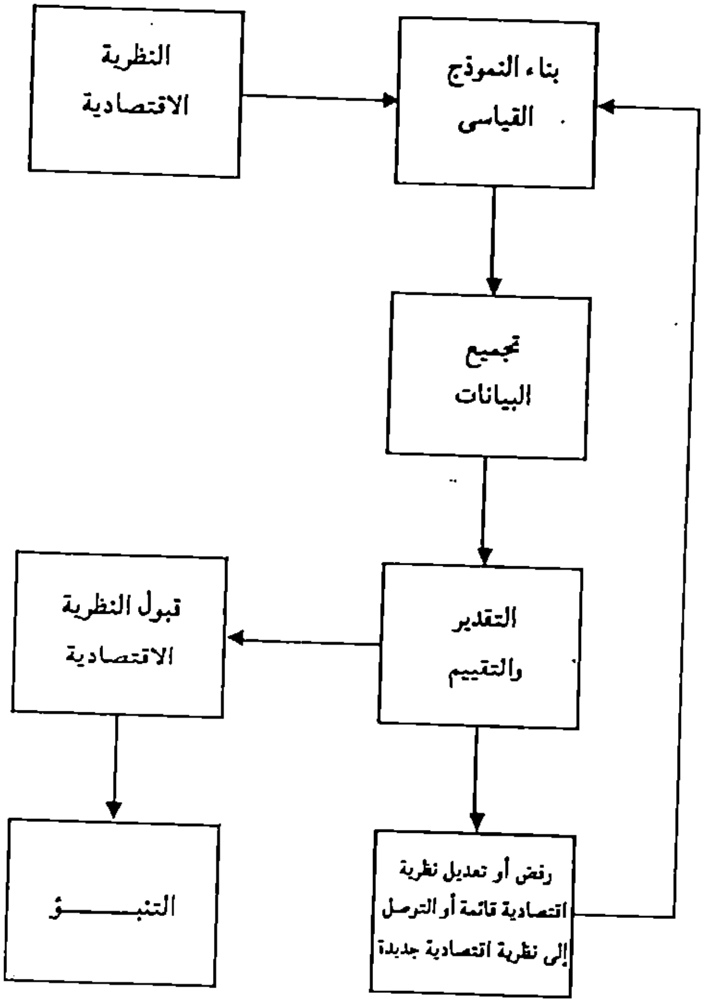
* و / أو معامل عدم التساوى لـ Theil (U) .

4.3.I استخدام النموذج القياسى المقدر فى التنبؤ

إن الهدف الرئيسى عادة من النموذج القياسى المقدر هو التنبؤ بالقيمة المستقبلية (أو القيم المستقبلية) للمتغير التابع على أساس القيمة المستقبلية (أو القيم المستقبلية) المعروفة أو المتوقعة للمتغير المستقل (أو المتغيرات المستقلة) .

ويلاحظ أنه قبل استخدام النموذج القياسى المقدر فى التنبؤ يجب التأكد من جودة الأداء العام للنموذج القياسى المقدر .

ويوضح الشكل رقم (1.I) منهاج الاقتصاد القياسى الذى يؤدى فى النهاية إلى أحد أمرين : أولهما هو قبول النظرية الاقتصادية ومن ثم القيام بإجراء التنبؤ . وثانيهما رفض أو تعديل نظرية اقتصادية قائمة أو التوصل إلى نظرية اقتصادية جديدة .



شكل رقم (1.I)

منهاج الاقتصاد القياسى

4.I تنظيم الكتاب

ينقسم هذا الكتاب إلى ثلاثة أجزاء رئيسية هى على النحو التالى :

الجزء الأول : تقدير نماذج الانحدار .

الفصل الأول : الصيغ الرياضية لنماذج الانحدار .

الفصل الثانى : نموذج الانحدار البسيط .

الفصل الثالث : نموذج الانحدار المتعدد .

الفصل الرابع : النماذج الديناميكية .

الفصل الخامس : نماذج المعادلات الآنية .

الجزء الثانى : مشاكل تقدير نماذج الانحدار

الفصل السادس : الارتباط الذاتى من الدرجة الأولى .

الفصل السابـع : عدم ثبات تباين حد الخطأ .

الفصل الثامــن : الازدواج الخطى .

الجزء الثالث : تقييم نماذج الانحدار المقدرة والتنبؤ

الفصل التاسع : تقييم نماذج الانحدار المقدرة .

الفصل العاشر : استخدام نماذج الانحدار المقدرة فى التنبؤ .

الفصل الأول

1 الصيغ الرياضية لنماذج الانحدار

MATHEMATICAL FORMS OF REGRESSION MODELS

قبل تقدير العلاقة – محل الدراسة – بين المتغير التابع والمتغير المستقل (أو المتغيرات المستقلة) ، يجب أولاً البحث عن أنسب الصيغ الرياضية التى تُعبر عن هذه العلاقة تعبيراً دقيقاً . ولتحقيق ذلك يجب إجراء الآتى :

1 – التعرف على الشكل البيانى الحقيقى للعلاقة – محل الدراسة – بين المتغير التابع والمتغير المستقل (أو المتغيرات المستقلة) . ويتم ذلك بواسطة النظرية الاقتصادية أو الدراسات التطبيقية السابقة أو الرسم البيانى للمتغير التابع وكل متغير مستقل على حدة .

2 – اختيار أنسب الصيغ الرياضية التى تتلائم مع الشكل البيانى الحقيقى للعلاقة محل الدراسة .

ويهدف هذا الفصل إلى التعرّف على الصيغ الرياضية المختلفة التى يمكن للباحث القياسى الاختيار منها . وسوف يتم استخدام معادلة (دالة) ذات متغير مستقل واحد لعرض ست صيغ رياضية مختلفة .

ومن ثم ينقسم هذا الفصل إلى سبعة نقاط : أولها الصيغة الخطية . وثانيها الصيغة العكسية . وثالثها الصيغة التربيعية . ورابعها الصيغة اللوغاريتمية المزدوجة . وخامسها الصيغة نصف اللوغاريتمية . وسادسها الصيغة الأسية . وسابعها مقارنة بين الصيغ الرياضية المختلفة .

1.1 الصيغة الخطية The Linear Form

يمكن كتابة الصيغة الخطية كما يلى :

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X \qquad (1.1)$$

حيث أن :

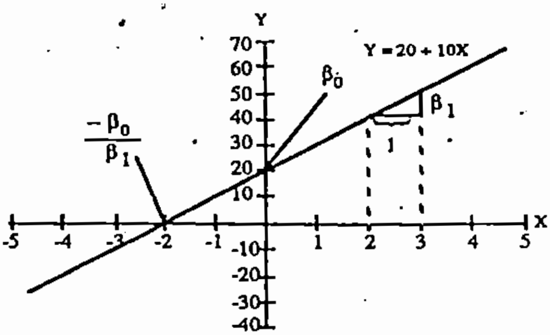
Y = المتغير التابع

، X = المتغير المستقل

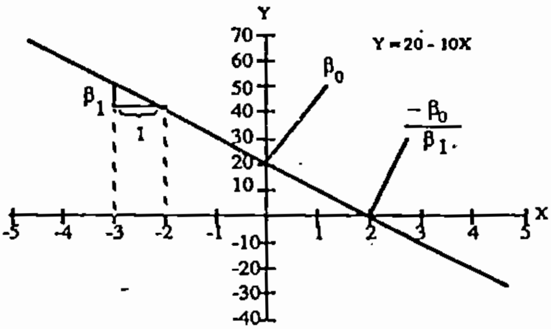
، β_0 = معامل ثابت . وهو عبارة عن مقدار Y عندما $X = 0$

، β_1 = معامل انحدار العلاقة بين X كمتغير مستقل و Y كمتغير تابع (ميل العلاقة بين X , Y) . وهو يقيس الأثر الحدى The Marginal Effect لـ X على Y . ومن ثم فهو عبارة عن التغير فى Y نتيجة تغير X بوحدة واحدة .

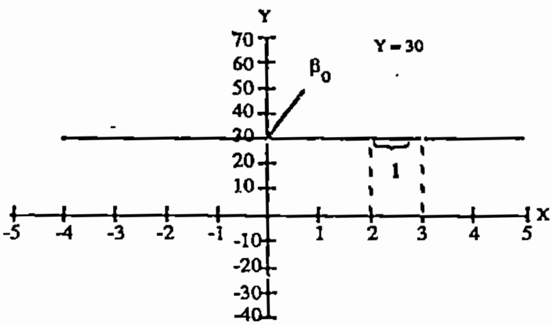
ويوضح الشكل رقم (1.1) الحالات المختلفة لـ β_1 . وبالنظر إلى هذا الشكل يمكن التمييز بين ثلاثة حالات لـ β_1 على النحو التالى :



الحالة الأولى : $\beta_1 > 0$



الحالة الثانية : $\beta_1 < 0$



الحالة الثالثة : $\beta_1 = 0$

شكل رقم (1.1)

الحالات المختلفة للصيغة الخطية :

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X$$

1 – إذا كانت β_1 موجبة $(\beta_1 > 0)$ ، فإن الزيادة فى X سوف تؤدى إلى زيادة Y والعكس صحيح . ويدل ذلك على وجود علاقة طردية بين X كمتغير مستقل و Y كمتغير تابع .

2 – إذا كانت β_1 سالبة $(\beta_1 < 0)$ ، فإن الزيادة فى X سوف تؤدى إلى انخفاض Y والعكس بالعكس . ويدل ذلك على وجود علاقة عكسية بين X كمتغير مستقل و Y كمتغير تابع .

3 – إذا كانت $\beta_1 = 0$ ، فإن الزيادة فى X لن تؤدى إلى تغير Y . ومن ثم فإن Y تكون ثابتة . ويدل ذلك على عدم وجود علاقة بين X كمتغير مستقل و Y كمتغير تابع .

ويختلف الميل عن المرونة . فالميل – كما سبق ذكره – يقيس الأثر الحدى للمتغير المستقل على المتغير التابع . أما المرونة فتقيس الأثر النسبى The Relative Effect للمتغير المستقل على المتغير التابع . ومن ثم فهى عبارة عن التغير النسبى فى المتغير التابع نتيجة تغير المتغير المستقل بـ 1 % .

ويُحسب الميل بقسمة التغير المطلق (Δ) فى المتغير التابع على التغير المطلق فى المتغير المستقل . أما المرونة فتُحسب بقسمة التغير النسبى فى المتغير التابع على التغير النسبى فى المتغير المستقل . ومن ثم يمكن حساب الميل والمرونة للمعادلة رقم (1.1) على النحو التالى[1] :

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \beta_1 \qquad (2.1)$$

(1) من الآن فصاعداً ، لاحظ أن الميل أو الأثر الحدى يتم الحصول عليه من خلال إجراء التفاضل لـ Y بالنسبة لـ X .

$$E_{YX} = \frac{\Delta Y}{Y} \;/\; \frac{\Delta X}{X}$$

$$= \frac{\Delta Y}{\Delta X} \cdot \frac{X}{Y} = \beta_1 \left(\frac{X}{Y}\right) \qquad (3.1)$$

حيث E_{YX} عبارة عن مرونة Y بالنسبة لـ X . ويتضح من المعادلة رقم (3.1) أن الميل جزء من المرونة .

وبالنظر إلى الحالة الأولى من الشكل رقم (1.1) حيث $Y = 20 + 10X$ ، يمكن ايضاح الفرق بين الميل والمرونة كما يلى :

1 – إن الأثر الحدى لـ X يكون دائماً مساوياً لـ 10 . ويعنى ذلك أن التغير فى X بوحدة واحدة سوف يؤدى دائماً إلى تغير Y بـ 10 وحدات . فعندما زادت X من 2 إلى 3 ، زادت Y من 40 إلى 50 . أما عندما زادت X من 3 إلى 4 ، زادت Y من 50 إلى 60 .

2 – إن الأثر النسبى لـ X يكون مختلف من نقطة إلى أخرى على الخط المستقيم . فعندما كانت $X = 2 , Y = 40$ ، فإن E_{YX} تساوى 0.50 [(10) (2 / 40)] . أما عندما كانت $X = 3 , Y = 50$ فإن E_{YX} تساوى 0.60 [(10) (3 / 50)] .

- ومما تقدم ، يمكن استنتاج ما يلى :

1 – إن إشارة المرونة هى نفس إشارة الميل . بمعنى إذا كانت إشارة الميل موجبة $(\beta_1 > 0)$ ، فإن إشارة المرونة سوف تكون موجبة $(E_{YX} > 0)$

أيضاً . وإذا كانت إشارة الميل سالبة $(\beta_1 < 0)$ ، فإن إشارة المرونة سوف تكون سالبة $(E_{YX} < 0)$ كذلك .

2 - عندما تكون العلاقة بين المتغير المستقل والمتغير التابع علاقة خطية ، فإن الميل يكون ثابت عند أى نقطة على الخط المستقيم ، بينما المرونة تكون مختلفة من نقطة إلى أخرى على هذا الخط . أى أن فى الصيغة الخطية يكون الميل ثابت بينما تكون المرونة غير ثابتة .

2.1 الصيغة العكسية The Inverse Form

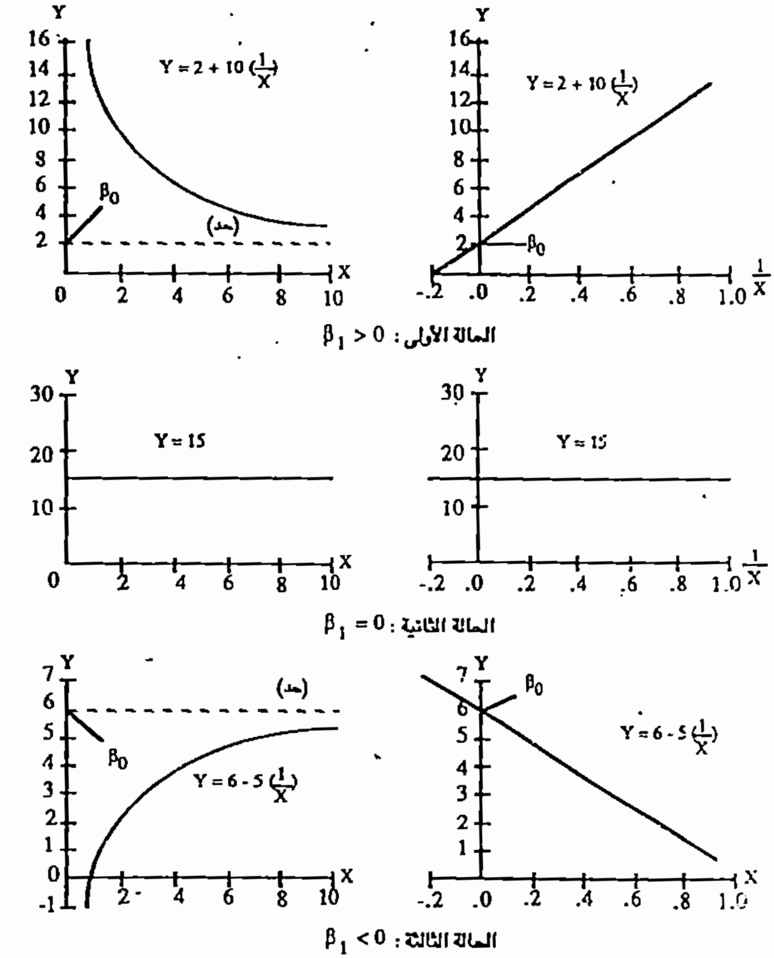
الصيغة العكسية هى :

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{1}{X}\right) \qquad (4.1)$$

ويوضح الشكل رقم (2.1) الحالات المختلفة لـ β_1 طبقاً للمعادلة رقم (4.1) . وبالنظر إلى هذا الشكل يمكن التمييز بين ثلاثة حالات لـ β_1 على النحو التالى :

1 - إذا كانت β_1 موجبة $(\beta_1 > 0)$ ، فإن الزيادة فى X سوف تؤدى إلى انخفاض Y بمعدل متناقص . لاحظ أن الزيادة فى X سوف تؤدى إلى اتجاه $\frac{1}{X}$ إلى الصفر . ومن ثم فإن هذه المعادلة (الدالة) سوف يكون لها حد أدنى لا يمكن لـ Y أن تصل إليه مهما زادت X .

2 - إذا كانت β_1 سالبة $(\beta_1 < 0)$ ، فإن الزيادة فى X سوف تؤدى إلى زيادة Y بمعدل متناقص . ويكون لهذه المعادلة حد أعلى لا يمكن لـ Y أن تصل إليه مهما زادت X .



شكل رقم (2.1)

الحالات المختلفة للصيغة العكسية :

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{1}{X}\right)$$

3 - إذا كانت $\beta_1 = 0$ ، فإن التغير (الزيادة أو النقص) فى X لن يؤدى إلى تغير Y . ومن ثم فإن Y تكون ثابتة .

إن الأثر الحدى لـ X على Y هو :

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = -\beta_1 \left(\frac{1}{X^2}\right) \tag{5.1}$$

أما الأثر النسبى لـ X على Y فهو :

$$E_{YX} = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \cdot \frac{X}{Y}$$

$$= -\beta_1 \left(\frac{1}{X^2}\right)\left(\frac{X}{Y}\right)$$

$$= -\beta_1 \left(\frac{1}{XY}\right) \tag{6.1}$$

3.1 الصيغة التربيعية The Quadratic Form

الصيغة التربيعية (المعادلة من الدرجة الثانية) هى :

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2 \tag{7.1}$$

إن الأثر الحدى لـ X على Y هو :

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \beta_1 + 2\beta_2 X \quad (8.1)$$

أما الأثر النسبى لـ X على Y فهو :

$$E_{YX} = (\beta_1 + 2\beta_2 X)\left(\frac{X}{Y}\right) \quad (9.1)$$

ويتم استخدام الصيغة التربيعية فى عدة حالات منها :

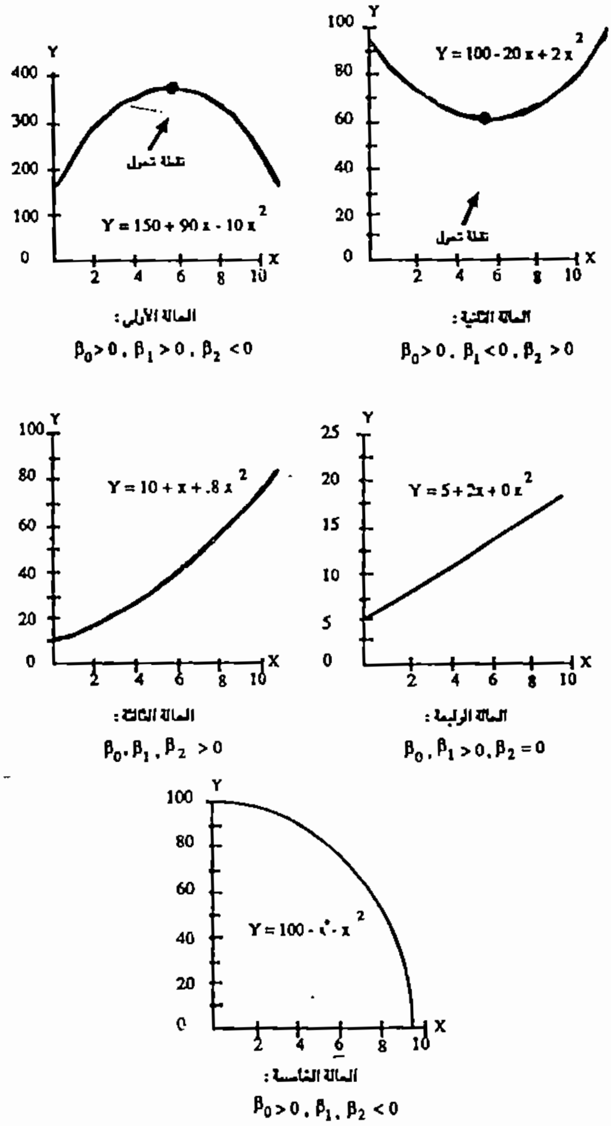
1 – عندما تكون العلاقة الحقيقية بين المتغير المستقل والمتغير التابع علاقة غير خطية . لاحظ أن الميل فى هذه الحالة يكون غير ثابت .

2 – عندما تتضمن العلاقة الحقيقية بين المتغير المستقل والمتغير التابع نقط تحول Turning Point . مثال ذلك ، منحنى التكلفة الحدية الذى يأخذ شكل حرف U [انظر الحالة الثانية من الشكل رقم (3.1)] . ويوضح هذا المنحنى ما يلى :

* **قبل نقطة التحول** : إن الزيادة فى الإنتاج الكلى (X) سوف تؤدى إلى انخفاض التكلفة الحدية (Y) . ومن ثم فإن ميل منحنى التكلفة الحدية سوف يكون سالباً .

* **عند نقطة التحول** : إن الزيادة فى الإنتاج الكلى (X) لن تؤثر على التكلفة الحدية (Y) . حيث تكون التكلفة الحدية ثابتة . ومن ثم فإن ميل منحنى التكلفة الحدية سوف يكون مساوياً للصفر .

* **بعد نقطة التحول** : إن الزيادة فى الإنتاج الكلى (X) سوف تؤدى إلى زيادة التكلفة الحدية (Y) . ومن ثم فإن ميل منحنى التكلفة الحدية سوف يكون موجباً .



شكل رقم (3.1)

الحالات المختلفة للصيغة التربيعية :

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2$$

ويضم الشكل رقم (3.1) باقى الحالات الخاصة بالصيغة التربيعية .

4.1 الصيغة اللوغاريتمية المزدوجة

The Log - Log Form

فإذا كانت المعادلة الأصلية المراد تقديرها هى :

$$Y = \beta_0 \; X^{\beta 1} \tag{10.1}$$

فإن الأثر الحدى لـ X على Y ، يمكن الحصول عليه كما يلى :

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \beta_0 \beta_1 X^{\beta_1 - 1} = \beta_0 \beta_1 X^{\beta_1 - 1} \quad \frac{X}{X}$$

$$= \frac{\beta_0 \beta_1 X^{\beta_1}}{X}$$

$$= \beta_1 \left(\frac{Y}{X} \right) \tag{11.1}$$

ويكون الأثر النسبى لـ X على Y كما يلى :

$$E_{YX} = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \cdot \frac{X}{Y} = (\beta_1 \frac{Y}{X})(\frac{X}{Y})$$

$$= \beta_1 \qquad (12.1)$$

ولكى يتم تقدير المعادلة رقم (10.1) تقديراً دقيقاً ، يجب استخدام طريقة المربعات الصغرى العادية . وحتى يمكن تطبيق هذه الطريقة ، يجب تحويل المعادلة المراد تقديرها إلى الصيغة الخطية . ويتم ذلك بواسطة أخذ اللوغاريتم الطبيعى (ويرمز له بالرمز ln) لكل من جانبى المعادلة رقم (10.1) فينتج ما يلى :

$$\ln Y = \ln \beta_0 + \beta_1 \ln X \qquad (13.1)$$

ويفرض أن :

$$\ln Y = Y^* \quad ,$$

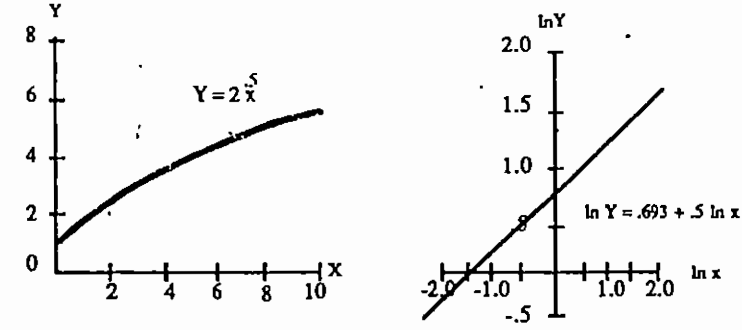
$$\ln X = X^*$$

فإن المعادلة رقم (13.1) يمكن إعادة كتابتها كما يلى :

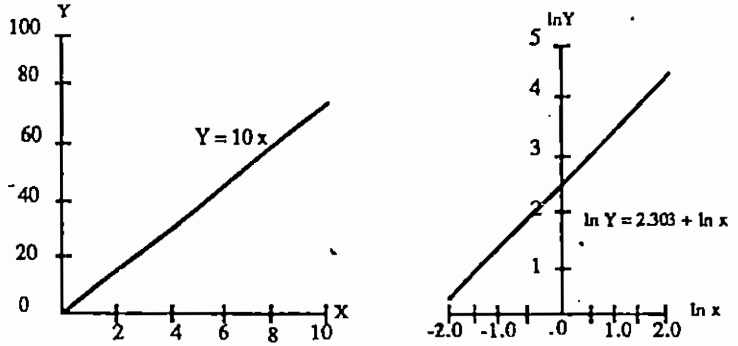
$$Y^* = \ln \beta_0 + \beta_1 X^* \qquad (14.1)$$

ويلاحظ أن هذه المعادلة أو المعادلة رقم (13.1) تمثل الصيغة اللوغاريتمية المزدوجة ، ويوضح الشكل رقم (4.1) الحالات المختلفة لهذه الصيغة . وفى كل حالة من هذه الحالات تم إيضاح شكل المعادلة الأصلية وشكل المعادلة المحولة .

$\underline{Y = \beta_0 X^{\beta_1}}$ $\underline{\ln Y = \ln \beta_0 + \beta_1 \ln X}$



الحالة الأولى: $0 < \beta_1 < 1$



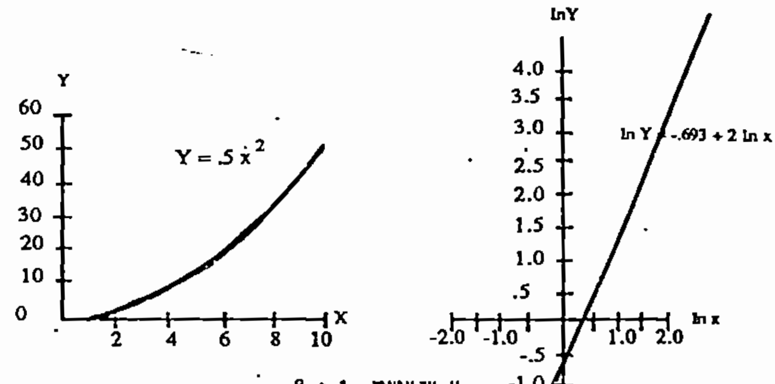
الحالة الثانية: $\beta_1 = 1$

شكل رقم (4.1)

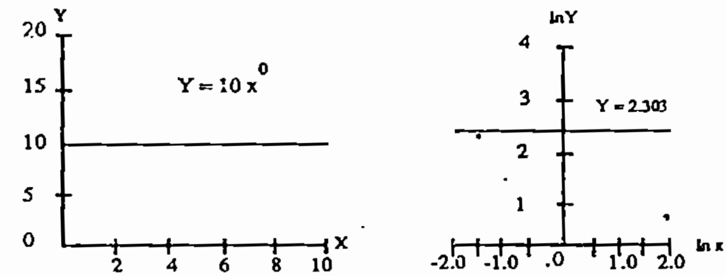
الحالات المختلفة للصيغة اللوغاريتمية المزدوجة :

$$\ln Y = \ln \beta_0 + \beta_1 \ln X$$

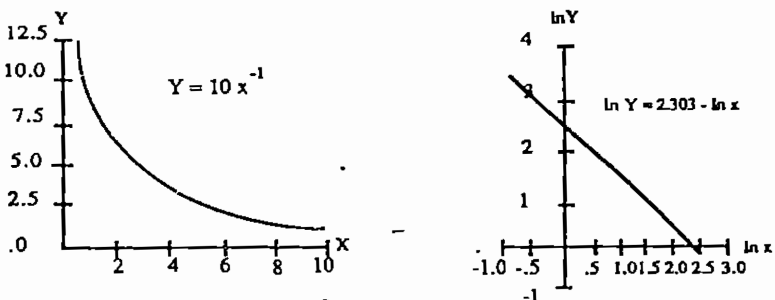
$$Y = \beta_0 X^{\beta_1} \qquad \ln Y = \ln \beta_0 + \beta_1 \ln X$$



$\beta_1 > 1$: الحالة الثالثة



$\beta_1 = 0$: الحالة الرابعة



$\beta_1 < 0$: الحالة الخامسة

تابع شكل رقم (4.1)

5.1 الصيغة نصف اللوغاريتمية

The Semi - Log Form

يمكن ايضاح الصيغة نصف اللوغاريتمية كما يلى :

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \ln X \qquad (15.1)$$

إن الأثر الحدى لـ X على Y طبقاً لهذه المعادلة يكون كما يلى :

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \beta_1 \left(\frac{1}{X}\right) \qquad (16.1)$$

وبالنظر إلى هذه المعادلة يلاحظ ما يلى :

1 – إذا كانت β_1 موجبة [الحالة الأولى من الشكل رقم (5.1)] ، فإن الزيادة فى X سوف تؤدى إلى زيادة Y بمعدل متناقص .

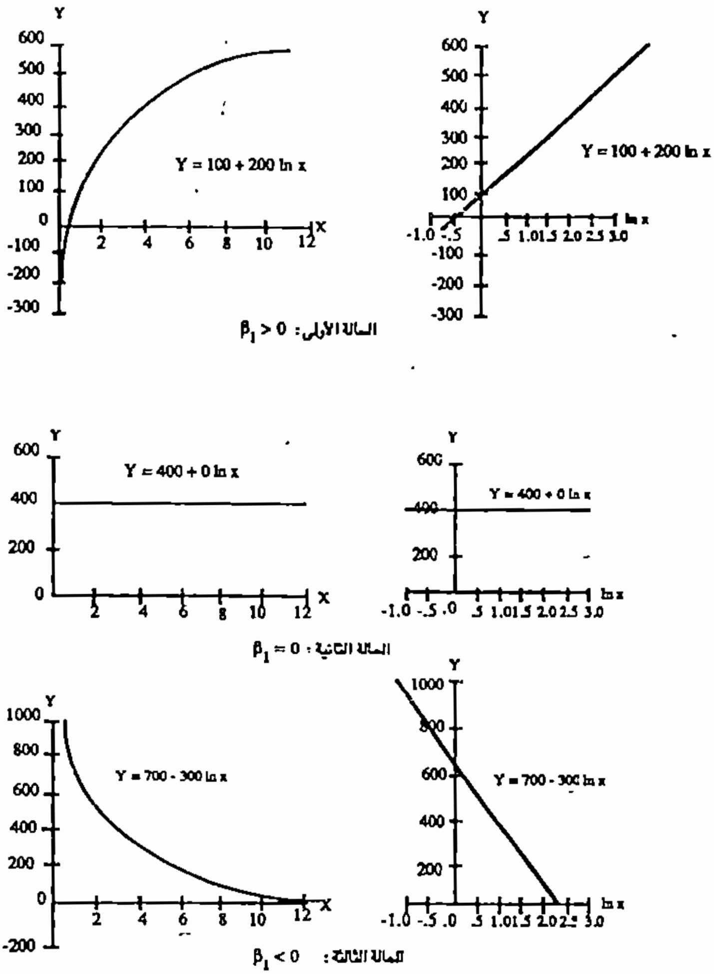
2 – إذا كانت β_1 سالبة [الحالة الثالثة من الشكل رقم (5.1)] ، فإن الزيادة فى X سوف تؤدى إلى إنخفاض Y بمعدل متناقص .

أما الأثر النسبى لـ X على Y طبقاً للمعادلة رقم (15.1) يكون كما يلى :

$$E_{YX} = \frac{\beta_1}{X} \cdot \frac{X}{Y} = \left(\frac{\beta_1}{Y}\right) \qquad (17.1)$$

وتوضح هذه المعادلة ، إن المرونة ليست ثابتة . ويضم الشكل رقم (5.1) باقى الحالات الخاصة بالصيغة نصف اللوغاريتمية . ويلاحظ أن هذه الصيغة

تشبه الصيغة العكسية ، بإستثناء أن الصيغة الأولى ليس لها حد أعلى أو حد أدنى .



شكل رقم (5.1)

الحالات المختلفة للصيغة نصف اللوغاريتمية :

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \ln X$$

The Exponential Form الصيغة الأسية 6.1

الصيغة الأسية هى :

$$\ln Y = \beta_0 + \beta_1 X \qquad (18.1)$$

وتشبه هذه الصيغة ، الصيغة نصف اللوغاريتمية ، بإستثناء أن المتغير التابع يتم قياسه بوحدات اللوغاريتم الطبيعى[1] . ويمكن كتابة المعادلة السابقة على النحو التالى :

$$Y = é^{\beta_0 + \beta_1 X} \qquad (19.1)$$

حيث é أساس اللوغاريتم الطبيعى وهو يساوى 2.71828 .

ويتم تقدير المعادلة رقم (19.1) بإنحدار $Y^* = \ln Y$ على X كما هو موضح فى المعادلة رقم (18.1) .

إن الأثر الحدى لـ X على Y يتم الحصول عليه كما يلى :

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \beta_1 é^{\beta_0 + \beta_1 X} \qquad (20.1)$$

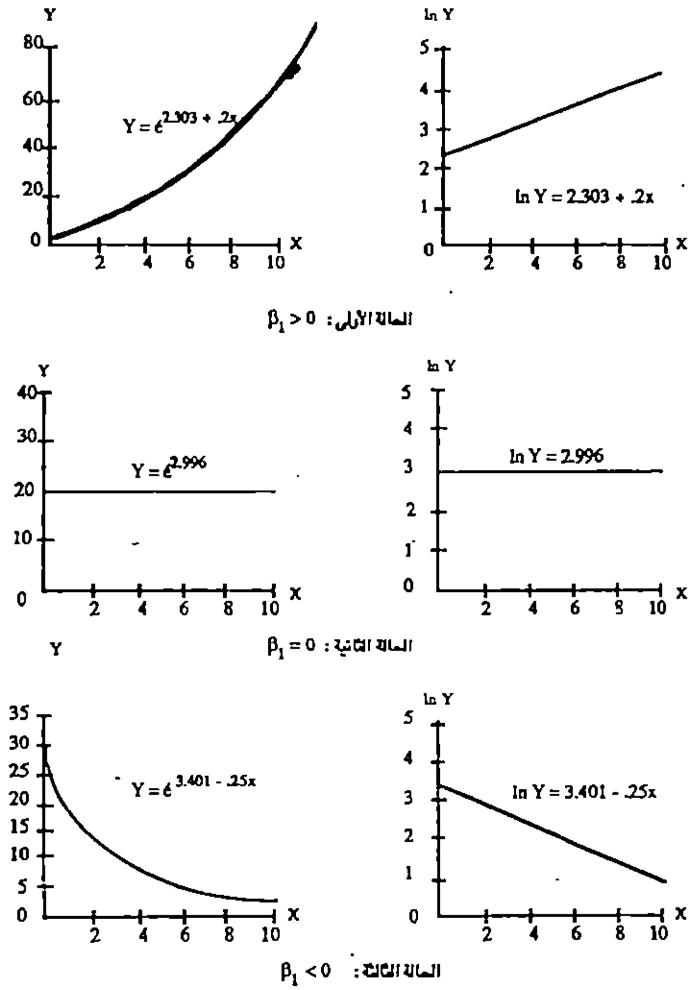
أما الأثر النسبى لـ X على Y فيتم الحصول عليه كما يلى :

$$E_{YX} = \beta_1 é^{\beta_0 + \beta_1 X} \frac{\bar{X}}{é^{\beta_0 + \beta_1 \bar{X}}} = \beta_1 \bar{X} \qquad (21.1)$$

(1) لاحظ أنه فى الصيغة نصف اللوغاريتمية يتم قياس المتغير المستقل بوحدات اللوغاريتم الطبيعى .

ويوضح الشكل رقم (6.1) الحالات المختلفة للصيغة الأسية .

$Y = \acute{e}^{\beta_0 + \beta_1 X}$ $\qquad$ $\ln Y = \beta_0 + \beta_1 X$



شكل رقم (6.1)

الجالات المختلفة للصيغة الأسية :

$$\ln Y = \beta_0 + \beta_1 X$$

7.1 مقارنة بين الصيغ الرياضية المختلفة

يضم الجدول التالى ملخص للصيغ الرياضية المختلفة السابق ذكرها .

جدول رقم (1.1)

مقارنة بين الصيغ الرياضية المختلفة

نوع الص	الصيغة غير الخطية	الصيغة الخطية	الأثر الحدى $\frac{\Delta Y}{\Delta X}$ (الميل)	الأثر النسبى $\frac{\Delta Y}{\Delta X}/\frac{Y}{X}$ (المرونة)
الصيغة ال	—	$Y=\beta_0+\beta_1 X$	β_1	$\beta_1\left(\frac{X}{Y}\right)$
الصيغةاله	—	$Y=\beta_0+\beta_1\left(\frac{1}{X}\right)$	$-\beta_1\left(\frac{1}{X^2}\right)$	$-\beta_1\left(\frac{1}{XY}\right)$
الصيغة التر	—	$Y=\beta_0+\beta_1 X+\beta_2 X^2$	$\beta_1+2\beta_2 X$	$(\beta_1+2\beta_2 X)\left(\frac{X}{Y}\right)$
الصيغا اللوغاريته المزدوجا	$Y=\beta_0 X^{\beta_1}$	$\ln Y=\ln\beta_0+\beta_1\ln X$	$\beta_1\left(\frac{Y}{X}\right)$	β_1
الصيغةنص اللوغاريتم	$e^Y=e^{\beta_0}X^{\beta_1}$	$Y=\beta_0+\beta_1\ln X$	$\beta_1\left(\frac{1}{X}\right)$	$\beta_1\left(\frac{1}{Y}\right)$
الصيغةالأس	$Y=e^{\beta_0+\beta_1 X}$	$\ln Y=\beta_0+\beta_1 X$	$\beta e^{\beta_0+\beta_1 X}$	$\beta_1 X$

ويلاحظ أن الصيغة الخطية هى الصيغة التى يتم استخدامها فى التقدير

8.1 الملخص

1 – إن الميل هو الأثر الحدى على المتغير التابع نتيجة تغير المتغير المستقل بوحدة واحدة .

2 – إن المرونة هى الأثر النسبى على المتغير التابع نتيجة تغير المتغير المستقل بـ 1 % .

3 – إن طبيعة العلاقة الحقيقية (خطية أم غير خطية) بين المتغير المستقل والمتغير التابع ، يتم التعرّف عليها بواسطة النظرية الاقتصادية أو الدراسات التطبيقية السابقة أو الرسم البيانى لكل من المتغير التابع والمتغير المستقل .

4 – إن هناك عدة صيغ رياضية مختلفة ، يمكن الباحث القياسى اختيار احداها بما يتفق وطبيعة العلاقة الحقيقية بين المتغير التابع والمتغير المستقل .

5 – يجب تحويل الصيغة الرياضية غير الخطية المختارة إلى صيغة خطية بإستخدام وحدات اللوغاريتم الطبيعى . وذلك حتى يمكن إجراء عملية التقدير بدقة .

الفصل الثانى

2 نموذج الانحدار البسيط

THE SIMPLE REGRESSION MODEL

إن الهدف الرئيسى لهذا الفصل هو ايضاح كيفية تقدير نموذج الانحدار البسيط (الخطى وغير الخطى) الذى يتكون من متغير تابع ومتغير مستقل واحد .

ولتحقيق هذا الهدف ، ينقسم هذا الفصل إلى ثمانية نقاط : أولها تحديد نموذج الانحدار الخطى البسيط . وثانيها افتراضات نموذج الانحدار الخطى البسيط . وثالثها تقدير معاملات انحدار النموذج الخطى البسيط . ورابعها تقدير التباين والخطأ المعيارى للقيم المقدرة لمعاملات انحدار النموذج الخطى البسيط . وخامسها تقدير معامل التحديد البسيط (r^2) . وسادسها تقدير معامل الارتباط البسيط (r) . وسابعها خصائص القيم المقدرة لمعاملات انحدار النموذج الخطى البسيط . وثامنها تقدير معاملات انحدار النموذج غير الخطى البسيط .

1.2 تحديد نموذج الانحدار الخطى البسيط

يمكن صياغة نموذج الانحدار الخطى البسيط كما يلى[1] :

(1) لاحظ أن إضافة $\in$ إلى النموذج الرياضى يصبح نموذج قياسى .

$$Y_i = \propto + \beta X_i + \in_i \quad ,$$

$$i = 1, 2, \ldots , N \qquad (1.2)$$

حيث أن :

Y = القيمة الفعلية للمتغير التابع

، X = القيمة الفعلية للمتغير المستقل

، $\in$ = القيمة الفعلية لحد الخطأ

، $\propto , \beta$ = القيم الفعلية لمعاملات الانحدار

، N = عدد المشاهدات

ويرجع وجود حد الخطأ إلى عدة أسباب منها :

1 – اهمال بعض المتغيرات المستقلة – التى يمكن أن تؤثر على المتغير التابع – فى النموذج .

2 – الصياغة الرياضية غير السليمة للنموذج .

3 – حدوث خطأ فى كل من تجميع البيانات وقياس المتغيرات الاقتصادية .

ويلاحظ أنه إذا كانت القيم الفعلية لـ $\propto , \beta , \in$ معروفة من قبل ، فليس هناك حاجة لاستخدام الاقتصاد القياسى . وحيث أن القيم الفعلية لـ $\propto , \beta , \in$ نادراً ما تكون معروفة سلفاً ، فإنه يجب تقديرها تقديراً جيداً . ويتم ذلك باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية .

2.2 افتراضات نموذج الانحدار الخطى البسيط

لكي يمكن استخدام طريقة المربعات الصغرى العادية في تقدير المعادلة رقم (1.2) ، يجب توافر الافتراضات التالية :

الفرض الأول

إن المتغير التابع يكون دالة خطية في المتغير المستقل مضافاً إليه حد الخطأ . فمثلاً إذا كان نموذج الانحدار المراد تقديره يأخذ الصيغة الأسية التالية :

$$Y_i = X_i^{\beta}\ é^{\epsilon i} \quad , \qquad (2.2)$$
$$i = 1, 2, ... , N$$

حيث é عبارة عن أساس اللوغاريتم الطبيعي ويساوى 2.71828 . فإنه لكى نحصل على تقدير جيد للمعادلة رقم (2.2) ، يجب تحويل نموذج الانحدار السابق إلى نموذج الانحدار التالى :

$$\ln Y_i = \beta \ln X_i + \epsilon_i \qquad (3.2)$$

ويترتب على اسقاط هذا الافتراض حدوث أخطاء تحديد Specification Errors . وتتمثل هذه الأخطاء فيما يلي :

1 – تحديد خاطئ للمتغيرات المستقلة Wrong Regressors

ويتمثل ذلك في أغفال متغيرات مستقلة هامة فى نموذج الانحدار المراد تقديره أو احتواء هذا النموذج على متغيرات مستقلة غير هامة .

2 - العلاقة الحقيقية غير خطية Non - Linearity

أى أن العلاقة الحقيقية بين المتغير التابع والمتغير المستقل قد تكون غير خطية .

3 - تغير معاملات الانحدار Changing Parameters

أى أن معاملات الانحدار قد لا تظل ثابتة أثناء الفترة الزمنية التى تم تجميع البيانات عنها .

الفرض الثانى

إن القيمة المتوقعة لحد الخطأ تكون مساوية للصفر أى $E(\epsilon_i) = 0$. ويعنى هذا أن الوسط الحسابى لحد الخطأ المصاحب لكل مستوى من X يساوى صفر وإن المتغير X يكون ثابت .

ويترتب على اسقاط هذا الافتراض ، حدوث مشكلة تحيز الحد الثابت .

الفرض الثالث

إن تباين حد الخطأ يكون ثابت . ومن ثم فإن حدود الأخطاء يكون لها نفس التباين Homoscedasticity أى $Var(\epsilon_i) = E(\epsilon_i^2) = \sigma^2$.

ويترتب على اسقاط هذا الافتراض ، حدوث مشكلة عدم ثبات تباين حد الخطأ أى أن حدود الأخطاء ليس لها نفس التباين Heteroscedasticity .

الفرض الرابع

إن حد الخطأ لمشاهدة ما لا يرتبط بحد الخطأ فى مشاهدة أخرى أى

$E(\in_i \in_j) = 0$ حيث أن $i \neq j$.

ويترتب على اسقاط هذا الافتراض ، حدوث مشكلة الارتباط الذاتى -Au tocorrelation .

الفرض الخامس

إن حد الخطأ يكون مستقل عن المتغير المستقل بالنسبة لكل مشاهدة ويستلزم ذلك أن يكون التغاير (Cov) لكل من $X_i , \in_i$ معاً مساوياً للصفر أى : $Cov\ (X_i \in_i) = E\ (X_i \in_i) = 0$.

الفرض السادس

إن حد الخطأ موزع توزيعاً طبيعياً . ويسمح هذا الافتراض بإختبار الفروض[1] .

الفرض السابع

إن درجات الحرية $(DF = N - K + 1)$ يجب أن تكون موجبة أى يجب أن تكون $N > K + 1$.

حيث أن :

N = عدد المشاهدات

، K = عدد المتغيرات المستقلة

، $K + 1$ = عدد معاملات الانحدار المقدرة

، DF = درجات الحرية

---

(1) سوف يتم بيان ذلك فى الفصل التاسع من هذا الكتاب .

3.2 تقدير معاملات انحدار النموذج الخطى البسيط

بفرض توافر الافتراضات السابق ذكرها ، فإنه يمكن استخدام طريقة المربعات الصغرى العادية فى تقدير $\propto, \beta, \in$. وبتطبيق هذه الطريقة على المعادلة رقم (1.2) ينتج ما يلى :

$$\hat{Y}_i = \hat{\propto} + \hat{\beta} X_i + e_i ,$$

$$i = 1, 2, ... , N \tag{4.2}$$

حيث أن :

$\hat{Y}$ = القيمة المقدرة للمتغير التابع

، $\hat{\propto}, \hat{\beta}$ = القيم المقدرة لمعاملات الانحدار

، e = القيمة المقدرة لحد الخطأ

ويتم تقدير $\beta, \propto, \in$ على الترتيب كما يلى :

$$\hat{\beta} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} \tag{5.2}$$

حيث :

$$x_i = (X_i - \bar{X}) \tag{6.2}$$

$$y_i = (Y_i - \bar{Y}) \tag{7.2}$$

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{N} \tag{8.2}$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum Y_i}{N} \tag{9.2}$$

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\,\bar{X} \tag{10.2}$$

$$e_i = (Y_i - \hat{Y}_i) \tag{11.2}$$

$$= Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}\,X_i$$

حيث أن :

$\bar{X}$ = الوسط الحسابى لـ X

، $\bar{Y}$ = الوسط الحسابى لـ Y

4.2 تقدير التباين والخطأ المعيارى للقيم المقدرة لمعاملات انحدار النموذج الخطى البسيط

يمكن ايضاح كيفية تقدير التباين والخطأ المعيارى للقيم المقدرة لمعاملات انحدار النموذج الخطى البسيط على النحو التالى :

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}) = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sum x_i^2} \tag{12.2}$$

$$SE(\hat{\beta}) = \sqrt{Var(\hat{\beta})} \tag{13.2}$$

$$Var(\hat{\alpha}) = \frac{\hat{\sigma}^2 \quad \sum X_i^2}{N \sum x_i^2} \tag{14.2}$$

$$SE(\hat{\alpha}) = \sqrt{Var(\hat{\alpha})} \tag{15.2}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum e_i^2}{DF} \tag{16.2}$$

حيث أن :

Var = التباين

، SE = الخطأ المعيارى

، $\hat{\sigma}^2$ = التباين المقدر لحد الخطأ

، DF = درجات الحرية (N - K + 1)

5.2 تقدير معامل التحديد البسيط (r^2)

يقيس معامل التحديد البسيط (r^2) نسبة التغير فى المتغير التابع نتيجة تغير المتغير المستقل ، وبعبارة أخرى ، يوضح (r^2) نسبة مساهمة المتغير المستقل فى التغير الحادث فى المتغير التابع . ويتم استخدام (r^2) لقياس

جودة توفيق معادلة الانحدار المقدرة . وتقع قيمة (r^2) بين الصفر والواحد الصحيح ، أى أن $0 \leq r^2 \leq 1$. لاحظ أن قيمة r^2 لا يمكن أن تكون سالبة .

