دكتور
ابراهيم العيسوى

خبير أول
معهد التخطيط القومى

مبادئ
التحليل الاقتصادى الرياضى

مقـــدمة

يحتوى هذا الكتاب على عرض مبسط لمبادىء التحليل الاقتصادى الرياضى . وقد تجمعت مادة هذا الكتاب من محاضرات قمت بالقائها لعدد من السنوات على طلبة الدراسات العليا بقسم الاقتصاد الزراعى بكلية الزراعة جامعة الأزهر ، وطلبة دبلوم الإحصاء بمعهد الدراسات والبحوث الإحصائية بجامعة القاهرة . ولذا فقد راعيت فى الكتابة أن نفى بحاجة هذين النوعين من الطلاب من حيث مدى إلمامهم بالاقتصاد والرياضيات . فبينما كانت المجموعة الاولى تتكون من دارسين قطعوا شوطاً لا بأس به فى الدراسات الاقتصادية ولكنهم يفتقرون إلى أساس معقول فى الرياضيات ، كان أغلب أعضاء المجموعة الثانية عن درسوا مقرراً أو أكثر فى الرياضيات ، ولكن لم يسبق لهم دراسة الاقتصاد . فسوف يجد الدارس الذى لم يسبق له دراسة علم الاقتصاد تعريفاً مبسطاً — ولكنه كاف لأغراض دراسة الاقتصاد الرياضى — بهذا العلم وأهم المفاهيم المستخدمة فى الدراسة الاقتصادية ومنهج التحليل الاقتصادى (الفصل الأول) . كما سيجد الاقتصاديون الذين لم يسبق لهم دراسة مقرر أساسى فى الرياضيات ، أو مضى وقت طويل على دراستهم له ، فصلا خاصاً يعرض فى إيجاز الأساليب الرياضية اللازمة لهضم مادة هذا الكتاب (الفصل الثالث) .

وقد راعيت التدرج فى تقديم القارىء للموضوعات التقليدية فى التحليل الاقتصادى الرياضى ، وذلك بتخصيص فصل كامل عرضت فيه — بشكل مبسط وبأقل استخدام الرياضيات مستعيناً بأمثلة عملية — كيفية المعالجة الرياضية للمشكلات الاقتصادية (الفصل الثانى) . كما حرصت فى عرض الموضوعات التقليدية كتوازن المنتج وتوازن المستهلك والتوازن السوقى ... الخ ، أن أبرز المعنى أو التفسير الاقتصادى للمعادلات والنتائج الرياضية حتى لا تختلط على الدارس الأهداف والوسائل . فاستخدام الرياضيات فى التحليل الاقتصادى ليس غاية فى حد ذاته . وإنما هو مجرد وسيلة لتذليل بعض الصعوبات التى تصادفها

عند إجراء التحليل بدونها . لكن الهدف من التحليل الاقتصادى ، سواء تم باستخدام الرياضيات أو بدونها ، ينبغى ألا يغيب عن الأنظار . وهو محاولة فهم العلاقات الاقتصادية ــ التى هى فى حقيقة الأمر علاقات بين الناس ــ ومحاولة فهم العلاقات والتفاعلات التى تنشأ بين البشر وبيئتهم المادية .

كذلك حرصت على تزويد الكتاب بعدد غير قليل من الأمثلة وختام كل فصل من فصوله بعدد غير قليل من التمارين آملا أن يساعد ذلك على حسن استيعاب الدارس لمادة كل فصل بتطبيق ما يدرسه من أساليب على مشكلات محددة .

وبعد ، فإنى لا أدعى لهذه المحاولة الكمال أو الأصالة ولا أى شىء قريب منهما فالكتاب نتاج تدريس مقرر أولى فى وقت محدود ، ومن ثم فقد كان من الضرورى الاختيار والمفاضلة بين الموضوعات المختلفة فى الاقتصاد الرياضى على كثرتها ، حتى لا أثقل على الدارس المبتدىء بمواضيع تستدعى معالجتها قدراً كبيراً من الرياضيات العليا من جهة ، وحتى لا تضعف الصلة بين ما يدرس فى المقررات غير الرياضية للتحليل الاقتصادى وبين هذا المقرر فتختلط الأمور عليه من جهة أخرى . ولعل هذا قد جعلنى أنحاز ــ تمشياً مع تحيز شائع وإن كان غير مناسب فى الجامعات المصرية ــ لموضوعات الاقتصاد الجزئى . وإنى آمل أن يكون إدراج الفصلين الأخيرين فى الكتاب ، واللذان قصد منهما أن يكونا مدخلا لمعالجة المشكلات الاقتصادية على المستوى الكلى عاملا مساعداً فى تلافى ما قد يتركه الكتاب من انطباع غير صحيح لدى القارىء بأن استخدام الرياضيات وقف على التحليل الاقتصادى الجزئى .

وأخيراً فإنى قد رأيت فى نشر هذا الكتاب شيئاً من الخير . ذلك أن الكتابات المتاحة فى الاقتصاد الرياضى باللغة العربية قليلة قلة لافتة للنظر ، خاصة بعد ما شاع تدريس هذه المادة فى مرحلة الدراسات العليا لطلبة الاقتصاد فى كليات التجارة والزراعة ، بل وفى المرحلة الجامعية الأولى بالنسبة للمتخصصين فى الاقتصاد والإحصاء . فإذا استطاع هذا الكتاب أن يسد جانباً من الثغرة فأنا سعيد موفق لبعض ما أريد .

مدينة نصر ــ القاهرة نوفمبر ١٩٧٧ إبراهيم العيسوى

الفصل الأول

النظرية الاقتصادية والاقتصاد الرياضى

لهذا الفصل هدفان . الهدف الأول هو إعطاء من ليس لديه معرفة سابقة بعلم الاقتصاد فكرة سريعة عن موضوع هذا العلم وأهم المفاهيم المستخدمة فى التحليل الاقتصادى ، وكذلك عن العلاقات الاقتصادية وأنواع التحليل الاقتصادى. وهذا مايعنى به القسمين الأول والثانى من هذا الفصل . ويمكن لمن سبق لهم دراسة مقرر فى مبادىء الاقتصاد أن يحذفوا هذين القسمين أو أن يمروا عليهما مرور الكرام إنعاشاً للذاكرة إذا أرادوا . أما الهدف الثانى فهو تعريف الدارس بالاقتصاد الرياضى ، وتوضيح الفكرة الرئيسية فى استخدام الرياضيات فى الاقتصاد . وتبيان ما يترتب على استخدام الرياضيات من مزايا وما يصاحبه من عيوب أو قيود لعل ذلك يعطى الدارس تصوراً متوازناً لما هو مقبل عليه من دراسة اقتصادية رياضية ، ويقيه من مخاطر الوقوع فى بعض الأخطاء الشائعة فى هذا الفرع من فروع الدراسة الاقتصادية . وهذا مايعنى به القسمين الأخيرين من هذا الفصل .

١ - ١ — علم الاقتصاد : موضوعه ووضعه الراهن وأقسامه :

يبحث علم الاقتصاد فى المسائل المتعلقة بمباشرة الإنسان للنشاط الاقتصادى ، والمقصود بالنشاط الاقتصادى هو النشاط المبذول فى تحويل الموارد إلى أشياء صالحة لإشباع حاجات البشر ، وفى توزيع السلع والخدمات على أفراد المجتمع إشباعا لحاجاتهم الفردية أو الجماعية . ويمكن أن نذكر على سبيل المثال - لا الحصر - المشاكل الاقتصادية التالية التى تحاول النظرية الاقتصادية فهمها والتوصل إلى حلول مناسبة لها : ما الذى يحدد سعر سلعة من السلع ؟ ولماذا تكون سلعة غير ضرورية كالمصوغات الذهبية غالية الثمن فى حين تكون سلعة جد ضرورية كالملح زهيدة القيمة ؟ ما الذى يحكم توزيع الدخل القومى بين الأجور والأرباح ؟ وإلى

أى حد تستطيع نقابات العمال التأثير فى نصيب العمل فى الدخل القومى ؟ كيف تتحدد قيمة الجنيه فى الداخل والخارج ؟ وما هى أزمة الدولار ، وما هى أسبابها وما هى الطرق الكفيلة بعلاجها ؟ لماذا ينمو اقتصاد بعض الدول أسرع من اقتصاد بعض الدول الأخرى ؟ لماذا يتميز التاريخ الاقتصادى للدول الرأسمالية بفترات من الرواج والتوظف الكامل — أو القريب من الكامل — يعقبها فترات من الكساد والبطالة ؟ لماذا لا نسمع عن مثل هذه الأزمات فى الدول الاشتراكيه ؟ هل يستطيع الاقتصاد القومى توظيف ما هو متاح له من الموارد توظيفاً كاملا ؟ هل تستخدم الموارد المتاحه فى مجتمع معين أكفأ استخدام ممكن ؟

١ - ١ - ١ — التناقض بين الحاجات والموارد :

تلك كانت مجرد عينة صغيرة من المشاكل الاقتصاديه التى تشغل اهتمام الاقتصاديين . لكن تنوع المشاكل وكثرتها ينبغى ألا يحجب عن الأنظار حقيقة أساسية : أن هذه المشاكل فى جوهرها ليست سوى تفريعات أو صور متنوعة لعدد محدود من القضايا الرئيسية — تنبع جميعها من أصل واحد هو التناقض بين الموارد والحاجات . ويمكن توضيح ذلك التناقض كما يلى :

إن الموارد المتاحة لأى مجتمع محدودة — سواء كانت موارد طبيعية كالأرض أو موارد إنسانية كالعمل بنوعيه الذهنى واليدوى ، أو موارد من صنع البشر كالماكينات والأدوات والمبانى ، أى رأس المال . هذه الموارد محدودة بالنسبة لحاجات الإنسان من السلع (أى الأشياء الملموسة كالأطعمة والمشروبات والكراسى والثلاجات) ، والخدمات (أى الأشياء غير المادية كخدمة الطبيب أو المحامى أو حضور عرض مسرحى) . بعبارة أخرى ، إن الموارد المتاحة لاتقدر على الوفاء بكل حاجات الإنسان ، وإنما تقدر فقط على الوفاء بنسبة صغيرة منها[١] ، وهذا التناقض بين الموارد والحاجات هو سر سعى الإنسان

---

(١) اعلم أن الحاجات Wants غير الطلب بالمعنى الاقتصادى Demand . فالطلب ليس مجرد الرغبة أو الحاجة إلى الحصول على شىء ما ، وإنما الطلب هو الرغبة أو الحاجة التى تدعمها قوة شرائية — أى الحاجة المقترنة بالمقدرة على دفع ثمن الأشياء المرغوب فى

المستمر لتطوير موارده ، وتنمية طاقة المجتمع الإنتاجية بغية إشباع قدر متزايد من الحاجات .

ويترتب على هذا التناقض بين ندرة الموارد وكثرة الحاجات أن على المجتمع أن يضع لنفسه أولويات معينة ، يحدد وفقاً لها أى الأهداف أجدر من غيره بالتحقق أولا ، وأى الحاجات أولى بالاشباع قبل غيرها . فالندرة تفرض الاختيار وتحتم المفاضلة والموازنة بين البدائل . لكن ينبغى أن نعلم أن الاختيار لايرجع فقط إلى عامل الندرة وإنما هو راجع أيضاً إلى إمكان استخدام المورد الواحد لأغراض مختلفة وعديدة ، وكذلك إلى إمكان الحصول على نفس الشىء بطرق مختلفة على المجتمع أن يختار ماذا ينتج الآن وماذا يؤجل إنتاجه للمستقبل؟ وعلى المجتمع أن يحدد الكميات التى تنتج من كل سلعة ؟ كذلك يتعين الاختيار من بين الطرق البديلة لإنتاج أية سلعة تلك الطريقة التى تتناسب أكثر من غيرها مع مركب الموارد المتاح لدى المجتمع ، أضف إلى ذلك أن على المجتمع أن يحدد كيف يوزع ما أنتجه على الذين اشتركوا فى الإنتاج — وأيضاً الذين لم يشتركوا فيه . ومهمة علم الاقتصاد — أو النظرية الاقتصادية — هى اكتشاف القوانين التى تحكم عمليات الاختيار هذه ، وتحديد المعايير والأساليب التى يمكن استخدامها فى المفاضلة بين البدائل المختلفة ، وتحديد العوامل المؤثرة فى السلوك الاقتصادى لمختلف الوحدات الاقتصادية .

١ - ١ - ٢ — التوظف والكفاءة والنمو :

لكن علم الاقتصاد لايقتصر على معالجة المشاكل الخاصة بتحديد الإنتاج كما ونوعا ، وتحديد كيفية الإنتاج ، وتحديد كيفية توزيع الناتج الكلى .

الحصول عليها ولذا فان الحاجات أكبر دائما مما تستطيع الموارد المتاحة توفيره . لكن الطلب قد يكون متناسبا مع إمكانيات الموارد المتاحة فى بعض الأحيان وقد يزيد عن هذه الإمكانيات أو يقل عنها فى أحيان أخرى . فالطلب يفوق إمكانيات الموارد المتاحة فى أوقات التضخم والتوظف الكامل . ولكنه يقل عنها فى أوقات الكساد والبطالة .

فبالإضافة إلى هذه المشاكل تتناول الدراسة الاقتصادية ثلاثة مشاكل أخرى على قدر عظيم من الأهمية ، وهى كلها مرتبطة بقضية الندرة ، ربما بشكل أقل وضوحا أو مباشرة لما سبق ذكره من مشاكل . فلما كانت الموارد نادرة ، فإنه يكون من العبث ترك بعض الموارد معطلا ، ولذا يهتم علم الاقتصاد بالبحث فيما إذا كان النظام الاقتصادى يستطيع توظيف موارده توظيفاً كاملا وكيفية تحقيق هذا الهدف . كذلك فإنه ليس من المنطق مع ندرة الموارد أن يكون هناك تبديد أو ضياع لأى قدر منها ، وألا يتم استخدامها تبعاً لذلك بالكفاءة . ولذا يهتم علم الاقتصاد بالبحث فى مدى كفاءة الانتاج ومدى كفاءة التوزيع[1] . وأخيراً فإنه لما كانت الموارد نادرة والحاجات فى تزايد مطرد وتجدد مستمر ، فإنه يكون من المهم أن يتسم النظام الاقتصادى بالمقدرة على التطور وعلى استيعاب التغيرات التكنولوجية الحديثة ، وتهيئة الظروف الملائمة لنمو قوى الإنتاج — ضمانا لاتساع الطاقة الإنتاجية للمجتمع وازدياد مقدرته على إشباع حاجات أفراده . وهذا الأمر يفتح أمام علم الاقتصاد ليس فقط مجال البحث فى تنمية قوى الانتاج فى إطار نظام اجتماعى معين وإنما يفتح أمامه أيضاً مجال البحث فى إمكانية تطوير قوى الإنتاج عن طريق إجراء تغييرات أساسية فى الهيكل أو الإطار الاقتصادى والاجتماعى ، أى بالانتقال من نظام اقتصادى إلى نظام اقتصادى — وبالتالى نظام اجتماعى — مختلف .

١ - ١ - ٣ — تعريف علم الاقتصاد :

باختصار ، يمكن تعريف علم الاقتصاد بأنه ذلك العلم الاجتماعى الذى يبحث

---

(١) يقال إن الإنتاج غير كفء عندما يكون فى الإمكان إعادة توزيع الموارد على خطوط الإنتاج المختلفة بحيث نحصل على كمية أكبر من الإنتاج — على الأقل من إنتاج سلعة واحدة — دون أن يترتب على ذلك نقصان إنتاج أية سلعة أخرى . وبالمثل ، يقال أن التوزيع غير كفء عندما يكون فى الإمكان إعادة توزيع الناتج القومى على أفراد المجتمع بحيث يترتب على ذلك تحسين وضع فرد واحد على الأقل ، أى رفع مستوى رفاهيته ، دون أن يصاحب ذلك الإساءة إلى فرد آخر ، أى هبوط مستوى رفاهيته .

فى مشاكل إدارة الموارد النادرة ، بأوسع معنى يمكن أن يأخذه لفظ الإدارة . أى أن إدارة الموارد النادرة لا تقتصر على تخصيص الموارد المحـــدودة على الاستخدامات البديلة إشباعاً لبعض الحاجات ، وإنما هى تشمل بالاضافة إلى ذلك مسائل التوظيف الكامل للموارد . والكفاءة فى استخدام ما هو متاح من الموارد ومن توزيع ما تنتجه هذه الموارد ، ومقدرة النظام الاقتصادى كله على تهيئة الظروف المــــلائمة لتطور قوى الانتاج ، ووسائل إزالة معوقات نمو الطاقة الانتاجية للمجتمع — بما فى ذلك تغيير النظام الاقتصادى والاجتماعى[١] .

ويهدف علم الاقتصاد إلى تنظيم الظواهر الاقتصادية والتنبؤ بالآثار الاقتصادية لمختلف السياسات الاستهلاكية والانتاجية والتوزيعية .

١ - ١ - ٤ — أسلوبين لإدارة الموارد :

ومن المناسب أن نذكر هنا أن هناك طريقتين رئيسيتين فى إدارة الموارد النادرة : وهما طريقة نظام السوق أو الأسعار[٢] المميزة للأنظمة الرأسمالية ، وطريقة التخطيط القومى الشامل[٣] المميزة الأنظمة الاشتراكية : ففى الأنظمة

---

(١) يأخذ جمهور الاقتصاديين الرأسماليين بالتعريف المذكور لعلم الإقتصاد — أى علم إدارة الموارد النادرة . ولـكن تفصيلهم لما يندرج تحت هذا العنوان من بنود يختلف عن التفصيل الذى أعطيناه ، بالذات فى النقطة الأخيرة المتعلقة بدراسة القوانين التى تحكم تطور النظام الإقتصادى وتنمية الطاقة الإنتاجية للمجتمع عن طرق تغيير النظام الإقتصادى والاجتماعى وهذا الموقف يعكس تاريخ النظرية الإقتصادية وتطورها فى أحضان النظام الرأسمالى من جهة ، كما يعكس وجهة نظر معظم الاقتصاديين الرأسماليين فى اعتبار مسألة تطور النظم الاقتصادية من اختصاص التاريخ الإقتصادى ، وليست من اختصاص النظرية الاقتصادية . وهذا موقف مغاير تماما لموقف الاقتصاديين الاشتراكيين الذين يعتبرون قوانين تطور النظم الاقتصادية من صميم اختصاص النظرية الاقتصادية . راجع مقال :

Oskar Lange, « Marxian Economics and Modern Economics », Reprinted in : D. Horowitz (ed.) Marx and Modern Economics, Mac Gibbon and Kee, London, 1968, pp. 68–87.

(٢) نظام السوق أو الأسعار Market or Price System

(٣) التخطيط القومى الشامل Comprehensive National Planning

الرأسمالية حيث تسود الملكية الخاصة لوسائل الانتاج ، وحيث تتركز هذه الملكية فى أيدى نسبة صغيرة من الأفراد (الرأسماليين) بينما النسبة الكبرى من أفراد المجتمع محرومين من ملكية وسائل الانتاج (العمال) ، وحيث ينفرد الرأسماليون بتوجيه دفة الانتاج بقصد تحقيق أكبر أرباح ممكنة لأنفسهم ، يكون الاعتماد الرئيسى فى اتخاذ مختلف القرارات الخاصة بإدارة الانتاج على السوق والأثمان التى تتكون من خلال تفاعل عمليات البيع والشراء فى السوق . والسوق أو جهاز الأسعار يرسل الاشارات ويستقبلها فيما بين المستهلكين والمنتجين ، ومن خلال تغيرات الأسعار يتم التنسيق بين القرارات الفردية لمختلف المستهلكين والمنتجين الذى يعمل كل منهم ما يحقق مصلحته الخاصة .

أما فى الانظمة الاشتراكية حيث تسود الملكية العامة لوسائل الانتاج ، وحيث تتولى الدولة بالنيابة عن الشعب إدارة الإنتاج وتوجيه الموارد بهدف إشباع حاجات الجماهير ، فإن الاعتماد الرئيسى يكون على رسم خطط اقتصادية واجتماعية تنسق مقدما بين مختلف القرارات والسياسات ، تأخذ فى الاعتبار ما بين مختلف قطاعات الاقتصاد القومى من ترابطات وتشابكات وتعمل على المفاضلة بين البدائل الممكنة وفقاً لنظام أولويات محددة وفى مثل هذه الأنظمة لايكون للأسعار نفوذ يذكر فى توجيه الموارد ، بل يتم تخطيط الأسعار بما يحقق الأهداف المقررة فى الخطة القومية .

١ - ١ - ٥ — الوضع الراهن لعلم الاقتصاد :

الواقع أن الاقتصاد ليس « علماً » بنفس المعنى الذى ينطبق على علوم الرياضيات والطبيعة والفلك مثلا . فلا مجال فى العلوم الأخيرة لخلاف فى الرأى مصدره اختلاف المصالح الطبقية أو الاتجاه الاجتماعى للباحث ، وهى إذن علوم « عالمية » بحق . أما علم الاقتصاد فهو يعانى من انقسامه فى الواقع إلى علمين : علم الاقتصاد الرأسمالى الذى يعبر أساسا من فكر الطبقات الرأسمالية ومصالحها ، وعلم الاقتصاد الاشتراكى الذى يعبر أساسا عن فكر الطبقات الشعبية ومصالحها

وفى ظل هذا الانقسام يصعب القول بوجود الموضوعية فى علم الاقتصاد، ويثور تناقض بين اتساع الاقتصاد للانحيازات الطبقية وبين ادعاء أن مهمته هى الكشف عن القوانين الموضوعية التى تحكم النشاط الاقتصادى . كذلك يثور تناقض بين كون العلم الحقيق « عالميا » بالضرورة وبين عدم اتساع علم الاقتصاد لتفسير النظامين الرأسمالى والاشتراكى سويا .

ولما كان هدفنا من هذه الملاحظات أن ننبه القارىء المبتدىء إلى الوضع الراهن للعلم الذى هو مقبل على دراسته ، من غير أن نثقل عليه بقضايا منهجية خلافية كعالمية العلم والنظرة الموضوعية فى العلوم الاجتماعية وما نحوها ، فسوف نكتفى بالقول بأن جمهوراً كبيراً من الاقتصاديين يرون من منطلقات مختلفة - أن علم الاقتصاد يمكن أن يكون علماً موضوعياً وعالميا حقا . فهناك فريق يؤمن بأن ذلك ممكن لو اقتصر علم الاقتصاد على تحليل « ما هو كائن » ، وتجنب كل المسائل المتعلقة « بما ينبغى أن يكون » ، أى إذا تجنب الاقتصاديون المقولات الهدفية واقتصروا على « المقولات الوضعية »[١] . وهناك فريق يؤمن بأن هناك ضمانات أكثر للموضوعية إذا انطلق الاقتصاديون من أرضية الفكر الاشتراكى لأن هذا الفكر الذى يمثل مصالح الطبقات الشعبية لا يحول بينه وبين معرفة الحقيقة الموضوعية أى حائل كالرغبة فى حماية وضع استثنائى متميز . بل أن تجاهله للحقيقة قد يلحق به من الأضرار ما هو كفيل برده عن الانحراف عن الخط الموضوعى . وأخيراً - وليس آخراً - هناك من يؤمنون بأن الحياد العلمى يتحقق بذكر مساوىء ومزايا كل من النظامين ، دون محاولة الانحياز لأحدهما وترك ذلك للقارىء . لكن هذه النظرة تنطوى على خطر الاعتقاد بإمكان توليف نظام جديد يجمع محاسن النظامين ويتجنب مساوئهما ، وهو ما يتناقض مع حقيقة أن النظم هى نتاج تطور تاريخى محدد ، وأن لكل نظام منطق داخلى يحكمه .

---

(١) مقولات هدفية : Normative Statements ، مقولات وضعية : Positive Statements

على أية حال ، فإن السؤال الهام الآن هو : أين يقف هذا المقرر من هذا الانقسام في علم الاقتصاد ، وإلى أي جانب سوف ينحاز ؟ الواقع أن جزءاً كبيراً مما سنعرضه في هذا المقرر يدخل في نطاق الفكر الاقتصادي الرأسمالي ، ويمثل لبنات أساسية في البناء الفكري لعلم الاقتصادي الرأسمالي . وهذا الجزء يشمل نظريات سلوك المستهلك وسلوك المنتج والتوازن السوقي . واهتمامنا بعرض هذه النظريات لا يرجع بأية حال إلى انحيازنا للفكر الاقتصادي للرأسمالي . وإنما هو راجع في الأصل إلى كون هذه النظريات تمثل جزءا من « نظرية الثمن » التي تمثل جوهر الفكر الاقتصادي السائد في البلاد المتقدمة الرأسمالية وأيضاً في البلاد المتخلفة . ومن ثم فلا ينبغي أن نتجاهل هذه النظرية . هذا فضلا عن أن ما تعرضه يبرز جوانب هامة من المشكلة الاقتصادية ويوضح منطقا معيناً للاختيار والمفاضلة بين البدائل ، كما أنه يحتوى على أدوات تحليل وعلاقات ذات نفع لا ينكر في أي اقتصاد تبادلي رأسماليا كان أو اشتراكيا . أما الجزء الآخر من المقرر فهو يتضمن عرضا لبعض أدوات الوصف والتحليل التي يعترف بوجودها في الفكر الاقتصادي الرأسمالي والفكر الاقتصادي الاشتراكي على حد سواء . فهذه أجزاء ذات نفع عام في أي اقتصاد ، وهي لا تشكل نظرية أو جزءاً من نظرية بقدر ما تشكل أدوات للتحليل أو منهجا للتفكير في العلاقات الاقتصادية . ولو أن مجال تطبيق مثل هذه الأدوات والمناهج أوسع وأرحب في الأنظمة الاشتراكية عنها في الأنظمة الرأسمالية . وهذا الجزء الأخير يشمل تحليل المدخلات والمخرجات أو التشابك الاقتصادي ، والبرمجة الخطية .

١ - ١ - ٦ - أقسام علم الاقتصاد :

لعله من المفيد في ختام استعراضنا الأولى لعلم الاقتصاد ، أن نشير إلى التقسيم التقليدي لهذا العلم إلى قسمين : قسم الاقتصاديات الجزئية وقسم الاقتصاديات الكلية[١] .

---

(١) اقتصاديات جزئية : Micro-economics ، اقتصاديات كلية : Macro-economics

فى القسم الأول يتركز الاهتمام على دراسة السلوك الاقتصادى للوحدات الصغرى للاقتصاد القومى كالأفراد باعتبارهم وحدات استهلاكية، والشركات أو المنشآت باعتبارها وحدات إنتاجية، أو سوق سلعة من السلع، أو صناعة من الصناعات. ويعنى الاقتصادى هنا بالبحث فى كيفية وصول هذه الوحدات إلى قراراتها الخاصة بتوزيع ما لديها من موارد محدودة على استخداماتها البديلة، وعلى كيفية تحديد الأثمان فى الأسواق، وكيفية توزيع الناتج على عناصر الانتاج، أو كيفية تحديد أثمان خدمات عناصر الإنتاج كما يعنى بدراسة شروط كفاءة الانتاج والتوزيع. وهذه القضايا تشكل موضوعات نظرية الثمن، نظرية الانتاج، نظرية التوزيع ونظرية الرفاهة.

أما قسم الاقتصاديات الكلية فهو يعنى ببحث القضايا التى تمس الاقتصاد القومى ككل، ومستوى الأداء الاقتصادى بوجه عام. ويتركز البحث هنا على محددات الدخل القومى ومشاكل التوظف الكامل والتنمية الاقتصادية وما يتصل بذلك من مسائل خاصة بعرض النقود وميزان المدفوعات. وهذه المسائل تدخل فى اختصاص نظريات التوظف أو النقود والتجارة الخارجية والتنمية الاقتصادية والتخطيط الاقتصادى.

١ - ٢ — مفاهيم أساسية فى الدراسات الاقتصادية :

لكل علم من العلوم لغة خاصة به، يسهل الحوار بواسطتها بين المتخصصين، ولكنها تشكل عقبة كبرى أمام غير المتخصصين. والاقتصاد ليس استثناء من هذه القاعدة. فهناك ألفاظ وعبارات متداولة بين الاقتصاديين، ولها عندهم معان محددة قد تختلف تماما عن المعانى التى قد تتبادر إلى ذهن غير الاقتصاديين. ومن ثم فعلى من يتعلم الاقتصاد أن يلم ولو بقدر محدود من الاصطلاحات والمفاهيم الشائع استخدامها بين الاقتصاديين. وهذا ما ننوى أن نسلح به الدارس المبتدىء الآن. نبدأ بتوضيح بعض الألفاظ التى استخدمناها فيما سبق دون محاولة تعريفها مثل الحاجات والسلع والخدمات والانتاج والموارد أو عناصر الانتاج، والناتج القومى والدخل القومى، والاستهلاك والادخار والاستثمار والثروة وكمية النقود. يلى ذلك عرض لمفهوم نفقة الفرصة البديلة ومفهومى التوازن والأمثلية اللذان يعتبران

من الركائز الأساسية للتحليل الاقتصادى . بعد ذلك نوضح فكرة التحليل الحدى وكيفية التوصل إلى أوضاع مثلى أو توازنية من خلال إجراء المقارنات و عند الحد ، كما نتعرض لاستخدام العلاقات الدالية فى الاقتصاد وطبيعة هذه العلاقات. وأخيراً نوضح الفارق بين نوعين رئيسيين من التحليل الاقتصادى وهما : التحليل الساكن والتحليل الحركى .

١ - ٢ - ١ - الحاجات ووسائل إشباع الحاجات :

أحد السمات البارزة للحاجات البشرية هو تعددها وتنوعها كما سبق وأن ذكرنا ونحن بصدد توضيح ماهية علم الاقتصاد . والتعدد والتنوع يعنى إمكانية التقسيم والتصنيف . فلنر إذن كيف يمكن تقسيم حاجات البشر . هناك تقسيمات عديدة . ولكنا سنعنى فقط بتقسيمين منها وهما : تقسيم الحاجات حسب ضرورتها أو مدى إلحاحها . وتقسيم الحاجات حسب طريقة إشباعها .

إذا أخذنا بمعيار الضرورة أو شدة الحاجة ، فإنه يمكن تقسيم الحاجات إلى حاجات ضرورية وحاجات كمالية . فالحاجات الضرورية تشمل الحاجات البيولوجية كالحاجة إلى قدر معين من أطعمة معينة والحاجة إلى حد أدنى من الكساء والمأوى وغير ذلك مما هو ضرورى للمحافظة على الحياة والمحافظة على النوع وضمان قدرة الإنسان على العمل . أما الحاجات الكمالية فهى تشمل كل ماليس ضروريا للمحافظة على قدرة الإنسان على البقاء على قيد الحياة ، والمحافظة على النوع والعمل ، ابتداء من بعض الأشياء التى تجعل ظروف المعيشة أسهل وأيسر كالثلاجة والغسالة والسيارة الخاصة والسفر إلى الخارج ، وإلى الأشياء التى تعتبر من قبيل الترف المحض كالحاجة إلى اقتناء طائرة خاصة أو يخت خاص أو السكنى فى قصر ضخم تحيط به حدائق غناء من كل جانب . وبغض النظر عما يشتمل عليه كل قسم من الأقسام ، فإنه من المهم التنبه إلى أن مثل هذا التقسيم نسبى بالضرورة ذاتيا وزمانيا ومكانيا . فالتقسيم ذاتى بمعنى أن ماهو ضرورى لشخص ما قد يعتبر غير ضرورى لشخص آخر كالتدخين أو شرب البيرة مثلا . والتقسيم نسبى فى الزمان بمعنى أن ما قد يكون كماليا لشخص ما فى وقت ما قد يصبح ضروريا

فى وقت آخر أو العكس . فالسيارة الخاصة من قبيل الكماليات عندما يكون دخل الفرد محدودا بينما قد تصبح من قبيل الضروريات فى وقت آخر يرتفع فيه دخل الفرد بما يمكنه من شراء سيارة أو أكثر . والتقسيم نسبى فى المكان بمعنى أن ما قد يكون ضروريا فى مكان معين قد يعتبر كماليا فى مكان آخر . فالحاجة إلى جهاز للتدفئة تعتبر ضرورية فى بلد شديد البرودة بينما يمكن اعتبارها من الكماليات فى بلد حار .

وإذا أخذنا بمعيار طريقة الأشباع ، فانه يمكن تقسيم الحاجات إلى حاجات ينظم أشباعها بشكل فردى وحاجات يتم أشباعها بشكل جماعى . والعبرة هنا ليست باختلاف الحاجة فى حد ذاتها وانما بقيام الدولة بتنظيم عملية الاشباع أو تركها للأفراد ينظمونها كيفما يشأون . فإذا كان الطب مؤمما والعلاج مجانى للجميع ، فأننا نعتبر الخدمات الطبية من قبيل الحاجات الجماعية . وقد تؤدى الخدمات الطبية بالطريقتين معا بمعنى تواجد قطاع خاص وقطاع عام للعلاج ، فتكون خدمة الطب فردية بالنسبة لبعض الناس وجماعية بالنسبة للبعض الآخر . لكن هناك حاجات يقتصر أمر تنظيم أشباعها على الدولة كالحاجة إلى الأمن والدفاع والعدالة وما نحوها . على كل حال هذا التقسيم أيضا نسبى . فبعض الحاجات كالحاجة إلى التعليم قد تشبع بطريقة فردية عن طريق إكتفاء الشخص بالدراسة الذاتية المنزلية ، بينما قد تشبع هذه الحاجة فى ظروف أخرى أشباعا جماعيا عندما يلتحق الشخص باحدى المدارس الحكومية . وهناك حاجات معينة تشبع جماعيا فى بعض المجتمعات وفرديا فى البعض الآخر .

وللحاجات بعدان ينبغى ادراكهما : بعد تاريخى وبعد اجتماعى . فالحاجات لها بعد تاريخى بمعنى أن ما قد يكون كمالى فى زمن ما قد يتحول إلى ضرورة فى زمن آخر ، وبمعنى أنها متوقفه على مدى قدرة الإنسان على الحصول على وسائل أشباع حاجاته وبالتالى على مدى تطور قوى الإنتاج المتاحة للانسان فى وقت من الأوقات . فحاجات الإنسان البدائى كانت محدودة جدا بالنسبة لحاجات الإنسان العصرى وذلك لاختلاف المرحلة التاريخية وما يصاحبها من اختلاف فى قدرة الإنسان وامكانياته . والحاجات لها بعد اجتماعى أيضا ، بمعنى أن ما قد يكون كماليا

فى مجتمع ما قد يصبح من الضروريات فى مجتمع آخر . بالتحديد ، أن حاجات الإنسان تختلف وفقا لنوع المجتمع الذى يعيش فيه ومكان أو وضع الإنسان فى هذا المجتمع . أما عن نوع المجتمع فهو رهن بتطور قوى الإنتاج وبطبيعة العلاقات الاجتماعية فيه . فالمجتمع الصينى غير المجتمع السويدى غير المجتمع المصرى ، ومن ثم تختلف الحاجات ومدى ضرورتها فى كل من هذه المجتمعات . أما عن مكان الانسان فى المجتمع فالمقصود به موقعه من العملية الإنتاجية ، أى ما إذا كان عاملا أو صاحب عمل أو سمسار أو مقاول . . الخ . وأهمية هذا العامل فى تحديد الحاجات هو أن موقع الفرد من العملية الإنتاجية يحدد فى الغالب مستوى دخله وبالتالى قدرته الشرائية وترتيب حاجاته .

هذا عن الحاجات . فماذا عن وسائل أشباع الحاجات ؟ المقصود بوسائل إشباع الحاجات هو السلع والخدمات التى يترتب على الحصول عليها شعور بالاشباع . (١) وتعرف السلع بأنها الأشياء المادية الملموسة أو المحسوسه التى تستخدم فى أشباع الحاجات مثل الطماطم والسمك والكراسى والزراير . . الخ . أما الخدمات فهى تعرف بأنها المجهود الذى يقوم به شخص لصالح شخص آخر دون أن يتجسد بالضرورة فى أى شىء مادى ملموس كزيارة الطبيب أو الذهاب إلى السينما أو حديقة الحيوانات . . . الخ .

أعلم أنه ليست كل السلع مما يدخل فى نطاق الدراسة الاقتصادية، وانما يدخل فقط فى نطاق هذه الدراسة السلع النادرة والتى يتكلف الإنسان جهدا فى الحصول عليها . أما غير ذلك من السلع الذى يوجد بوفره ولا يبذل الانسان أى جهد للحصول عليه كالماء والهواء واشعة الشمس فهو خارج نطاق علم الاقتصاد . ويطلق على النوع الأول السلع الاقتصادية وعلى النوع الثانى السلع الحرة أو المجانية . (٢) لكن ينبغى أن نذكر أن ما يدخل فى قائمة السلع الحرة عدد محدود جدا من السلع . . . فبالرغم من أن الماء فى النهر أو فى البحيرة والرمل على

---

(١) سلع : Goods ، خدمات : Services ، إشباع : Satisfaction

(٢) سلع اقتصادية : Economic goods ، سلع حرة : Free goods

شاطىء البحر ، والثمار فى الغابة هى من قبيل السلع الحرة حيث توجد فى هذه الأماكن إلا أن هذه الأشياء ذاتها ليست من قبيل السلع الحرة فى المدن حيث يعيش معظم السكان . ومن ثم يلزم جهد ومال لاحضار هذه السلع إلى المدن . أضف إلى ذلك أنه حتى الهواء قد لا يكون سلعة حرة فى بعض الظروف أو الأماكن كمنجم فحم مثلا . وهذه الملاحظات توضح نسبية تقسيم السلع .