ومن ثم يمكن التمييز بين حالتين كما يلى :

1 - إذا كانت $r^2 = 1$ ، فإن هناك علاقة معنوية تامة بين المتغير المستقل والمتغير التابع . ويعنى ذلك أن 100 % من التغير فى المتغير التابع (Y) يرجع إلى التغير فى المتغير المستقل (X) . أى أنه ليس هناك متغيرات مستقلة أخرى خلاف X تؤثر على Y . لاحظ أنه كلما قربت قيمة r^2 من الواحد الصحيح كلما زادت الثقة فى التقدير .

2 - إذا كانت $r^2 = 0$ ، فليس هناك علاقة بين المتغير المستقل (X) والمتغير التابع (Y) .

ويتم تقدير r^2 كما يلى :

$$r^2 = \frac{\sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2}$$

$$= \frac{RSS}{TSS}$$

$$= 1 - \frac{RSS}{TSS}$$

$$= 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2} \qquad (17.2)$$

أو

$$r^2 = \hat{\beta}^2 \left(\frac{\sum x_i^2}{\sum Y_i^2} \right) \tag{18.2}$$

أو

$$r^2 = \hat{\beta}^2 \left(\frac{S_x^2}{S_Y^2} \right) \tag{19.2}$$

$$S_X = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N-1}} \tag{20.2}$$

$$S_Y = \sqrt{\frac{\sum Y_i^2}{N-1}} \tag{21.2}$$

حيث أن :

RSS = مجموع مربعات الانحدار

، ESS = مجموع مربعات الخطأ

، TSS = مجموع المربعات الكلى (RSS + ESS)

، S_X , S_Y = الانحراف المعيارى لكل من X , Y على الترتيب

، S_X^2 , S_Y^2 = التباين لكل من X , Y على الترتيب

6.2 تقدير معامل الارتباط البسيط (r)

يقيس معامل الارتباط البسيط (r) درجة العلاقة بين متغيرين فقط . وتقع قيمة r بين 1- و 1 + ، أى أن $-1 \leq r \leq +1$.

ومن ثم يمكن التمييز بين ثلاثة حالات على النحو التالى :

1 – اذا كانت $r = 1$ ، فإن هناك علاقة خطية تامة موجبة بين المتغيرين محل الدراسة . ويعنى ذلك أن الزيادة فى قيم أحد المتغيرين سوف تؤدى إلى زيادة قيم المتغير الآخر .

2 – إذا كانت $r = -1$ ، فإن هناك علاقة خطية تامة سالبة بين المتغيرين محل الدراسة . ويعنى ذلك أن الزيادة فى قيم أحد المتغيرين سوف تؤدى إلى انخفاض قيم المتغير الآخر .

3 – إذا كانت $r = 0$ ، فليس هناك علاقة بين قيم المتغيرين محل الدراسة .

ويتم تقدير r كما يلى :

$$r = \frac{Cov\,(X\,,\,Y)}{S_X\,S_Y} \qquad (22.2)$$

أو

$$r = \hat{\beta}\ \left(\frac{\sum x_i}{\sum Y_i}\right) \qquad (23.2)$$

أو

$$r = \hat{\beta}\ \left(\frac{S_X}{S_Y}\right) \qquad (24.2)$$

أو ،

$$r = \pm \sqrt{r^2} \qquad (25.2)$$

$$Cov\,(X\,,Y) = \frac{\sum x_i\,y_i}{N-1} \qquad (26.2)$$

حيث أن r^2 عبارة عن مربع r , Cov تعنى التغاير .

7.2 خصائص القيم المقدرة لمعاملات انحدار النموذج الخطى البسيط

يتضح من المعادلة رقم (2.2) ، أن تقديرات طريقة المربعات الصغرى العادية هى $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, e . هذه التقديرات - فى نموذج الانحدار الخطى البسيط - تتميز بالخصائص التالية[1] :

1 - المقدرات خطية Linear Estimators

يقصد بالمقدرات خطية أن كل من $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ على حدة ، دالة خطية فى مشاهدات المتغير التابع فقط .

2 - المقدرات غير متحيزة Unbiased Estimators

يقصد بالمقدرات غير متحيزة أن كل من $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ غير متحيزة . ويحدث

(1) لتبسيط العرض ، سوف نتجاهل e .

ذلك عندما :

$$E(\hat{\propto}) = \propto \quad ,$$

$$E(\hat{\beta}) = \beta \qquad (27.2)$$

حيث أن :

$E(\hat{\propto})$ = القيمة المتوقعة للقيمة المقدرة لـ $\propto$

$E(\hat{\beta})$ = القيمة المتوقعة للقيمة المقدرة لـ β ،

3 - تباين المقدرات أقل ما يمكن

Minimum - Variance Estimators

يقصد بتباين المقدرات أقل ما يمكن أن تباين كل من $\hat{\propto}$, $\hat{\beta}$ كل على حدة ، أقل ما يمكن . ويحدث ذلك عندما يكون تباين كل من $\hat{\propto}$, $\hat{\beta}$ على حدة أقل من تباين أى قيمة مقدرة أخرى أى :

$$\text{Var}(\hat{\propto}) < \text{Var}(\tilde{\propto}) \quad ,$$

$$\text{Var}(\hat{\beta}) < \text{Var}(\tilde{\beta}) \qquad (28.2)$$

حيث أن :

$\tilde{\propto}$ = القيمة المقدرة الأخرى لـ $\propto$

$\tilde{\beta}$ = القيمة المقدرة الأخرى لـ β ،

ويلاحظ أن أفضل المقدرات هى التى يكون تباينها أقل ما يمكن . كما يلاحظ أن التقديرات تكون كفؤة إذا توافرت كل من الخاصيتين الثانية والثالثة (المقدارات غير متحيزة وتباين المقدرات أقل ما يمكن) . وبالتالى يمكن

القول أن تحقق خاصية المقدرات غير متحيزة فقط ليس له أهمية . ويكون لهذه الخاصية أهمية إذا اقترنت بخاصية تباين المقدرات أقل ما يمكن .

ومما سبق يمكن القول بأن تقديرات طريقة المربعات الصغرى العادية هى أفضل مقدرات خطية غير متحيزة .

. Best Linear Unbiased Estimators (BLUEs)

مثال تطبيقى :

يعطى الجدول رقم (1.2) الإنفاق الاستهلاكى الشخصى (Y_i) والدخل المتاح للإنفاق (X_i) ، كليهما بالمليون جنيه لإحدى الدول من 1981 إلى 1990

ويفرض أن X_i دالة خطية فى Y_i اوجد ما يلى :

1 – معاملات الانحدار المقدرة .

2 – تباين معاملات الانحدار المقدرة .

3 – الخطأ المعيارى لمعاملات الانحدار المقدرة .

4 – معامل التحديد البسيط .

5 – معامل الارتباط البسيط .

جدول رقم (1.2)

الإنفاق الاستهلاكى الشخصى (Y_i) والدخل الشخصى المتاح للإنفاق (X_i) بالمليون جنيه ، 1981 - 1990 :

السنة	Y_i	X_i
1981	70	80
1982	65	100
1983	90	120
1984	95	140
1985	110	160
1986	115	180
1987	120	200
1988	140	220
1989	155	240
1990	150	260

الحل :

يوضح الجدول رقم (2.2) البيانات المستخدمة فى تقدير α , β ، وتباين كل من $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ ، والخطأ المعيارى لكل من $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, r^2 , r . ومن هذا الجدول يمكن ايجاد المطلوب على النحو التالى :

$$\bar{Y} = \frac{\Sigma Y_i}{N} = \frac{1110}{10} = 111$$

$$\bar{X} = \frac{\Sigma X_i}{N} = \frac{1700}{10} = 170$$

جدول رقم (2.2)

البيانات المستخدمة فى تقدير α , β ، وتباين كل من $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ ، والخطأ المعيارى لكل من $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ ، و r^2 ، و r

Y_i	X_i	X_i^2	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
70	80	6400	- 90	- 41	3690	8100
65	100	10000	- 70	- 46	3220	4900
90	120	14400	- 50	- 21	1050	2500
95	140	19600	- 30	- 16	480	900
110	160	25600	- 10	- 1	10	100
115	180	32400	10	4	40	100
120	200	40000	30	9	270	900
140	220	48400	50	29	1450	2500
155	240	57600	70	44	3080	4900
150	260	67600	90	39	3510	8100
1110	1700	322000	0	0	16800	33000

تابع جدول رقم (2.2)

Y_i^2	$\hat{Y}_i$	e_i	e_i^2
1681	65.19	4.81	23.1361
2116	75.37	- 10.37	107.5369
441	85.55	4.45	19.8025
256	95.73	- 0.73	0.5329
1	105.91	4.09	16.7281
16	116.09	- 1.09	1.1881
81	126.27	- 6.27	39.3129
841	136.45	3.55	12.6025
1936	146.63	8.37	70.0569
1521	156.81	- 6.81	46.3761
8890	1108.00	0	337.273

$$\hat{\beta} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \frac{16800}{33000} = 0.509$$

$$\hat{\alpha} = \overline{Y} - \hat{\beta}\,\overline{X}$$

$$= 111 - [(0.509)\ (170)] = 24.47$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum e_i^2}{DF} = \frac{337.273}{8} = 42.159$$

$$\mathrm{Var}\ (\hat{\beta}) = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sum x_i^2} = \frac{42.159}{33000} = 0.001$$

$$\mathrm{SE}\ (\hat{\beta}) = \sqrt{\mathrm{Var}\ (\hat{\beta})} = \sqrt{0.001}$$

$$= 0.032$$

$$\mathrm{Var}\ (\hat{\alpha}) = \frac{\hat{\sigma}^2 \sum X_i^2}{N \sum x_i^2} = \frac{[(42.159)(322000)]}{[(10)(33000)]} = 41.137$$

$$\mathrm{SE}\ (\hat{\alpha}) = \sqrt{\mathrm{Var}\ (\hat{\alpha})} = \sqrt{41.137} = 6.414$$

$$r^2 = \hat{\beta}^2 \left(\frac{\sum x_i^2}{\sum y_i^2} \right)$$

$$= (0.509)^2 \left(\frac{33000}{8890} \right) = 0.962$$

أو

$$r^2 = \hat{\beta}^2 \left(\frac{S_X^2}{S_Y^2} \right)$$

$$S_X = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{33000}{9}} = 60.553$$

$$S_Y = \sqrt{\frac{\sum Y_i^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{8890}{9}} = 31.429$$

$$r^2 = (0.509)^2 \left[\frac{(60.553)^2}{(31.429)^2} \right] = 0.962$$

ومعنى $r^2 = 0.96$ أن 96 % من التغير فى Y يرجع إلى تغير X . أما الباقى وهو 4 % يرجع إلى التغير فى متغيرات أخرى .

$$r = \frac{Cov\,(X\,,\,Y)}{S_X\,S_Y}$$

$$Cov\,(X\,,\,Y) = \frac{\sum x_i\,Y_i}{N-1} = \frac{16800}{9} = 1866.\dot{6}$$

$$r = \frac{1866.\dot{6}}{[(60.553)\ (31.429)]} = 0.981$$

ومعنى r = 0.98 أن هناك علاقة خطية قوية موجبة بين X , Y .

8.2 تقدير معاملات انحدار النموذج غير الخطى البسيط

مثال تطبيقى

بفرض أن نموذج الانحدار غير الخطى البسيط المراد تقديره كان كما يلى :

$$Y_i = \propto \acute{e}^{\beta X_i} \quad ,$$

$$i = 1, 2, \ldots, N \qquad (29.2)$$

حيث أن :

Y = الناتج القومى الإجمالى

X ، = الزمن

∝ , β ، = معاملات الانحدار

، $\acute{e}$ = أساس اللوغاريتم الطبيعى ويساوى 2.71828

وإن بيانات هذا النموذج معطاة فى الجدول رقم (3.2) . والمطلوب :

1 - تقدير معاملات الانحدار .

2 - ايجاد معدل النمو السنوى المركب للناتج القومى الإجمالى .

جدول رقم (3.2)

الناتج القومى الإجمالى (Y_i) بالمليون جنيه والزمن (X_i)

Y_i	X_i
12.18	1
20.09	2
33.12	3
54.60	4
90.02	5
148.41	6
244.69	7
403.43	8
665.14	9
1096.63	10
1808.04	11
2980.96	12
4914.77	13
8103.08	14
13359.70	15

تابع جدول رقم (3.2)

Y_i	X_i
22026.50	16
36315.50	17
59874.10	18
98715.80	19
162755.00	20

الحل :

I – تقدير معاملات الإنحدار .

لكى يمكن تقدير المعادلة رقم (29.2) بطريقة المربعات الصغرى العادية : يجب تحويلها إلى معادلة خطية كما يلى :

$$\ln Y_i = \ln \propto + \beta X_i \qquad (30.2)$$

وبوضع :

$$\ln Y_i = Y_i^{*} \quad ,$$

$$\ln \propto = \propto^{*}$$

فإن المعادلة رقم (30.2) تصبح كما يلى :

$$Y_i^{*} = \propto^{*} + \beta X_i \qquad (31.2)$$

ويوضح الجدول التالى البيانات المستخدمة فى تقدير معاملات الانحدار .

جدول رقم (4.2)

البيانات المستخدمة فى تقدير معاملات الانحدار

Y_i^*	X_i
2.5	1
3.0	2
3.5	3
4.0	4
4.5	5
5.0	6
5.5	7
6.0	8
6.5	9
7.0	10
7.5	11
8.0	12
8.5	13
9.0	14
9.5	15
10.0	16
10.5	17
11.0	18
11.5	19
12.0	20

وبتطبيق طريقة المربعات الصغرى العادية فإن المعادلة رقم (31.2) بعد تقديرها تصبح كما يلى :

$$\hat{Y}_i^* = 2.0 + 0.5 \ X_i$$

فمثلاً :

$$\hat{Y}_1^* = 2.0 + 0.5 \ (1)$$

$$= 2.0 + 0.5 = 2.5$$

أو

∵ العدد المقابل للوغاريتم الـ $2.5 = 12.18$

$$\therefore \ \hat{Y}_1 = 12.18$$

وهكذا يمكن الحصول على باقى القيم المقدرة للناتج القومى الإجمالى .

2 – ايجاد معدل النمو السنوى المركب للناتج القومى الإجمالى

$$g = (\acute{e}^{\beta} - 1) \ 100 \qquad (32.2)$$

حيث أن :

g = معدل النمو السنوى المركب للناتج القومى الإجمالى

، $\acute{e}^{\beta}$ = العدد المقابل للوغاريتم β .

$$g = [(2.71828)^{.5} - 1] \ 100$$

$$= (1.65 - 1) \ 100 = 65 \ \%$$

ومعنى $g = 65\%$ أن الناتج القومى الإجمالى يزيد كل سنة بمعدل 65%.

9.2 الملخص

1 – يتكون نموذج الانحدار البسيط من متغيرين فقط أحدهما متغير مستقل (X) والآخر متغير تابع (Y) .

2 – هناك عدة افتراضات لنموذج الانحدار الخطى البسيط منها :

- إن Y دالة خطية فى X .
- إن القيمة المتوقعة لحد الخطأ تساوى صفر .
- إن تباين حد الخطأ يكون ثابت .
- إن حد الخطأ لمشاهدة ما لا يرتبط بحد الخطأ لمشاهدة أخرى .
- إن حد الخطأ يكون مستقل عن X بالنسبة لكل مشاهدة .
- إن حد الخطأ موزع توزيعاً طبيعياً .
- إن درجات الحرية يجب أن تكون موجبة .

3 – فى حالة توافر الافتراضات السابق ذكرها ، يمكن استخدام طريقة المربعات الصغرى العادية فى تقدير معاملات الانحدار . وتكون تقديرات هذه الطريقة أفضل مقدرات خطية غير متحيزة .

4 – إن قياس طبيعة العلاقة بين X , Y يتم بتقدير معاملات الانحدار . أما قياس درجة العلاقة بين X , Y يتم بتقدير معامل الارتباط البسيط (r) ، بينما قياس نسبة مساهمة X فى التغير الحادث فى Y يتم بتقدير معامل التحديد البسيط (r^2) .

5 – لكى يمكن تقدير نموذج الانحدار غير الخطى يجب تحويله إلى نموذج انحدار خطى ، ويتم ذلك من خلال استخدام وحدات اللوغاريتم الطبيعى .

الفصل الثالث

3 نموذج الانحدار المتعدد

THE MULTIPLE REGRESSION MODEL

إن الهدف الرئيسى لهذا الفصل هو ايضاح كيفية تقدير نموذج الانحدار المتعدد (الخطى وغير الخطى) الذى يتكون من متغير تابع ومتغيرين مستقلين فقط [1] .

ولتحقيق هذا الهدف ، ينقسم هذا الفصل إلى البنود التالية : 1.3 تحديد نموذج الانحدار الخطى المتعدد . 2.3 افتراضات نموذج الانحدار الخطى المتعدد . 3.3 تقدير معاملات انحدار النموذج الخطى المتعدد . 4.3 تقدير التباين والخطأ المعيارى للقيم المقدرة لمعاملات انحدار النموذج الخطى المتعدد . 5.3 تقدير معامل التحديد المتعدد (R^2) . 6.3 تقدير معامل التحديد المتعدد المُعدل ($\bar{R}^2$) . 7.3 تقدير معامل الارتباط المتعدد (R) . 8.3 تقدير معاملات الارتباط الجزئية . 9.3 استخدام المتغيرات الصورية فى نموذج الانحدار الخطى المتعدد . 10.3 تقدير معاملات انحدار النموذج غير الخطى المتعدد .

1.3 تحديد نموذج الانحدار الخطى المتعدد

يمكن التعبير عن نموذج الانحدار الخطى المكون من متغير تابع ومتغيرين مستقلين بالمعادلة التالية :

(1) لاحظ أن نموذج الإنحدار المتعدد هو عبارة عن نموذج يتكون من متغير تابع وأكثر من متغير مستقل واحد .

$$Y_i = \propto + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \epsilon_i ,$$
$$i = 1, 2, ..., N \qquad (1.3)$$

حيث أن :

Y = القيمة الفعلية للمتغير التابع ،

X_1 = القيمة الفعلية للمتغير المستقل الأول ،

X_2 = القيمة الفعلية للمتغير المستقل الثانى ،

$\in$ = القيمة الفعلية لحد الخطأ ،

$\propto$ = الحد الثابت ،

β_1 = معامل X_1 ، وهو عبارة عن ميل العلاقة بين Y , X_1 ،

β_2 = معامل X_2 ، وهو عبارة عن ميل العلاقة بين Y , X_2 ،

N = عدد المشاهدات ،

لاحظ أن $\propto$, β_1, β_2 عبارة عن معاملات انحدار النموذج .

2.3 افتراضات نموذج الانحدار الخطى المتعدد

لكى يمكن استخدام طريقة المربعات الصغرى العادية فى تقدير المعادلة رقم (1.3) ، يجب توافر الافتراضات التالية :

الافتراض الأول

إن المتغير التابع (Y) يكون دالة خطية فى المتغيرات المستقلة (X_2 , X_1) .

الافتراض الثانى

إن القيمة المتوقعة لحد الخطأ تكون مساوية للصفر أى $E(\epsilon_i) = 0$.

الافتراض الثالث

إن تباين حد الخطأ يكون ثابت أى

$$Var(\epsilon_i) = E(\epsilon_i^2) = \sigma^2$$

الافتراض الرابع

إن حد الخطأ لمشاهدة ما لا يرتبط بحد الخطأ لمشاهدة أخرى أى $E(\epsilon_i \epsilon_j) = 0$ حيث أن $i \neq j$.

الافتراض الخامس

استقلال حد الخطأ عن المتغيرات المستقلة أى

$$Cov(X_{1i} \epsilon_i) = Cov(X_{2i} \epsilon_i) = 0$$

الافتراض السادس

إن حد الخطأ موزع توزيعاً طبيعياً .

الافتراض السابع

إن درجات الحرية يجب أن تكون موجبة .

الافتراض الثامن

عدم وجود علاقة خطية تامة بين المتغيرات المستقلة . ويترتب على اسقاط هذا الافتراض ، حدوث مشكلة الازدواج الخطى Multicollinearity ..

الافتراض التاسع

إن المتغيرات المستقلة تكون متغيرات غير عشوائية (متغيرات غير تصادفية Nonstochastic Variables) ويكون لها قيم ثابتة .

ويترتب على اسقاط هذا الافتراض ، حدوث ثلاثة مشاكل قياسية هى :

1 – وجود أخطاء فى المتغيرات Errors in Variables

أى وجود أخطاء فى قياس المتغيرات المستقلة .

2 – ارتباط مشاهدات المتغير التابع بعضها بالبعض الآخر Au- toregression

ويحدث ذلك عندما يتم استخدام متغير تابع ذو فترة إبطاء كمتغير مستقل .

3 – تقدير معادلة آنية

Simultaneous Equation Estimation

وهى الحالة التى تتحدد فيها المتغيرات التابعة بواسطة التفاعل الآنى لعلاقات عديدة .

لاحظ أن الافتراضات السابقة (افتراضات نموذج الانحدار الخطى المتعدد) هى نفسها افتراضات نموذج الانحدار الخطى البسيط بإستثناء الافتراضات الخاصة بوجود أكثر من متغير مستقل واحد فى النموذج .

3.3 تقدير معاملات انحدار النموذج الخطى المتعدد

بفرض توافر الافتراضات السابق ذكرها ، فإنه يمكن استخدام طريقة المربعات الصغرى العادية فى تقدير $\propto, \beta_1, \beta_2, \in$. وبتطبيق هذه الطريقة على المعادلة رقم (1.3) ينتج ما يلى :

$$\hat{Y}_i = \hat{\propto} + \hat{\beta}_1 X_{1i} + \hat{\beta}_2 X_{2i} + e_i ,$$

$$i = 1, 2, \dots , N \qquad (2.3)$$

حيث أن :

$\hat{Y}$ = القيمة المقدرة للمتغير التابع

، $\hat{\propto}$, $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$ = القيم المقدرة لمعاملات الانحدار

، e = القيمة المقدرة لحد الخطأ

ويتم تقدير $\beta_1 , \beta_2 , \propto , \in$ على الترتيب كما يلى :

$$(3.3) \quad \hat{\beta}_1 = \frac{(\Sigma y_i x_{1i})(\Sigma x_{2i}^2) - (\Sigma y_i x_{2i})(\Sigma x_{1i} x_{2i})}{(\Sigma x_{1i}^2)(\Sigma x_{2i}^2) - (\Sigma x_{1i} x_{2i})^2}$$

$$(4.3) \quad \hat{\beta}_2 = \frac{(\Sigma y_i x_{2i})(\Sigma x_{1i}^2) - (\Sigma y_i x_{1i})(\Sigma x_{1i} x_{2i})}{(\Sigma x_{1i}^2)(\Sigma x_{2i}^2) - (\Sigma x_{1i} x_{2i})^2}$$

$$(5.3) \quad \hat{\alpha} = \bar{Y} - \beta_1 \bar{X}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{X}_2$$

$$e_i = (Y_i - \hat{Y}_i)$$

$$(6.3) \quad = Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}_1 X_{1i} - \hat{\beta}_2 X_{2i}$$

حيث :

$$(7.3) \quad y_i = (Y_i - \bar{Y})$$

$$(8.3) \quad x_{1i} = (X_{1i} - \bar{X}_1)$$

$$(9.3) \quad x_{2i} = (X_{2i} - \bar{X}_2)$$

$$(10.3) \quad \bar{Y} = \frac{\Sigma Y_i}{N}$$

$$(11.3) \quad \bar{X}_1 = \frac{\Sigma X_{1i}}{N}$$

$$(12.3) \qquad \overline{X}_2 = \frac{\sum X_{2i}}{N}$$

حيث أن :

$\overline{Y}$ = الوسط الحسابى لـ Y

، $\overline{X}_1$ = الوسط الحسابى لـ X_1

، $\overline{X}_2$ = الوسط الحسابى لـ X_2

4.3 تقدير التباين والخطأ المعيارى للقيم المقدرة لمعاملات انحدار النموذج الخطى المتعدد

يمكن ايضاح كيفية تقدير التباين والخطأ المعيارى للقيم المقدرة لمعاملات انحدار النموذج الخطى المتعدد على النحو التالى :

$$(13.3) \quad Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\hat{\sigma}^2 (\sum x_{2i}^2)}{\sum x_{1i}^2 \sum x_{2i}^2 - (\sum x_{1i} x_{2i})^2}$$

$$(14.3) \quad SE(\hat{\beta}_1) = \sqrt{Var(\hat{\beta}_1)}$$

$$(15.3) \quad Var(\hat{\beta}_2) = \frac{\hat{\sigma}^2 (\sum x_{1i}^2)}{\sum x_{1i}^2 \sum x_{2i}^2 - (\sum x_{1i} x_{2i})^2}$$

$$(16.3) \quad SE(\hat{\beta}_2) = \sqrt{Var(\hat{\beta}_2)}$$

$$(17.3) \quad Var(\hat{\alpha})$$

$$= \hat{\sigma}^2 \left[\frac{1}{N} + \frac{\bar{X}_1^2 \sum x_{2i}^2 + \bar{X}_2^2 \sum x_{1i}^2 - 2\bar{X}_1 \bar{X}_2 \sum x_{1i} x_{2i}}{\sum x_{1i}^2 \sum x_{2i}^2 - (\sum x_{1i} x_{2i})^2}\right]$$

$$(18.3) \quad SE(\hat{\alpha}) = \sqrt{Var(\hat{\alpha})}$$

حيث :

$$(19.3) \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum e_i^2}{DF}$$

حيث أن :

Var = التباين

SE = الخطأ المعيارى ،

$\hat{\sigma}^2$ = التباين المقدر لحد الخطأ ،

DF = درجات الحرية (N - K + 1) ،

K = عدد المتغيرات المستقلة ،

K + 1 = عدد معاملات الانحدار المقدرة ،

5.3 تقدير معامل التحديد المتعدد (R^2)

يقيس معامل التحديد المتعدد (R^2) نسبة التغير فى المتغير التابع نتيجة تغير المتغيرات المستقلة معاً . وبعبارة أخرى ، يوضح R^2 نسبة مساهمة التغيرات المستقلة معاً فى التغير الحادث فى المتغير التابع . ويتم استخدام R^2 لقياس جودة توفيق معادلة الانحدار المقدرة . وتقع قيمة R^2 (مثل r^2) بين الصفر والواحد الصحيح ، أى أن $0 \leq R^2 \leq 1$. لاحظ أن قيمة R^2 لا يمكن أن تكون سالبة .

ومن ثم يمكن التمييز بين حالتين كما يلى :

1 - إذا كانت $R^2 = 1$ ، فإن هناك علاقة معنوية تامة بين المتغيرات المستقلة والمتغير التابع . ويعنى ذلك أن 100% من التغير فى المتغير التابع (Y) يرجع إلى التغير فى المتغيرات المستقلة (X_2 , X_1) أى أنه ليس هناك متغيرات مستقلة أخرى خلاف X_1 , X_2 تؤثر على Y . لاحظ أنه كلما قربت قيمة R^2 من الواحد الصحيح كلما زادت الثقة فى التقدير .

2 - إذا كانت $R^2 = 0$ ، فليس هناك علاقة بين المتغيرات المستقلة (X_2 , X_1) والمتغير التابع (Y) .

ويتم تقدير R^2 كما يلى :

$$R^2 = \frac{\sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2}$$

$$= \frac{RSS}{TSS}$$

$$= 1 - \frac{ESS}{TSS}$$

$$(20.3) \qquad = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum Y_i^2}$$

أو

$$(21.3) \qquad R^2 = \frac{\hat{\beta}_1 \sum Y_i x_{1i} + \hat{\beta}_2 \sum Y_i x_{2i}}{\sum Y_i^2}$$

حيث أن :

RSS = مجموع مربعات الانحدار

، ESS = مجموع مربعات الخطأ

، TSS = مجموع المربعات الكلى (RSS + ESS)

6.3 تقدير معامل التحديد المتعدد المُعدل ($\bar{R}^2$)

يلاحظ أن إضافة متغير مستقل (أو متغيرات مستقلة) فى النموذج المقدر سوف يؤدى دائماً إلى زيادة قيمة R^2 . ويرجع ذلك إلى أن إضافة متغير مستقل جديد سوف يؤدى إلى زيادة القيمة الموجودة فى البسط فى معادلة R^2 بينما يظل المقام كما هو . ولهذا يجب تعديل R^2 وذلك بالأخذ فى الاعتبار درجات الحرية التى سوف تنقص بسبب إضافة متغيرات مستقلة جديدة فى النموذج . ويتم ذلك بواسطة معامل التحديد المتعدد المُعدل ($\bar{R}^2$)

ويتم تقدير $\bar{R}^2$ كما يلى :

$$(22.3) \quad \bar{R}^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{N-1}{DF}$$

أو

$$(23.3) \quad \bar{R}^2 = 1 - \left[\frac{\sum e_i^2 \; / \; DF}{\sum Y_i^2 \; / N-1} \right]$$

أو

$$(24.3) \quad \bar{R}^2 = 1 - \frac{\hat{\sigma}^2}{S_Y^2}$$

حيث :

$$(25.3) \quad S_Y = \sqrt{\frac{\sum Y_i^2}{N-1}}$$

حيث S_Y عبارة عن الانحراف المعيارى لـ Y .

ويتضح من المعادلة رقم (23.3) ما يلى :

1 – إن قيمة $\bar{R}^2$ يمكن أن تكون أقل أو يساوى قيمة R^2 أى $\bar{R}^2 \leq R^2$.

2 – إن قيمة $\bar{R}^2$ يمكن أن تكون سالبة بينما قيمة R^2 لا يمكن أن تكون كذلك .

7.3 تقدير معامل الارتباط المتعدد (R)

يقيس معامل الارتباط (R) درجة العلاقة بين أكثر من متغيرين . لاحظ أن قيمة r يمكن أن تكون موجبة أو سالبة بينما قيمة R تكون دائماً موجبة .

ويتم تقدير معامل الارتباط المتعدد بين Y و X_1, X_2 $(R_{Y.X_1 X_2})$ بإستخدام معاملات الارتباط البسيطة كما يلى :

$$(26.3)\quad R_{Y.X_1X_2} = \sqrt{\frac{r^2_{X_1Y} + r^2_{X_2Y} - 2\, r_{X_1Y}\, r_{X_2Y}\, r_{X_1X_2}}{1 - r^2_{X_1X_2}}}$$

أو

$$(27.3)\quad R = \sqrt{R^2}$$

حيث R^2 عبارة عن مربع R .

8.3 تقدير معاملات الارتباط الجزئية

يقيس معامل الارتباط الجزئى درجة العلاقة بين متغيرين مع ثبات باقى المتغيرات محل الدراسة .

ويتم تقدير معامل الارتباط الجزئى كما يلى :

$$(28.3)\quad r_{YX_1.X_2} = \frac{r_{YX_1} - r_{YX_2}\, r_{X_1X_2}}{\sqrt{(1 - r^2_{YX_2})(1 - r^2_{X_1X_2})}}$$

$$(29.3)\quad r_{YX_2.X_1} = \frac{r_{YX_2} - r_{YX_1}\, r_{X_1X_2}}{\sqrt{(1 - r^2_{YX_1})(1 - r^2_{X_1X_2})}}$$

$$r_{X_1X_2 \cdot Y} = \frac{r_{Y_1X_2} - r_{YX_1}\ r_{YX_2}}{\sqrt{(1 - r^2_{YX_1})(1 - r^2_{YX_2})}} \qquad (30.3)$$

حيث أن :

$r_{YX_1 \cdot X_2}$ = معامل الارتباط الجزئى بين Y , X_1 مع ثبات X_2

، $r_{YX_2 \cdot X_1}$ = معامل الارتباط الجزئى بين Y , X_2 مع ثبات X_1

، $r_{X_1X_2 \cdot Y}$ = معامل الارتباط الجزئى بين X_1 , X_2 مع ثبات Y

مثال تطبيقى

بفرض أن نموذج الانحدار الخطى المتعدد المراد تقديره كان كما يلى :

$$Y_i = \propto + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \in_i ,$$

$$i = 1, 2, \ldots , N \qquad (31.3)$$

وإن بيانات هذا النموذج معطاة فى الجدول رقم (1.3) . المطلوب :

1 – تقدير معاملات الانحدار .

2 – تقدير التباين والخطأ المعيارى لمعاملات الانحدار المقدرة .

3 – تقدير معامل التحديد المتعدد (R^2) .

4– تقدير معامل التحديد المتعدد المُعدل $(\bar{R}^2)$.

5 – تقدير معامل الارتباط المتعدد (R) .

6 – تقدير معاملات الارتباط الجزئية .

جدول رقم (1.3)

بيانات Y_i , X_1 , X_2 ، بالمليون جنيه ، 1972 - 1979 :

السنة	Y_i	X_{1i}	X_{2i}
1972	55	19	49
1973	65	17	58
1974	80	21	55
1975	75	17	58
1976	70	19	55
1977	50	18	49
1978	60	20	46
1979	65	21	46

الحل :

يوضح الجدول رقم (2.3) البيانات المستخدمة فى تقدير α ، β_1 ، β_2 وتقدير التباين والخطأ المعيارى لكل مـــن α ، β_1 ، β_2 ، وتقديـــر كل من R^2, R^2, R, $r_{YX_1.X_2}$ ، $r_{YX_2.X_1}$ ، $r_{X_1X_2.Y}$. ومن هذا الجدول يمكن ايجاد المطلوب على النحو التالى :

$$\overline{Y} = \frac{\sum Y_i}{N} = \frac{520}{8} = 65$$

$$\overline{X}_1 = \frac{\sum X_{1i}}{N} = \frac{152}{8} = 19$$

جدول رقم (2.3)

البيانات المستخدمة فى التقدير

السنة	Y_i	X_{1i}	X_{2i}	y_i	x_{1i}	x_{2i}	y_i^2	x_{1i}^2	x_{2i}^2
1972	55	19	49	- 10	0	- 3	100	0	9
1973	65	17	58	0	- 2	6	0	4	36
1974	80	21	55	15	2	3	225	4	9
1975	75	17	58	10	- 2	6	100	4	36
1976	70	19	55	5	0	3	25	0	9
1977	50	18	49	- 15	- 1	- 3	225	1	9
1978	60	20	46	- 5	1	- 6	25	1	36
1979	65	21	46	0	2	- 6	0	4	36
Σ	520	152	416	0	0	0	700	18	180

تابع جدول رقم (2.3)

$Y_i X_{1i}$	$Y_i X_{2i}$	$X_{1i} X_{2i}$	$\hat{Y}_i$	e_i	e_i^2
0	30	0	58.4	- 3.4	11.56
0	0	- 12	67.9	- 2.9	8.41
30	45	6	81.8	- 1.8	3.24
- 20	60	- 12	67.9	7.1	50.41
0	15	0	71.6	- 1.6	2.56
15	45	3	53.3	- 3.3	10.89
- 5	30	- 6	57.0	3.0	9.00
0	0	- 12	62.1	2.9	8.41
20	225	- 33	520.0	0.0	104.48

$$\bar{X}_2 = \frac{\Sigma Y_{2i}}{N} = \frac{418}{8} \cong 52$$

1 - تقدير معاملات الانحدار

$$\hat{\beta}_1 = \frac{(\Sigma y_i x_{1i})(\Sigma x^2_{2i}) - (\Sigma y_i x_{2i})(\Sigma x_{1i} x_{2i})}{(\Sigma x^2_{1i})(\Sigma x^2_{2i}) - (\Sigma x_{1i} x_{2i})^2}$$

$$= \frac{(20)(180) - (225)(-33)}{(18)(180) - (-33)^2}$$

$$= \frac{11025}{2151} = 5.13$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{(\Sigma y_i x_{2i})(\Sigma x^2_{1i}) - (\Sigma y_i x_{1i})(\Sigma x_{1i} x_{2i})}{(\Sigma x^2_{1i})(\Sigma x^2_{2i}) - (\Sigma x_{1i} x_{2i})^2}$$

$$= \frac{(225)(18) - (20)(-33)}{(18)(180) - (-33)^2}$$

$$= \frac{4710}{2151} = 2.19$$

$$\hat{\alpha} = \overline{Y} - \hat{\beta}_1 \overline{X}_1 - \hat{\beta}_2 \overline{X}_2$$

$$= 65 - [(5.13)(19)] - [(2.19)(52)]$$

$$= -146.35$$

2 – تقدير التباين والخطأ المعياري لمعاملات الانحدار المقدرة

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum e_i^2}{DF} = \frac{104.48}{5}$$

$$\cong 20.90$$

$$\text{Var}(\hat{\beta}_1) = \frac{\hat{\sigma}^2 \sum x_{2i}^2}{\sum x_{1i}^2 \sum x_{2i}^2 - (\sum x_{1i} x_{2i})^2}$$

$$= \frac{(20.90)(180)}{(18)(180) - (-33)^2}$$

$$= \frac{3762}{2151} \cong 1.75$$

$$SE(\hat{\beta}_1) = \sqrt{\text{Var}(\hat{\beta}_1)}$$

$$= \sqrt{1.75} \cong 1.32$$

$$\mathrm{Var}\,(\hat{\beta}_2) = \frac{\hat{\sigma}^2 \sum x_{1i}^2}{\sum x_{1i}^2 \sum x_{2i}^2 - (\sum x_{1i}\, x_{2i})^2}$$

$$= \frac{(20.90)\,(18)}{2151}$$

$$= \frac{376.2}{2151} = 0.18$$

$$\mathrm{SE}\,(\hat{\beta}_2) = \sqrt{\mathrm{Var}\,(\hat{\beta}_2)} = \sqrt{0.18} \cong 0.42$$

$$\mathrm{Var}\,(\hat{\alpha}) = \hat{\sigma}^2 \left[\frac{1}{N} + \frac{\bar{X}_1^2 \sum x_{2i}^2 + \bar{X}_2^2 \sum x_{1i}^2 - 2\bar{X}_1\bar{X}_2 \sum x_{1i}\, x_{2i}}{\sum x_{1i}^2 \sum x_{2i}^2 - (\sum x_{1i}\, x_{2i})^2}\right]$$

$$= 20.90 \left[\frac{1}{8} + \frac{(19)^2(180)+(52)^2(18)-[(2)\,(19)\,(52)\,(-33)]}{(18)\,(180) - (-33)^2}\right]$$

$$= 20.90 \left[\frac{1}{8} + \frac{178860}{2151}\right] = 1740.49$$

$$\mathrm{SE}\,(\hat{\alpha}) = \sqrt{\mathrm{Var}\,(\hat{\alpha})}$$

$$= \sqrt{1740.49} \cong 41.72$$

3 – تقدير معامل التحديد المتعدد (R^2)

$$R_2 = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum Y_i^2}$$

$$= 1 - \frac{104.48}{700} = 0.85$$

ويعنى هذا أن 85% من التغير فى Y ينتج من التغير فى كل من X_1 , X_2 . أما الباقى وقدره 15% يرجع إلى التغير فى المتغيرات المستقلة الأخرى والتى لم يتضمنها النموذج .

4 – تقدير معامل التحديد المتعدد المُعدل $(\bar{R}^2)$.

$$\bar{R}^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{N - 1}{DF}$$

$$= 1 - (1 - 0.85) \left[\frac{7}{5} \right]$$

$$= 0.79$$

5 – تقدير معامل الارتباط المتعدد (R)

$$R_{Y.X_1X_2} = \sqrt{\frac{r^2_{X_1Y} + r^2_{X_2Y} - 2\, r_{X_1Y}\, r_{X_2Y}\, r_{X_1X_2}}{1 - r^2_{X_1X_2}}}$$

$$r_{X_1Y} = \frac{Cov\,(X_1\,,Y)}{S_{X_1}\,S_Y}$$

$$Cov\;(X_1\,,Y) = \frac{\sum x_{1i}\;Y_i}{N-1} = \frac{20}{7} \cong 2.86$$

$$S_{X_1} = \sqrt{\frac{\sum x^2_{1i}}{N-1}} = \sqrt{\frac{18}{7}} \cong 1.60$$

$$S_Y = \sqrt{\frac{\sum Y^2_i}{N-1}} = \sqrt{\frac{700}{7}} = 10.0$$

$$\therefore \quad r_{X_1Y} = \frac{2.86}{(1.60)\,(10.0)} = \frac{2.86}{16} \cong 0.18$$

$$r_{X_2Y} = \frac{Cov\,(X_2\,,Y)}{S_{X_2}\,S_Y}$$

$$Cov\ (X_2\ ,\ Y) = \frac{\sum x_{2i} Y_i}{N - 1} = \frac{225}{7} = 32.14$$

$$S_{X_2} = \sqrt{\frac{\sum x_{2i}^2}{N - 1}} = \sqrt{\frac{180}{7}} = 5.07$$

$$\therefore \quad r_{X_2 Y} = \frac{32.14}{(5.07)\ (10.0)} = \frac{32.14}{50.7} = 0.63$$

$$r_{X_1 X_2} = \frac{Cov\ (X_1\ ,\ X_2)}{S_{X_1} S_{X_2}}$$

$$Cov\ (X_1\ ,\ X_2) = \frac{\sum x_{1i}\ x_{2i}}{N - 1} = \frac{-33}{7} = -4.71$$

$$r_{X_1 X_2} = \frac{-4.71}{(1.60)\ (5.07)} = \frac{-4.71}{8.112} = -0.58$$

وبالتالى فإن :

$$R_{Y.X_1X_2} = \sqrt{\frac{(0.18)^2 + (0.63)^2 - [(2)\ (0.18)\ (0.63)\ (-0.58)]}{[1 - (-0.58)^2]}}$$

$$= \sqrt{\frac{0.560844}{0.6636}} = 0.92$$

ويعنى هذا أن هناك علاقة خطية موجبة قوية بين Y و X_1 , X_2 .

6 – تقدير معاملات الارتباط الجزئية

$$r_{YX_1 . X_2} = \frac{r_{YX_1} - r_{YX_2}\, r_{X_1X_2}}{\sqrt{(1 - r^2_{YX_2})\,(1 - r^2_{X_1X_2})}}$$

$$= \frac{(0.18) - [(0.63)\,(-0.58)]}{\sqrt{[1 - (0.63)^2]\,[1 - (-0.58)^2]}}$$

$$= \frac{0.5454}{\sqrt{0.4002}} = \frac{0.5454}{0.6326} = 0.86$$

$$r_{YX_2 . X_1} = \frac{r_{YX_2} - r_{YX_1}\, r_{X_1X_2}}{(1 - r^2_{YX_1})\,(1 - r^2_{X_1X_2})}$$

$$= \frac{(0.63) - [(0.18)\,(-0.58)]}{\sqrt{[1 - (0.18)^2]\,[1 - (-0.58)^2]}}$$

$$= \frac{0.7344}{\sqrt{0.6421}} = \frac{0.7344}{0.8013} = 0.92$$

$$r_{X_1X_2.Y} = \frac{r_{X_1X_2} - r_{YX_1}\, r_{YX_2}}{(1 - r^2_{YX_1})\,(1 - r^2_{YX_2})}$$

$$= \frac{(-0.58) - [(0.18)\,(0.63)]}{\sqrt{[1 - (0.18)^2]\,[1 - (0.63)^2]}}$$

$$= \frac{-0.6934}{\sqrt{0.5836}} = \frac{-0.6934}{0.7639} = -0.91$$

ويمكن حساب R^2 بإستخدام معاملات الارتباط البسيطة والجزئية كما يلى :

$$(32.3) \qquad R^2 = r^2_{YX_1} + (1 - r^2_{YX_1})\, r^2_{YX_2.X_1}$$

$$= (0.18)^2 + [1 - (0.18)^2]\,(0.92)^2$$

$$= 0.0324 + [(0.9676)\,(0.8464)]$$

$$= 0.03 + 0.82 = 0.85$$

أو

$$(33.3) \quad R^2 = r^2_{YX_2} + (1 - r^2_{YX_2})\, r^2_{YX_1 .X_2}$$
$$= (0.63)^2 + [1 - (0.63)^2]\, (0.86)^2$$
$$= 0.3969 + [(0.6031)\, (0.7396)]$$
$$= 0.40 + 0.45 = 0.85$$

9.3 استخدام المتغيرات الصورية فى نموذج الانحدار الخطى المتعدد

يتناول هذا البند ثلاثة نقاط : أولها طبيعة المتغيرات الصورية . وثانيها تقدير معاملات الانحدار فى حالة اشتمال النموذج على متغيرات مستقلة صورية . وثالثها تقدير معاملات الانحدار فى حالة اشتمال النموذج على متغيرات تابعة صورية .

1.9.3 طبيعة المتغيرات الصورية

المتغيرات الصورية Dummy Variables هى تلك المتغيرات التى تُعبر عن صفات معينة مثل اللون ، والديانة ، والجنسية ، والجنس أو النوع ، والحروب ، والفقر ، والزلازل . ولهذا تسمى المتغيرات الصورية بالمتغيرات الكيفية Qualitative Variables .

ويستخدم القيمة واحد صحيح (1) للدلالة على وجود صفة معينة والقيمة صفر (0) للدلالة على عدم وجود هذه الصفة . فمثلاً يُستخدم القيمة 1 للدلالة على أن الفرد ذكر والقيمة 0 للدلالة على أن الفرد أنثى وهكذا . ومن ثم فالمتغيرات التى تأخذ قيمها صفر وواحد صحيح تعتبر متغيرات صورية .