وتقسم السلع عادة إلى سلع استهلاكية وسلع انتاجية أو رأسمالية . والسلع الاستهلاكية هى كل ما يعطى إشباعا بشكل مباشر . وهى تنقسم بدورها إلى سلع استهلاكية معمرة كالثلاجة والغسالة والملابس والاثاث المنزلى، وسلع استهلاكية غير معمرة كسائر الوان الطعام والشراب . أما السلع الانتاجية فهى تشمل كل السلع التى لا تصلح لاعطاء إشباع بشكل مباشر كالالات والأدوات والمعدات والخامات التى تستخدم فى انتاج سلع أخرى قد تتوفر فيها القابلية للاشباع المباشر وقد لا تتوفر(١) .

هذا عن السلع . أما بالنسبة للخدمات فهى نادرا ما تكون « حرة » أو مجانية . لان أداء أى خدمة يتطلب فى العادة بذل جهد انسانى، وربما يتطلب أيضا استخدام بعض السلع الاقتصادية . ومن الجدير بالذكر أن علم الاقتصاد لا يعنى بكافة الخدمات التى تستخدم فى أشباع الحاجات وانما درج الاقتصاديون على الاقتصار على نوع معين من الخدمات وهى تلك الخدمات التى يمنح لمن يقدمها ثمنا ، أو ما يمكن أن يطلق عليه الخدمات السوقية أو الاقتصادية أى التى تدخل فى دائرة التعامل السوقى . وعلى ذلك تستبعد خدمات ربات البيوت من طهى وغسيل ملابس وتنظيف المنزل وتربية أطفال . وربما يكون مفيدا هنا أن نذكر أن التطور والتحضر يؤديان إلى اتساع دائرة الخدمات التى يهتم بها علم الاقتصاد . ذلك أنه مع زيادة التصنيع واختلاف نمط المعيشة والعلاقات الاجتماعية عما قبل

(١) سلع استهلاكية : Consumer goods ، سلع استهلاكية معمرة : Consumer durables أو Durable consum r goods ، سلع استهلاكية غير معمرة : Non durable co.sumer goods سلع إنتاجية أو رأسمالية : Producer or capital goods.

التصنيع . يطرأ اختلاف على كيفية حصول الانسان على خدمات معينة . فتخرج خدمات معينة من دائرة الاداء المنزلى وتصبح خدمة اقتصادية تباع وتشترى فى السوق ، كغسل الملابس فى محلات خاصة وتناول الوجبات فى المطاعم وتربية الاطفال فى دور الحضانة وما إلى ذالك من الخدمات التى كانت تؤدى منزليا ومجانيا .

١ - ٢ - ٢ — الانتاج وعناصر الانتاج :

المقصود بالانتاج هو ذلك النشاط الذى يبذله الانسان لكى يحصل من الطبيعة على السلع والخدمات اللازمة لاشباع حاجاته . وتنشأ ضرورة الانتاج من أن الانسان لا يجد وسائل إشباع حاجاته فى الصورة التى يرغبها وفى الوقت والمكان المناسبين ، وانما عليه أن يقوم بجهد لتحويل ما هو متاح إلى الشكل المناسب لاشباع حاجاته ، ولتوفير ما يحتاجه فى الوقت والمكان المناسبين .

إذن الأصل فى الإنتاج أن يتم بغرض إشباع حاجات الإنسان ، أى لتوفير سلع وخدمات لها القدرة على إعطاء إشباع . ويطلق الاقتصاديون المنفعة على مقدرة السلع والخدمات على تحقيق الإشباع الانسانى . أى أن الإنسان يهدف من وراء الإنتاج إلى الحصول على سلع وخدمات نافعة . وحيث أن الإنسان لا ينتج شيئا جديداً من العدم ، وإنما هو يستخرج ويشكل ويمزج أشيا موجودة أصلا فى الطبيعة ، فإن ما يخلقه الإنسان حقا عندما يقوم بعملية الإنتاج هو المنفعة ، ولذا فإن الإنتاج يعرف بأنه خلق المنفعة .

من الأهمية بمكان أن يتخلص الدارس المبتدىء من مفهوم ضيق — ولكنه شائع — للإنتاج . إذا أن المعنى الاقتصادى للإنتاج واسع ورحب كما يستفاد من تعريفنا السابق للانتاج . فليس المقصود بالإنتاج كما هو شائع العمليات الفنية التى تتم فى المزارع والمصانع والمناجم ونحوها فبالإضافة إلى هذه الانشطة يشمل الانتاج أنشطة النقل والتخزين والتوزيع ، كما يشمل كل نشاط إنسانى آخر مما يمكن اعتباره ضروريا لانجاز أى من العمليات الإنتاجية السابقة ، مثل المجهود المبذول فى تقسيم العمل

بين العمال والموظفين والتنسيق بينهم بما يضمن إنتظام سير العمل وسرعته ، ومثل النشاط المبذول فى توفير مستلزمات الإنتاج فى الوقت المناسب وبالكميات المناسبة وفى ضمان سرعة تصريف السلع المنتجة ، ومثل النشاط المبذول فى تسجيل المعاملات بين الوحدة الإنتاجية وغيرها ، ومراجعة الحسابات والتكاليف ، ومثل الجهد المبذول فى البحوث والتجارب العلمية التى تهدف لرفع مستوى الإنتاج أو خفض تكاليفه .

أن إتمام أية عملية إنتاجية يحتاج بالطبع إلى تضافر عدد من الموارد أو العناصر ، والتى يطلق عليها عناصر الإنتاج، وتقسم هذه العناصر عادة إلى ٤ أنواع هى : العمل والأرض أو الموارد الطبيعية ، ورأس المال ، والتنظيم . ويضيف بعض الاقتصاديين عنصراً خامساً فى بعض الأحيان وهو المعرفة الفنية[١].

العمل هو قضاء الإنسان وقتاً وبذله جهداً فى إنتاج السلع والخدمات الاقتصادية وهذا يعنى أن الوقت والجهد الذى يذهب فى الهوايات والترويح عن النفس أو صنع بعض الأشياء أو العناية بحديقة المنزل لا يعتبر عملا من وجهة النظر الاقتصادية. والعمل قد يكون يدويا أو ذهنياً لكن أياً كان نوع العمل ، فإن كمية العمل المتاحة للمجتمع فى وقت من الاوقات تتوقف على حجم السكان ونسبة من هم فى سن العمل إلى مجموع السكان وكذلك متوسط ساعات العمل فى السنة . أما كفاءة العمل فهى رهن بما تناله قوة العمل من تعليم وتدريب ومران ، كما هى رهن بطريقة تنظيم العملية الإنتاجية كلها وبنوعية العناصر التى تتضافر مع عنصر العمل .

الأرض أو الموارد الطبيعية هى كل الأشياء المادية ذات الفائدة الاقتصادية

---

(١) عناصر الإنتاج : Factors of Production ، العمل : Labour ، الأرض : Land ، رأس المال : Capital ، التنظيم : Enterprise or Entrepreneurship ، المعرفة الفنية : Technology.

فى الإنتاج ، والتى لم تتأثر قيمتها بجهـد الإنسان كالأرض والغابات والمعادن والبذور والأنهار الصالحة للملاحة والثروة السمكية . والموارد الطبيعية مفيدة من نواحى عديدة للعملية الإنتاجية فهى تعطينا :

(١) مكان للعمل .

(٢) مواد تدخل فى تركيب السلع النهائية

(٣) طاقة تعزز أو تحل محل الجهد الانسانى .

ونظراً للأهمية الخاصة للأرض بالنسبة لباقى الموارد الطبيعية لأنها تمد الانسان بمكان العمل ومواد للعمل ، فإن بعض الاقتصاديين يطلقون لفظ الأرض على الموارد الطبيعية كلها . وهذا العرف ينبغى إلا ينسينا أن الأرض ليست المورد الطبيعى الوحيد ، وإن هناك أشياء اخرى كالماء والهواء والسمك لا يمكن إعتبارها أرضا . هذا من ناحية . ومن ناحية أخرى ، ينبغى أن نذكر أن الأرض لم تعد مورداً طبيعيا خالصا ، وإنما يتدخل جهد الانسان بدرجة متزايدة فى تكوينها والتأثير فى خواصها ، لدرجة أن البعض صار يعتبر الأرض نوعا من رأس المال يطلق عليه رأس المال الطبيعى .

رأس المال هو عنصر أو مورد مشتق ، بمعنى انه من صنع الانسان . وهذا يشمل المبانى و لآلات و لأدوات والمعدات والخامات والسلع النصف مصنعه والمخزون السلعى . ومن المهم أن يكون واضحا أن رأس المال يتكون من أشياء مادية ملموسة ، أى رأسمال حقيق ، وأنه ليس مجرد مبالغ من المال . فالنقود ليست رأسمالا من من وجهة نظر المجتمع ، ولا هى ثروة . وإنما هى مجرد إداة لنقل ملكية رأس المال أو غيره من الموارد من شخص إلى آخر . أما من وجهة نظر الفرد ، فنظرا لا مكان تحويل النقود بسهولة إلى رأسمال حقيق ، فإن أى رجل أعمال يعتبر النقود مكافئة لديه لرأس المال بمعنى أنها بديل جيد له ، وهو لذلك يعتبرها شكلا من أشكال رأس المال . ورأس المال قد يكون رأسمال ثابت أو رأس

متداول أو عامل (١). فرأس المال الثابت كالمبانى والآلات والناقلات ... إلخ لا يفنى فى عملية إنتاجية واحدة ، أما رأس المال العامل أو المتداول كالمواد الخام والسلع نصف مصنعة والمخزون السلعى فإنه يفنى فى عملية إنتاجية واحدة ، بمعنى أنه يفقد « شخصيته » المستقلة ليذوب فى « شخصية » شىء آخر .

التنظيم نوع من العمل ، ولكنه يختلف عن العمل كما سبق تعريفه ، بأنه يتولى مسئوليات الإشراف على عمل الآخرين كما يتولى مهمة إتخاذ القرارات الاقتصادية فى الوحدة الاقتصادية ويتحمل المخاطر التى تترتب على عدم سلامة هذه القرارات ، خاصة فى ظل غياب اليقين أو عنصر التأكد فى الحياة الاقتصادية .

- المعلومات الفنية : لا يمكن إنتاج أى شىء دون توفر معلومات فنية عن كيفية إنتاجه والطرق المختلفة لتوليف عناصر الإنتاج ، والظروف المناسبة للحصول على أكبر إنتاج ممكن منها . والحق أن مستوى الإنتاج ونوعيته يتوقفان بدرجة كبيرة على مقدار رصيد الإنسان أو المجتمع من المعلومات الفنية .

١ - ٢ - ٣ - الناتج القومى والدخل القومى :

الحاجة إلى قياس لإنتاج المجتمع ودخله . لكى نحكم على نظام اقتصادى معين ، ونقيم مستوى الأداء العام فيه ، ونتعرف على سرعة نموه ، ومدى مايتمتع به من استقرار اقتصادى ، وكيفية توزيعه للموارد المتاحة على مختلف الاستخدامات المتنافسة ، لابد أن يتوفر لنا بيانات عن الإنتاج والدخل القومى وتركيب كل منها خلال فترة زمنية طويلة نسبياً . فمقارنة قيم الإنتاج القومى من سنة لأخرى هى التى تمكننا من التعرف على ما إذا كانت مقدرة الاقتصاد على الإنتاج فى تزايد أو تناقص . كما أن هذه المقارنة هى التى توضح لنا مدى استقرار الإنتاج من سنة لأخرى ، وما إذا كان الإنتاج يخضع لتقلبات شديدة أو ضعيفة من سنة لأخرى ، ومدى انتظام حدوث هذه التقلبات . كذلك فإن دراسة هيكل الإنتاج والدخل

---

(١) رأس مال ثابت : Fixed Capital ، رأسمال عامل أو متداول : Working or Circulating Capital .

خلال فترة معينة هى التى توضح لنا نمط استخدام المجتمع لموارده ، ونمط توزيعه لدخله على عناصر الإنتاج التى تشترك فى خلقه .

وهناك مقياسان هامان لإنتاج المجتمع هما الناتج القومى الإجمالى والدخل القومى الإجمالى .

ما المقصود بالناتج القومى الاجمالى والدخل القومى الإجمالى ؟

يعرف الناتج القومى الإجمالى(١) بأنه مجموع قيم جميع السلع والخدمات النهائية التى ينتجها مجتمع ما خلال فترة معينة ، اصطلح على أنها سنة مالية أو ميلادية . أما الدخل القومى الإجمالى(٢) فهو عبارة عن مجموع جميع الدخول التى تكتسبها عناصر الإنتاج المختلفة لقاء اشتراكها فى خلق الناتج القومى خلال فترة معينة ، اصطلح أيضاً على أنها سنة مالية أو ميلادية . أى أن الدخل القومى الاجمالى هو مجموع الأجور والفائدة والريع والأرباح باعتبارها دخول عناصر الانتاج الأربعة العمل ورأس المال والأرض والتنظيم على التوالى . والواقع أن الناتج القومى الإجمالى والدخل القومى الإجمالى هما وجهان لشىء واحد هو الإنتاج القومى . فالناتج القومى الإجمالى عبارة عن الإنتاج القومى منظوراً إليه من زاوية خلقه كتيار سلع وخدمات ، بينما الدخل القومى الاجمالى عبارة عن الانتاج القومى منظوراً إليه من زاوية توزيعه كتيار دخول أو عوائد عناصر الانتاج(٣) .

كيف نقيس الناتج القومى الاجمالى ؟ بعبارة أخرى ، الاقتصاد القومى ينتج ملايين السلع والخدمات ، فهل تؤخذ كلها فى الاعتبار عند حساب الناتج القومى ، وماهى الوسيلة لجمع سلع متباينة ومختلفة من حيث وحدات القياس ؟

---

(١) الناتج القومى الإجمالى : Gross National product ، واختصارا G.NP.

(٢) الدخل القومى الإجمالى : Gross National Income ، واختصارا G.N.I.

(٣) سوف نفرق بين هذه المفاهيم الإجمالية (Gross) للدخل والناتج القومى، وبين مفهوم الناتج القومى الصافى والدخل القومى الصافى (Net) فى القسم ٤٠٢٠١ ، عندما يأتى الحديث عن الاستثمار واستهلاك رأس المال .

أولا : بالنسبة للسلع والخدمات التى تدخل فى حساب الناتج القومى :

(أ) السلع التى تدخل فى الحساب هى السلع النهائية . هنا مبدأ عام لا بد من مراعاته وهو تجنب حساب قيمة الشىء الواحد أكثر من مرة واحدة ، أى تجنب ازدواج أو تعدد الحساب إذا استعرضنا المنتجات التى ينتجها إقتصاد ما ، فإننا قد نجد فيها المنسوجات والغزل والقطن وبذرة القطن والأسمدة . فإذا كان هناك ثوب قماش ثمنه ٥٠ جنيها ، فإن شركة النسيج التى أنتجته قد تكون اشترت من شركة الغزل مانيمته ٣٠ جنيها غزلا ، وشركة الغزل قد تكون اشترت من مزارع القطن ماقيمته ٢٠ جنيها قطنا ، ومزارع القطن قد يكون إستخدام فى إنتاج هذا القطن ماقيمته ١٠ جنيهات من البذور والسماد . الآن إذا حسبنا قيمة الناتج القومى على أنه يساوى قيمة البذور والأسمدة + قيمة الغزل + قيمة المنسوجات أى ١١٠ جنيها ، فإننا نكون قد وقعنا فى خطأ ازدواج أو تعدد الحساب . لأن قيمة الغزل مثلا قد حسبت مرة كانتاج لشركة الغزل ثم حسبت قيمتها مرة أخرى ضمن إنتاج شركة النسيج . كذلك فإن قيمة القطن تكون قد حسبت ثلاثة مرات : مرة كانتاج مزرعة القطن ، ومرة أخرى ضمن قيمة الغزل ، ومرة ثالثة ضمن قيمة النسيج . وبالمثل بالنسبة للبذور . وهذه الطريقة تضخم من قيمة الناتج القومى الإجمالى دون مبرر حقيقى .

ما العمل إذن؟ الحل هو أن يشتمل الناتج القومى على قيمة السلع النهائية فقط، أى النسيج فى المثال السابق وقيمته ٥٠ جنيها . والمقصود بالناتج النهائى أو السلع النهائية هو مايباع لمستخدمين نهائيين للسلعة خلال فترة حساب الناتج القومى ، أى ما يشتريه المستهلكون والمستثمرون والحكومة والمصدرون وأيضاً مايتبقى من المنتج ويضاف إلى المخزون . ليس معنى هذا أننا نستبعد كلية السلع الوسيطة أى الغزل والقطن والبذور والأسمدة من قيمة الناتج القومى الإجمالى ، ذلك أن قيمة هذه السلع متضمنة بالفعل فى قيمة المنسوجات ؛ كل مافى الأمر أننا نتجنب حساب نفس الشىء أكثر من مرة .

(ب) تضمين الإنتاج المستهلك ذاتياً والقيمة الإيجارية للمساكن التى يشغلها

مالكوها. يضاف إلى السلع النهائية التى تتداول سوقياً شيئان لا يدخلان فى دائرة التعامل السوقى وهما ذلك الجزء من الإنتاج الزراعى الذى يستهلكه منتجوه مباشرة وخدمات المساكن التى يسكنها ملاكها. وكما سيأتى ذكره، فإن قيمة هذه الأشياء تحسب على أساس سعر المثل. فيقوم الاستهلاك الذاتى للمزارعين بحسب سعر الإنتاج المباع فى السوق وتحسب قيمة خدمات المساكن على أساس القيمة الإيجارية للمساكن المشابهة.

(ج) استبعاد خدمات الزوجات ومنتجات أوقات الفراغ والمنتجات المحظور التعامل فيها قانوناً. والعبرة فى استبعاد الخدمات المنزلية التى تؤديها الزوجات أنها ليست خدمات اقتصادية بالمعنى المذكور فى ١٠٢٠١. وكذلك تستبعد منتجات أوقات الفراغ لأنها لا تمثل إنتاجاً بالمعنى المحدد فى ٢٠٢٠١. إذ لا تتوفر فى مثل هذا الإنتاج صفة الانتظام كما أنه لا يكون الهدف منه إنتاج سلع وخدمات فى حد ذاتها، وإنما تقضية وقت الفراغ أساساً بغض النظر عن الناتج وبغض النظر عن إمكانية تسويقه. وأخيراً تستبعد المنتجات المحظور قانوناً التعامل فيها أو تعاطيها كالمخدرات. لأنها لا تعتبر سلعاً غير مشروعة من وجهة نظر المجتمع، كما أنه يصعب تقدير إنتاجها والتعرف على قيمتها من الناحية العملية.

ثانيا: بالنسبة لطريقة الجمع وتوحيد وحدات القياس:

لا نستطيع بالطبع أن نجمع أطنان القطن وأمتار القماش وأطوال السكك الحديدية وخدمات الأطباء والمحامين والعرف المتبع هو جمع قيم هذه الأشياء واستخدام النقود كمقياس للقيم. والناتج القومى عبارة عن مجـ $\sum_{و=1}$ ك و س و حيث ك و هى كمية السلعة و، س و هو سعرها. واستخدام الأسعار فى حساب الناتج القومى يثير عدداً من المشاكل أهمها:

(أ) هناك سلع وخدمات تدخل فى تعريف الناتج القومى، ولكن لا يوجد لها أسعار سوق فالجزء من الإنتاج الذى يستهلكه المزارعون لا يباع فى السوق،

ومن ثم فالأصل أن سعره غير معلوم لكن العرف المتبع كما سبقت الإشارة هى استعمال سعر بيع الجزء المسوق من الإنتاج الزراعى . كذلك هناك خدمات لاتباع فى السوق كخدمة الأمن والدفاع وخدمات الادارة الحكومية عموما . والعرف المتبع هنا هو تقييم هذه الخدمات على أساس التكلفة أو سعر التكلفة .

(ب) عدم إمكان إجراء مقارنة مباشرة بين الناتج القومى فى سنتين مختلفتين .

ذلك أن اختلاف قيمة الناتج القومى فى هذه الحالة يرجع إلى اختلاف كميات السلع والخدمات المنتجة ، كما يرجع إلى اختلاف أسعار هذه السلع والخدمات . وهكذا فقد تزداد قيمة الناتج القومى ولا تكون هناك زيادة فيما يحصل عليه المجتمع من سلع وخدمات ، وذلك عندما ترتفع الأسعار ولا يزداد الانتاج والأسلوب المتبع فى عمل مثل هذه المقارنة هو تثبيت الأسعار فى السنتين ، أى تقويم السلع والخدمات المنتجة فى السنتين بأسعار سنة واحدة تسمى سنة الأساس(١) ، ثم مقارنة الناتج القومى بالأسعار المثبتة للتعرف على مدى التغير الحقيقى فيه .

طريقة أخرى لقياس الناتج القومى الاجمالى :

يمكن التوصل إلى قيمة الناتج القومى الاجمالى فى سنة ما بحساب مجموع القيم المضافة (٢) فى كل مرحلة من مراحل إنتاج السلعة النهائية . أى أننا نجمع مساهمة كل وحدة إنتاجية فى قيمة السلعة ، أى ما تضيفه كل وحدة إنتاجية إلى قيمة السلع التى تشتريها من الوحدات الانتاجية الأخرى . ففى المثال السابق نجد أمامنا الصورة التالية :

	وحدة إنتاج البذور والأسمدة	وحدة إنتاج القطن	وحدة إنتاج الغزل	وحدة إنتاج المنسوجات
قيمة مبيعات كل وحدة إلى الوحدة التى تليها	١٠ ←	٢٠ ←	٣٠ ←	٥٠ ←
القيمة المضافة لكل وحدة إنتاجية	١٠(٥)	١٠	١٠	٢٠

(١) سنة الأساس : Base year (٢) القيمة المضافة : Value added

(*) يفترض فى هذا المثال أن وحدة إنتاج البذور والأسمدة لاتشترى مستلزمات إنتاج من أية وحدات إنتاجية أخرى .

الآن نجمع القيم المضافة فنجد أنها ٥٠ جنيها . وهذا هو نفسه قيمة إنتاج السلعة النهائية وهي المنسوجات . التي تمثل الناتج القومي الإجمالي في هذا المثال المبسط.

حساب الدخل القومي الإجمالي :

يحسب الدخل القومي الإجمالي عن طريق جمع الدخول التي حصلت عليها عناصر الإنتاج المختلفة من كل وحدة إنتاجية في الاقتصاد القومي . والواقع أن دخول عناصر الإنتاج في أي وحدة إنتاجية هي نفسها القيمة المضافة لتلك الوحدة الإنتاجية. فوحدة إنتاج النسيج حصلت على ٥٠ جنيها وهي قيمة مبيعات المنسوجات للمستخدمين النهائيين . ولكنها اشترت مستلزمات إنتاج (الغزل) قيمتها ٣٠ جنيها فقط . إذن الباقي وهو ٢٠ جنيها هو الذي يدفع في صورة أجور وإيجار وفائدة وربح لعناصر الإنتاج التي ساهمت في إنتاج النسيج . وبالمثل وحدة إنتاج الغزل حصلت على ٣٠ جنيها ثمناً لما باعته من غزل لوحدة إنتاج النسيج . ولكنها اشترت مستلزمات إنتاج (القطن) قيمتها ٢٠ جنيها فقط ، أين تذهب العشرة جنيهات المتبقية ؟ إنها تدفع في صورة دخول لعناصر الانتاج التي اشتركت في صنع الغزل . وهكذا بالنسبة لبقية الوحدات الإنتاجية .

نخلص مما تقدم إلى النتيجة التالية :

مجموع قيم السلع النهائية = مجموع القيم المضافة = مجموع دخول عناصر الإنتاج

وحيث أن

∴ الناتج القومي الإجمالي = مجموع قيم السلع النهائية = مجموع القيم المضافة ،
وأن الدخل القومي الإجمالي = مجموع دخول عناصر الإنتاج .

فإننا نصل إلى المقولة التي سبق ذكرها في مستهل حديثنا عن الإنتاج القومي وهي :

الناتج القومي الإجمالي = الدخل القومي الإجمالي .

١ . ٢ . ٤ الاستهلاك والادخار والاستثمار ورأس المال :

نظرنا إلى الدخل القومي الإجمالي في الفقرة السابقة من زاوية الحصول عليه أو اكتسابه ، ووجدنا أنه ينقسم إلى أجور وفوائد وإيجارات وأرباح . لكن هناك زاوية أخرى يمكن النظر منها إلى الدخل وهي زاوية التصرف في الدخل . فالناس تتصرف في دخلها أما بإنفاقه على سلع تعطيها أشباعاً مباشراً ، وأما بالامتناع عن إنفاقه في نفس فترة الحصول عليه . واحتجازه أما بدافع التحوط ضد أخطار المستقبل ، وأما بدافع استثماره والحصول على عائد في المستقبل . أى أن الدخل من هذه الزاوية ينقسم إلى استهلاك وإدخار :

الدخل = الاستهلاك + الادخار

إذن الاستهلاك القومي : عبارة عن ما ينفقه المجتمع من دخله للحصول على سلع وخدمات تعطيه إشباعاً مباشراً ، أى على السلع الاستهلاكية ، معمرة كانت أو غير معمرة . أما الادخار القومي فيقصد به ذلك الجزء من الدخل القومي الذى يمتنع المجتمع عن إنفاقه بقصد الحصول على إشباع مباشر في نفس فترة اكتساب الدخل . وقد يحتفظ الناس بمدخراتهم في شكل نقدى لا يدر عليهم أى فائدة ، ويسمى الادخار في هذه الحالة اكتنازاً . وقد يستغل الناس مدخراتهم في الحصول على دخل جديد ، ويقال في هذه الحالة أن المدخرات قد تحولت إلى استثمارات .

المقصود بالاستثمار القومي إذن هو ذلك الجزء من الناتج القومي الذى لا يستخدم للاشباع المباشر لحاجات المستهلكين ، وإنما يستخدم في توفير المصانع وآلالات والمعدات والمنازل(١) ، التى يمكن عن طريقها المحافظة على الطاقة الإنتاجية

---

(١) المنازل منتجة شأنها شأن المصانع ، فالمنزل ينتج خدمة المأوى تماما كما تنتج المصانع السيارات .

للاقتصاد القومى وتعويض ما يطرأ عليها من تناقص وإهلاك(١)، وكذلك زيادة هذه الطاقة الإنتاجية عاماً بعد عام . أى أن الاستثمار القومى عبارة عن الإضافة إلى رصيد المجتمع من السلع الإنتاجية . ويطلق على هذا الرصيد اصطلاح رأس المال .

وقبل أن نستطرد فى شرح مفهوم الاستثمار ، ينبغى أن نوضح أن الاستثمار بالمعنى الاقتصادى كما عرفناه سابقاً ، يختلف عن معنى شائع للاستثمار . فكلمة الاستثمار تطلق عادة على أفعال لا تعتبر استثماراً قومياً ، مثل قيام المورد بإيداع أمواله فى صندوق توفير البريد مقابل فائدة ، أو فتح حساب ادخار فى البنك ، أو شراء منزل قائم ، أو شراء أسهم أو شهادات استثمار . وبالرغم من أن هذه الأفعال تعتبر استثماراً من وجهة نظر الفرد ، إلا أنها لا تعتبر استثماراً من وجهة نظر المجتمع . ذلك أن الاستثمار من وجهة النظر الاجتماعية يعنى تكوين رأسمالى حقيقى ، أى إضافة إلى رأسمال المجتمع ، ولكن الأفعال المشار إليها لا تنطوى بالضرورة على خلق رأسمال جديد ، وقد لا يترتب عليها أكثر من انتقال ملكية رأسمال موجود من شخص لآخر .

الاستثمار الإجمالى والاستثمار الصافى . أشرنا فيما تقدم إلى أن الهدف من الاستثمار هو (أ) الإحلال والتجديد لتعويض ما يطرأ على رأسمال المجتمع من إهلاك والمحافظة على الطاقة الإنتاجية للاقتصاد ، و (ب) إضافة رأسمال جديد يزيد من طاقة المجتمع على الإنتاج . ويطلق على الجزء الأول من الاستثمار الإهلاك . أما الجزء الثانى فيطلق عليه الاستثمار الصافى . أما مجموع الجزئين فيطلق عليه الاستثمار الإجمالى . إذن

الاستثمار الإجمالى = الاستثمار الصافى + الاهلاك .

بتأمل هذه المعادلة يتضح أن الاستثمار الاجمالى لابد وأن يكون أكبر من

---

(١) يطلق لفظ الاهلاك Depreciation على التناقص الذى يطرأ على قيمة الأصول الرأسمالية خلال عملية الانتاج .

الاهلاك لكى تحدث إضافة صافية لرأسمال المجتمع تزيد من طاقته الإنتاجية . أما إذا كان الاستثمار الإجمالى مساوياً الاهلاك . فإن الاستثمار الصافى يكون صفراً ، ويظل رأسمال المجتمع وطاقته الإنتاجية ثابتة فى هذه الحالة . وأخيراً ، إذا قل الاستثمار الإجمالى عن الاهلاك ، فان معنى ذلك أن المجتمع لا يستطيع تعويض التناقص الذى يطرأ على رأسماله وطاقته الإنتاجية . وهكذا يكون الاستثمار الصافى سالباً ، دلالة على تدهور مقدرة المجتمع على الإنتاج .

والتفرقة بين الاستثمار الإجمالى والاستثمار الصافى تقودنا إلى تفرقة أخرى بين الناتج القومى الإجمالى والناتج القومى الصافى . فإذا لم تطرح قيمة الاهلاك من مجموع السلع النهائية التى ينتجها المجتمع نقول إن هذا المجموع يعبر عن الناتج القومى الإجمالى . أما إذا خصمت قيمة الاهلاك ، فان المجموع يعبر فى هذه الحالة عن الناتج القومى الصافى . إذن

الناتج القومى الصافى = الناتج القومى الإجمالى — الإهلاك .

١٠٢٠٥ . نفقة الفرصة البديلة :

ذكرنا فيما سبق أن ندرة الموارد تحتم الاختيار والمفاضلة بين السلع المختلفة ، أو الاستخدامات البديلة للموارد . والاختيار يعنى أنك إما أن تحصل على (أ) أو على (ب) ، أو أنك إذا أردت الحصول على المزيد من (ا) فلابد وأن تتنازل عن شىء من (ب) ، والاختيار بالنسبة للمجتمع معناه أنه لا يستطيع إنتاج كل ما يريد من كل السلع ، وأنه إذا رغب فى زيادة إنتاج سلعة من السلع ، فإن عليه أن يضحى بقدر من إنتاج سلعة أو سلع أخرى . وهذا صحيح طالما أن الموارد موظفة توظيفاً كاملا وطالما أن الموارد مستخدمة استخداماً كفوءاً . أما إذا لم يكن الامر كذلك ، فإن المجتمع يستطيع زيادة ما يحصل عليه من سلعة ما دون

نقصان ما ينتج من سلعة أو سلع أخرى ، بل قد يستطيع زيادة إنتاج أكثر من سلعة فى نفس الوقت .

وقد درج الاقتصاديون على قياس نفقة الحصول على سلعة ما ، ليس بالنقود، ولكن بالتضحية المتمثلة فى عدد وحدات السلعة أو السلع التى يكون التنازل عنها أو التضحية بانتاجها ضروريا من أجل الحصول على وحدة واحدة من هذه السلعة فإذا كان إنتاج سيارة إضافية يكلف المجتمع موارد تمكنه من صنع ٥٠ دراجة ، فإن الاقتصادى يقول أن تكلفة إنتاج السيارة هى ٥٠ دراجة وهكذا فإنه يقيس نفقة إنتاج السيارة الإضافية بعدد الدراجات التى ضاعت على المجتمع فرصة إنتاجها نتيجة لإنتاج هذه السيارة الإضافية. ولذا تسمى هذه النفقة بنفقة الفرصة المضاعة ، أو نفقة الفرصة البديلة[1] .

ويمكن تصوير الفكرة السابقة بمثال بسيط ، سيتيح لنا فرصة تعريف الدارس من غير الاقتصاديين بمصطلح جديد وأداة تحليل مشهورة فى علم الاقتصاد وهى منحنى التحويل الإنتاجى أو خط إمكانيات الإنتاج[2] .

أفرض للتبسط أن اقتصاداً ما لا ينتج سوى سلعتين فقط هما الطعام والملابس. أفرض أنه إذا خصصت جميع موارد المجتمع لإنتاج الطعام فقط ، فإنها تعطى و ا (= ٤٨٠) وحدة من الطعام ، وأنها لو استخدمت فى إنتاج الملابس فقط فإن المجتمع يحصل على و ب (= ٤٨٠٠) وحدة من الملابس كما فى الشكل (١). فى هذه الحالة لو تصورنا أن المجتمع كان ينتج الملابس فقط ، ثم قرر وقف إنتاجها وتحويل كافة موارده لإنتاج الطعام فقط ، فإن نفقة الفرصة البديلة لإنتاج و ا وحدة من الطعام هى ا و ب وحدة من الملابس التى ضحى المجتمع بفرصة إنتاجها.

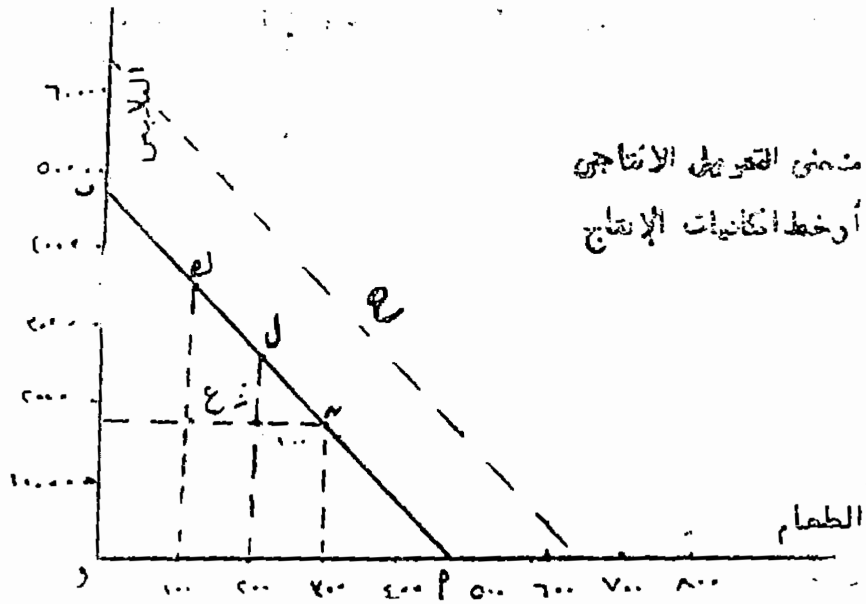
أى أن نفقة كل وحدة من الطعام تساوى $\frac{\text{و ب}}{\text{و ا}} = \frac{٤٨٠٠}{٤٨٠} = ١٠$ وحدات من الملابس .

---

(١) نفقة الفرصة البديلة أو المضاعة : Opportunity Cost

(٢) منحنى التحويل الإنتاجى : Production Transformation Curve

خط إمكانيات الانتاج : Production possibility Boundary



(شكل رقم ١)

افرض أن نفقة الفرصة البديلة لإنتاج الطعام تظل ثابتة عند ١٠ وحدات من الملابس ، مهما كان مستوى إنتاج أى من السلعتين ، فى هذه الحالة يوضح الخط الواصل بين النقطتين أ ، ب كل الاحتمالات الممكنة لإنتاج الطعام والملابس ، أى كل التوليفات الممكن الحصول عليها من السلعتين ، فالنقطة ل تمثل التوليفة (٢٠٠ وحدة طعام + ٢٨٠٠ وحدة ملابس) بينما تمثل النقطة ك التوليفة (١٠٠ وحدة طعام + ٢٨٠٠ وحدة ملابس) وهكذا ، ويسمى هذا الخط الذى يبين كافة التوليفات الممكنة من كل من السلعتين — عندما تكون الموارد موظفة توظيفاً كاملا ومستخدمة بكفاءة تامة — منحنى التحويل الإنتاجى أو خط إمكانيات الإنتاج .

من الواضح أن المشكلة الخاصة بتحديد الإنتاج كما ونوعاً يمكن ترجمتها فى الشكل (١) إلى مشكلة تحديد نقطة ملائمة على خط إمكانيات الإنتاج ، والاقتصاد ينتج توليفات ممثلة بنقط واقعة على هذا الخط فقط عندما تكون موارده موظفة بالكامل ومستخدمة بكفاءة تامة ، وفى هذه الحالة لا يستطيع المجتمع أن يزيد

ما ينتجه من سلعة إلا بتخفيض إنتاج السلعة الأخرى ، كانتقال المجتمع من النقطة ل إلى النقطة ن بغرض الحصول على مزيد من الطعام ، الذى يضحى فيه المجتمع بـ ١٠٠٠ وحدة من الملابس فى مقابل زيادة إنتاج الطعام بـ ١٠٠ وحدة . أما إذا كانت الموارد غير موظفة بالكامل أو كان استخدامها لا يتسم بالكفاءة التامة ، فإن النقطة التى يعمل عندها الاقتصاد لا تقع فى هذه الحالة على خط إمكانيات الإنتاج ، وإنما تقع داخل المثلث الذى يصنعه هذا الخط مع المحورين — أى المثلث و ا ب كالنقطة ع مثلا . من الواضح أن المجتمع يستطيع فى هذه الحالة أن يزيد إنتاج كل من الطعام والملابس بانتقاله من النقطة ع إلى ل مثلا . لاحظ أن المجتمع لا يمكن أن ينتج عند نقطة خارج المثلث و ا ب ، لأن الإنتاج لا يمكن أن يكون سالباً من جهة ، ولأن أى نقطة على يمين الخط ا ب مثل النقطة ح تتطلب موارد أكبر من الموارد المتاحة لدى المجتمع ، والانتقال من أى نقطة على الخط ا ب إلى نقطة خارجة (على اليمين) مثل ح ينطوى على مشكلة توسيع الطاقة الإنتاجية للمجتمع وتنمية موارده الاقتصادية .

كان هذا مجرد مثال من أمثلة عديدة سيقابلها الدارس لاستخدام مفهوم نفقة الفرصة البديلة — ليس بالضرورة باستخدام هذا المصطلح فى كل مناسبة — ولكن تحت أسماء أخرى مثل ميل خط السعر والمعدل الحدى للاحلال السلعى فى نظرية سلوك المستهلك وميل خط الناتج المتكافىء والمعدل الحدى للاحلال الفنى فى نظرية سلوك المنتج كما سيأتى بيانه .

١٠٢٠٦ . التوازن والأمثلة :

تنحصر أهداف التحليل الاقتصادى فى حالات كثيرة فى تحديد أوضاع توازنية للوحدات أو المتغيرات الاقتصادية ، والكشف عن شروط التوازن ، وشروط استمراره أو استقراره والمقصود بالتوازن[1] هو ذلك الوضع الذى تستقر عنده الوحدة الاقتصادية بحيث لا يكون لديها أى دافع أو حافز للانتقال

(١) التوازن : Equilibrium

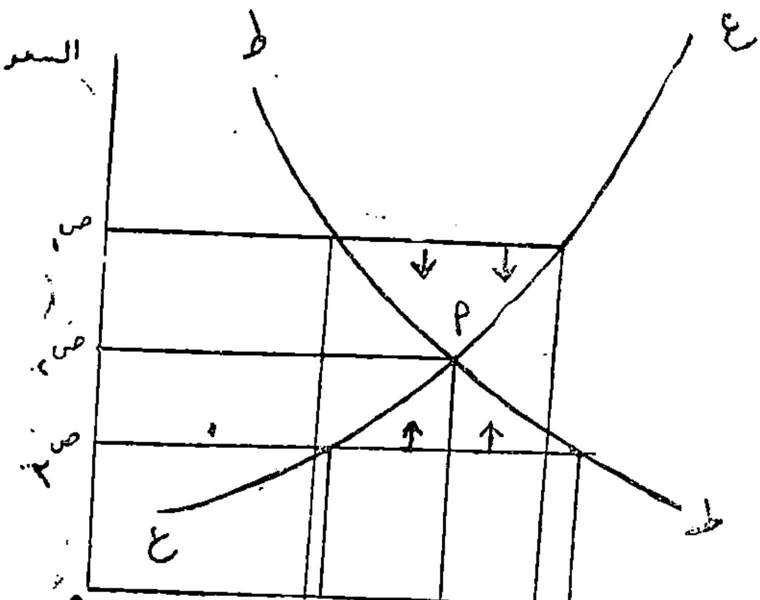
منه إلى أي وضع آخر . والتوازن ليس بالضرورة تعبيراً عن حالة من الجمود أو إنعدام القوى التى قد تجذب الوحدة الاقتصادية نحو وضع التوازن أو تشدها بعيداً عنه ، وإنما قد يكون التوازن تعبيراً عن حالة من تكافؤ قوى متماكسة ، بمعنى أن تتعادل عند وضع التوازن قوى الشد والجذب ، فتكون محصلة هذه القوى جميعاً صفراً ، وتكون النتيجة هى استقرار الوحدة الاقتصادية عند ذلك الوضع ولو إلى حين(١) .

ويمكن توضيح مفهوم التوازن فى النظرية الإقتصادية بمثال بسيط ، يتيح لنا أيضاً فرصة تعريف غير الاقتصاديين باثنين من أشهر المتغيرات الاقتصادية هما العرض والطلب وبنظرية من أشهر النظريات الاقتصادية وهى نظرية الثمن إذا تأملنا سوق سلعة من السلع فإننا سوف نلاحظ أن السعر يتحدد نتيجة التفاعل بين رغبات المشترين ورغبات البائعين . فيتم تفاوض وتجرى مساومات بين البائعين والمشترين إلى أن تتفق رغباتهم وتتحد إرادتهم على التعامل بسعر معين يعرف بسعر السوق ، ويعبر الاقتصاديون عن هذه الظاهرة التى يمكن للمرء أن يلاحظها كل يوم ، بقولهم أن السعر يتحدد نتيجة التفاعل بين قوتى العرض والطلب ؛ ذلك التفاعل الذى يستمر حتى يحدث تعادل بين هاتين القوتين ، وعند نقطة التعادل هذه يتلاقى منحنى العرض مع منحنى الطلب ، وينتج عن هذا التلاقى تحديد للكمية التى يتم تبادلها فى السوق والسعر الذى يتراضى عليه الطرفان، وتسمى نقطة الالتقاء بين منحنى العرض والطلب بنقطة توازن السوق .

---

(١) نقول « ولو إلى حين » لأن التوازن قد يكون مستقراً أو راسخاً Stable وقد يكون غير مستقر أو مزعزع unstable . فى الحالة الأولى إذا حدث مايبعد الوحدة الاقتصادية عن وضع التوازن فانه سرعان ماتتولد قوى تعمل على إعادتها إلى ذلك الوضع ، بعكس مايحدث فى الحالة الثانية التى قد لاتعود فيها الوحدة الاقتصادية إطلاقاً إلى وضع التوازن الأصلى .

ويمكن توضيح هذه الفكرة بيانياً بالشكل رقم (٢) . فى هذا الشكل يمثل المنحنى ع ع منحنى العرض ، وهو المنحنى الذى يبين الكميات التى يكون البائعون على استعـــداد لتقديمها للبيع عند الأسعار المختلفة للسلعة ، بافتراض ثبات كل العوامل الأخرى التى قد تؤثر على العرض — كالتكاليف وفنون الإنتاج ، أما المنحنى ط ط فهو منحنى الطلب ، الذى يبين الكميات التى يكون المشترون على استعداد لشرائها عند الأسعار المختلفة للسلعة ، بفرض ثبات جميع العوامل الأخرى المؤثرة على الطلب كدخول المستهلكين وتفضيلاتهم . ولكى نرى أن التوازن يتحقق عندما تتوافق رغبات المشترين مع رغبات البائعين ، ويتلاقى المنحنيان فى النقطة ا ، فإننا ندرس حالة السوق عند أية نقطة أخرى غير نقطة التوازن ا أو أى سعر آخر غير السعر التوازنى و ص٢ كالسعر و ص١ مثلا . يلاحظ أنه عند هذا السعر يرغب المشترون فى شراء الكمية و س١ ولكن لا يرغب البائعون



شكل رقم (٢)

فى بيع كمية أكثر من و س$_{٤}$ عند هذا السعر. أى أن قوة الطلب أكبر من قوة العرض، بمعنى وجود فائض طلب عند السعر و ص$_{١}$ قدره س$_{١}$ س$_{٤}$ — وهذا الفارق بين القوتين يولد ضغطا إلى أعلى على السعر، فيجعله يتزايد ويستمر فى الزيادة حتى يتلاشى ذلك الفارق. وتتعادل القوتان عند السعر و ص$_{٢}$. وبالمثل إذا أخذنا سعراً مثل و ص$_{١}$ فإننا سنجد فرقاً بين قوتى العرض وقوة الطلب، حيث يوجد فائض عرض مقداره س$_{٣}$ س$_{٥}$، وهذا الفارق يولد ضغطاً على السعر إلى أسفل حتى يصل السعر إلى المستوى و ص$_{٢}$ الذى تتلاشى عنده الفجوة بين العرض والطلب. وبالمثل يمكن للقارئ أن يتحقق أنه ليس هناك سعر آخر غير و ص$_{٢}$ يمكن أن يحقق التعادل بين رغبات المشترين ورغبات البائعين، وبالتالى يحقق التوازن فى سوق السلعة المعنية.

ويرتبط بمفهوم التوازن مفهوم آخر هو الأمثلية (١). والمقصود بالأمثلية هو أن يكون للوحدة الاقتصادية هدف تحقيق أمثل، أى أفضل، وضع ممكن لها، فى ظل ظروف معلومة. فالمنتج يسعى إلى الربح، ويبغى تحقيق أقصى أرباح ممكنة فى ظل ظروف إنتاجية ومالية محددة. والمستهلك يسعى إلى إشباع الحاجات، وغرضه تحقيق أقصى إشباع يمكن أن تسمح به موارده المحدودة. وحيث أن الندرة تحتم الاختيار، وأن الاختيار يفترض وجود بدائل عديدة، كما يفترض بالتالى وجود معيار للمفاضلة والموازنة بين هذه البدائل، فإن مفهوم الأمثلية يقدم لنا معيارا للمفاضلة وحسم الاختيار. ويمثل هذا المعيار فى تعظيم (أو تدنية) الهدف الذى تسعى الوحدة الاقتصادية إلى تحقيقه، ويمكن القول بأن الأمثلية تعنى تعظيم (أو تدنية) دالة معينة تسمى دالة الهـــدف(٢) — عادة فى ظل قيود معينة.

ويمكن أن نوضح فكرة الأمثلية بمثالين يتيحان لنا فرصة تعريف الدارس ببعض المصطلحات والدوال.

---

(١) الأمثلية : Optimality

(٢) دالة الهدف : Objective Function

المثال الأول من نظرية سلوك المنتج : أرمز لكمية الإنتاج بالرمز q ولكميات عناصر الإنتاج التى تستخدم فى الحصول على q بالرمز L للعمل و C لرأس المال و S للأرض. أرمز لسعر الوحدة من المنتج بالرمز P_o وسعر الوحدة من العمل ، رأس المال ، والأرض على التوالى بالرموز p_1 ، p_2 ، p_3 وارمز للربح بالرمز P . حيث أن هدف المنتج هو تحقيق أقصى أرباح ممكنة ، فإن دالة الهدف فى هذه الحالة هى

$$P = q P_o - p_1 L - p_2 C - p_3 S \qquad (1)$$

والبدائل التى يتعين على المنتج الاختيار بينها تتحدد بالعلاقة الفنية بين الإنتاج وعناصر الإنتاج ، حيث يعبر عن الكميات المنتجة q كدالة لكميات عناصر الإنتاج :

$$q = f(L, C, S) \qquad (2)$$

وتسمى هذه العلاقة دالة الإنتاج (١) . باستخدام العلاقات السابقة يمكن أن نصوغ مشكلة المنتج كالتالى :

تعظيم (١) فى ظل القيد أو الشرط (٢) . وبحل مشكلة التعظيم المقيد أو المشروط هذه ، يمكن التوصل إلى الوضع الأمثل للمنتج ، أى إلى تحديد كمية الإنتاج المثلى وكميات عناصر الإنتاج المثلى ــ هذا بفرض أن جميع الأسعار معلومة وثابتة

المثال الثانى من نظرية سلوك المستهلك: أرمز للاشباع أو المنفعة بالرمز U ، ولكميات السلع المختلفة بالرمز $q_1, q_2, \ldots q_n$ ولأسعار السلع المختلفة بالرموز $p_1, p_2 \ldots p_n$ ولميزانية الانفاق المخصصة للاستهلاك بالرمز y. حيث أن هدف المستهلك هو تحقيق أقصى إشباع ، فإن دالة الهدف هى

$$U = f(q_1 \; q_2, \ldots q_n) \qquad (3)$$

(١) دالة الانتاج Production Function

وتسمى هذه العلاقة دالة المنفعة(١) ، حيث تتوقف المنفعة على الكميات التى يحصل عليها الفرد من مختلف السلع . أما البدائل التى يمكن أن يحصل عليها المستهلك فينبغى أن تخضع للقيد أو الشرط التالى :

$$y = p_1 q_1 + p_2 q_2 + \dots + p_n q_n \tag{4}$$

ويسمى قيد الميزانية(٢) ، أى القيد الذى يعنى أن مايشتريه المستهلك ينبغى ألا يتعدى حدود إمكانياته الشرائية . وهكذا يمكن أن نصوغ مشكلة المستهلك كالتالى : تعظيم (٣) فى ظل القيد (٤) وبحل مشكلة التعظيم المشروط هذه يمكن أن نحدد الوضع الأمثل للمستهلك ، أى الكميات التى يشتريها من مختلف السلع كما يمكننا اكتشاف الشروط الواجب تحققها عند هذا الوضع .

لعله واضح مما سبق ، أن الوضع الأمثل ليس إلا وضع توازن تستقر عنده الوحدة الاقتصادية ، وأن شروط الأمثلية هى فى الواقع شروط تحقيق التوازن. أى أن الأمثلية تعنى ضمن ماتعنى التوازن . لكن ينبغى الإشارة إلى أن التوازن لايتوقف دائما على تعظيم أو تدنية دالة هدف . فتوازن السوق مثلا لا يفترض فيه تحقق قيمة عظمى أو دنيا لأية دالة ، على الأقل بطريقة مباشرة(٣) وإنما كل مايستهدف فيه هو تحقق التعادل بين قوى العرض والطلب . بعبارة أخرى فإن الأمثلية ليست إلا حالة خاصة من حالات التوازن فالتوازن قد ينطوى على تعظيم أو تدنية دالة هدف فى بعض الحالات (وهذه هى حالات الأمثلية) وقد لا ينطوى على ذلك فى أحوال أخرى (وهذه هى حالات توازنية فقط) . وسوف يظهر لنا بمعنى مانقول بطريقة أوضح عندما ندرس فى الأجزاء الأخيرة

---

(١) دالة المنفعة Utility Function

(٢) قيد الميزانية Budget Constraint

(٣) كما سيعرف القارىء فيما بعد ـ منحنى الطلب ومنحنى العرض يتم اشتقاقهما نظريا من تعظيم الاشباع بالنسبة للمستهلك وتعظيم الأرباح بالنسبة للمنتج على التوالى . ولذا فان للبعض قد يرى فكرة الأمثلية ـ مستترة ـ حتى فى توازن السوق .

من هذا الكتاب مثالا على نماذج التوازن (نموذج المدخلات والمخرجات) ومثالا على نماذج الأمثلية (نموذج البرمجة الخطية) .

١ - ٢ - ٧ - المقارنات الحدية :

إذا كانت غاية التحليل الاقتصادى فى معظم الحالات هى تحديد الأوضاع التوازنية . فإن الأسلوب الذى يسلكه الاقتصادى فى الوصول إلى هذه الغاية هو أسلوب المقارنات الحدية ، أو المقارنة عند الحد الفاصل بين المكسب والخسارة(١) . ويمكن توضيح هذا الأسلوب بمثالين نأخذهما أيضاً مع نظرية سلوك المستهلك ونظرية سلوك المنتج .

المثال الأول : هدف المستهلك ـ كما سبقت الإشارة ـ هو تحقيق أقصى إشباع ممكن من استهلاكه لمختلف السلع والخدمات . ولتحديد الكميات التوازنية التى يشتريها المستهلك بدخله المحدود ـ بافتراض معلومية الأسعار والدخل وثباتهما ـ فإن الاقتصادى يفترض أن المستهلك يقوم بعمل مقارنة عند كل مستوى من مستويات الاستهلاك يتضح له منها ما إذا كان من مصلحته الاستمرار فى شراء سلعة ما أو التوقف عن شرائها . فإذا وصل ما يستهلكه الفرد من سلعة معينة كالارز مثلا إلى ١٠ كجم شهرياً ، وإذا كان سعر كيلو الارز ٥ قروش ، فإن المستهلك يقف ـ مجازا ـ ليسأل نفسه عند هذا الحد من الاستهلاك عن شعوره إذا ما عرض عليه كيلو آخر من الارز ـ هل يشتريه أم يمتنع عن شراءه ؟ وإجابة المستهلك على هذا السؤال تتوقف على المقارنة بين الأشباع الذى يعود عليه من استهلاك هذا الكيلو الإضافى من الارز وبين التضحية المتمثلة فيما تقدر الخمسة قروش على شرائه من سلع أخرى ـ وليكن كيلو من البرتقال ـ بفرض وجود سلعتين فقط . فإذا رأى المستهلك أن الإشباع الذى يحصل عليه مع استهلاك الكيلو الحادى عشر من الارز أكبر من الإشباع الذى يضيع عليه لعدم شراء الكيلو الإضافى من

(١) المقارنات الحدية : Marginal Comparisons
المقارنة عند الحد : Comparison at the margin

البرتقال، فإنه يستمر بالطبع فى شراء الأرز. ولكن على المستهلك بعد أن يشترى هذا الكيلو أن يعيد عقد المقارنة السابقة من جديد (لأن الإشباع الإضافى المترتب على استهلاك الكيلو رقم ١٢ من الأرز أقل من الإشباع الإضافى المترتب على استهلاكه الكيلو رقم ١١ وهكذا وفقاً لقانون تناقص المنفعة الحدية(١). فإذا وجد أن الإشباع الذى يحصل عليه من الكيلو رقم ١٢ من الأرز مازال يفوق الإشباع المضحى به لعـــدم استهلاك البرتقال، فإنه يستمر فى شراء الأرز. وهكذا يستمر المستهلك فى عقد هذه المقارنات، إلى أن يجد أن الإشباع المكتسب معادل تماما للاشباع المفتقد. فهنا يكون المستهلك قد وصل إلى حالة التوازن.

المثال الثانى: هب أن منتجاً يستخدم عنصرين فقط من عناصر الإنتاج أحدهما ثابت كالأرض والآخر متغير كالعمل. المشكلة التى تواجه مثل هذا المنتج هى: ما هى كمية العمل المناسب استخدامها مع الأرض بحيث يتحقق له من العملية الإنتاجية أكبر أرباح ممكنة. أو باختصار: متى يكون من صالح المنتج الاستمرار فى طلب ساعات عمل إضافية، ومتى يكون من صالحه التوقف عن شراء ساعات عمل إضافية؟ هنا أيضاً يتوقف الأمر على المقارنة بين ماتدره ساعات العمل الإضافية من زيادة فى الإنتاج عند مستوى معين للانتاج — وبين ما يتكلفه المنتج فى سبيل الحصول على هذه الساعة أى سعر ساعة العمل، أو — بالمصطلحات الاقتصادية — المقارنة بين الناتج الحدى للعمل والتكلفة الحدية للعمل (٢) فكلما كان الناتج الحدى أكبر من التكلفة الحدية العمل كلما كان فى مصلحة المنتج استخدام وحدات عمل إضافية. وهكذا يستمر المنتج فى طلب العمل حتى يصل إلى النقطة التى تتعادل عندها التكلفة الحدية مع الناتج الحدى للعمل، بحيث إذا استمر بعد ذلك فى شراء وحدات عمل جديدة فان قيمة ماتضيفه إلى الإنتاج ستكون اقل من تكلفة الحصول

---

(١) قانون تناقص المنفعة الحدية: Law of Diminishing Marginal Utility

(٢) الناتج الحدى: Marginal Product

التكلفة الحدية: Marginal Cost

عليها . ويترتب على ذلك خسارة المنتج . وعند هذه النقطة يقال ان المنتج قد وصل إلى حالة التوازن .

ذلك إذن هو جوهر الطريقة التى يتبعها الاقتصاديون فى معظم تحاليلهم التى تهدف إلى تحديد أوضاع التوازن. وسوف يقابل الدارس فيما بعد تطبيقات عديدة لهذا الاسلوب . لاحظ أن هذه الفكرة هى ذاتها الفكرة الرياضية الخاصة بتعظيم دالة من الدوال . كل مافى الأمر أننا قدمناها هنا بالالفاظ بدلا من الرموز والمعادلات . كذلك فإن المفاهيم الحدية كالمنفعة الحدية والناتج الحدى ليست فى واقع الأمر سوى المشتقات الأولى لدالة المنفعة ودالة الإنتاج على الترتيب .

١ . ٢ . ٨ العلاقات الدالية فى الاقتصاد :

يعتبر مفهوم العلاقات الدالية (١) واحدا من الركائز الأساسية فى البحث الاقتصادى وقد سبق ذكر أمثلة لبعض هذه العلاقات مثل دالة المنفعة ودالة الإنتاج وهناك أمثلة عديدة غيرها كدالة الاستهلاك التى يكون فيها الاستهلاك C متوقف على الدخل y : $C = c(y)$ ، ودالة التكاليف التى تكون فيها التكاليف E متوقفة على حجم الإنتاج Q : $E = e(Q)$ وغيرها .

والأمر الذى يهمنا إيضاحه هنا بالنسبة للعلاقات الدالية فى الاقتصاد هو أن هذه العلاقات ينبغى ألا تفهم على أنها علاقة دقيقة ومضبوطة بنفس الدرجة من الدقة والضبط التى تتوفر فى الدوال المستخدمة فى العلوم التجريبية . وإنما ينبغى أن تفهم هذه العلاقات على أنها علاقات تقريبية أو احتمالية . ويرجع ذلك إلى :

(أ) تعقد العلاقات الاقتصادية الواقعية تعقيدا شديدا ، بحيث تترابط مختلف الظواهر بعضها ببعض ، كما تتعدد المؤثرات الفاعلة فى الظاهرة الواحدة تعددا كبيرا . والنظرية — اقتصادية أو غير اقتصادية — لا يفترض فيها أن تعطى صورة فوتوغرافية للواقع وإنما أن تصل إلى جوهر الواقع أو لب الظاهرة ، فتكشف عن

(١) علاقات دالية : Functional Relationships

العوامل التى تتحكم فيها ، والعلاقات التى تربط بينها و بين هذه العوامل . بعبارة أخرى أن هدف النظرية هو تجريد الواقع مما يحيط به من تفصيلات كثيرة بغرض الوصول إلى جوهر الموضوع ولذا فإن النظرية لا يمكنها أن تأخذ جميع العوامل فى الحسبان، وإنما هى تركز فقط على العوامل الرئيسية المؤثرة فى الظاهرة . وتهاهل بعض العوامل — برغم أنها قد تكون عوامل ثانوية لا يكون لكل منها منفردا سوى أثر ضئيل — يترتب عليه انحراف تنبؤات النظرية عن الواقع .

(ب) اتصال العلاقات الدالية فى الاقتصاد بنواح مختلفة من السلوك الإنسانى . والسلوك الإنسانى بطبيعته لا يتصف دائما بالانتظام والاتساق ، وإنما هو عرضة لتقلبات الأمزجة ، والأهواء . باختصار فإن السلوك الإنسانى يحتوى على جزء عشوائى لا يمكن لأية نظرية التنبؤ به . وما يمكن للنظرية البحث فيه هو الجزء المنتظم من السلوك الإنسانى الذى يمكن التعبير عنه بعلاقات محددة . وهذه العشوائية فى السلوك الإنسانى يترتب عليها عشوائية العلاقات الاقتصادية ، وبالتالى اكتسابها الصفة التقريبية أو الاحتمالية .

(ج) أن مقدرة الإنسان على قياس المتغيرات الاقتصادية بدقة تامة محدودة . والدقة الشديدة تكاليفها عالية . ولهذا فإن ما تتحدث عنه النظرية من متغيرات وما قد يجده الباحث من بيانات عن هذه المتغيرات ليسا بالضرورة متطابقين ، وإنما هما أمران مختلفان فى معظم الأحوال . ويترتب على أخطاء القياس والمشاهدة هذه أخطاء فى قياس العلاقات الاقتصادية .

نظرا لما تقدم ، فإنه إذا صادف المرء علاقة تقرر أن الاستهلاك c يتوقف على الدخل y - بفرض ثبات الأسعار - أى دالة الاستهلاك $C = c(y)$ فليس معنى ذلك أننا لو طبقنا هذه العلاقة على أى فرد أو أسرة سنجدها منطبقة على سلوكها الاستهلاكى تمام الانطباق . أى أننا لو عوضنا عن دخل الفرد فى هذه العلاقة حتى بفرض أنه يمكننا قياس الدخل بكل دقة ، وبفرض أن الصورة الجبرية لدالة الاستهلاك معروفة — فاننا لن نحصل على القيمة الفعلية لاستهلاك هذا الفرد وإنما سنحصل على قيمة أكبر أو أصغر منها ، ولن نجد القيمتين متساويتين إلا بمحض

الصدفة . بعبارة أخرى ، فان قيمة الاستهلاك المحسوبة من الدالة النظرية تكون مساوية لقيمة الاستهلاك الفعلى C ± مقدار E تختلف قيمته من فرد لآخر حسب عدد هائل من العوامل الذاتية ، ويسمى هذا المقدار — بلغة الإحصاء — الخطأ(١) .

وباختصار أن العلاقة المكتوبة عادة فى الصورة $C = c(y)$ ، ينبغى أن تفهم على أنها مجرد صيغة مختصرة للعلاقة المقصودة فعلا وهى $C = c(y, E)$.

وليس مما يعيب النظرية أن تحتوى على عنصر خطأ . ذلك أن الهدف من النظرية ليس التنبؤ بالسلوك الاستهلاكى — مثلا — لأى فرد من الأفراد ، وإنما الهدف — فى العادة — هو التنبؤ بالسلوك الاستهلاكى لمجموعة كبيرة من المستهلكين كسكان محافظة أو قطر من الأقطار . وحيث أنه إذا كان هناك عدد كبير من المستهلكين ، فان التغيرات العشوائية لكل منهم لن تأخذ نفس الاتجاه ولا نفس المقدار ، وإنما تميل هذه التغيرات إلى إلغاء بعضها البعض الآخر ، وفقاً لقانون الأعداد الكبيرة ، بحيث يكون المتبقى هو متوسط عام للسلوك الاستهلاكى لجميع الأسر . ولهذا فإن النظرية تنجح عادة فى التنبؤ بسلوك المجموعات بينما لا يحالفها التوفيق عندما تحاول التنبؤ بسلوك أى فرد من أفراد هذه المجموعات .

ومن المناسب أن نختتم هذا القسم بنبذة سريعة عن النماذج الاقتصادية وأنواع المتغيرات الداخلة فيها . والمراد بالنموذج الاقتصادى(٢) هو علاقة دالية أو أكثر بين المتغيرات ذات الصلة بالظاهرة الاقتصادية المراد تفسيرها . وأبسط النماذج

---

(١) الخطأ : Error أو Disturbance . ويفترض عادة أن هذا الخطأ يتصف بالعشوائية Randomness بمعنى أنه يمكن توزيع القيم التى يمكن أن يأخذها الخطأ توزيعا إحتماليا منتظما .

(٢) نموذج اقتصادى : Economic Model

هو ما يكون محتوياً على علاقة واحدة فقط ، مثل نموذج الإنتاج الذى يحتوى على دالة الإنتاج فقط $q = f(L, C, S)$. فى هذه الحالة يقال أن المتغير q متغير تابع ، وأن المتغيرات L, C, S متغيرات مستقلة[1] ، والمقصود بالمتغير التابع هو ذلك المتغير الذى يحاول الاقتصادى تفسير سلوكه عن طريق العلاقة المفترضة بينه وبين عدد آخر من المتغيرات التى يعتبرها الباحث معطيات لا شأن له بكيفية تحددها ، أى التى تتحدد بعملية أو نموذج مستقل عن النموذج المفترض . وهذه المتغيرات الأخيرة هى التى تسمى متغيرات مستقلة .

وعموما فإن النموذج الاقتصادى يحتوى على أكثر من علاقة دالية وكذلك واحدة أو أكثر من علاقات التساوى أو التطابق (المتساويات أو المتطابقات) . فنموذج السوق مثلا المناظر للشكل رقم (٢) — يمكن صياغته كالتالى : د ع D = الطلب ، S = العرض ، و P = السعر . إذن يمكن كتابة معادلة الطلب

$$L = f(P)$$

ومعادلة العرض

$$S = g(P)$$

وشرط التوازن ، أى التعادل بين العرض والطلب

$$D = S$$

وهذه المعادلات الثلاثة تكون سوياً نموذج السوق . وبحل هذا النموذج — بعد إعطاء صور جبرية محددة لكل من دالة الطلب ودالة العرض — يمكن أن نحصل على كل من السعر التوازنى والكمية التوازنية .

من الواضح أننا عندما رسمنا الشكل رقم (٢) افترضنا ثبات جميع العوامل المؤثرة على العرض والطلب بخلاف السعر ، كالظروف الجوية بالنسبة للعرض

---

(١) متغير تابع : Dependent variable

متغير مستقل : Independent Variable

والدخل بالنسبة للطلب . فاذا سمحنا لهذه العوامل بالتغير أيضاً ، فاننا نحصل على النموذج التالى :

$$D = f(P, y) \qquad \text{دالة طلب}$$

$$S = g(P, W) \qquad \text{دالة عرض}$$

$$D = S \qquad \text{شرط التوازن}$$

حيث y = الدخل و W = الطقس . فى هذا النموذج لانميز بين متغيرات تابعة ومستقلة ، ذلك أنه فى دالة الطلب ودالة العرض يوجد متغيران مجهولان تحاول النظرية تفسير سلوكهما ، وهما الكمية والسعر ، وليس متغير مجهول واحد كما فى حالة النماذج ذات الدالة الوحيدة . أما الدخل والطقس فيفترض أنهما معروفان وتتحدد قيمهما من خارج النموذج . فى هذه الحالة — أى حالة التحدد الآنى لأكثر من متغير — توصف المتغيرات المراد تفسير سلوكها بأنها متغيرات داخلية ، بينما تسمى المتغيرات التى تؤخذ كمعطيات من خارج النموذج متغيرات خارجية (١).

٩٠٢٠١ . التحليل الساكن والتحليل الحركى :

أبسط أنواع التحليل الاقتصادى هو التحليل الساكن(٢) . فى هذا النوع من التحليل يتجاهل الاقتصادى البعد الزمنى للمشكلة التى يبحثها ، أو بعبارة أدق — يركز الاقتصادى نظرة على العلاقات اللحظية بين المتغيرات مفترضاً ثبات كل شىء آخر — غير المؤثر والمتأثر — على حالة فالتحليل الساكن لمشكلة تحديد سعر التوازن مثلا يفترض أن منحنى العرض ومنحنى الطلب معلومان ويظلان ثابتان

---

(١) متغيرات داخلية : Endogenous Variables

متغيرات خارجية : Exogenous Variables

(٢) تحليل ساكن : Static Anlysis

على حدهما ، كما يفترض أن عرض السلعة والطلب عليها يتوقفان فقط على سعر السلعة فى نفس اللحظة أو الفترة ، وأنه لا الأسعار التى سادت فى الماضى ولا الأسعار التى يتوقع أن تسود فى المستقبل تؤثر فى الكميات المطلوبة والمعروضة فى أية لحظة .

والتحليل الساكن لاشك له فائدته وأهميته فى مناقشة الكثير من المشاكل الاقتصادية ـ ولكن هذه الفائدة وتلك الأهمية لاشك محدودة فى معظم الأحيان بل ومشكوك فيها بالنسبة لبعض القضايا . والحقيقة أن فائدة التحليل الساكن تكمن فى كونه خطوة أولى نحو تحليل اقتصادى أكثر واقعية ، وأهميته تتركز فى كونه يمكن الباحث من رؤية بعض الأمور أو تتبع بعض العمليات التى يتعذر تتبعها لو ابتدأ الباحث بصورة أكثر تعقيدا . وقد حاول الاقتصادى الشهير « الفريد مارشال » التغلب على تجاهل التحليل الساكن لعنصر الزمن ، ذلك بادخاله التمييز بين الزمن الطويل والزمن القصير(١) . فالزمن الطويل هو تلك الفترة الزمنية التى يمكن أن يتغير فيها كل شيء ، بينما الزمن القصير هو تلك الفترة التى لا تتسع إلا لتغير عدد محدود جدا من المتغيرات الاقتصادية . ومن الطبيعى أن يختلف تأثير عامل اقتصادى معين حسبما إذا كنا نرصد مفعوله خلال أمد قصير أو خلال أمد طويل . فالمنتج مثلا لا يستجيب لتغير فى سعر سلعته فى ظرف شهر مثلا بمثل استجابته لنفس التغير فى السعر إذا استمر ساريا لمدة سنة أو سنتين ففى ظرف شهر لا يتيسر للمنتج توسيع الطاقة الإنتاجية لمصنعه إلا فى حدود ضيقة جدا كتشغيل وردية إضافية على نفس الآلات والمعدات ، كما لا يتيسر له فى العادة التخلص من مصنعه إذا ساءت الأحوال . أما فى ظرف سنة أو أكثر ، فإن المنتج يستطيع فى العادة أن يضيف وحدات إنتاجية جديدة تمكنه من مضاعفة الإنتاج كما أنه يستطيع إذا دعت الظروف إلى ذلك ترك صناعته والتحول إلى نشاط مختلف .

كذلك حاول الاقتصاديون كسر قيود التحليل الساكن وذلك بعدم الاقتصار على تحديد مركز توازن فقط ، وإنما بإجراء المقارنات بين أنواع التوازن المختلفة .

---

(١) الزمن القصير: Short — run ، الزمن الطويل: Long — run

فإذا كان المنتج فى حالة توازن معلومة ، ثم فرضت ضريبة على إنتاجه نقلته إلى وضع توازنى جديد ، فان الاقتصادى يهتم بمقارنة حالة التوازن الجديدة بحالة التوازن الأصلية ، بهدف اكتشاف آثار فرض الضريبة على الإنتاج ؛ لكنه لا يهتم بتحليل عملية الانتقال من الوضع القديم إلى الوضع الجديد . ويعرف هذا النوع من التحليل بالتحليل الساكن المقارن(١) .

لكن لا التفرقة بين الزمنين القصير والطويل ، ولا التحليل الساكن المقارن يمكن الاقتصاديين من معالجة عدد من القضايا الهامة فى الحياة العملية ، مثل قضايا التقلبات الاقتصادية من رواج وكساد وقضايا النمو الاقتصادى . ذلك أن مثل هذه القضايا لا تحتمل تجاهل عنصر الزمن ، من جهة ، وهى من جهة أخرى أعقد من أن تناقش فى ضوء التفرقة بين الزمن القصير والزمن الطويل . وإنما تتطلب مثل هذه القضايا مراعاة العلاقة بين كل فترة وأخرى ؛ وأخذ أثر كل تغير فى بعض المتغيرات الاقتصادية فى فترة ما على باقى المتغيرات ليس فقط فى نفس الفترة وإنما فى الفترات القادمة . كذلك لا يجدى فى هذه الحالة افتراض ثبات كل شىء ، وإنما ينبغى السماح لمعظم العوامل بالتغير ، ولا يمكن افتراض اتخاذ القرارات على أساس اليقين وإنما لا بد من أخذ عنصر التوقع فى الحسبان . ومعنى هذا اصطباغ التحليل بصبغة حركية ، ولذا فانه يسمى بالتحليل الحركى(٢) .

ذكرنا ذلك التمييز بين التحليل الساكن والتحليل الحركى لكى يعلم القارىء - ولو بشكل عام - حدود ما هو بصدد تعلمه من تحليلات اقتصادية معظمها من النوع الساكن ، ولكى يدرك أن هذه التحليلات ليست سوى تبسيطات لتحليلات أكثر عمقاً وأكثر واقعية يمكن إجراؤها فيما بعد باستخدام أساليب التحليل الحركى . وبهذا نختتم استعراضنا لموضوع علم الاقتصاد وأهم المفاهيم المستخدمة

---

(١) التحليل الساكن المقارن : Comparative Static Analysis

(٢) التحليل الحركى : Dynamic Analysis ، وقد أرسى أسس هذا النوع من التحليل فرش وكاليكى وساموِلسون فيما يتعلق بالتقلبات الاقتصادية وهارود ودومار فيما يتعلق بالنمو الاقتصادى .

فيه والطرق الرئيسية التى يتبعها فى تحليل القضايا الاقتصادية ، ويمكن لنا أن نبدأ فى التعريف بالاقتصاد الرياضى .

١ . ٣ . المزج بين الرياضيات والاقتصاد : الاقتصاد الرياضى :

تعتمد الطريقة التقليدية فى تدريس الاقتصاد على الصياغة اللفظية للنظريات الاقتصادية المختلفة ، مع الاستعانة فى معظم الأحيان بالرسوم البيانية المبسطة لتوضيح بعض الأفكار وتصوير بعض التشابكات التى توجد بين المتغيرات الاقتصادية . ولا جدال فى أنه ليس هناك ما يؤخذ على هذه الطريقة ، طالما كان الهدف مقتصرا على إعطاء فكرة عامة عن القوانين والعلاقات الاقتصادية ، دون النظر إلى امكانية استخدام هذه القوانين ، والعلاقات فى حل المشكلات الاقتصادية العملية ، وترجمتها إلى سياسات وخطط اقتصادية قابلة التنفيذ فى عالم الواقع . أما إذا كان الهدف من الدراسة اعطاء الدارس أفكارا اقتصادية قابلة للتطبيق ، فان الصياغة اللفظية والمنطق اللفظى لاشك يقصران عن بلوغ ذلك الهدف . والامر يحتاج فى هذه الحالة إلى الاستعانة بأدوات أكثر دقة - مثل الادوات الرياضية والإحصائية على النحو الذى نوضحه فى القسم التالى .

١ . ٣ . ١ . مثال من نظرية الطلب :

تفيدنا النظرية الاقتصادية أنه اذا ارتفع سعر سلعة ما ، مع بقاء جميع العوامل الأخرى ثابتة ، فان الكمية المطلوبة من هذه السلعة إما أن تنخفض وإما أن تظل ثابتة دون أدنى تغيير . والامر متوقف على مرونة الطلب على السلعة المعنية ، وهذه تتوقف بدورها على طبيعة السلعة ، ومدى ضرورتها أو أهميتها فى قائمة الاستهلاك ، وأيضاً على مدى توفر السلع التى يمكن أن تحل محلها فى الاستهلاك . كذلك تفيدنا نظرية الطلب أن مايطلب من سلعة ما يتوقف - بالإضافة إلى سعرها - على دخل المستهلك وذوقه أوتفصيلاته ، وحجم أسرته ، كما يتوقف على أسعار السلع البديلة والسلع المكملة لهذه السلعة ، وكذلك على عوامل عديدة كالطقس والمواسم والاعياد ... الخ .