2.9.3 تقدير معاملات الانحدار فى حالة اشتمال النموذج على متغيرات مستقلة صورية

1 – تقدير معاملات الانحدار فى حالة اشتمال النموذج على متغير مستقل صورى واحد .

مثال تطبيقى

بفرض أن نموذج الانحدار الخطى المتعدد المراد تقديره كان كما يلى :

$$Y_i = \propto_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \propto_1 D_{1i} + \epsilon_i \ ,$$

$$(34.3) \quad i = 1, 2, \ldots , N$$

حيث أن :

Y = دخل الفرد

X_1 = عدد السكان ،

X_2 = عدد سنوات التعليم ،

D_1 = النوع أو الجنس ،

$$= \begin{cases} 1 & \text{إذا كان النوع أنثى} \\ 0 & \text{إذا كان النوع ذكر} \end{cases}$$

، $\propto_0$ = الحد الثابت

، β_1 = ميل العلاقة بين X_1 , Y . وهو يقيس أثر تغير السكان بوحدة واحدة على دخل الفرد .

، β_2 = ميل العلاقة بين X_2 , Y . وهو يقيس أثر تغير سنوات التعليم بوحدة واحدة على دخل الفرد .

، $\propto_1$ = الحد الثابت التفاضلى . وهو يقيس أثر النوع أو الجنس على دخل الفرد .

وإن بيانات هذا النموذج معطاة فى الجدول رقم (3.3) . المطلوب تقدير المعادلة رقم (34.3) مع ايضاح أثر النوع على دخل الفرد .

جدول رقم (3.3)

بيانات Y_i (بالجنيه) , X_{1i} , X_{2i} , D_{1i}

Y_i	X_{1i}	X_{2i}	D_{1i}
5000	80	9	1
6000	95	8	1
7000	100	10	1
8000	101	10	1
9000	103	11	1
10000	115	14	1
11000	105	15	1
12000	116	13	0
13000	120	16	0
14000	110	17	0

الحل :

لاحظ أن شكل دالة الدخل المقدرة فى حالة إذا كان النوع ذكراً يكون كما يلى :

$$\hat{Y}_i = \hat{\alpha}_0 + \hat{\beta}_1 X_{1i} + \hat{\beta}_2 X_{2i} + e_i \qquad (35.3)$$

أما شكل دالة الدخل المقدرة فى حالة إذا كان النوع أنثى فيكون كما يلى :

$$\hat{Y}_i = (\hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1) + \hat{\beta}_1 X_{1i} + \hat{\beta}_2 X_{2i} + e_i \qquad (36.3)$$

وبتطبيق طريقة المربعات الصغرى العادية على المعادلة رقم (34.3) ينتج ما يلى :

$$\hat{Y}_i = -3327.53 + 66.124\ X_{1i} + 567.467\ X_{2i} - 1517.61\ D_{1i}$$

ومن ثم يمكن تحديد ما يلى :

- **معادلة الدخل المقدرة فى حالة إذا كان النوع ذكراً** $(D_{1i} = 0)$.

$$\hat{Y}_i = -3327.53 + 66.124\ X_{1i} + 567.467\ X_{2i}$$

- **معادلة الدخل المقدرة فى حالة إذا كان النوع أنثى** $(D_{1i} = 1)$.

$$\hat{Y}_i = -4845.14 + 66.124\ X_{1i} + 567.467\ X_{2i}$$

وبالتالى يمكن القول أن السيدات تحقق دخلاً أقل من الرجال بمقدار 1518 جنيهاً تقريباً .

2 – تقدير معاملات الانحدار في حالة اشتمال النموذج على متغيرين مستقلين صوريين .

مثال تطبيقى

بفرض أن نموذج الانحدار الخطى المتعدد المراد تقديره كان كما يلى :

$$Y_i = \alpha_0 + \alpha_1 D_{1i} + \alpha_2 D_{2i} + \epsilon_i ,$$

$$i = 1, 2, \dots , N \qquad (37.3)$$

حيث أن :

Y = دخل الفرد

D_1 = درجة الدكتوراه ،

= 1 درجة الدكتوراه
0 درجة الماجستير
0 درجة البكالوريوس

D_2 = درجة الماجستير ،

= 1 درجة الماجستير
0 درجة الدكتوراه
0 درجة البكالوريوس

، α_0 = الحد الثابت

، α_1 = حد ثابت تفاضلى يقيس أثر الحصول على درجة الدكتوراه على متوسط الدخل

، α_2 = حد ثابت تفاضلى يقيس أثر الحصول على درجة الماجستير على متوسط الدخل

وإن بيانات هذا النموذج معطاة فى الجدول رقم (4.3) ، المطلوب تقدير المعادلة رقم (37.3) مع ايجاد متوسط دخل الفرد بعد الحصول على كل درجة علمية على حدة .

جدول رقم (4.3)

بيانات Y_i (بالجنيه) D_{1i} , D_{2i}

Y_i	D_{1i}	D_{2i}
5000	0	0
6000	0	0
7000	0	0
8000	0	1
9000	0	1
10000	0	1
11000	0	0
12000	1	0
13000	1	0
14000	1	0

الحل :

بتطبيق طريقة المربعات الصغرى العادية على المعادلة رقم (37.3) ينتج ما يلى :

$$\hat{Y}_i = 7250 + 5750\, D_{1i} + 1750\, D_{2i}$$

ومن ثم يمكن تحديد ما يلى :

- متوسط دخل الحاصلين على درجة البكالوريوس $(D_{1i} = D_{2i} = 0)$.

$$\hat{Y} = \hat{\propto}_0 = 7250 \tag{38.3}$$

- متوسط دخل الحاصلين على درجة الماجستير $(D_{1i} = 0)$.

$$\hat{Y}_i = \hat{\propto}_0 + \hat{\propto}_2 = 7250 + 1750 = 9000 \tag{39.3}$$

- متوسط دخل الحاصلين على درجة الدكتوراه $(D_{2i} = 0)$.

$$\hat{Y}_i = \hat{\propto}_0 + \hat{\propto}_1 = 7250 + 5750 = 13000 \tag{40.3}$$

3 - تقدير معاملات الانحدار فى حالة اشتمال النموذج على ثلاثة متغيرات مستقلة صورية

مثال تطبيقى

بفرض أن نموذج الانحدار الخطى المتعدد المراد تقديره كان كما يلى :

$$Y_i = \propto_0 + \propto_1 D_{1i} + \propto_2 D_{2i} + \propto_3 D_{3i} + \beta X_i + \in_i \tag{41.3}$$

حيث أن :

Y = الأرباح

، X = المبيعات

، $D_1 = \begin{cases} 1 & \text{للربع الثانى} \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$

، $D_2 = \begin{cases} 1 & \text{للربع الثالث} \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$

، $D_3 = \begin{cases} 1 & \text{للربع الرابع} \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$

وإن بيانات هذا النموذج معطاة فى الجدول رقم (5.3) . المطلوب :

1 – تقدير معاملات الانحدار للمعادلة رقم (41.3) . .

2 – ايضاح أثر العامل الموسمى فى الربع الثاني من السنة على الأرباح رياضياً وبيانياً .

جدول رقم (5.3)

بيانات Y_i , X_i بالمليون جنيه D_{1i} , D_{2i} , D_{3i}

السنة والربع	Y_i	X_i	D_{1i}	D_{2i}	D_{3i}
1965 - I	10503	114862	0	0	0
- II	12092	123968	1	0	0
- III	10834	121454	0	1	0
- IV	12201	131917	0	0	1
1966 - I	12245	129911	0	0	0
- II	14001	140976	1	0	0
- III	12213	137828	0	1	0
- IV	12820	145465	0	0	1
1967 - I	11349	136989	0	0	0
- II	12615	145126	1	0	0
- III	11014	141536	0	1	0
- IV	12730	151776	0	0	1
1968 - I	12539	148862	0	0	0
- II	14849	158913	1	0	0
- III	13203	155727	0	1	0
- IV	14947	168409	0	0	1
1969 - I	14151	162781	0	0	0
- II	15949	176057	1	0	0
- III	14024	172419	0	1	1
- IV	14315	183327	0	0	1
1970 - I	12381	170415	0	0	0
- II	13991	181313	1	0	0
- III	12174	176712	0	1	0
- IV	10985	180370	0	0	1

الحل :

1 - تقدير معاملات الانحدار

بتطبيق طريقة المربعات الصغرى العادية على المعادلة رقم (41.3) ينتج ما يلى :

$$\hat{Y}_i = 6688.38 + 1322.89\ D_{1i} - 217.80\ D_{2i} + 183.86\ D_{3i} + 0.04\ X_i$$

لاحظ أن معامل المبيعات - بعد الأخذ فى الاعتبار الأثر الموسمى - يشير إلى أن الزيادة فى المبيعات بجنيه واحد ، سوف تؤدى إلى زيادة الأرباح بمقدار 4 قروش . كما لاحظ أن هذا المعامل يظل كما هو فى كل ربع من كل سنة .

2 - إيضاح أثر العامل الموسمى فى الربع الثانى من السنة على الأرباح رياضياً وبيانياً .

لاحظ أن الربع الأول من السنة سوف يتم معالجته كأنه الربع الأساسى ، ومن ثم تكون معادلة الأرباح المقدرة فى الربع الأول من السنة $(D_{1i} = D_{2i} = D_{3i} = 0)$ كما يلى :

$$\hat{Y}_i = \hat{\alpha}_0 + \hat{\beta}\ X_i = 6688.38 + 0.04\ X_i \qquad (42.3)$$

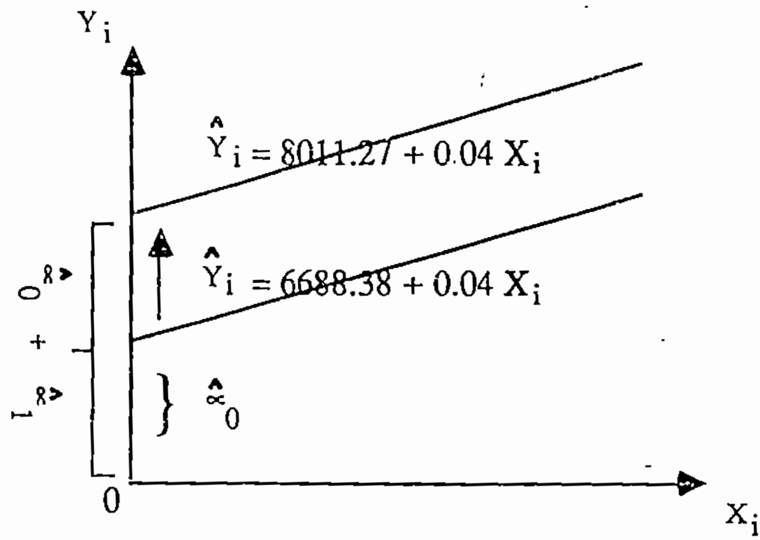
وبالتالى تكون معادلة الأرباح المقدرة بعد الأخذ فى الاعتبار الأثر الموسمى للربع الثانى من السنة $(D_{2i} = D_{3i} = 0)$ كما يلى :

$$\hat{Y}_i = (\hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1) + \hat{\beta}\ X_i$$

$$= (6688.38 + 1322.89) + 0.04\ X_i$$

$$= 8011.27 + 0.04 X_i \qquad (43.3)$$

ويوضح الشكل التالى المعادلتين (42.3) و (43.3) .



شكل رقم (1.3)
العلاقة بين Y_i , X_i

يتضح مما سبق أن هناك عامل موسمى فى الربع الثانى من كل سنة أدى إلى زيادة مستوى الأرباح . وقد تم التعبير عن ذلك بإنتقال دالة الأرباح بالكامل إلى أعلى .

3.9.3 تقدير معاملات الانحدار فى حالة اشتمال النموذج على متغيرات تابعة صورية

مثال تطبيقى

بفرض أن نموذج الانحدار المراد تقديره كان كما يلى[1] :

$$D_{1i} = \propto_0 + \propto_1 D_{2i} + \propto_2 D_{3i} + \in ,$$

$$i = 1, 2, \dots , N \qquad (44.3)$$

حيث أن :

$D_1 =$ الفقر

$= \begin{cases} 1 & \text{للفقر} \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$

، $D_2 =$ الجنس أو النوع

$= \begin{cases} 1 & \text{للأنثى} \\ 0 & \text{الذكر} \end{cases}$

، $D_3 =$ اللون

$= \begin{cases} 1 & \text{للأسود} \\ 0 & \text{للأبيض} \end{cases}$

---

(1) لاحظ أن النموذج الذى يكون المتغير التابع الخاص به متغير صورى تكون جميع متغيراته المستقلة متغيرات صورية أيضاً .

$\propto_0 =$ الحد الثابت ،

$\propto_1 =$ معامل D_{2i} . ويقيس هذا المعامل أثر النوع على احتمال حدوث الفقر .

$\propto_2 =$ معامل D_{3i} . ويقيس هذا المعامل أثر اللون على احتمال حدوث الفقر .

وإن بيانات هذا النموذج معطاة فى الجدول رقم (6.3) ، والمطلوب :

1 – تقدير معاملات الانحدار للمعادلة رقم (44.3) .

2 – ايضاح أثر كل من النوع واللون على احتمال تحقق الفقر .

جدول رقم (6.3)

بيانات D_{1i} , D_{2i} , D_{3i}

D_{1i}	D_{2i}	D_{3i}
1	1	0
1	1	1
1	1	1
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0

تابع جدول رقم (6.3)

D_{1i}	D_{2i}	D_{3i}
1	1	1
0	0	1
0	0	1
0	1	0
0	0	0
1	1	1
1	1	1
0	0	0
0	0	0
0	0	1
0	0	0
0	1	0
0	0	0
1	1	1
1	0	1
0	0	0
1	1	1
1	1	0
1	1	1
1	0	1
0	0	1
1	0	0
0	0	0

الحل :

1 – تقدير معاملات الانحدار للمعادلة رقم (44.3)

بتطبيق طريقة المربعات الصغرى العادية على المعادلة رقم (44.3) ينتج ما يلى :

$$\hat{D}_{1i} = .05 + 0.55\ D_{2i} + 0.35\ D_{3i}$$

ويطلق على المعادلة السابقة ، اصطلاح نموذج الاحتمال الخطى . ويتضح من هذه المعادلة ما يلى :

- إن معامل D_{2i} يساوى 0.55 ، ويعنى ذلك إن احتمال تحقق الفقر للسيدات أكبر من احتمال تحقق الفقر للرجال بـ 0.55 .
- إن معامل D_{3i} يساوى 0.35 ، ويعنى ذلك إن احتمال تحقق الفقر للفرد الأسود أكبر من احتمال تحقق الفقر للفرد الأبيض بـ 0.35 .

2 – ايضاح أثر كل من النوع واللون على احتمال تحقق الفقر :

- **احتمال تحقق الفقر لرب العائلة ذو اللون الأبيض**

$$D_{2i} = D_{3i} = 0 \quad , \quad D_{1i} = 1$$

$$\hat{D}_{1i} = \hat{\alpha}_0 = 0.05 \qquad (45.3)$$

- **احتمال تحقق الفقر لربة العائلة ذات اللون الأبيض**

$$D_{2i} = 1 \quad , \quad D_{3i} = 0 \quad , \quad D_{1i} = 1$$

$$\hat{D}_{1i} = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 = .05 + 0.55 = 0.60 \qquad (46.3)$$

- احتمال تحقق الفقر لربة العائلة ذات اللون الأسود

$\cdot\ D_{2i} = 1 \quad , \quad D_{3i} = 1 \quad , \quad D_{1i} = 1$

$$\hat{D}_{1i} = \hat{\propto}_0 + \hat{\propto}_1 + \hat{\propto}_3 \qquad (47.3)$$

$$= .05 + 0.55 + 0.35 = 0.95$$

10.3 تقدير معاملات انحدار النموذج غير الخطى المتعدد

مثال تطبيقى

بفرض أن نموذج الانحدار غير الخطى المتعدد المراد تقديره كان كما يلى :

$$Y_i = \propto X_{1i}^{\beta_1} \quad X_{2i}^{\beta_2} \quad ,$$

$$i = 1, 2, \ldots , N \qquad (48.3)$$

حيث أن :

$Y =$ الإنتاج الكلى (الناتج القومى الإجمالى الحقيقى بالمليون جنيه)

، $X_1 =$ عنصر العمل (عدد أيآم عمل الفرد بالمليون)

، $X_2 =$ عنصر رأس المال (المدخلات من رأس المال الحقيقى بالمليون جنيه).

، $\propto$ = الحد الثابت .

، β_1 = مرونة الإنتاج الكلى بالنسبة لعنصر العمل

$$\left[\frac{\Delta Y}{\Delta X_1} \cdot \frac{X_1}{Y}\right]$$

، β_2 = مرونة الإنتاج الكلى بالنسبة لعنصر رأس المال

$$\left[\frac{\Delta Y}{\Delta X_2} \cdot \frac{X_2}{Y}\right]$$

وإن بيانات هذا النموذج معطاة فى الجدول رقم (7.3) . المطلوب تقدير معاملات الانحدار لهذا النموذج .

جدول رقم (7.3)

بيانات Y_i , X_{1i} , X_{2i} ، 1958 - 1972 :

السنة	Y_i	X_{1i}	X_{2i}
1958	16607.7	275.5	17803.7
1959	17511.3	274.4	18096.8
1960	20171.2	269.7	18271.8
1961	20932.9	267.0	19167.3
1962	20406.0	267.8	19647.6
1963	20831.6	275.0	20803.5
1964	24806.3	283.0	22076.6
1965	26465.8	300.7	23445.2
1966	27403.0	307.5	24939.0
1967	28628.7	303.7	26713.7
1968	29904.5	304.7	29957.8
1969	27508.2	298.6	31585.9
1970	29035.5	295.5	33474.5
1971	29281.5	299.0	34821.8
1972	31535.8	288.1	41794.3

الحل :

لكى يمكن تقدير المعادلة رقم (48.3) بطريقة المربعات الصغرى العادية ، يجب تحويلها إلى معادلة خطية . ويتم ذلك بأخذ اللوغاريتم الطبيعى لطرفى المعادلة المراد تقديرها كما يلى :

$$\ln Y_i = \alpha + \beta_1 \ln X_{1i} + \beta_2 \ln X_{2i} \qquad (49.3)$$

وبوضع :

$$\ln Y_i = Y_i^* \quad ,$$

$$\ln X_{1i} = X_{1i}^* \quad ,$$

$$\ln X_{2i} = X_{2i}^*$$

فإن المعادلة رقم (49.3) تصبح كما يلى :

$$(50.3) \qquad Y_i^* = \propto + \beta_1 X_{1i}^* + \beta_2 X_{2i}^*$$

ويوضح الجدول التالى البيانات المستخدمة فى تقدير معاملات الانحدار.

جدول رقم (8.3)

البيانات المستخدمة فى تقدير معاملات الانحدار

السنة	Y_i^*	X_{1i}^*	X_{2i}^*
1958	9.718	5.619	9.787
1959	9.771	5.615	9.804
1960	9.912	5.597	9.813
1961	9.949	5.587	9.861
1962	9.924	5.590	9.886
1963	9.944	5.617	9.943
1964	10.119	5.645	10.002
1965	10.184	5.706	10.062
1966	10.218	5.729	10.124
1967	10.262	5.716	10.193
1968	10.306	5.719	10.308
1969	10.222	5.699	10.361
1970	10.276	5.689	10.419
1971	10.485	5.700	10.458
1972	10.359	5.663	10.641

وبتطبيق طريقة المربعات الصغرى العادية ، فإن المعادلة رقم (50.3) بعد تقديرها تصبح كما يلى :

$$\hat{Y}^*_i = -3.34 + 1.50\, X^*_{1i} + 0.49\, X^*_{2i}$$

ويتضح من هذه المعادلة ما يلى :

1 - إن مرونة الإنتاج الكلى بالنسبة لعنصر العمل تساوى 1.50 بينما مرونة الإنتاج بالنسبة لعنصر رأس المال تساوى 0.49 .

2 - إن الإنتاج الكلى يخضع لقانون الغلة المتزايدة (قانون النفقة المتناقصة) بسبب أن :

$$(\beta_1 + \beta_2) > 1$$

$$(1.50 + 0.49) > 1$$

ويعنى ذلك أن الزيادة فى المدخلات (عنصر العمل + عنصر رأس المال) بنسبة معينة سوف تؤدى إلى زيادة المخرجات (الإنتاج الكلى) بنسبة أكبر .

ويمكن الحصول على القيمة المقدرة الأولى للانتاج الكلى كما يلى :

$$\hat{Y}^*_{(1958)} = -3.34 + 1.50\,(5.619) + 0.49\,(9.787) = 9.884$$

أو

$\because$ العدد المقابل للوغاريتم الـ $9.884 = 19614.022$

$$\therefore \quad \hat{Y}_{(1958)} = 19614.022$$

وهكذا يمكن الحصول على باقى القيم المقدرة للإنتاج الكلى .

11.3 الملخص

1 - يتكون نموذج الانحدار المتعدد من متغير تابع وأكثر من متغير مستقل . وقد تم التركيز فى هذا الفصل على نموذج الانحدار الذى يتكون من متغير تابع ومتغيرين مستقلين فقط .

2 - إن افتراضات نموذج الانحدار الخطى المتعدد هى عبارة عن افتراضات نموذج الانحدار الخطى البسيط بإستثناء الافتراضات المتعلقة بوجود أكثر من متغير مستقل واحد فى النموذج .

3 - يتم تقدير نموذج الانحدار الخطى المتعدد بإستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية . ومن نتائج التقدير أمكن حساب عدة مفاهيم هى : التباين والخطأ المعيارى للقيم المقدرة لمعاملات الانحدار ، والتباين المقدر لحد الخطأ ، ومعامل التحديد المتعدد ، ومعامل التحديد المتعدد المُعدل ، ومعامل الارتباط المتعدد ، ومعاملات الارتباط الجزئية .

4 - المتغيرات الصورية هى متغيرات كيفية تُعبر عن صفات معينة . ويتم استخدام القيمة واحد صحيح للدلالة على وجود صفة معينة والقيمة صفر للدلالة على عدم وجود هذه الصفة . ويمكن أن تكون المتغيرات الصورية متغيرات تابعة أو متغيرات مستقلة .

5 - لا يمكن تقدير نموذج الانحدار غير الخطى إلا بعد تحويله إلى نموذج انحدار خطى . ويتم ذلك من خلال استخدام وحدات اللوغاريتم الطبيعى .

الفصل الرابع

4 النماذج الديناميكية
DYNAMIC MODELS

يخصص هذا الفصل لدراسة نوعين من النماذج الديناميكية : أولهما نموذج فترات الابطاء الموزعة Distributed Lag Model . وثانيهما النموذج ذاتى الانحدار Autoregressive Model .

فى نموذج فترات الابطاء الموزعة تعتمد القيمة الحالية للمتغير التابع على المجموع المرجح للقيم الحالية والسابقة للمتغيرات المستقلة . أما فى النموذج ذاتى الانحدار يكون أحد متغيراته المستقلة متغير تابع ذات فترة ابطاء معينة .

وينقسم هذا الفصل إلى خمسة نقاط : أولها أهمية دور الزمن أو فترات الابطاء فى علم الاقتصاد . وثانيها نموذج فترة الابطاء الموزع الهندسى لـ Koyck . وثالثها نموذج التوقع المكيف لـ Cagan . ورابعها نموذج التعديل الجزئى لـ Nerlove . وخامسها نموذج فترة الابطاء متعدد الحدود لـ Almon .

1.4 أهمية دورالزمن أو فترات الابطاء فى علم الاقتصاد

فى علم الاقتصاد ، كثيراً ما تحتوى بعض العلاقات الاقتصادية على

متغيرات ذات فترات ابطاء . فالإنفاق الإستهلاكى الشخصى مثلاً قد لا يعتمد على الدخل الشخصى المتاح للإنفاق فى السنة الحالية ، وإنما يعتمد على الدخل الشخصى المتاح للإنفاق فى هذه السنة وفى السنوات السابقة (فترات الابطاء) . ويمكن توضيح ذلك من خلال المعادلة التالية :

$$(1.4) \quad Y_i = \propto + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + \in_t$$

حيث أن :

Y = الإنفاق الإستهلاكى الشخصى

، X = الدخل الشخصى المتاح للإنفاق

، $\propto$ = معامل ثابت

، $\in$ = حد الخطأ

، t = السنة الحالية

، t_{-1} = السنة السابقة

، t_{-2} = السنة قبل السابقة

ويطلق على المعادلة رقم (1.4) نموذج فترات الابطاء الموزعة . وفى هذا النموذج تعتمد القيمة الحالية للمتغير التابع (Y_t) على المجموع المرجح للقيم الحالية والسابقة للمتغيرات المستقلة (X_t , X_{t-1} , X_{t-2}) وعلى حد الخطأ . ويلاحظ أن أثر الزيادة فى الدخل الشخصى المتاح للإنفاق على الإنفاق الإستهلاكى الشخصى يتم توزيعه عبر عدد من السنوات .

ومن ثم يكون الميل الحدى للاستهلاك قصير الأجل (الأثر قصير الأجل على الإنفاق الإستهلاكى الشخصى نتيجة زيادة الدخل الشخصى المتاح

للانفاق) مساوياً لـ β_0 . أما الميل الحدى للاستهلاك طويل الأجل (الأثر طويل الأجل على الإنفاق الإستهلاكى الشخصى نتيجة زيادة الدخل الشخصى المتاح للإنفاق) يكون مساوياً لـ $\beta_0 + \beta_1 + \beta_2$.

مثال تطبيقى

بفرض أن دالة الاستهلاك المقدرة كانت كما يلى :

$$Y_t = 55.02 + 0.4\ X_t + 0.3\ X_{t-1} + 0.2\ X_{t-2}$$

المطلوب ايجاد الأثر القصير والطويل الأجل على الإنفاق الإستهلاكى الشخصى نتيجة زيادة الدخل الشخصى المتاح للإنفاق بجنيه واحد .

الحل :

- الميل الحدى للاستهلاك قصير الأجل (الأثر القصير الأجل على الإنفاق الإستهلاكى الشخصى نتيجة زيادة الدخل الشخصى المتاح للإنفاق بجنيه واحد) = 0.4 . ويعنى ذلك أن زيادة فى الدخل الشخصى المتاح للإنفاق بجنيه واحد سوف تؤدى إلى زيادة الإنفاق الإستهلاكى الشخصى فى نفس سنة زيادة الدخل بمقدار 40 قرشاً .

- الميل الحدى للإستهلاك طويل الأجل (الأثر الطويل الأجل على الإنفاق الإستهلاكى الشخصى نتيجة زيادة الدخل الشخصى المتاح للإنفاق بجنيه واحد) = 0.4 + 0.3 + 0.2 = 0.9 . ويعنى ذلك أن زيادة الدخل الشخصى المتاح للإنفاق بمقدار جنيه واحد سوف تؤدى فى الأجل الطويل إلى زيادة الإنفاق الإستهلاكى الشخصى بمقدار 90 قرشاً .

2.4 نموذج فترة الإبطاء الموزع الهندسى لـ Koyck

Koyck's Geometric Lag Model

يتضح مما سبق أن هناك ثلاثة مشاكل تخص نماذج فترات الابطاء الموزعة هى :

1 – عدم وجود طريقة معروفة سلفاً لمعرفة أقصى طول يمكن لفترة الابطاء أن تصل إليه .

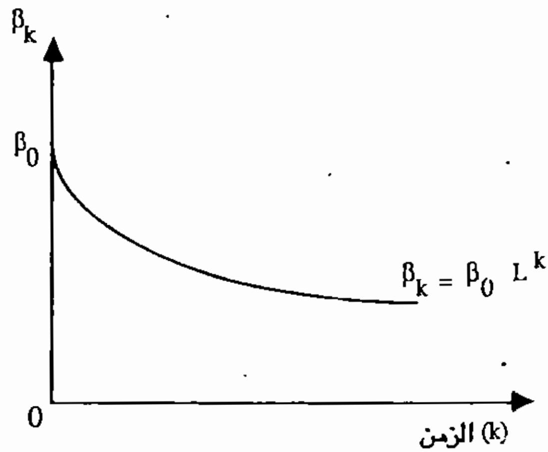
2 – إن زيادة طول فترة الابطاء تؤدى إلى زيادة عدد المتغيرات المستقلة . ومن ثم سوف تقل درجات الحرية .

3 – إن خلق متغيرات ذات فترات ابطاء يؤدى إلى تخفيض عدد المشاهدات المستخدمة فى التقدير .

إن أحد الوسائل المستخدمة لحل مشكلة تقدير نماذج فترات الابطاء الموزعة يتمثل فى افتراض أن أثر المتغير المستقل يتناقص هندسياً ويكون لـ βs نفس الإشارة .

$$(2.4) \quad \beta_k = \beta_0 L^k \qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots \quad 0 < L < 1$$

حيث k عبارة عن عدد سنوات فترة الابطاء . وتعرف المعادلة رقم (2.4) بنموذج Koyck . ويوضح الشكل رقم (1.4) هذا النموذج .



شكل رقم (1.4)
نموذج Koyck

ويلاحظ أنه لكى يتم الحصول على $\hat{\beta}_k$ .... $\hat{\beta}_1$ يجب معرفة كل من $\hat{\beta}_0$, $\hat{L}$ ، ويمكن الحصول على كل من β_0 , L من خلال تقدير المعادلة التالية :

$$Y_t = \propto (1 - L) + \beta_0 X_t + L \, Y_{t-1} + \in_t \tag{3.4}$$

ويطلق على هذه المعادلة اصطلاح النموذج ذاتى الانحدار بسبب أن أحد المتغيرات المستقلة لهذه المعادلة عبارة عن متغير تابع ذات فترة ابطاء سنة واحدة (Y_{t-1}) . لاحظ أن $\in_t$ تمثل حد الخطأ .

ويمكن الحصول على الأثر طويل الأجل (مجموع βs) من خلال المعادلة التالية :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \hat{\beta}_k = \hat{\beta}_0 \left(\frac{1}{1 - \hat{L}} \right) \tag{4.4}$$

حيث أن :

$\hat{L}$ = معدل التدهور أو التناقص Rate of Decline

، $1 - \hat{L}$ = سرعة التكيف أو التعديل Speed of Adjustment

لاحظ أن :

$$\hat{\beta}_1 = \hat{\beta}_0 - (1 - \hat{L})\,\hat{\beta}_0 \qquad (5.4)$$

$$\hat{\beta}_2 = \hat{\beta}_1 - (1 - \hat{L})\,\hat{\beta}_1 \qquad (6.4)$$

وهكذا يمكن الحصول على باقى قيم β .

مثال تطبيقى

بفرض أن المعادلة رقم (3.4) تم تقديرها وكانت كما يلى :

$$\hat{Y}_t = 5.25 + .078\ X_t + .889\ Y_{t-1}$$

المطلوب :

1 – ايجاد الأثر طويل الأجل للمتغيرات المستقلة على المتغير التابع .

2 – ايجاد قيمة β لـ 10 فترات زمنية .

الحل :

1 – ايجاد الأثر طويل الأجل للمتغيرات المستقلة على المتغير التابع .

$$\text{الأثر طويل الأجل} = 0.078\left(\frac{1}{1\ -\ .889}\right) = 0.702702$$

2 – ايجاد قيمة β لـ 10 فترات زمنية :

$$\hat{\beta}_1 = 0.078 - [(.111)(0.078)]$$
$$= 0.078 - .008658$$
$$= 0.069342$$

$$\hat{\beta}_2 = 0.069342 - [(.111)(0.069342)]$$
$$= 0.069342 - .007696962$$
$$= 0.061645$$

وهكذا يمكن الحصول على باقى قيم β خلال الـ 10 فترات زمنية [جدول رقم (1.4)] .

جدول رقم (1.4)

$\hat{\beta}_0$	0.078
$\hat{\beta}_1$	0.069342
$\hat{\beta}_2$	0.061645
$\hat{\beta}_3$	0.0548024
$\hat{\beta}_4$	0.0487194
$\hat{\beta}_5$	0.0433115
$\hat{\beta}_6$	0.0385039
$\hat{\beta}_7$	0.03423
$\hat{\beta}_8$	0.0304305
$\hat{\beta}_9$	0.0270527
$\hat{\beta}_{10}$	0.0240498

ملحوظة : يمكن للقارئ ايجاد قيم β حتى $\hat{\beta}_{25}$ بنفس الطريقة السابقة . وسوف يلاحظ في النهاية أن مجموع (من $\hat{\beta}_0$ حتى $\hat{\beta}_{25}$) يساوى الأثر طويل الأجل للمتغيرات المستقلة على المتغير التابع أى يساوى 0.7 تقريباً .

3.4 نموذج التوقع المكيف لـ Cagan

Cagan's Adaptive Expectation Model

يُستخدم نموذج التوقع المكيف بإنتشار فى النموذج ذاتى الانحدار الذى فيه يأخذ المتغير المستقل قيم متوقعة أو مثلى .

ويفرض أن نموذج التوقع المكيف كان كما يلى :

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t^* + \in_t \qquad (7.4)$$

حيث أن :

Y = الكمية المطلوبة من سلعة ما

، X^* = السعر المتوقع للسلعة

، t = الزمن

، $\in$ = حد الخطأ

ولهذا ، فإن الأفراد سوف يشتروا اليوم أكثر إذا ما توقعوا حدوث ارتفاع فى الأسعار فى المستقبل .

وبالإضافة إلى ذلك ، افترض أن الاسعار المتوقعة هى عبارة عن متوسط مرجح للاسعار فى الفترة الزمنية الحالية والاسعار المتوقعة فى الفترة الزمنية السابقة :

$$X_t^* = g X_t + (1 - g) X_{t-1}^* \qquad (8.4)$$

حيث تتراوح قيمة g بين الصفر والواحد الصحيح $(0 \leq g \leq 1)$. ويلاحظ أنه إذا كانت $g = 1$ فإن الاسعار المتوقعة تكون دائماً مساوية للاسعار الفعلية . وتُعرف g بمعامل التوقع Coefficient of Expectation .

مثال تطبيقى

يعطى الجدول رقم (2.4) بيانات عن السعر الفعلى لسلعة ما كمتغير مستقل (X) والكمية المطلوبة من هذه السلعة كمتغير تابع (Y) .

جدول رقم (2.4)

t	X	Y
1	125	30.6
2	140	31.6
3	130	31.3
4	155	33.2
5	145	33.5
6	163	35.2
7	170	36.7
8	182	38.6
9	173	39.0
10	192	40.8
11	203	42.7
12	178	41.9
13	163	40.2
14	182	40.7
15	175	40.4

المطلوب :

1 – هل يمكن تقدير المعادلة رقم (7.4) بإستخدام بيانات الجدول رقم (2.4) ؟ ولماذا ؟

2 – كيف يمكن ايجاد السعر المتوقع للسلعة ؟

الحل :

1 – لا يمكن تقدير المعادلة رقم (7.4) بإستخدام بيانات الجدول رقم (2.4) بسبب عدم وجود بيانات تخص السعر المتوقع (X_t^*) .

2 – يمكن ايجاد السعر المتوقع (X_t^*) من خلال الخطوات التالية :

– صياغة نموذج ذاتي الانحدار :

$$Y_t = g\beta_0 + g\beta_1 X_t + (1 - g) Y_{t-1} + \epsilon_t \qquad (9.4)$$

– تطبيق طريقة المربعات الصغرى العادية على المعادلة رقم (9.4) مستخدما بيانات الجدول رقم (2.4) .

$$\hat{Y}_t = 1.95825 + 0.0805855 X_t + 0.598679 Y_{t-1}$$

$$\because \quad (1 - \hat{g}) = 0.598679$$

$$\therefore \quad \hat{g} = 0.401321$$

$$\because \quad \hat{g}\,\hat{\beta}_0 = 1.95825$$

$$\therefore \quad \hat{\beta}_0 = \frac{1.95825}{0.401321} = 4.87951$$

$$\because \quad \hat{g}\,\hat{\beta}_1 = 0.0805855$$ ،

$$\therefore \quad \hat{\beta}_1 = \frac{0.0805855}{0.401321} = 0.20080$$

– استخدام المعادلة رقم (7.4) فى ايجاد X_t^* :

$$(10.4) \quad X_t^* = \frac{Y_t - \hat{\beta}_0}{\hat{\beta}_1}$$

$$X_1^* = \frac{30.6 - 4.87951}{0.20080} = 128$$

$$X_2^* = \frac{31.6 - 4.87951}{0.20080} = 133$$

وهكذا يمكن الحصول على باقى قيم X_t^* [جدول رقم 3.4)] .

جدول رقم (3.4)

t	X^*
1	128
2	133
3	132
4	141
5	143
6	151
7	158
8	168
9	170
10	179
11	188
12	184
13	176
14	178
15	177

4.4 نموذج التعديل الجزئى لـ Nerlove
Nerlove's Partial Adjustment Model

يطلق على نموذج التعديل الجزئى اصطلاح نموذج تعديل الرصيد The Stock Adjustment Model . فى نموذج التوقع المكيف كان المتغير

المستقل يأخذ قيم متوقعة أو مثلى . أما فى نموذج التعديل الجزئى فيأخذ المتغير التابع قيم متوقعة أو مثلى كما يلى :

$$Y^*_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \epsilon_t \qquad (11.4)$$

حيث أن :

Y^* = الرصيد الأمثل أو المخطط من رأس المال

، X = الناتج

، t = الزمن

، ϵ = حد الخطأ

ويلاحظ أن رصيد رأس المال فى الفترة الزمنية الحالية عبارة عن المتوسط المرجح لرصيد رأس المال المخطط ورصيد رأس المال فى الفترة الزمنية السابقة . ويمكن بيان ذلك بالمعادلة التالية :

$$Y_t = \delta Y^*_t + (1 - \delta) Y_{t-1} \qquad (12.4)$$

حيث تتراوح قيمة δ بين الصفر والواحد الصحيح $(1 \geq \delta \leq 0)$. ويلاحظ أنه إذا كانت $\delta = 1$. فإن الرصيد الفعلى لرأس المال سوف يكون دائماً مساوياً للرصيد المخطط منه . وتُعرف δ بمعامل التعديل Coefficient of Adjustment .

وبإحلال المعادلة رقم (11.4) داخل المعادلة رقم (12.4) ينتج ما يلى :

$$Y_t = \delta (\beta_0 + \beta_1 X_t + \epsilon_t) + (1 - \delta) Y_{t-1}$$

$$= \delta \beta_0 + \delta \beta_1 X_t + (1 - \delta) Y_{t-1} + \delta \epsilon_t \qquad (13.4)$$

ويطلق على هذه المعادلة اصطلاح نموذج التعديل الجزئى .

وبتقدير المعادلة رقم (13.4) يمكن الحصول على $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$ على النحو التالى :

$$\hat{\beta}_0 = \frac{(\hat{\delta}\,\hat{\beta}_0)}{\hat{\delta}} \tag{14.4}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{(\hat{\delta}\,\hat{\beta}_1)}{\hat{\delta}} \tag{15.4}$$

ومن ثم يمكن تقدير المعادلة رقم (11.4) كما يلى :

$$\hat{Y}_t^* = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_t + e_t \tag{16.4}$$

مثال تطبيقى

بفرض أن نموذج ما كان كما يلى :

$$Y^* = \beta_0 + \beta_1 X_t + \epsilon_t$$

حيث أن :

Y^* = الإنفاق الاستثمارى المخطط

، X = المبيعات

، t = الزمن

، ϵ = حد الخطأ

المطلوب استخدام نموذج تعديل الرصيد لتقدير المعاملات قصيرة وطويلة

الأجل لدالة الطلب على الإنفاق الاستثماري مستخدماً البيانات الواردة في الجدول رقم (4.4) .

جدول رقم (4.4)

الإنفاق الاستثماري (Y) والمبيعات (X) في القطاع الصناعي بالولايات المتحدة الأمريكية (بالبليون دولار) ، 1960 - 1973 .

السنة (t)	Y	X
1960	15.09	30.796
1961	14.33	30.896
1962	15.06	33.113
1963	16.22	35.032
1964	19.34	37.335
1965	23.44	41.003
1966	28.20	44.869
1967	25.51	46.449
1968	28.37	50.282
1969	31.68	53.555
1970	31.95	52.859
1971	29.99	55.917
1972	31.35	62.017
1973	38.01	71.398

الحل :

يمكن تحقيق المطلوب من خلال الخطوات التالية :

1 – صياغة نموذج تعديل الرصيد :

$$Y_t = \delta\beta_0 + \delta\beta_1 X_t + (1 - \delta) Y_{t-1} \qquad (17.4)$$

2 – تطبيق طريقة المربعات الصغرى العادية على المعادلة رقم (17.4) مستخدماً بيانات جدول رقم (4.4) :

$$\hat{Y}_t = - 1.648 + 0.3191 X_t + 0.5157 Y_{t-1} \qquad (18.4)$$

وتمثل هذه المعادلة دالة الطلب قصيرة الأجل المقدرة .

3 – ايجاد $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$:

من المعادلة رقم (18.4) يمكن الحصول على $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$ على النحو التالي:

$$\because \quad (1 - \hat{\delta}) = 0.5157$$

$$\therefore \quad \hat{\delta} = 0.4843$$

$$\because \quad \hat{\delta}\,\hat{\beta}_0 = - 1.648$$

$$\therefore \quad \hat{\beta}_0 = \frac{-1.648}{0.4843} = - 3.4028$$

$$\because \quad \hat{\delta}\,\hat{\beta}_1 = 0.3191$$

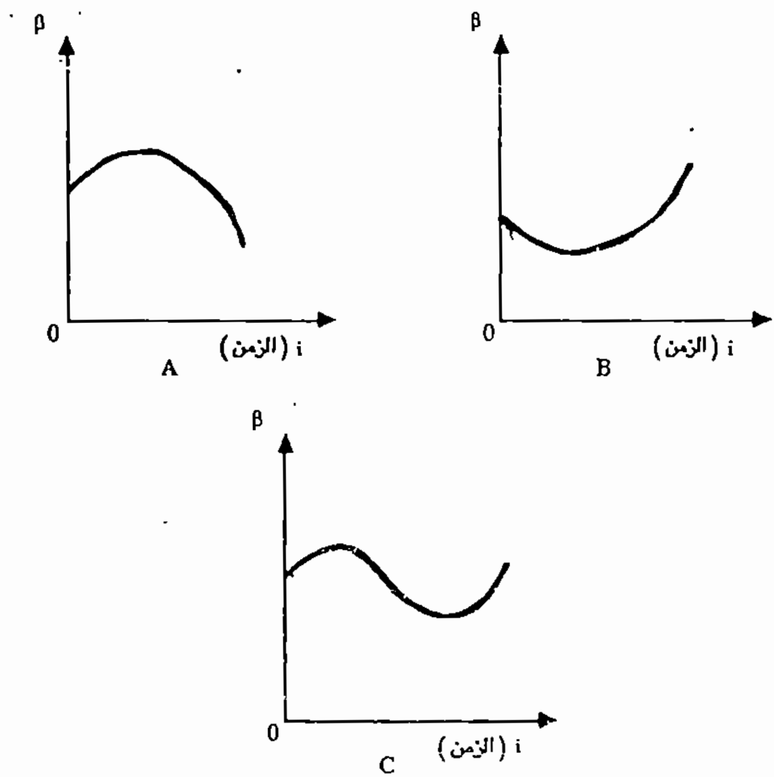
$$\therefore \quad \hat{\beta}_1 = \frac{0.3191}{0.4843} = 0.6589$$

وبالتالى تكون دالة الطلب طويلة الأجل المقدرة كما يلى :

$$\hat{Y}_t^* = -3.4028 + 0.6589\ X_t$$

5.4 نموذج فترة الإبطاء متعدد الحدود لـ Almon
The Almon Polynomial Lag Model

لقد تم انتقاد نموذج فترة الابطاء الموزع لـ Koyck لافتراضه أن $\hat{\beta}s$ تتناقص هندسياً عبر الزمن . ومن ثم قام Almon بتطوير ذلك بإفتراضه أن $\hat{\beta}s$ يمكن أن تأخذ عدة أنماط كما هو موضح بالشكل رقم (2.4) .



شكل رقم (2.4)

الأنماط المختلفة لنموذج فترة الابطاء متعدد الحدود لـ Almon

ففى الشكل رقم (A.2.4) تزيد $\hat{\beta}s$ فى فترة الابطاء الأولى ثم تقل بعد ذلك . وفى الشكل رقم (B.2.4) تقل $\hat{\beta}s$ فى فترة الابطاء الأولى والثانية ثم تزيد بعد ذلك . أما فى الشكل رقم (C.2.4) فإن $\hat{\beta}s$ تتقلب بين الزيادة والانخفاض عبر الزمن .

ولكى يمكن ايضاح أسلوب Almon ، افترض أن نموذج فترة الابطاء الموزع فى صورته اللانهائية كان كما يلى :

$$Y_t = \propto + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} +$$

$$\beta_2 X_{t-2} + ... + \beta_k X_{t-k} + \in_t \qquad (19.4)$$

حيث k عبارة عن عدد سنوات فترة الابطاء (وهى عبارة عن مجموع معاملات الانحدار بإستثناء الحد الثابت) .

ويمكن كتابة المعادلة السابقة كما يلى :

$$Y_t = \propto + \sum_{i=0}^{k} \beta_i X_{t-1} + \in_t \qquad (20.4)$$

وتتوقف β_i على درجة الحدود . فمثلاً بإفتراض حد من الدرجة الثانية تكون :

$$\beta_i = a_0 + a_1 i + a_2 i^2 \qquad (21.4)$$

وبإفتراض حد من الدرجة الثالثة تكون :

$$\beta_i = a_0 + a_1 i + a_2 i^2 + a_3 i^3 \qquad (22.4)$$

وبصفة عامة يمكن كتابة المعادلة رقم (21.4) على النحو التالى :

$$\beta_i = a_0 + a_1 i + a_2 i^2 + ... + a_m i^m \qquad (23.4)$$

حيث m عبارة عن درجة الحدود . ويجب – فرضـاً – أن تكون m أقل من k .