وهذا كله كلام مفيد بصفة عامة ، ولا شك أنه يساعد الدارس للطلب على سلعة ما فى تركيز اهتمامه على أهم العوامل التى يحتمل أن يكون لها تأثير على الكمية المطلوبة من السلعة . لكن الفائدة العملية لما تقوله النظرية الاقتصادية - بصورة لفظية - عن الطلب لاشك محدودة . تصور أنه على باحث اقتصادى فى وزارة التموين - مثلا - أن يجيب على الأسئلة التالية بخصوص الطلب على سلعة ما — ولتكن البطاطس :

(أ) ماهو مقدار التغير فى الطلب على البطاطس إذا ارتفع سعرها أو انخفض بقدر أو نسبة معينة خلال الموسم الحالى ؟

(ب) ماهو مقدار التغير المتوقع فى الطلب على البطاطس إذا ارتفع سعر الكوسة - مثلا - أو انخفض بقدر أو نسبة معينة خلال الشهر القادم ؟

(جـ) ماهو مقدار التغير المتوقع فى الطلب على البطاطس إذا زاد الدخل القومى أو انخفض بنسبة معينة خلال السنة القادمة ؟

من الواضح أنه لا يمكن استنتاج الإجابات على هذه الأسئلة من قانون الطلب فى صياغته اللفظية المعتادة والتى تقرر أن الطلب على أى سلعة يرتفع بانخفاض سعرها أو ارتفاع سعر سلعة بديلة أو انخفاض سعر سلعة مكملة لها ، أو زيادة الدخل. والواقع أن الإجابة على الأسئلة التى ذكرناها تتطلب معرفة مقدار كل من المرونات التالية(١) :

---

(١) تعرف مرونة X بالنسبة لـ Y بأنها النسبة بين التغير النسبى فى X والتغير النسبى فى Y ، أى :

$$\frac{dX}{X} \quad \frac{dy}{y} = \frac{dX}{dy}\cdot\frac{y}{X} \text{ أو } \left(\frac{\Delta X}{X}\right) / \left(\frac{\Delta y}{y}\right)$$

مثلا — المرونة السعرية الذاتية للطلب على البطاطس عبارة عن النسبة بين التغير النسبى فى الطلب على البطاطس والتغير النسبى فى سعرها ، أو التغير النسبى (المئوى) فى الطلب الذى يترتب على تغير السعر ، بنسبة ١ ٪ .
=

(أ) المرونة السعرية الذاتية للطلب على البطاطس ؛

(ب) المرونات المقطعية للطلب على البطاطس .

(ج) المرونة الدخلية للطلب على البطاطس .

المرونة السعرية الذاتية للطلب $E_1 = \frac{\partial q}{\partial p_1} \cdot \frac{p_1}{q} = b \cdot \frac{p_1}{q}$

المرونة السعرية المقطعية للطلب $E2 = \frac{\partial q}{\partial p_2} \cdot \frac{p_2}{q} = C \cdot \frac{p_2}{q}$

المرونة الدخلية للطلب $E_3 = \frac{\partial q}{\partial y} \cdot \frac{y}{q} = d \cdot \frac{y}{q}$

وعلى ضوء معرفتنا بمقادير المرونات السابقة ، يمكن الإجابة عن الأسئلة الثلاثة التي افترضنا أنه قد يطلب من باحث اقتصادي في وزارة التموين أن يجيب عليها بالنسبة للبطاطس . ولا يخفى أن هذه الأسئلة لها أهميتها الكبرى من الناحية العملية ذلك أن الإجابة عليها تقدم معلومات لاغنى عنها لواضعي السياسات الإنتاجية والسعرية لمختلف السلع ، وكذلك فإنها تساعد على الاهتداء إلى حلول لبعض المشاكل العملية للطلب . ومن الواضح أنه في غياب تقديرات كمية مشتقة على أساس سليم باستخدام الأساليب الرياضية والإحصاء ، فإن البديل الوحيد أمام راسمي السياسة الاقتصادية هو تخمين قيم هذه المرونات . وغني عن البيان توضيح ماقد تجلبه سياسة مبنية على التخمين من كوارث .

مرونة سعرية ذاتية: Own - price elasticity

مرونة مقطعية: cross elasticity

مرونة دخلية: Income elasticity

١ . ٢ . ٢ . تعريف الاقتصاد الرياضي :

يتضح لنا مما تقدم أمران :

(أ) سواء قدمت النظرية الاقتصادية فى صورة لفظية أو فى صورة رسوم بيانية بسيطة ، أو فى الصورتين معاً ، فان قيمتها من الناحية العملية ضئيلة الغاية .

(ب) إذا أردنا الانتفاع بالقوانين الاقتصادية فى حل المشكلات العملية أو على الأقل فى التوصل إلى فهم واضح لها ، فانه من الضرورى إعادة صياغة القوانين الاقتصادية صياغة رياضية ، ثم تطبيق طرق التحليل الرياضى - كالجبر وحساب التفاضل والتكامل - لاشتقاق الكميات الاقتصادية الهامة - كالمرونات السعرية والدخلية والميل الحدى للاستثمار - ثم قياس هذه الكميات بالأساليب الإحصائية المناسبة .

والخطوة الأولى - أى الصياغة الرياضية للنظرية الاقتصادية - هى مهمة الاقتصاد الرياضى. فالاقتصاد الرياضى هو ذلك الفرع من فروع الدراسة الاقتصادية الذى يختص بصياغة النظريات الاقتصادية فى صورة رياضية ، ويستخدم أساليب التحليل الرياضى فى اشتقاق العلاقات والنتائج الاقتصادية ، من بعض الافتراضات الأساسية عن السلوك الاقتصادى .

والخطوة الثانية - أى قياس العلاقات الاقتصادية الرياضية - هى مهمة الإحصاء أو الإحصاء الاقتصادى . ونظراً لصعوبة الفصل بين الخطوتين ، بل ولضرورة توثيق الارتباط بينهما ، فقد نشأ فرع جديد من فروع الدراسة الاقتصادية يرتكز على أعمدة ثلاثة هو الاقتصاد والرياضيات والإحصاء. والغرض من هذا الفرع هو بناء النماذج التى تفسر السلوك الاقتصادى والتوصل إلى قيم (أى تقديرات كمية) المعاملات التى تلزم معرفتها للتنبؤ بهذا السلوك . ويطلق على هذا الفرع الجديد الاقتصاد القياسى .

١ • ٤ • مزايا استخدام الرياضيات فى الاقتصاد وعيوبه وحدوده .

لعله قد اتضح من عرضنا لموضوع علم الاقتصاد والمفاهيم المستخدمة فيه وطريقة معالجته للمشاكل أو حتى طريقة صياغته للمشاكل ، وكذلك من الأمثلة الاقتصادية العديدة التى ذكرناها فى الأقسام السابقة ، أن علم الاقتصاد هو « علم رياضى » ـ أو بالأصح علم اجتماعى رياضى ـ والمقصود بذلك هو أن علم الاقتصاد يحتوى على الكثير من الأفكار الرياضية ، وأنه يلجأ إلى طرق فى التحليل هى نفسها طرق التحليل الرياضى ـ حتى وإن لم تستخدم الرموز والمعادلات . فالاقتصاد ملىء بالتطبيقات لفكرة العلاقات الدالية ، كما سبق إيضاحه بالنسبة لدوال المنفعة ودوال الطلب ودوال الإنتاج . . . الخ . وفكرة التوازن العام مثلا هى فكرة ذات صفة رياضية واضحة ، حيث أنها تقرر أن كل شىء يعتمد على كل شىء آخر ، أى أن الظاهرة محل البحث يمكن التعبير عنها بمجموعة من المعادلات الآنية . وتقرير النظرية الاقتصادية القائل بأن « السعر التوازنى هو ذلك السعر الذى تتعادل عنده الكمية المطلوبة من السلعة مع الكمية المعروضة منها » هو تقرير ينطوى على فكرة حل معادلتين آنيتين فى مجهولين هما السعر والكمية . وأفكار تعظيم الأرباح وتعظيم المنفعة وتدنية التكاليف هى تطبيقات لفكرة التعظيم والتدنيه الرياضيتين . وأخيرا ـ وليس آخراً ـ فإن المفاهيم الحـــدية المستخدمة فى الاقتصاد كالمنفعة الحدية والإنتاجية الحدية والتكاليف الحدية هى كلها تطبيقات للمشتقة الأولى لدالة معينة .

ورغم هذه الصلة الواضحة بين الاقتصاد والرياضة ، فإن البعض ربما يستنكر فكرة استخدام الرياضيات فى الاقتصاد بحجة أنه علم اجتماعى ـ أى يتصل بشأن من الشئون الإنسانية ـ وأن السلوك الإنسانى معقد من جهة ومتقلب من جهة أخرى لدرجة أنه لا يمكن التعبير عنه بالنماذج الرياضية . ولكن هذا قول مردود . فتعقد الظواهر ليس حجة ضد استخدام الرياضيات ، وإنما هو سبب وجيه لاستخدامها فى تفسير هذه الظواهر . ذلك أنه كلما زادت درجة تعقد الظاهرة كلما كان من الصعب على المرء أن يحيط بأسرارها وبفهم العلاقات المتشابكة التى تحكمها عن

طريق الألفاظ أو المنطق اللفظى . ولذا تزداد الحاجة إلى أدوات فى التعبير عن المشاكل وأدوات فى الاستدلال أكثر قوة وأكبر مقدرة على مناقشة الظواهر المعقدة. فالرياضيات لم تخترع مصادفة ، ولا يتمسك العلماء باستخدامها لمجرد الايحاء لغيرهم بصعوبة مايعالجونه من مشاكل . وإنما اخترعت الرياضيات ويتمسك بها العلماء لأنها تسد حاجة حقيقية ، وتمكنهم من التغلب على عجز الخيال أو العقل البشرى عن استيعاب عدد كبير من المتغيرات أو العلاقات المترابطة فى وقت واحد وإذا تصور البعض أن الرياضيات تجبر المرء على تبسيط الواقع تبسيطاً مخلا ، فإن هذا تصور خاطىء . لأن درجة التبسيط التى تحدث فى العرض اللفظى أو الاستدلال اللفظى أكبر بكثير من درجة التبسيط المطلوبة فى أى نموذج رياضى(١) . أما الاعتراض الخاص بتقلب السلوك الإنسانى وعشوائيته فهو أيضاً اعتراض غير سليم . وكما يقال عادة فى الرد على هذا الاعتراض ، لو كان السلوك الإنسانى عشوائى حقاً ودائم التقلب تحكمه المصادفة ، ولا يحكمه قانون منتظم ، لافلست شركات التأمين ، بل وما وجدت أصلا . والحقيقة — كماسبقت الإشارة فى ١ ٠ ٢ ٠ ٤ ٠ أن السلوك الإنسانى يحتوى على جزء منتظم يخضع لقوانين يمكن معرفتها بطريقة موضوعية ، وجزء آخر عشوائى يختلف من فرد لآخر ومن وقت لآخر . وطالما أن النظرية تهدف إلى تفسير سلوك المجموعات أو معرفة السلوك الإنسانى المتوسط (أو فى المتوسط) ، فإن الجزء العشوائى فى السلوك ليس عائقاً بأية حال من الأحوال لاستخدام الرياضيات فى التعبير والاحصاء فى القياس .

ويمكن القول بأن هناك ثلاث مزايا لاستخدام الرياضيات فى الاقتصاد هى : —

(أ) تمكن الرياضيات من تيسير وصف العلاقات الاقتصادية المتشابكة ،

(١) لاحظ أن التبسيط عملية لا مفر منها — بل ومطلوبة — فى وضع النظريات. ولكن هناك فرق بين تبسيط الواقع لمجرد حذف التفاصيل غير المهمة بغرض التوصل إلى جوهر الظواهر ، وبين التبسيط لمجرد عجز العقل البشرى المجرد عن استيعاب الأمور الجوهرية فى الواقع المعقد .

وتذليل أمر مناقشتها وتقريبها للأفهام. كما تمكن من اشتقاق بعض القوانين المحددة، التى تصلح للتنبؤ باتجاهات النشاط أو السلوك الاقتصادى لمختلف الوحدات الاقتصادية — وذلك بعد قياسها إحصائياً .

وهذا معناه إعطاء راسمى السياسة أساساً موضوعياً يقيمون عليه سياساتهم أو يجرون فى ضوئه مفاضلاتهم بين السياسات البديلة .

(ب) إن استخدام الرياضيات يفرض على الباحث درجة كبيرة من الدقة لاتتوفر عادة فى الصياغات اللفظية للنظرية الاقتصادية — وخصوصاً الدقة فيما يتعلق بتحديد المتغيرات ذات الأثر الأكبر فى سلوك الوحدات الاقتصادية، وكذلك الدقة فى الانتقال من الافتراضات إلى النتائج بطريقة منطقية ، وأخيرا الدقة فى عرض خطوات التحليل وتقدير النتائج .

(جـ) استخدام الرياضيات فى التحليل الاقتصادى يضمن ترجمة الحجج اللفظية إلى حجج دقيقة ومتسقة أى لا احتمال لوجود تناقض فيما بين بعضها وبعض . وهذا يساعد على تقليل فرصة الخلاف بين الاقتصاديين على غير أساس واضح أو سليم ، كالخلاف الذى ينجم عن غموض الافتراضات أو عدم دقة التعاريف . وتقليل فرصة مثل هذه الخلافات يساعد بلا شك على الإسراع بمعدلات تطوير النظرية الاقتصادية ذاتها.

لكن ماتقدم ذكره ينبغى ألا يجعلنا نتجاهل ماقد يترتب على استخدام الرياضيات فى الاقتصاد من مخاطر أو عيوب أو يصاحبها من قيود. ويمكن القول بأن أهم المخاطر هو التصور أو الإنطباع الذى قد يأخذه البعض بأن التحليل الاقتصادى الرياضى هو تحليل دقيق ومضبوط من جميع النواحى . بعبارة أخرى، أن استخدام الرموز والمعادلات الجبرية وأساليب التحليل الرياضى ربما يضفى على التحليل الاقتصادى الرياضى قدراً إضافياً من الدقة لامبرر له فى الحقيقه .

ويمكن أن نوضح ذلك بالمثالين التاليين :

(أ) إذا استخدم الرمز P فى إحدى المعادلات للتعبير عن المستوى العام للأسعار فى بلد ما ، فإن الإنطباع الذى قد يولده هذا الاستخدام لدى البعض - خصوصاً من كان علمهم بالاقتصاد محدودا - بأن المستوى العام الأسعار شئ محدد تحديدا دقيقاً هو انطباع لا أساس له من الدقة . ذلك لأن هناك مشاكل عديدة فى تعريف ذلك التعبير وصعوبات عديدة لقياسه أهمها صعوبات التجميع الإحصائى والصعوبات الناشئة عن التغير فى خصائص السلع من سنة لأخرى ، وكذلك الصعوبات التى تنشأ نتيجة استحالة إدراج أسعار كافة السلع فى حساب قيم هذا المتغير . وهذه المشاكل والصعوبات تضطر المختصين عادة إلى القناعة بمقاييس تقريبية جدا للمستوى العام للأسعار - على خلاف ما يوحى به الرمز P من دقة التحديد .

(ب) إذا صادف المرء قانوناً على سلعة ما ، ولتكن البطاطس ، كالقانون الذى تعبر عنه المعادلة (١) فى ١ . ٣ . ٥ ، فربما يتصور البعض - خصوصاً من كانت درايتهم بالنظرية الاقتصادية محدودة - أن العلاقة بين الطلب على البطاطس وبين المتغيرات الثلاثة الداخلة فى الدالة هى علاقة مضبوطة وقابلة للتحديد والقياس بمنتهى الدقة . ولكن الحقيقة على نقيض هذا التصور . فما الصورة الجبرية (١) لدالة الطلب سوى إحدى الصور الكثيرة التى يمكن أن تأخذها هذه الدالة ، والتى قد تتفق كلها مع المواصفات التى تعطيها النظرية الاقتصادية لها . فمن الجائز أن تكون هذه المعادلة خطية لوغاريتمية كالتالى :

$$\log q_t = A + b \log p_{1t} + c \log p_{2t} + d \log y_t$$

وفى هذه الحالة تفسر d ، c ، b على أنها المرونات السعرية الذاتية والمقطعية والدخلية على التوالى . وقد تكون الدالة تربيعية كالتالى :

$$q_t = A + b_1 p_{1t} + c_1 p_{2t} + d_1 y_t + b_2 p_{1t}^2 + c_2 p_{2t}^2 + d_2 y_t^2$$

وهكذا . وبرغم أن التحليل الإحصائى يساعدنا إلى حد ما فى المفاضلة بين الصور المختلفة والممكنة نظرياً لدالة الطلب ، إلا أنه لا يحسم المشكلة كلية ، إذ قد تتساوى عدة صور جبرية من حيث الجودة الإحصائية ، أو قد يحقق بعضها صفات معينة بينما يحقق البعض الآخر صفات أخرى ومن ثم تصعب المقارنة وتستحيل المفاضلة إلا إذا اعتمدنا على أهل الخبرة وقبلنا بمبدأ الحلول الوسط .

وأخيراً ، فإن استخدام الرياضيات فى الاقتصاد له حدوده . فإذا كان من الممكن استخدام أساليب التحليل الرياضى (والإحصائى) فى تحليل الطلب على السلع المختلفة أو تحليل قوانين إنتاجها أو فى وضع نماذج رياضية يستعان بها فى تخطيط سياسة الوحدات الاقتصادية أو رسم السياسة الاقتصادية على المستوى القومى ، فإن هناك عدد من الموضوعات الاقتصادية التى يستحيل استخدام الرياضيات فيها نظراً لصعوبة أو استحالة قياس بعض العوامل التى ترد فى شرح الظواهر أو الربط بينها فى صورة معادلات جبرية حتى فى الموضوعات التى شاع فيها استخدام الرياضيات مثل تحليل الطلب يلاحظ أنه ليس من الممكن إدخال بعض العوامل الهامة المؤثرة على الطلب كالأذواق والعادات نظراً لصعوبة قياسها .

ومن ناحية أخرى ، هناك موضوعات عديدة لا يصعب فيها قياس بعض المتغيرات فقط وإنما يصعب فيها أيضاً ترجمة العلاقات التى تربط بين مختلف المتغيرات فى صورة رياضية ، مثل الموضوعات التى تتناول الصراع الطبقى فى

المجتمع أو تطور النظام الاقتصادى من شكل إلى آخر ، أو ظاهرة الاستعمار الاقتصادى الذى عانت منه ومازالت تعانى دول مختلفة عديدة .

نخلص مما تقدم : إلى أن لاستخدام الرياضيات فى التحليل الاقتصادى مزايا قيمة ، ولكن الاستفادة السليمة من هذا الاستخدام تتطلب مراعاة ماقد يؤدى إليه ذلك من عيوب والتنبيه إلى ما قد يصاحبه من قيود والتحوط عند تقديم النتائج .

١ ـ ٥ ـ تمارين :

تمرين ١ : دهش أحد خريجى قسم الرياضة البحتة بالجامعة عندما أخبره صديق له فى كلية الاقتصاد أنهم يدرسون الرياضة ويطبقون الأدوات الرياضية فى علم الاقتصاد . واعتبر الأول أن فى هذا إساءة لا تغتفر لاستخدام علم دقيق كالرياضه فى مجال علوم اجتماعيه غير دقيقه مثل علم الاقتصاد !

هل يمكنك أن تدافع عن وجهة نظر كلية الاقتصاد فى تطبيق الأساليب الرياضية على الموضوعات الاقتصادية ؟

تمرين ٢ : هل تعتقد أن هناك مبالغه فى المقولة التالية « علم الاقتصاد علم اجتماعى ذو طبيعة رياضية » . اشرح وجهة نظرك بالتفصيل ، موضحاً مفهومك لعلم الاقتصاد ، ومجال استخدام الرياضيات فيـــه .

تمرين ٣ : عقب على الرأى التالى : « برغم ما لاستخدام الرياضيات فى التحليل الاقتصادى من مزايا كبيرة ، إلا أن الاستفادة السليمة من هذا الاستخدام تتطلب مراعاة ماقد يصاحبه من عيوب ، وما يرد عليه من قيود » .

تمرين ٤ : اكتب باختصار عن كل من النقاط التالية :

(أ) الناتج القومى .　　(ب) الاستهلاك .

(جـ) الأملاك .　　(د) نفقة الفرصة البديلة .

(هـ) عناصر الإنتاج.　　(و) الحاجات .

تمرين ٥ : اشرح الفرق بين:

(أ) التوزان والأمثلية .

(ب) التحليل الساكن والتحليل الحركى .

(ج) الادخار والاستثمار .

(د) الاستثمار ورأس المال .

(ه) الناتج القومى الصافى والناتج القومى الإجمالى .

الفصل الثانى

فكرة مبسطة عن المعالجة الرياضية للمشكلات الاقتصادية

نقدم فى هذا الفصل نموذجين اقتصاديين مبسطين كأمثلة على المعالجة الرياضية للقضايا الاقتصادية . فنبدأ بتقديم نموذج يوضح كيفية تحديد سعر ومبيعات سلعة ما فى السوق عند طريق التفاعل بين قوى العرض والطلب على السلعة ، ثم نوضح كيفية استخدام هذا النموذج فى مناقشة أثر فرض ضريبة إنتاج أو مبيعات على إحدى السلع أو أثر منح إعانة لها . أما النموذج الثانى فهو يوضح كيفية تحديد الدخل القومى فى ظل اقتصاد مغلق — أى لا معاملات له مع باقى الاقتصادات أو الدول — باستخدام نظرية كينز الشهيرة .

٢ . ١ نموذج اقتصادى مبسط لتحديد سعر ومبيعات سلعة ما .

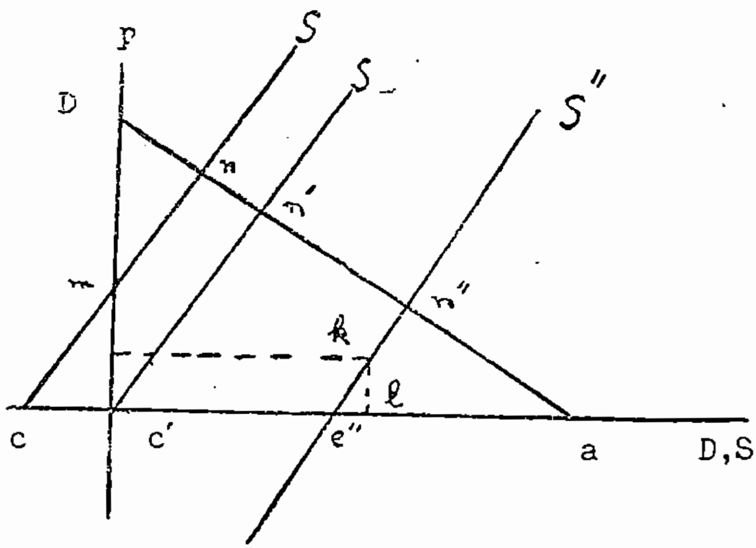
يتكون نموذج السوق من ثلاثة معادلات ، واحدة تمثل الطلب والأخرى تمثل العرض والثالثة تعبر عن شرط توازن السوق ، أى التعادل بين العرض والطلب . فإذا رمزنا للطلب بالرمز D والعرض بالرمز S والسعر بالرمز P وافترضنا أن دالة الطلب ودالة العرض خطـــية فانه يمكن كتابة النموذج كمايلى : -

دالة الطلب $D = a + b p$ (1)

دالة العرض $S = C + d p$ (2)

شرط التوازن $D = S$ (3)

حيث a ,b ,c ,d ثوابت ، وحيث يفترض أن b سالبة بمعنى أن منحنى الطلب ينحدر هابطا من اليسار إلى اليمين ، كما يفترض أن d موجبة بمعنى أن منحنى العرض ينحدر صاعدا من اليسار إلى اليمين ، وأن c أصغر من a . وترجع أهمية الشرط الأخير ($a > c$) إلى أنه إذا لم يتحقق فانه يستحيل الوصول إلى توازن بين العرض والطلب على السلعة عند سعر موجب . فاذا كانت $a < c$ فان العرض S يكون أكبر من الطلب D عند السعر صفر . أى أن المتاح من السلعة أكبر من المطلوب منها عندما يكون سعرها صفرا ، وهذا معناه أن السلعة محل البحث سلعة غير اقتصادية — أى لاتتمتع بالندرة . أما إذا كانت $c = a$ فان العرض والطلب يتعادلان عند السعر صفر ومن ثم لا تكون هناك مشكلة حقيقية فى تخصيص الموارد ولا فى تحديد سعر للسلعة . ولذا فان المشكلة الاقتصادية لاتنشأ إلاعندما تكون c أصغر من a ، كما فى الشكل رقم (١) .



شكل رقم (١)

فالمنحنيات s ، s′ ، s″ تفى بالشرط المطلوب ، حيث a أكبر من o و c و c′ . وبالطبع ليس هناك معنى اقتصادى للجزء c m من منحنى العرض s إذ أن العرض سالب عند كل الأسعار الموجبة المحصورة بين الصفر والنقطة m . ولكن ليس هناك مايمنع من الحصول على منحنى عرض مثل المنحنى s m عمليا . وفى مثل هذه الحالة يفسر الوضع الذى يمثله المنحنى بأن المنتجين ليسوا على استعداد لتقديم أية كمية للبيع عند سعر أقل من m c′ . أما الجزء c m فهو مجرد امتداد للجزء ذى المغزى الاقتصادى وهو m s . لاحظ أيضاً أنه ليس من الضرورى أن نفترض أن $c \geq o$ ، حيث أنه لو كانت $c > o$ فان هذا لا يفسر بأن المنتجين مستعدين لتقديم كميات من السلعة مقابل أسعار سالبة ، بمعنى أنهم يدفعون للمستهلك لقاء شرائه سلعتهم . والتفسير السليم لمنحنى عرض مثل s″ فى الشكل رقم (١) هو أن الجزء ذا المغزى الاقتصادى هو فقط ذلك الجزىء الذى يبدأ عند السعر k l . فهذا السعر هو أقل سعر يرضى عنده المنتجون بتقديم السلعة للبيع . أما الجزء k c″ وامتداده إلى أسفل فليس لها أى معنى من الناحية الاقتصادية .

باختصار ، يفترض أن كلا من P، D، S تأخذ قيما غير سالبة ، وأن منحنى العرض ومنحنى الطلب يقعان بالتالى فى الربع الشمالى الشرقى الذى ينتج عن تقاطع المحورين .

والآن كيف تحدد سعر التوازن من نموذج السوق ؟ أن سعر التوازن هو ذلك السعر الذى يحقق التعادل بين الكمية المعروضة والكمية المطلوبة . أى أنه ذلك السعر الذى يحدث عنده تقاطع منحنى العرض مع منحنى الطلب . ولهذا فاننا لنتوصل إلى سعر السوق بالتعويض عن كل من S و D من المعادلتين (١)، (٢) فى شرط التوازن (٣) .

إذن

$$a + bp = c + dp$$

وبإعادة ترتيب الحدود ، نحصل على سعر التوازن وهو

$$(4) \qquad p = \frac{a - c}{d - b}$$

وبالتعويض عن سعر التوازن فى أى من المعادلتين (١) أو (٢) ، يمكن أن نحصل على الكمية التوازنية Q التى يتم تبادلها فى السوق فبالتعويض فى المعادلة (١) نجد أن :

$$Q = S = D = a + b \left(\frac{a - c}{d - b} \right)$$

ومنها نجد أن الكمية التوازنية هى

$$(5) \qquad Q = \frac{ad - bc}{d - b}$$

وبتطبيق الافتراضات السابق ذكرها فيما يختص بالثوابت ، يتضح لنا من المعادلة (٤) أن التوازن بين العرض والطلب يتم عنده سعر موجب .

مثال (١) : أفرض أن معادلة الطلب على سلعة ما هى $D = 100 - 2p$ ، وأن معادلة عرض هذه السلعة هو $S = 3p$ ، حيث p تقاس بالقروش و D تقاس بالكيلو جرام . فما هما السعر والكمية الذى يتحقق عندهما التوافق بين رغبات البائعين ورغبات المشترين ؟

الحل : بتطبيق شرط التوازن $S = D$ ، والتعويض فيه عن كل من S, D نحصل على :

$$100 - 2P = 3p$$

إذن $P = 20$ ، أى أن السعر يساوى ٢٠ قرشا . وبالتعويض عن هذا السعر فى معادلة الطلب نحصل على الكمية التوازنية :

$$Q = S = D = 100 - 2(20) = 60$$

وهذه هى الكمية التى يتحقق عندها التوافق بين رغبات البائعين ورغبات المشترين .

مثال (٢) :

الغرض من هذا المثال توضيح طريقة حساب المرونات وتبيان بعض خصائص منحنيات العرض والطلب. إذا كان منحنى الطلب على سلعة معينة هو $D = 100 - 0.5p$ ومنحنى العرض هو $S = 20 + p$ ، حيث p تقاس بالقرش ، S, D بالكيلو جرام :

(ا) أوجد مرونات العرض والطلب على هذه السلعة عند الأسعار التالية : 200, 100, 60, 0 والسعر التوزانى .

(ب) علق على الكيفية التى تتغير وفقاً لها مرونات العرض والطلب فى (ا) .

(حـ) كيف تتغير مرونات الطلب إذا انتقل منحنى الطلب إلى اليمين مع بقاء ميله ثابتاً ؟

(د) كيف تتغير مرونات العرض إذا انتقل منحنى العرض إلى اليمين مع بقاء ميله ثابتا ؟

الحل :

(ا) نحصل أولا على السعر التوازنى بمساواة S, D .

$$100 - 0.5p = 20 + p$$

إذن $p = 53.3$ وعليه فإن الكمية المطلوبة والمعروضة عند هذا السعر هى

$$Q = S = D = 100 - 0.5 \,(80/1.5) = 73.3$$

أى أن السعر التوازنى هو ٥٣٫٣ قرش والكمية التوازنية هى ٧٣٫٣ كيلو جرام .

يمكن حساب مرونة الطلب ـ أى المرونة السعرية الذاتية ـ E_d بالتعويض في المعادلة

$$E_d = \frac{\Delta D}{\Delta P} \cdot \frac{P}{D}$$

واضح من دالة الطلب أن ،

$$\frac{\Delta D}{\Delta p} = -0.5$$

أى أن $\frac{\Delta D}{\Delta p}$ مقدار ثابت ، وهو عبارة عن مقلوب ميل منحنى الطلب الممثل بخط مستقيم[1] .

ولحساب قيمة المرونة عند السعر 200 فإننا نحسب أولا الكمية المطلوبة عند هذا السعر أى

$$D = 100 - 0.5\,(200) = 0$$

ثم نعوض عن كل من p ، D ، $\frac{\Delta D}{\Delta p}$ في معادلة المرونة ، فنجد أن

$$d = -0.5\left(\frac{200}{0}\right) = -\infty$$

---

(١) يمكن للعارف بحساب التفاضل احلال $\frac{dD}{dp}$ عل $\frac{\Delta D}{\Delta p}$ في تعريف المرونة السعرية الذاتية للطلب واشتقاق المعامل التفاضلي الأول لدالة الطلب :

$\frac{dD}{dp} = -0.5$ مباشرة .

وبالمثل يمكن حساب باقى المرونات المطلوبة وهى موضحة فى العمود الرابع من الجدول التالى :

P	D	S	E_d	E_S
200	0	200	$-\infty$	0.909
100	50	120	-1	0.833
60	70	80	-0.428	0.750
53.3	73.3	73.3	-0.364	0.727
0	100	20	0	0

وبالمثل يمكن حساب مرونات العرض E_S عند الأسعار المختلفة ـ وهى موضحة بالعمود الخامس من الجدول السابق ـ باستخدام التعريف التالى[1] :

$$E_S = \frac{\Delta S}{\Delta P} \cdot \frac{P}{S}$$

(ب) بملاحظة الجدول السابق يتضح مايلى :

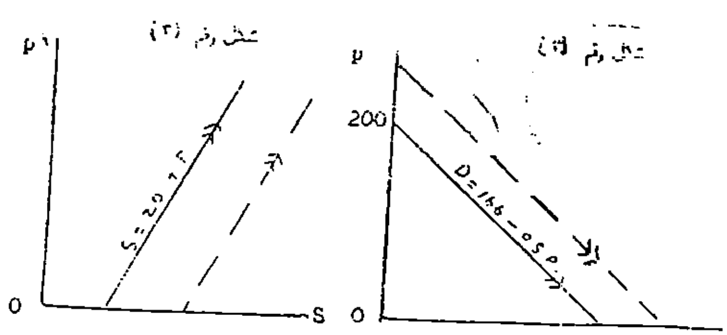
(ب / ١) أن منحنى الطلب تتغير مرونته من مالا نهاية عند تقاطعه مع محور السعر ، ثم تتناقص تدريجيا مع تناقص السعر حتى تصل إلى الصفر عند نقطة تقاطع المنحنى مع محور الكمية

(ب / ٢) أن منحنى العرض تتناقص مرونته كلما تناقص سعر السلعة حتى تصل إلى الصفر عند نقطة تقاطعه مع محور الكمية ـ لاحظ ان مرونة العرض لا تصل إلى ∞ إلا فى حالة كون S مساوية للصفر ، وهذا لايتحقق إلا عند السعر $P = -20$ أى عند سعر سالب ، وبالتالى لامعنى له اقتصاديا .

---

(١) يمكن كتابة التعريف باستخدام المشتقة الأولى لدالة العرض بدلا من $\frac{\Delta S}{\Delta P}$ كما سبق ذكره بالنسبة لمنحنى الطلب .

(جـ) إذا انتقل منحنى الطلب إلى اليمين — مع ثبات الميل — فإن منحنى الطلب الجديد يكون أقل مرونة عن منحنى الطلب القديم وذلك عند كل المستويات المختلفة للسعر . وذلك لأنه عند السعر $p = 200$ مثلا كانت الكمية المطلوبة صفرا وكانت المرونة ∞ فى حين أن الكمية المطلوبة عند نفس السعر على المنحنى



الجديد هى كمية موجبة ، كما فى الشكل رقم (٢) — وهذه تعطى $\frac{P}{D}$ أصغر مما سبق . وبالمثل تصبح قيمة $\frac{P}{D}$ أصغر مما كانت عليه عند كل مستوى للسعر ، وبالتالى فإن قيمة المرونة تقل . وعموما يمكن القول بأنه كلما ابتعد منحنى الطلب عن نقطة الأصل مع بقاء ميله ثابتا ، كلما قلت مرونة الطلب عند كل سعر من الأسعار عما كانت عليه .

(د) إذا انتقل منحنى العرض إلى اليمين مع بقاء ميله ثابتاً ، فإن معنى هذا أنه عند أى سعر تكون الكمية المعروضة باستخدام المنحنى الجديد أكبر مما كانت عليه على المنحنى القديم ، ولذا تصبح $\frac{P}{S}$ أقل مما كانت عليه عند كل مستوى للسعر ، وبالتالى تصبح المرونة أصغر كما فى الشكل رقم (٣) . وعموما يمكن القول بأنه كلما ابتعد منحنى العرض عن نقطة الأصل أى كلما انتقل ناحية اليمين — مع بقاء ميله ثابتا — كلما قلت مرونة العرض عند كل سعر من الأسعار عما كانت عليه .

٢ . ٣ . أثر الضرائب والإعانات على الأسعار والمبيعات :

كثيرا ما تفرض الحكومة ضرائب الإنتاج (أو تمنح الإعانات) على مختلف السلع. وعندما تقرر الحكومة مقدار الضريبة المفروضة على كل وحدة من وحدات سلعة معينة فإنها إنما تقررها فى الغالب بناء على ماتتوقع حدوثه للكميات المطلوبة والمعروضة من السلعة المفروض عليها الضريبة ، أى بناء على تصورها للأثر الذى تحدثه الضريبة فى السعر وأثر ذلك على الكمية المباعة من السلعة . ذلك لأن إيراد الضريبة لايتوقف فقط على مقدار مايفرض على كل وحدة وإنما هو يتوقف أيضاً على عدد الوحدات المنتظر بيعها بعد فرض الضريبة . ومن الأشياء التى يمكن أن تعين الحكومة على التعرف على أثر فرض ضريبة (أو منح إعانة) على سلعة من السلع وجود نموذج للعرض والطلب على السلعة المعنية . بعبارة أخرى ، باستخدام نموذج السوق الذى قدمناه فى ٢ . ١ . يمكن أن نناقش أثر فرض ضريبة إنتاج على أية سلعة من السلع أو منح إعانة لدعم إنتاجها .

افرض أن النموذج الخاص بالسلعة موضع الدراسة هو النموذج السابق مناقشته وهو

$$D = a + bp \qquad (1)$$

$$S = c + dp \qquad (2)$$

$$D = S \qquad (3)$$

حيث $a > c,\ o < d,\ o > b$. إذا افترضنا أن الحكومة فرضت ضريبة إنتاج مقدارها t على كل وحدة مباعة من هذه السلعة[1]. فإن معنى هذا

---

(١) تسمى الضريبة فى هذه الحالة ضريبة نوعية Specific excise tax
أما إذا فرضت الضريبة كنسبة من السعر أى على قيمة الوحدة فتسمى ضريبة قيمية Ad Valorem excise tax

أن السعر الذى يتقاضاه المنتج عن كل وحدة من السلعة ، وليكن p^* سوف سوف ينخفض عن سعر السوق p بمقدار الضريبة t أى أن

$$p^* = p - t \qquad (4)$$

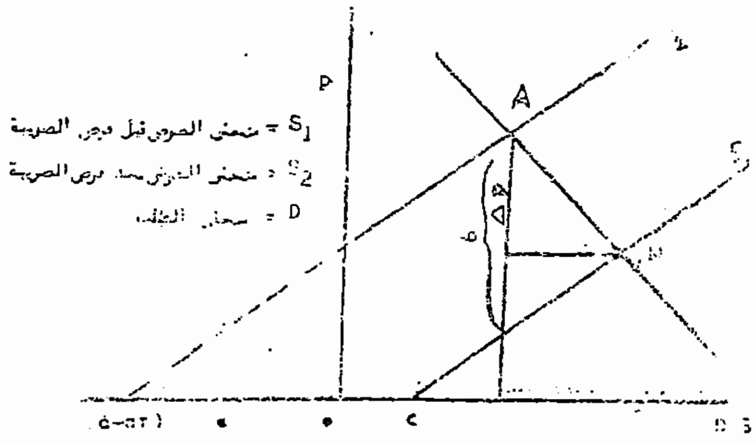
وحيث أن الذى يحدد سعر العرض هو السعر الذى يدخل خزينة المنتج فعلا فان معادلة العرض بعد فرض الضريبة تصبح

$$S = c + dp^* \qquad (5)$$

وبالتعويض عن p^* من المعادلة (٤) فى المعادلة (٥) نحصل على منحنى العرض بعد فرض الضريبة ، وهو

$$S = (c - dt) + dp \qquad (6)$$

وبمقارنة منحنى العرض بعد فرض الضريبة بمنحنى العرض قبل فرض الضريبة نلاحظ أن ميل المنحنى لم يتغير فهو مازال ثابتاً عند $\frac{1}{d}$ ، والذى يتغير هو مقطع المنحنى . وحيث أن d موجبة و t أيضا موجبة ، فان مقطع المنحنى الجديد أقل من قطع المنحنى القديم بمقدار d t . وهذا معناه انتقال منحنى العرض إلى اليسار مع ثبات ميله كما فى الشكل رقم (٤) .



شكل رقم (٤)

ويتم التوازن عند تقاطع منحنى العرض الجديد مع منحنى الطلب الذى يظل ثابتاً أى أن

$$(c - dt) + dp = a + bp$$

ومنهـــا :

$$(7) \qquad p = \left(\frac{a - c}{d - b}\right) + \left(\frac{d}{d - b}\right) t$$

قارن هذا السعر بالسعر التوازنى قبل فرض الضريبة ـ المحسوب فى المعادلة (4) فى القسم السابق :

$$(7) \qquad p = \frac{a - c}{d - b}$$

واضح أن الفرق بين السعرين هو المقدار $t \left(\frac{d}{d - b}\right)$. وحيث أن $d < o$ ، $b > o$ ، فإن $\frac{d}{d-b}$ لابد وأن تكون موجبة وحيث أن t موجبة ، فإن $t \left(\frac{d}{d-b}\right)$ أيضا موجبة .

أى أن السعر بعد فرض الضريبة أعلى من السعر قبل فرض الضريبة :

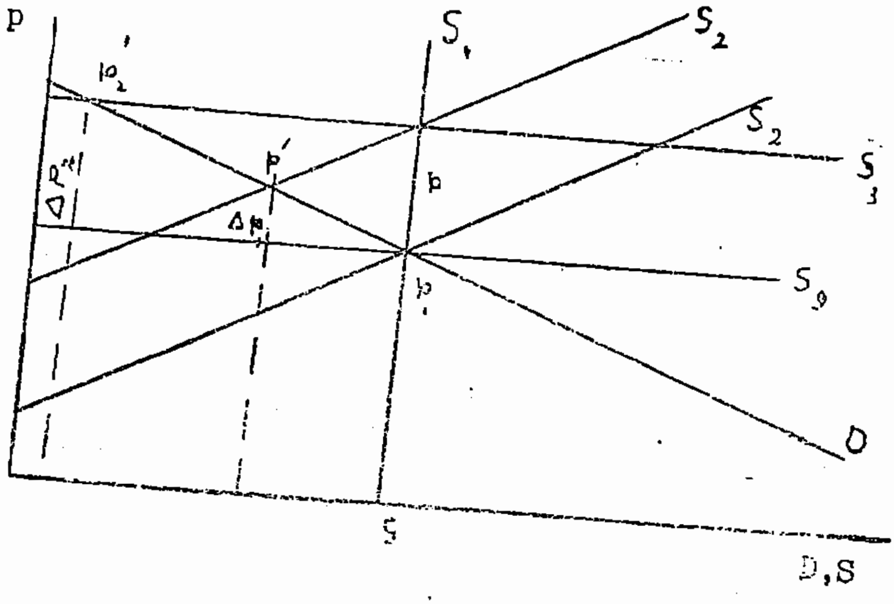
$$(8) \qquad \Delta p = \left(\frac{d}{d-b}\right) t$$

لكن $\frac{d}{d-b}$ أقل من الواحد الصحيح . إذن Δp أقل من t . بعبارة أخرى أن فرض ضريبة على إنتاج سلعة من السلع يؤدى إلى رفع ثمنها ، ولكن بمقدار أقل من الضريبة المفروضة على كل وحدة ، كما فى الشكل رقم (٤) .

وبتأمل المقدار Δp فى المعادلة (8) يتضح أن الارتفاع فى السعر يتوقف على :

(أ) مقدار الضريبة ، فكلما ارتفعت قيمة الضريبة — مع ثبات العوامل الأخرى — كلما زاد مقدار الارتفاع فى السعر .

(ب) مقدار d ، أى مقلوب ميل منحنى العرض — وهو ذو صلة بمرونة العرض كما سبقت الإشارة — فكلما زادت d كلما زادت درجة الارتفاع فى السعر الذى يدفعه المستهلك . وعموما كلما ارتفعت مرونة العرض كلما زاد ارتفاع السعر . ويمكن إيضاح ذلك بالرسم التالى (شكل رقم ٥) .



شكل رقم (٥)

(ب / أ) يلاحظ أن منحنى العرض S_3 كامل المرونة ، بمعنى أن المنتجين مستعدين لبيع أى كمية عند السعر P_1 ولكنهم يمتنعون عن البيع تماما عند أى سعر أقل ولو بقدر بسيط . يؤدى فرض الضريبة فى هذه الحالة إلى ارتفاع الثمن بكل مقدار الضريبة . ولكن المتأمل فى المعادلة (7) أو (8) سوف يلاحظ أننا لا نستطيع الوصول إلى إجابة محددة من هاتين المعادلتين فى حالة كون .

$d = \infty$ فبالتعويض عن $d = \infty$ فى معادلة السعر بعد فرض الضريبة نجد أن هذا السعر يساوى

$$p = \frac{a-c}{\infty - b} + \frac{\infty}{\infty - b} t$$

وهذه نتيجة لا معنى لها . الحقيقة أن ميل الخط الأفقى غير معرف undefined وعندما يكون منحنى العرض كامل المرونة فإن هناك سعراً واحداً يحدث عنده الإنتاج ولذا فإن المعادلة (7) أو (7´) ليست حلا مناسباً (١) . ذلك أنها تعطى حلا عندما يكون السعر متغير داخلى، ولكن السعر فى حالتنا هذه ثابت ومعلوم مسبقاً ، أى أنه متغير خارجى لا يتحدد بالنموذج (٢) . ولذا فانه ينبغى أن نعيد كتابة معادلة العرض فى هذه الحالة فبدلا من

$$S = c + dp$$

نكتب المعادلة كالتالى .

$$p = \overline{p} \qquad (9)$$

ولا توجد معادلة للكمية لأن كون العرض تام المرونة يعنى أن المنتجين مستعدين لتقديم أية كمية تطلب منهم عند السعر $\overline{p}$. بعبارة أخرى فى هذه الحالة يمكن القول بأن المنتج يحدد السعر والمستهلك يحدد الكمية .

---

(١) لاحظ أنه فى حالة العرض الكامل المرونة ينبغى أن يكون مقطع دالة الطلب على محور السعر أكبر من مقطع دالة العرض لهذا المحور ، وهو السعر . وحيث أن مقطع دالة الطلب هو قيمة p عندما تكون D مساوية للصفر فان :

$0 = a + bp$ ومن ثم $p = -\frac{a}{b}$ ، وحيث $b > 0$ ،

فان $-\frac{a}{b}$ ستكون موجبة . أى أنه يشترط لحدوث التوازن ألا يقل $-\frac{a}{b}$ عن السعر الثابت $\overline{p}$ فى حالة العرض الكامل المرونة .

(٢) راجع تعريف المتغيرات الداخلية والخارجية فى ٢٠-٨ .

إذن النموذج المناسب في حالة العرض تام المرونة هو

$$D = a + bp$$

$$p = p$$

$$D = S$$

وحل النموذج قبل فرض الضريبة يكون

$$D = S = a + b\bar{p} \qquad (10)$$

أما بعد فرض الضريبة فإن سعر المنتج يساوى سعر السوق ناقص الضريبة

$$p^* = p - t \qquad (11)$$

وحيث أن هناك سعر واحد فقط فى هذه الحالة $\bar{p} = p^*$ فان

$$p = p^* + t = \bar{p} + t \qquad (12)$$

أى أن السعر لابد وأن يرتفع بمقدار الضريبة كلها . وتصبح الكمية المطلوبة .

$$D = a + b(\bar{p} + t) \qquad (13)$$

والخلاصة أن المستهلك يتحمل كل الضريبة فى حالة العرض كامل المرونة.

(ب / ٢) أما فى حالة منحنى العرض عديم المرونة فان d = صفر وبالتعويض عن d فى دالة العرض نحصل على $S = c$.

أى أن العرض ثابت فى هذه الحالة مهما كان مستوى السعر .

وبالتعويض عن d فى معادلة الزيادة فى السعر (8) نحصل على :

$$\Delta p = \left(\frac{o}{o-b} \right) t$$

إذن

$$\Delta p = o$$

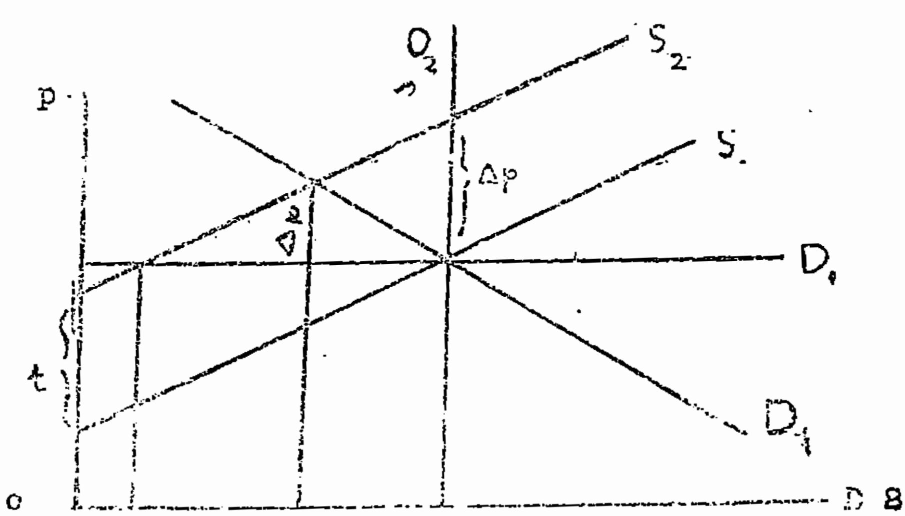
أى أن السعر يظل ثابتاً بعد فرض الضريبة . بعبارة أخرى يتحمل المنتج كل

قيمة الضريبة في هذه الحالة ، كما هو الحال بالنسبة لمنحنى العرض S_1 حيث يظل السعر ثابتاً عن P_1 ، في شكل رقم (٥).

(ب/٣) من الحالتين السابقتين يمكن أن نستنتج أنه كلما قلت مرونة العرض كلما قلت نسبة الارتفاع في سعر السوق من جراء فرض الضريبة ، وكلما زاد عبء الضريبة على المنتج . ويوضح المنحنى S_2 الحالة الوسط ، والتي يتوزع فيها عبء الضريبة بين المنتج والمستهلك .

(جـ) يتوقف مدى الارتفاع في السعر على مقدار b مقلوب ميل منحنى الطلب ، وهي أيضاً تؤثر في مرونة الطلب . فكلما زادت القيمة المطلقة لـ b - وزادت بالتالي مرونة الطلب - كلما قل مقدار الارتفاع في السعر ، وبالعكس كلما قلت القيمة المطلقة لـ b - وقلت بالتالي مرونة الطلب - كلما زاد مقدار الارتفاع في السعر بعد فرض الضريبة .

ويمكن توضيح الحالات المختلفة لمرونة الطلب بالشكل رقم (٦) .



شكل رقم (٦)

لذلك فالسعر يرتفع بكل قيمة الضريبة فى حالة الطلب عديم المرونة (المنحنى D_2) ويظل ثابتاً دون تغيير فى حالة الطلب كامل المرونة (المنحنى D_1) وفى الحالة الوسط D_3 يرتفع السعر ولكن بمقدار أقل من قيمة الضريبة . يمكن التثبت من هذه النتيجة بالتأمل فى معادلة الارتفاع فى السعر (8) .

فاذا كانت b = صفر فان

$$\Delta p = \frac{d}{d - o} t = t$$

وإذا كانت $o < b < 1$ فان $\frac{d}{d - b}$ تكون أقل من الواحد الصحيح .
ومن ثم يرتفع السعر ولكن بأقل من مقدار الضريبة .

أما حالة الطلب كامل المرونة فان من المفروض إعادة صياغة النموذج كما فى حالة العرض كامل المرونة ، لأن السعر ثابت والكمية المطلوبة غير متوقفة على السعر فى هذه الحالة ، أى أن $p = \overline{p}$.

هذا عن أثر فرض الضريبة على سعر السوق . فماذا عن أثرها على الكميات المطلوبة والمعروضة ، أى على حجم المبيعات ؟ يمكن أن نحدد هذا الأثر بإيجاد الكمية المطلوبة (أو المعروضة) عند السعر التوازنى بعد فرض الضريبة . بالتعويض عن سعر التوازن بعد فرض الضريبة فى معادلة الطلب :

$$D = a + b \left[\left(\frac{a - c}{d - b} \right) + \left(\frac{b}{d - b} \right) t \right]$$

إذن

$$(14) \qquad D = a + b \left(\frac{a - c}{d - b} \right) + b \left(\frac{d}{d - b} \right) t$$

وبمقارنة هذه الكمية بالكمية المباعة قبل فرض الضريبة وهى $Q = a + b\left(\frac{a - c}{d - b} \right)$ فاننا نجد أن الكمية المباعة بعد فرض الضريبة تساوى الكمية المباعة قبل فرض الضريبة مضافا إليها المقدار :

$$(15) \qquad \Delta Q = \left(\frac{d\,b}{d - b} \right) t$$

وحيث أن d موجبة و b سالبة فإن $\frac{d}{d-b}$ موجبة، و $\frac{d\ b}{d-b}$ سالبة. بعبارة أخرى، فإن فرض الضريبة يؤدى إلى نقصان الكمية المطلوبة . ويتوقف مقدار النقص فى المبيعات على :

(ا) مقدار b ، وبالتالى حجم مرونة الطلب .

(ب) مقدار d ، وبالتالى حجم مرونة العرض .

(جـ) مقدار t : الضريبة المفروضة على الوحدة .

وبتأمل الشكل رقم (٥) يتضح أن الكمية لا تتأثر فى حالة العرض عديم المرونة (S_1) ، بينما تنخفض انخفاضا شديدا فى حالة العرض كامل المرونة ، (S_3) ، وعموما يزدادمقدار الانخفاض فى الكمية كلما زادت مرونة العرض (S_2) . ويتضح أيضاً من الشكل رقم (٦) أن الكمية المباعة لاتتأثر فى حالة الطلب عديم المرونة (D_2) بينما تنخفض انخفاضا شديدا فى حالة الطلب كامل المرونة (D_1) ، وعموما يزداد مقدار الانخفاض فى الكمية كلما زادت مرونة الطلب (D_3) .

لاحظ أن قيمة النموذج الذى استخدمناه فى هذه الحالة لا تقتصر فقط على تمكيننا فقط من استخراج النتائج النوعية السابقة ، ولكنه يمكننا من التوصل إلى حساب قيمة التغير فى السعر والكمية وبالتالى إيراد الضريبة ، وذلك إذا ماعرفت قيمة الثوابت a, b, c, d كما فى المثال التالى . كذلك يمكننا تحديد المعدل الأمثل للضريبة أى المعدل الذى يعظم حصيلة الضرائب ، كما ستوضحه أحد التمارين فى الفصل القادم (تمرين ٨ فى ١٢٠٣) .

مثال : إذا كان منحنى الطلب على سلعة ماهو $D = 120 - 2p$ ومنحنى العرض هو $S = 20 + 3p$ ، حيث S, D يقيس عدد وحدات السلعة المشتراة والمباعة على التوالى ، p هو سعر السلعة بالجنيهات ، فناقش أثر فرض ضريبة مقدارها ٥ جنيهات على كل وحدة من الوحدات المباعة من هذه السلعة .

الحل : نحدد أولا الوضع التوازنى قبل فرض الضريبة ، عن طريق التعويض عن D ، S فى شرط التوازن $S = D$:

$$120 - 2p = 20 + 3p$$

أى أن

$$p = 20 \quad \text{جنيها}$$

والكمية التوازنية هى

$$Q = S = D = 120 - 2(20) = 80 \quad \text{وحدة}$$

بعد فرض ضريبة مقدارها ٥ جنيهات يحصل المنتج على سعر السوق مطروحا منه ٥ جنيهات ، أى أن دالة العرض تصبح

$$S = 20 + 3(p - 5)$$
$$= 5 + 3p$$

وبمساواة العرض والطلب

$$120 - 2p = 5 + 3p$$

نحصل على السعر التوازنى بعد فرض الضريبة وهو

$$p = 23 \quad \text{جنيها}$$

والكمية المباعة بعد فرض الضريبة هى

$$Q = S = D = 120 - 2(23) = 74 \quad \text{وحدة}$$

وهكذا يتضح لنا أن فرض ضريبة مقدارها خمسة جنيهات على السلعة محل البحث ، يؤدى إلى ارتفاع السعر من ٢٠ إلى ٢٣ جنيها ؛ أى بثلاثة جنيهات أو ما يعادل ($\frac{3}{5} \times 100 =$) ٦٠ ٪ من قيمة الضريبة المفروضة . كذلك تنخفض الكمية المباعة من ٨٠ إلى ٧٤ وحدة . وحصيلة الضريبة فى هذه الحالة هى ($74 \times 5 =$) ٣٧٠ جنيها .

أو الإعانات . لاحظ أنه يمكن اتباع نفس الأسلوب السابق لمناقشية أثر منح إعانة لدعم إنتاج سلعة معينة على السعر والمبيعات وكذلك لحساب التكاليف المتوقعة لهذه الإعانة من وجهة نظر الخزانة العامة . والاختلاف الوحيد هو أن منحنى العرض الجديد يصبح

$$S = e + d\,(p + s)$$

حيث أن المنتج يحصل على سعر السوق مضافا إليه مقدار الإعانة s . ومعنى هذا انتقال منحنى العرض بأكمله إلى اليمين — مع بقاء ميله ثابتا (انظر تمرين ٣ وتمرين ٤) .

٢ . ٢ . نموذج اقتصادى مبسط لتحديد الدخل القومى .

يقوم النموذج — وفقاً لنظرية كينز الشهيرة — على الافتراضات التالية :

(ا) أن الاقتصاد القومى مغلق بمعنى أنه لا يتعامل مع الأسواق الخارجية .

(ب) أن الحكومة لا تتدخل فى توجيه النشاط الاقتصادى .

(ﺟ) أن الاستثمار I يتحدد خارج النموذج ، أى أنه معطى أو متغير خارجى .

(د) أن الاستهلاك الكلى أو القومى C يتوقف على الدخل الكلى أو القومى y بمعنى أن

$$C = c\,y \qquad (1)$$

حيث c ثابت يمثل الميل المتوسط والحدى للاستهلاك . ويفترض أن c موجبة وأقل من الواحد الصحيح[1] :

$$c = \frac{C}{y} = \frac{\Delta C}{\Delta y}$$

---

(١) الميل الحدى الاستهلاك: marginal propensity to consume

الميل المتوسط للاستهلاك : average propensity to consume

وتسمى الدالة (١) دالة الاستهلاك الكلى [illegible]

حيث أن الدخل يتكون من الاستهلاك والاستثمار فإننا نستطيع أن نكتب:

$$Y = I + C \qquad (2)$$

والمعادلتين (١) ، (٢) تكونان نموذجاً كافياً لتحديد الدخل القومى فى ظل الافتراضات المبسطة التى بدأنا بها . وفى هاتين المعادلتين يوجد ثلاثة متغيرات هى I, Y, C . وحيث أن I تتحدد ـ افتراضا ـ خارج النموذج ، فانه يكون لدينا مجهولان Y, C يمكن إيجاد قيمتهما من المعادلتين (١) و (٢) .

لحل النموذج نعوض عن C فى المعادلة (٢) لنحصل على

$$Y = I + cY$$

ومنها

$$Y(1-c) = I$$

أو

$$Y = \left(\frac{1}{1-c}\right) I \qquad (3)$$

أى أنه بمعلومية الاستثمار I فى أية سنة والميل الحدى للاستهلاك c أو مكرر أو مضاعف الاستثمار(١) وهو الاسم الذى يطلق على $\left(\frac{1}{1-c}\right)$ ، فاننا نستطيع أن نتنبأ بالدخل القومى لهذه السنة .

ومن المعادلة (3) يمكن أن نستنتج المعادلة التالية

$$\Delta Y = \left(\frac{1}{1-c}\right) \Delta I$$

أو بقسمة طرفى المعادلة على ΔI

$$\frac{\Delta Y}{\Delta I} = \frac{1}{1-c} \qquad (4)$$

---

(١) مكرر الاستثمار أو مضاعف الاستثمار Investment Multiplier

أى أن مكرر الاستثمار عبارة عن العلاقة بين الزيادة فى الاستثمار والزيادة المترتبة عليها فى الدخل الكلى . وحيث أن c موجبة وأقل من الواحد الصحيح فان مكرر الاستثمار يكون أيضاً موجباً ولكن أكبر من الواحد الصحيح وأقل من 8 . وهذا معناه أن زيادة معينة فى الاستثمار تؤدى إلى زيادة أكبر منها فى الدخل القومى .

مثال : افرض أن دالة الاستهلاك هى دالة خطية تمر بنقطة الأصل . وأن الميل الحدى للاستهلاك هو ٧ر٠ . وأن حجم الاستثمار فى سنة معينة هو ٣٠٠ مليون جنيه . أوجد قيمة الدخل القومى والاستهلاك وحجم مكرر الاستثمار فى هذه السنة .

حيث أن دالة الاستهلاك هى دالة خطية وتمر بنقطة الأصل فان معادلتها هى :

$$C = c\ y$$

وحيث أن c هو الميل الحدى للاستهلاك ، فان دالة الاستهلاك هى :

$$C = 0.7\ Y \qquad (5)$$

وحيث أن الدخل القومى يساوى الاستهلاك + الاستثمار

$$Y = I + C \qquad (6)$$

فبالتعويض عن C من دالة الاستهلاك ، وبالتعويض عن $I = 300$ نحصل على

$$Y = 300 + 0.7\ Y$$

ومنها

$$Y = 1000$$ مليون جنيه

وبالتعويض عن قيم I و Y فى المعادلة (6) :

$$1000 = 300 + C$$

يتضح أن $C = 700$ مليون جنيه .

ومكرر الاستثمار فى هذا المثال يساوى

$$\frac{\Delta Y}{\Delta I} = \frac{1}{1-c} = \frac{1}{1-0.7} = 3.3$$

أى أن زيادة معينة فى الإستثمار تؤدى إلى زيادة الدخل بأ كثر من ثلاثة أمثالها

٢ . ٤ . أثر فرض ضريبة على الدخل على مكرر الاستثمار

من المهم عند رسم السياسة الضريبية مراعاة ماقد يؤدى إليه فرض ضرائب مباشرة على الدخل من آثار على الاستثمار والدخل . ويمكن باستخدام نموذج معدل لتحديد الدخل القومى مناقشة أثر فرض ضريبة على الدخل على مضاعف الاستثمار .

افرض أن الحكومة تنفق تلقائيا — أى أن الانفاق الحكومى متغير خارجى لاعلاقة له بمستوى الدخل القومى . افرض أن معدل الانفاق الحكومى على مختلف السلع والخدمات هو G سنويا . فى هذة الحالة تصبح معادلة الدخل القومى :

$$Y = G + I + C \qquad (7)$$

افرض أن الحكومة تفرض ضريبة على الدخل بمعدل ثابت t . أى أن

$$T = t\,y \qquad (3)$$

حيث t معدل الضريبة و T الإيراد الكلى للضريبة . الآن يصبح الدخل المتاح للأفراد الدخل الشخصى القابل للصرف[1] . Y_d مساويا للدخل الكلى Y مطروحا منه الإيراد الكلى للضريبة :

$$Y_d = Y - T \qquad (9)$$

ودالة الاستهلاك فى هذه الحالة تصبح

$$C = c\,Y_d \qquad (10)$$

أى أن الاستهلاك دالة فى الدخل الشخصى القابل للصرف

بالتعويض عن T فى (9) من (8)

$$Y_d = Y - t\,Y = (1-t)\,Y \qquad (11)$$

وبالتعويض عن Y_d من (11) فى دالة الاستهلاك (10) نحصل على

$$C = c\,(1-t)\,Y \qquad (12)$$

(١) الدخل الشخصى القابل للصرف أو الدخل الشخصى الممكن التصرف فيه :
Personal Disposable Income.

وبالتعويض عن الاستهلاك فى معادلة الدخل (7) نجد أن

$$Y = G + I + c(1 - t)Y$$

$$Y\left[1 - c(1 - t)\right] = G + I$$

ومن ثم فإن

$$Y = \frac{1}{1 - c(1 - t)}(G + I) \qquad (13)$$

معنى هذا أن مكرر الاستثمار M يصبح فى هذه الحالة

$$M = \frac{1}{1 - c(1 - t)} \qquad (14)$$

ومن الواضح أنه أقل من قيمته قبل فرض الضرائب على الدخل والتى كانت $1/(1 - C)$.

وهكذا فقد أمكننا باستخدام النموذج السابق لتحديد الدخل القومى إثبات أن فرض ضرائب مباشرة على الدخل يؤدى إلى انخفاض قيمة مكرر الاستثمار .

ويمكن أن نستطرد فى استخدام النموذج إلى سؤال له أهميته : طالما أن فرض الضرائب يؤدى إلى نقصان مكرر الاستثمار ، فما هو الشرط أو الشروط الواجب توفرها حتى يكون مكرر الاستثمار أكبر من الواحد الصحيح ؟ للإجابة على هذا السؤال نكتب

$$\frac{1}{1 - c(1 - t)} > 1$$

ومنها

$$1 - c(1 - t) < 1$$

$$-c + ct < 0$$

أى أن

$$c - ct > 0$$

أو

$$c > ct$$

وهذا صحيح طالما أن $0 < t < 1$. أى أنه طالما أن معدل الضريبة أقل من ١٠٠ ٪ فإن مكرر الاستثمار يكون أكبر من الواحد الصحيح .

٤ . ٥ . تمارين :

تمرين ١ : الغرض من هذا التمرين تعويد الدارس على حل نماذج ا.و.ق وكذلك توضيح العلاقة بين مرونة العرض ومرونة الطلب وأثرهما على التقلبات فى الأسعار والكميات ودخول البائعين .

إذا كان منحنى العرض لسلعة زراعية هو $S = 3000 + 35p - 40R$ حيث S العرض بالطن ، p السعر بالجنيهات ، R المطر بالبوصة ، وإذا كان منحنى الطلب هو $D = 5000 - 145p + 0.01Y$ حيث D الطلب بالطن ، p السعر بالجنيهات ، Y الدخل القومى بالجنيهات ، فالمطلوب حساب التغيرات التى تطرأ على السعر والكمية والإيراد الذى يحصل عليه المزارعون من بيع هذه السلعة خلال الخمس سنوات التى تقلبت فيها حالة المطر كالتالى

$$R_1 = 10, \quad R_2 = 5, \quad R_3 = 20, \quad R_4 = 2, \quad R_5 = 30$$

حيث R_i ترمز للمطر فى السنة i ، بفرض أن الدخل القومى كان ثابتاً عند 1000 جنيه . قارن النتائج التى تحصل عليها فى هذه الحالة مع النتائج التى كانت ستحدث لو أن منحنى الطلب كان

$$D = 3837,16 - 15p + 0.01Y$$

استعن بالرسم لتوضيح النتائج التى تتوصل إليها .

تلميح : ناقش أولاً أثر تقلبات مستوى المطر على منحنى عرض السلع الزراعية والذى يتمثل فى انتقال المنحنى بأكمله يميناً أو يساراً – مع بقاء ميله ثابتاً – وتأثير ذلك على مرونة العرض ، وعلى تقلب السعر والكمية . ثم ناقش ثانياً أثر اختلاف مرونة طلب منحنى الطلب الأول عن الثانى (الثانى أقل مرونة من الأول) على التقلبات فى السعر والكمية والإيرادات . ويتضح أنه عندما تكون مرونتى العرض والطلب صغيرتين فإن التقلبات الخارجية كالطقس تؤدى إلى تقلبات كبيرة فى الكميات الثلاثة السابقة .

منحنى العرض ومستوى المطر :

$R_1 : S_1 = 3400 + 35\,p$

$R_2 : S_2 = 3600 + 35\,p$

$R_3 : S_3 = 3000 + 35\,p$

$R_4 : S_4 = 3720 + 35\,p$

$R_5 : S_5 = 2600 + 35\,p$

من الواضح أن التقلبات في الطقس - ممثلة في حالة المطر - تؤدي إلى انتقال منحنى العرض يمينا ويسارا - مع بقاء ميله ثابتاً. ومن المعلوم أنه كلما بعد منحنى العرض عن نقطة الأصل أي كلما انتقل ناحية اليمين كلما قلت مرونته عند كل مستوى للسعر.

لحساب الأسعار والكميات التوازنية والإيرادات الكلية ، فإننا نعوض عن قيمة الدخل في معادلة الطلب فتصبح

$$D = 5000 - 145\,P + 0.01\,(1000)$$
$$= 5010 - 145\,P.$$

وبحل المعادلتين - معادلة العرض ومعادلة الطلب - نحصل على قيم المجهولين D ، P في كل سنة

الأسعار والكميات التوازنية في حالة منحنى الطلب الأول .

		R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
السعر	p	9	8	11	7	13.4
التغير النسبي في السعر			(−11%)	(+37%)	(−36%)	(+91%)
الكمية	E=S=q	3713	3,874	3,391	3,970	30,68
التغير النسبي في الكمية			(−4%)	(−12%)	(+17%)	(−22%)
الإيراد	P.q.	33,209	30,347	37,664	28,456	41,074
التغير النسبي في الإيراد			(−8%)	(+24%)	(−24%)	(41%)

لاحظ أنه في حالة $R_1 = 10$ تكون مرونة العرض $E_S = 0.070$ ومرونة الطلب هو $E_d = -0.290$ وكلاهما يدل على ضعف مرونة العرض والطلب.

ـ لاحظ أن التغيرات النسبية فى الكمية صغيرة أصغر من التغيرات النسبية فى السعر ، وذلك لضعف مرونة العرض . ومعنى هذا أن المعروض يتم تصريفه عن طريق الاعتماد على تغيرات السعر .

ــ لاحظ أن التقلبات النسبية فى الإيراد أكبر من التقلبات النسبية فى الكمية والسعر .

ــ بالمثل تحسب الأسعار والكميات والإيراد التوازنى فى حالة منحنى الطلب الثانى

	R_1		R_2		R_3		R_4		R_5
السعر P	9		5		17		2.5		25
التغير النسبى فى السعر		(−44%)		(+240%)		(−85%)		(+900%)	
الكمية D=S=q	3713		3,775		3595		3310		3473
التغير النسبى فى الكمية		(+1%)		(−4%)		(+5%)		(−8%)	
الإيراد pq	33209		18875		61,115		9,683		86,627
التغير النسبى فى الإيراد		(−43%)		(+223%)		(−84%)		(+794%	

ــ لاحظ أن مرونة منحنى الطلب الجديد فى حالة التوازن الأول هى $E_d = -0.030$ وهى أقل من مرونة المنحنى السابق والتى كانت 0.290 — . ويتضح أثر انخفاض مرونة الطلب بمقارنة النتائج السابقة كالتالى :

ــ التغيرات التى تطرأ على السعر أكبر فى هذه الحالة عنها فى الحالة السابقة .

ــ التغيرات فى الكمية أقل مما كانت عليه فى الحالة السابقة .

ــ التغيرات فى الإيراد الكلى أكبر مما كانت عليه فى الحالة السابقة .

تمرين ٢ : احسب الإيراد المتوقع للخزانة العامة من فرض ضريبة غير مباشرة

مقدارها ٢٠ جنيهاً على كل طن تباع من سلعة منحنى عرضها $S = -10 + p$ وذلك في الحالتين التاليتين :

(أ) منحنى الطلب $D = 100 - p$

(ب) منحنى الطلب $D = 60 - 0{,}273\ p$

وفسر معنى النتائج التي تحصل عليها . (لاحظ أن منحنى الطلب الثاني أقل مرونة من منحنى الطلب الأول ، فمرونة الطلب في وضع التوازن بالمنحنى (أ) هي 1,22 بينما على المنحنى (ب) هي 0.2333) .

ملخص الحل :

	منحنى الطلب المرن (أ)			منحنى الطلب غير المرن (ب)		
	p	q	R	p	q	R
الوضع قبل فرض الضريبة	55	45		55	45	
الوضع بعد فرض الضريبة	65	35	700	71	40.7	814
التغير المطلق	+10	− 10		+16	− 4.3	
التغير النسبي	18%	22%		29%	9%	

حيث R = إيراد الضريبة ، q = الكمية المباعة ، p السعر بالجنيهات .

يلاحظ :

(أ) الارتفاع في السعر أقل من مقدار الضريبة في الحالتين .

(ب) الارتفاع في السعر أقل في حالة الطلب المرن (١٠ جنيهات) عنه في حالة الطلب غير المرن (١٦ جنيها) .

(جـ) النقص في المبيعات أكبر في حالة الطلب المرن (١٠ طن) عنه في حالة الطلب غير المرن (٤ طن)

(د) إيراد الضريبة أكبر فى حالة الطلب غير المرن (٨١٤ جنيها) عنه فى حالة الطلب المرن (٧٠٠ جنيها) .

تمرين ٣ . إذا كان منحنى الطلب على سلعة ما هو $D = 100 - p$ ومنحنى عرضها هو $S = -10 + p$ ، ناقش أثر منح إعانة لهذه السلعة مقدارها ٢٠ جنيها . ثم قارن النتائج التى تحصل عليها فى هذه الحالة بالحالة التى يكون فيها منحنى الطلب $D = 60 - 0.273\ p$. (لاحظ أن منحنى الطلب الأخير أقل مرونة من منحنى الطلب الأول كما فى التمرين السابق) .

ملخص الحل :

	منحنى الطلب المرن			منحنى الطلب غير المرن		
	p	q	R	p	q	R
الوضع الأصلى	55	45		55	45	
الوضع بعد منح الإعانة	45	55	1100	39	49	985
التغير المطلق	−10	+10		−16	+4	
التغير النسبى	−18%	+22%		−29%	+12%	

حيث R تكلفة الإعانة من وجهة نظر الحكومة ، q الكمية المباعة ، p السعر .

تمرين ٤ : إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هى $D = 5 - 0.5\ p$ ودالة العرض هى $S = -4 + p$ حيث D، S بالكيلو ، p بالقروش ، فأوجد أثر فرض ضريبة مقدارها قرش صاغ على كل وحدة منتجة على السعر . ماهو مقدار الضريبة الذى يمكن أن يرفع السعر الأصلى بمقدار قرشان ؟ وماهى قيمة الإعانة التى يمكن أن تخفضه بمقدار قرشان؟ ماهو أثر فرض ضريبة بنسبة ١٠٪ من سعر البيع ؟

الحل : السعر الأصلى = ٦ قروش ، السعر بعد فرض ضريبة مقدارها قرشان = ٦ر٦ قرشاً . الضريبة التى تلزم لرفع السعر بمقدار قرشان أى لجعل

السعر ٨ قروش هى ٢ قروش ، والإعانة التى تلزم لخفض السعر بمقدار قرشان أى لجعل السعر ٤ قروش هى أربعة/ثلاثة قروش . أما أثر فرض ضريبة بنسبة ١٠٪ على السعر فهو أن تصبح دالة العرض $S = -4 + 0.9\,p$ وفى هذه الحالة يصبح السعر بعد فرض الضريبة ٤٫٦ قروش .

تمرين ٥ : إذا كانت دالة الاستهلاك هى $C = 0.6\,y$ ، حيث C = الاستهلاك ، y = الدخل الكلى بملايين الجنيهات ، وكان حجم الاستثمار فى سنة معينة هو 120 مليون جنيه فأوجد :

(أ) الميل الحدى والمتوسط للاستهلاك ووضح معنى كل منهما .

(ب) مضاعف الاستثمار ، واشرح ماذا يعنى .

(ج) قيمة الدخل القومى فى هذه السنة .

(د) حجم الاستهلاك فى هذه السنة والسنة التى تليها بافتراض أن الدخل القومى ينمو سنوياً بمعدل ٣٪ .

ملخص الحل :

(أ) الميل الحدى والمتوسط للاستهلاك = 0,6

(ب) مضاعف الاستثمار = 2 1/2

(ج) $Y = 300$

(د) $C_t = 180$ $\quad C_{t+1} = 180.8$

تمرين ٦ : إذا كان معدل الانفاق الحكومى هو ٢٠٠ مليون جنيه سنوياً ،

ومعدل الاستثمار هو ٣٢٠ مليون جنيه سنوياً ودالة الاستهلاك هي $C = 0.6\, Y_d$ حيث C هو الاستهلاك القومي، Y_d الدخل الممكن التصرف فيه. ومعدل الضريبة على الدخل (القومي) هو ٢٠ ٪، فأحسب قيمة الدخل القومي والإيراد المتحصل من الضريبة، وقارن بين قيمة مكرر الاستثمار قبل فرض الضريبة وقيمته بعد فرضها.

الحل : الدخل القومي ١٠٠٠ مليون جنيه، والإيراد المتحصل من الضريبة هو ٢٠٠ مليون جنيه. مكرر الاستثمار انخفض من ٢٫٥ قبل فرض الضريبة إلى ١٫٩ بعد فرضها.