والآن ، بإفتراض أن الحد من الدرجة الثانية هو الأنسب يمكن بيان كيفية تقدير المعادلة رقم (19.4) من خلال الخطوات التالية :

1 – احلال المعادلة رقم (21.4) داخل المعادلة رقم (20.4) ينتج ما يلى :

$$Y = \propto \sum_{i=0}^{k} (a_0 + a_1 i + a_2 i^2) X_{t-i} + \in_t$$

$$= \propto + a_0 \sum_{i=0}^{k} X_{t-i} + a_1 \sum_{i=0}^{k} i\, X_{t-i}$$

$$+ a_2 \sum_{i=0}^{k} i^2\, X_{t-i} + \in_t \qquad (24.4)$$

وإذا كانت :

$$Z_{0t} = \sum_{i=0}^{k} X_{t-i}$$

$$Z_{1t} = \sum_{i=0}^{k} i\, X_{t-i} \qquad (25.4)$$

$$Z_{2t} = \sum_{i=0}^{k} i^2\, X_{t-i}$$

ومن ثم يمكن كتابة المعادلة رقم (24.4) كما يلى :

$$Y_t = \propto + a_0 Z_{0t} + a_2 Z_{1t} + a_3 Z_{2t} + \in_t \qquad (26.4)$$

2 – تطبيق طريقة المربعات الصغرى العادية على المعادلة رقم (26.4) مستخدماً البيانات المكونة لمتغيرات Z وبيانات Y :

$$\hat{Y}_t = \hat{\propto} + \hat{a}_0 Z_{0t} + \hat{a}_1 Z_{1t} + \hat{a}_2 Z_{2t} + e_t \qquad (27.4)$$

3 –تقدير β_s $(\hat{\beta}_k \ldots , \hat{\beta}_3, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0)$:

باستخدام a_s $(\hat{a}_2, \hat{a}_1, \hat{a}_0)$ يمكن تقدير β_sمن المعادلة رقم (21.4) أو من المعادلة رقم (23.4) بصفة عامة كما يلى :

$$\hat{\beta}_0 = \hat{a}_0$$
$$\hat{\beta}_1 = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 + \hat{a}_2$$
$$\hat{\beta}_2 = \hat{a}_0 + 2\,\hat{a}_1 + 4\,\hat{a}_2$$
$$\hat{\beta}_3 = \hat{a}_0 + 3\,\hat{a}_1 + 9\,\hat{a}_2$$

....

$$\hat{\beta}_k = \hat{a}_0 + k\,\hat{a}_1 + k^2\,\hat{a}_2$$

ومن ثم تكون المعادلة رقم (19.4) بعد تقديرها كما يلى :

$$(28.4) \quad \hat{Y}_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_0 X_t + \hat{\beta}_1 X_{t-1} + \hat{\beta}_2 X_{t-2} + \dots + \hat{\beta}_k X_{t-k} + e_t$$

ويلاحظ أنه قبل تطبيق أسلوب Almon يجب تحديد كل من درجة الحدود وطول فترة الابطاء .

مثال تطبيقى

يعطى الجدول رقم (5.4) بيانات عن المخزون (Y) والمبيعات (X) فى القطاع الصناعى بالولايات المتحدة الأمريكية ، كليهما بالمليون دولار ، خلال الفترة 1955 - 1974 .

جدول رقم (5.4)

المخزون (Y) والمبيعات (X) فى القطاع الصناعى بالولايات المتحدة الأمريكية (بالمليون جنيه) ، 1955 - 1974 .

السنة (t)	Y	X
1955	45069	26480
1956	50642	27740
1957	51871	28736
1958	50070	27280
1959	52707	30219
1960	53814	30796
1961	54939	30896

تابع جدول رقم (5.4)

السنة (t)	Y	X
1962	58213	33113
1963	60043	35032
1964	63383	37335
1965	68221	41003
1966	77965	44869
1967	84655	46449
1968	90875	50282
1969	97074	53555
1970	101645	52859
1971	102445	55917
1972	107719	62017
1973	120870	71398
1974	147135	82078

المطلوب استخدام أسلوب Almon فى تقدير المعادلة التالية :

$$Y_t = \propto + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + \beta_3 X_{t-3} + \in_t \quad (29.4)$$

الحل :

يمكن تحقيق المطلوب من خلال الخطوات التالية :

1 – افتراض ان β_i يمكن الحصول عليها من خلال الحد من الدرجة الثانية :

$$(30.4) \quad \beta_i = a_0 + a_1\, i + a_2\, i^2$$

2 – تقدير a_s $(\hat{a}_2, \hat{a}_1, \hat{a}_0)$:

ويتم ذلك على النحو التالى :

- صياغة المعادلة التالية :

$$Y_t = \propto + a_0 Z_{0t} + a_1 Z_{1t}$$

$$(31.4) \qquad + a_2 Z_{2t} + \in_t$$

حيث أن :

$$Z_{0t} = \sum_{i=0}^{3} X_{t-i}$$

$$= (X_t + X_{t-1} + X_{t-2} + X_{t-3}$$

$$Z_{1t} = \sum_{i=0}^{3} i \; X_{t-i}$$

$$(32.4) \qquad = (X_{t-1} + 2\, X_{t-2} + 3\, X_{t-3})$$

$$Z_{2t} = \sum_{i=0}^{3} i^2 X_{t-i}$$

$$= (X_{t-1} + 4\, X_{t-2} + 9\, X_{t-3})$$

$$Z_{0\,(1958)} = 27280 + 28736 + 27740 + 26480 = 110236$$

$$Z_{1\,(1958)} = 28736 + 2\,(27740) + 3\,(26480) = 163656$$

$$Z_{2\,(1958)} = 28736 + 4\,(27740) + 9\,(26480) = 378016$$

وهكذا يمكن الحصول على باقى قيم متغيرات Z [الجدول رقم (6.4)] .

جدول رقم (6.4)

السنة (t)	Z_0	Z_1	Z_2
1955	....	....	....
1956	....	....	....
1957	....	....	....
1958	110236	163656	378016
1959	113975	167972	391884
1960	117031	170987	397963
1961	119191	173074	397192
1962	125024	183145	426051
1963	129837	187293	433861
1964	136376	193946	445548
1965	146483	206738	475480
1966	158239	220769	505631
1967	169656	238880	544896
1968	182603	259196	594952
1969	195155	277787	639899
1970	203145	293466	672724
1971	212613	310815	719617
1972	224348	322300	749348
1973	242191	332428	761416
1974	271410	363183	822719

– تطبيق طريقة المربعات الصغرى العادية على المعادلة رقم (31.4) مستخدما بيانات الجدول رقم (6.4) وبيانات Y من الجدول رقم (5.4) .

$$\hat{Y}_t = -8140.7564 + 0.6612\ Z_{0t}$$

$$+ 0.9020\ Z_{1t} - 0.4322\ Z_{2t} \qquad (33.4)$$

3 – تقدير β_s $(\hat{\beta}_3, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0)$:

باستخدام المعاملات المقدرة للمعادلة رقم (33.4) أى $\hat{a}_s$ ، يمكن الحصول على $\hat{\beta}_s$ من المعادلة رقم (30.4) كما يلى :

$$\hat{\beta}_0 = \hat{a}_0 = 0.6612$$

$$\hat{\beta}_1 = (\hat{a}_0 + \hat{a}_1 + \hat{a}_2)$$

$$= (0.6612 + 0.9020 - 0.4322) = 1.1310$$

$$\hat{\beta}_2 = (\hat{a}_0 + 2\ \hat{a}_2 + 4\ \hat{a}_2)$$

$$= [0.6612 + 2\ (0.9020) - 4\ (0.4322)] = 0.7364$$

$$\hat{\beta}_3 = (\hat{a}_0 + 3\ \hat{a}_2 + 9\ \hat{a}_2)$$

$$= [0.6612 + 3\ (0.9020) - 9\ (0.4322)] = -0.5226$$

4 – تقدير المعادلة رقم (29.4) :

ومن ثم فإن المعادلة رقم (29.4) بعد تقديرها تكون كما يلى :

$$\hat{Y}_t = -8140.7564 + 0.6612\ X_t + 1.1310\ X_{t-1}$$

$$+ 0.7364\ X_{t-2} - 0.5226\ X_{t-3}$$

6.4 الملخص

1 – فى العلاقات الاقتصادية ، غالباً ما يتم أخذ عنصر الزمن فى الاعتبار عن طريق استخدام فترات الابطاء فى نماذج الانحدار .

2 – هناك نوعين من النماذج الديناميكية تم مناقشتهما فى هذا الفصل : أولهما نموذج فترات الابطاء الموزعة . وثانيهما النموذج ذاتى الانحدار .

3 – من أمثلة النماذج الديناميكية ، نموذج فترة الابطاء الموزع الهندسى لـ Koyck ، ونموذج التوقع المكيف لـ Cagan ، ونموذج التعديل الجزئى لـ Nerlove ، ونموذج فترة الابطاء متعدد الحدود لـ Almon .

4– يفضل استخدام نموذج Koyck إذا كانت النظرية الاقتصادية تشير إلى تناقص β_s هندسياً عبر الزمن ، بينما يفضل استخدام نموذج Almon إذا كانت النظرية الاقتصادية تشير إلى تناقص ثم تزايد (أو تزايد ثم تناقص) β_s .

5 – يفضل استخدام نموذج التوقع المكيف فى حالة إذا كان أحد المتغيرات متغير مستقل يأخذ قيم متوقعة أو مثلى ، بينما يفضل استخدام نموذج تعديل الرصيد (نموذج التعديل الجزئى) فى حالة إذا كان أحد المتغيرات متغير تابع يأخذ قيم متوقعة أو مثلى .

الفصل الخامس

5 نموذج المعادلات الآنية

SIMULTANEOUS EQUATIONS MODEL

فى الفصول السابقة تم تقدير معاملات نماذج الانحدار ذات المعادلة الواحدة . أما فى هذا الفصل سوف يتم التركيز على تقدير معاملات نماذج الانحدار التى تحتوى على أكثر من معادلة . ويطلق على نماذج الانحدار التى تحتوى على أكثر من معادلة اصطلاح نماذج المعادلات الآنية Simultaneous Equations Models .

ففى نموذج الانحدار ذو المعادلة الواحدة ، كانت العلاقة السببية من المتغير المستقل (أو المتغيرات المستقلة) إلى المتغير التابع . أما فى نموذج المعادلات الآنية ، فإن العلاقة السببية ستكون من المتغير المستقل (أو المتغيرات المستقلة) إلى المتغير التابع ، وكذلك من المتغير التابع إلى المتغير المستقل (أو المتغيرات المستقلة) .

وينقسم هذا الفصل إلى أربعة نقاط : أولها بعض المصطلحات المستخدمة . وثانيها أمثلة لنماذج المعادلات الآنية . وثالثها تمييز المعادلات السلوكية . ورابعها تقدير نماذج المعادلات الآنية .

1.5 بعض المصطلحات المستخدمة

1.1.5 المتغيرات الداخلية Endogenous Variables

المتغيرات الداخلية هى تلك المتغيرات التى تتحدد قيمتها داخل النموذج .

2.1.5 المتغيرات المحددة سلفاً

Predetermined Variables

تنقسم المتغيرات المحددة سلفاً إلى نوعين من المتغيرات هما :

1 - المتغيرات الخارجية Exogenous Variables

المتغيرات الخارجية هى تلك المتغيرات التى تتحدد قيمتها خارج النموذج .

2 - المتغيرات الداخلية ذات فترات الإبطاء

Lagged Endogenous Variables

المتغيرات الداخلية ذات فترات الابطاء عبارة عن متغيرات داخلية فى فترات زمنية سابقة . ومن ثم فهى تتحدد قيمتها داخل النموذج .

3.1.5 الشكل الهيكلى للنموذج

The Structural Form of the Model

يطلق اصطلاح الشكل الهيكلى للنموذج على المعادلات التى يتكون منها أى نموذج . وتنقسم المعادلات الهيكلية إلى نوعين من المعادلات هما :

1 - المعادلات السلوكية Behavioral Equations

المعادلات السلوكية هى تلك المعادلات التى تحتوى على معاملات ومن ثم فهى عبارة عن المعادلات المراد تقديرها .

2 - المعادلات التعريفية Definitional Equations

المعادلات التعريفية هى تلك المعادلات التى تُعَرِّف علاقة بين متغيرين أو أكثر . وهذه المعادلات لا تحتوى على معاملات ومن ثم لا يمكن تقديرها . لذلك تسمى المعادلات التعريفية بالمتطابقات .

4.1.5 الشكل المختزل للنموذج

The Reduced Form of the Model

يطلق اصطلاح الشكل المختزل للنموذج على المعادلات التى تشتق من حل الشكل الهيكلى للنموذج . ويلاحظ أن معادلات الشكل المختزل تجعل كل متغير داخلى على حدة دالة فى جميع المتغيرات المحددة سلفاً للنموذج .

2.5 أمثلة لنماذج المعادلات الآنية

1.2.5 نموذج الطلب والعرض

يتكون نموذج الطلب والعرض لسلعة ما من المعادلات التالية :

$$(1.5) \quad Q_t^d = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \epsilon_{1t}$$

$$(2.5) \quad Q_t^s = \beta_0 + \beta_1 P_t + \epsilon_{2t}$$

$$(3.5) \quad Q_t^d = Q_t^s \quad , \qquad t = 1, 2, \dots, N$$

حيث أن :

Q^d = الكمية المطلوبة من السلعة

، Q^s = الكمية المعروضة من السلعة

، P = سعر السلعة

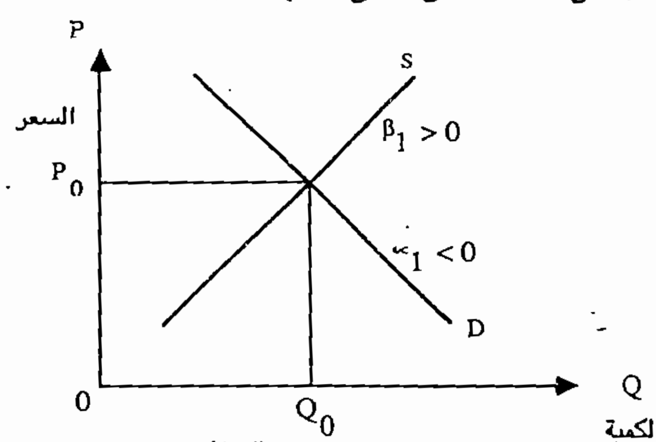
، ϵ_1 = حد الخطأ لدالة الطلب

، ϵ_2 = حد الخطأ لدالة العرض.

، t = الزمن

، N = عدد المشاهدات

ويوضح الشكل التالى نموذج الطلب والعرض .



شكل رقم (1.5)

نموذج الطلب والعرض

ويتضح من هذا الشكل ما يلى :

1 – إن النموذج محل العرض خطى ، ولذلك أخذ كل من منحنى الطلب (D) ومنحنى العرض (S) شكل الخط المستقيم .

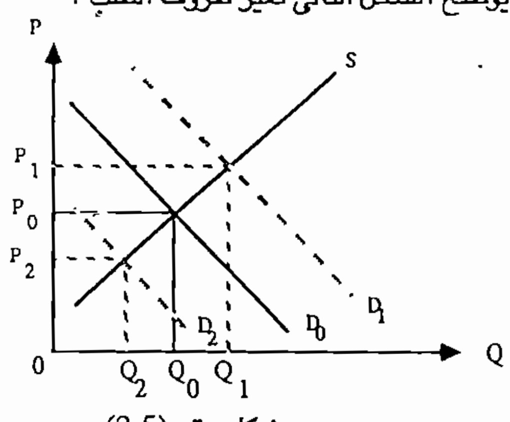
2 – إن منحنى الطلب ذو ميل سالب $(\propto_1 < 0)$. ويرجع ذلك لوجود علاقة عكسية بين P كمتغير مستقل و Q^d كمتغير تابع ، بمعنى إذا زاد P فإن Q^d سوف تقل والعكس بالعكس .

3 – إن منحنى العرض ذو ميل موجب $(\beta_1 > 0)$. ويرجع ذلك لوجود علاقة طردية بين P كمتغير مستقل و Q^s كمتغير تابع ، بمعنى إذا زاد P فإن Q^s سوف تزيد والعكس صحيح .

4 – يتحدد كل من السعر التوازنى (P_0) والكمية التوازنية (Q_0) عندما $Q_t^d = Q_t^s$ أى عندما تتقاطع D مع S .

5 – إن جميع متغيرات النموذج تعتبر متغيرات داخلية . وذلك لأن كل من Q^d, Q^s يتحدد بواسطة P ، و P تتحدد عندما $Q_t^d = Q_t^s$.

كما يوضح الشكل التالى تغير ظروف الطلب .



شكل رقم (2.5)

تغير ظروف الطلب

يتضح من هذا الشكل ما يلى :

1 – يقصد بتغير ظروف الطلب التغير فى Q^d نتيجة تغير أياً من المتغيرات الأخرى المؤثرة على Q^d ماعدا سعر السلعة . ويتم التعبير عن ذلك بإنتقال منحنى الطلب بالكامل إلى اليمين فى حالة الزيادة وإلى اليسار فى حالة النقصان .

2 – تشمل $\in_{1t}$ كل المتغيرات الأخرى التى تؤثر على Q^d والتى لم تؤخذ فى الاعتبار فى المعادلة رقم (1.5) مثل الدخل النقدى والثروة وأذواق المستهلكين . ومن ثم فإن التغير فى أياً من هذه المتغيرات سوف يؤدى إلى تغير $\in_{1t}$. وبالتالى فإن التغير فى $\in_{1t}$ سوف يترتب عليه انتقال منحنى الطلب بالكامل مؤدياً إلى تغير كل من Q , P . فمثلاً إذا زاد الدخل النقدى ، فإن $\in_{1t}$ سوف تكون موجبة $(\in_{1t} > 0)$. ومن ثم سوف ينتقل منحنى الطلب بالكامل إلى اليمين من D_0 إلى D_1 . وبالتالى سوف يزيد P من P_0 إلى P_1 وتزيد Q من Q_0 إلى Q_1. أما إذا انخفض الدخل النقدى ، فإن $\in_{1t}$ سوف تكون سالبة $(\in_{1t} < 0)$. ومن ثم سوف ينتقل منحنى الطلب بالكامل إلى اليسار من D_0 إلى D_2 . وبالتالى سوف يقل P من P_0 إلى P_2 وتقل Q من Q_0 إلى Q_2 .

3 – يتضح مما سبق ، أن هناك علاقة بين $\in_{1t}$, P . ومن ثم إذا تم إجراء انحدار Q^d على P كما فى المعادلة رقم (1.5) ، فإن أحد افتراضات نموذج الانحدار الخطى سوف يُسقط . ويتمثل هذا الافتراض فى عدم وجود علاقة بين المتغير المستقل (أو المتغيرات المستقلة) وحد الخطأ [1] .

وبطريقة مماثلة ، فإن التغير فى $\in_{2t}$ [بسبب تغير أياً من المتغيرات

---

(1) راجع ما تقدم البنود التالية : (2.2) , (2.3) .

الأخرى التى تؤثر على Q^s والتى لم تؤخذ فى الاعتبار فى المعادلة رقم (2.5) مثل التغير التكنولوجى والقيود المفروضة على الواردات] سوف يترتب عليه انتقال منحنى العرض بالكامل مؤدياً إلى تغير كل من Q , P . وبالتالى إذا تم إجراء انحدار Q^s على P كما فى المعادلة رقم (2.5) ، فسوف يُسقط الافتراض القائل بعدم وجود علاقة بين المتغير المستقل (أو المتغيرات المستقلة) وحد الخطأ كما سبق ذكره . ومن ثم لا يمكن استخدام طريقة المربعات الصغرى العادية فى تقدير المعادلتين (1.5) , (2.5) كل على حدة .

2.2.5 النموذج الكينزى لتحديد الدخل القومى

يمكن ايضاح نموذج كينز لتحديد الدخل القومى بواسطة النموذج المبسط التالى :

$$(4.5) \quad C_t = \propto + \beta\, Y_t + \in_t$$

$$(5.5) \quad Y_t = C_t + I_t + G_t \quad , \quad t = 1, 2, \ldots , N$$

حيث أن :

- المتغيرات الداخلية هى :

C = الإنفاق الاستهلاكى

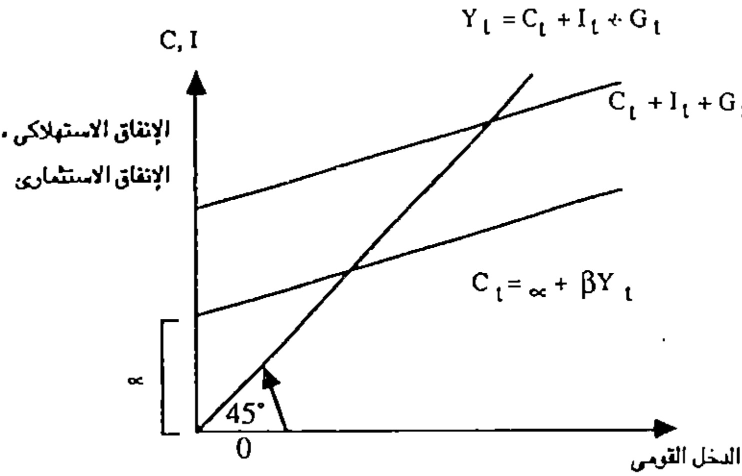
، Y = الدخل القومى

- المتغيرات الخارجية هى :

I = الإنفاق الاستثمارى

، G = الإنفاق الحكومى

ويوضح الشكل التالى نموذج كينز لتحديد الدخل القومى .



شكل رقم (3.5)

النموذج الكينزى لتحديد الدخل القومى

ويتضح من هذا الشكل ما يلى :

1 – إن ميل دالة الاستهلاك موجب $(\beta > 0)$. ويرجع ذلك لوجود علاقة طردية بين Y كمتغير مستقل و C كمتغير تابع ، بمعنى إذا زاد Y فإن C سوف تزيد والعكس صحيح . وتتراوح قيمة β – طبقاً للنظرية الاقتصادية – بين الصفر والواحد الصحيح أى $0 < \beta_1 < 1$.

2 – تحدد المعادلة رقم (5.5) أو متطابقة الدخل القومى أن الدخل القومى عبارة عن مجموع كل من الإنفاق الاستهلاكى والإنفاق الاستثمارى والإنفاق الحكومى . لاحظ أن أى نقطة على خط °45 تعنى تساوى الـ Y_t بـ $(C_t + I_t + G_t)$.

3 – تشمل $\in_t$ كل المتغيرات الأخرى التى تؤثر على C والتى لم تؤخذ فى الاعتبار فى المعادلة رقم (4.5) مثل توزيع الدخل وتوقعات الاسعار واسعار الفائدة . ومن ثم فإن التغير فى أياً من هذه المتغيرات سوف يؤدى إلى تغير $\in_t$. وبالتالى فإن التغير فى $\in_t$ سوف يترتب عليه انتقال دالة الاستهلاك بالكامل مؤدياً إلى تغير Y . ومن ثم يرتبط Y_t بـ $\in_t$. ولهذا لا يمكن استخدام طريقة المربعات الصغرى العادية فى تقدير المعاملات $\propto$, β .

3.2.5 نموذج الأجر النقدى – السعر

يمكن ايضاح نموذج الأجر النقدى وتحديد السعر كما يلى :

$$(6.5) \quad \dot{W}_t = \propto_0 + \propto_1 UN_t + \propto_2 \dot{P}_t + \in_{1t}$$

$$(7.5) \quad \dot{P}_t = \beta_0 + \beta_1 \dot{W}_t + \beta_2 \dot{R}_t + \beta_3 \dot{M}_t + \in_{2t}$$

$$t = 1, 2, \ldots, N$$

حيث أن :

– المتغيرات الداخلية هى :

$\dot{W}$ = معدل التغير فى الأجور النقدية

، $\dot{P}$ = معدل التغير فى الاسعار

– المتغيرات الخارجية هى :

UN = معدل البطالة

، $\dot{R}$ = معدل التغير فى تكلفة رأس المال

، $\dot{M}$ = معدل التغير فى سعر المادة الخام المستوردة

وحيث أن $\dot{P}$ متغير مستقل فى معادلة الأجر و $\dot{W}$ متغير مستقل فى معادلة السعر ، فإن المتغيرات المستقلة سوف ترتبط بحدود الخطأ $(\in_{1t}, \in_{2t})$. وبالتالى لا يمكن استخدام طريقة المربعات الصغرى العادية فى التقدير .

3.5 تمييز المعادلات السلوكية

قبل اختيار طريقة تقدير نموذج المعادلات الآنية ، يجب أولاً تمييز المعادلات السلوكية لهذا النموذج[1] ، ويرتبط التمييز بتقدير معادلات الانحدار . ويتم تمييز المعادلات السلكوية بطريقتين : أولهما التمييز من خلال الشكل المختزل للنموذج . وثانيهما التمييز من خلال الشكل الهيكلى للنموذج .

1.3.5 التمييز من خلال الشكل المختزل للنموذج

إن التمييز من خلال الشكل المختزل للنموذج يرتبط بمدى إمكانية الحصول على معاملات الانحدار المقدرة للمعادلات السلوكية من معاملات الانحدار المقدرة لمعادلات الشكل المختزل .

ويمكن التفرقة بين ثلاثة حالات فى هذا المجال كما يلى :-

1 - إن المعادلة السلوكية سوف تكون محددة Identified ، إذا كان يمكن

(1) لاحظ أن مشكلة التمييز ترتبط فقط بالمعادلات السلوكية دون غيرها من المعادلات .

الحصول من معاملات الانحدار المقدرة لمعادلات الشكل المختزل على قيمة مقدرة واحدة لكل معامل من معاملات انحدار هذه المعادلة .

2 – إن المعادلة السلوكية سوف تكون غير محددة Unidentified ، إذا كان لا يمكن الحصول من معاملات الانحدار المقدرة لمعادلات الشكل المختزل على تقديرات لمعاملات انحدار هذه المعادلة .

3 – إن المعادلة السلوكية سوف تكون محددة أكثر مما ينبغى Overidentified ، إذا كان يمكن الحصول من معاملات الانحدار المقدرة لمعادلات الشكل المختزل على أكثر من قيمة مقدرة واحدة لمعامل أو أكثر من معاملات انحدار هذه المعادلة .

أمثلة تطبيقية[1]

– المثال الأول

المطلوب إجراء تمييز للمعادلات السلوكية من خلال الشكل المختزل للنموذج الهيكلى التالى :

$$Y_1 = \propto_0 + \propto_1 X_1 + \beta_1 X_2 \tag{8.5}$$

$$Y_2 = \propto_2 + \propto_3 X_1 + \beta_2 X_3 \tag{9.5}$$

$$Y_1 = Y_2 = Y \tag{10.5}$$

الحل :

يمكن ايضاح خطوات تمييز المعادلات السلوكية من خلال الشكل المختزل

1) لبساطة العرض ، سوف يتم تجاهل كل من $\in$, t .

للنموذج على النحو التالى :

1 – ايجاد الشكل المختزل للنموذج

– **اشتقاق معادلة الشكل المختزل لـ X_1 .**

$$\because \quad Y_1 = Y_2$$

$$\therefore \quad \alpha_0 + \alpha_1 X_1 + \beta_1 X_2 = \alpha_2 + \alpha_3 X_1 + \beta_2 X_3$$

$$\alpha_1 X_1 - \alpha_3 X_1 = -\alpha_0 + \alpha_2 - \beta_1 X_2 + \beta_2 X_3$$

$$X_1 (\alpha_1 - \alpha_3) = \alpha_2 - \alpha_0 - \beta_1 X_2 + \beta_2 X_3$$

$$\therefore \quad X_1 = \left(\frac{\alpha_2 - \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_3}\right) - \left(\frac{\beta_1}{\alpha_1 - \alpha_3}\right) X_2$$

$$+ \left(\frac{\beta_2}{\alpha_1 - \alpha_3}\right) X_3 \qquad (11.5)$$

– **اشتقاق معادلة الشكل المختزل لـ Y .**

بالتعويض بقيمة X_1 فى المعادلة رقم (8.5) أو المعادلة رقم (9.5) يتم الحصول على معادلة الشكل المختزل لـ Y كما يلى :

$$Y = \alpha_0 + \alpha_1 \left[\left(\frac{\alpha_2 - \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_3}\right) - \left(\frac{\beta_1}{\alpha_1 - \alpha_3}\right) X_2 \right.$$

$$+ \left(\frac{\beta_2}{\alpha_1 - \alpha_3}\right) X_3] + \beta_1 X_2$$

$$= \alpha_0 + \left[\frac{\alpha_1(\alpha_2 - \alpha_0)}{\alpha_1 - \alpha_3}\right] - \left[\frac{\alpha_1 \beta_1}{\alpha_1 - \alpha_3}\right] X_2$$

$$+ \left[\frac{\alpha_1 \beta_2}{\alpha_1 - \alpha_3}\right] X_3 + \beta_1 X_2$$

$$= \left[\frac{\alpha_0 \alpha_1 - \alpha_0 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_0 \alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_3}\right] -$$

$$\left[\frac{\alpha_1 \beta_1 - \alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_1}{\alpha_1 - \alpha_3}\right] X_2 +$$

$$\left[\frac{\alpha_1 \beta_2}{\alpha_1 - \alpha_3}\right] X_3$$

$$\therefore \quad Y = \left[\frac{\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_0 \alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_3}\right] - \left[\frac{\alpha_3 \beta_1}{\alpha_1 - \alpha_3}\right] X_2 +$$

$$\left[\frac{\alpha_1 \beta_1}{\alpha_1 - \alpha_3}\right] X_3 \qquad (12.5)$$

2 – وضع معادلات الشكل المختزل فى الشكل التالى :

$$(13.5) \qquad X_1 = c_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3$$

$$(14.5) \qquad Y = c_4 + c_5 X_2 + c_6 X_3$$

حيث أن :

$$c_1 = \frac{\alpha_2 - \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_3} \quad , \qquad c_2 = \frac{-\beta_1}{\alpha_1 - \alpha_3} \quad ,$$

$$c_3 = \frac{\beta_2}{\alpha_1 - \alpha_3} \quad , \qquad c_4 = \frac{\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_0 \alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_3} \quad ,$$

$$c_5 = \frac{-\alpha_3 \beta_1}{\alpha_1 - \alpha_3} \quad , \qquad c_6 = \frac{\alpha_1 \beta_2}{\alpha_1 - \alpha_3}$$

3 – تمييز المعادلات السلوكية :

يمكن الحصول على قيمة مقدرة واحدة لكل معامل من معاملات انحدار المعادلتين (8.5) , (9.5) من خلال معاملات الانحدار المقدرة لمعادلات الشكل المختزل كما يلى :

$$(15.5) \qquad \alpha_1 = \frac{c_6}{c_3}$$

$$(16.5) \qquad \alpha_3 = \frac{c_5}{c_2}$$

$$(17.5) \qquad \beta_1 = -c_2 (\alpha_1 - \alpha_3)$$

$$(18.5) \qquad \beta_2 = c_3 (\alpha_1 - \alpha_3)$$

$$(19.5) \qquad \alpha_0 = c_4 - \alpha_1 c_1$$

$$(20.5) \quad \alpha_2 = c_4 - \alpha_3 c_1$$

ومن ثم يمكن القول أن المعادلات السلوكية للنموذج تكون محددة .

المثال الثانى

المطلوب إجراء تمييز للمعادلات السلوكية للنموذج التالى :

$$(21.5) \quad Y_1 = \alpha_0 + \alpha_1 X_1 + \beta_1 X_2$$

$$(22.5) \quad Y_2 = \alpha_2 + \alpha_3 X_1$$

$$(23.5) \quad Y_1 = Y_2 = Y$$

الحل :

معادلات الشكل المختزل هى :

$$(24.5) \quad X_1 = \left(\frac{\alpha_2 - \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_3}\right) - \left(\frac{\beta_1}{\alpha_1 - \alpha_3}\right) X_2$$

$$(25.5) \quad Y = \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_0 \alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_3}\right) - \left(\frac{\alpha_3 \beta_1}{\alpha_1 - \alpha_3}\right) X_2$$

وبالتعبير عن معادلات الشكل المختزل فى الشكل التالى :

$$(26.5) \quad X_1 = c_1 + c_2 X_2$$

$$(27.5) \quad Y = c_3 + c_4 X_2$$

حيث أن :

$$c_1 = \frac{\alpha_2 - \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_3} \quad , \quad c_2 = \frac{-\beta_1}{\alpha_1 - \alpha_3} \quad ,$$

$$c_3 = \frac{\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_0 \alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_3} \quad , \quad c_4 = \frac{-\alpha_3 \beta_1}{\alpha_1 - \alpha_3}$$

فإن معاملات انحدار المعادلة رقم (22.5) يمكن تقديرها من معاملات الانحدار المقدرة لمعادلات الشكل المختزل كما يلى :

$$(28.5) \qquad \alpha_3 = \frac{c_4}{c_2}$$

$$(29.5) \qquad \alpha_2 = c_3 - \alpha_3 \, c_1$$

أما معاملات انحدار المعادلة رقم (21.5) فلا يمكن الحصول عليها من معاملات الانحدار المقدرة لمعادلات الشكل المختزل .

ومن ثم فإن المعادلة رقم (22.5) تكون محددة . أما المعادلة رقم (21.5) فتكون غير محددة .

- **المثال الثالث**

المطلوب إجراء تمييز للمعادلات السلوكية للنموذج التالى :

$$(30.5) \qquad Y_1 = \alpha_0 + \alpha_1 X_1$$

$$(31.5) \qquad Y_2 = \alpha_2 + \alpha_3 X_1 + \beta_1 X_2 + \beta_2 X_3$$

$$(32.5) \qquad Y_1 = Y_2 = Y$$

الحل :

معادلات الشكل المختزل هى :

$$X_1 = [\frac{\alpha_2 - \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_3}] + [\frac{\beta_1}{\alpha_1 - \alpha_3}] X_2$$

$$+ [\frac{\beta_2}{\alpha_1 - \alpha_3}] X_3 \qquad (33.5)$$

$$Y = [\frac{\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_0 \alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_3}] + [\frac{\alpha_1 \beta_1}{\alpha_1 - \alpha_3}] X_2$$

$$+ [\frac{\alpha_1 \beta_2}{\alpha_1 - \alpha_3}] X_3 \qquad (34.5)$$

أو :

$$X_1 = c_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3 \qquad (35.5)$$

$$Y = c_4 + c_5 X_2 + c_6 X_3 \qquad (36.5)$$

ويلاحظ أن α_1 سوف يكون لها قيمتين مقدرتين هما :

$$\alpha_1 = \frac{c_5}{c_2} \qquad (37.5)$$

$$\alpha_1 = \frac{c_6}{c_3} \qquad (38.5)$$

حيث أن المعادلة رقم (37.5) لا يمكن أن تساوى المعادلة رقم (38.5) ، فإن $\propto_0$ سوف يكون لها قيمتين مقدرتين أيضاً :

$$\propto_0 = c_4 - \propto_1 c_1 \qquad (39.5)$$

ومن ثم فإن المعادلة رقم (30.5) تكون محددة أكثر مما ينبغى . أما المعادلة رقم (31.5) فتكون غير محددة بسبب عدم القدرة على الحصول على معاملات الانحدار المقدرة الخاصة بها من معاملات الانحدار المقدرة لمعادلات الشكل المختزل .

- **المثال الرابع**

بفرض أن نموذج تحديد الدخل القومى لكينز كان كما يلى :

$$C = \propto_0 + \propto_1 Y \qquad (40.5)$$

$$Y = C + I + G \qquad (41.5)$$

حيث أن :

C = الإنفاق الاستهلاكى

، Y = الدخل القومى

، I = الإنفاق الاستثمارى

، G = الإنفاق الحكومى

- المطلوب :

1- اشتقاق معادلات الشكل المختزل لهذا النموذج .

2– ايجاد أثر زيادة الإنفاق الحكومى بمقدار 100 مليون جنيه على كل من الإنفاق الاستهلاكى والدخل القومى إذا علمت أن 80. = $\propto_1$.

الحل :

1 – اشتقاق معادلات الشكل المختزل .

$$C = \propto_0 + \propto_1 [C + I + G]$$

$$= \propto_0 + \propto_1 C + \propto_1 I + \propto_1 G$$

$$C - \propto_1 C = \propto_0 + \propto_1 I + \propto_1 G$$

$$C (1 - \propto_1) = \propto_0 + \propto_1 I + \propto_1 G$$

$$\therefore \; C = \left(\frac{\propto_0}{1 - \propto_1}\right) + \left(\frac{\propto_1}{1 - \propto_1}\right) I$$

$$+ \left(\frac{\propto_1}{1 - \propto_1}\right) G \qquad (42.5)$$

$$Y = \propto_0 + \propto_1 Y + I + G$$

$$Y - \propto_1 Y = \propto_0 + I + G$$

$$Y (1 - \propto_1) = \propto_0 + I + G$$

$$\therefore \; Y = \left(\frac{\propto_0}{1 - \propto_1}\right) + \left(\frac{1}{1 - \propto_1}\right) I$$

$$+ \left(\frac{1}{1 - \propto_1}\right) G \qquad (43.5)$$

2 - يتضح من المعادلة رقم (40.5) أنه إذا زاد الإنفاق الحكومى (G) بمقدار 100 مليون جنيه ، فإن الإنفاق الاستهلاكى (C) سوف يزيد بمقدار 400 مليون جنيه كما يلى :

$$\left(\frac{\propto_0}{1 - \propto_1}\right) G = \left(\frac{.8}{1 - .8}\right) (100) = 400$$

ويتضح من المعادلة رقم (41.5) أنه إذا زاد الإنفاق الحكومى بمقدار 100مليون جنيه ، فإن الدخل القومى (Y) سوف يزيد بمقدار 500 مليون جنيه كما يلى :

$$\left(\frac{1}{1 - \propto_1}\right) G = \left(\frac{1}{1 - .8}\right) (100) = 500$$

ومن ثم لاحظ أن معاملات انحدار معادلات الشكل المختزل يمكن أن تستخدم فى رسم السياسات الاقتصادية والتنبؤ بالمتغيرات الاقتصادية الكلية فى المستقبل حيث أنها تُعبر عن الأثر الكلى (الأثر المباشر + الأثر غير المباشر) للمتغيرات المحددة سلفاً على المتغير التابع[1] .

(1) لاحظ أن معاملات انحدار المعادلات السلوكية تُعبر عن الأثر المباشر للمتغيرات المستقلة على المتغير التابع .

2.3.5 التمييز من خلال الشكل الهيكلى للنموذج

إن تمييز المعادلات السلوكية من خلال الشكل المختزل للنموذج سوف يكون صعباً فى حالة اشتمال نموذج المعادلات الآنية على عدد كبير من المعادلات . لذلك يفضل تمييز المعادلات السلوكية من خلال الشكل الهيكلى للنموذج .

ويتم تمييز المعادلات السلوكية من خلال الشكل الهيكلى للنموذج بواسطة تطبيق شرطين : أولهما شرط الدرجة Order Condition . وثانيهما شرط الرتبة Rank Condition .

ولكى يمكن تمييز معادلة سلوكية ما يجب أن يتحقق شرطى الدرجة والرتبة ، بحيث يتم اختبار شرط الدرجة أولاً ، فإذا تحقق هذا الشرط فى هذه المعادلة يتم الانتقال إلى اختبار شرط الرتبة . فشرط الدرجة شرط ضرورى وليس كاف . أما شرط الرتبة فهو شرط ضرورى وكاف .

1 - **شرط الدرجة .**

إذا كانت :

E = عدد المتغيرات التى لم تظهر فى المعادلة المراد تمييزها (المتغيرات الداخلية + المتغيرات المحددة سلفاً) .

، M = عدد معادلات النموذج أو عدد المتغيرات الداخلية للنموذج .

فإن شرط الدرجة لتمييز معادلة سلوكية معينة يكون كما يلى :

- إذا كانت $E = M - 1$ ، فإن المعادلة السلوكية سوف تكون محددة تماماً .
- إذا كانت $E < M - 1$ ، فإن المعادلة السلوكية سوف تكون غير محددة .

- إذا كانت $E > M - 1$ ، فإن المعادلة السلوكية سوف تكون محددة أكثر مما ينبغى .

مثال تطبيقى

المطلوب تطبيق شرط الدرجة لتمييز معادلات النموذج التالى :

$$(44.5) \quad Y_1 = \propto_0 + \propto_1 Y_2 + \propto_2 Y_3 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2$$

$$(45.5) \quad Y_2 = \propto_3 + \propto_4 Y_1 + \propto_5 Y_3 + \beta_3 X_3$$

$$(46.5) \quad Y_3 = \propto_6 + \propto_7 Y_1 + \propto_8 Y_2$$

الحل :

- تمييز المعادلة رقم (44.5) .

$$\because \quad E = 1 \quad , \quad M = 3$$

$$\therefore \quad E < M - 1$$

$$1 < 2$$

ومن ثم تكون هذه المعادلة غير محددة .

- تمييز المعادلة رقم (45.5) .

$$\because \quad E = 2 \quad , \quad M = 3$$

$$\therefore \quad E = M - 1$$

$$2 = 2$$

ومن ثم تكون هذه المعادلة محددة تماماً .

- تمييز المعادلة رقم (46.5) .

$$\because \quad E = 3 \quad , \quad M = 3$$

$$\therefore \quad E > M - 1$$

$$3 > 2$$

ومن ثم تكون هذه المعادلة محددة أكثر مما ينبغى .

2 - شرط الرتبة .

يتلخص شرط الرتبة فى أن المعادلة السلوكية سوف تكون محددة إذا كان محدد واحد على الأقل غير صفرى رتبته مساوية لعدد المعادلات ناقص واحد[1] . ويتم تكوين هذا المحدد من جدول المتغيرات (المتغيرات الداخلية والمتغيرات المحددة سلفاً) المستبعدة من المعادلة المراد تقديرها وتكون موجودة فى المعادلات الأخرى للنموذج .

أمثلة تطبيقية

- المثال الأول

المطلوب تمييز شرط الرتبة لتمييز المعادلة رقم (45.5) فى النموذج الهيكلى السابق عرضه فى المثال السابق .

الحل :

يمكن ايضاح خطوات تطبيق شرط الرتبة لتمييز المعادلة رقم (45.5) كما

---

(1) ومن ثم فإذا كان قيمة المحدد = صفر ، فإن المعادلة المراد تمييزها سوف تكون غير محددة . وذلك فى حالة وجود محدد واحد فقط .

يلى :

1 - تكوين جدول متغيرات النموذج الهيكلى [الجدول رقم (1.5)] . ويتم ذلك من خلال إعطاء القيمة صفر للمتغير المستبعد من المعادلة والقيمة واحد صحيح للمتغير الذى يظهر فى هذه المعادلة .

جدول رقم (1.5)

المتغيرات / رقم المعادلة	Y_1	Y_2	Y_3	X_1	X_2	X_3
(44.5)	1	1	1	1	1	0
(45.5)	1	1	1	0	0	1
(46.5)	1	1	1	0	0	0

2 - تكوين جدول المتغيرات المستبعدة من المعادلة المراد تمييزها [الجدول رقم (2.5)] . ويتم ذلك من خلال شطب الصف الخاص بالمعادلة المراد تمييزها ثم شطب الأعمدة التى تظهر متغيراتها فى هذه المعادلة كما يلى :

جدول رقم (2.5)

1	1
0	0

1	1	1	1	1	0
1	1	1	0	0	1
1	1	1	0	0	0

3 - إيجاد قيمة المحدد (Δ) بإستخدام جدول المتغيرات المستبعدة من المعادلة المراد تمييزها كما يلى :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = (1)\,(0) - (1)\,(0) = 0$$

وحيث أن $\Delta = 0$ ، فإن المعادلة رقم (45.5) تكون غير محددة .

- **المثال الثانى**

المطلوب تطبيق شرط الرتبة لتمييز المعادلة رقم (46.5) فى النموذج الهيكلى السابق ذكره .

الحل :

يمكن ايضاح خطوات تطبيق شرط الرتبة لتمييز المعادلة رقم (46.5) كما يلى :

- تكوين جدول المتغيرات المستبعدة من المعادلة المراد تمييزها [جدول رقم (3.5)] كما يلى :

جدول رقم (3.5)

1	1	0
0	0	1

1	1	1	1	1	0
1	1	1	0	0	1
1	1	1	0	0	0

- ايجاد قيمة المحددات $(\Delta_3, \Delta_2, \Delta_1)$ بإستخدام الجدول رقم (3.5) كما يلى :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

ومن ثم فإن المعادلة رقم (46.5) قد تكون محددة تماماً أو محددة أكثر مما ينبغى . ولتحديد عما إذا كانت هذه المعادلة محددة تماماً أو محددة أكثر مما ينبغى يتم تطبيق شرط الدرجة على هذه المعادلة كما يلى :

$\because \quad E = 3 \quad , \quad M = 3$

$\therefore \quad E > M - 1$

$3 > 2$

وبالتالى تكون المعادلة رقم (46:5) محددة أكثر مما ينبغى .

4.5 تقدير نماذج المعادلات الآنية

يتناول هذا البند مناقشة ثلاثة طرق تستخدم فى تقدير نماذج المعادلات الآنية[1] : الطريقة الأولى هى طريقة المربعات الصغرى غير المباشرة . والطريقة الثانية هى طريقة المتغيرات المساعدة . أما الطريقة الثالثة فهى طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين .

1.4.5 التقدير بطريقة المربعات الصغرى غير المباشرة

Indirect Least Sequares (ILS)

إن طريقة المربعات الصغرى غير المباشرة تُستخدم فقط فى تقدير المعادلات السلوكية المحددة تماماً الواردة فى نموذج المعادلات الآنية . وتتلخص هذه الطريقة فى استخدام طريقة المربعات الصغرى العادية فى تقدير معاملات انحدار معادلات الشكل المختزل ، والحصول من هذه المعاملات على معاملات انحدار المعادلات السلوكية المراد تقديرها ، ولذلك تسمى هذه الطريقة بطريقة الشكل المختزل .

مثال تطبيقى

بفرض أن النموذج المراد تقديره كان كما يلى :

(1) هناك طرق أخرى لتقدير نماذج المعادلات الآنية منها :

- طريقة المربعات الصغرى ذات الثلاثة مراحل .
- طريقة التقدير المختلطة .
- [illegible]يقة الأمكان الأعظم للمعلومات المحدودة .
- طريقة الأمكان الأعظم للمعلومات الكاملة .

$$Q^s = \alpha_0 + \alpha_1 P + \beta_1 C + \epsilon_1 \qquad (47.5)$$

$$Q^d = \alpha_2 + \alpha_3 P + \beta_2 Y_d + \epsilon_2 \qquad (48.5)$$

$$Q^s = Q^d \qquad (49.5)$$

وإن بيانات هذا النموذج معطاة فى الجدول رقم (4.5) . المطلوب إجراء تقدير لمعاملات الانحدار بطريقة المربعات الصغرى غير المباشرة .

جدول رقم (4.5)

بيانات المعادلتين (47.5) , (48.5)

i	P	$Q^s = Q^d$	C	Y_d
1	10	50	100	15
2	12	54	102	12
3	9	65	105	11
4	15	84	107	17
5	14	75	110	19
6	15	85	111	30
7	16	90	111	28
8	14	60	113	25
9	17	40	117	23
10	19	70	120	35

الحل :

يمكن ايضاح طريقة المربعات الصغرى غير المباشرة فى الخطوات التالية(1) :

(1) لبساطة العرض ، سوف يتم أهمال ϵ_1 , ϵ_2 .