الفصل الثالث

الاساليب الرياضية المستخدمة فى هذا المقرر

الهدف من هذا الفصل هو تذكير الدارس ببعض الاساليب الرياضية التى يفترض أنه قد سبق له دراستها ، والتى سوف تستخدم فى الفصول القادمة من هذا المقرر . فنبدأ بقواعد التفاضل ثم النهايات العظمى والصغرى للدوال ذات المتغير المستقل الواحد . بعد ذلك نتعرض للتفاضل الجزئى والتفاضل الكلى ثم نلخص شروط النهايات العظمى والصغرى للدوال فى متغيرين مستقلين . ونظرا لان إيجاد القيم العظمى أو الدنيا للدوال فى أكثر من متغيرين يتطلب حل عدد كبير نسبياً من المعادلات الآنية ، فاننا نعطى فكرة سريعة عن المحددات والمصفوفات وطرق استخدامها فى حل المعادلات الآنية ثم نتبع ذلك بايراد شروط النهايات العظمى والصغرى للدوال فى n متغير يلى ذلك نبذة عن الدوال المتجانسة وأهم نظرياتها. وأخيرا نعطى فكرة عن دوال الفروق البسيطة وطريقة حلها . وقد راعينا عند تقديم كل موضوع أن نعطى عدداً من التطبيقات الاقتصادية الملائمة ، حتى يتعرف الدارس على بعض امكانيات استخدام الأساليب الرياضية المذكورة فى الاقتصاد ويمكن للدارس الملم بالأساليب الرياضية الواردة فى هذا الفصل ، ان يكتفى بدراسة تطبيقاتها الاقتصادية الموضحة فى الأمثلة والتمارين .

٣ - ١ . قواعد تفاضل الدوال ذات المتغير المستقل الواحد :

اذا كانت y دالة وحيدة القيمة لمتغير مستمر أو متصل هو X ، أى أن $y = f(X)$ فإن $\frac{dy}{dX}$ يسمى المعامل التفاضلى الاول أو المشتقة الاولى للدالة $f(X)$. وفى الحالة التى تكون فيها y دالة خطية لـ X .

$y = 10 + 3X$ مثلا فان $\frac{dy}{dX}$ تفسر على أنها ميل المستقيم الذى تعبر عنه هذه المعادلة ، أى أن $\frac{dy}{dx} = 3$ ومن المعلوم أن ميل المستقيم عبارة عن معدل

التغير فى y بالنسبة الى X وهى الكمية التى أشرنا اليها فيما سبق بالكسر $\frac{\Delta y}{\Delta X}$

والحقيقة أن $\frac{d y}{d X}$ عبارة عن القيمة التى تؤول اليها $\frac{\Delta y}{\Delta X}$ عندما تؤول ΔX الى الصفر أى أن

$$\frac{d y}{d X} = \lim_{\Delta X \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta X} \right)$$

٣ . ١ . ٠ — قواعد التفاضل :

وللتفاضل عدة قواعد عامة يمكن بواسطتها تقدير قيمة المعامل التفاضلى الاول ونلخصها فيما يلى :

(أ) إذا كانت y تساوى كمية ثابتة a ، أى أن $y = a$ فإن $\frac{d y}{d X} =$ صفر

(ب) إذا كانت $y = a f(X)$ حيث a ثابت فإن $\frac{d y}{d X} = a \frac{d}{d X} f(X)$

(ﺟ) إذا كانت $y = X^n$ حيث n ثابت ، فإن $\frac{d y}{d X} = nX^{n-1}$

مثلا : إذا كانت $y = X^2$ فإن $\frac{d y}{d X} = 2X$

وإذا كانت $y = \sqrt{X}$ فإن $\frac{d y}{d X} = \frac{1}{2} X^{-1/2}$ أى أن

$$\frac{d y}{d X} = \frac{1}{2\sqrt{X}}$$

وأخيرا

إذا كانت $y = X$ فان $\frac{d y}{d X} = 1$

(د) إذا كانت $y = u \pm v$ حيث كل من u و v دالة للمتغير X فان

$$\frac{d y}{d X} = \frac{d u}{d X} + \frac{d v}{d X}$$

وهذا هو المعامل التفاضلى الأول لحاصل جمع أو باقى طرح دالتين فى X

مثلا : إذا كانت $y = 12X^2 + X$ فان $\frac{dy}{dX} = 24X + 1$

وإذا كانت $y = 7X^3 - 2X^2$ فان $\frac{dy}{dX} = 21X^2 - 4X$

(هـ) إذا كانت $y = u . v$ حيث كلا من u , y دالة المتغير X ، فان

$$\frac{dy}{dX} = u . \frac{dv}{dX} + v . \frac{du}{dX}$$

وهذا هو المعامل التفاضلى الأول لحاصل ضرب دالتين فى المتغير X .

مثلا : إذا كانت $y = (X+1)(2X+5)$ فان

$$\frac{dy}{dX} = (X+1) . (2) + (2X+5)(1) = 4X + 7$$

(و)إذا كانت $y = \frac{u}{v}$ حيث كلا من u : v دالة فى المتغير X فان

$$\frac{dy}{dX} = \left(v . \frac{du}{dX} - u . \frac{dv}{dX} \right) / v^2$$

وهذا هو المعامل التفاضلى الأول لخارج قسمة دالتين فى المتغير X .

مثلا : إذا كانت $y = \frac{6X^2}{3X+1}$ فان $\frac{dy}{dX} = \frac{54X^2 + 12X}{(3X+1)^2}$

إذا كانت $y = f(z)$ و $z = \phi(X)$ فان

$$\frac{dy}{dX} = \frac{dy}{dz} . \frac{dz}{dX}$$

وتسمى هذه القاعدة بقاعدة تفاضل دالة الدالة . ويمكن تعميم هذه القاعدة على أى عدد من المتغيرات بمعنى أنه اذا كانت $v = f_3(w)$, $u = f_2(v)$,
$y = f_1(u)$ $w = f_4(X)$,

فان

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dv} . \frac{dv}{dw} . \frac{dw}{dX}$$

مثلا اذا كانت $y = (X^2 + 2X + 10)^3$ فان $\frac{dy}{dX} =$

$3(X^2 + 2X + 10)^2 (2X + 2) = 6(X^2 + 2X + 10)^2 (X + 1)$

(خ) اذا كانت $y = f(X)$ وكنا نريد الحصول على المعامل التفاضلي الأول

الدالة العكسية $X = g(y)$ فانه يمكن الحصول على $\frac{dX}{dy}$ من $\frac{dy}{dX}$ كالتالى

$$\frac{dX}{dy} = 1 / \left(\frac{dy}{dX} \right)$$

وتسمى هذه القاعدة بقاعدة الدالة العكسية

مثلا : اذا كانت $X = y^4 + 3y$ فان

$$\frac{dy}{dX} = 1 / \left(\frac{dX}{dy} \right) = \frac{1}{4y^3 + 3}$$

(ط) اذا كانت $y = e^X$ أى أن y دالة أسية للمتغير X ، فان

$$\frac{dy}{dX} = e^X$$

(ى) اذا كانت $y = e^{f(X)}$ فان

$$\frac{dy}{dX} = e^{f(X)} \cdot \frac{d}{dX} [f(X)]$$

مثلا : اذا كانت $y = e^{aX + b}$ فإن $\frac{dy}{dX} = a \cdot e^{aX + b}$

واذا كانت $y = (aX^2 + bX) e^X$ فان

$$\frac{dy}{dX} = (aX^2 + bX) e^X + e^X (2ax + b)$$

$$= (aX^2 + bX + 2aX + b) e^X$$

(ن) اذا كانت $y = a^X$ فان $\frac{dy}{dX} = a^X \log_e a$

(ل) إذا كانت $y = \log_e X$ أى أن y دالة لوغاريتمية للمتغير X

فان $\frac{dy}{dX} = \frac{1}{X}$

مثلا : إذا كانت $y = \log(aX + b)$ $\frac{dy}{dX} = \frac{a}{aX + b}$

(م) إذا كانت $y = \log_a X$ فان $\frac{dy}{dX} = \frac{1}{X} \log_a e$

وذلك لان $\log_a X = \log_e X \cdot \log_a e$

٢ . ١ . ٣ - أمثلة على المعامل التفاضلى الاول :

(أ) احسب مرونات الطلب لكل من دوال الطلب الآتية :

$$a)\ q = \frac{a - p}{b} \qquad b)\ q = ae^{-bp} \qquad c)\ q = \frac{a - \sqrt{p}}{b}$$

حيث q تمثل الكمية المطلوبة من السلعة و p سعرها

الحل : تعريف مرونة الطلب $F = \frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q}$

أى أننا لابد وأن نحسب قيمة المعامل التفاضلى الاول لدالة الطلب حتى نعرف قيمة المرونة من الدالة (a) : $\frac{dq}{dp} = \frac{1}{b}\frac{d}{dp}(a - p) = -\frac{1}{b}$

إذن المرونة هى $E = -\frac{p}{b \cdot q}$

أى أن المرونة دالة خطية فى الكمية المطلوبة وسعر السلعة .

من الدالة (b) :

$$\frac{dq}{dp} = a\frac{d}{dp}(e^{-bp}) = a\,e^{-bp}(-b) \quad -b \cdot q$$

أى أن المرونة هى $E = -b \cdot q \cdot \frac{p}{q} = - \cdot p$

دالة خطية فى سعر السلعة فقط

من الدالة (c) :

$$\frac{dq}{dp} = \frac{d}{dp}\left(a - \sqrt{p}\right) = \frac{-\frac{1}{2} p^{\frac{1}{2}}}{b} = \frac{-1}{2b\sqrt{p}}$$

ومن ثم فالمرونة هى
$$E = \frac{-1}{2b\sqrt{p}} \cdot \frac{p}{q} = \frac{-\sqrt{p}}{2bq}$$

أى أن المرونة فى هذه الحالة دالة غير خطية فى السعر كالكمية المطلوبة تماماً .

(ب) فى مناقشتنا لأثر فرضة الضريبة على الإنتاج لاحظنا أن السعر بعد فرضة الضريبة (معادلة (٧) فى الفصل الثانى) هو :

$$P = \left(\frac{a - c}{d - b}\right) + \left(\frac{d}{d - b}\right)$$

بأخذ المعامل التفاضلى الأول للسعر p بالنسبة للضريبة t

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{d - b}$$

وطالما أن $0 < d$ ، $0 > b$ فان $\frac{d}{d-b} > 0$. أى أن معدل تغير السعر بالنسبة للضريبة موجب ، بمعنى أن زيادة الضريبة تؤدى إلى زيادة السعر . بالمثل لاحظنا أن الكمية المباعة بعد فرضة الضريبة (معادلة (١٤) فى الفصل الثانى) هى

$$q = a + b\left(\frac{a - c}{d - b}\right) + \left(\frac{c}{d - b}\right)t$$

ولمعرفة أثر فرض الضريبة على الكمية نأخذ المعامل التفاضلى للكمية بالنسبة للضريبة:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{bd}{d - b}$$

وحيث أن $\frac{d}{d-b}$ موجبة ، b سالبة فان $\frac{dq}{dt}$ سالب. أى أن زيادة معدل الضريبة تؤدى إلى انخفاض الكمية المباعة .

٤ : ٢٠ : ٣ - المعامل التفاضلى الثانى :

المعامل التفاضلى الثانى للدالة $y = f(X)$ عبارة عن تفاضل المعامل التفاضلى الأول بالنسبة للمتغير المستقل X ، أى أن $\frac{d}{dX}\left(\frac{dy}{dX}\right)$ ويكتب هكذا $\frac{d^2y}{dX^2}$

وإذا كان المعامل التفاضلى الأول يقيس معدل التغير فى y ، فان المعامل التفاضلى الثانى يقيس معدل التغير فى $\frac{dy}{dX}$ بالنسبة للمتغير X ، أى أنه يقيس معدل تغير معدل التغير للدالة $f(X)$.

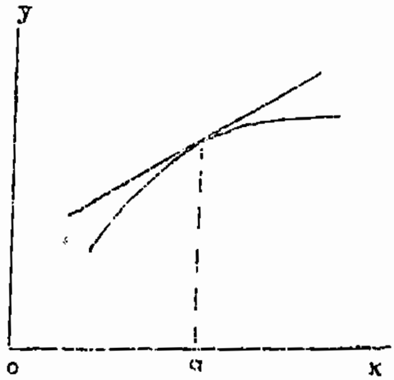
وحيث أن $\frac{dy}{dX}$ يقيس ميل المنحنى $f(X)$ عند نقطة معينة ، فان $\frac{d^2y}{dX^2}$ تقيس معدل تغير الميل . أى ما إذا كان يتجه إلى التزايد أو التناقص أو يظل ثابتاً كلما زادت X . بعبارة أخرى ، توضح $\frac{d^2y}{dX^2}$ ما إذا كان المنحنى ينحنى إلى أعلى أو إلى أسفل فى اتجاه اليمين ويستفاد بذلك من إشارة $\frac{d^2y}{dX^2}$ عند أى نقطة $X=a$:

(أ) إذا كانت $\frac{d^2y}{dX^2} > o$ فان ذلك يعنى أن الدالة $f(X)$ تتغير بمعدل متزايد كلما زادت x وأن منحنى $y = f(X)$ يكون محدبا convex إذا نظر إلية من أسفل عند النقطة $x=a$.

(ب) إذا كانت $\frac{d^2y}{dX^2} < o$ فان ذلك يعنى أن الدالة $f(X)$ تتغير بمعدل متناقص كلما زادت x وأن المنحنى $y = f(x)$ يكون مقعرا concave اذا نظر اليه من أسفل عند النقطة $x = a$

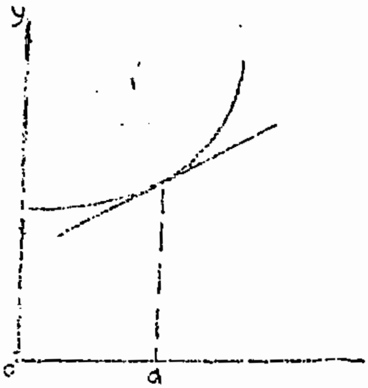
(ﺟ) اذا كانت $\frac{d^2y}{dx^2} = o$ فان الدالة $f(x)$ تتزايد أو تتناقص بمعدل ثابت

وتوضح الرسوم التالية (شكل رقم ١) الحالات المختلفة للمعامل التفاضلى الثانى :



شكل رقم (١ · أ)

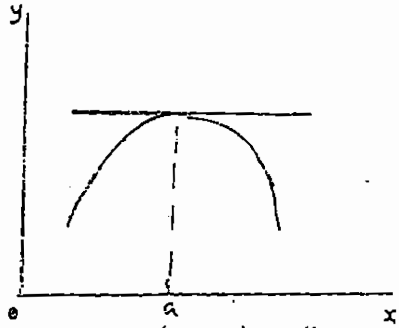
$\frac{d^2y}{dx^2} < ٥$



شكل رقم (١ · ب)

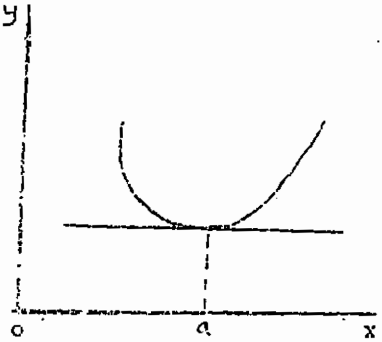
$\frac{d^2y}{dx^2} > ٥$

(جـ) اذا كان الميل صفرا $\frac{d^2y}{dx^2}$ = د



شكل رقم (١ · جـ)

$\frac{d^2y}{dx^2} < ٥$



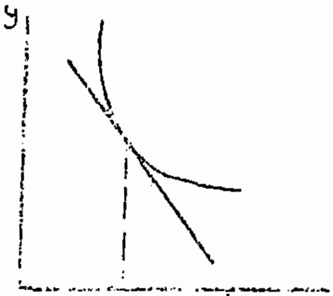
شكل رقم (١ · د)

$\frac{d^2y}{dx^2} > ٥$

(هـ) اذا كان الميل سالبا $\frac{dy}{dx}$ > ٥

شكل رقم (١ · هـ)

$\frac{d^2y}{dx^2} < ٠$



شكل رقم (١ · و)

$\frac{d^2y}{dx^2} > ٥$

مثال اقتصادى :

افرض أن دالة الطلب على سلعة ما هى الدالة الخطية

$$P = a - bq \qquad (1)$$

حيث p السعر ، q الكمية المطلوبة ، وحيث a ,b ثابتين موجبين .

الإيراد الكلى R المتحصل من بيع q وحدة من السلعة بالسعر p هو

$$R = p.q = (a - bq)\, q = aq - bq^2 \qquad (2)$$

ومن (2) يتضح أن الإيراد المتوسط هو

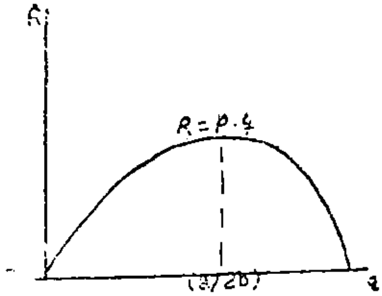
$$AR = \frac{aq - bq^2}{q} = a - bq = p \qquad (3)$$

أى أن الإيراد المتوسط يساوى السعر نفسه . ومن الواضح أن دالة الطلب (١) هى نفسها دالة الإيراد المتوسط .

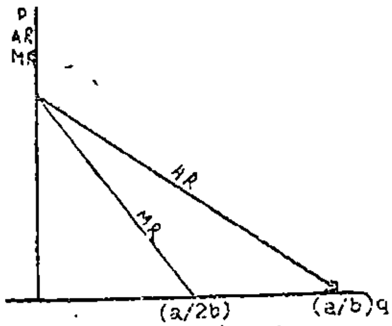
ويمكن حساب الإيراد الحدى MR ، أى التغير فى الإيراد الكلى الذى ينتج من زيادة المبيعات بكمية ضئيلة ، بأخذ المعامل التفاضلى الأول لدالة الإيراد الكلى (2):

$$MR = \frac{dR}{dq} = \frac{d}{dq}(aq - bq^2) = a - 2bq . \qquad (4)$$

ومن الواضح أن هذه معادلة خط مستقيم ميله $-2b$



شكل رقم (٢ - أ)



شكل رقم (٢ - ب)

وبمقارنة المعادلة (3) والمعادلة (4) يتضح أن ميل منحنى الإيراد الحدى ضعف

ميل منحنى الإيراد المتوسط . ذلك أن ميل منحنى الإيراد الحدى MR هو

$$(5) \qquad \frac{d\,(MR)}{dq} = -2b$$

بينما ميل ميل منحنى الإيراد للمتوسط AR هو

$$(6) \qquad \frac{d\,(AR)}{dq} = -b$$

كذلك يلاحظ أن الميل فى الحالتين $< o$ وهذا يعنى أن هذين المنحنين ينحدران إلى أسفل من اليسار إلى اليمين وأن الإيراد الحدى والمتوسط ينخفضان مع زيادة q . لاحظ أيضاً أن كلا من هذين المنحنين يقطع المحور الرأسى (محور السعر والإيراد) فى نفس النقطة . أى أنه عندما تكون q تساوى صفر ، فان

$$AR = p = MR = a$$

وحيث أن المعامل التفاضلى الاول لكل من الإيراد الحدى والإيرادالمتوسط ثابتا عند b — و2b— على التوالى ، فإن معنى هذا أن كلاهما يتناقص بمعدلثابت. أى أن كل وحدة منتجة أو مباعة من السلعة تؤدى إلى نقص الإيراد المتوسط بمقدار b ونقص الإيراد الحدى بمقدار 2b . وهذه نتيجة يمكن الوصول إليها بأخذ تفاضل المعامل التفاضلى الأول فى (5) ، (6) :

$$(7) \qquad \frac{d^2\,(MR)}{dq^2} = \frac{d^2\,(AR)}{dq^2} = o$$

لاحظ أن الإيراد الحدى يكون موجباً حتى النقطة التى تساوى عندها q المقدار $\frac{a}{2b}$ حيث يصبح MR عند هذه النقطة صفرا .

$$(8) \quad MR = a - 2bq = a - 2b\left(\frac{a}{2d}\right) = o$$

وبعد ذلك تؤدى زيادة المبيعات إلى نقص الإيراد الكلى . أما منحنى الإيراد المتوسط AR فانه يعطى قيما موجبة حتى النقطة التى تساوى عندها q المقدار $\frac{a}{b}$ حيث يصبح AR صفرا عند هذه النقطة .

$$(9) \qquad AR = a - bq = a - b\left(\frac{a}{b}\right) = o$$

وبعد ذلك تؤدى زيادة المبيعات إلى نقص الإيراد الكلى . من ذلك يتضح أن منحنى الإيراد الحدى يقطع المحور الأفقى عند منتصف المسافة بين نقطه الأصل ونقطة تقاطع منحنى الإيراد المتوسط مع المحور الأفقى .

ويوضح الشكل رقم (٢) صورة المنحنيات الثلاثة : منحنى الإيراد الكلى ، منحنى الإيراد الحدى ، ومنحنى الإيراد المتوسط .

مثال آخر : فى مناقشتنا لأثر فرض ضرائب دخل على مكرر الاستثمار فى الفصل السابق وجدنا أن مكرر الاستثمار بعد فرض الضرائب هو

$$M = \frac{1}{1 - c\,(1 - t\,)}$$

(معادلة (14) فى الفصل الثانى)

وقد لاحظنا هناك أن فرض ضرائب على الدخل يؤدى إلى تناقص مكرر الاستثمار، ويمكن الحصول على هذه النتيجة مباشرة بأخذ تفاضل M بالنسبة t كالتالى:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{-1\,(c\,)}{\left[1 - c\,(1 - t\,)\right]^2} = \frac{-c}{M^2}$$

وحيث أن كلا من c , M^2 موجب . فإن $\frac{dM}{dt}$ يكون سالبا :

$$\frac{dM}{dt} < 0$$

أى أن مكرر الاستثمار يتناقص كلما زاد معدل الضريبة على الدخل .

٢٠٣ — النهايات العظمى والصغرى للدال ذات التغير المستقل الواحد :

يقال إن الدالة $y = f\ (x)$ لها نهاية عظمى بمعنى أنها تبلغ أقصى قيمة لها عند نقطة معينة عندما تكون قيمة الدالة عند هذه النقطة أكبر من كل القيم المجاورة لها. وبالمثل يقال أن للدالة $y = f\ (\ x\ )$ نهاية صغرى ، بمعنى أنها تبلغ أدنى قيمة لها عند نقطة معينة عندما تكون قيمة الدالة عند هذه النقطة أصغر من كل القيم المجاورة لها. والشرط الضرورى لتحقق نهاية عظمى أو صغرى الدالة $y=f(\ x\ )$ هو أن يكون :

$$\frac{dy}{dx} = 0 \qquad (1)$$

أما الشرط الكافى لتحقق نهاية عظمى فهو : $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ (2)

والشرط الكافى لتحقيق نهاية صغرى فهو : $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ (3)

أما إذا كانت $\frac{d^2y}{dx^2}$ تساوى صفر ، فانه يقال أن الدالة ليست لها نهاية عظمى أو صغرى عند النقطة المعنية وتسمى بنقطة الانقلاب (٢)

مثال : باستخدام دالة الإيراد الكلى المستخدمة فى القسم السابق من هذا الفصل، أى $R = aq - bq^2$

يمكن أن نتحقق مما اذا كان لهذه الدالة نهاية عظمى أم لا ، ونوجد شروط تحقق هذه النهاية كالتالى :

الشرط الضرورى لوجود نهاية عظمى لدالة الإيراد الكلى هو

$$\frac{dR}{dq} = a - 2bq = 0$$

أى أن يكون الإيراد الحدى dR صفرا : وهذا معناه اشتراط أن

$$a = 2bq$$

أى أن نقطة النهاية العظمى للايراد الكلى هى تلك النقطة التى تكون عندها

$$q = \frac{a}{2b}$$

أما الشرط الكافى للنهاية العظمى فهو

$$\frac{d^2R}{dq^2} = -2b < 0$$

وحيث أن b موجبة فان هذا الشرط متحقق فعلا . اذن دالة الإيرادالكلى لها نهاية عظمى عند النقطة $q = \frac{a}{2b}$ ، كما فى الشكل (٢ ـ أ) . وهذه القيمة القصوى للايرادهى $R = p \cdot q = (a - bq)\left(\frac{a}{2b}\right)$

$$= \left(a - \frac{ab}{2b}\right)\left(\frac{a}{2b}\right) = \frac{a^2}{4b}$$

لتوضيح معنى كون الشرط ضروريا أو كونه كافياً لتأمل المتباينة

$$3 < x + 3 \leq 10$$

يلاحظ أنه لكي تتحقق هذه المتباينة ، فإنه من الضروري أن تكون $x > 0$ حيث أن المتباينة لا يمكن أن تتحقق لأية قيمة للمتغير تساوى صفراً أو أقل من صفر.
لكنه ليس شرطاً كافياً أن تكون $x > 0$ لكي تتحقق هذه المتباينة حيث أن $x=8$ مثلا لن تحقق المتباينة . وعليه فن الضرورى أن تكون $x \leq 7$ لكنه ليس شرطاً كافياً حيث $x=0$ مثلا لن تتحقق المتباينة كما سبق ذكره .
أخيرا يلاحظ أن كلا من الشرطين الضروريين لا يعتبر شرطاً كافياً لتحقق المتباينة.
وهكذا يتضح أن :

(أ) $x > 0$ يعتبر شرطا ضروريا لتحق المتباينة .

(ب) $x \leq 7$ » » » » »

(ح) $0 < x \leq 7$ يعتبر شرطاً ضرورياً وكافياً لتحقق المتباينة .

مثال آخر : فى مناقشتنا لأثر فرض ضريبة إنتاج على سلعة من السلع (٢ ٢)
وجدنا أن حجم المبيعات بعد فرض الضريبة هو $q = \frac{ad-bc}{d-b} + \left(\frac{d\ b}{d-b} \right) t$

والسؤال الذى سنحاول الاجابة عليه الآن هو : ماهو معدل الضريبة الذى يضمن الوصول بحصيلتها إلى أقصى ما يمكن : أى ماهى قيمة t التى تعظم حصيلة الضرائب T حيث

$$T = t \cdot q$$
$$= \left(\frac{ad - bc}{d - b} \right) t + \left(\frac{d\ b}{d-b} \right) t^2$$

لإيجاد النهاية العظمى لهذه الدالة نساوى المعامل التفاضلى الأول لـ T بالنسبة لـ t بالصفر :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{ad - bc}{d - b} + 2 \left(\frac{db}{d-b} \right) t = 0$$

أى أن

$$t = \frac{bc - ad}{2\ db}$$

وللتحقق من أن هذه القيمة تجعل T أكبر مايمكن نحسب

$$\frac{d^2T}{dt^2} = 2 \left(\frac{d\ b}{d-b} \right)$$

وحيث أن $d < 0$ $b > 0$ فان بسط الكسر على يمين المعادلة السابقة سالب ومقامة موجب . ولذا فان $\frac{d^2 T}{dt^2} < 0$ وهذا شرط كاف لوجود نهاية عظمى لدالة حصيلة الضرائب .

٣٠٣ – التفاضل الجزئى لأدوال ذات المتغيرات المستقلة العديدة :

يلاحظ أن كل الدوال التى استخدمناها حتى الآن فى هذا الفصل كانت دوال لمتغير مستقل واحد مثل $y = f(x)$ ولكننا سنجد فى حالات عديدة أن هناك أكثر من متغير مستقل يشترك فى تحديد قيمة المتغير التابع . مثلا $y = f(x, z)$ أو $y = (x_1, x_2, x_3)$ ولايجاد المعاملات التفاضلية لمثل هذه الدوال فاننا نتبع نفس القواعد السابق ذكرها فى ٣٠٢ . كل ما فى الامر أن عندما تفاضل بالنسبة لأحد المتغيرا فى الدالة فاننا نفترض أن باقى المتغيرات تظل ثابتة لاتتغير قيمتها ، وإن المعامل التفاضلى الجزئى الاول يكتب هكذا $\frac{\partial y}{\partial x}$ فى حالات ثبات باقى المتغيرات فى الدالة ، وإن المعامل التفاضلى الجزئى الثانى يكتب هكذا $\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}$

بافتراض ثبات باقى المتغيرات المستقله ويفسر $\frac{\partial y}{\partial x_1}$ على أنه معدل التغير فى y بالنسبة لـ x_1 أى التغير فى y الناتج من تغير طفيف جدا فى x_1 ، مع ثبات كل المتغيرات المستقلة الاخرى . كذلك يفسر $\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}$ على أنه معدل التغير فى

$\frac{\partial y}{\partial x_1}$ بالنسبة لـ x_1.

مثال : أوجد المرونات السعرية والدخلية للطلب على سلعة منحنى طلبها هو

$$D_1 = a + b_1 p_1 + b_2 b_1^2 + cy + d_1 p_2 + d_2 p_2^2$$

حيث D_1 هى الكمية المطلوبة من السلعة ، p_1 سعرها ، p_2 سعر سلعة بديله ، y الدخل القومى .

الحل : المرونة السعرية الذاتية للطلب هى

$$E_{11} = \frac{\partial D_1}{\partial p_1} \cdot \frac{p_1}{D_1} = (b_1 + 2b_2\ p_1) \frac{p_1}{D_1}$$

المرونة الداخلية للطلب هى
$$E_{1y} = \frac{\partial D_1}{\partial y} \cdot \frac{y}{D_1} = c \cdot \frac{y}{D_1}$$

المرونة المقطعية للطلب هى

$$E_{12} = \frac{\partial D_1}{\partial p_2} \cdot \frac{p_2}{D_1} = (d_1 + 2p_2) \frac{p_2}{D_1}$$

ومن الواضح أن المرونات كلها تتوقف على مستوى الطلب D_1 هذا بالاضافة إلى سعر السلعة فى حالة المرونة السعرية الذاتية ، الدخل فى حالة المرونة الدخلية ، وسعر السلعة البديلة فى حالة المرونة المقطعية .

مثال آخر : قارن الحالة السابقة بالحالة التى تأخذ فيها دالة الطلب الشكل التالى :

$$D_1 = ap_1^{b1}\ p_2^{b2}\ y^c$$

فى هذه الحالة توجد المرونة السعرية الذاتية كالتالى

$$E_{11} = \frac{\partial D_1}{\partial p_1} \cdot \frac{p_1}{D_1} = (a\ p_1\ b_1\ b_1 - I\ p_2^{b2}\ y^c) \cdot \frac{p_1}{D_1}$$

$$= b_1 \frac{(a\ p_1^{b_1}\ p_2^{b2}\ y^c)}{p1} \cdot \frac{p_1}{D_1} = b_1$$

بالمثل توجد المرونة الدخلية

$$E_{1y} = \frac{\partial D_1}{\partial y} \cdot \frac{y}{D_1} = \frac{(a,\ p_1^{b1} p_2^{b_2}\ y^c)}{y} \cdot \frac{y}{D_1} = c$$

$$= \frac{c\ ap_1^{b1}\ b_2^{b_2}\ y^c)}{y} \cdot \frac{y}{D_1} = c$$

والمرونة المقطعية

$$E_{12} = \frac{\partial D_1}{\partial p_2} \cdot \frac{p_2}{D_1} = (ab_2 p1^{b1}\ p_2^{b2-1}\ y^c) \cdot \frac{p_2}{D_1}$$

$$=\frac{b_2\,(a p_1^{b_1} p_2^{b_2} y^{c})}{p_2}\cdot\frac{p_2}{D_1}=b_2$$

أى أن المرونات كلها ثابته ولا تتوقف على مستوى الطلب أو سعر السلعة أو سعر السلعة البديله أو مستوى الدخل القومى ، على خلاف الحالة السابقة والتى وجدنا المرونة تتأثر بمستوى الطلب و/أو مستوى الاسعار و/أو مستوى الدخل.

٤ . ٠ ٣ - بعض قواعد التفاضل الكلى :

رأينا فيما تقدم ، أنه فى حالة التفاضل الجزئى الدالة $y = f(x_1, x_2)$ كان السؤال المطروح هو : ماهو معدل تغير y إذا تغيرت x_1 مع بقاء x_2 ثابتاً ، أو معدل تغير y إذا تغيرت x_2 مع بقاء x_1 ثابتاً ولكن هناك سؤال آخر له أهميته وهو : ماهو مقدار التغير فى y الذى ينتج من تغيير كل من x_1 ، x_2 تغيرا طفيفاً فى آن واحد ؟ ، مثلا إذا تغير x_1 بمقدار dx_1 وتغير x_2 بمقدار dx_2 فما هو مقدار التغير الذى يطرأ على y ، أى dy ؟ ويسمى dy التفاضل الكامل أو التفاضل الكلى للدالة y ويمكن التعبير عنه بدلالة كل من dx_1 ، dx_2 والمعاملات التفاضلية الجزئية الاولى

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} \quad و \quad \frac{\partial y}{\partial x_1}$$

كالتالى :

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1}\cdot dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2}\cdot dx_2$$

وقواعد التفاضل الكلى تشبه الى حد كبير قواعد التفاضل السابق شرحها ، ويمكن تلخيص أهم هذه القواعد كما يلى :

اذا كان كل من u ، v دالة فى x ، y : أى أن $u = f_1(x,y)$ ، $v = f_2(x,y)$ فانه يمكن تقرير النتائج التالية :

$$d(u \pm v) = du \pm dv \qquad (a)$$

$$d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du \qquad (b)$$

$$d(u/v) = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2} \qquad (c)$$

والتفاضل الكلى أهمية خاصة فى عدد من النظريات الاقتصادية مثل نظرية سلوك المستهلك ونظرية سلوك المنتج، وهو ذو علاقة وثيقة بموضوع الإحلال[1].

مثال: إذا كانت دالة المنفعة للمستهلك ماهى $U=f(q_1, q_2)$ حيث U هى المنفعة الكلية المشتقة من استهلاك الكميتين q_1 ، q_2 من سلعتين ك١ ، ك٢ ، فإن الزيادة فى المنفعة الكلية التى تترتب على تغير استهلاك كل من السلعتين بكميات ضئيلة هى التفاضل الكلى لدالة المنفعة ،أى .

$$dU = \frac{\partial U}{\partial q_1} \cdot dq_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2} \cdot dq_2$$

أى أن الزيادة فى المنفعة الكلية المترتبة على الاستهلاك ك١ و ك٢ على التوالى بالمقادير dq_1 ، dq_2 عبارة عن حاصل جمع التغير فى استهلاك السلعة الأولى مضروباً فى منفعتها الحدية والتغير فى استهلاك السلعة الثانية مضروباً فى منفعتها الحدية. وإذا افترضنا أن مستوى المنفعة الكلية ثابت عند مستوى معين U ، فإن dU تساوى الصفر فى هذه الحالة ، وتصبح المعادلة السابقة معادلة منحنى سواء[2].

$$dU = \frac{\partial U}{\partial q_1} \cdot dq_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2} \cdot dq_2 = 0$$

ومنحنى السواء عبارة عن المنحنى الذى يصل بين جميع النقط (q_1, q_2) التى تعطى للمستهلك نفس مستوى المنفعة الكلية ويأخذ هذا المنحنى الشكل المبين فى شكل رقم (١) بالفصل الرابع . وبتأمل هذا الشكل يتضح أنه لا يمكن للمستهلك أن يحصل على المزيد من سلعة الا اذا تنازل عن شيء من السلعة الاخرى لكى يظل متمتعاً بنفس الاشباع . بعبارة أخرى فانه تحدث عملية احلال لكمية من سلعة محل كمية من السلعة الأخرى ، بحيث تكون الزيادة فى المنفعة المترتبة على زيادة استهلاك ك١ مثلا مساوية تماماً للنقص فى المنفعة المترتب على نقصان الكمية المستهلكة من السلعة ك٢ أى أن $\frac{\partial U}{\partial q_1} dq_1 = -\frac{\partial U}{\partial q_2} \cdot dq_2$

ومنها يمكن أن نكتب

---

(١) الاحلال Substitution

(٢) منحنى سواء Indifference curve

$$\frac{-dq_2}{dq_1} = \frac{\delta U / \delta q_1}{\delta U / \delta q_2}$$

ويسمى $\frac{-dq_2}{dq_1}$ بالمعدل الحدى لإحلال السلعة ك٢ محل السلعة ك١ (١) ومن الواضح أنه يساوى النسبة بين المنفعتين الحديتين للسلعتين المعينتين وهذه الكمية سوف تحتل جزءا كبيرا من اهتمامنا فى الفصل القادم عندما ندرس السلوك الاقتصادى للمستهلك .

التفاضل الكلى للدالة الضمنية :

إذا كان لدينا دالة ضمنية مثل $f(X,y) = 0$ فإن التفاضل الكلى يساعدنا على إيجاد قيمة كل من المعامل التفاضلى الأول $\frac{dy}{dX}$ أو $\frac{dX}{dy}$ مباشرة بدلا من تحويل الدالة إلى دالة صريحة . فالتفاضل الكلى للدالة $f(X,y) = 0$ هو

$$\frac{\delta f}{\delta X} \cdot dX + \frac{\delta f}{\delta y} dy = 0$$

ومن ثم فإنه بإعادة ترتيب الحدود يمكن أن نحصل على

$$\frac{dX}{dy} = -\frac{\delta f / \delta y}{\delta f / \delta X} \qquad \frac{dy}{dX} = -\frac{\delta f / \delta X}{\delta f / \delta y}$$

أما إذا كان هناك أكثر من متغيرين فى الدالة كما فى حالة الدالة $f(x,y,z) = 0$ فإن

$$\frac{\delta f}{\delta X} dX + \frac{\delta f}{\delta y} \cdot dy + \frac{\delta f}{\delta z} \cdot dz = 0$$

ويمكن فى هذه الحالة الحصول على المشتقة الجزئية $\frac{\delta z}{\delta X}$ بحساب النسبة $\frac{dz}{dX}$ عندما تكون y ثابتة عند $\overline{y}$ فإذا عوضنا عن dy بالصفر فى المعادلة السابقة وأعدنا ترتيب الحدود فإننا نحصل على

$$\frac{\delta z}{\delta X} = \left(\frac{dz}{dX}\right)_{\overline{y}} = -\frac{\delta f / \delta X}{\delta f / \delta z}$$

وبالمثل يمكن أن نحصل على $\frac{\delta z}{\delta y}$ كالتالى

$$\frac{\delta z}{\delta y} = \left(\frac{dz}{dy}\right)_{\overline{X}} = -\frac{\delta f / \delta z}{\delta f / \delta y}$$

(١) المعدل الحدى للاحلال Marginal Rate of Substitution

٥٠٣ — النهايات العظمى والصغرى للدوال في متغيرين مستقلين :

افرض أن $z = f(X, y)$ فان الشروط الضرورية لحدوث نهاية عظمى وصغرى لهذه الدالة هي :

$$\frac{\partial z}{\partial X} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

والشروط الكافية لحدوث نهاية عظمى هي

(أ)
$$\frac{\partial^2 z}{\partial X^2} , \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} > 0$$

(ب)
$$\frac{\partial^2 z}{\partial X^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} > \left(\frac{\partial^2 z}{\partial X \partial y} \right)^2$$

أما الشروط الكافية لحدوث نهاية صغرى فهي

(أ)
$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial X^2} , \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} > 0 \right.$$

(ب)
$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial X^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) > \left(\frac{\partial^2 z}{\partial X \partial y} \right)^2$$

لاحظ أنه عندما تكون
$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial X^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) < \left(\frac{\partial^2 z}{\partial X \partial y} \right)^2$$

فانه النقطة تسمى نقطة انقلاب وعندما يكون

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial X^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial X \partial y} \right)^2$$

فان النقطة قد تكون نهاية عظمى أو صغرى ، وقد لاتكون . وتحديد طبيعة النقطة يتطلب في هذه الحالة معلومات إضافية عن الدالة .

ويتضح من تأمل الشروط الضرورية لحدوث نهاية عظمى أو صغرى للدالة $z = f(X,y)$ أنه لدينا معادلتان يمكن حلهما سويا أى آنيا لتحديد قيمة المجهولين X,y التي تتحقق عندهما قيمة صغرى أو عظمى للدالة ، ويمكن حساب أصغر أو أكبر قيمة للدالة z بالتعويض عن قيمتي X,y في الدالة نفسها .

مثال : أوجد قيمة y،X التى تجعل قيمة z نهاية عظمى أو صغرى بافتراض أن

$$z = 2x + y - x^2 + xy - y^2)$$

الشروط الضرورية لتحقق نهاية عظمى أو صغرى هى

$$\frac{\partial z}{\partial X} = 2 - 2X + y = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 1 + X - 2y = 0$$

وبحل هاتين المعادلتين بطريقة التعويض سوف نجد أن

$$X = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3} \qquad y = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

وبالتعويض عن قيمة y،X فى الدالة المعطية نحصل على قيمة z وهى

$$z = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$$

وللتعرف على طبيعة النقطة التى حددناها ، نوجد المشتقات الجزئية الثانية :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial X^2} = -2$$

أى أن كلا من هاتين المشتقتين سالب . أضف إلى ذلك أن

$$\frac{\partial^2 z}{\partial X \partial y} = 1$$

ومن ثم فان

$$\frac{\partial^2 z}{\partial X^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4 > \left(\frac{\partial^2 z}{\partial X \partial y} \right)^2 = 1$$

وهذه شروط كافية للقول بأن للدالة نهاية عظمى قيمتها $2\frac{1}{3}$ عندما تكون قيمة y $1\frac{1}{3}$ وقيمة X $1\frac{1}{3}$.

من الواضح أن حل المعادلات التى تمثل الشروط الضرورية للنهاية العظمى أو الصغرى للدالة السابقة كان سهلا لأن المشكلة لم تتضمن أكثر من معادلتين . ولكن المشكلة تزداد تعقيداً عندما يكون هناك عدد كبير من المعادلات التى يتعين حلها آنيا . فاذا كان لدينا n متغيرات مستقلة فى الدالة المراد تحديد نهاية عظمى أوصغرى لها ، فانه يتعين فى هذه الحالة حل n معادلات آنية سوياً ، وهذه عملية ليس من السهل إنجازها بطريقة التعويض . ولكن حل مثل هذه المشاكل ميسور باستخدام المحددات أو المصفوفات كما سنبين فى القسمين القادمين.

٣ · ٦ — المحددات واستخدامها فى حل المعادلات الآتية :

المحدد ليس إلا طريقة مختصرة لكتابة المجموع الجبرى لعدد من الحدود كل حد منها يمثل حاصل ضرب عناصر معينة . مثلا يمكن كتابة المجموع الجبرى ($a_{11}\ a_{22} - a_{21}\ a_{22}$)فى صورة محدد عناصره a_{11} ، a_{12} ، a_{21} ، a_{22} كالتالى :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

وتتحدد قيمة هذا المحدد بأن نضرب a_{11} فى a_{22} ثم نطرح حاصل الضرب الناتج من حاصل ضرب a_{21} فى a_{12}

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a22 \end{vmatrix} = a_{11}\ a_{22} - a_{21}\ a_{12}$$

ويسمى هذا المحدد محددا من الرتبة الثانية . وعموما يكتب المحدد من الرتبة n كالتالى :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ويمكن تلخيص أهم خواص المحددات فيما يلى :

(أ) لاتتأثر قيمة المحدد إذا جعلنا أعمدته صفوفا ، وجعلنا صفوفه أعمده .

أى أن
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

حيث أن قيمة كل من هذين المحددين هى ($a_{11}\ a_{22} - a_{21}\ a_{12}$)

(ب) لاتتغير قيمة المحدد من حيث المقدار ،ولكنها تتغيرمن حيث الإشارة إذا وضعنا عمودا محل عمود آخر ، أو وضعنا صفاً محل صف آخر .

أى أن
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}$$

(ج) إذا ضرب كل عنصر من عناصر صف (أو عمود معين) فى ثابت K فان قيمة المحدد تصبح مساوية لحاصل ضرب K فى قيمته الاصلية .

أى أن
$$\begin{vmatrix} Ka_{11} & Ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = K \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

(د) إذا تماثلت أو تناسبت عناصر صف (أو عمود) معين مع العناصر المناظرة لصف (أو عمود آخر) فان قيمة المحدد تساوى صفر .

أى أن
$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ 2a & 2b \end{vmatrix} = 0$$

(ه) إذا كانت عناصر صف (أو عمود) معين مكونة من مجموع حدين كالتالى :

$$\begin{vmatrix} a_{11} + a'_{11} & _{12} + a'_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

فانه يمكن كتابة هذا المحدد كالتالى :

$$\begin{vmatrix} a_{11}+a'_{11} & a_{12}+a'_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

(و) لا تتأثر قيمة المحدد إذا أضيفت نسبة ثابتة K من عناصر صف (أو عمود) معين إلى العناصر المناظرة لصف (أو عمود) آخر . أى أن

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} \end{vmatrix}$$

حساب قيمة محدد من الرتبة n .

يمكن حساب قيمة محدد من الرتبة الثالثة كالتالى :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

أى بضرب كل عنصر من عناصر الصف الأول فى محدد معين من الرتبة الثانية ، وهذه المحددات من الرتبة الثانية نحصل عليها كالتالى : الحصول على المحدد الذى يضرب فى العنصر الأول a_{11} نحذف الصف والعمود الذى يقع عليهما العنصر a_{11} فتكون العناصر الباقية فى المحدد الأصلى هى عناصر المحدد المطلوب. وبالمثل بالنسبة للعنصرين الثانى والثالث . وتسمى هذه المحددات الصغرى محيددات (ومفردها محيدد) . ويلاحظ تقلب الإشارة من موجب إلى سالب بالنسبة للحدود التى يكون حاصل جمعها قيمة المحدد الأصلى[1] .

---

(١) محيدد = Minor والمحيدد مع أخذ إشارته فى الاعتبار يسمى المحدد المرافق = Co-factor فالمحدد المرافق للعنصر a_{11} هو المحدد $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ والمحدد المرافق للعنصر a_{12} هو $(-1)\begin{vmatrix} a_{21} & a_{32} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ . . . . وهكذا.

هذا ويمكن حساب قيمة المحدد بضرب عناصر أى صف (أو عمود) آخر فى المحيدات المناسبة وإيجاد مجموع حواصل الضرب . فاذا رمزنا لقيمة المحدد من الرتبة n بالرمز Δ ، فانه يمكن إيجاد قيمته كالتالى :

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} - a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{in}A_{in}$$

حيث A_{ij} هو المحيد المناسب للعنصر a_{ij} .

لاحظ أن مجموع حاصل ضرب عناصر صف معين i (أو عمود معين) فى المحيدات المناظرة لعناصر صف آخر r (أو عمود آخر) يساوى الصفر. أى أن

$$\Delta = a_{i1}A_{r1} - a_{i2}A_{r2} + a_{i3}A_{r3} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{in}A_{rn}$$

حل المعادلات الآنية بطريقة المحددات :

افرض أن لدينا n من المعادلات الآنية فى n مجهول كالتالى :

$$\begin{array}{l}
a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n = b_1 \\
a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n = b_2 \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \cdots + a_{nn}X_n = b_n
\end{array}$$

فانه يمكن إيجاد قيم $X_1, X_2, \ldots, X_n$ كالتالى :

أرمز للمحدد الذى تتكون عناصره من المعاملات $a_{11} \ldots a_{nn}$ بالرمز Δ .

أى أن

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

نحسب قيمة x_1 كالتالى :

$$x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_n & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \div \Delta$$

ونحسب قيمة x_2 كالتالى :

$$x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \div \Delta$$

وهكذا . أى أنه لإيجاد قيمة المجهول x_i فإننا نكون المحدد Δ_i من المحدد Δ باستبدال العمود i بعمود تتكون عناصره من الثوابت $b_1 \cdots b_n$ وتكون قيمة المجهول x_i هى خارج قسمة Δ_i على Δ .

مثال : افرض أن لدينا ٣ معادلات فى ٣ مجاهيل هى z , y , x

$$2x - y = 2$$

$$3y + 2z = 16$$

$$5x + 3z = 21$$

فإن قيم x , y , z توجد كالتالى :

أولا نحسب قيمة $\triangle$:

$$\triangle = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 8$$

ثم نحسب قيمة المجاهيل الثلاثة كالتالى :

$$x = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 16 & 3 & 2 \\ 21 & 0 & 3 \end{vmatrix} \div 8 = 3$$

$$y = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 16 & 2 \\ 5 & 21 & 3 \end{vmatrix} \div 8 = 4$$

$$z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 16 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} \div 8 = 2$$

٣ . ٧ المصفوفات واستخدامها فى حل المعادلات الآنية :

يمكن تعريف المصفوفة بأنها مجموعة من الأعداد أو الرموز مرتبة على هيئة صفوف وأعمدة يحيطها قوسان مربعان مثلا :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

هى مصفوفة ذات صفين وعمودين ، وتسمى مصفوفة درجتها ٢ × ٢ ، أو مصفوفة مربعة من الدرجة الثانية .

وعموما إذا أخذت المصفوفة على m من الصفوف و n من الأعمدة ، فإنه يكون لدينا (m.n) من العناصر مرتبة كالتالى :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ويقال أن المصفوفة فى هذه الحالة درجتها m فى n : mxn .

وتخضع المصفوفات لعدد من قواعد الجمع والضرب والقلب نوضحها فيما يلى :

قاعدة الجمع

يشترط لجمع مصفوفتين أو أكثر أن يحتوى كل منها على نفس عدد الصفوف ونفس عدد الأعمدة وتجرى عملية الجمع كالتالى :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a_{11} + b_{11}) & (a_{12} + b_{12}) \\ (a_{21} + b_{21}) & (a_{22} + b_{22}) \end{bmatrix}$$

لاحظ أنه إذا رمزنا للمصفوفتين المراد جمعهما بالرمزين A , B فإن :

(أ) $$A + B = B + A$$

(ب) $$A + (B + C) = (A + B) + C$$

(حـ) $$A + A + A = \begin{bmatrix} 3a_{11} & 3a_{12} \\ 3a_{21} & 3a_{22} \end{bmatrix} = 3 . A$$

وعموماً إذا جمعت نفس المصفوفة k من المرات فإن حاصل الجمع هو k . A

قاعدة الضرب :

إذا كان لدينا مصفوفتان A , B فإن حاصل ضربهما (A.B) عبارة عن المصفوفة C التى يكون عنصرها c_{ij} عبارة عن مجموع حواصل ضرب عناصر الصف i فى المصفوفة A فى عناصر العمود j فى المصفوفة B . أى أن حاصل الضرب A.B يساوى :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

تجمع حواصل ضرب عناصر الصف × عناصر العمود

B × A

$$= \begin{bmatrix} (a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21}) & (a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22}) \\ (a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21}) & (a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22}) \end{bmatrix}$$

ويشترط لضرب مصفوفتين A , B للحصول على A . B أن يكون عدد أعمدة A مساوٍ لعدد صفوف B ومن المهم ملاحظة ما يلي :

(أ) عموماً ، حاصل ضرب A.B (بهذا الترتيب) يختلف عن حاصل ضرب B.A (بهذا الترتيب) :

$$A . B \neq B . A ;$$

ومن القواعد المفيدة فى ضرب المصفوفات ما يلى :

(أ) $A (B + C) = A B + A C$

(ب) $(A + B) C = A C + B C$

(جـ) $A (B C) = (A B) C$

(د) إذا رمزنا للمصفوفة المربعة من الدرجة n التى يكون كل عناصر قطرها مساوية للوحدة وكل العناصر الأخرى فيها مساوية للصفر ، بالرمز I ، فإن حاصل ضرب I فى C يساوى حاصل ضرب C فى I . يساوى C ، حيث C مصفوفة مربعة درجتها n أيضاً . أى أن :

$$I C = C I = C$$

وتسمى المصفوفة I مصفوفة الوحدة :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

قاعدة القلب :

إذا كانت المصفوفة A مصفوفة مربعة من الدرجة n ، محددها له قيمة غير مساوية للصفر ، فإنه يوجد مقلوب وحيد لهذه المصفوفة ونرمز له بالرمز A^{-1} بحيث أن :

$$A . A^{-1} = A^{-1} . A = I$$

ويطلق على المصفوفة ذات المحدد غير المساوى للصفر اصطلاح مصفوفة غير منفردة ، أما إذا كان محدد المصفوفة مساو للصفر ، فإننا نقول أن المصفوفة منفردة. وسوف نرمز لمحدد المصفوفة A بالرمز $|A|$ (١) .

ولإيجاد مقلوب مصفوفة ، يمكن اتباع الطريقة التالية :

---

(١) مقلوب Inverse ، مصفوفة منفردة Singular Matrix ،
مصفوفة غير منفردة Nonsingular Matrix

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$$

حيث $|A|$ هو محدد المصفوفة A والذى نفترض أنه غير مساو للصفر ، وحيث A^* هى معكوسة المصفوفة التى تتكون عناصرها من مرافقات عناصر المصفوفة A أى أن العنصر a^*_{ij} فى معكوس المصفوفة A^* عبارة عن المحدد المرافق للعنصر a_{ij} فى المصفوفة A مأخوذاً بإشاراته المناسبة(١) وسوف تتضح هذه الطريقة أكثر عندما نطبقها فى المثال التالى لحل مجموعة من المعادلات الآنية :

حل المعادلات الآنية :

افرض أن لدينا المعادلات الثلاثة التالية فى الثلاثة مجاهيل z , y , x :

$$3x + y + 2z = 7$$

$$x + 2y + 3z = 8$$

$$x + 5y + z = 12$$

يمكن كتابة هذه المعادلات باستخدام المصفوفات كالتالى :

---

(١) معكوس Transpose المصفوفة A عبارة عن المصفوفة التى نحصل عليها بجعل صفوف A أعمدة وأعمدتها صفوفا ونرمز لها بالرمز A' . أى أن :

$$A' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

لاحظ أن معكوس المعكوس هو المصفوفة الأصلية ، أى أن : $(A')' = A$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix}$$

أو باختصار :

$$A\ B = C$$

حيث A هى مصفوفة المعاملات وهى مصفوفة مربعة من الدرجة الثالثة ، والمصفوفة B هى مصفوفة ذات عمود واحد مكون من ٣ عناصر هى المجاهيل المراد إيجاد قيمتها والمصفوفة C هى مصفوفة ذات عمود مكون من ٣ عناصر هى ثوابت المعادلات الثلاث المراد حلها .

يمكن أن نحصل على حل لهذه المعادلات بضرب طرفى المعادلة $A.B = C$ فى A^{-1} :

$$A^{-1} A.B = A^{-1} C$$

ولكن $A^{-1}A$ يساوى مصفوفة الوحدة I وحاصل ضرب I B هو B . إذن :

$$B = A^{-1} C$$

وهذا هو حل المعادلات .

إذن لحل المعادلات الثلاثة السابقة علينا أن نوجد أولا مقلوب مصفوفة المعاملات ثم نوجد حاصل ضربها فى متجه الثوابت C ولحساب مقلوب المصفوفة تكتب أولا مصفوفة المرافقات وهى :

$$\begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 & 2 & 3 \\ 9 & 1 & -14 \\ -1 & -7 & 5 \end{bmatrix}$$

ثم نحسب معكوس هذه المصفوفة فنحصل على المصفوفة A^* :

$$A^* = \begin{bmatrix} -13 & 9 & -1 \\ 2 & 1 & -7 \\ 3 & -14 & 5 \end{bmatrix}$$

ونحسب قيمة المحدد :

$$|A| = -31$$

إذن مقلوب المصفوفة هو :

$$A^{-} = \frac{A^*}{|A|} = \begin{bmatrix} -13 & 9 & -1 \\ 2 & 1 & -7 \\ 3 & -14 & 5 \end{bmatrix} \div 31$$

وبضرب هذه المصفوفة فى C نحصل على قيم المجاهيل الثلاثة :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \left(\frac{-1}{31}\right) \cdot \begin{bmatrix} -13 & 9 & -1 \\ 2 & 1 & -7 \\ 3 & -14 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$= \left(\frac{-1}{31}\right) \begin{bmatrix} -31 \\ -62 \\ -31 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

أى أن :

$$z = 1 \quad , \quad y = 2 \quad , \quad x = 1$$

٨ ـ ٣ ـ النهايات العظمى والصغرى غير المشروطة للدوال فى n متغير مستقل :

افرض أن y دالة للمتغيرات $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

الشروط الضرورية لكى تتحقق لهذه الدالة نهاية عظمى أو صغرى هى أن

تكون كل المشتقات الجزئية للتغير y بالنسبة للمتغيرات $x_1, x_2, \dots, x_n$ مساوية للصفر :

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{\partial y}{\partial x_2} = \frac{\partial y}{\partial x_3} = \cdots = \frac{\partial y}{\partial x_n} = 0$$

أو باختصار ، إذا رمزنا للمشتقة الجزئية للتغير y بالنسبة لـ x_i بالرمز f_i فإننا نكتب :

$$f_1 = f_2 = f_3 = \dots = f_n = 0$$

أما الشروط الكافية فهى تتضمن المشتقات الجزئية الثانية للدالة y ، وهى توضع فى صورة محدد كبير نرمز له بالرمز $\triangle$ وعناصره هى :

$$f_{11} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} \qquad f_{12} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1} \quad \dots\dots f_{1n} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_n \partial x_1}$$

$$f_{21} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} \qquad f_{22} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} \quad \dots\dots f_{2n} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_n \partial x_2}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$f_{n1} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_n} \qquad f_{n2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_n} \quad \dots\dots f_{nn} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_n^2}$$

والمحدد $\triangle$ هو :

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & & & \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix}$$

و Δ_i يمثل المحدد (الرئيسى) الذى نحصل عليه بحذف $(n - i)$ من الصفوف الأخيرة و $(n - i)$ من الأعمدة الأخيرة من Δ . حينئذ يمكن أن نكون المحيددات التالية من Δ :

$$\Delta_1 = |f_{11}| \; ; \; \Delta_2 = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} \; ; \; \Delta_3 = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} ;$$

$$\cdots ; \Delta_n = \Delta .$$

ويمكننا الآن صياغة الشروط الكافية للنهاية العظمى كالتالى : لكى تكون قيمة الدالة نهاية عظمى ينبغى أن تتقلب إشارات المحيددات المذكورة أعلاه من سالب (أى Δ_1 سالب) إلى موجب (أى Δ_2 موجب) ، وهكذا . باختصار :

$$\Delta_1 < 0 \; ; \; \Delta_2 > 0 \; ; \; \Delta_3 < 0 , \cdots , (-1)^n \Delta_n > 0 .$$

أما الشروط الكافية للنهاية الصغرى فهى تتلخص فى أن تكون كل المحيددات موجبة :

$$\Delta_1 , \Delta_2 , \Delta_3 , \cdots\cdots , \Delta_n > 0 .$$

وللحصول على قيمة النهاية العظمى أو الصغرى للدالة فإننا نحل الـ n من المعادلات التى تمثل الشروط الأولى أو الضرورية فنحصل منها على قيم $x_1 , x_2 , \ldots , x_n$ ثم نعوض عن هذه القيم فى الدالة الأصلية فنحصل على أقصى أو أدنى قيمة للدالة حسب ما تدل عليه الشروط الثانية .

مثال : لكى تكون للدالة $u = x^2 + y^2 + z^2 + xy$ نهاية عظمى أو صغرى فإنه من الضرورى أن تتحقق الشروط التالية :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + y = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y + x = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2z \qquad = 0$$

أما الشروط الثانية فهى تحتوى على المحيددات التالية :

$$\Delta_1 = \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right| = 2 \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \, \partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x \, \partial y} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \, \partial x} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial z \, \partial x} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial z \, \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial z} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \, \partial z} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

وحيث أن جميع المحيددات السابقة موجبة ، فإننا نعتبر هذه شروط كافية لكى يكون للدالة u نهاية صغرى . ولحساب قيمة النهاية الصغرى نحل المعادلات الثلاثة الممثلة للشروط الضرورية فى المجاهيل الثلاثة وسوف نجد أن القيمة المطلوبة هى $x = y = z = 0$ ومن ثم فإن للدالة u نهاية صغرى قيمتها $u = 0$.

٣ . ٩ . النهايات العظمى والصغرى المشروطة للدوال فى n متغير مستقل :

افرض أننا نريد تعظيم الدالة $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ فى ظل قيد أو شرط معين على المتغيرات المستقلة ، وليكن هذا القيد :

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

أى أننا نريد تعظيم أو تدنية الدالة y بحيث تكون قيم $x_1, x_2, \ldots, x_n$ المسموح بها هى فقط تلك القيم التى تحقق الشرط المذكور .

من الواضح أنه يمكن تحويل هذه المشكلة إلى مشكلة تعظيم أو تدنية بدون شروط وذلك بحل المعادلة التى تمثل الشرط بدلالة أحد المتغيرات وليكن x_1 : مثلا :

$$x_1 = h(x_2 \ldots x_n)$$

والتعويض عن قيمة x_1 هذه في الدالة المراد تعظيمها أو تدنيتها والتي تتحول بذلك إلى :

$$y = f\left\{ h(x_2 \ldots x_n),\ x_2,\ \ldots,\ x_n \right\}$$

وهذه معادلة في $(n - 1)$ متغير يمكن تعظيمها أو تدنيتها بالطريقة الموضحة في ٣ . ٨ .

وهناك طريقة أخرى أكثر جاذبية من الناحية الرياضية وهي تسمى طريقة مضروبات لاجرانج (١) . ووفقاً لهذه الطريقة فإننا نحول مشكلة تعظيم أو تدنية الدالة y في ظل القيد المذكور إلى مشكلة تعظيم أو تدنية للدالة :

$$V = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda\, g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

والداله V دالة في $(n+1)$ متغير هي الـ n متغير مستقل $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ومضروب لاجرانج λ . والشروط الضرورية للتعظيم المشروط أو التدنية المشروطة للدالة y هي أن تكون كل المشتقات الجزئية للدالة V بالنسبة للمتغيرات $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ومضروب لاجرانج مساوية للصفر :

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = f_1 + \lambda g_1 = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = f_2 + \lambda g_2 = 0$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_n} = f_n + \lambda g_n = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = g(x_1 \ldots x_n) = 0$$

---

(١) مضروبات لاجرانج Lagrange Multipliers

أو إذا رمزنا للمشتقات الجزئية بالرموز V_1 ، V_2 ، .... ، V_n ، V_{n+1} على التوالى ، فإنه يمكن صياغة الشروط الضرورية فى هذه الحالة كالتالى :

$$V_1 = V_2 = \dots = V_n = V_{n+1} = 0$$

الآن نرمز للمشتقات الجزئية الثانية للدالة بالنسبة للمتغيرات x_1 ، x_2 ، .... ، x_n ومضروب لاجرانج بالرموز ($V_{11} V_{12} .. V_{1n} g_1$), (V_{21} , V_{22} ,..., V_{2n} , g_2), ... ، وهكذا ، بحيث أن :

$$V_{11} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} = f_{11} + \lambda\, g_{11}$$

$$V_{1n} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_n\, \partial x_1} = f_{1n} + \lambda\, g_{1n}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \lambda\, \partial x_1} = g_1$$

وهكذا

من هذه المشتقات الجزئية الثانية يمكن أن نكون المحيددات التالية والتى يمكن أن نطلق عليها إسم المحيددات الرئيسية المطوقة :

$$\begin{vmatrix} V_{11} & V_{12} & g_1 \\ V_{21} & V_{22} & g_2 \\ g_1 & g_2 & 0 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} & g_1 \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} & g_2 \\ V_{31} & V_{32} & V_{33} & g_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 & 0 \end{vmatrix} ; \cdots$$

$$; \begin{vmatrix} V_{11} & V_{12} & \cdots & V_{1n} & g_1 \\ V_{21} & V_{22} & \cdots & V_{2n} & g_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ V_{n1} & V_{n2} & \cdots & V_{nn} & g_n \\ g_1 & g_2 & \cdots & g_n & 0 \end{vmatrix}$$

يمكننا الآن صياغة الشروط الكافية للنهاية العظمى أو الصغرى المقيدة :

الشروط الكافية تتلخص فى التالى : أن تتقلب هذه المحددات فى الإشارة مبتدئة بموجب فى حالة وجود نهاية عظمى للدالة ، وأن تكون جميعاً سالبة فى حالة وجود نهاية صغرى للدالة .

مثال : إذا كانت $y = 2z(5x - z)$ فأوجد قيمة كل من x , z اللتان تحققان نهاية عظمى أو صغرى لهذه الدالة ، وتحقق من طبيعة قيمة y عندما تأخذ x , z القيمة التى تجدها بشرط أن تحقق هذه القيمة المعادلة $x + z = 12$

(م ٩ — التحليل الاقتصادى)

الحل : نكتب أولا معادلة لاجرانج :

$$V = 2z(5x - z) + \lambda(x + z - 12)$$

الشروط الضرورية للتعظيم المشروط أو التدنية المشروطة y هى :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 10z + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 10x - 4z + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = x + z - 12 = 0$$

وبحل هذه المعادلات بطريقة المحددات نجد أن :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 10 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 12 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 10 & 1 \\ 10 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{168}{24} = 7$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 10 & 0 & 1 \\ 1 & 12 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 10 & 1 \\ 10 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{120}{24} = 5$$

وقيمة الدالة عند هذه النقطة هى :

$$y = 2z(5x - z) = 2 \times 5(5 \times 7 - 5) = 300$$

والشروط الكافية تحتوى على المحدد التالى :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda \partial x} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda \partial z} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda \partial x} & \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda \partial z} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 10 & 1 \\ 10 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 24$$

وحيث أن هذا المحدد موجب فإن قيمة $y = 300$ هى نهاية عظمى .

٣ . ١٠ . الدوال المتجانسة(١) وأهم نظرياتها :

يقال أن الدالة $z = f(x, y)$ دالة متجانسة من الدرجة r إذا أدى تغير كل من x , y بنسبة ثابتة λ إلى تغير z بنسبة λ^r . أى أن قيمة z بعد التغير تصبح :

$$z' = f(\lambda x , \lambda y) = \lambda^r f(x , y) = \lambda^r z$$

وفى الحالة التى تساوى فيها r الوحدة يقال أن الدالة z دالة متجانسة خطية .

ومن أمثلة الدوال المتجانسة ما يلى :

(أ) الدالة $z = ax + by$ دالة متجانسة من الدرجة الأولى أى دالة متجانسة وخطية ، حيث a , b ثابتين .

(ب) الدالة $z = a x^b y^{1-b}$ دالة متجانسة خطية ، حيث a , b ثابتين .

(حـ) الدالة $z = \frac{ax + by}{cx + dy}$ فهى دالة متجانسة من الدرجة الصفرية .

(د) الدالة $z = a x^b y^c$ هى دالة متجانسة من الدرجة $(b + c)$

وهناك ثلاثة خصائص للدوال المتجانسة يهمنا إبرازها هنا :

إذا كانت $z = f(x , y)$ دالة متجانسة درجتها r فإن :

$$z = x^r \cdot \phi\left(\frac{y}{x}\right) = y^r \phi\left(\frac{x}{y}\right) \qquad (1)$$

---

(١) دالة متجانسة = Homogeneous Function

أى أنه يمكن التعبير عن z كحاصل ضرب x^r فى دالة ذو متغير واحد $\left(\frac{y}{x}\right)$

أو حاصل ضرب y^r فى دالة متغير واحد $\left(\frac{x}{y}\right)$.

(ب) المشتقات الجزئية $\frac{\partial z}{\partial x}$ ، $\frac{\partial z}{\partial y}$ هى دوال متجانسة درجتها $(r-1)$

(حـ)
$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = r\, z$$

ومنها : إذا كانت r تساوى صفر ، أى أن الدالة z دالة متجانسة من الدرجة الصفرية فإن :

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

وإذا كانت r تساوى الوحدة ، أى أن الدالة z داله متجانسة خطية ، فإن :

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$$

وتسمى هذه القاعدة ، بنظرية أويلر[1].

وللدوال المتجانسة أهمية فى بعض النظريات الاقتصادية . ففى نظرية سلوك المستهلك نعتبر أن إحدى خصائص دوال الطلب أنها دوال متجانسه من الدرجة

---

(١) نظرية أويلر = Euler's Theorem

الصفرية بمعنى أنه إذا زادت أسعار جميع السلع بنسبة معينة وارتفع الدخل بنفس النسبة فإن الكمية المطلوبة تظل ثابتة ، أى أنه إذا كانت دالة الطلب على السلعة i هى :

$$q_i = f(p_1, p_2, \dots, p_n, y)$$

حيث y = الدخل فإن :

$$f(\lambda p_1, \lambda p_2, \dots, \lambda p_n, \lambda y) = f(p_1, p_2 \dots p_n, y)$$

كذلك هناك اهتمام بالدوال المتجانسة فى نظرية الإنتاج . مثلا افرض أن دالة الإنتاج هى دالة متجانسة $q = f(L, C)$ حيث q هى كمية الإنتاج من سلعة ما ، L هو كمية العمل ، C كمية رأس المال المستخدمة فى صنع q ، مثل الدالة :

$$q = A . L^a \; C^b$$

أى أنها دالة متجانسة من الدرجة $(a + b)$ فى هذه الحالة تتوقف طبيعة الوفورات الداخلية للحجم على قيمة $(a + b)$ ، أى على ما إذا كانت درجة تجانس الدالة هى ١ ، أو أكبر من ١ ، أو أقل من ١ . فى الحالة الأولى يقال أنه لا توجد وفورات اقتصادية للحجم ، بينما فى الحالة الثانية يقال أن هناك وفورات اقتصادية أو تزايد للغلة بالنسبة للحجم ، وفى الحالة الأخيرة يقال أن هناك تناقص فى الغلة بالنسبة للحجم (١) .

---

(١) وفورات الحجم أو العائد للسعة = Economies of scale وهى عبارة عن الوفورات الناتجة عن كبر أو اتساع حجم الوحدة الإنتاجية الناتج عن زيادة كل عناصر الإنتاج بنفس النسبة فإذا كانت $a + b = 1$ فإن الزيادة فى عناصر الإنتاج بنسبة ١ ٪ تؤدى الى زيادة الإنتاج بنسبة ١ ٪ أيضا . أما إذا كانت $a + b > 1$ فإن زيادة عناصر الإنتاج بنسبة ١ ٪ تؤدى الى زيادة الإنتاج بنسبة أكبر من ١ ٪ . وأخيراً اذا كانت $a + b < 1$ فإن زيادة عناصر الإنتاج بنسبة ١ ٪ تؤدى الى زيادة الإنتاج بنسبة أقل من ١ ٪ .

أيضاً إذا كانت دالة الإنتاج متجانسة خطية فإنه تبعاً لنظرية أويلر :

$$L \cdot \frac{\partial q}{\partial L} + C \cdot \frac{\partial q}{\partial C} = q$$

أى أن توزيع الدخل أو الإنتاج الكلى q على أساس أن يأخذ كل عنصر من عناصر الإنتاج نصيباً مساوياً لإنتاجيته الحدية ($\frac{\partial q}{\partial L}$ للعمل , $\frac{\partial q}{\partial C}$ لرأس المال) يستنفد الناتج الكلى تماماً .

٣ ـ ١١ . معادلات الفروق الخطية وطريقة حلها :

إذا كانت y_{t-n} , ... , y_{t-2} , y_{t-1} , y_t هى قيم المتغير y فى الفترات من t—n إلى t على التوالى ، فإن المعادلة :

$$(1) \qquad y_t = b_1 y_{t-1} + b_2 y_{t-2} + b_3 y_{t-3} + \cdots + b_n y_{t-n} + c$$

تسمى معادلة فروق خطية(١) من الدرجة n بمعاملات ثابتة ، حيث المعاملات b , c ثوابت . ويقال أن هذه المعادلة متجانسة فى الحالة التى تكون فيها $c = 0$ وغير متجانسة فى الحالة التى تكون فيها $c \neq 0$(٢) .

وتوصف المعادلة بأنها من الدرجة n لأن قيمة y فى فترة ما تتوقف على كل

---

(١) معادلات الفروق الخطية = Linear difference equations

(٢) متجانسة = Homogeneous

غير متجانسة = Non-homogeneous

قيم y فى n من الفترات السابقة . كذلك توصف المعادلة بأنها خطية لأن القيم المؤخرة للمتغير(١) ليست مرفوعة لأى أس ظاهر ، أو بالاصح مرفوعة لأس هو الواحد الصحيح . أخيراً نقول أن المعادلة السابقة ، بمعاملات ثابتة ، نظراً لأن قيم المعاملات b , c لا تتغير طول الفترة المعينة .

ولكى نرى الحكمة من تسمية المعادلة السابقة بمعادلة فروق ، نعيد كتابتها للفترة t - 1 كالتالى :

$$(2)\quad y_{t-1}=b_1 y_{t-2}+b_2 y_{t-3}+b_3 y_{t-4}+\dots+b_n y_{t-n-1}+c$$

وبطرح المعادلة (٢) من المعادلة (١) نحصل على :

$$(3)\quad y_t-y_{t-1}=b_1(y_{t-1}-y_{t-2})+b_2(y_{t-2}-y_{t-3})+\dots\dots$$

$$+b_n(y_{t-n}-y_{t-n-1})$$

أو باختصار ، حيث نرمز للفرق $(y_{t-1}-y_{t-2})$ بالرمز Δy_{t-1} وهكذا ، نعيد كتابة المعادلة كالتالى :

$$(4)\quad y_t=y_{t-1}+b_1\Delta y_{t-1}+b_2\Delta y_{t-2}+\dots+b_n\Delta y_{t-n}$$

واضح من المعادلة الأخيرة أن قيمة y فى الفترة t تتوقف على قيمتها فى الفترة السابقة وعلى الفروق الأولى لقيم y فى الفترات السابقة(٢) . أو إذا كتبنا المعادلة فى الصورة :

---

(١) قيم مؤخرة = Legged values

(٢) الفروق الأولى = First differences

$$(4') \qquad \Delta y_t = b_1 \Delta y_{t-1} + b_2 \Delta y_{t-2} + \cdots + b_n \Delta y_{t-n}$$

فمن الواضح أن الفرق بين قيمة y فى الفترتين $t-1 , t$ متوقف على الفرق بين القيم المتتابعة للمتغير y فى كل الفترات السابقة . وهذا هو سر تسمية المعادلة (١) معادلة فروق .

٣ · ١١ · ١ . تمهيد لحل معادلة فروق خطيه من الدرجة الأولى :

إذا كان لدينا معادلة فروق خطية غير متجانسة من الدرجة الأولى مثل :

$$y_t = 4\, y_{t-1} + 2$$

وإذا عرفنا قيمة y فى فترة ابتدائية $t = 0$ مثلا ، أى y_0 ، فإنه يكون بالإمكان إيجاد قيم y فى كل الفترات المقبلة ، أى إيجاد قيم y_1 ، y_2 وهكذا . ويطلق على y_0 القيمة الإبتدائية أو الحل أو الشرط الإبتدائى(١) ، كما يطلق على قيم y فى الفترات التالية حل معادلة الفروق .

فإذا كانت $y_0 = 2$ ، فإنه يمكن حل معادلة الفروق كالتالى :

$$y_0 = 2$$
$$y_1 = 4\, y_0 + 2 = 10$$
$$y_2 = 4\, y_1 + 2 = 42$$
$$y_3 = 4\, y_2 + 2 = 170$$

---

(١) القيمة الابتدائية = Initial Value ،
الحل الإبتدائى = Initial solution ،
الشرط الإبتدائى = Initial condition

وهكذا يمكن إيجاد باقى قيم y . ولكن هذه طريقة شاقة جداً خاصة إذا كنا نريد معرفة قيمة y بعد عدد كبير جداً من الفترات . بعبارة أخرى ، تزداد مشقة الحل كلما زادت قيمة t . لذا فإنه من الأفضل وجود طريقة عامة للحل تساعدنا على إيجاد قيمة y_t مهما كانت قيمة t .

خصائص الحل العام : لابد وأن يتوفر فى حل أى معادلة فروق خطية خاصيتان :

الخاصية الأولى : أن يكون الحل محققاً للشرط الأولى .

الخاصية الثانية : أن يكون الحل محققاً لمعادلة الفروق ذاتها .