1 – اشتقاق معادلات الشكل المختزل كما يلى :

$$P = \left(\frac{\alpha_2 - \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_3}\right) - \left(\frac{\beta_1}{\alpha_1 - \alpha_3}\right) C$$

$$+ \left(\frac{\beta_2}{\alpha_1 - \alpha_3}\right) Y_d \qquad (50.5)$$

$$Q^s = \left(\frac{\alpha_1\alpha_2 - \alpha_0\alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_3}\right) - \left(\frac{\alpha_3 \beta_1}{\alpha_1 - \alpha_3}\right) C$$

$$+ \left(\frac{\alpha_1 \beta_1}{\alpha_1 - \alpha_3}\right) Y_d \qquad (51.5)$$

2 – التعبير عن معادلات الشكل المختزل بالشكل التالى :

$$P = c_1 + c_2\, C + c_3\, Y_d \qquad (52.5)$$

$$Q^s = c_4 + c_5\, C + c_6\, Y_d \qquad (53.5)$$

حيث أن :

$$c_1 = \frac{\alpha_2 - \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_3}, \qquad c_2 = \frac{-\beta_1}{\alpha_1 - \alpha_3}$$

$$c_3 = \frac{\beta_2}{\alpha_1 - \alpha_3}, \qquad c_4 = \frac{\alpha_1\alpha_2 - \alpha_0\alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_3}$$

$$c_5 = \frac{-\alpha_3 \beta_1}{\alpha_1 - \alpha_3}, \qquad c_6 = \frac{\alpha_1 \beta_2}{\alpha_1 - \alpha_3}$$

3 – استخدام البيانات الواردة فى الجدول رقم (4.5) فى تطبيق طريقة المربعات الصغرى العادية على المعادلتين (52.5) , (53.5) فينتج ما يلى :

$$\hat{P} = -19.60 + .28\,C + .14\,Y_d$$

$$\hat{Q}^s = 215.03 - 1.71\,C + 1.87\,Y_d$$

4 – استخدام القيم المقدرة لمعاملات انحدار معادلات الشكل المختزل فى الحصول على القيم المقدرة لمعاملات انحدار المعادلات السلوكية كما يلى :

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{\hat{c}_6}{\hat{c}_3} = \frac{1.87}{0.14} = 13.36$$

$$\hat{\alpha}_3 = \frac{\hat{c}_5}{\hat{c}_2} = \frac{-1.71}{0.28} = -6.11$$

$$\hat{\beta}_1 = -\hat{c}_2\,(\hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_3)$$

$$= -.28\,[(13.36) - (-6.11)] = -5.45$$

$$\hat{\beta}_2 = \hat{c}_3\,(\hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_3)$$

$$= 0.14\,[(13.36) - (-6.11)] = 2.73$$

$$\hat{\alpha}_0 = \hat{c}_4 - \hat{\alpha}_1\,\hat{c}_1$$

$$= 215.03 - [(13.36)\,(-19.65)] = 477.55$$

$$\hat{\alpha}_2 = \hat{c}_4 - \hat{\alpha}_3\,\hat{c}_1$$

$$= 215.03 - [(-6.11)\,(-19.65)] = 94.97$$

2.4.5 التقدير بطريقة المتغيرات المساعدة

Instrumental Variables (IV)

تُستخدم طريقة المتغيرات المساعدة في تقدير المعادلات السلوكية المحددة أكثر مما ينبغي . وتهدف هذه الطريقة إلى تخفيض درجة الارتباط بين حد الخطأ والمتغيرات المستقلة . ويتم ذلك من خلال استخدام متغيرات خارجية مناسبة (كمتغيرات مساعدة) .

ويمكن بيان خطوات تطبيق طريقة المتغيرات المساعدة على النحو التالي :

- الخطوة الأولى

تتمثل هذه الخطوة في اختيار المتغيرات المساعدة التي سوف يتم احلالها محل المتغيرات الداخلية التي تظهر كمتغيرات مستقلة في الجانب الأيمن من المعادلة المراد تقديرها . ويجب أن يتميز المتغير المساعد بالخصائص التالية :

1 – أن يرتبط ارتباطاً قوياً بالمتغير الداخلي الذي سوف يتم احلاله محله في المعادلة المراد تقديرها .

2 – أن يرتبط على الأقل بالمتغيرات الخارجية التي تظهر كمتغيرات مستقلة في المعادلة المراد تقديرها .

3 – ألا يرتبط بحد الخطأ للمعادلة السلوكية المراد تقديرها .

4 – في حالة استخدام أكثر من متغير مساعد في المعادلة المراد تقديرها ، يجب أن يرتبط كل منهم بالآخر .

- الخطوة الثانية

وتتمثل هذه الخطوة فى القيام بضرب المتغير المساعد (أو كل متغير مساعد على حدة) فى المعادلة المراد تقديرها . ثم جمع حاصل الضرب لكل المشاهدات . ويترتب على هذا الإجراء وجود عدة معادلات خطية . وبحل هذه المعادلات يتم الحصول على القيم المقدرة لمعاملات انحدار هذه المعادلات .

فبفرض أن المعادلة المراد تقديرها – فى نموذج المعادلات الآنية – كانت كما يلى :

$$Y_i = \propto + \beta X_i + \in_i ,$$

$$i = 1, 2, ... , N \qquad (54.5)$$

وأن X_i ترتبط بـ $\in_i$ بسبب أن X_i متغير داخلى فى نموذج المعادلات الآنية محل التقدير .

لاحظ أن تطبيق طريقة المربعات الصغرى العادية على المعادلة السابقة سوف يؤدى إلى الحصول على تقديرات متحيزة لمعاملات الانحدار الخاصة بهذه المعادلة . وللحصول على قيم مقدرة غير متحيزة لمعاملات المعادلة المراد تقديرها يتم تطبيق طريقة المتغيرات المساعدة على النحو التالى :

أ- اختيار المتغير المساعد الذى لا يرتبط بـ $\in_i$ ولكنه يرتبط ارتباطاً قوياً بـ X_i . وليكن هذا المتغير Z_i . ثم إعادة كتابة المعادلة المراد تقديرها – مع أهمال الحد الثابت – كما يلى :

$$y_i = \beta\, x_i + \in_i \qquad (55.5)$$

حيث أن :

$$(56.5) \qquad y_i = (Y_i - \bar{Y}),$$

$$(57.5) \qquad x_i = (X_i - \bar{X}),$$

$$(58.5) \qquad \bar{Y} = \frac{\sum Y_i}{N},$$

$$(59.5) \qquad \bar{X} = \frac{\sum X_i}{N}$$

2 – ضرب المتغير المساعد (z_i) فى المعادلة رقم (55.5) ثم القيام بجمع حاصل الضرب لكل المشاهدات كما يلى :

$$(60.5) \qquad \sum (z_i\, y_i) = \beta \sum (z_i\, x_i) + \sum (z_i \in_i)$$

حيث أن : $z_i = (Z_i - \bar{Z})$

وحيث أن $z_i , \in_i$ يرتبط كل منهما بالآخر – افتراضاً – فإن القيمة المتوقعة لهما تكون مساوية للصفر أى $E (\sum z_i \in_i) = 0$. وبالتالى تصبح المعادلة رقم (60.5) كما يلى :

$$(61.5) \qquad \sum (z_i\, y_i) = \beta \sum (z_i\, x_i)$$

ومن ثم فإن :

$$(62.5) \qquad \hat{\beta} = \frac{\sum (z_i\, y_i)}{\sum (z_i\, x_i)}$$

مثال تطبيقى

بفرض أن المعادلة المراد تقديرها هى المعادلة رقم (54.5) حيث أن X_i ترتبط بـ $\in_i$ بسبب أن X_i متغير داخلى فى نموذج المعادلات الآتية .

المطلوب تقدير هذه المعادلة بإستخدام البيانات الواردة فى الجدول رقم (5.5) علماً بأن Z_i عبارة عن المتغير المساعد .

جدول رقم (5.5)

بيانات Z_i , X_i , Y_i

i	Y_i	X_i	Z_i
1	5	4	1
2	8	6	2
3	10	10	3
4	12	9	4
5	15	11	5

الحل :

يوضح الجدول رقم (6.5) البيانات المستخدمة فى تقدير β ، ومن هذا الجدول يتضح ما يلى :

$$\bar{Y} = \frac{\sum Y_i}{N} = \frac{50}{5} = 10$$

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{N} = \frac{40}{5} = 8$$

$$\bar{Z} = \frac{\sum Z_i}{N} = \frac{15}{5} = 3$$

جدول رقم (6.5)

البيانات المستخدمة فى تقدير β

i	Y_i	X_i	Z_i	y_i	x_i	z_i	$z_i y_i$	$z_i x_i$
1	5	4	1	- 5	- 4	- 2	10	8
2	8	6	2	- 2	- 2	- 1	2	2
3	10	10	3	0	2	0	0	0
4	12	9	4	2	1	1	2	1
5	15	11	5	5	3	2	10	6
Σ	50	40	15	0	0	0	24	17

$$\therefore \ \hat{\beta} = \frac{\sum (z_i Y_i)}{\sum (z_i x_i)} = \frac{24}{17} = 1.41$$

3.4.5 التقدير بطريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين

Two - Stage Least Squares (2SLS)

تتفق طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين مع الطريقتين السابقتين فى محاولة القضاء على التحيز الوارد فى نموذج المعادلات الآنية الراجع إلى وجود متغيرات داخلية كمتغيرات مستقلة فى المعادلة المراد تقديرها . ويتم استخدام الطريقة المذكورة فى تقدير المعادلات السلوكية المحددة أكثر مما ينبغى .

أمثلة تطبيقية

- **المثال الأول**

بفرض أن النموذج المراد تقديره كان كما يلي :

$$(63.5) \quad Y_{1i} = \beta_0 + \beta_1 Y_{2i} + \beta_2 X_{1i} + \beta_3 X_{2i} + \epsilon_{1i}$$

$$(64.5) \quad Y_{2i} = \beta_4 + \beta_5 Y_{1i} + \epsilon_{2i}$$

حيث أن :

- **المتغيرات الداخلية هى :**

Y_1 = الدخل القومى

، Y_2 = عرض النقود

- **المتغيرات الخارجية هى :**

X_1 = الإنفاق الاستثمارى

، X_2 = الإنفاق الحكومى

وإن بيانات هذا النموذج معطاة فى الجدول رقم (7.5) . المطلوب تقدير معاملات النموذج بإستخدام طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين .

جدول رقم (7.5)

بيانات المعادلتين (63.5) , (64.5) (بالبليون جنيه)

السنة (i)	Y_{1i}	Y_{2i}	X_{1i}	X_{2i}
1960	503.7	144.2	74.8	53.5
1961	520.1	148.7	71.7	57.4
1962	560.3	150.9	83.0	63.4
1963	590.5	156.5	87.1	64.2
1964	632.4	163.7	94.0	65.2
1965	684.9	171.3	108.1	66.9
1966	749.9	175.4	121.4	77.8
1967	793.9	186.9	116.6	90.7
1968	864.2	201.7	126.0	98.8
1969	930.3	208.7	139.0	98.8
1970	977.1	221.4	136.3	96.2
1971	1054.9	235.3	153.7	97.6
1972	1158.0	255.8	179.3	104.9
1973	1294.9	271.5	209.4	106.6
1974	1396.7	283.8	208.9	116.4

الحل :

يمكن ايضاح كيفية استخدام طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين في تقدير المعادلتين (63.5) , (64.5) فيما يلي :

- المرحلة الأولى

تتمثل المرحلة الأولى فى إجراء انحدار المتغير المستقل الذى يكون متغير داخلى فى النموذج على كل المتغيرات المحددة سلفاً فى النموذج ككل . وطبقاً للمثال محل العرض يتم إجراء انحدار Y_{1i} على كل من X_{1i}, X_{2i} بإستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية فينتج ما يلى :

$$\hat{Y}_{1i} = -44.79 + 4.93\ X_{1i} + 3.15\ X_{2i}$$

وبإستخدام المعادلة السابقة وبيانات X_{1i}, X_{2i} الواردة فى الجدول رقم (7.5) يتم تكوين بيانات $\hat{Y}_{1i}$. كما يلى :

$$\hat{Y}_{1(1960)} = -44.79 + 4.93\ (74.8)$$

$$+ 3.15\ (53.5) = 492.5$$

وهكذا بالنسبة لباقى القيم الأخرى . ويضم الجدول رقم (8.5) قيم $\hat{Y}_1$.

- جدول رقم (8.5)

بيانات $\hat{Y}_{1i}$

السنة (i)	$\hat{Y}_{1i}$
1960	492.5
1961	489.5
1962	564.11
1963	586.8
1964	624.0
1965	698.9
1966	798.8

تابع جدول رقم (8.5)

السنة (i)	Y_{1i}
1967	815.8
1968	887.6
1969	951.7
1970	930.2
1971	1020.4
1972	1169.6
1973	1323.3
1974	1351.7

- المرحلة الثانية

تتمثل المرحلة الثانية فى إحلال القيم المقدرة للمتغير المستقل الذى يكون متغير داخلى فى النموذج محل المتغير الداخلى الذى يظهر فى الجانب الأيمن ن المعادلة المراد تقديرها ثم إجراء الانحدار . أى احلال $\hat{Y}_{1i}$ محل Y_{1i} ثم جراء انحدار Y_{2i} على $\hat{Y}_{1i}$ بإستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية . فينتج ما يلى :

$$\hat{Y}_{2i} = 60.79 + 0.16\ \hat{Y}_{1i}$$

5.5 الملخص

1 – يمكن كتابة نموذج المعادلات الآنية فى شكل مختزل من خلال التعبير عن كل متغير داخلى على حدة كدالة فى جميع المتغيرات المحددة سلفاً فى النموذج .

2 – يقال أن معادلة سلوكية ما محددة تماماً ، إذا أمكن تقدير معاملات الانحدار الخاصة بها من معاملات الانحدار المقدرة لمعادلات الشكل المختزل . أما إذا لم يمكن تقدير هذه المعاملات ، فيقال أن هذه المعادلة غير محددة . فى حين إذا أمكن الحصول على أكثر من قيمة مقدرة واحدة لمعامل أو أكثر من هذه المعاملات ، فيقال أن المعادلة محددة أكثر مما ينبغى .

3 – هناك شرطين لتمييز المعادلة السلوكية من خلال الشكل الهيكلى للنموذج : الشرط الأول وهو شرط الدرجة ويعتبر شرط ضرورى وليس كاف . أما الشرط الثانى وهو شرط الرتبة ويعتبر شرط ضرورى وكاف .

4 – يتم تقدير معاملات انحدار المعادلة المحددة تماماً بإستخدام طريقة المربعات الصغرى غير المباشرة . أما معاملات انحدار المعادلة المحددة أكثر مما ينبغى فيتم تقديرها بإستخدام كل من طريقة المتغيرات المساعدة وطريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين .

الجـــزء الثانى

مشاكل تقدير نماذج الانحدار

يغطى هذا الجزء ثلاثة مشاكل قياسية تواجه الباحث القياسى : أولها الارتباط الذاتى من الدرجة الأولى (الفصل السادس) . وثانيها عدم ثبات تباين حد الخطأ (الفصل السابع) . وثالثها الازدواج الخطى (الفصل الثامن) .

الفصل السادس

6 الارتباط الذاتى من الدرجة الأولى

FIRST - ORDER AUTOCORRELATION

أحد الافتراضات الكلاسيكية لطريقة المربعات الصغرى العادية (أو نموذج الانحدار الخطى) هو استقلال القيمة المقدرة لحد الخطأ فى فترة زمنية معينة عن القيمة المقدرة لحد الخطأ فى فترة زمنية سابقة لها .

وإذا تم اسقاط هذا الافتراض ، أى إذا ارتبطت القيمة المقدرة لحد الخطأ فى فترة زمنية معينة بالقيمة المقدرة لحد الخطأ فى فترة زمنية سابقة لها ، فإن ذلك يدل على وجود ما يسمى بالارتباط الذاتى Autocorrelation .

وفى هذا الفصل سوف يتم التركيز على العلاقة البسيطة للارتباط الذاتى والمتمثلة فى وجود ارتباط بين القيمة المقدرة لحد الخطأ فى فترة زمنية معينة والقيمة المقدرة لحد الخطأ فى الفترة الزمنية السابقة لها مباشرة . ويطلق على هذه العلاقة اصطلاح الارتباط الذاتى من الدرجة الأولى First - Order Autocorrelation [1] .

وينقسم هذا الفصل إلى ستة بنود : أولها طبيعة الارتباط الذاتى من الدرجة الأولى . وثانيها أسباب الارتباط الذاتى من الدرجة الأولى . وثالثها آثار الارتباط الذاتى من الدرجة الأولى . ورابعها أكتشاف الارتباط الذاتى من الدرجة الأولى . وخامسها تقدير معامل الارتباط الذاتى من الدرجة الأولى . وسادسها معالجة الارتباط الذاتى من الدرجة الأولى .

(1) وذلك نظراً لأن معظم التطبيقات فى الاقتصاد القياسى تتضمن ارتباطاً ذاتياً من الدرجة الأولى أكثر من الدرجة الثانية أو أكثر .

1.6 طبيعة الارتباط الذاتى من الدرجة الأولى

The Nature of First - Order Autocorrelation

ينقسم هذا البند إلى بندين فرعيين : أولهما تحديد نموذج الارتباط الذاتى من الدرجة الأولى . وثانيهما أنواع الارتباط الذاتى من الدرجة الأولى .

1.1.6 تحديد نموذج الارتباط الذاتى من الدرجة الأولى

يمكن تحديد نموذج الارتباط الذاتى من الدرجة الأولى من خلال المعادلة التالية :

$$e_t = \rho\, e_{t-1} + \epsilon_t\ , \quad -1 \leq \rho \leq +1\ ,$$

$$t = 1, 2, \dots, N \tag{1.6}$$

حيث أن :

e = القيمة المقدرة لحد الخطأ

، ϵ = القيمة الفعلية لحد الخطأ

، ρ = معامل الارتباط الذاتى من الدرجة الأولى[1]

، N = عدد المشاهدات

وبالنظر إلى المعادلة السابقة يمكن التمييز بين حالتين على النحو التالى :

1 - إذا كانت $\rho = 0$ ، فإن $e_t = \epsilon_t$. ويدل هذا على عدم وجود الارتباط

(1) سوف يتم ايضاح كيفية تقديره فى البند (5.6) .

الذاتى .

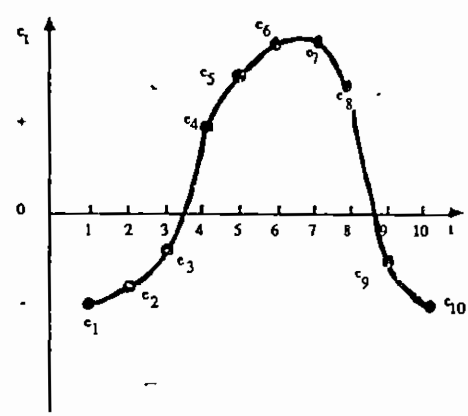
2 - إذا كانت $\rho = \pm 1$ ، فإن القيمة المقدرة لحد الخطأ فى الفترة الزمنية السابقة (e_{t-1}) تصبح أكثر أهمية فى تحديد القيمة المقدرة لحد الخطأ فى الفترة الزمنية الحالية (e_t) . ومن ثم يدل ذلك على وجود درجة عالية من الارتباط الذاتى .

2.1.6 أنواع الارتباط الذاتى من الدرجة الأولى

يمكن تحديد أنواع الارتباط الذاتى من الدرجة الأولى كما يلى :

1 - الارتباط الذاتى من الدرجة الأولى الموجب .

يحدث الارتباط الذاتى من الدرجة الأولى الموجب $(\rho > 0)$ عندما تكون معظم القيم المقدرة المتتابعة لحد الخطأ لها نفس الإشارة الجبرية كما فى شكل رقم (1.6) .

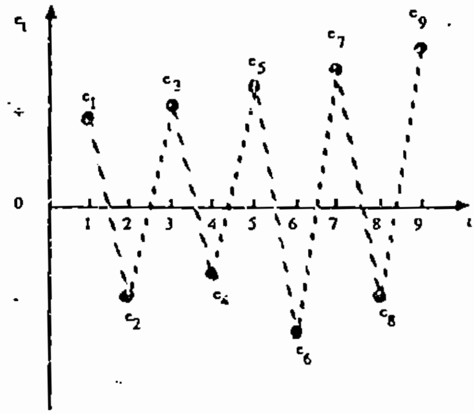


شكل رقم (1.6)

الارتباط الذاتى من الدرجة الأولى الموجب

2- الإرتباط الذاتى من الدرجة الأولى السالب

يحدث الارتباط الذاتى من الدرجة الأولى السالب $(\rho < 0)$ عندما تكون غالبية القيم المقدرة المتتابعة لحد الخطأ تتبادل الإشارة بين الموجب والسالب كما فى الشكل رقم (2.6) .



شكل رقم (2.6)

الارتباط الذاتى من الدرجة الأولى السالب

2.6 أسباب الارتباط الذاتى من الدرجة الأولى
The Reasons of First-Order Autocorrelation

ينشأ الارتباط الذاتى من الدرجة الأولى من عدة أسباب منها ما يلى :

1 – أغفال بعض المتغيرات التفسيرية (المتغيرات المستقلة) فى نموذج

الانحدار المراد تقديره .

2 – الصياغة الرياضية الخاطئة لنموذج الانحدار المراد تقديره .

3 – عدم دقة بيانات السلاسل الزمنية[1] .

3.6 آثار الارتباط الذاتى من الدرجة الأولى
The Consequences of First - Order Autocorrelation

إذا طُبقت طريقة المربعات الصغرى العادية فى تقدير نموذج ما مع وجود أرتباط ذاتى من الدرجة الأولى ، فإن :

1 – القيم المقدرة لمعاملات الانحدار سوف تكون غير متحيزة[2] .

2 – تباين القيم المقدرة لمعاملات الانحدار سوف لا يكون أقل ما يمكن .

4.6 أكتشاف الارتباط الذاتى من الدرجة الأولى
Detection of First - Order Autocorrelation

إن أكتشاف الارتباط الذاتى من الدرجة الأولى يتم بإستخدام عدة اختبارات منها ما يلى :

(1) بسبب اشتمال معظم السلاسل الزمنية على بعض البيانات التى تم استكمالها .

(2) وذلك بشرط عدم اشتمال المعادلة المقدرة على متغيرات تابعة ذات فترات ابطاء .

1.4.6 اختبار Durbin - Watson

تعريف اختبار Durbin - Watson

يعتبر اختبار Durbin - Watson (DW) من أهم الاختبارات الشائعة المستخدمة فى أكتشاف الارتباط الذاتى من الدرجة الأولى . وتُحسب DW بالصيغة التالية :

$$(2.6) \qquad DW = \frac{\sum_{t=2}^{N} (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{N} e_t^2}$$

أو

$$(3.6) \qquad DW \cong 2\,(1 - \rho)$$

حيث أن DW تمثل القيمة المحسوبة للاختبار . وتعنى $\cong$ تساوى تقريباً . ويتضح من المعادلة رقم (3.6) إذا كانت $\rho = 0$ ، فإن $DW \cong 2$.

احصائية d

يوضح الشكل رقم (3.6) قيم d . و d عبارة عن القيمة الجدولية (القيمة الحرجة) للاختبار . وتشير قيم d إلى وجود أو عدم وجود الارتباط الذاتى من الدرجة الأولى الموجب أو السالب ، أو التى تجعل نتيجة الاختبار غير محددة . وتوجد قيم كل من الحدين الأعلى والأدنى لـ d (d_L , d_U) فى الجدول الاحصائى رقم (3.A) الوارد فى نهاية هذا الكتاب .

نرفض H_0' :		لا نرفض H_0 :		نرفض H_0 :
ارتباط ذاتى موجب	غير محدد	عدم وجود ارتباط ذاتى	غير محدد	ارتباط ذاتى سالب

$0 \qquad d_L \qquad d_U \qquad 2 \qquad 4 - d_U \qquad 4 - d_L \qquad 4$

شكل رقم (3.6) : احصائية d

استخدام اختبار Durbin - Watson

- اختبار Durbin - Watson من جانب واحد

يستخدم اختبار DW من جانب واحد فى اختبار وجود الارتباط الذاتى من الدرجة الأولى الموجب . ويتلخص اختبار DW من جانب واحد فى الآتى :

فرض العدم $H_0 : \rho \leq 0$

ضد الفرض البديل $H_A : \rho > 0$

* إذا كانت $DW < d_L$ يرفض H_0 .
* إذا كانت $DW > d_U$ يقبل H_0 .
* إذا كانت $d_L \leq DW \leq d_U$ تكون نتيجة الاختبار غير محددة . ومن ثم يجب إضافة بيانات أكثر .

- اختبار Durbin - Watson من الجانبين

يتلخص اختبار DW من الجانبين فى الآتى :

فرض العدم $H_0 : \rho = 0$

ضد الفرض البديل $H_A : \rho \neq 0$

* إذا كانت $DW < d_L$ أو $DW > 4 - d_L$ يرفض H_0 .
* إذا كانت $4 - d_U > DW > d_U$ يقبل H_0 .
* إذا كانت $4 - d_U \leq DW \leq 4 - d_L$ أو $d_L \leq DW \leq d_U$ تكون نتيجة هذا الاختبار غير محددة .

أمثلة تطبيقية

- المثال الأول

يعطى جدول رقم (1.6) الإنفاق الإستهلاكى الشخصى (Y_t) والدخل الشخصى المتاح للإنفاق (X_t) ، كليهما بالبليون جنيه ، لإحدى الدول من 1979 إلى 1988 . والمطلوب إجراء انحدار Y_t على X_t واختبار وجود الارتباط الذاتى من الدرجة الأولى عند مستوى معنوية 5% .

جدول رقم (1.6)
الإنفاق الاستهلاكى الشخصى (Y_t)
والدخل الشخصى المتاح للإنفاق (X_t)
(بالبليون جنيه) ، 1979 - 1988 :

السنة	Y_t	X_t
1979	199	212
1980	204	214
1981	216	231
1982	218	237
1983	224	244
1984	235	255
1985	238	257
1986	256	273
1987	264	284
1988	270	290

الحل :

بإجراء انحدار Y_t على X_t كانت النتائج كما يلى :

$$\hat{Y}_t = 7.05 + 0.9025\, X_t$$

وبإستخدام نتائج هذه المعادلة ، يمكن تكوين الجدول رقم (2.6) والذى منه يمكن حساب احصائية DW كما يلى :

جدول رقم (2.6)

البيانات المستخدمة فى حساب احصائية DW

السنة	Y_t	$\hat{Y}_t$	$e_t = Y_t - \hat{Y}_t$	$e_t - e_{t-1}$	$(e_t - e_{t-1})^2$	e_t^2
1979	199	198.38	0.62	--	--	0.3844
1980	204	200.19	3.81	3.19	10.1761	14.5161
1981	216	215.53	0.47	- 3.34	11.1556	0.2209
1982	218	220.94	- 2.94	- 3.41	11.6281	8.6436
1983	224	227.26	- 3.26	- 0.32	0.1024	10.6276
1984	235	237.19	- 2.19	1.07	1.1449	4.7961
1985	238	238.99	- 0.99	1.20	1.4400	0.9801
1986	256	253.43	·2.57	3.56	12.6736	6.6049
1987	264	263.36	0.64	- 1.93	3.7249	0.4096
1988	270	268.78	1.22	0.58	0.3364	1.4884
					52.382	48.672

$$DW = \frac{\sum (e_t - e_{t-1})^2}{\sum e_t^2}$$

$$= \frac{52.382}{48.672} = 1.0762$$

وحيث أن $d_L = 0.879 < DW = 1.0762 < d_U = 1.320$ عند مستوى معنوية 5 % [$K' = 1$, $N = 10$ من الجدول الاحصائى رقم (3.A) الوارد فى نهاية هذا الكتاب] ، فإن الاختبار لا يدل على نتيجة محددة وبالتالى لا يمكن فى هذه الحالة القول بوجود أو عدم وجود الارتباط الذاتى . ويلاحظ أن 'K هنا عبارة عن عدد معاملات الانحدار المقدرة بإستثناء الحد الثابت[1] .

- المثال الثانى

المطلوب إجراء اختبار الارتباط الذاتى من الدرجة الأولى عند مستوى معنوية 5% بفرض أن DW فى المثال السابق كانت تساوى 0.69 .

الحل :

حيث أن $DW = 0.69 < d_L = 0.879$ عند مستوى معنوية 5% [$K' = 1$, $N = 10$ من الجدول الاحصائى رقم (3.A) الوارد فى نهاية الكتاب] ، فإن هناك ارتباط ذاتى موجب من الدرجة الأولى .

---

(1) وذلك بفرض اشتمال المعادلة المقدرة على حد ثابت .

2.4.6 اختبار h لـ Durbin

تعريف اختبار h لـ Durbin

من بين الانتقادات الموجهة إلى اختبار DW أنه لا يمكن تطبيقه فى حالة إذا كان نموذج الانحدار المقدر يتضمن متغيرات تابعة ذات فترات ابطاء كمتغيرات مستقلة . ولهذا قام Durbin بإقتراح اختبار آخر ليسد النقص فى اختبار DW من هذه الزاوية . ويسمى الاختبار المقترح باختبار h . وبالإضافة إلى ذلك ، فإن اختبار h يُستخدم فى حالة إذا كان عدد المشاهدات كبيراً .

ويفرض أن نموذج الانحدار المقدر كان كما يلى :

$$\hat{Y}_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 Y_{t-1} + \hat{\beta}_2 Y_{t-2} + \hat{\beta}_3 X_t + e_t \qquad (4.6)$$

فإن صيغة الاختبار المقترح هى :

$$h = \rho \sqrt{\frac{N}{1 - N [\, var (\hat{\beta}_1) \,]}} \qquad (5.6)$$

حيث أن $var (\hat{\beta}_1)$ عبارة عن تباين معامل الانحدار المقدر الخاص بالمتغير التابع ذات فترة ابطاء سنة واحدة (Y_{t-1}) . ويلاحظ أن هذا الاختبار لا يمكن حسابه إذا كانت $N [var (\hat{\beta}_1)] \geq 1$.

استخدام اختبار h لـ Durbin

يجدر الإشارة إلى أن قيمة h موزعة توزيعياً طبيعياً بمتوسط حسابى قدره صفر وتباين قدره واحد صحيح . ومن ثم يجب مقارنة قيمة h بالقيمة الجدولية (القيمة الحرجة) لـ Z الموجودة فى جدول التوزيع الطبيعى عند مستوى معنوية معين . وقيمة Z الجدولية تساوى 1.64 , 1.96 عند مستوى معنوية 5% و 2.5% على التوالى .

ويتلخص اختبار h من جانب واحد فى الآتى :

فرض العدم $H_0 : \rho \leq 0$

ضد الفرض البديل $H_A : \rho > 0$

* إذا كانت $h > Z$ يقبل H_A أى يوجد هناك ارتباط ذاتى موجب من الدرجة الأولى .

مثال تطبيقى

بفرض أن :

$$N = 100$$

$$DW = 1.8$$

$$var(\hat{\beta}_1) = 0.004$$

المطلوب إجراء اختبار الارتباط الذاتى من الدرجة الأولى عند مستوى معنوية 5% .

الحل :

$$h = \rho \sqrt{\frac{N}{1 - N\,[\mathrm{Var}(\hat{\beta}_1)]}}$$

$$\rho \cong [1 - (0.5\ DW)]$$

$$\cong 1 - 0.5\ (1.8) \cong 0.1$$

$$h = 0.1 \sqrt{\frac{100}{1 - 100\ [0.004]}} = 1.2910$$

وحيث أن $h = 1.2910 < Z = 1.64$ عند مستوى معنوية 5% ، فإن الاختبار يدل على عدم وجود ارتباط ذاتى من الدرجة الأولى .

5.6 تقدير معامل الارتباط الذاتى من الدرجة الأولى (ρ)

Estimation of First - Order Autocorrelation

هناك عدة طرق لتقدير معامل الارتباط الذاتى من الدرجة الأولى (ρ) منها ما يلى :

1.5.6 تقدير الـ ρ من احصائية Durbin - Watson

بالرجوع إلى المعادلة رقم (3.6) يمكن تقدير الـ ρ من احصائية DW كما يلى :

$$(6.6) \qquad \rho \cong (2 - DW) / 2$$

أو

$$(7.6) \qquad \rho \cong [1 - (0.5\ DW)]$$

2.5.6 تقدير الـ ρ بطريقة Theil - Nagar

اقترح كل من Theil , Nagar تقدير الـ ρ من خلال العلاقة التالية :

$$(8.6) \qquad \rho = \frac{N^2 [1 - (DW / 2)] + (K + 1)^2}{N^2 - (K + 1)^2}$$

حيث أن :

K = عدد المتغيرات المستقلة

، K + 1 = عدد معاملات الانحدار المقدرة

3.5.6 تقدير الـ ρ بطريقة Cochrane - Orcutt

اقترح كل من Cochrane , Orcutt تقدير الـ ρ بواسطة القيم المقدرة لحد الخطأ كما يلي :

$$(9.6) \qquad \rho = \frac{\sum e_t \ e_{t-1}}{\sum e_{t-1}^2}$$

4.5.6 تقدير الـ ρ بواسطة انحدار e_t على e_{t-1}

بإجراء انحدار e_t على e_{t-1} ، يمكن الحصول على الـ ρ كما يلى :

$$e_t = \rho\, e_{t-1} \qquad (10.6)$$

5.5.6 تقدير الـ ρ من طريقة Durbin ذات المرحلتين

يمكن تقدير الـ ρ من المرحلة الأولى لطريقة Durbin ذات المرحلتين المستخدمة فى معالجة الارتباط الذاتى من الدرجة الأولى والتى مؤداها إعادة إجراء انحدار المتغير التابع على قيمته المبطأة لفترة زمنية واحدة ، وعلى قيم المتغيرات المستقلة للنموذج ، وعلى قيم المتغيرات المستقلة مبطأة لفترة زمنية واحدة كذلك .

فبفرض أن نموذج الانحدار المراد تقديره هو :

$$Y_t = \propto + \beta X_t + \in_t \qquad (11.6)$$

فإنه يمكن الحصول على الـ ρ بواسطة إجراء انحدار Y_t على قيمتها المبطأة لفترة زمنية واحدة ، وعلى قيمة X_t الأصلية ، وعلى قيمة X_t المبطأة لفترة زمنية واحدة كذلك كما يلى :

$$Y_t = \propto (1 - \rho) + \rho\, Y_{t-1} + \beta X_t$$

$$- \beta \rho X_{t-1} + \in_t \qquad (12.6)$$

مثال تطبيقى

يعطى جدول رقم (3.6) مستوى الواردات (M_t) ، والناتج المحلى الإجمالى (GDP_t) ، كليهما بالبليون جنيه ، لإحدى الدول من 1950 إلى 1969 .

والمطلوب :

1 - إجراء انحدار M_t على GDP_t واختبار وجود الارتباط الذاتى من الدرجة الأولى عند مستوى معنوية 5% .

2 - تقدير معامل الارتباط الذاتى من الدرجة الأولى بواسطة :

- احصائية Durbin - Watson .
- طريقة Theil - Nagar .
- طريقة Durbin ذات المرحلتين .
- إجراء انحدار e_t على e_{t-1}

جدول رقم (3.6)

مستوى الواردات (M_t) والناتج المحلى

الإجمالى (GDP_t) (بالبليون جنيه) ، 1950 - 1969 :

السنة	M_t	GDP_t
1950	3.748	21.777
1951	4.010	22.418
1952	3.711	22.308
1953	4.004	23.319
1954	4.151	24.180
1955	4.569	24.893
1956	4.582	25.310
1957	4.697	25.799
1958	4.753	25.886
1959	5.062	26.868
1960	5.669	28.134
1961	5.628	29.091
1962	5.736	29.450
1963	5.946	30.705
1964	6.501	32.372
1965	6.549	33.152
1966	6.705	33.764
1967	7.104	34.411
1968	7.609	35.429
1969	8.100	36.200

الحل :

1 - بإجراء انحدار M_t على GDP_t كانت النتائج كما يلى :

$$M_t = -2.461 + 0.28\ GDP_t$$

$$DW = 0.937$$

وحيث أن $DW = 0.937 < d_L = 1.201$ عند مستوى معنوية 5% , $N = 20$, $K' = 1$ [من الجدول الاحصائى رقم (3.A) الوارد فى نهاية هذا الكتاب] ، فهناك دليل على وجود ارتباط ذاتى موجب فى دالة الواردات .

2 - تقدير معامل الارتباط الذاتى من الدرجة الأولى .

- تقدير الـ ρ من احصائية Durbin - Watson

$$\rho \cong (2 - DW) / 2$$

$$\cong (2 - 0.937) / 2$$

$$\cong 0.5315$$

- تقدير الـ ρ بطريقة Theil - Nagar .

$$\rho = \frac{N^2 [1 - (DW / 2)] + (K + 1)^2}{N^2 - (K + 1)^2}$$

$\because\ N = 20 \quad , \quad DW = 0.937 \quad , K = 1$

$$\therefore\ \rho = \frac{(20)^2\,[1 - (0.937/2)] + (2)^2}{(20)^2 - (2)^2} = 0.5570$$

- تقدير الـ ρ بطريقة Durbin ذات المرحلتين .

$$\hat{M}_t = -1107.67 + 0.6475\,M_{t-1} + 0.3403\,GDP_t - 0.2345\,GDP_{t-1}$$

حيث أن معامل M_{t-1} هو الـ ρ ، أى أن :

$$\rho = 0.6475$$

- تقدير الـ ρ بواسطة إجراء انحدار e_t على e_{t-1} .

$$\hat{e}_t = 0.53\,e_{t-1}$$

حيث أن معامل e_{t-1} هو الـ ρ ، أى أن :

$$\rho = 0.53$$

6.6 معالجة الارتباط الذاتى من الدرجة الأولى
Remedy of First - Order Autocorrelation

بفرض أن نموذج الانحدار المراد تقديره هو ذلك الذى توضحه المعادلة رقم (11.6) ، فإنه يمكن توضيح كيفية معالجة الارتباط الذاتى من الدرجة الأولى من خلال الطريقتين التاليتين :

1.6.6 طريقة الفرق العام

The Generalized Difference Method

خطوات طريقة الفرق العام

يمكن تحديد خطوات معالجة الارتباط الذاتى من الدرجة الأولى طبقاً لطريقة الفرق العام على النحو التالى[1] :

1 – تقدير معامل الارتباط الذاتى من الدرجة الأولى (ρ) بإستخدام أياً من الطرق المستخدمة فى تقدير الـ ρ السابق عرضها .

2 – حساب قيم الفروق الأولى للمتغيرات Y_t , X_t وفقاً لمعادلة الفرق العام التالية :

$$(Y_t - \rho\ Y_{t-1}) = \propto (1 - \rho) + \beta\ (X_t - \rho\ X_{t-1}) + \in_t \qquad (13.6)$$

ومن ثم فإن تحويل البيانات يتم من خلال المعادلتين التاليتين :

$$Y_t^* = Y_t - \rho\ Y_{t-1} \qquad (14.6)$$

$$X_t^* = X_t - \rho\ X_{t-1} \qquad (15.6)$$

حيث أن :

Y_t^* = قيمة Y المحولة في الفترة الزمنية t

---

(1) يطلق على استخدام كل من طريقة Durbin لتقدير الـ ρ (المرحلة الأولى) وطريقة الفرق العام (المرحلة الثانية) فى معالجة الارتباط الذاتى من الدرجة الأولى ، طريقة Durbin ذات المرحلتين لمعالجة الارتباط الذاتى من الدرجة الأولى .

، $X_t^* =$ قيمة X المحولة فى الفترة الزمنية t

ولتجنب ضياع المشاهدة الأولى فى عملية ايجاد الفروق ، سوف يتم تقدير المشاهدة الأولى المحولة لكل من Y , X على التوالى كما يلى :

$$Y_1^* = Y_1 \sqrt{1 - \rho^2} \qquad (16.6)$$

$$X_1^* = X_1 \sqrt{1 - \rho^2} \qquad (17.6)$$

3 – استخدام طريقة المربعات الصغرى العادية لتقدير معاملات نموذج الانحدار الجديد المكون من الفروق الأولى لـ Y_t , X_t وصيغته هى :

$$Y_t^* = \propto + \beta X_t^* + \in_t \qquad (18.6)$$

4 – اختبار وجود الارتباط الذاتى من الدرجة الأولى من المعادلة رقم (18.6) بعد تقديرها ، باختبار DW السابق عرضه . فإذا كانت نتيجة الاختبار تؤكد وجود الارتباط الذاتى ، فإنه يجب إعادة استبدال القيم Y_t^* , X_t^* بقيم الفروق الأولى لهذين المتغيرين الجديدين بنفس الطريقة السابق عرضها بالخطوة رقم (2) . ثم إجراء الانحدار على البيانات المحولة وإعادة الاختبار إلى أن يتأكد عدم وجود الارتباط الذاتى .

مثال تطبيقى

يعطى جدول رقم (4.6) الإنفاق الحكومى التحويلى (Tr_t) بالبليون جنيه ، ومعدل البطالة (U_t) ، لإحدى الدول من 1962 إلى 1985 .

ويفرض أن انحدار Tr_t على U_t أظهر وجود ارتباط ذاتى موجب . حيث أن DW = 0.9021 ، فالمطلوب إجراء معالجة لهذا الارتباط عند مستوى معنوية 5% إذا علمت أن $\rho = 0.5598$.

جدول رقم (4.6)
الإنفاق الحكومى التحويلى (Tr_t) (بالبليون جنيه)
ومعدل البطالة (U_t) 1962 - 1985 :

السنة	Tr_t	U_t , %
1962	104.66	5.63
1963	103.33	5.46
1964	97.30	5.63
1965	95.96	5.60
1966	98.83	5.83
1967	97.23	5.76
1968	99.06	5.56
1969	113.66	5.63
1970	117.00	5.46
1971	119.66	5.26
1972	124.33	5.06
1973	133.00	5.06
1974	143.33	4.83
1975	144.66	4.73
1976	152.33	4.46
1977	178.33	4.20
1978	192.00	3.83
1979	186.00	3.90
1980	188.00	3.86
1981	193.33	3.70
1982	187.66	3.66
1983	175.33	3.83
1984	178.00	3.93
1985	187.66	3.96

الحل :

يمكن توضيح خطوات معالجة الارتباط الذاتى من الدرجة الأولى طبقاً لطريقة الفرق العام كما يلى :

1 - تحويل القيم الأصلية للمتغيرين Tr_t , U_t كالتالى :

- كيفية الحصول على القيمة الأولى لـ Tr_t , U_t .

$$Tr_1^* = \ln Tr_1 \sqrt{1 - \rho^2}$$

$$Tr^*_{(1962)} = 4.950717 \sqrt{1 - (0.5598)^2} = 4.102$$

$$U_1^* = \ln U_1 \sqrt{1 - \rho^2}$$

$$U^*_{(1962)} = 1.7281094 \sqrt{1 - (0.5598)^2} = 1.432$$

- كيفية الحصول على القيم الأخرى المحولة لـ Tr_t , U_t .

$$Tr_1^* = \ln Tr_t - \rho \ln Tr_{t-1}$$

$$Tr^*_{(1963)} = 4.640 - [(0.5598)(4.651)] = 2.036$$

$$U_t^* = \ln U_t - \rho \ln U_{t-1}$$

$$U^*_{(1963)} = 1.698 - [(0.5598)(1.728)] = 0.731$$

وهكذا بالنسبة لباقى القيم الأخرى الخاصة بكل من المتغيرين .
والمتغيرات المحولة (Tr_t^* , U_t^*) معطاة فى الجدول التالى :

جدول رقم (5.6)

U^*_t , Tr^*_t فى صورتها المحولة

السنة	Tr^*_t	U^*_t
1962	4.102	1.432
1963	2.036	0.731
1964	1.981	0.778
1965	2.001	0.756
1966	2.038	0.799
1967	2.006	0.764
1968	2.034	0.736
1969	2.160	0.767
1970	2.113	0.731
1971	2.119	0.710
1972	2.144	0.692
1973	2.190	0.714
1974	2.228	0.668
1975	2.195	0.672
1976	2.242	0.625
1977	2.371	0.598
1978	2.356	0.540
1979	2.283	0.609
1980	2.311	0.589
1981	2.333	0.552
1982	2.288	0.566
1983	2.235	0.616
1984	2.290	0617
1985	2.334	0.610

2 – استخدام بيانات الجدول رقم (5.6) فى إجراء انحدار Tr_t^* على U_t^* كما يلى :

$$\ln \hat{Tr}_t^* = 1.4091 - 1.4604 \ln U_t^*$$

$$DW = 1.7438$$

وحيث أنه الآن $d_U = 1.446 < DW = 1.7438 < 4 - d_U = 2.554$ عند مستوى معنوية 5% , $K' = 1$, $N = 24$] من الجدول الاحصائى رقم (3.A) الوارد فى نهاية هذا الكتاب] ، فليس هناك دليل على وجود الارتباط الذاتى .

ويلاحظ أن الحد الثابت فى المعادلة السابقة هو فى الواقع عبارة عن تقدير لـ $\propto(1 - \rho)$ [1] . ولهذا فإن القيمة المقدرة لـ $\propto$ يمكن الحصول عليها كالتالى :

$$\therefore \hat{\propto}(1 - 0.5598) = 1.4091$$

$$\therefore \hat{\propto} = \frac{1.4091}{(1 - 0.5598)} = 3.2010$$

2.6.6 طريقة الفرق الأول The First Difference Method

خطوات طريقة الفرق الأول

يمكن تحديد خطوات معالجة الارتباط الذاتى من الدرجة الأولى طبقاً

---

(1) راجع ما تقدم المعادلة رقم (13.6) .

لطريقة الفرق الأول على النحو التالى :

1 – حساب قيم الفروق الأولى للمتغيرات X_t , Y_t وفقاً لمعادلة الفرق الأول التالية :

$$Y_t - Y_{t-1} = \beta\ (X_t - X_{t-1}) + \in \qquad (19.6)$$

أو

$$\Delta\ Y_t = \beta\ \ \Delta X_t + \in_t \qquad (20.6)$$

ومن ثم فإن تحويل البيانات يتم من خلال المعادلتين التاليتين :

$$Y_t^* = Y_t - Y_{t-1} \qquad (21.6)$$

$$X_t^* = X_t - X_{t-1} \qquad (22.6)$$

2 – استخدام طريقة المربعات الصغرى العادية لتقدير معاملات نموذج الانحدار الجديد المكون من الفروق الأولى لـ X_t , Y_t وصيغته هى :

$$Y_t^* = \beta X_t^* + \in_t \qquad (23.6)$$

3 – اختبار وجود الارتباط الذاتى من المعادلة رقم (23.6) بعد تقديرها باختبار DW . فإذا أظهر الاختبار وجود ارتباط ذاتى ، فإنه يجب استبدال القيم الجديدة بالفروق الأولى لهذه المتغيرات الجديدة (X_t^* , Y_t^*) بنفس الطريقة الموضحة فى الخطوة رقم (1) . ثم إجراء

الانحدار على البيانات المحولة وإعادة الاختبار إلى أن يتأكد عدم وجود الارتباط الذاتى .

ويتضح مما سبق ، أن طريقة الفرق الأول هى عبارة عن إعادة إجراء الانحدار على شكل فروق وحذف الحد الثابت . ويتم استخدام هذه الطريقة عندما يكون $\rho = 1$. ويلاحظ أن طريقة الفرق الأول هى حالة خاصة من طريقة الفرق العام .

مثال تطبيقى

يعطى جدول رقم (6.6) الإنفاق الإستهلاكى الشخصى (Y_t) ، والدخل الشخصى المتاح للإنفاق (X_t) ، كليهما بالبليون جنيه ، لإحدى الدول من 1951 إلى 1970 .

وبفرض أن انحدار Y_t على X_t أظهر وجود ارتباط ذاتى موجب ، حيث أن $DW = 1.100$ ، فالمطلوب إجراء معالجة لهذا الارتباط عند مستوى معنوية 5% إذا علمت أن $\rho = 1$.

جدول رقم (6.6)

الإنفاق الاستهلاكى الشخصى (Y_t) والدخل الشخصى المتاح للإنفاق (X_t) (بالبليون جنيه) ، 1951 - 1970 :

السنة	X_t	Y_t
1951	226.6	206.3
1952	238.3	216.7
1953	252.6	230.0
1954	257.4	236.5
1955	275.3	254.4
1956	293.2	266.7
1957	308.5	281.4
1958	318.8	290.1
1959	337.3	311.2
1960	350.0	325.2
1961	364.4	335.2
1962	385.3	355.1
1963	404.6	375.0
1964	438.1	401.2
1965	473.2	432.8
1966	511.9	466.3
1967	546.3	492.1
1968	591.2	535.8
1969	631.6	577.5
1970	684.7	616.8

الحل :

وحيث أن $\rho = 1$ فيجب استخدام طريقة الفرق الأول لمعالجة الارتباط الذاتى من الدرجة الأولى .

ويتلخص خطوات المعالجة بهذه الطريقة على النحو التالى :

1 – تحويل القيم الأصلية للمتغيرين X_t , Y_t كالتالى :

$$X_t^* = X_t - X_{t-1}$$

$$X^*_{(1952)} = 238.3 - 226.6 = 11.7$$

$$Y_t^* = Y_t - Y_{t-1}$$

$$Y^*_{(1952)} = 216.7 - 206.3 = 10.4$$

وهكذا بالنسبة لباقى القيم الأخرى الخاصة بكل من المتغيرين . المتغيرات المحولة (Y_t^* , X_t^*) معطاة فى الجدول رقم (7.6) .

جدول رقم (7.6)

X_t, Y_t فى صورتها المحولة :

السنة	X_t^*	Y_t^*
1951		
1952	11.7	10.4
1953	14.3	13.3
1954	4.8	6.5
1955	17.9	17.9
1956	17.9	12.3
1957	15.3	14.7
1958	10.3	8.7

تابع جدول رقم (7.6)

السنة	X_t^*	Y_t^*
1959	18.5	21.1
1960	12.7	14.0
1961	14.4	10.0
1962	20.9	19.9
1963	19.3	19.9
1964	33.5	26.2
1965	35.1	31.6
1966	38.7	33.5
1967	34.4	25.8
1968	44.9	43.7
1969	40.4	41.7
1970	53.1	39.3

2 - استخدام بيانات الجدول رقم (7.6) فى إجراء انحدار Y_t^* على X_t^* مع حذف الحد الثابت كما يلى :

$$Y_t^* = 0.88\ X_t^*$$

$$DW = 2.200$$

وحيث أن $d_U = 1.401 < DW = 2.200 < 4 - d_U = 2.599$ عند مستوى معنوية 5% , $K' = 1, N = 19$] من الجدول الاحصائى رقم (3.A) الوارد فى نهاية هذا الكتاب] ، فليس هناك دليل على وجود الارتباط الذاتى .

7.6 الملخص

1 – من بين افتراضات نموذج الانحدار الخطى عدم وجود علاقة بين القيم المقدرة لحدود الخطأ . وبإسقاط هذا الافتراض أى إذا كان هناك علاقة بين هذه القيم ، فسوف يوجد مشكلة يطلق عليها الارتباط الذاتى .

2 – الارتباط الذاتى هو علاقة بين القيمة المقدرة لحد الخطأ فى فترة زمنية معينة والقيمة المقدرة لحد الخطأ فى أى فترة زمنية أخرى .

3 – الارتباط الذاتى من الدرجة الأولى هو علاقة بين القيمة المقدرة لحد الخطأ فى الفترة الزمنية الحالية والقيمة المقدرة لحد الخطأ فى الفترة الزمنية السابقة .

4 – هناك عدة أسباب يمكن أن تؤدى إلى حدوث الارتباط الذاتى من الدرجة الأولى منها ما يلى :

- اغفال بعض المتغيرات المستقلة فى النموذج .
- الصياغة الرياضية غير السليمة للنموذج .
- عدم دقة بيانات السلاسل الزمنية .

5 – إذا طُبقت طريقة المربعات الصغرى العادية فى تقدير نموذج ما مع وجود ارتباط ذاتى من الدرجة الأولى ، فإن القيم المقدرة لمعاملات الانحدار سوف تكون غير متحيزة بالإضافة إلى أن تباين هذه القيم سوف لا يكون أقل ما يمكن .

6 – على الرغم من شيوع استخدام اختبار DW لاكتشاف الارتباط الذاتى

من الدرجة الأولى إلا أنه يُعاب عليه عدم إمكانية استخدامه فى حالة اشتمال نموذج الانحدار المراد تقديره على متغيرات مستقلة عبارة متغيرات تابعة ذات فترات ابطاء . وللتغلب على هذا النقد ، قام Durbin باقتراح اختبار h .

7 – يتم تقدير معامل الارتباط الذاتى من الدرجة الأولى (ρ) بعدة طرق منها ما يلى :

- تقدير الـ ρ من احصائية Durbin - Watson .
- تقدير الـ ρ بطريقة Theil - Nagar .
- تقدير الـ ρ بطريقة Cochrane - Orcutt .
- تقدير الـ ρ بطريقة Durbin ذات المرحلتين .
- تقدير الـ ρ بإجراء انحدار e_t على e_{t-1} .

8 – تعتبر طريقة الفرق العام أفضل طريقة لمعالجة الارتباط الذاتى من الدرجة الأولى بالمقارنة بطريقة الفرق الأول . حيث أن طريقة الفرق الأول تمثل حالة خاصة من طريقة الفرق العام .

الفصل السابع

7 عدم ثبات تباين حد الخطأ

HETEROSCEDASTICITY

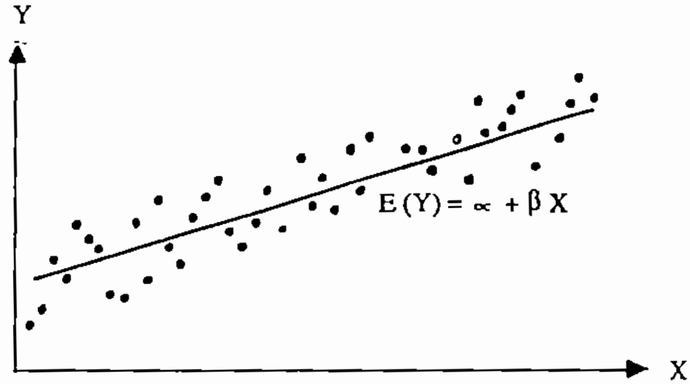
من بين افتراضات نموذج الانحدار الخطى هو ثبات تباين حد الخطأ Homoscedasticity . ويترتب على اسقاط هذا الافتراض ، حدوث مشكلة عدم ثبات تباين حد الخطأ Heteroscedasticity أى أن حدود الأخطاء ليس لها نفس التباين .

وينقسم هذا الفصل إلى خمسة نقاط : أولها طبيعة عدم ثبات تباين حد الخطأ . وثانيها أسباب عدم ثبات تباين حد الخطأ . وثالثها آثار عدم ثبات تباين حد الخطأ . ورابعها أكتشاف عدم ثبات تباين حد الخطأ . وخامسها معالجة عدم ثبات تباين حد الخطأ .

1.7 طبيعة عدم ثبات تباين حد الخطأ

The Nature of Heteroscedasticity

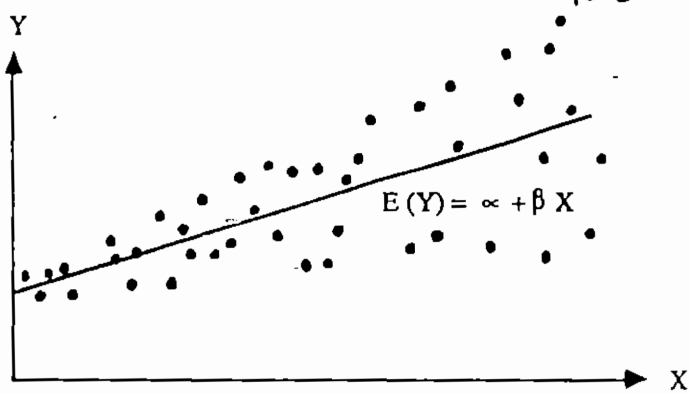
احد افتراضات نموذج الانحدار الخطى هو ثبات تباين حد الخطأ أى $E(\epsilon_i^2) = \sigma^2$. ويوضح الشكل رقم (1.7) العلاقة المتوقعة بين Y كمتغير تابع و X كمتغير مستقل فى حالة ثبات تباين حد الخطأ . ويلاحظ من هذا الشكل أن تباين حد الخطأ لا يعتمد على قيم X .



شكل رقم (1.7)

ثبات تباين حد الخطأ فى نموذج الانحدار البسيط

ويوضح الشكل رقم (2.7) حالة عدم ثبات تباين حد الخطأ في نموذج الانحدار البسيط $[E(\epsilon_i^2) \neq \sigma^2]$. وفى هذا الشكل يلاحظ أن زيادة X سوف تؤدى إلى زيادة تباين حد الخطأ ، أى أن تباين حد الخطأ يعتمد على قيم X .



شكل رقم (2.7)

عدم ثبات تباين حد الخطأ فى نموذج الانحدار البسيط

ويرتبط عدم ثبات تباين حد الخطأ ببيانات المقطع المستعرض - Cross section data أكثر من بيانات السلسلة الزمنية Time - series data . إن بيانات المقطع المستعرض عبارة عن بيانات يتم تجميعها عن متغير ما فى لحظة زمنية معينة . مثال ذلك ، بيانات الإنفاق الإستهلاكى عند مستويات مختلفة لدخول الأفراد فى عام 1970 . أما بيانات السلسلة الزمنية فهى بيانات يتم تجميعها عن متغير ما عبر فترة زمنية معينة . مثال ذلك ، بيانات الناتج القومى الإجمالى لمصر عن الفترة 1974 - 1990 .

2.7 أسباب عدم ثبات تباين حد الخطأ

The Reasons of Heteroscedasticity

هناك عدم أسباب لعدم ثبات تباين حد الخطأ منها ما يلى :

1 – **زيادة تعلم الأفراد** : إذا زاد تعلم الأفراد فإن الأخطاء التى تترتب على سلوكهم الشخصى سوف تقل عبر الزمن . ومن ثم فإن تباين حد الخطأ سوف يقل .

2 – **زيادة دخول الأفراد** : إذا زادت دخول الأفراد فإن تباين حد الخطأ سوف يزيد . فتباين الإنفاق على الغذاء بين العائلات يمكن أن يزيد بزيادة دخل العائلة .

3 – **تحسن أساليب تجميع البيانات** : إذا تحسنت أساليب تجميع البيانات فإن الأخطاء سوف تقل . ومن ثم سوف يقل تباين حد الخطأ . مثال ذلك ، إن الأخطاء التى ترد بالمستندات فى البنوك التى يتوافر فيها

آلات لتحليل البيانات تكون أقل من مثيلتها فى البنوك التى لا يتوافر فيها مثل هذه الآلات .

3.7 آثار عدم ثبات تباين حد الخطأ

The Consequences of Heteroscedasticity

إذا طُبقت طريقة المربعات الصغرى العادية فى تقدير نموذج ما مع وجود عدم ثبات تباين حد الخطأ فإن :

1 – القيم المقدرة لمعاملات الانحدار سوف تكون غير متحيزة .

2 – تباين القيم المقدرة لمعاملات الانحدار سوف لا يكون أقل ما يمكن .

3 – اختبار الفروض وتكوين حدود الثقة سوف يكون صعباً .

4 – التنبؤ بإستخدام نتائج تقدير هذا النموذج سوف يكون غير ممكناً .

4.7 أكتشاف عدم ثبات تباين حد الخطأ

Detection of Heteroscedasticity

يتم أكتشاف عدم ثبات تباين حد الخطأ بواسطة عدة اختبارات منها ما يلى :

1.4.7 اختبار Park

بفرض أن :

$$Y_i = \propto + \beta X_i + \epsilon_i \quad , \quad i = 1, 2, \dots, N \qquad (1.7)$$

حيث أن :

Y = القيمة الفعلية للمتغير التابع

، X = القيمة الفعلية للمتغير المستقل

، ϵ = القيمة الفعلية لحد الخطأ

، $\propto , \beta$ = القيم الفعلية لمعاملات الانحدار

، N = عدد المشاهدات

يمكن بيان كيفية استخدام اختبار Park فى أكتشاف عدم ثبات تباين حد الخطأ من خلال الخطوات التالية :

1 - تطبيق طريقة المربعات الصغرى العادية على المعادلة رقم (1.7) فينتج ما يلى :

$$\hat{Y}_i = \hat{\propto} + \hat{\beta} X_i + e_i \qquad (2.7)$$

حيث أن :

$\hat{Y}$ = القيمة المقدرة لـ Y

، $\hat{\propto}$ = القيمة المقدرة لـ $\propto$

، $\hat{\beta}$ = القيمة المقدرة لـ β

، e = القيمة المقدرة لـ $\in$

2 - الحصول على البواقى أو القيم المقدرة لحد الخطا (e_i) من المعادلة رقم (2.7) كما يلى :

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i \qquad (3.7)$$

3 - استخدام طريقة المربعات الصغرى العادية فى إجراء انحدار $\ln e_i^2$ على $\ln X_i$ فينتج ما يلى :

$$\ln \hat{e}_i^2 = \hat{a} + \hat{b} \ln X_i \qquad (4.7)$$

4 - ايجاد القيمة المحسوبة لاختبار T بالنسبة لـ $\hat{b}$ كما يلى :

$$T(\hat{b}) = \frac{\hat{b}}{SE(\hat{b})} \qquad (5.7)$$

حيث :

$$SE(\hat{b}) = \sqrt{Var(\hat{b})} \qquad (6.7)$$

$$Var(\hat{b}) = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sum x_i^2} \qquad (7.7)$$

$$(8.7) \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum e_i^2}{DF}$$

$$(9.7) \quad x_i = X_i - \bar{X}$$

$$(10.7) \quad DF = N - K + 1$$

حيث أن :

SE = الخطأ المعيارى

، Var = التباين

، $\hat{\sigma}^2$ = التباين المقدر لحد الخطأ

، X = الوسط الحسابى لـ X

، DF = درجات الحرية

، K = عدد المتغيرات المستقلة

، K + 1 = عدد معاملات الانحدار المقدرة

5- ايجاد القيمة الجدولية لاختبار T ، ويتم ذلك بالبحث فى الجدول رقم (1.A) الوارد فى نهاية هذا الكتاب[1] عند درجات حرية معينة (N-K+1) ومستوى معنوية معين .

6 – **مقارنة القيمة المحسوبة لاختبار T بالقيمة الجدولية له :**

– فإذا كانت قيمة T المحسوبة أكبر من قيمة T الجدولية ، يتم قبول الفرض

---

(1) من الآن فصاعداً ، سوف يتم التركيز عند البحث فى الجدول رقم (1.A) على القيمة الجدولية لأختبار T من الجانبين .

البديل القائل بأن $\hat{b} \neq 0$. ويقال فى هذه الحالة أن $\hat{b}$ معنوية احصائياً . ويدل هذا على وجود مشكلة عدم ثبات تباين حد الخطأ .

- أما إذا كانت قيمة T المحسوبة أقل من قيمة T الجدولية . يتم قبول فرض العدم القائل فإن $\hat{b} = 0$. ويقال فى هذه الحالة أن $\hat{b}$ غير معنوية احصائياً . ويدل هذا على وجود افتراض ثبات تباين حد الخطأ

مثال تطبيقى

بفرض أن نموذج الانحدار المراد تقديره كان كما يلى :

$$Y_i = \propto + \beta X_i + \in_i \quad , \quad i = 1, 2, ..., N \qquad (11.7)$$

حيث أن :

Y = الإنفاق الإستهلاكى

X = الدخل المتاح للإنفاق ،

وإن بيانات هذا النموذج معطاة فى الجدول رقم (1.7) . المطلوب أكتشاف عدم ثبات تباين حد الخطأ بإستخدام اختبار Park .

جدول رقم (1.7)

بيانات X_i , Y_i بالمليون جنيه[1]

X_i	Y_i
10	8.0
10	8.2
10	8.3
10	8.1
10	8.7
15	12.3
15	9.4
15	11.6
15	12.0
15	8.9
20	15.0
20	16.0
20	12.0
20	11.3
20	19.1
25	19.1
25	18.6
25	22.4
25	23.1
25	15.1

(1) لاحظ أن هذه بيانات المقطع المستعرض .

تابع جدول رقم (1.7)

X_i	Y_i
30	24.2
30	16.7
30	27.0
30	26.0
30	22.1

الحل :

يمكن بيان كيفية استخدام اختبار Park فى أكتشاف عدم ثبات تباين حد الخطأ من خلال الخطوات التالية :

1 – تطبيق طريقة المربعات الصغرى العادية على المعادلة رقم (11.7) فينتج ما يلى :

$$\hat{Y}_i = - .152 + .774 X_i \qquad (12.7)$$

2 – ايجاد e_i من المعادلة السابقة ، ثم ايجاد e_i^2 .

3 – ايجاد كل من $\ln e_i^2$, $\ln X_i$ [الجدول رقم (2.7)] .

جدول رقم (2.7)

بيانات $\ln e_i^2$, $\ln X_i$

$\ln \acute{e}_i^2$	$\ln X_i$
- 1.77	2.30
- 0.98	2.30
- 0.68	2.30
- 1.34	2.30
0.21	2.30
- 0.34	2.71
1.44	2.71
- 3.90	2.71
- 1.22	2.71
1.88	2.71
- 2.23	3.00
- 0.79	3.00
2.40	3.00
2.79	3.00
2.66	3.00
- 4.65	3.22
- 1.03	3.22
2.33	3.22
2.72	3.22
2.82	3.22
0.25	3.40
3.70	3.40
2.74	3.40
2.15	3.40
- 0.07	3.40

4 – استخدام طريقة المربعات الصغرى العادية فى إجراء انحدار $\ln e_i^2$ على $\ln X_i$ فينتج ما يلى :

$$(13.7) \quad \ln \hat{e}_i^2 = -6.214 + 2.249 \ln X_i$$

5 – ايجاد القيمة المحسوبة لاختبار T بالنسبة لمعامل $\ln X_i$ $(\hat{b})$ كما يلى :

$$(14.7) \quad T(\hat{b}) = \frac{\hat{b}}{SE(\hat{b})} = \frac{2.249}{1.086} = 2.071$$

6 – ايجاد القيمة الجدولية لاختبار T . بالبحث فى الجدول رقم (1.A) الوارد فى نهاية هذا الكتاب عند درجات حرية عددها 23 ومستوى معنوية قدره 5% تبين أن القيمة الجدولية لاختبار T تساوى 2.069 .

7 – مقارنة القيمة المحسوبة لاختبار T بالقيمة الجدولية له . وحيث أن قيمة T المحسوبة (2.071) أكبر من قيمة T الجدولية (2.069) فإن $\hat{b}$ معنوية احصائياً . ويدل هذا على وجود مشكلة عدم ثبات تباين حد الخطأ .

2.4.7 اختبار Goldfeld - Quandt

بفرض أن :

$$(15.7) \quad Y_i = \propto + \beta X_i + \in_i \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, N$$

يمكن بيان كيفية استخدام إختبار Goldfeld - Quandt فى أكتشاف عدم ثبات تباين حد الخطأ من خلال الخطوات التالية :

1 – ترتيب مشاهدات X ترتيبا تصاعديا .

2 – استبعاد المشاهدات الوسطى لكل من X , Y ، ثم تكوين مجموعتين من

المشاهدات بحيث يكون لكل مجموعة على حدة معادلة خاصة بها كما يلى :

- **المجموعة الأولى** : وتتمثل فى المشاهدات الخاصة بكل من Y , X الواردة قبل المشاهدات التى تم استبعادها ، والمعادلة الخاصة بهذه المجموعة هى :

$$Y_{1i} = \propto_0 + \beta_1 X_{1i} + \epsilon_{1i} \qquad (16.7)$$

- **المجموعة الثانية** : وتتمثل فى المشاهدات الخاصة بكل من Y , X الواردة بعد المشاهدات التى تم استبعادها . والمعادلة الخاصة بهذه المجموعة هى :

$$Y_{2i} = \propto_1 + \beta_2 X_{2i} + \epsilon_{2i} \qquad (17.7)$$

3 – تطبيق طريقة المربعات الصغرى العادية على المعادلتين (17.7),(16.7) فينتج ما يلى :

$$\hat{Y}_{1i} = \hat{\propto}_0 + \hat{\beta}_1 X_{1i} + e_{1i} \qquad (18.7)$$

$$\hat{Y}_{2i} = \hat{\propto}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2i} + e_{2i} \qquad (19.7)$$

4 – الحصول على القيم المقدرة لحد الخطأ للمعادلتين السابقتين (e_{2i} , e_{1i}) كما يلى :

$$e_{1i} = Y_{1i} - \hat{Y}_{1i} \qquad (20.7)$$

$$e_{2i} = Y_{2i} - \hat{Y}_{2i} \qquad (21.7)$$

5 – ايجاد القيمة المحسوبة لاحصائية F كما يلى :

$$(22.7) \quad \hat{F} = \frac{\sum e_{2i}^{2}}{\sum e_{1i}^{2}}$$

6 – ايجاد درجات الحرية (DF) للمعادلة رقم (22.7) كما يلى :

$$(23.7) \quad DF = \frac{N - M - 2K + 1}{2}$$

حيث أن :

N = عدد المشاهدات

، M = عدد المشاهدات المستبعدة

، K = عدد المتغيرات المستقلة

، K + 1 = عدد معاملات الانحدار فى النموذج

7 – ايجاد القيمة الجدولية لاحصائية F . ويتم ذلك بالبحث فى الجدول رقم (2.A) الوارد فى نهاية هذا الكتاب عند درجات الحرية لكل من البسط والمقام ومستوى معنوية معين .

8 – مقارنة بين القيم المحسوبة لاحصائية F والقيمة الجدولية لها :

– فإذا كانت قيمة F المحسوبة أكبر من قيمة F الجدولية ، يتم قبول الفرض البديل القائل بوجود مشكلة عدم ثبات تباين حد الخطأ .

- أما إذا كانت قيمة F المحسوبة أقل من قيمة F الجدولية ، يتم قبول فرض العدم المتمثل فى وجود افتراض ثبات تباين حد الخطأ .

لاحظ أن اختبار Goldfeld - Quandt يمكن تطبيقه على أى متغير مستقل فى نموذج الانحدار المتعدد يُحتمل أن يكون المسبب فى وجود مشكلة عدم ثبات تباين حد الخطأ .

مثال تطبيقى

المطلوب اكتشاف عدم ثبات تباين حد الخطأ باستخدام اختبار Goldfeld - Quandt فى المثال التطبيقى السابق .

الحل :

يمكن بيان كيفية استخدام اختبار Goldfeld - Quandt فى أكتشاف عدم ثبات تباين حد الخطأ من خلال الخطوات التالية :

1- ترتيب مشاهدات X ترتيباً تصاعدياً .

2 - استبعاد المشاهدات الوسطى لكل من X , Y : يتم استبعاد مجموعة الدخل المساوى 20000 جنيه . ومن ثم تكون عدد المشاهدات المستبعدة (M) = 5 .

3 - تقسيم المشاهدات الباقية إلى مجموعتين من المشاهدات بحيث يكون لكل مجموعة على حدة معادلة خاصة بها .

4 - تطبيق طريقة المربعات الصغرى العادية على المعادلة الخاصة بالمجموعة الأولى من المشاهدات - الواردة قبل المشاهدات المستبعدة - فينتج ما يلى :

$$\hat{Y}_{1i} = 1.96 + .708\ X_i$$

$$\sum e_{1i}^2 = 10.18$$

5 – تطبيق طريقة المربعات المربعات الصغرى العادية على المعادلة الخاصة بالمجموعة الثانية من المشاهدات – الواردة بعد المشاهدات المستبعدة – ينتج ما يلى :

$$\hat{Y}_{2i} = 3.1 + .516\ X_i$$

$$\sum e_{2i}^2 = 108.31$$

6 – ايجاد القيمة المحسوبة لاحصائية F كما يلى :

$$\hat{F} = \frac{\sum e_{2i}^2}{\sum e_{1i}^2} = \frac{108.31}{10.18} = 10.64$$

7 – ايجاد درجات الحرية (DF) للمعادلة السابقة كما يلى :

$$DF = \frac{N - M - 2\,K + 1}{2} = \frac{25 - 5 - 2\,(2)}{2} = 8$$

8 – ايجاد القيمة الجدولية لاحصائية F . بالبحث فى جدول رقم (2.A) الوارد فى نهاية الكتاب عند درجات حرية عددها 8 لكل من البسط والمقام ومستوى معنوية 5% تبين أن قيمة F الجدولية تساوى 3.44 .

9 – مقارنة القيمة المحسوبة لاحصائية F بالقيمة الجدولية لها . وحيث أن قيمة F المحسوبة (10.64) أكبر من قيمة F الجدولية (3.44) . فإن الفرض البديل القائل بوجود مشكلة عدم ثبات تباين حد الخطأ سوف يُقبل .

3.4.7 اختبار معامل ارتباط الرتب لـ Spearman

يقيس معامل ارتباط الرتب لـ Spearman درجة الارتباط بين مجموعتين من الرتب .

ويفرض أن :

$$Y_i = \propto + \beta X_i + \in_i \qquad (24.7)$$

يمكن بيان كيفية استخدام معامل ارتباط الرتبة لـ Spearman فى أكتشاف عدم ثبات تباين حد الخطأ من خلال الخطوات التالية :

1 – تطبيق طريقة المربعات الصغرى العادية على المعادلة رقم (24.7) فينتج ما يلى :

$$\hat{Y}_i = \hat{\propto} + \hat{\beta} X_i + e_i \qquad (25.7)$$

2 – الحصول على البواقى او القيم المقدرة لحد الخطا للمعادلة السابقة (e_i) كما يلى :

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i \qquad (26.7)$$

3 – اهمال إشارة e_i اى اخذ القيم المطلقة لـ e_i $(|e_i|)$ ، ثم ترتيب كل من $|e_i|$, X_i طبقاً لتزايد او تناقص الرتب .

4 - تقدير معامل ارتباط الرتب لـ Spearman (r_s) كما يلى :

$$r_s = 1 - \left[\frac{6 \sum d_i^2}{N (N^2 - 1)} \right] \qquad (27.7)$$

حيث أن :

d_i = الفرق بين كل رتبتين متناظرتين (X_i - | e_i |)

، N = عدد المشاهدات

5 - ايجاد القيمة المحسوبة لاختبار T كما يلى :

$$\hat{T} = \frac{r_s \sqrt{N - 2}}{\sqrt{1 - r_s^2}} \qquad (28.7)$$

6 - ايجاد القيمة الجدولية لاختبار T . ويتم ذلك بالبحث فى الجدول رقم (1.A) الوارد فى نهاية هذا الكتاب عند درجات حرية معينة + N - K) (1 ومستوى معنوية معين وليكن 5% .

7 - مقارنة القيمة المحسوبة لاختبار T بالقيمة الجدولية له :

- فإذا كانت قيمة T المحسوبة أكبر من قيمة T الجدولية ، يتم قبول الفرض البديل القائل بوجود مشكلة عدم ثبات تباين حد الخطأ .

- أما إذا كانت قيمة T المحسوبة أقل من قيمة T الجدولية ، يتم قبول فرض العدم المتمثل فى وجود افتراض ثبات تباين حد الخطأ .

لاحظ أنه إذا كان نموذج الانحدار يتضمن أكثر من متغير مستقل واحد ، يتم تقدير r_s بين $|e_i|$ وكل متغير مستقل على حدة ثم القيام بإختبار المعنوية الاحصائية بواسطة اختبار T للحكم على وجود أو عدم وجود افتراض ثبات تباين حد الخطأ كما سبق ايضاحه .

مثال تطبيقي

يعطى الجدول رقم (3.7) بيانات كل من X_i , $|e_i|$. المطلوب استخدام اختبار معامل ارتباط الرتب لـ Spearman فى اكتشاف عدم ثبات تباين حد الخطأ .

جدول رقم (3.7)

بيانات X_i , $|e_i|$

X_i	$\|e_i\|$
12.4	1.017
14.4	1.260
14.6	0.181
16.0	0.202
11.3	0.221
10.0	0.602
16.2	0.908
10.4	0.110
13.1	0.077
11.3	0.038

الحل :

يمكن بيان كيفية استخدام معامل ارتباط الرتب لـ Spearman فى أكتشاف عدم ثبات تباين حد الخطأ من خلال الخطوات التالية :

1 – ايجاد رتب كل من $|e_i|$, X_i طبقاً لتزايد الرتب كما يلى :

– ترتيب كل من $|e_i|$, X_i تصاعدياً [جدول رقم (4.7)] .

جدول رقم (4.7)

i	$\mid e_i \mid$ مرتبة ترتيباً تصاعدياً	X_i مرتبة ترتيباً تصاعدياً
1	0.038	10.0
2	0.077	10.4
3	0.110	11.3
4	0.181	11.3
5	0.202	12.4
6	0.221	13.1
7	0.602	14.4
8	0.908	14.6
9	1.017	16.0
10	1.260	16.2

– ايجاد رتب كل من $|e_i|$, X_i تصاعدياً [جدول رقم (5.7)] .

جدول رقم (5.7)

X_i	$\lvert e_i \rvert$	رتب X_i	رتبة $\lvert e_i \rvert$
12.4	1.017	5	9
14.4	1.260	7	10
14.6	0.181	8	4
16.0	0.202	9	5
11.3	0.221	3.5	6
10.0	0.602	1	7
16.2	0.908	10	8
10.4	0.110	2	3
13.1	0.077	6	2
11.3	0.038	3.5	1

لاحظ إنه إذا كان هناك قيمتين متساويتين لـ X يجب أن يكون رتبة كل منهما متساوية أى ترتيب واحد وهو الوسط الحسابى للرتبتين أى :

$$\frac{\text{رتبة القيمة الأولى + رتبة القيمة الثانية}}{2}$$

2 – تقدير معامل ارتباط الرتب لـ Spearman (r_s) بإستخدام بيانات جدول رقم (6.7) كما يلى :

جدول رقم (6.7)

رتب X_j	رتب $\lvert e_i \rvert$	d_i	d_i^2
5	9	- 4	16
7	10	- 3	9
8	4	4	16
9	5	4	16
3.5	6	- 2.5	6.25
1	7	- 6	36
10	8	2	4
2	3	- 1	1
6	2	4	16
3.5	1	2.5	6.25
		0	126.5

$$d_i = X_i - \lvert e_i \rvert$$

$$r_s = 1 - [\frac{6 \sum d_i^2}{N (N^2 - 1)}]$$

$$= 1 - [\frac{(6) (126.5)}{10 (100 - 1)}] = 0.233$$

3 – ايجاد القيمة المحسوبة لاختبار T كما يلى :

$$\hat{T} = \frac{r_s \sqrt{N - 2}}{\sqrt{1 - r_s^2}} = \frac{(0.233)\ \sqrt{8}}{\sqrt{1 - (0.233)^2}} = 0.678$$

4 – ايجاد القيمة الجدولية لاختبار T . بالبحث فى جدول رقم (1.A) الوارد فى نهاية هذا الكتاب عند درجات حرية عددها 8 ومستوى معنوية قدره 5% تبين أن قيمة T الجدولية تساوى 2.306 .

5 – مقارنة القيمة المحسوبة لاختبار T بالقيمة الجدولية لها . وحيث أن قيمة T المحسوبة (0.678) أقل من قيمة T الجدولية (2.306) ، فإن العلاقة بين $|e_i|$, X_i علاقة غير معنوية . ومن ثم يتم قبول فرض العدم القائل بوجود افتراض ثبات تباين حد الخطأ .

5.7 معالجة عدم ثبات تباين حد الخطأ

Remedy of Heteroscedasticity

يتم معالجة مشكلة عدم ثبات تباين حد الخطأ من خلال إجراء تحويل للنموذج الأصلى . ويتوقف شكل النموذج الأصلى المحول على نمط عدم ثبات تباين حد الخطأ المكتشف فى النموذج الأصلى المقدر .

وبفرض أن النموذج الأصلى كان كما يلى :

$$Y_i = \propto + \beta X_i + \epsilon_i \qquad (29.7)$$

وهناك عدة أنماط (افتراضات) لعدم ثبات تباين حد الخطأ . ويختلف النموذج أو المعادلة المحولة من افتراض إلى آخر .

الإفتراض الأول

$$E(\epsilon_i^2) = \sigma^2 X_i^2 \qquad (30.7)$$

وطبقاً لهذا الافتراض يتم تحويل النموذج الأصلى إلى الشكل التالى :

$$\frac{Y_i}{X_i} = \frac{\propto}{X_i} + \beta + \frac{\epsilon_i}{X_i} = \propto \frac{1}{X_i} + \beta + v_i \qquad (31.7)$$

حيث v_i عبارة عن حد الخطأ المحول (ϵ_i / X_i) .

وبإجراء انحدار $\frac{Y_i}{X_i}$ على $\frac{1}{X_i}$ مستخدماً طريقة المربعات الصغرى العادية نحصل على ما يلى :

$$\frac{Y_i}{X_i} = \hat{\propto} \frac{1}{X_i} + \hat{\beta} \qquad (32.7)$$

وبضرب المعادلة المحولة المقدرة السابقة فى X_i يتم الحصول على النموذج الأصلى بعد معالجة عدم ثبات تباين حد الخطأ .

$$\hat{Y}_i = \hat{\propto} + \hat{\beta} X_i \qquad (33.7)$$

ويتضح مما سبق أن الحد الثابت فى النموذج المحول (β) هو عبارة عن ميل معامل الانحدار للنموذج الأصلى ، وميل معامل الانحدار للنموذج المحول هو عبارة عن الحد الثابت فى النموذج الأصلى .

الافتراض الثانى

$$(34.7) \qquad E(\epsilon_i^2) = \sigma^2 X_i$$

وطبقاً لهذا الافتراض يتم تحويل النموذج الأصلى إلى المعادلة التالية :

$$(35.7) \qquad \frac{Y_i}{\sqrt{X_i}} = \frac{\propto}{\sqrt{X_i}} + \beta \sqrt{X_i} + \frac{\epsilon_i}{\sqrt{X_i}}$$

$$= \propto \frac{1}{\sqrt{X_i}} + \beta \frac{1}{\sqrt{X_i}} + v_i$$

حيث $\epsilon_i / \sqrt{X_i} = v_i$, $X_i > 0$.

ويتم تطبيق طريقة المربعات الصغرى العادية على المعادلة رقم (35.7) من خلال إجراء انحدار $\frac{Y_i}{\sqrt{X_i}}$ على $1 / \sqrt{X_i}$, $\sqrt{X_i}$

الافتراض الثالث

$$(36.7) \qquad E(\epsilon_i^2) = \hat{Y}_i^2 \sigma^2$$

وطبقاً لهذا الافتراض تكون المعادلة المحولة كما يلى :

$$(37.7) \qquad \frac{Y_i}{Y_i} = \propto \frac{1}{Y_i} + \beta \frac{X_i}{Y_i} + \frac{\epsilon_i}{Y_i}$$

الافتراض الرابع

$$(38.7) \qquad E(\epsilon_i^2) = | e_i | \sigma^2$$

ويتضمن هذا الافتراض أن تباين حد الخطأ دالة خطية لبواقى طريقة المربعات الصغرى العادية . وطبقاً لهذا الافتراض تكون المعادلة المقدرة كما يلى :

$$(39.7)\quad \frac{Y_i}{\sqrt{|e_i|}} = \propto \frac{1}{\sqrt{|e_i|}} + \beta \frac{X_i}{\sqrt{|e_i|}} + \frac{\epsilon_i}{\sqrt{|e_i|}}$$

الافتراض الخامس

وهو عبارة عن التحويلات اللوغاريتمية . إن تحويل النموذج الأصلى إلى الصيغة اللوغاريتمية المزدوجة سوف يؤدى غالباً إلى تقليل درجة عدم ثبات تباين حد الخطأ . ومن ثم طبقاً لهذا الافتراض تكون المعادلة المحولة المناسبة للنموذج الأصلى كما يلى :

$$(40.7)\qquad \ln Y_i = \propto + \beta \ln X_i + \epsilon_i$$

مثال تطبيقى

يعطى جدول رقم (7.7) الادخار (S_i) والدخل الشخصى المتاح للإنفاق (X_i) ، كليهما بالمليون جنيه ، لإحدى الدول من 1981 إلى 1991 .

جدول رقم (7.7)

i	S_i	X_i
1981	264	8777
1982	105	9210
1983	90	9954
1984	131	10508
1985	122	10979
1986	107	11912
1987	406	12747
1988	503	13499
1989	431	14269
1990	588	15522
1991	898	16730

وبفرض أن معادلة الانحدار المقدرة كانت كما يلى :

$$\hat{S}_i = -644.1 + 0.085 X_i$$

وإن هذه المعادلة تتضمن مشكلة عدم ثبات تباين حد الخطأ . المطلوب إجراء معالجة لهذه المشكلة .

الحل :

وبإفتراض أن نمط عدم ثبات تباين حد الخطأ كان كما يلى :

$$E(\epsilon_i^2) = \sigma^2 X_i^2$$

وبالتالى تكون المعادلة المحولة المناسبة للنموذج الأصلى على النحو التالى :

$$\frac{S_i}{X_i} = \frac{\alpha}{X_i} + \beta + \frac{\epsilon_i}{X_i}$$

$$= \alpha \frac{1}{X_i} + \beta + \frac{\epsilon_i}{X_i}$$

ويمكن توضيح خطوات معالجة مشكلة عدم ثبات تباين حد الخطأ كما يلى :

1 - ايجاد المتغيرات المحولة ($1/X_i$, S_i/X_i) [الجدول رقم (8.7)] .

جدول رقم (8.7)

المتغيرات المحولة

i	S_i / X_i (x 1000)	$1 / X_i$ (x 10000)
1981	30.079	1.139
1982	11.401	1.086
1983	9.042	1.005
1984	12.467	0.952
1985	11.112	0.911
1986	8.983	0.839
1987	31.851	0.785
1988	37.262	0.741
1989	30.205	0.701
1990	37.882	0.644
1991	53.676	0.598

2 - اجراء انحدار S_i / X_i على $1 / X_i$ مستخدماً طريقة المربعات الصغرى العادية .

$$\frac{S_i}{X_i} = - 718.88 \; \frac{1}{X_i} \; + 0.088$$

3 - ايجاد معادلة الادخار الجديدة .

$$\hat{S}_i = - 718.88 \; + \; 0.088 \, X_i$$

4 - إجراء اختبار لاكتشاف وجود مشكلة عدم ثبات تباين حد الخطأ :

- حساب معامل ارتباط الرتب لـ Spearman $(r_s = - 0.22)$.

- ايجاد القيمة المحسوبة لاختبار T كما يلى :

$$\hat{T} = \frac{r_s \sqrt{N - 2}}{\sqrt{1 - r_s^2}} = \frac{(-0.22)\sqrt{7}}{\sqrt{1 - (-0.22)^2}} = -0.597$$

- ايجاد القيمة الجدولية لاختبار T . بالبحث فى جدول رقم (1.A) الوارد فى نهاية هذا الكتاب عند درجات حرية عددها 9 ومستوى معنوية قدره 5% تبين أن قيمة T الجدولية تساوى 2.262 .

- مقارنة القيمة المحسوبة لاختبار T بالقيمة الجدواية لها . وحيث أن قيمة T المحسوبة (|0.597|) أقل من قيمة T الجدولية (2.262) ، فإن العلاقة بين $|e_i|$, X_i علاقة غير معنوية . ومن ثم يمكن القول أن المعادلة المحولة أدت إلى الغاء مشكلة عدم ثبات تباين حد الخطأ .

6.7 الملخص

1 – إن ثبات تباين حد الخطأ هو أحد الافتراضات الكلاسيكية لنموذج الانحدار الخطى .

2 – فى حالة وجود مشكلة عدم ثبات تباين حد الخطأ سوف تكون :

- القيم المقدرة لمعاملات الانحدار غير متحيزة .
- تباين القيم المقدرة لمعاملات الانحدار أقل ما يمكن .

3 – هناك عدة اختبارات لاكتشاف مشكلة عدم ثبات تباين حد الخطأ منها :

- اختبار Park .
- اختبار Goldfeld - Quandt .
- اختبار معامل ارتباط الرتب لـ Spearman .

4 – لمعالجة مشكلة عدم ثبات تباين حد الخطأ يتم إجراء تحويل للنموذج الأصلى المقدر الذى يوجد به هذه المشكلة . ويتوقف شكل النموذج الأصلى المحول على نمط عدم تباين حد الخطأ الوارد بالنموذج الأصلى المقدر .

الفصل الثامن

8 الازدواج الخطى

MULTICOLLINEARITY

يعتبر عدم الارتباط بين المتغيرات المستقلة فى نموذج الانحدار المراد تقديره أحد افتراضات نموذج الانحدار الخطى . وبإسقاط هذا الافتراض ، أى إذا ارتبطت المتغيرات المستقلة بعضها بالبعض الآخر ، فإن ذلك يدل على وجود ما يسمى بالازدواج الخطى Multicollinearity .

وينقسم هذا الفصل إلى خمسة نقاط : أولها طبيعة الازدواج الخطى . وثانيها أسباب الازدواج الخطى . وثالثها آثار الازدواج الخطى . ورابعها أكتشاف الازدواج الخطى . وخامسها معالجة الازدواج الخطى .

1.8 طبيعة الأزدواج الخطى
The Nature of Multicollinearity

الازدواج الخطى يعنى وجود ارتباط خطى تام بين بعض أو كل المتغيرات المستقلة فى نموذج الانحدار .

ويفرض أن نموذج الانحدار المراد تقديره كان كما يلى :

$$Y_i = \propto + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \epsilon_i \quad , \qquad (1.8)$$

$$i = 1, 2, \ldots, N$$

حيث أن :

Y = المتغير التابع . ، X_1 , X_2 = المتغيرات المستقلة .

فإن عدم وجود ارتباط خطى بين X_1 , X_2 يعتبر أحد افتراضات هذا النموذج . ومن ثم فإذا كان هناك ارتباط خطى تام بين X_1 , X_2 فسوف يوجد الازدواج الخطى .

فإذا كان معامل الارتباط بين X_1 , X_2 يساوى الواحد الصحيح ، فإن معاملات الانحدار $(\beta_1 , \beta_1 , \propto)$ تكون غير محددة . أى أنه من الصعب الحصول على قيمة عددية لكل معامل على حدة . أما إذا كان معامل الارتباط بين X_1 , X_2 يساوى الصفر ، فلا يوجد هناك أى مشاكل تتعلق بتقديرات معاملات الانحدار . ومن ثم يمكن القول أن مشكلة الازدواج الخطى تؤثر على دقة تقديرات معاملات الانحدار .

2.8 أسباب الازدواج الخطى
The Reasons of Multicollinearity

ينشأ الأزدواج الخطى من عدة أسباب منها ما يلى :

1 - اتجاه المتغيرات الاقتصادية معاً للتغير مع مرور الزمن .

فبمرور الزمن سوف تزيد المتغيرات الاقتصادية التالية معاً : الدخل والاستهلاك والادخار والاستثمار والمستوى العام للاسعار والعمالة . وحيث أن هناك ارتباط بين هذه المتغيرات فإن الازدواج الخطى سوف يتحقق .

2 – **استخدام متغيرات مستقلة ذات فترات أبطاء فى المعادلة المراد تقديرها** . فالدخل فى الفترة الزمنية الحالية يتحدد جزئياً بواسطة قيمته فى الفترة الزمنية السابقة . وحيث أن هناك ارتباط بين القيم المتتالية لمتغير ما فإن الازدواج الخطى سوف يتحقق . ومن ثم فإن الازدواج الخطى غالباً ما يتحقق فى نماذج فترات الابطاء الموزعة .

3.8 آثار الازدواج الخطى

The Consequences of Multicollinearity

إذا طُبقت طريقة المربعات الصغرى العادية فى تقدير نموذج ما مع وجود ازدواج خطى ، فإن :

1 – القيم المقدرة لمعاملات الانحدار سوف تكون غير محددة . ومن ثم سوف تكون غير دقيقة .

2 – الأخطاء المعيارية للقيم المقدرة لمعاملات الانحدار سوف تكون كبيرة جداً .

4.8 أكتشاف الازدواج الخطى

Detection of Multicollinearity

هناك عدة اختبارات لاكتشاف الازدواج الخطى منها ما يلى :

1.4.8 تحليل Firsch

يمكن تلخيص تحليل Frisch فى اختبار الازدواج الخطى فى الخطوات التالية :

1 – إجراء انحدار المتغير التابع على كل متغير مستقل على حدة .

2 – تقييم نتائج التقدير المتحصل عليها من حيث قيمة معامل التحديد (R^2) والأخطاء المعيارية للقيم المقدرة لمعاملات الانحدار .

3 – اختيار المعادلة المقدرة التى تكون نتائج تقديرها أكثر قبولاً من باقى المعادلات المقدرة . لاحظ أن المعادلة المختارة يجب أن تتميز بالآتى :

– أن تكون قيمة R^2 الخاصة بها أكبر من مثيلتها لأى معادلة مقدرة أخرى .

– أن تكون الأخطاء المعيارية للقيم المقدرة لمعاملات الانحدار الخاصة بها أقل من مثيلتها لأى معادلة مقدرة أخرى .

4 – إضافة المتغيرات المستقلة واحد تلو الآخر إلى المعادلة التى تم اختيارها ثم اختبار آثار كل منها على قيمة R^2 والقيم المقدرة لمعاملات الانحدار . وفى هذا المجال يمكن التمييز بين ثلاثة حالات على النحو التالى :

– إذا كان المتغير المستقل المضاف يُحسِّن R^2 فقط ، فإن هذا المتغير مفيد ومن ثم يجب الأبقاء عليه كمتغير مستقل فى المعادلة .

– إذا كان المتغير المستقل المضاف لا يُحسِّن R^2 ولا يؤثر على قيم معاملات الانحدار ، فإن هذا المتغير يجب حذفه من المعادلة .

- إذا كان المتغير المستقل المضاف يؤثر على إشارات وقيم معاملات 257 الانحدار مما يجعلها غير مقبولة من الناحية الاحصائية والاقتصادية ، فإن هذا المتغير يكون هو السبب فى وجود الازدواج الخطى ومن ثم يجب حذفه من المعادلة .

2.4.8 اختبار Farrar - Glauber

اقترح كل من Farrar , Glauber ثلاثة اختبارات لاكتشاف الازدواج الخطى هى :

اختبار χ^2 :

يستخدم اختبار χ^2 لتحديد وجود أو عدم وجود الازدواج الخطى فى المعادلة المقدرة . ولتطبيق هذا الاختبار يجب حساب قيمة محدد الأرتباط . وقيمة محدد الأرتباط هو عبارة عن معاملات الأرتباط البسيطة بين كل متغيرين من المتغيرات المستقلة . وحيث أن معامل الأرتباط بين المتغير ونفسه يساوى واحد صحيح ، فإن القطر الرئيسى لمحدد الأرتباط سوف يكون عبارة عن وحايد ، أما باقى العناصر فسوف يكون أقل من الواحد الصحيح .

فبفرض أن معادلة الأنحدار المقدرة كما يلى :

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_1 + \hat{\beta}_2 X_2 + e \qquad (2.8)$$

فإن محدد الارتباط (D) سوف يكون كما يلى :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & r_{x_2 x_1} \\ r_{x_1 x_2} & 1 \end{vmatrix}$$

حيث أن $r_{x_2 x_1}$ هو عبارة عن معامل الارتباط بين X_2 , X_1 [1] .

ومن ثم يمكن التمييز بين ثلاثة حالات على النحو التالى :

1 – إذا كانت $D = 0$ فهذا يعنى أن هناك ازدواج خطى تام فى المعادلة المقدرة . وفى هذه الحالة سوف تكون كل معاملات الارتباط البسيطة بين كل متغيرين من المتغيرات المستقلة مساوية للواحد الصحيح :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & r_{x_2 x_1} \\ r_{x_1 x_2} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

2 – إذا كانت $D = 1$ فإن هذا يدل على عدم وجود ازدواج خطى فى المعادلة المقدرة . وفى هذه الحالة سوف تكون كل معاملات الارتباط البسيطة بين كل متغيرين من المتغيرات المستقلة مساوية للصفر :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & r_{x_2 x_1} \\ r_{x_1 x_2} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

3 – إذا كانت قيمة محدد الارتباط تنحصر بين الصفر والواحد الصحيح . وفى هذه الحالة ، لأكتشاف الازدواج الخطى يتم اتباع الخطوات التالية :

---

(1) راجع ما تقدم ص 61 للتعرف على كيفية حساب معاملات الارتباط البسيطة .

- **هيكل الاختبار .**

فرض العدم : عدم وجود ارتباط بين المتغيرات المستقلة

ضد الفرض البديل : وجود ارتباط بين المتغيرات المستقلة

- **ايجاد قيمة** χ^2 المحسوبة .

$$\hat{\chi}^2 = - [N - 1 - \frac{1}{6} (2 K + 5)] . \log D \quad (3.8)$$

حيث أن :

N = عدد المشاهدات

K ، = عدد المتغيرات المستقلة فى المعادلة

log D ، = لوغاريتم قيمة محدد الارتباط

- **ايجاد قيمة** χ^2 **الجدولية .**

يتم الحصول على قيمة χ^2 الجدولية بالبحث فى جدول رقم (4.A) الوارد فى نهاية هذا الكتاب عند درجات حرية عددها $\frac{1}{2} K (K - 1)$ ومستوى معنوية معين .

- **مقارنة بين قيمة** χ^2 **المحسوبة وقيمة** χ^2 **الجدولية .**

- فإذا كانت قيمة χ^2 المحسوبة أكبر من قيمة χ^2 الجدولية ، يتم قبول الفرض البديل مما يدل على وجود ازدواج خطى فى المعادلة المقدرة .

- أما إذا كانت قيمة χ^2 المحسوبة أقل من قيمة χ^2 الجدولية ، يتم قبول فرض العدم مما يدل على عدم وجود ازدواج خطى فى المعادلة المقدرة .

اختبار F

يُستخدم اختبار F لتحديد وجود أو عدم وجود ارتباط بين أحد المتغيرات المستقلة وباقى المتغيرات المستقلة .

وبفرض أن معادلة الانحدار المقدرة كانت كما يلى :

$$Y = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_1 + \hat{\beta}_2 X_2 + \hat{\beta}_3 X_3 + e \qquad (4.8)$$

فإن تطبيق اختبار F فى هذا المجال يتم من خلال الخطوات التالية :

1 – حساب معاملات الارتباط المتعدد[1] .

$$R_{x_1 . x_2 x_3} \quad , \quad R_{x_2 . x_3 x_1} \quad , \quad R_{x_3 . x_1 x_2}$$

2 – هيكل الاختبار لكل متغير مستقل .

فمثلاً بالنسبة للمتغير X_1 .

فرض العدم $H_0 : R_{x_1 . x_2 x_3} = 0$

ضد الفرض البديل $H_A : R_{x_1 . x_2 x_3} \neq 0$

وهكذا يمكن صياغة هيكل الاختبار بالنسبة لـ X_2 , X_3 .

3 – ايجاد القيمة المحسوبة لإختبار F لكل متغير مستقل .

فمثلاً بالنسبة للمتغير X_1

$$F(X_1) = \frac{R^2_{x_1 . x_2 x_3} / (K - 1)}{(1 - R^2_{x_1 . x_2 x_3}) / (N - K)} \qquad (5.8)$$

(1) راجع ما تقدم ص 87 للتعرف على كيفية ايجاد معاملات الارتباط المتعدد .

وهكذا يمكن ايجاد $F(X_2)$, $F(X_3)$

حيث أن :

R^2 = معامل التحديد المتعدد

، K = عدد المتغيرات المستقلة

، N = عدد المشاهدات

- ايجاد قيمة F الجدولية .

يتم الحصول على قيمة F الجدولية بالبحث فى جدول رقم (2.A) الوارد ى نهاية هذا الكتاب عند درجات حرية عددها $K - 1$ بالنسبة البسط رجات حرية عددها $N - K$ بالنسبة المقام ومستوى معنوية معين .

- مقارنة قيمة F المحسوبة لكل متغير مستقل بقيمة F الجدولية .

فمثلاً :

إذا كانت $F(X_1) > F$ فسوف يتم قبول الفرض البديل مما يدل على أن المتغير X_1 مرتبط خطياً Multicollinear .

إما إذا كانت $F(X_1) < F$ فسوف يتم قبول فرض العدم مما يدل على أن المتغير X_1 غير مرتبط خطياً .

وهكذا يمكن إجراء هذه المقارنة بالنسبة لـ X_2 , X_3 .

تبار T

يستخدم اختبار T لتحديد المتغيرات المستقلة المسببة فى حدوث الازدواج خطى.

فبفرض أن معادلة الانحدار المقدرة كانت كما يلى :

$$(6.8) \qquad \hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_1 + \hat{\beta}_2 X_2 + \hat{\beta}_3 X_3 + e$$

فإن تطبيق اختبار T لتحديد عما إذا كان المتغيرين X_1 , X_2 (مثلاً) هما المسببين لحدوث الازدواج الخطى من عدمه يتم من خلال الخطوات التالية :

1 - **حساب معامل الارتباط الجزئى بين X_1 , X_2 مع فرض ثبات X_3 .**

$r_{x_1 x_2 . x_3}$ (1)

2 - **هيكل الاختبار .**

فرض العدم : X_1 , X_2 لا يسببان حدوث الازدواج الخطى أى :

$$H_0 : r_{x_1 x_2 . x_3} = 0$$

ضد الفرض البديل X_1 , X_2 يسببان الأزدواج الخطى أى :

$$H_A : r_{x_1 x_2 . x_3} \neq 0$$

3 - **ايجاد القيمة المحسوبة لإختبار T .**

$$(7.8) \qquad \hat{T}_{x_1 x_2 . x_3} = \frac{(r_{x_1 x_2 . x_3}) \sqrt{N - K}}{\sqrt{(1 - r^2_{x_1 x_2 . x_3})}}$$

4 - **ايجاد القيمة الجدولية لإختبار T .**

يتم الحصول على القيمة الجدولية لاختبار T بالبحث فى جدول رقم (1.A) الوارد فى نهاية هذا الكتاب عند درجات حرية عددها N - K ومستوى معنوية معين .

5 - **مقارنة القيمة المحسوبة لإختبار T بالقيمة الجدولية له :**

-- فإذا كانت القيمة المحسوبة لاختبار T أكبر من القيمة الجدولية له ،

(1) راجع ما تقدم ص 88 للتعرف على حساب معاملات الارتباط الجزئية .

فسوف يتم قبول الفرض البديل مما يدل على أن المتغيران X_1 , X_2 يسببان حدوث الازدواج الخطى .

- أما إذا كانت القيمة المحسوبة لاختبار T أقل من القيمة الجدولية له ، فسوف يتم قبول فرض العدم مما يدل على أن X_1 , X_2 لا يسببان حدوث الازدواج الخطى .

5.8 معالجة الازدواج الخطى
Remedy of Multicollinearity

إن وجود الازدواج الخطى لا يعتبر مشكلة – كما سبق ذكره – وأنما المشكلة تتمثل فى درجة الازدواج الخطى . فإذا كانت درجة الازدواج الخطى منخفضة فمن الممكن قبول وجود هذا الازدواج . أما إذا كانت درجة الازدواج الخطى مرتفعة فيجب العمل على معالجة هذا الازدواج .

وهناك عدة طرق لمعالجة الازدواج الخطى منها ما يلى :

1 – زيادة حجم المشاهدات .

2 – إحلال متغيرات ذات فترات ابطاء محل المتغيرات المستقلة الأخرى فى نماذج فترات الإبطاء الموزعة .

3 – حذف متغير أو أكثر من المتغيرات المستقلة .

4 – إيجاد الفرق الأول لكل متغير من المتغيرات المعادلة ثم إعادة إجراء الانحدار مرة أخرى .

5 – إضافة معادلات جديدة للنموذج .

6.8 الملخص

1 – يتحقق الازدواج الخطى إذا كان هناك ارتباط خطى تام بين بعض أو كل المتغيرات المستقلة فى نموذج الانحدار .

2 – ينشأ الازدواج الخطى من عدة أسباب منها :

– اتجاه المتغيرات الاقتصادية معاً للتغير مع مرور الزمن .

– استخدام متغيرات مستقلة ذات فترات ابطاء فى المعادلة المراد تقديرها .

3 – إن القيم المقدرة لمعاملات الانحدار فى حالة وجود الازدواج الخطى سوف تكون غير دقيقة .

4 – هناك عدة اختبارات لاكتشاف الازدواج الخطى منها ما يلى :

– تحليل Frisch .

– اختبار Farrar - Glauber .

5 – إن وجود الازدواج الخطى لا يعتبر مشكلة وإنما المشكلة تتمثل فى درجة الازدواج الخطى .

تقييم نماذج الانحدار المقدرة والتنبؤ

ينقسم هذا الجزء إلى فصلين : أولهما (الفصل التاسع) يختص بتقييم نماذج الانحدار المقدرة . وثانيهما (الفصل العاشر) يختص بإستخدام نماذج الانحدار المقدرة فى التنبؤ .

267

الفصل التاسع

9 تقييم نماذج الانحدار المقدرة

EVALUATION OF THE ESTIMATED REGRESSION MODELS

بعد تقدير نموذج الانحدار ومعالجة مشاكل هذا التقدير ، لا ينبغى التسليم بصحة نتائج هذا التقدير إلا بعد القيام بتقييم هذه النتائج من الناحية الاقتصادية والاحصائية . وبعد الانتهاء من عملية التقييم يتم استخدام نتائج التقدير فى اختبار النظريات أو اتخاذ القرارات أو وضع السياسات .

إن الهدف من هذا الفصل هو تقييم نماذج الانحدار المقدرة . ولتحقيق هذا الهدف ينقسم هذا الفصل إلى ثلاثة نقاط : أولها اختبار المعنوية الاقتصادية لنتائج تقدير نموذج الانحدار . وثانيها اختبار المعنوية الاحصائية لنتائج تقدير نموذج الانحدار . وثالثها اختبار الأداء العام لنموذج الانحدار المقدر .

1.9 اختبار المعنوية الاقتصادية لنتائج تقدير نموذج الانحدار

1.1.9 اختبار الإشارات المقدرة لمعاملات الانحدار

إن اختبار الإشارات المقدرة لمعاملات الانحدار هو عبارة عن اختبار

لمدى اتفاق هذه الإشارات مع الإشارات المتوقعة طبقاً للنظرية الاقتصادية .

مثال تطبيقى

بفرض أن دالة الطلب على سلعة ما تم تقديرها فكانت كما يلى :

$$D = 151.21 - 0.15\,P$$

حيث أن :

D = الكمية المطلوبة من سلعة ما

، P = سعر السلعة

المطلوب اختبار المعنوية الاقتصادية للإشارة المقدرة لمعامل الانحدار

الحل :

طبقاً للنظرية الاقتصادية تعكس دالة الطلب السعرية علاقة عكسية بين سعر سلعة ما كمتغير مستقل والكمية المطلوبة من هذه السلعة كمتغير تابع . بمعنى إذا زاد سعر سلعة ما فسوف تقل الكمية المطلوبة منها والعكس صحيح . ومن ثم فإن إشارة معامل انحدار دالة الطلب السعرية – طبقاً للنظرية الاقتصادية – سوف تكون سالبة .

وحيث أن نتائج التقدير تشير إلى أن معامل انحدار دالة الطلب السعرية ذو إشارة سالبة ، فإن الإشارة المقدرة لمعامل انحدار دالة الطلب السعرية يكون لها معنوية اقتصادية وذلك لاتفاق هذه الإشارة مع مثيلتها الواردة فى النظرية الاقتصادية .

2.1.9 اختبار القيم المقدرة لمعاملات الانحدار

إن اختبار القيم المقدرة لمعاملات الانحدار هو عبارة عن اختبار لمدى اتفاق هذه القيم مع مثيلتها الواردة فى النظرية الاقتصادية .

مثال تطبيقى

بفرض أن المعادلة المقدرة كانت كما يلى :

$$Y = 0.5 \quad MS$$

حيث أن :

Y = الدخل النقدى

، MS = عرض النقود

المطلوب اختبار المعنوية الاقتصادية للقيمة المقدرة لمعامل الانحدار

الحل :

يطلق على معامل انحدار المعادلة السابقة أصطلاح سرعة دوران النقود بالنسبة للدخل ، وهى عبارة عن حاصل قسمة الدخل النقدى على عرض النقود . وطبقاً للنظرية الاقتصادية يجب أن يكون هذا المعامل مساوياً على الأقل الواحد الصحيح . ومن ثم فإن القيمة المقدرة لهذا المعامل غير معنوية اقتصادياً بسبب عدم اتفاقها مع مثيلتها الواردة فى النظرية الاقتصادية .

2.9 اختبار المعنوية الإحصائية لنتائج تقدير نموذج الانحدار

1.2.9 اختبار معنوية معادلة الانحدار المقدرة

بفرض أن معادلة الانحدار المراد تقديرها كانت كما يلى :

$$(1.9)' \qquad Y = \alpha + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \epsilon$$

وإن هذه المعادلة بعد تقديرها سوف تكون كما يلى :

$$(2.9) \qquad \hat{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 X_1 + \hat{\beta}_2 X_2 + \hat{\beta}_3 X_3 + e$$

فإن اختبار المعنوية الكلية لمعادلة الانحدار المقدرة (2.9) يتم باستخدام توزيع F على النحو التالى :

1 - **هيكل الاختبار .**

فرض العدم $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$

ضد الفرض البديل $\beta_k \neq 0$ معامل انحدار واحد على الأقـــــل : H_A

$k = 1, 2, 3$

2 - ايجاد قيمة F المحسوبة .

$$(3.9) \qquad \hat{F} = \frac{RSS / K}{ESS / N - K + 1}$$

$$(4.9) \qquad RSS = \sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2$$

$$i = 1, 2, \ldots, N$$

$$(5.9) \qquad ESS = \sum e_i^2$$

أو

$$\hat{F} = \frac{R^2 / K}{(1 - R^2) / (N - K + 1)} \qquad (6.9)$$

حيث أن :

RSS = مجموع مربعات الانحدار

، ESS = مجموع مربعات الخطأ

، K = عدد المتغيرات المستقلة

، K + 1 = عدد معاملات الانحدار المقدرة

، N = عدد المشاهدات

، R^2 = معامل التحديد المتعدد

3 - ايجاد قيمة F الجدولية .

يمكن الحصول على قيمة F الجدولية بالبحث فى الجدول رقم (2.A) الوارد فى نهاية هذا الكتاب عند درجات حرية عددها K بالنسبة للبسط ودرجات حرية عددها N- K + 1 بالنسبة للمقام ومستوى معنوية معين (5% أو 1%)

4 - مقارنة قيمة F المحسوبة بقيمة F الجدولية :

- فإذا كانت قيمة F المحسوبة أكبر من قيمة F الجدولية ، يتم قبول الفرض البديل مما يدل على أن معاملات الانحدار ليست جميعها مساوية للصفر وأن R^2 تختلف معنوياً عن الصفر . ويعنى هذا أن معادلة الانحدار المقدرة ككل معنوية احصائياً فى شرح سلوك المتغير

التابع .

- إما إذا كانت قيمة F المحسوبة أقل من قيمة F الجدولية ، يتم قبول فرض العدم مما يدل على أن معادلة الانحدار المقدرة غير معنوية احصائياً فى شرح سلوك المتغير التابع وأن R^2 غير معنوية احصائياً .

مثال تطبيقى

بفرض أعطيت لك المعلومات التالية :

$$N = 10, \quad K = 2, \quad K + 1 = 3, \quad R^2 = 0.9548$$

حيث أن :

N = عدد المشاهدات

، K = عدد المتغيرات المستقلة

، K + 1 = عدد معاملات الانحدار المقدرة

، R^2 = معامل التحديد المتعدد

المطلوب اختبار المعنوية الكلية لمعادلة الانحدار المقدرة عند مستوى معنوية قدره 5% .

الحل :

يمكن ايضاح كيفية اختبار المعنوية الكلية لمعادلة الانحدار المقدرة من خلال الخطوات التالية :

1 - **ايجاد قيمة F المحسوبة** .

$$\frac{R^2 / K}{(1 - R^2) / (N - K + 1)}$$

$$= \frac{0.9548 / 2}{(1 - 0.9548) / (10 - 3)} \cong 73.93$$

2 - ايجاد قيمة F الجدولية .

بالبحث فى جدول رقم (2.A) الوارد فى نهاية هذا الكتاب عند درجات حرية عددها 2(K) بالنسبة للبسط ودرجات حرية عددها 7 (N - K + 1) بالنسبة للمقام ومستوى معنوية قدره 5% تبين أن قيمة F الجدولية تساوى 4.74 .

3 - مقارنة قيمة F المحسوبة بقيمة F الجدولية .

وحيث أن قيمة F المحسوبة (73.93) أكبر من قيمة F الجدولية (4.74) ، فإن الفرض البديل سوف يقبل مما يدل على أن معادلة الانحدار المقدرة معنوية احصائياً فى شرح سلوك المتغير التابع .

2.2.9 اختبار معنوية معامل الانحدار المقدر

بفرض أن معادلة الانحدار المراد تقديره كان كما يلى :

$$Y = \propto + \beta X_1 + \in \qquad (7.9)$$

وإن هذه المعادلة بعد تقديرها سوف تكون كما يلى :

$$\hat{Y} = \hat{\propto} + \hat{\beta} X_1 + e \qquad (8.9)$$

فإن اختبار معنوية معاملات الانحدار المقدرة $(\hat{\beta}, \hat{\propto})$ يتم باستخدام اختبار T على النحو التالى :

1 - هيكل الاختبار .

فرض العدم $\quad H_0 : \propto = 0 , \beta = 0$

ضد الفرض البديل $H_A : \propto \neq 0 , \beta \neq 0$

2 - ايجاد القيمة المحسوبة لإختبار T

$$(9.9) \quad \hat{T}(\hat{\propto}) = \frac{\hat{\propto}}{SE(\hat{\propto})^{(1)}}$$

$$(10.9) \quad \hat{T}(\hat{\beta}) = \frac{\hat{\beta}}{SE(\hat{\beta})^{(1)}}$$

3 - ايجاد القيمة الجدولية لإختبار T .

يمكن الحصول على قيمة T الجدولية بالبحث فى الجدول رقم (1.A) الوارد فى نهاية هذا الكتاب عند درجات حرية عددها $N - K + 1$ ومستوى معنوية معين (5% أو 1%) .

4 - مقارنة القيمة المحسوبة لإختبار T بالقيمة الجدولية له :

- فإذا كانت القيمة المحسوبة لاختبار T أكبر من القيمة الجدولية لاختبار T ، يتم قبول الفرض البديل مما يدل على معنوية معامل الانحدار .
- أما إذا كانت القيمة المحسوبة لاختبار T أقل من القيمة الجدولية لاختبار T ، يتم قبول فرض العدم مما يدل على عدم معنوية معامل الانحدار .

هذا ويمكن اختبار معنوية معاملات الانحدار من خلال اختبار F ، حيث أن :

---

(1) راجع ما تقدم الفصل الثانى للتعرف على كيفية ايجاد الخطأ المعيارى لمعامل الانحدار المقدر .

$$(11.9) \quad \hat{F}(\hat{\alpha}) = \hat{T}^2(\hat{\alpha})$$

$$(12.9) \quad \hat{F}(\hat{\beta}) = \hat{T}^2(\hat{\beta})$$

مثال تطبيقى .

بفرض أعطيت لك المعلومات التالية :

$\hat{\beta}_1 = .78 \quad , \quad K = 2$

$K + 1 = 3 \quad , \quad SE(\hat{\beta}_1) = .08 \quad , \quad N = 5$

حيث أن :

$\hat{\beta}_1 =$ القيمة المقدرة لـ β_1

، $K =$ عدد المتغيرات المستقلة

، $K+1 =$ عدد معاملات الانحدار المقدرة

، $SE(\hat{\beta}_1) =$ الخطأ المعيارى لتقدير معامل الانحدار β_1

، $N =$ عدد المشاهدات

المطلوب اختبار فرض العدم $\beta_1 = 0$ عند مستوى معنوية قدره 5% بواسطة استخدام توزيع كل من F , T .

الحل :

- اختبار فرض العدم $\beta_1 = 0$ عند مستوى معنوية قدره 5% بواسطة توزيع T .

يتم ذلك من خلال الخطوات التالية :

1 – ايجاد القيمة المحسوبة لاختبار T .

$$\hat{T}\,(\hat{\beta}_1) = \frac{\hat{\beta}}{SE\,(\hat{\beta})} = \frac{.78}{.08} = 9.75$$

2 – ايجاد القيمة الجدولية لاختبار T .

بالبحث فى الجدول رقم (1.A) الوارد فى نهاية هذا الكتاب عند درجات حرية عددها 2 (N - K + 1) ومستوى معنوية قدره 5% تبين أن قيمة T الجدولية تساوى 4.303 .

3 – مقارنة القيمة المحسوبة لاختبار T بالقيمة الجدولية له .

وحيث أن قيمة T المحسوبة (9.75) أكبر من قيمة T الجدولية (4.303) ، فإن فرض العدم $\beta = 0$ سوف يُرفض . ومن ثم يمكن القول إن المتغير المستقل له دوراً هاماً فى تفسير التغيرات التى تحدث فى المتغير التابع . أى أن β_1 معنوية احصائياً .

- اختبار فرض العدم $\beta_1 = 0$ عند مستوى معنوية قدره 5% بواسطة توزيع F .

يتم ذلك من خلال الخطوات التالية :

1 – ايجاد القيمة المحسوبة لاختبار F .

$$\hat{F}\,(\hat{\beta}_1) = \hat{T}^2\,(\hat{\beta}_1) = (9.75)^2 = 95.06$$

2 – ايجاد القيمة الجدولية لاختبار F .

بالبحث فى الجدول رقم (2.A) الوارد فى نهاية هذا الكتاب عند درجات حرية عددها 2 (K) بالنسبة للبسط ودرجات حرية قدرها 2 (N - K + 1) بالنسبة للمقام ومستوى معنوية قدره 5% تبين أن قيمة F الجدولية تساوى 19.0 .

3 – مقارنة قيمة F المحسوبة بقيمة F الجدولية .

وحيث أن قيمة F المحسوبة (95.06) أكبر من قيمة F الجدولية (19.0) ، فإن فرض العدم سوف يُرفض (نفس النتائج التى تم التوصل إليها باستخدام توزيع T) .

3.9 اختبار الأداء العام لنموذج الانحدار المقدر

إن اختبار الأداء العام لنموذج الانحدار المقدر هو عبارة عن اختبار لقدرة نموذج الانحدار المقدر على التنبؤ بالماضى Ex post Forecast أو بالواقع خلال الفترة الزمنية للتقدير . ويتم ذلك من خلال حساب معامل التحديد بين القيم الفعلية والقيم المقدرة للمتغير التابع (R'^2) أو اختبار معنوية الفرق بين القيمة المقدرة والقيمة الفعلية للمتغير التابع أو حساب معامل عدم التساوى لـ Theil (U) .

1.3.9 معامل التحديد بين القيم الفعلية والقيم المقدرة للمتغير التابع (R'^2)

إن حساب معامل التحديد بين القيم الفعلية والقيم المقدرة للمتغير التابع (أو لكل متغير تابع إذا كان نموذج الانحدار المقدر يحتوى على أكثر من معادلة) ، يوضح مدى قدرة نموذج الانحدار المقدر على تفسير الواقع خلال الفترة الزمنية للتقدير .

ويمكن حساب معامل التحديد بين القيم الفعلية والقيم المقدرة للمتغير التابع (R'^2) بالصيغة التالية :

$$(13.9) \qquad R'^2 = 1 - \frac{\sum e_t^2}{\sum (Y_t - \bar{Y})^2}$$

$$(14.9) \qquad e_t = Y_t - \hat{Y}_t \quad , \qquad t = 1, 2, ..., N$$

حيث أن :

e = القيمة المقدرة لحد الخطأ

، Y = القيمة الفعلية للمتغير التابع

، $\hat{Y}$ = القيمة المقدرة للمتغير التابع

، $\bar{Y}$ = الوسط الحسابى للقيم الفعلية الخاصة بالمتغير التابع

، N = عدد المشاهدات

ويلاحظ أنه إذا كانت قيمة R'^2 مرتفعة ، فإن قدرة نموذج الانحدار المقدر على التنبؤ بالواقع خلال الفترة الزمنية للتقدير سوف تكون جيدة . أما إذا كانت قيمة R'^2 منخفضة ، فإن قدرة نموذج الانحدار المقدر على التنبؤ بالواقع خلال الفترة الزمنية للتقدير سوف تكون سيئة .

2.3.9 اختبار معنوية الفرق بين القيمة المقدرة والقيمة الفعلية للمتغير التابع

طبقاً لهذا الاختبار يكون فرض العدم $H_0 : \hat{Y} = Y$

ضد الفرض البديل $H_A : \hat{Y} \neq Y$.

ويمكن صياغة اختبار معنوية الفرق بين القيمة المقدرة والقيمة الفعلية للمتغير التابع كما يلى :

$$(15.9) \quad \hat{T} = \frac{Y - \hat{Y}}{\hat{\sigma}\sqrt{1 + \frac{1}{N} + \frac{(X - \bar{X})^2}{\sum (X_t - \bar{X})^2}}}$$

حيث أن :

$\hat{T}$ = القيمة المحسوبة لاختبار T

، Y = القيمة الفعلية للمتغير التابع

، $\hat{Y}$ = القيمة المقدرة للمتغير التابع

، X = القيمة الفعلية للمتغير المستقل

، $\bar{X}$ = الوسط الحسابى لـ X

، $\hat{\sigma}$ = القيمة المقدرة لحد الخطأ

، N = عدد المشاهدات

وبمقارنة القيمة المحسوبة لاختبار T بالقيمة الجدولية لها :

- فإذا كانت قيمة T المحسوبة أكبر من قيمة T الجدولية ، يتم قبول الفرض البديل مما يدل على أن الفرق بين القيمة الفعلية والقيمة المقدرة للمتغير التابع $(Y - \hat{Y})$ يكون معنوياً.ومن ثم يمكن القول بأن نموذج الانحدار المقدر يتميز بقدرة تنبؤية سيئة .

- أما إذا كانت قيمة T المحسوبة أقل من قيمة T الجدولية ، يتم قبول فرض العدم مما يدل على عدم معنوية الفرق بين Y , $\hat{Y}$. ومن ثم يمكن القول بأن الأداء التنبؤى لنموذج الانحدار المقدر سوف يكون جيداً .

مثال تطبيقى

بفرض أعطيت لك المعلومات التالية :

$$\hat{Y}_t = 4.0 + 0.846 X_t$$

حيث أن :

$\hat{Y}$ = القيمة المقدرة لـ Y

، Y = القيمة الفعلية للإنفاق الإستهلاكى الشخصى

، X = الدخل الشخصى المتاح للإنفاق

، t = الزمن

، N = عدد المشاهدات = 12

، $\bar{X}$ = الوسط الحسابى لـ X = 250

، $X_{(1990)}$ = الدخل الشخصى المتاح للإنفاق فى عام 1990 = 600 مليون جنيه

، $Y_{(1990)}$ = الإنفاق الإستهلاكى الشخصى فى عام 1990 = 650 مليون جنيه

، $\sum (X_t - \bar{X})^2$ = 3745

، $\hat{\sigma}$ = القيمة المقدرة لحد الخطأ = 3.28

المطلوب تحديد عما إذا كان الفرق بين $Y_{(1990)}$ ، $\hat{Y}_{(1990)}$ معنوياً أم لا ؟

الحل :

يمكن تحقيق المطلوب من خلال الخطوات التالية :

1 – ايجاد $\hat{Y}_{(1990)}$ كما يلى :

$$\hat{Y}_{(1990)} = 4.0 + 0.846\ (600) = 511.6 \cong 512$$

2 – ايجاد القيمة المحسوبة لاختبار T كما يلى :

$$\hat{T} = \frac{Y - \hat{Y}}{\hat{\sigma}\sqrt{1 + \frac{1}{N} + \frac{(X - \bar{X})^2}{\sum (X_t - \bar{X})^2}}}$$

$$\hat{T} = \frac{650 - 512}{3.28\sqrt{1 + \frac{1}{12} + \frac{(600 - 250)2}{3745}}}$$

$$= \frac{138}{19.067} \cong 7.24$$

3 – ايجاد القيمة الجدولية لاختبار T . بالبحث فى الجدول رقم (1.A) الوارد فى نهاية هذا الكتاب عند درجات حرية عددها 10 ومستوى معنوية قدره 5% تبين أن القيمة الجدولية لاختبار T تساوى 2.23 .

4 – مقارنة القيمة المحسوبة لاختبار T بالقيمة الجدولية له .. وحيث أن قيمة T المحسوبة (7.24) أكبر من قيمة T الجدولية (2.23) فإن الفرق بين

$Y_{(1990)}$ ، $\hat{Y}_{(1990)}$ يكون معنوياً . ومن ثم فإن القدرة التنبؤية لدالة الاستهلاك تكون سيئة .

3.3.9 معامل عدم التساوى لـ Theil (U)

يُعرَّف معامل عدم التساوى لـ Theil (U) بالصيغة التالية :

$$U = \frac{\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}(\hat{Y}_t - Y_t)^2}}{\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}(\hat{Y}_t)^2} + \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}(Y_t)^2}} \qquad (16.9)$$

$$t = 1, 2, \ldots, N$$

حيث أن :

N = عدد المشاهدات

$\hat{Y}$ = القيمة المقدرة للمتغير التابع ،

Y = القيمة الفعلية للمتغير التابع ،

وتتراوح قيمة U بين الصفر والواحد الصحيح . فإذا كانت $U = 0$ ، فإن قدرة نموذج الانحدار المقدر على التنبؤ بالواقع خلال الفترة الزمنية للتقدير سوف تكون جيدة . أما إذا كانت $U > 1$ ، فإن قدرة نموذج الانحدار المقدر على التنبؤ بالواقع خلال الفترة الزمنية للتقدير سوف تكون سيئة .

مثال تطبيقى

يوضح الجدول رقم (1.9) القيم المقدرة للصادرات بالمليون جنيه لدولة معينة من نموذجين مختلفين والقيم الفعلية للصادرات . ماهو أفضل نموذج من حيث القدرة على التنبؤ بقيم الصادرات خلال الفترة الزمنية للتقدير 1981 - 1990 .

جدول رقم (1.9)

السنة	القيم الفعلية للصادرات Y_t	القيم المقدرة للصادرات من النموذج الأول $\hat{Y}_{1t}$	القيم المقدرة للصادرات من النموذج الثانى $\hat{Y}_{2t}$
1981	20	30	28
1982	30	25	26
1983	32	28	36
1984	25	28	25
1985	29	25	21
1986	26	30	39
1987	32	30	34
1988	36	39	30
1989	32	34	40
1990	31	30	38

الحل :

من الجدول رقم (2.9) يمكن إجراء الآتى :

جدول رقم (2.9)

السنة	Y_t	$\hat{Y}_{1t}$	$(\hat{Y}_{1t}-Y_t)^2$	$\hat{Y}_{2t}$	$(\hat{Y}_{2t}-Y_t)^2$
1981	20	30	100	28	64
1982	30	25	25	26	16
1983	32	28	16	36	16
1984	25	28	9	25	0
1985	29	25	16	21	64
1986	26	30	16	39	169
1987	32	30	4	34	4
1988	36	39	9	30	36
1989	32	34	4	40	64
1990	31	30	1	38	49
N=10	293	299	200	317	482

$$U_1 = \frac{\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}(\hat{Y}_{1t}-Y_t)^2}}{\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}(\hat{Y}_{1t})^2}+\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}(Y_t)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{(200)}{10}}}{\sqrt{\frac{(299)^2}{10}} + \sqrt{\frac{(293)^2}{10}}} = 0.024$$

$$U_2 = \frac{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} (\hat{Y}_{2t} - Y_t)^2}}{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} (\hat{Y}_{2t})^2} + \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} (Y_t)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{(482)}{10}}}{\sqrt{\frac{(317)^2}{10}} + \sqrt{\frac{(293)^2}{10}}} = 0.036$$

ومن ثم يمكن القول أن القدرة التنبؤية للنموذج الأول تكون أفضل من القدرة التنبؤية للنموذج الثانى لأن $U_1 < U_2$. لاحظ أن كل من النموذجين يتمتع بقدرة تنبؤية جيدة وذلك بسبب قرب معامل عدم التساوى لكل منهما من الصفر .

4.9 الملخص

1 – اختبار المعنوية الاقتصادية لنتائج تقدير نموذج الانحدار هو اختبار لمدى اتفاق كل من الإشارات والقيم المقدرة لمعاملات الانحدار مع مثيلتهما الواردة فى النظرية الاقتصادية .

2 – اختبار المعنوية الكلية لمعادلة الانحدار المقدرة هو اختبار لمدى أهمية المعادلة المقدرة ككل فى تفسير التغيرات التى تحدث فى المتغير التابع .

3 – اختبار معنوية معامل انحدار مقدر معين هو اختبار لمدى أهمية المتغير المستقل لهذا المعامل فى تفسير التغيرات التى تحدث فى المتغير التابع .

4 – للحكم العام على أداء نموذج الانحدار المقدر يفضل استخدام معامل عدم التساوى لـ Theil (U) . فإذا كانت U قريبة من الصفر ، فإن ذلك يدل على أن نموذج الانحدار المقدر يتميز بقدرة تنبؤية جيدة خلال الفترة الزمنية للتقدير .

الفصل العاشر

10 استخدام نماذج الانحدار المقدرة فى التنبؤ

USING OF THE ESTIMATED REGRESSION MODELS IN FORECASTING

إن الهدف من هذا الفصل هو استخدام نتائج تقدير نماذج الانحدار فى التنبؤ بالمستقبل Ex ante .

ولتحقيق هذا الهدف ينقسم هذا الفصل إلى ثلاثة نقاط : أولها استخدام نتائج تقدير نموذج الانحدار الخطى فى التنبؤ بالمستقبل . وثانيها استخدام نتائج تقدير نموذج المعادلات الآنية فى التنبؤ بالمستقبل . وثالثها استخدام نتائج تقدير معادلة الاتجاه العام فى التنبؤ بالمستقبل .

1.10 استخدام نتائج تقدير نموذج الانحدار الخطى فى التنبؤ بالمستقبل

من بين أهداف الاقتصاد القياسى هو التنبؤ بقيم المتغيرات التابعة فى المستقبل فى ظل قيم معطاة للمتغير المستقل (أو المتغيرات المستقلة)[1] .

(1) راجع ما تقدم ص 20 .

ولكى يمكن أستخدام نموذج الانحدار المقدر فى التنبؤ بالمستقبل ، يجب أن يكون الأداء العام لهذا النموذج جيداً[1] .

ويمكن التنبؤ بقيم المتغير التابع فى ظل قيم معطاة للمتغير المستقل (أو المتغيرات المستقلة) بطريقتين هما :

1.1.10 التنبؤ بنقطة Point Prediction

التنبؤ بنقطة يعنى التنبؤ بقيمة محددة واحدة للمتغير التابع فى المستقبل فى ظل افتراض قيمة معينة للمتغير المستقل (أو قيمة معينة لكل متغير مستقل على حدة) .

وبفرض أن :

$$Y_i = \propto + \beta X_i \quad , \quad i = 1, 2, \ldots , N \qquad (1.10)$$

حيث أن :

Y = القيمة الفعلية للمتغير التابع

، X = القيمة الفعلية للمتغير المستقل

، $\propto , \beta$ = القيم الفعلية لمعاملات الانحدار

، N = عدد المشاهدات

يمكن بيان كيفية تقدير القيمة المتنبأ بها لـ Y فى المستقبل من خلال الخطوات التالية :

1 – تطبيق طريقة المربعات الصغرى العادية على المعادلة رقم (1.10) فينتج ما يلى :

---

(1) راجع ما تقدم ص 277 .

$$\hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i \qquad (2.10)$$

حيث أن :

$\hat{Y}$ = القيمة المقدرة للمتغير التابع

، $\hat{\alpha}$ = القيمة المقدرة لـ α

، $\hat{\beta}$ = القيمة المقدرة لـ β

2 – تقييم الأداء العام للمعادلة رقم (2.10) بإستخدام معامل عدم التساوى (U) .

3 – إذا اسفرت عملية التقييم فى الخطوة السابقة عن أن المعادلة رقم (2.10) تتميز بأداء عام جيد ، يتم استخدام $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ فى التنبؤ بقيمة المتغير التابع فى المستقبل بفرض أن X تأخذ قيمة معينة كما يلى :

$$\hat{Y}_f = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_f \qquad (3.10)$$

حيث أن :

$\hat{Y}_f$ = القيمة المتنبأ بها لـ Y فى المستقبل

، X_f = القيمة المعطاة (المفترضة) لـ X فى الفترة الزمنية للتنبؤ بالمستقبل

ويتضح مما سبق أن التنبؤ بنقطة هو تنبؤ شرطى ، لأن قيمة $\hat{Y}_f$ تعتمد على قيمة X_f بجانب توافر الافتراضات التالية :

– استمرار العلاقة الهيكلية بين X , Y فى الفترة الزمنية للتنبؤ كما كانت قائمة فى الفترة الزمنية للتقدير .

- عدم تغير معاملات الانحدار المقدرة بين الفترة الزمنية للتقدير والفترة الزمنية للتنبؤ .

2.1.10 التنبؤ بمدى Interval Prediction

التنبؤ بمدى يعنى التنبؤ بالمدى الذى يمكن للقيمة الحقيقية للمتغير التابع فى المستقبل أن تتراوح فيه .

ويمكن بيان كيفية التنبؤ بمدى من خلال الخطوات التالية :

1 - ايجاد القيمة المتنبأ بها للمتغير التابع فى المستقبل طبقاً للمعادلة رقم (3.10) .

2 - ايجاد تباين القيمة المتنبأ بها للمتغير التابع فى المستقبل كما يلى :

$$\text{Var}(\hat{Y}_f) = \hat{\sigma}^2 \left[\frac{1}{N} + \frac{(X_f - \bar{X})^2}{\sum x_i^2}\right] \tag{4.10}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum e_i^2}{DF} \tag{5.10}$$

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i \tag{6.10}$$

$$DF = N - K + 1 \tag{7.10}$$

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{N} \tag{8.10}$$

$$(9.10) \qquad x_i = X_i - \bar{X}$$

حيث أن :

التباين = Var

، $\hat{\sigma}^2$ = التباين المقدر لحد الخطأ

، DF = درجات الحرية

، K = عدد المتغيرات المستقلة

، K + 1 = عدد معاملات الانحدار المقدرة

، $\bar{X}$ = الوسط الحسابى لـ X

3 – ايجاد الخطأ المعيارى للقيمة المتنبأ بها للمتغير التابع فى المستقبل كما يلى :

$$(10.10) \qquad SE(\hat{Y}_f) = \sqrt{Var(\hat{Y}_f)}$$

4 – ايجاد المدى الذى يمكن للقيمة الحقيقية للمتغير التابع فى المستقبل أن تتراوح فيه . وبافتراض حدود ثقة قدرها 95% فإن هذا المدى يكون كما يلى :

$$(11.10) \qquad \hat{Y}_f \pm [SE(\hat{Y}_f)] \ [T_{(0.025)}]$$

أو

$$\hat{Y}_f - [SE(\hat{Y}_f)] \ [T_{(0.025)}] < Y_f < \hat{Y}_f$$

$$(12.10) \qquad + [SE(\hat{Y}_f)] \ [T_{(0.025)}]$$

حيث أن $T_{(0.025)}$ عبارة عن قيمة اختبار T الجدولية عند درجات حرية (N- K+1) ومستوى معنوية قدره 5% $[T_{(0.025)}=T_{(0.05)}/2]$.

مثال تطبيقى

يُعطى الجدول رقم (1.10) الواردات من السلع الاستثمارية (Y_i) والإنتاج الصناعى الغذائى (X_i) ، كليهما بالمليون جنيه ، لإحدى الدول من 1981 إلى 1991 .

وبتطبيق طريقة المربعات الصغرى العادية على بيانات الجدول رقم (1.10) تم الحصول على ما يلى :

$$\hat{Y}_i = 167.145 + 0.703\, X_i$$

المطلوب التنبؤ بالمدى الذى يمكن للواردات من السلع الاستثمارية فى عام 1995 أن يتراوح فيه بأحتمال قدره 95% بإفتراض أن قيمة الإنتاج الصناعى الغذائى فى نفس العام سوف تكون 5390 مليون جنيه .

جدول رقم (1.10)

الواردات من السلع الاستثمارية (Y_i) والانتاج الصناعى

الغذائى (X_i) بالمليون جنيه ، 1981 - 1991 :

السنة	Y_i	X_i
1981	386.7	778.0
1982	562.6	871.0
1983	820.0	989.0
1984	865.0	1158.0
1985	1684.7	1443.0
1986	1770.8	1734.0
1987	1862.9	2083.0
1988	1949.0	2547.0
1989	2062.3	3098.0
1990	2311.8	3441.0
1991	30.76.3	3925.0

الحل :

يمكن بيان كيفية التنبؤ بالمدى الذى يمكن للواردات من السلع الاستثمارية فى عام 1995 أن يتراوح فيه بأحتمال قدره 95% من خلال الخطوات التالية :

1 – ايجاد قيمة الواردات من السلع الاستثمارية فى عام 1995 (التنبؤ بنقطة) كما يلى :

$$\hat{Y}_{1995} = 167.145 + 0.703\ (5390) = 3956.3$$

2 – ايجاد الخطأ المعيارى لقيمة الواردات من السلع الاستثمارية فى عام 1995 . ومن بيانات الجدول رقم (2.10) يمكن تحقيق ذلك على النحو التالى :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum e_i^2}{DF} = \frac{801896.3}{9} = 89099.589$$

$$\overline{X} = \frac{\sum X_i}{N} = \frac{22067}{11} = 2006.091 \cong 2006$$

$$(X_f - \overline{X})^2 = (5390 - 2006)^2 = 11451456$$

$$\sum x_i^2 = 12171232$$

$$\text{Var}(\hat{Y}_f) = \hat{\sigma}^2 \left[\frac{1}{N} + \frac{(X_f - \overline{X})^2}{\sum x_i^2}\right]$$

$$= 89099.589 \left[\frac{1}{11} + \frac{11451456}{12171232}\right] = 91930.426$$

$$SE(\hat{Y}_f) = \sqrt{\text{Var}(\hat{Y}_f)} = \sqrt{91930.426} = 303.200$$

جدول رقم (2.10)

البيانات المستخدمة فى تقدير الخطأ المعيارى

لقيمة الواردات من السلع الاستثمارية عام 1995 :

$\hat{Y}_i$	Y_i	e_i	e_i^2	x_i	x_i^2
714.1	386.7	- 327.4	107190.8	- 1228	1507984
779.5	562.6	- 216.9	47045.6	- 1135	1288225
862.4	820.0	- 42.4	1797.8	- 1017	1034289
981.2	865.0	- 116.2	13502.4	- 848	719104
1181.6	1684.7	503.1	253109.6	- 563	316969
1386.2	1770.8	384.6	147917.2	- 272	73984
1631.5	1862.9	231.4	53546.0	77	5929
1957.7	1949.0	- 8.7	75.7	541	292681
2345.1	2062.3	- 282.8	79975.8	1091	1190281
2586.2	2311.8	- 274.4	75295.4	1435	2059225
2926.5	3076.3	149.8	22440.0	1919	3682561
17352	17352.1	0.1	801896.3	0	12171232

3 – ايجاد القيمة الجدولية لاختبار T : بالبحث فى جدول رقم (1.A) الوارد فى نهاية هذا الكتاب عند درجات حرية عددها 9 وعند مستوى معنوية قدره 5% تبين أن قيمة T الجدولية تساوى 2.262 .

ومن ثم فإن المدى الذى يمكن للواردات من السلع الاستثمارية أن يتراوح فيه باحتمال قدره 95% فى عام 1995 يكون كما يلى :

$$\hat{Y}_f - [SE(\hat{Y}_f)]\,[T_{(0.025)}] < Y_f < \hat{Y}_f + [SE(\hat{Y}_f)]\,[T_{(0.025)}]$$

$$(3956.3)-(303.200)(2.262) < Y_f < (3956.3)+(303.200)(2.262)$$

$$3270.462 < Y_f < 4642.138$$

ويعنى ذلك أن الواردات من السلع الاستثمارية فى عام 1995 يتوقع (باحتمال قدره 95%) أن تتراوح بين 3270.462 , 4642.138 مليون جنيه .

2.10 استخدام نتائج تقدير نموذج المعادلات الآنية فى التنبؤ بالمستقبل

بعد الحصول على معاملات الانحدار المقدرة للمعادلات السلوكية لنموذج معادلات آنية معين ، يمكن استخدام هذه المعاملات فى التنبؤ بقيم المتغيرات الداخلية لهذا النموذج إذا ما تم التعرف على قيم المتغيرات المحددة سلفاً خلال الفترة الزمنية للتنبؤ .

مثال تطبيقى

بفرض أن نموذج المعادلات الآنية المراد استخدام نتائج تقديره فى التنبؤ بالمستقبل كان كما يلى :

$$(13.10) \quad C_t = a_0 + a_1 (Y_t - Tx_t) + \in_1$$

$$(14.10) \quad I_t = b_0 + b_1 Y_t + b_2 Y_{t-1} + \in_2$$

$$(15.10) \quad Tx_t = cY_t + \in_3$$

$$(16.10) \quad M_t = m_0 + m_1 Y_t + m_2 P_{t-1} + \in_4$$

$$(17.10) \quad Y_t = C_t + I_t + G_t + E_t - M_t$$

حيث أن :

- **المتغيرات الداخلية هى :**

C_t = الإنفاق الإستهلاكى

، I_t = الإنفاق الإستثمارى

، Tx_t = الضرائب

، M_t = الواردات

، Y_t = الدخل القومى

- **المتغيرات المحددة سلفاً هى :**

- المتغيرات الخارجية .

G_t = الإنفاق الحكومى

، E_t = الصادرات

- **المتغيرات الداخلية ذات فترات الإبطاء .**

Y_{t-1} = الدخل القومى بفترة ابطاء سنة واحدة

، P_{t-1} = مستوى السعر بفترة ابطاء سنة واحدة

وبتطبيق طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين (لأن المعادلات السلوكية لهذا النموذج محددة أكثر مما ينبغى) على المعادلات السلوكية للنموذج السابق مستخدماً بيانات سلسلة زمنية تغطى الفترة 1970 - 1990 تم الحصول على ما يلى :

$$\hat{C}_t = 20 + 0.8\ (Y_t - Tx_t)$$

$$\hat{I}_t = 2 + 0.1\ Y_t + 0.3\ Y_{t-1}$$

$$\hat{T}x_t = 0.2\ Y_t$$

$$\hat{M}_t = 3 + 0.1\ Y_t + 0.1\ P_{t-1}$$

والمطلوب استخدام نتائج تقدير هذا النموذج فى التنبؤ بالمتغيرات الداخلية فى عام 1995 إذا علمت أن المتغيرات المحددة سلفاً فى هذا العام سوف تأخذ القيم التالية :

$G = 20$, $Y_{t-1} = 150$,

$E = 10$, $P_{t-1} = 110$

الحل :

- ايجاد قيمة الدخل القومى فى عام 1995 :

$$Y_t = a_0 + a_1 Y_t - a_1 Tx_t + b_0 + b_1 Y_t + b_2 Y_{t-1} + G_t + E_t - m_0 - m_1 Y_t - m_2 P_{t-1}$$

$$= a_0 + a_1 Y_t - a_1 c Y_t + b_0 + b_1 Y_t + b_2 Y_{t-1} + G_t + E_t - m_0 - m_1 Y_t - m_2 P_{t-1}$$

$$\therefore \quad Y - a_1 Y_t - a_1 c Y_t - b_1 Y_t + m_1 Y_t = a_0 + b_0 - m_0 + G_t + E_t + b_2$$

$$(1 - a_1 + a_1 c - b_1 + m_1) Y_t = a_0 + b_0 - m_0 + G_t + E_t + b_2 Y_{t-1} - m_2 P_{t-1}$$

$$\therefore \quad Y_t = \frac{a_0 + b_0 - m_0 + G_t + E_t + b_2 Y_{t-1} - m_2 P_{t-1}}{1 - a_1 + a_1 c - b_1 + m_1}$$

وحيث أن :

$\hat{a}_0 = 20$, $\hat{b}_0 = 2$,

$\hat{a}_1 = .8$, $\hat{b}_1 = .1$,

$\hat{c} = .2$, $\hat{b}_2 = .3$,

$\hat{m}_0 = 3$, $P_{1994} = 110$,

$\hat{m}_1 = .1$, $Y_{1994} = 150$,

$\hat{m}_2 = .1$, $G_{1995} = 20$, $E_{1995} = 10$

فإن :

$$\hat{Y}_{1995} = \frac{(20) + (2) - (3) + (20) + (10) + (.3)(150) - (.1)(110)}{(1) - (.8) + (.8)(.2) - (.1) + (.1)}$$

$$= \frac{83}{0.36} = 230.5$$

- ايجاد قيمة الضرائب فى عام 1995 .

$$\hat{Tx}_{1995} = 0.2\ (230.5) = 46.1$$

- ايجاد قيمة الإنفاق الإستهلاكى فى عام 1995 .

$$\hat{C}_{1995} = 20 + 0.8\ (230.5 - 46.1) = 167.52$$

- ايجاد قيمة الإنفاق الإستثمارى فى عام 1995 .

$$\hat{I}_{1995} = 2 + 0.1\ (230.5) + 0.3\ (150) = 70.05$$

- ايجاد قيمة الواردات فى عام 1995 .

$$\hat{M}_{1995} = 3 + 0.1 (230.5) + 0.1 (110) = 37.05$$

ومن ثم يمكن بيان مكونات الدخل فى عام 1995 كما يلى :

$$Y_t = C_t + I_t + G_t + E_t - M_t$$

$$\hat{Y}_{1995} = 167.52 + 70.05 + 20 + 10 - 37.05 = 230.5$$

لاحظ أن التنبؤ السابق هو تنبؤ شرطى . لأن دقة هذا التنبؤ تعتمد على توافر ما يلى :

- أن تكون القيم المفترضة (المعطاة) للمتغيرات المحددة سلفاً هى نفسها التى سوف تسود فى الفترة الزمنية للتنبؤ .
- ثبات معاملات الانحدار المقدرة .
- بقاء العوامل الأخرى على ماهية عليه .

3.10 استخدام نتائج تقدير معادلة الاتجاه العام فى التنبؤ بالمستقبل

الاتجاه العام هو عبارة عن التغير (الزيادة أو النقص) المنتظم والعشوائى للمتغيرات الاقتصادية خلال فترة زمنية طويلة . وبقياس الاتجاه العام للمتغيرات الاقتصادية يمكن التعرف على سلوك هذه المتغيرات فى الماضى والحاضر ومن ثم يمكن استخدامه كأساس للتنبؤ بالمستقبل .

ويتناول هذا البند نقطتين : أولهما استخدام نتائج تقدير معادلة الاتجاه العام الخطية فى التنبؤ بالمستقبل . وثانيهما استخدام نتائج تقدير معادلة الاتجاه العام غير الخطية فى التنبؤ بالمستقبل .

1.3.10 استخدام نتائج تقدير معادلة الاتجاه العام الخطية فى التنبؤ بالمستقبل

- حالة إذا كان عدد المشاهدات فردياً .

مثال تطبيقى

بفرض أن معادلة الاتجاه العام المراد استخدام نتائج تقديرها فى التنبؤ بالمستقبل كانت كما يلى

$$(18.10) \qquad Y_i = \propto + \beta\ X_i \quad , \quad i = 1, 2, \dots , N$$

حيث أن :

Y = استهلاك الطاقة

، X = الزمن

، $\propto$ = معامل ثابت ، ويوضح قيمة Y عندما $X = 0$

، β = ميل خط الاتجاه العام ، ويمثل التغير (الزيادة أو النقص) فى Y نتيجة تغير X بوحدة واحدة

ويضم الجدول رقم (3.10) بيانات افتراضية لـ Y_i , X_i .

والمطلوب التنبؤ بالقيمة الاتجاهية لاستهلاك الطاقة فى عام 1998

جدول رقم (3.10)

بيانات X_i , Y_i

X_i	Y_i
1970	66.9
1971	68.3
1972	71.6
1973	74.6
1974	72.7
1975	70.6
1976	74.0

الحل :

بوضع المعادلة رقم (18.10) فى الشكل التالى :

$$Y_i = \propto + \beta\ x'_i \qquad (19.10)$$

$x'_i =$ السنة الوسطى – السنة المطلوب ايجاد القيمة الاتجاهية لها

ويضم الجدول رقم (4.10) البيانات المستخدمة فى التقدير . ومن هذا الجدول يمكن الحصول على ما يلى :

جدول رقم (4.10)

بيانات السلاسل الزمنية لاستهلاك الطاقة المستخدمة فى التقدير

X_i	Y_i	x'_i	$x'_i\ Y_i$	x'^2_i	$\hat{Y}_i$
1970	66.9	- 3	- 200.7	9	68.35
1971	68.3	- 2	- 136.6	4	69.31
1972	71.6	- 1	- 71.6	1	70.27
1973	74.6	0	0	0	71.24
1974	72.7	1	72.7	1	72.20
1975	70.6	2	141.2	4	73.17
1976	74.0	3	222.0	9	74.13
7	498.7	0	27.0	28	498.7

لاحظ أن :

$$x_{1970} = 1970 - 1973 = -3$$

وهكذا يمكن الحصول على باقى قيم x' .

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum Y_i}{N} = \frac{498.7}{7} = 71.24$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum x'_i\ Y_i}{x'^2_i} = \frac{27.0}{28.0} = 0.964$$

ومن ثم فإن :

$$\hat{Y}_i = 71.24 + .964\,(x'_i)$$

حيث أن :

$\hat{Y}$ = القيمة الاتجاهية لاستهلاك الطاقة .

$$\because \quad x'_{1998} = 1998 - 1973 = 25$$

$$\therefore \quad \hat{Y}_{1998} = 71.24 + .964\,(25) = 95.34$$

- حالة إذا كان عدد المشاهدات زوجياً .

مثال تطبيقى

بفرض أن معادلة الاتجاه العام المراد استخدام نتائج تقديرها فى التنبؤ بالمستقبل كانت كما يلى :

$$Y_i = \propto + \beta\, X_i \qquad (20.10)$$

وإن بيانات هذه المعادلة معطاة فى الجدول رقم (5.10) . المطلوب التنبؤ بالقيمة الاتجاهية لاستهلاك الطاقة فى عام 2000 .

جدول رقم (5.10)

بيانات X_i , Y_i

X_i	Y_i
1969	64.4
1970	66.9
1971	68.3
1972	71.6
1973	74.6
1974	72.7
1975	70.6
1976	74.0

الحل :

بوضع المعادلة رقم (20.10) فى الشكل التالى :

$$Y_i = \alpha + \beta x'_i$$

$$x'_i = 2\,[\text{نقطة الأصل – السنة المطلوب ايجاد القيمة الاتجاهية لها}]$$

$$\text{نقطة الأصل} = \frac{\text{مجموع السنتين المتوسطتين}}{2}$$

ويضم الجدول رقم (6.10) البيانات المستخدمة فى التقدير . ومن هذا الجدول يمكن الحصول على ما يلى :

جدول رقم (6.10)

بيانات السلاسل الزمنية لاستهلاك الطاقة المستخدمة فى التقدير

X_i	Y_i	x'_i	$x'_i Y_i$	x'^2_i	$\hat{Y}_i$
1969	64.4	- 7	- 450.8	49	66.14
1970	66.9	- 5	- 334.5	25	67.36
1971	68.3	- 3	- 204.9	9	68.57
1972	71.6	- 1	- 71.6	1	69.78
1973	74.6	1	74.6	1	71.00
1974	72.7	3	218.1	9	72.21
1975	70.6	5	353.0	25	73.43
1976	74.0	7	518.0	49	74.64
8	563.1	0	101.9	168	563.1

لاحظ أن :

$$\text{نقطة الأصل} = \frac{1972 + 1973}{2} = 1972.5$$

$$x'_{1969} = (1969 - 1972.5)\ 2 = -7$$

وهكذا يمكن الحصول على باقى قيم x' .

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum Y_i}{N} = \frac{563.1}{8} = 70.39$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum x'_i Y_i}{\sum x'^2_i} = \frac{101.9}{168} = .607$$

ومن ثم فإن :

$$\hat{Y}_i = 70.39 + .607\ (x'_i)$$

$$\because \quad x'_{2000} = (2000 - 1972.5)\ 2 = 55$$

$$\therefore \quad \hat{Y}_{2000} = 70.39 + .607\ (55) = 103.78$$

2.3.10 استخدام نتائج تقدير معادلة الاتجاه العام غير الخطية فى التنبؤ بالمستقبل

مثال تطبيقى

بفرض أن معادلة الاتجاه العام المراد استخدام نتائج تقديرها فى التنبؤ بالمستقبل كانت كما يلى :

$$Y_i = \propto X_i^{\beta} \qquad (21.10)$$

وإن بيانات هذه المعادلة معطاة فى الجدول رقم (7.10) . المطلوب ايجاد القيمة الاتجاهية لاستهلاك الطاقة فى عام 1995 .

جدول رقم (7.10)

بيانات Y_i , X_i

X_i	Y_i
1971	1100
1972	1210
1973	1331
1974	1464
1975	1611
1976	1772
1977	1949
1978	2144
1979	2358
1980	2594

الحل :

حتى يمكن تقدير المعادلة رقم (21.10) يجب تحويلها إلى الشكل التالى :

$$\text{Log} \quad Y_i = \propto + \beta x'_i \qquad (22.10)$$

ويضم الجدول رقم (8.10) البيانات المستخدمة فى التقدير . ومن هذا الجدول يمكن الحصول على ما يلى :

جدول رقم (8.10)

بيانات السلاسل الزمنية لاستهلاك الطاقة المستخدمة فى التقدير

X_i	Y_i	$\log Y_i$	x'_i	x'^2_i	$x'_i \log Y_i$	$\log \hat{Y}$
1971	1100	3.041	- 9	81	- 27.369	3.0413
1972	1210	3.083	- 7	49	- 21.581	3.0827
1973	1331	3.124	- 5	25	- 15.620	3.1241
1974	1464	3.165	- 3	9	- 9.495	3.1655
1975	1611	3.207	- 1	1	- 3.207	3.2069
1976	1772	3.248	1	1	3.248	3.2483
1977	1949	3.290	3	9	9.870	3.2897
1978	2144	3.331	5	25	16.655	3.3311
1979	2358	3.373	7	49	23.611	3.3725
1980	2594	3.414	9	81	30.726	3.4139
10	17533	32.276	0	330	6.838	32.276

لاحظ أن :

$$x'_{1971} = (1971 - 1975.5)\ (2) = -9$$

وهكذا يمكن الحصول على باقى قيم 'x .

$$\hat{\propto} = \frac{\sum \log Y}{N} = \frac{32.276}{10} = 3.2276$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum x'_i \log Y_i}{x'^2_i} = \frac{6.838}{330} = .0207$$

ومن ثم فإن :

$$\hat{Y}_i = 3.2276 + .0207\ (x'_i)$$

$$\because \quad x'_{1995} = (1995 - 1975.5)\ (2) = 39$$

$$\therefore \quad \log \hat{Y}_{1995} = 3.2276 + .0207\ (39) = 4.0349$$

$\because$ العدد المقابل للوغاريتم الـ 4.0349 = 10836.774

$$\therefore \quad \hat{Y}_{1995} = 10836.774$$

4.10 الملخص

1 – التنبؤ بالمتغيرات الاقتصادية يعتبر أحد الأهداف الرئيسية للاقتصاد القياسي .

2 – فى حالة نموذج الانحدار البسيط ، يتم التنبؤ بقيمة المتغير التابع بإستخدام كل من معاملات الانحدار المقدرة لهذا النموذج وقيمة مفترضة (معطاة) للمتغير المستقل فى نفس الفترة الزمنية للتنبؤ .

3 – فى حالة نموذج الانحدار المتعدد ، يتم التنبؤ بقيمة المتغير التابع بإستخدام كل من معاملات الانحدار المقدرة لهذا النموذج وقيم مفترضة للمتغيرات المستقلة فى نفس الفترة الزمنية للتنبؤ .

4 – فى حالة نموذج المعادلات الآنية ، يتم التنبؤ بقيم المتغيرات التابعة بإستخدام كل من معاملات الانحدار المقدرة لهذا النموذج وقيم معطاة للمتغيرات المحددة سلفاً (المتغيرات الخارجية والمتغيرات الداخلية ذات فترات الابطاء) فى نفس الفترة الزمنية للتنبؤ .

5 – هناك طريقتين للتنبؤ بقيمة المتغير التابع : أولهما التنبؤ بقيمة واحدة للمتغير التابع (التنبؤ بنقطة) . وثانيهما التنبؤ بالمدى الذى يمكن للقيمة الحقيقية للمتغير التابع فى المستقبل أن تتراوح فيه (التنبؤ بمدى) .

6 – أن التنبؤ يكون تنبؤ شرطي بسبب اعتماده على عدة نقاط . أولها بقاء العوامل الأخرى على ماهية عليه . وثانيها أن تكون معاملات الانحدار المقدرة فى الفترة الزمنية للتقدير هى نفسها فى الفترة الزمنية للتنبؤ . وثالثها أن تكون القيم المفترضة للمتغيرات المستقلة أو المتغيرات المحددة سلفاً هى نفسها التى سوف تسود فى الفترة الزمنية للتنبؤ . ورابعها استمرار العلاقات الهيكلية (السلوكية) بين المتغير التابع والمتغيرات المستقلة فى الفترة الزمنية للتنبؤ كما كانت قائمة فى الفترة الزمنية للتقدير .

A ملحق : الجداول الاحصائية

APPENDIX : STATISTICAL TABLES

1.A جدول القيم الحرجة لتوزيع - T

2.A جدول القيم الحرجة لتوزيع - F

3.A جدول القيم الحرجة لاحصائية - DW

4.A جدول القيم الحرجة لتوزيع - χ^2

جدول رقم (1.A)

القيم الحرجة لتوزيع T-

	مستوى المعنوية				
: من جانب واحد	.10	.05	.025	.01	.005
: من الجانبين	.20	.10	.05	.02	.01
درجات الحرية					
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
50	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
70	1.294	1.667	1.994	2.381	2.648
80	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639
90	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632
100	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626
125	1.288	1.657	1.979	2.357	2.616
150	1.287	1.655	1.976	2.351	2.609
200	1.286	1.653	1.972	2.345	2.601
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

جدول رقم (2.A)

القيم الحرجة لتوزيع -F

(أ) عند مستوى معنوية 5 %

درجات الحرية للبسط

درجات الحرية للمقام	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	249	250	251	252	253	254
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.37
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

تابع جدول رقم (2.A)

(ب) عند مستوى معنوية 1 %

درجات الحرية للبسط / درجات الحرية للمقام

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	4,052	5,000	5,403	5,625	5,764	5,859	5,928	5,982	6,023	6,056	6,106	6,157	6,209	6,235	6,261	6,287	6,313	6,339	6,366
2	98.5	99.0	99.2	99.3	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5
3	34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.3	27.2	27.1	26.9	26.7	26.6	26.5	26.4	26.3	26.2	26.1
4	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7	14.5	14.4	14.2	14.0	13.9	13.8	13.7	13.7	13.6	13.5
5	16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.2	10.1	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
6	13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
9	10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31
10	10.0	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.34	3.25	3.17
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.70	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75
17	8.40	6.11	5.19	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
19	8.19	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.86	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.53	2.45	2.36	2.27	2.17
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00

جدول رقم (3.A)

القيم الحرجة لإحصائية DW-

(أ) عند مستوى معنوية 5 %

N	k'=1 d_L	k'=1 d_U	k'=2 d_L	k'=2 d_U	k'=3 d_L	k'=3 d_U	k'=4 d_L	k'=4 d_U	k'=5 d_L	k'=5 d_U
6	0.610	1.400	—	—	—	—	—	—	—	—
7	0.700	1.356	0.467	1.896	—	—	—	—	—	—
8	0.763	1.332	0.559	1.777	0.368	2.287	—	—	—	—
9	0.824	1.320	0.629	1.699	0.455	2.128	0.296	2.588	—	—
10	0.879	1.320	0.697	1.641	0.525	2.016	0.376	2.414	0.243	2.822
11	0.927	1.324	0.758	1.604	0.595	1.928	0.444	2.283	0.316	2.645
12	0.971	1.331	0.812	1.579	0.658	1.864	0.512	2.177	0.379	2.506
13	1.010	1.340	0.861	1.562	0.715	1.816	0.574	2.094	0.445	2.390
14	1.045	1.350	0.905	1.551	0.767	1.779	0.632	2.030	0.505	2.296
15	1.077	1.361	0.946	1.543	0.814	1.750	0.685	1.977	0.562	2.220
16	1.106	1.371	0.982	1.539	0.857	1.728	0.734	1.935	0.615	2.157
17	1.133	1.381	1.015	1.536	0.897	1.710	0.779	1.900	0.664	2.104
18	1.158	1.391	1.046	1.535	0.933	1.696	0.820	1.872	0.710	2.060
19	1.180	1.401	1.074	1.536	0.967	1.685	0.859	1.848	0.752	2.023
20	1.201	1.411	1.100	1.537	0.998	1.676	0.894	1.828	0.792	1.991
21	1.221	1.420	1.125	1.538	1.026	1.669	0.927	1.812	0.829	1.964
22	1.239	1.429	1.147	1.541	1.053	1.664	0.958	1.797	0.863	1.940
23	1.257	1.437	1.168	1.543	1.078	1.660	0.986	1.785	0.895	1.920
24	1.273	1.446	1.188	1.246	1.201	1.656	1.013	1.775	0.925	1.902
25	1.288	1.454	1.206	1.550	1.123	1.654	1.038	1.767	0.953	1.886
26	1.302	1.461	1.224	1.553	1.143	1.652	1.062	1.759	0.979	1.873
27	1.316	1.469	1.240	1.556	1.162	1.651	1.084	1.753	1.004	1.861
28	1.328	1.476	1.255	1.560	1.181	1.650	1.104	1.747	1.028	1.850
29	1.341	1.483	1.270	1.563	1.198	1.650	1.124	1.743	1.050	1.841
30	1.352	1.489	1.284	1.567	1.214	1.650	1.143	1.739	1.071	1.833
31	1.363	1.496	1.297	1.570	1.229	1.650	1.160	1.735	1.090	1.825
32	1.373	1.502	1.309	1.574	1.244	1.650	1.177	1.732	1.109	1.819
33	1.383	1.508	1.321	1.577	1.258	1.651	1.193	1.730	1.127	1.813
34	1.393	1.514	1.333	1.580	1.271	1.652	1.208	1.728	1.144	1.808
35	1.402	1.519	1.343	1.584	1.283	1.653	1.222	1.726	1.160	1.803
36	1.411	1.525	1.354	1.587	1.295	1.654	1.236	1.724	1.175	1.799
37	1.419	1.530	1.364	1.590	1.307	1.655	1.249	1.723	1.190	1.795
38	1.427	1.535	1.373	1.594	1.318	1.656	1.261	1.722	1.204	1.792
39	1.435	1.540	1.382	1.597	1.328	1.658	1.273	1.722	1.218	1.789
40	1.442	1.544	1.391	1.600	1.338	1.659	1.285	1.721	1.230	1.786
45	1.475	1.566	1.430	1.615	1.383	1.666	1.336	1.720	1.287	1.776
50	1.503	1.585	1.462	1.628	1.421	1.674	1.378	1.721	1.335	1.771
55	1.528	1.601	1.490	1.641	1.452	1.681	1.414	1.724	1.374	1.768
60	1.549	1.616	1.514	1.652	1.480	1.689	1.444	1.727	1.408	1.767
65	1.567	1.629	1.536	1.662	1.503	1.696	1.471	1.731	1.438	1.767
70	1.583	1.641	1.554	1.672	1.525	1.703	1.494	1.735	1.464	1.768
75	1.598	1.652	1.571	1.680	1.543	1.709	1.515	1.739	1.487	1.770
80	1.611	1.662	1.586	1.688	1.560	1.715	1.534	1.743	1.507	1.772
85	1.624	1.671	1.600	1.696	1.575	1.721	1.550	1.747	1.525	1.774
90	1.635	1.679	1.612	1.703	1.589	1.726	1.566	1.751	1.542	1.776
95	1.645	1.687	1.623	1.709	1.602	1.732	1.579	1.755	1.557	1.778
100	1.654	1.694	1.634	1.715	1.613	1.736	1.592	1.758	1.571	1.780
150	1.720	1.746	1.706	1.760	1.693	1.774	1.679	1.788	1.665	1.802
200	1.758	1.778	1.748	1.789	1.738	1.799	1.728	1.810	1.718	1.820

N	k'=6 d_L	k'=6 d_U	k'=7 d_L	k'=7 d_U	k'=8 d_L	k'=8 d_U	k'=9 d_L	k'=9 d_U	k'=10 d_L	k'=10 d_U
6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
8	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
9	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
11	0.203	3.005	—	—	—	—	—	—	—	—
12	0.268	2.832	0.171	3.149	—	—	—	—	—	—
13	0.328	2.692	0.230	2.985	0.147	3.266	—	—	—	—
14	0.389	2.572	0.286	2.848	0.200	3.111	0.127	3.360	—	—
15	0.447	2.472	0.343	2.727	0.251	2.979	0.175	3.216	0.111	3.438
16	0.502	2.388	0.398	2.624	0.304	2.860	0.222	3.090	0.155	3.304
17	0.554	2.318	0.451	2.537	0.356	2.757	0.272	2.975	0.198	3.184
18	0.603	2.257	0.502	2.461	0.407	2.667	0.321	2.873	0.244	3.073
19	0.649	2.206	0.549	2.396	0.456	2.589	0.369	2.783	0.290	2.974
20	0.692	2.162	0.595	2.339	0.502	2.521	0.416	2.704	0.336	2.885
21	0.732	2.124	0.637	2.290	0.547	2.460	0.441	2.633	0.380	2.806
22	0.769	2.090	0.677	2.246	0.588	2.407	0.504	2.571	0.424	2.734
23	0.804	2.061	0.715	2.208	0.628	2.360	0.545	2.514	0.465	2.670
24	0.837	2.035	0.751	2.174	0.666	2.318	0.584	2.464	0.506	2.613
25	0.868	2.012	0.784	2.144	0.702	2.280	0.621	2.419	0.544	2.560
26	0.897	1.992	0.816	2.117	0.735	2.246	0.657	2.379	0.581	2.513
27	0.925	1.974	0.845	2.093	0.767	2.216	0.691	2.342	0.616	2.470
28	0.951	1.958	0.874	2.071	0.798	2.188	0.723	2.309	0.650	2.431
29	0.975	1.944	0.900	2.052	0.826	2.164	0.753	2.278	0.682	2.396
30	0.998	1.931	0.926	2.034	0.854	2.141	0.782	2.251	0.712	2.363
31	1.020	1.920	0.950	2.018	0.879	2.120	0.810	2.226	0.741	2.333
32	1.041	1.909	0.972	2.004	0.904	2.102	0.836	2.203	0.769	2.306
33	1.061	1.900	0.994	1.991	0.927	2.085	0.861	2.181	0.795	2.281
34	1.080	1.891	1.015	1.979	0.950	2.069	0.885	2.162	0.821	2.257
35	1.097	1.884	1.034	1.967	0.971	2.054	0.908	2.144	0.845	2.236
36	1.114	1.877	1.053	1.957	0.991	2.041	0.930	2.127	0.868	2.216
37	1.131	1.870	1.071	1.948	1.011	2.029	0.951	2.112	0.891	2.198
38	1.146	1.864	1.088	1.939	1.029	2.017	0.970	2.098	0.912	2.180
39	1.161	1.859	1.104	1.932	1.047	2.007	0.990	2.085	0.932	2.164
40	1.175	1.854	1.120	1.924	1.064	1.997	1.008	2.072	0.952	2.149
45	1.238	1.835	1.189	1.895	1.139	1.958	1.089	2.022	1.038	2.088
50	1.291	1.822	1.246	1.875	1.201	1.930	1.156	1.986	1.110	2.044
55	1.334	1.814	1.294	1.861	1.253	1.909	1.212	1.959	1.170	2.010
60	1.372	1.808	1.335	1.850	1.298	1.894	1.260	1.939	1.222	1.984
65	1.404	1.805	1.370	1.843	1.336	1.882	1.301	1.923	1.266	1.964
70	1.433	1.802	1.401	1.837	1.369	1.873	1.337	1.910	1.305	1.948
75	1.458	1.801	1.428	1.834	1.399	1.867	1.369	1.901	1.339	1.935
80	1.480	1.801	1.453	1.831	1.425	1.861	1.397	1.893	1.369	1.925
85	1.500	1.801	1.474	1.829	1.448	1.857	1.422	1.886	1.396	1.916
90	1.518	1.801	1.494	1.827	1.469	1.854	1.445	1.881	1.420	1.909
95	1.535	1.802	1.512	1.827	1.489	1.852	1.465	1.877	1.442	1.903
100	1.550	1.803	1.528	1.826	1.506	1.850	1.484	1.874	1.462	1.898
150	1.651	1.817	1.637	1.832	1.622	1.847	1.608	1.862	1.594	1.877
200	1.707	1.831	1.697	1.841	1.686	1.852	1.675	1.863	1.665	1.874

تابع جدول رقم (3.A)

(ب) عند مستوى معنوية 1 %

N	k'=1 d_L	k'=1 d_U	k'=2 d_L	k'=2 d_U	k'=3 d_L	k'=3 d_U	k'=4 d_L	k'=4 d_U	k'=5 d_L	k'=5 d_U	k'=6 d_L	k'=6 d_U	k'=7 d_L	k'=7 d_U	k'=8 d_L	k'=8 d_U	k'=9 d_L	k'=9 d_U	k'=10 d_L	k'=10 d_U
6	0.390	1.142	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
7	0.435	1.036	0.294	1.676	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
8	0.497	1.003	0.345	1.489	0.229	2.102	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
9	0.554	0.998	0.408	1.389	0.279	1.875	0.183	2.433	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
10	0.604	1.001	0.466	1.333	0.340	1.733	0.230	2.193	0.150	2.690	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
11	0.653	1.010	0.519	1.297	0.396	1.640	0.286	2.030	0.193	2.453	0.124	2.892	—	—	—	—	—	—	—	—
12	0.697	1.023	0.569	1.274	0.449	1.575	0.339	1.913	0.244	2.280	0.164	2.665	0.105	3.053	—	—	—	—	—	—
13	0.738	1.038	0.616	1.261	0.499	1.526	0.391	1.826	0.294	2.150	0.211	2.490	0.140	2.838	0.090	3.182	—	—	—	—
14	0.776	1.054	0.660	1.254	0.547	1.490	0.441	1.757	0.343	2.049	0.257	2.354	0.183	2.667	0.122	2.981	0.078	3.287	—	—
15	0.811	1.070	0.700	1.252	0.591	1.464	0.488	1.704	0.391	1.967	0.303	2.244	0.226	2.530	0.161	2.817	0.107	3.101	0.068	3.374
16	0.844	1.086	0.737	1.252	0.633	1.446	0.532	1.663	0.437	1.900	0.349	2.153	0.269	2.416	0.200	2.681	0.142	2.944	0.094	3.201
17	0.874	1.102	0.772	1.255	0.672	1.432	0.574	1.630	0.480	1.847	0.393	2.078	0.313	2.319	0.241	2.566	0.179	2.811	0.127	3.053
18	0.902	1.118	0.805	1.259	0.708	1.422	0.613	1.604	0.522	1.803	0.435	2.015	0.355	2.238	0.282	2.467	0.216	2.697	0.160	2.925
19	0.928	1.132	0.835	1.265	0.742	1.415	0.650	1.584	0.561	1.767	0.476	1.963	0.396	2.169	0.322	2.381	0.255	2.597	0.196	2.813
20	0.952	1.147	0.863	1.271	0.773	1.411	0.685	1.567	0.598	1.737	0.515	1.918	0.436	2.110	0.362	2.308	0.294	2.510	0.232	2.714
21	0.975	1.161	0.890	1.277	0.803	1.408	0.718	1.554	0.633	1.712	0.552	1.881	0.474	2.059	0.400	2.244	0.331	2.434	0.268	2.625
22	0.997	1.174	0.914	1.284	0.831	1.407	0.748	1.543	0.667	1.691	0.587	1.849	0.510	2.015	0.437	2.188	0.368	2.367	0.304	2.548
23	1.018	1.187	0.938	1.291	0.858	1.407	0.777	1.534	0.698	1.673	0.620	1.821	0.545	1.977	0.473	2.140	0.404	2.308	0.340	2.479
24	1.037	1.199	0.960	1.298	0.882	1.407	0.805	1.528	0.728	1.658	0.652	1.797	0.578	1.944	0.507	2.097	0.439	2.255	0.375	2.417
25	1.055	1.211	0.981	1.305	0.906	1.409	0.831	1.523	0.756	1.645	0.682	1.776	0.610	1.915	0.540	2.059	0.473	2.209	0.409	2.362
26	1.072	1.222	1.001	1.312	0.928	1.411	0.855	1.518	0.783	1.635	0.711	1.759	0.640	1.889	0.572	2.026	0.505	2.168	0.441	2.313
27	1.089	1.233	1.019	1.319	0.949	1.413	0.878	1.515	0.808	1.626	0.738	1.743	0.669	1.867	0.602	1.997	0.536	2.131	0.473	2.269
28	1.104	1.244	1.037	1.325	0.969	1.415	0.900	1.513	0.832	1.618	0.764	1.729	0.696	1.847	0.630	1.970	0.566	2.098	0.504	2.229
29	1.119	1.254	1.054	1.332	0.988	1.418	0.921	1.512	0.855	1.611	0.788	1.718	0.723	1.830	0.658	1.947	0.595	2.068	0.533	2.193
30	1.133	1.263	1.070	1.339	1.006	1.421	0.941	1.511	0.877	1.606	0.812	1.707	0.748	1.814	0.684	1.925	0.622	2.041	0.562	2.160
31	1.147	1.273	1.085	1.345	1.023	1.425	0.960	1.510	0.897	1.601	0.834	1.698	0.772	1.800	0.710	1.906	0.649	2.017	0.589	2.131
32	1.160	1.282	1.100	1.352	1.040	1.428	0.979	1.510	0.917	1.597	0.856	1.690	0.794	1.788	0.734	1.889	0.674	1.995	0.615	2.104
33	1.172	1.291	1.114	1.358	1.055	1.432	0.996	1.510	0.936	1.594	0.876	1.683	0.816	1.776	0.757	1.874	0.698	1.975	0.641	2.080
34	1.184	1.299	1.128	1.364	1.070	1.435	1.012	1.511	0.954	1.591	0.896	1.677	0.837	1.766	0.779	1.860	0.722	1.957	0.665	2.057
35	1.195	1.307	1.140	1.370	1.085	1.439	1.028	1.512	0.971	1.589	0.914	1.671	0.857	1.757	0.800	1.847	0.744	1.940	0.689	2.037
36	1.206	1.315	1.153	1.376	1.098	1.442	1.043	1.513	0.988	1.588	0.932	1.666	0.877	1.749	0.821	1.836	0.766	1.925	0.711	2.018
37	1.217	1.323	1.165	1.382	1.112	1.446	1.058	1.514	1.004	1.586	0.950	1.662	0.895	1.742	0.841	1.825	0.787	1.911	0.733	2.001
38	1.227	1.330	1.176	1.388	1.124	1.449	1.072	1.515	1.019	1.585	0.966	1.658	0.913	1.735	0.860	1.816	0.807	1.899	0.754	1.985
39	1.237	1.337	1.187	1.393	1.137	1.453	1.085	1.517	1.034	1.584	0.982	1.655	0.930	1.729	0.878	1.807	0.826	1.887	0.774	1.970
40	1.246	1.344	1.198	1.398	1.148	1.457	1.098	1.518	1.048	1.584	0.997	1.652	0.946	1.724	0.895	1.799	0.844	1.876	0.792	1.956
45	1.288	1.376	1.245	1.423	1.201	1.474	1.156	1.528	1.111	1.584	1.065	1.643	1.019	1.704	0.974	1.768	0.927	1.834	0.881	1.902
50	1.324	1.403	1.285	1.446	1.245	1.491	1.205	1.538	1.164	1.587	1.123	1.639	1.081	1.692	1.039	1.748	0.997	1.805	0.955	1.864
55	1.356	1.427	1.320	1.466	1.284	1.506	1.247	1.548	1.209	1.592	1.172	1.638	1.134	1.685	1.095	1.734	1.057	1.785	1.018	1.837
60	1.383	1.449	1.350	1.484	1.317	1.520	1.283	1.558	1.249	1.598	1.214	1.639	1.179	1.682	1.144	1.726	1.108	1.771	1.072	1.817
65	1.407	1.468	1.377	1.500	1.346	1.534	1.315	1.568	1.283	1.604	1.251	1.642	1.218	1.680	1.186	1.720	1.153	1.761	1.120	1.802
70	1.429	1.485	1.400	1.515	1.372	1.546	1.343	1.578	1.313	1.611	1.283	1.645	1.253	1.680	1.223	1.716	1.192	1.754	1.162	1.792
75	1.448	1.501	1.422	1.529	1.395	1.557	1.368	1.587	1.340	1.617	1.313	1.649	1.284	1.682	1.256	1.714	1.227	1.748	1.199	1.783
80	1.466	1.515	1.441	1.541	1.416	1.568	1.390	1.595	1.364	1.624	1.338	1.653	1.312	1.683	1.285	1.714	1.259	1.745	1.232	1.777
85	1.482	1.528	1.458	1.553	1.435	1.578	1.411	1.603	1.386	1.630	1.362	1.657	1.337	1.685	1.312	1.714	1.287	1.743	1.262	1.773
90	1.496	1.540	1.474	1.563	1.452	1.587	1.429	1.611	1.406	1.636	1.383	1.661	1.360	1.687	1.336	1.714	1.312	1.741	1.288	1.769
95	1.510	1.552	1.489	1.573	1.468	1.596	1.446	1.618	1.425	1.642	1.403	1.666	1.381	1.690	1.358	1.715	1.336	1.741	1.313	1.767
100	1.522	1.562	1.503	1.583	1.482	1.604	1.462	1.625	1.441	1.647	1.421	1.670	1.400	1.693	1.378	1.717	1.357	1.741	1.335	1.765
150	1.611	1.637	1.598	1.651	1.584	1.665	1.571	1.679	1.557	1.693	1.543	1.708	1.530	1.722	1.515	1.737	1.501	1.752	1.486	1.767
200	1.664	1.684	1.653	1.693	1.643	1.704	1.633	1.715	1.623	1.725	1.613	1.735	1.603	1.746	1.592	1.757	1.582	1.768	1.571	1.779

جدول رقم (4.A)

القيم الحرجة لتوزيع -χ^2

DF	نسب مساحة توزيع χ^2												
	·995	·99	·975	·95	·90	·75	·50	·25	·10	·05	·025	·01	·005
1	$0{\cdot}0^{4}393$	$0{\cdot}0^{3}157$	$0{\cdot}0^{3}982$	$0{\cdot}0^{2}3$	0·0158	0·102	0·455	1·323	2·71	3·84	5·02	6·63	7·88
2	0·0100	0·0201	0·0506	0·103	0·211	0·575	1·386	2·77	4·61	5·99	7·38	9·21	10·60
3	0·0717	0·115	0·216	0·352	0·584	1·213	2·37	4·11	6·25	7·81	9·35	11·34	12·84
4	0·207	0·297	0·484	0·711	1·064	1·923	3·36	5·39	7·78	9·49	11·14	13·28	14·86
5	0·412	0·554	0·831	1·145	1·610	2·67	4·35	6·63	9·24	11·07	12·83	15·09	16·75
6	0·676	0·872	1·237	1·635	2·20	3·45	5·35	7·84	10·64	12·59	14·45	16·81	18·55
7	0·989	1·239	1·690	2·17	2·83	4·25	6·35	9·04	12·02	14·07	16·01	18·48	20·3
8	1·344	1·646	2·18	2·73	3·49	5·07	7·34	10·22	13·36	15·51	17·53	20·1	22·0
9	1·735	2·09	2·70	3·33	4·17	5·90	8·34	11·39	14·68	16·92	19·02	21·7	23·6
10	2·16	2·56	3·25	3·94	4·87	6·74	9·34	12·55	15·99	18·31	20·5	23·2	25·2
11	2·60	3·05	3·82	4·57	5·58	7·58	10·34	13·70	17·28	19·68	21·9	24·7	26·8
12	3·07	3·57	4·40	5·23	6·30	8·44	11·34	14·85	18·55	21·0	23·3	26·2	28·3
13	3·57	4·11	5·01	5·89	7·04	9·30	12·34	15·98	19·81	22·4	24·7	27·7	29·8
14	4·07	4·66	5·63	6·57	7·79	10·17	13·34	17·12	21·1	23·7	26·1	29·1	31·3
15	4·60	5·23	6·26	7·26	8·55	11·04	14·34	18·25	22·3	25·0	27·5	30·6	32·8
16	5·14	5·81	6·91	7·96	9·31	11·91	15·34	19·37	23·5	26·3	28·8	32·0	34·3
17	5·70	6·41	7·56	8·67	10·09	12·79	16·34	20·5	24·8	27·6	30·2	33·[illegible]	35·7
18	6·26	7·01	8·23	9·39	10·86	13·68	17·34	21·6	26·0	28·9	31·5	34·8	37·2
19	6·84	7·63	8·91	10·12	11·65	14·56	18·34	22·7	27·2	30·1	32·9	36·2	38·6
20	7·43	8·26	9·59	10·85	12·44	15·45	19·34	23·8	28·4	31·4	34·2	37·6	40·0

تابع جدول رقم (4.A)

DF	نسب مساحة توزيع χ^2												
	·995	·99	·975	·95	·90	·75	·50	·25	·10	.05	0·25	·01	·005
21	8·03	8·90	10·28	11·59	13·24	16·34	20·3	24·9	29·6	32·7	35·5	38·9	41·4
22	8·64	9·54	10·98	12·34	14·04	17·24	21·3	26·0	30·8	33·9	36·8	40·3	42·8
23	9·26	10·20	11·69	13·09	14·85	18·14	22·3	27·1	32·0	35·2	38·1	41·6	44·2
24	9·89	10·86	12·40	13·85	15·66	19·04	23·3	28·2	33·2	36·4	39·4	43·0	45·6
25	10·52	11·52	13·12	14·61	16·47	19·94	24·3	29·3	34·4	37·7	40·6	44·3	46·9
26	11·16	12·20	13·84	15·38	17·29	20·8	25·3	30·4	35·6	38·9	41·9	45·6	48·3
27	11·81	12·88	14·57	16·15	18·11	21·7	26·3	31·5	36·7	40·1	43·2	47·0	49·6
28	12·46	13·56	15·31	16·93	18·94	22·7	27·3	32·6	37·9	41·3	44·5	48·3	51·0
29	13·12	14·26	16·05	17·71	19·77	23·6	28·3	33·7	39·1	42·6	45·7	49·6	52·3
30	13·79	14·95	16·79	18·49	20·6	24·5	29·3	34·8	40·3	43·8	47·0	50·9	53·7
40	20·7	22·2	24·4	26·5	29·1	33·7	39·3	45·6	51·8	55·8	59·3	63·7	66·8
50	28·0	29·7	32·4	34·8	37·7	42·9	49·3	56·3	63·2	67·5	71·4	76·2	79·5
60	35·5	37·5	40·5	43·2	46·5	52·3	59·3	67·0	74·4	79·1	83·3	88·4	92·0
70	43·3	45·4	48·8	51·7	55·3	61·7	69·3	77·6	85·5	90·5	95·0	100·4	104·2
80	51·2	53·5	57·2	60·4	64·3	71·1	79·3	88·1	96·6	101·9	106·6	112·3	116·3
90	59·2	61·8	65·6	69·1	73·3	80·6	89·3	98·6	107·6	113·1	118·1	124·1	128·3
100	67·3	70·1	74·2	77·9	82·4	90·1	99·3	109·1	118·5	124·3	129·6	135·8	140·2
Z_a	−2·58	−2·33	−1·96	−1·64	−1·28	−0·674	0·000	0·674	1·282	1·645	1·960	2·33	2·58

– إذا كانت DF > 100 فإن :

$$\chi^2 = \frac{1}{2}\left(Z_a + \sqrt{2\,DF - 1}\right)^2$$

بعض المراجع المختارة

SELECTED BIBLIOGRAPHY

1. Cassidy, H.J. (1981) : *Using Econometrics : A Beginner's Guide*, Roston Publishing Company, Inc., A Prentice - Hall Company, Roston, Virginia.

2. Chow, G.C. (1983) : *Econometrics*, McGraw-Hill International Book Company, Tokyo.

3. Dunn, W.N. (1981) : *Public Policy Analysis : An Introduction*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.

4. Gujarati, D. (1978) : *Basic Econometrics*, McGraw-Hill Kogakusha, Ltd. Tokyo.

5. Hebden, J. (1981) : *Statistics for Economists*, Philip Allan Piblishers Ltd., Oxford.

6. Johnston, J. (1984) : *Econometric Methods*, 3rd ed., McGraw-Hill Book Company, Inc., Tokyo.

7. Johnston, A.C., Johnston, M.B. and Buse, R.C. (1987) : *Econometrics : Basic and Applied*, Macmillan Publishing Company, New York.

8. Judge, G.G. and et al. (1985) : ***The Theory and Practice of Econometrics***, 2nd ed., John Wiley and Sons, Inc., New York.

9. Katz, D.A. (1982) : ***Econometric Theory and Applications***, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.

10. Kmenta, J. (1971) : ***Elements of Econometrics***, The Macmillan Company, New York.

11. Koutsoyiannis, A. (1977) : ***Theory of Econometrics***, 2nd ed., Macmillan, London.

12. Maddala, G.S. (1977) : ***Econometrics***, McGraw-Hill Book Company, New York.

13. Theil, H. (1971) : ***Principles of Econometrics***, John Wiley & Sons Inc., New York.

14. Wonnacott, R.J. and Wonnacott, T.H. (1970) : ***Econometrics***, John Wiley & Sons, Inc., New York.

« تَمَّ بِعَوْنِ اللّه تَعَالَى »