افرض أن لدينا معادلة الفروق التالية :

$$y_t = 2\,y_{t-1} + 4$$

وأن الشرط الإبتدائى هو $y_0 = 14$. الحل العام لهذه المعادلة كما سيتضح لنا بعد قليل* هو :

$$y_t = 18\,(2)^t - 4$$

وللتأكد من أن هذا الحل يحقق الشرط الإبتدائى ومعادلة الفروق :

---

* قانون حل معادلة الفروق $y_t = by_{t-1} + C$ هو $y_t = b^t A + C\left(\frac{1-b^t}{1-b}\right)$

وبالتعويض عن $y_0 = A = 14, b = 2, c = 4$ نحصل على الحل $y_t = 18\,(2)^t - 4$

(أ) نعوض عن $t=0$ ، فنجد أن :

$$y_0 = 18\,(2)^0 - 4 = 14$$

(ب) نعوض عن t بالقيمة $t-1$ فى الحل . إذن :

$$y_{t-1} = 18\,(2)^{t-1} - 4$$

ونوجد قيمة الطرف الأيمن لمعادلة الفروق :

$$2\,y_{t-1} + 4 = 2\left[\,18\,(2)^{t-1} - 4\right] + 4$$

$$= 18\,(2)^t - 4 = y_t$$

٣ . ١١ . ٢ . الحل العام فى حالة معادلة فروق خطية متجانسة من الدرجة الأولى :

افرض أن لدينا معادلة الفروق $y_t = b\,y_{t-1}$ والشرط الإبتدائى هو $y_0 = A$. لاستنتاج الحل بطريقة الاستنباط دعنا نأخذ الحالة الخاصة والتى تكون فيها :

$$y_0 = A = 3\;,\; b = 2$$

أى أن المعادلة المطلوب حلها هى $y_t = 2\,y_{t-1}$ بالشرط الإبتدائى $y_0=3$ من الواضح أن :

$$y_0 = 3 \qquad\qquad = (2)^0 \times 3$$

$$y_1 = 2\,(3) \qquad\qquad = (2)^1 \times 3$$

$$y_2 = 2\,(2 \times 3) \qquad = (2)^2 \times 3$$

$$y_3 = 2\,(2 \times 2 \times 3) = (2)^3 \times 3$$

وعليه يمكن كتابة الحل للفترة t كالتالى :

$$y_t = (2)^t \times 3$$

بالمثل الحل العام للمعادلة $y_t = b\, y_{t-1}$ حيث $y_0 = A$ هو :

$$y_t = b^t \,.\, A$$

وللتأكد من أن هذا الحل يتوفر فيه الخاصيتان المشار إليهما سابقاً ، نتحقق أولاً من أن الحل يفى بالشرط الإبتدائى $y_0 = A$ ، بالتعويض عن $t = 0$ فى الحل :

$$y_0 = b_0 \,.\, A = A$$

ثم نتحقق ثانياً من أن الحل محقق المعادلة ذاتها ، بالتعويض عن $t = t - 1$ فى الحل :

$$y_{t-1} = b^{t-1} \,.\, A$$

ثم إيجاد قيمة الطرف الأيمن لمعادلة الفروق :

$$b\, y_{t-1} = b\,(\, b^{t-1} \,.\, A\,) = b^t \,.\, A = y_t$$

إذن :

الحل العام لمعادلة الفروق الخطية المتجانسة من الدرجة الأولى $y_t = b y_{t-1}$

بالشرط الإبتدائى $y_0 = A$ هو $y_t = b^t \,.\, A$

الواقع أن الحل العام لمعادلة الفروق لا تقتصر أهميته على إمكان الحصول على

قيمة المتغير y فى أى فترة زمنية مهما كانت بعيدة عن الفترة الإبتدائية ، وإنما تتضح أهميته أيضاً فى تمكيننا من تتبع المسار الزمنى لتطور المتغير y(١) . فبتأمل حل معادلة الفروق $y_t = b\, y_{t-1}$ يتضح لنا أن المسار الزمنى للمتغير y يتوقف على الثابت b على النحو التالى :

افرض أن $A > 0$ فى هذه الحالة يكون أمامنا الاحتمالات التالية :

(أ) إذا كانت $b > 0$ فإن قيم y تأخذ فى التزايد باطراد كلما زادت t . إذا كانت $b > 1$ حيث أن $\lim\limits_{t \to \infty} b^t = \infty$. أما إذا كانت $b < 1$ فإن قيم y تأخذ فى التناقص باستمرار كلما زادت t حيث أن $\lim\limits_{t \to \infty} b^t = 0$. أما إذا كانت $b = 1$ فإن قيمة y تكون ثابتة مهما زادت قيمة t . ويقال أن مسار y فى الحالة $b > 1$ هو مسار انفجارى إلى أعلى . وفى الحالة $b < 1$ فإن المسار يوصف بأنه مسار انفجارى إلى أسفل ، وفى الحالة $b = 1$ يوصف المسار بأنه مسار ثابت . وعموماً لا توجد تقلبات فى قيم y فى أى من هذه الحالات .

ب) إذا كانت $b < 0$ ، فإن قيم y تكون متقلبة أو متذبذبة ما بين قيم سالبة وقيم موجبة . فإذا كانت $b > -1$ فإن b^t وبالتالى y_t تتقلب تقلبات متناقصة كلما زادت t . أما إذا كانت $b < -1$ فإن b^t وبالتالى y_t تتقلب تقلبات متزايدة كلما زادت t . وفى الحالة التى تكون فيها $b = 1$ فإن b^t تكون دائماً مساوية للواحد الصحيح ، وعليه تأخذ y فى التقلب من $-A$ إلى $+A$

---

(١) المسار الزمنى = Time path

وتوصف التقلبات فى هذه الحالة بأنها تقلبات منتظمة(١) .

ويمكن تلخيص النتائج السابقة بالشكل التالى :

قيم y_t تتقلب من سالب إلى موجب			لا توجد تقلبات فى قيم y_t		
تقلبات متزايدة فى قيم y_t	$= A$	تقلبات متناقصة فى قيم y_t	تناقص مطرد فى قيم y_t	$= A$	تزايد مطرد فى قيم y_t
$b<-1$	$b=-1$	$0>b>-1$	$0<b<1$	$b=1$	$b>1$

أما إذا كانت $A < 0$ فإننا نحصل على عكس النتائج السابقة . وسوف نترك للدارس استخراج الحالات الممكنة لقيم y_t عندما تكون A سالبة كتمرين.

مثال : حل معادلة الفروق $y_t = 3\, y_{t-1}$ بالشرط الإبتدائى $y_0 = 5$ ، وتحقق من أن الحل محقق لكل من الشرط الإبتدائى ومعادلة الفروق ذاتها . ووضح طبيعة المسار الزمنى للمتغير y فى هذه الحالة .

الحل : من قانون الحل العام لمعادلة الفروق الخطية المتجانسة من الدرجة الأولى ، فإن حل المعادلة المذكورة هو :

$$y_t = (3)^t \cdot 5$$

---

(١) تقلبات متزايدة = Divergent fluctuations

تقلبات متناقصة = Convergent fluctuations

تقلبات منتظمة = Constant fluctuations

وهذا الحل محقق للشرط الإبتدائي لأن :

$$y_0 = (3)^0 . 5 = 5$$

وهو كذلك محقق لمعادلة الفروق لأن :

$$3\, y_{t-1} = 3\,(3)^{t-1}\ 5 = 3^{t} . 5 = y_t$$

واضح من معادلة الفروق أن $b = 3$ أى أن b موجبة وأكبر من الواحد الصحيح وعليه فإن قيم y لا تتقلب وإنما تتزايد بإطراد كلما زادت t .

٣ . ١ : ٣ . الحل العام لمعادلة فروق خطية غير متجانسة من الدرجة الأولى :

نكتفى هنا بإعطاء الحل العام لمعادلة مثل $y_t = b\, y_{t-1} + c$ بالشرط الإبتدائى $y_0 = A$ والحل متوقف على ما إذا كانت b مساوية أو غير مساوية للواحد الصحيح . فإذا كانت $b \neq 1$ فإن الحل هو :

$$y_t = b^t . A + c \left(\frac{1-b^t}{1-b} \right)$$

أما إذا كانت $b = 1$ فإن الحل هو :

$$y_t = A + c . t$$

ويمكن التحقق من أن كلا من هذين الحلين يتفق مع الشرط الإبتدائى ومعادلة الفروق كالتالى :

أولا : إذا كانت $b \neq 1$. الحل محقق للشرط الإبتدائى لأنه بالتعويض عن $t = 0$ نحصل على :

$$y_0 = b^0 . A + c \left(\frac{1 - b^0}{1 - b} \right) = A$$

والحل كذلك محقق لمعادلة الفروق لأن الطرف الأيمن لهذه المعادلة هو :

$$b\, y_{t-1} + c = b \left[b^{t-1} . A + c \left(\frac{1 - b^{t-1}}{1 - b} \right) \right] + c$$

$$= b^t . A + c \left(\frac{b - b^t}{1 - b} \right) + c$$

$$= b^t . A + c \left(\frac{b - b^t + 1 - b}{1 - b} \right)$$

$$= y^t . A + c \left(\frac{1 - b^t}{1 - b} \right) = y_t$$

ثانياً : إذا كانت $b = 1$ فإن الحل محقق للشرط الإبتدائي لأن :

$$y_0 = A + c\,(0) = A$$

والحل كذلك محقق لمعادلة الفروق لأن الطارف الأيمن لهذه المعادلة هو :

$$b\, y_{t-1} + c = y_{t-1} + c = \left[A + c\,(t - 1) \right] + c$$

$$= A + c\,t = y_t$$

وبتأمل حل معادله الفروق فى الحالة الحاضرة ، فإنه يمكن استنتاج خصائص المسار الزمنى للتغير y عبر الزمن . وسوف نكتفى هنا بإعطاء الاحتمالات المختلفة باستخدام الشكل التالى :

توجد تقلبات فى قيم y_t		لا توجد تقلبات فى قيم y_t	
يبتعد y_t تدريجياً عن D_0 بتقلبات متزايدة	$y_t \longrightarrow D_0$ تقلبات متناقصة	$y_t \longrightarrow D_0$	$y_t \longrightarrow \pm\infty$ حسبما إذا كانت $D_1 \gtrless 0$

$b < -1 \quad b = -1 \quad 0 > b > -1 \quad b = 0 \quad b < 1 \quad b = 1 \quad b > 1$

حيث :

$$D_0 = \left(\frac{c}{1-b}\right) \qquad D_1 = \left(A - \frac{c}{1-b}\right)$$

وحيث يمكن إعادة كتابة حل معادلة الفروق فى الحالة $b \neq 1$ كالتالى* :

$$y_t = b^t\, D_1 + D_0$$

---

* نتوصل إلى تلك الصورة كالتالى :

$$y_t = b^t \cdot A + c\left(\frac{1-b^t}{1-b}\right) = b^t \cdot A + \frac{c}{1-b} - \frac{c\, b^t}{1-b}$$

$$= b^t\left(A - \frac{c}{1-b}\right) + \left(\frac{c}{1-b}\right) = b^t\, D_1 + D_0$$

لاحظ أنه فى الحالة $b = 1$ ، فإن الحل هو $y_t = A + c.t$ ومن ثم فإن y_t لا تتقلب كلما زادت t ، ويكون مسارها انفجارياً .

مثال : حل معادلة الفروق التاليه $y_t = y_{t-1} + 2$ وتحقق من أن الحل محقق للشرط الإبتدائى $y_0 = 5$ ، ووضح طبيعة المسار الزمنى لقيم y_t فى هذه الحالة .

الحل : بتطبيق قانون حل معادلة فروق غير متجانسة من الدرجة الأولى فى الحالة $b = 1$:

$$y_t = A + c\ t = 5 + 2t$$

والحل محقق للشرط الإبتدائى لأن :

$$y_0 = 5 + 2(0) = 5$$

وهو محقق أيضاً لمعادلة الفروق لأن طرفها الأيمن يساوى :

$$y_{t-1} + 2 = 5 + 2(t-1) + 2 = 5 + 2t = y_t$$

واضح من الحل أن y_t تتزايد بإطراد كلما زادت t . أى أن مسار y انفجارى إلى أعلى .

مثال : أوجد حل معادلة الفروق $y_t = -3\,y_{t-1} + 5$ بالشرط الإبتدائى $y_0 = 2$ ووضح طبيعة المسار الزمنى للمتغير y فى هذه الحالة .

الحل : بتطبيق قانون حل معادلة فروق غير متجانسة من الدرجة الأولى فى الحالة $b \neq 1$:

$$y_t = b^t \cdot A + c\left(\frac{1-b^t}{1-b}\right) = (-3)^t \cdot (2) + 5\left(\frac{1-(-3)^t}{1+3}\right)$$

إذن :

$$y_t = (-3)^t \cdot \left(\frac{3}{4}\right) + 1\tfrac{1}{4}$$

واضح أن y_t تأخذ قيماً متقلبة ، وأن التقلبات تأخذ فى التزايد مع زيادة t -
أى أن المسار الزمنى لقيم y_t يتميز بوجود تقلبات متباعدة .

٣ . ١٢ . تمارين :

تمرين (١) : احسب مرونات الطلب السعرية والدخلية والمقطعية (إن وجدت) لدوال الطلب الآتية :

(أ) $$q_1 = \frac{a - p_1^2}{b}$$

(ب) $$q_1 = \sqrt{\frac{a - p_1}{b}}$$

(ج) $$q_1 = \frac{a}{p_1 + c} - b$$

(د) $$q_1 = b_1 p_1^{-a_1} + b_2 p_2^{-a_2} + c$$

(هـ) $$q_1 = p_1^{a} \cdot e^{-b(p_1 + c)}$$

(و) $$q_1 = a\, p_1^{b_1}\, p_2^{b_2}\, y^{b_3}$$

(ز) $$p_1 q_1 = k$$ حيث k ثابت .

حيث q_1 هي كمية السلعة محل البحث ، p_1 سعرها ، p_2 سعر سلعة متصلة بها ، y الدخل القومي .

الحل :

(أ) $$E_{11} = -\frac{2}{b}\,\frac{p_1^2}{q_1}$$

(ب) $$F_{11} = \frac{-p_1}{2(a-l_1)} = \frac{p_1}{2\ b\ q_1^2}$$

(حـ) $$E_{11} = \frac{-a\ p_1}{(p_1+c)\ q_1}$$

(ء) $$E_{11} = \frac{-a_1\ b_1}{p_1^{a_1} q_1}$$

$$F_{12} = \frac{-a_2\ b_2}{p_2^2\ q_1}$$

(هـ) $$E_{11} = a - b\ p_1$$

(و) $$E_{11} = b_1\ ;\ E_{12} = b_2\ ,\ E_{1y} = b_3$$

(ز) $$E_{11} = -1$$

تمرين (٢) : إذا كان منحنى الطلب على سلعة ما يمكن تمثيله بالمعادلة التالية :

$$p = 15 - 0.5\ q$$

فالمطلوب :

(ا) حساب المرونة السعرية الذاتية للطلب .

(ب) الحصول على معادلة الإيراد الكلى ورسمها والتعليق على خصائصها .

(حـ) الحصول على معادلتى الإيراد الحدى والمتوسط ورسمها والمقارنة بينهما .

(ء) اثبت جبرياً أن الإيراد الحدى = الإيراد المتوسط (١ — مقلوب المرونة السعرية للطلب) .

الحل :

(أ) $$E = -2\,\frac{p}{q}$$

(ب) معادلة الإيراد الكلى R هى :

$$R = p\ q = q\,(15 - 0.5\,q) = 15\,q - 0.5\,q^2$$

وهى معادلة من الدرجة الثانية . ويلاحظ أن :

$$\frac{dR}{dq} = 15 - q = 0$$

عندما تكون $q = 15$ وحيث أن $\frac{d^2R}{dq^2} = -1$ أى سالب فإننا عند نقطة نهاية عظمى للدالة . أى أن الإيراد الكلى يصل إلى نهايته العظمى عندما تكون q مساوية 15 .

(ح) الإيراد الحدى $\frac{dR}{dq}$ من المعادلة السابقة يساوى $(15 - q)$ والإيراد المتوسط $\frac{R}{q}$ يساوى $\frac{qp}{q}$ أى أنه يساوى السعر p :

$$\frac{R}{q} = p = 15 - 0.5\,q$$

ومن الواضح أن كلا منهما يمكن تمثيله بخط مستقيم ، وأن ميل منحنى الإيراد الحدى ضعف ميل منحنى الإيراد المتوسط . ميل منحنى الإيراد الحدى $\frac{d^2R}{dq^2}$ يساوى ١ — وميل منحنى الإيراد المتوسط $\frac{d}{dq}\left(\frac{R}{q}\right) = 0.5 -$. كذلك .

يلاحظ أن منحنى الإيراد للحدى يقطع محور الكمية عند نفس النقطة التى يصل فيها منحنى الإيراد الكلى إلى نهايته العظمى ، بينما يقطع منحنى الإيراد المتوسط محور الكمية عند ضعف الكمية التى تحقق أقصى إيراد كلى .

$$\frac{dR}{dq} = \frac{d}{dq}(q\ p) = p + q\frac{dp}{dq} \qquad (\text{ء})$$

$$= p\left(1 + \frac{q}{p} \cdot \frac{dp}{dq}\right) = p\left(1 - \frac{1}{E}\right)$$

حيث $\qquad \frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q} = -E$

تمرين (٢) : إذا كانت دالة الطلب على سلعة هى $p = 80 - 0.02\,q$ وكانت دالة التكاليف الكلية C هى $C = 50\,q + 10\ 00$ فأوجد حجم الإنتاج الذى يعظم الإيراد الصافى للمنتج ، أى يعظم $(p\,q - C)$ ، بفرض أن السعر والتكاليف بالقروش .

الحل : $\quad R = p\,q - C = (80 - 0.02q)\,q - (50\,q + 10000)$

من الضرورى لتحقق أقصى إيراد صافى أن تكون :

$$\frac{dR}{dq} = 80 - 0.04\,q - 50 = 30 - 0.04\,q = 0$$

أى عندما تكون وحدة $\quad q = \frac{30}{0\ 04} = 750$

وللتحقق من أن هذه نقطة أقصى إيراد ، تقدر المعامل التفاضلى الثانى $\frac{d^2R}{dq^2}$

$$\frac{d^2R}{dq^2} = -0.04 < 0$$

وهذا شرط كاف لوجود نهاية عظمى لدالة الإيراد الصافى . وهكذا فإن الإنتاج الأمثل هو ٧٥٠ وحدة وسعر البيع للوحدة هو :

$$p = 80 - 0.02\, q = 65 \quad \text{قرشاً}$$

تمرين (٤) : إذا فرضت الحكومة ضريبة مقدارها خمسة قروش على كل وحدة منتجة فى التمرين السابق فوضح أن المنتج لن يرفع السعر بكل قيمة الضريبة إذا أراد تعظيم أرباحه ، أى تعظيم الإيراد الصافى .

الحل : دالة التكاليف تصبح

$$C = 50\, q + 5\, q + 1000$$

والإيراد الصافى

$$R = pq - C = (80 - 0.02q)\, q - (55q + 1000)$$

والإيراد الحدى $\frac{dR}{dq}$ يساوى الصفر عند نقطه أقصى أرباح :

$$\frac{dR}{dq} = 80 - 0.04\, q - 55 = 0$$

إذن $q = 625$ وسعر البيع هو :

$$p = 80 - 0.02\, q = 67.5$$

أى أن السعر ارتفع من ٦٥ قرشاً قبل الضريبة إلى ٦٧,٥ قرشاً بعد الضريبة ، وهكذا فالزيادة فى السعر مقدارها ٢,٥ قرش وهذه الزيادة فى السعر أقل من قيمة الضريبة المفروضة على كل وحدة (٥ قروش) .

تمرين (٥) : اثبت أنه إذا فرضت الحكومة ضريبة قيمتها t على كل وحدة

من إنتاج منتج دالة تكاليفه هى $C = c + d\,q$ ودالة الطلب على منتجاته هى $p = a - b\,q$ فإن سعر الوحدة لن يرتفع إلا بنصف قيمة الضريبة ، وذلك بافتراض أن الثوابت a , b , c , d كلها موجبة .

<u>الحل</u> : الشرط الضرورى لتعظيم الإيراد الصافى قبل فرض الضريبة :

$$R = p.q - C = (a - b\,q)\,q - (c + dq) = (a - d)\,q - bq^2 - c$$

هو :

$$\frac{dR}{dq} = a - d - 2\,b\,q = 0$$

إذن $q = \frac{a - d}{2\,b}$ وبالتعويض عن q فى معادلة الطلب يتضح أن :

$$p = a - b\left(\frac{a - d}{2\,b}\right) = \frac{a + d}{2}$$

أما الشرط الضرورى لتعظيم الإيراد الصافى بعد فرض الضريبة أى تعظيم :

$$R' = p.q - C' = (a - b\,q)\,q - (c + d\,q + t\,q)$$

$$= (a - d - t)\,q - b\,q^2 - c$$

فهو :

$$\frac{dR'}{dq} = a - d - t - 2\,b\,q = 0$$

أى أن :

$$q = \frac{a - d - t}{2\,b}$$

وبالتعويض عن q فى معادلة الطلب نحصل على السعر بعد فرض الضريبة وهو :

$$p = a - b\left(\frac{a - d - t}{2b}\right) = \frac{a + d}{2} + \frac{1}{2}t$$

ومن الواضح بمقارنة السعر قبل فرض الضريبة بالسعر بعد فرض الضريبة أن الزيادة فى السعر هى نصف قيمة الضريبة المفروضة .

تمرين (٦) : تحقق من وجود نهاية صغرى أو عظمى للدوال التالية ، وأوجد القيمة القصوى أو الدنيا لكل دالة :

(أ) $z = x^2 + 2y^2 - 4y$

(ب) $z = 20 - 2x^2 + 4y - y^2$

(حـ) $x = 15p + 26k + 2pk - p^2 - 2k^2$ حيث $3p + 2k = 50$

الجواب : للدالة (أ) نهاية صغرى عندما تكون $y = 1 , x = 0$ وقيمة النهاية الصغرى للدالة هى $z = -2$ ، أما الدالة (ب) فلها نهاية عظمى عندما تكون $y = 2 , x = 0$ وقيمة النهاية العظمى للدالة هى $z = 24$. أما الدالة (حـ) فلها نهاية عظمى مشروطة عندما تكون $k = 9.47 , p = 10.35$ والنهاية العظمى هى $x = 310.62$.

تمرين (٧) : إذا كانت دالة الإنتاج اسلمة ما هى $q = f(x_1 , x_2)$ فالمطلوب :

(أ) كتابة معادلة منحنى الناتج المتكافىء والحصول على تفاضلها الكلى .

(ب) إيجاد المعدل الحدى للإحلال الفنى لعنصر x_2 محل العنصر x_1 .

(حـ) إذا كانت دالة الإنتاج تأخذ الصورة الجبرية التالية (ويطلق عليها دالة كوب — دوجلاس) :

$$q = a x_1^{b_1} \; x_2^{b_2}$$

فوضح أن المعدل الحدى للإحلال الفنى يتوقف فقط على النسبة بين x_1 , x_2 .

الإجابة :

(١) معادلة منحنى الناتج المتكافىء هى $\bar{q} = (x_1 , x_2)$ وتفاضلها الكلى هو :

$$dq = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 = 0$$

(ب) المعدل الحدى للإحلال الفنى للعنصر x_2 على العنصر x_1 هو :

$$- \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\partial f / \partial x_1}{\partial f / \partial x_2}$$

(حـ) المعدل الحدى للإحلال الفنى فى هذه الحالة :

$$- \frac{dx_2}{dx_1} = \left(\frac{b_1}{b_2} \right) \cdot \frac{x_1}{x_2}$$

تمرين (٨) : إذا كان منحنى الطلب على سلعة ما هو $D = 100 - p$. ومنحنى عرضها هو $S = -10 + p$ ، وكانت الحكومة تريد فرض ضريبة إنتاج على كل وحدة منتجة من هذه السلعة بحيث تحصل منها على أكبر حصيلة.

... ممكنة ، فأوجد قيمة الضريبة التى يجب فرضها واحسب حصيلتها ، حيث q بالطن ، p بالجنيهات .

الحل : قبل فرض الضريبة $q = 45$ $p=55$

بعد فرض الضريبة $q = 45 - \frac{1}{2} t$ $p=55+\frac{1}{2} t$

المعدل المطلوب هو المعدل t الذى يعظم حصيلة الضريبة T . أى أن المطلوب هو تعظيم $T = t.q$. بالتعويض عن q من المعادلة السابقة :

$$T = t.q = t\left(45 - \frac{1}{2} t\right) 45 t - \frac{1}{2} t^2$$

لإيجاد معدل الضريبة تفاضل T بالنسبة لـ t وتساوى المشتقة بالصفر :

$$\frac{dT}{dt} = 45 - t = 0$$

إذن $t = 45$ وبالتعويض عن t فى معادلة q بعد فرض الضريبة نجد أن $q = 22.5$ وبالتعويض عن t , q فى معادلة حصيلة الضريبة نجد أن $T = 45(22.5)$ أى أن حصيلة الضريبة ١٠١٢,٥ جنيه .

تمرين (٩) : هل هذه الدوال متجانسة ؟ وما هى درجة تجانسها ؟ :

(أ) $z = 10 x^4 y^3 + x^3 y^4$

(ب) $z = \sqrt{a x^2 + b y^2 + 2 cxy}$

(ح) $z = x y + 4 z + y^2$

(ء) $w = \frac{x y}{z} + 4 z + \frac{z^3}{x y} + \frac{5 y^2}{2 x} + 3 y$

تمرين (١٠) : طبق نظرية أويلر على دالة الإنتاج . $q = A . L^a . C^b$.
حيث $a + b = 1$ واشرح معناها .

الحل : نظرية أويلر فى حالة الدالة $q = f (L , C)$ هى :

$$L \frac{\partial q}{\partial L} + C \frac{\partial q}{\partial C} = q$$

الآن :

$$\frac{\partial q}{\partial L} = A\, a\, L^{a-1} C^b = \frac{a q}{L}$$

$$\frac{\partial q}{\partial C} = A b\, L^a\, C^{b-1} = \frac{b q}{C}$$

بالتعويض فى الطرف الأيسر من معادلة نظرية أويلر نحصل على :

$$L \left(\frac{a q}{L} \right) + C \left(\frac{b q}{C} \right) = a q + b q = (a + b) q = q$$

حيث أن $a + b = 1$ افتراضاً .

تمرين (١١) : أوجد حل معـــادلة الفروق $y_t = \frac{1}{2} y_{t-1}$ بالشرط

الإبتدائى $y_0 = 1$ ، وتحقق من أن الحل يحقق لكل من الشرط الإبتدائى ومعادلة الفروق ذاتها . وضح أيضاً طبيعة المسار الزمنى المتغير .

تمرين (١٢) : حل كل من معادلات الفروق التالية وناقش المسار الزمنى للحل :

(أ) $y_t = 4\,y_{t-1}$ حيث $y_0 = 5$

(ب) $y_t = 0.7\,y_{t-1}$ حيث $y_0 = 1$

(حـ) $y_t = -5\,y_{t-1}$ حيث $y_0 = 3$

(ء) $y_t = 6\,y_{t-1} - 5$ حيث $y_0 = 4$

(هـ) $y_t = -3\,y_{t-1} + 7$ حيث $y_0 = 3$

(و) $y_t = y_{t-1} + 10$ حيث $y_0 = 2$

الفصل الرابع

نظرية سلوك المستهلك[١]

كيف يتصرف المستهلك فى ميزانية إنفاق معلومة ، إذا كان سلوكه متسماً بالرشد الاقتصادى؟[٢] هل يمكن استنتاج أى شىء عن السلوك الملموس للمستهلك فى السوق إذا كان يسعى لتعظيم شىء غير قابل للقياس ، مثل الإشباع أو المنفعة ؟ وإذا كان ذلك ممكناً ، فإلى أى حد يتوقف السلوك الأمثل للمستهلك على الصورة التى يختارها للتعبير عن تفضيلاته ، أى على صورة دالة المنفعة التى يفترض أنه يحاول تعظيمها فى حدود دخله أو ميزانية إنفاقه المحدودة ؟ ما هو أثر التغير فى سعر سلعة ما على الكمية المطلوبة منها ؟ لماذا يأخذ منحنى الطلب على سلعة الشكل المعتاد والذى ينحدر فيه المنحنى هابطاً من اليسار إلى اليمين ؟ هل هناك حالات استثنائية يمكن أن يأخذ فيها منحنى الطلب شكلا مغايراً ؟ ما هو أثر تغير سعر سلعة ما على الكمية المطلوبة من سلعة أخرى ؟

هذه هى الأسئلة التى سنحاول الإجابة عليها فى هذا الفصل ، والتى تشكل الموضوعات الرئيسية فى نظرية سلوك المستهلك .

٤ . ١ مفاهيم وأدوات تحليل رئيسية فى نظرية سلوك المستهلك :

٤ . ١ . ١ فرض الرشد الاقتصادى فى الاستهلاك تفترض النظرية الاقتصادية

---

(١) نظرية سلوك المستهلك : Theory of consumer behaviour

(٢) الرشد الاقتصادى : Economic rationality

أن المستهلك شخص اقتصادى رشيد ، بمعنى أنه يختار من بين مختلف السلع والخدمات المتاحة أمامه فى السوق تلك التوليفة من السلع التى يتحقق له من استهلاكها أقصى مستوى للإشباع أو المنفعة . ويمكن تحديد فروض الرشد الاقتصادى فى الاستهلاك كما يلى :

(ا) بالنسبة لأى توليفتين بديلتين ا ، ب من السلع المتاحة للاستهلاك ، يفترض أن المستهلك يعرف ما إذا كان يفضل ا على ب ، أو يفضل ب على ا ، أو يعتبرهما سيان لديه من حيث درجة الإشباع .

(ب) أن المستهلك يستطيع أن يصل إلى قرار حاسم بشأن أى توليفتين معروضتين عليه ، بمعنى أنه يجب أن يستقر على موقف لا أكثر من المواقف الثلاثة : تفضيل ا على ب ، تفضيل ب على ا ، أو اعتبارهما متكافئتين من حيث الإشباع . فلا يكون مقبولا من المستهلك القول مثلا بتفضيلا ا على ب ، ولو أنه مستعد بقبول أيهما بمعنى أنه يعتبرهما متكافئتين من حيث الإشباع .

(حـ) أن تفضيلات المستهلك متسلسلة أو متسقة لا تناقض بينها ، بمعنى أنه إذا كان المستهلك يفضل التوليفة ا على التوليفة ب ، ويفضل التوليفة ب على التوليفة حـ ، فإنه لابد وأن يفضل ا على حـ أيضاً .

٤ . ١ . ٢ . دالة المنفعة للمستهلك الفرد :

تعبر دالة المنفعة لمستهلك معين عن العلاقة بين الكميات التى يستهلكها المستهلك من مختلف السلع ، ودرجة أو مستوى الإشباع الذى يتحقق له من استهلاكها . أى أن درجة أو مستوى الإشباع ، أو المنفعة ، تتوقف على المقادير التى يستهلكها المستهلك من مختلف السلع فإذا رمزنا للمنفعة بالرمز U ،

والسلع التى يستهلكها المستهلك بالرموز ك١ ، ك٢ ، ك٣ ، ... ، كن والكميات المستهلكة من هذه السلع بالرموز q_1 ، q_2 ، q_3 ، q_n على الترتيب فإنه يمكن كتابة دالة المنفعة — فى صورتها العامة — كالتالى :

$$U = f(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n) \tag{1}$$

وهناك عدة خصائص لدالة المنفعة نوجزها فيما يلى :

(ا) لا يفترض عند كتابة دالة المنفعة أن المنفعة قابلة للقياس ، كما كان شائعاً فى الفكر الاقتصادى حتى أواخر القرن الماضى ، وانما كل ما تفترض بشأن المنفعة هو أنها قابلة للترتيب ، بمعنى أنه لا ينتظر من المستهلك إعطاء كل توليفة من التوليفات البديلة لمختلف السلع رقماً يقيس درجة المنفعة التى تنتج عن استهلاكها ، وانما ينتظر من المستهلك المقدرة على ترتيب التوليفات المختلفة ترتيباً تصاعدياً أو تنازلياً حسب درجة تفضيله لها . ويتم الترتيب بإعطاء رقم لكل توليفة . لكن الرقم لا يفسر على أنه كمية المنفعة التى يتحصل عليها من استهلاك توليفة معينة . كذلك لا يفسر الفرق بين الرقمين الخاصين بتوليفتين على أنه يقيس الفرق فى درجة الإشباع التى يتحصل عليها من استهلاك هاتين التوليفتين . وانما كل ما فى الأمر أن الأرقام التى تعطى للتوليفات المختلفة ليست سوى مؤشرات للتفضيل ، والفرق بين أى رقمين لا يعنى سوى أن توليفة معينة أفضل أو أسوأ من توليفة أخرى فى نظر المستهلك . فإذا أعطى المستهلك التوليفة ا الرقم ٤ والتوليفة ب الرقم ١ ، فليس معنى هذا أن الإشباع الذى ينجم عن استهلاك التوليفة الأولى أربع أضعاف الإشباع الذى ينجم عن استهلاك التوليفة الثانية ، وكل ما يفهم من هذين الرقمين هو أن التوليفة ا أفضل من التوليفة ب فى نظر المستهلك .

(ب) دالة المنفعة ليست دالة فريدة ، حيث أن أية دالة وحيدة القيمة رمزايدة

في الكميات المستهلكة من السلع المختلفة تصلح كدالة المنفعة(١) . وهذه الخاصية ناجمة بالطبع عن كون أى رقم يمثل منفعة توليفة معينة من السلع غير ذى دلالة كمية فى حد ذاته ، ولا معنى له إلا بمقارنته بالأرقام المعطاة للتوليفات الأخرى للدلالة على ترتيبها فى سلم تفضيلات المستهلك . وهكذا إذا كان المستهلك يفضل التوليفة ا على التوليفة ب . فيستوى لدينا أن يعبر عن هذه الحقيقة بدالة منفعة يعطى فيها ا الرقم ٥ و ب الرقم ٣ ، أو يعطى ا الرقم ٥٠ و ب الرقم ١ أو يعطى ا الرقم ٤٠٠٠ و ب الرقم ٧ ، وهكذا . فالمهم هو أن يكون الرقم المعطى للتوليفة ا أكبر من الرقم المعطى للتوليفة ب . والاختلاف فى هذه الأرقام لا يؤثر على الكميات التى ينبغى على المستهلك شراءها لتعظيم منفعته . وهذه نتيجة سوف نثبت صحتها فيما بعد فى ٤ . ٣ .

(ح) دالة المنفعة هى دالة ذات بعد زمنى ، بمعنى أنها تعبر عن المنفعة التى يحصل عليها الفرد من استهلاكه لتوليفة معينة من السلع خلال فترة زمنية محددة كشهر أو سنة مثلا . وترجع ضرورة تحديد بعد زمنى للدالة ، إلى كون الإشباع المترتب على استهلاك كمية معينة من السلع يختلف حسب المدة التى يتم خلالها هذا الاستهلاك . فاستهلاك عشر زجاجات كوكا كولا خلال ساعة واحدة يعطى إشباعاً مختلفاً تماماً عن استهلاك نفس الكمية خلال أسبوع مثلا . وعلى كل حال فإنه ليس هناك مدة متفق عليها لدالة المنفعة ، لكن هناك اتفاق على أن هذه المدة ينبغى ألا تكون قصيرة جداً ، بحيث لا تسمح للمستهلك بتنويع استهلاكه من مختلف السلع وهو أمر هام بالنسبة لتحديد مستوى الإشباع . كما أنه ينبغى ألا تكون

---

(١) دالة فريدة = Unique function

دالة وحيدة القيمة = Single-Valued function

المدة طويلة جداً ، بحيث تتغير خلالها عادات المستهلك وذوقه تغيراً يغير من شكل الداله نفسها .

(د) يفترض فى داله المنفعة أنها دالة متصلة (أو مستمرة) ذات تفاضلات جزئية متصلة أيضاً من الدرجة الأولى والثانية . وهذا فرض هام لإمكان تعظيم المنفعة والوصول إلى حالة التوازن بعد حدوث اختلال عن طريق إحلال سلعة محل أخرى ، وهذا ما سنتعرض له بعد قليل .

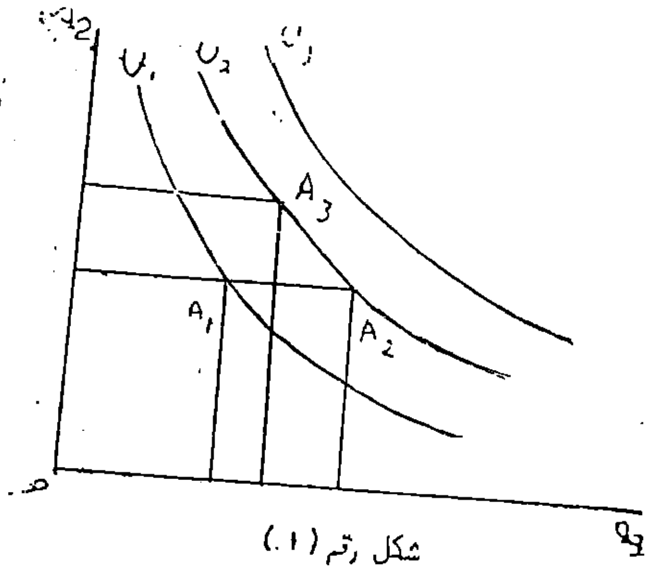
٤ . ١ . ٣ . منحنيات السواء :

إحدى الأدوات الرئيسية التى تستخدم لتصوير الفروض الخاصة بالرشد الاقتصادى فى الاستهلاك هى منحنيات السواء[١] . فإذا افترضنا للتبسيط أن المستهلك لديه فقط سلعتان ، فإن منحنيات السواء تبين الطريقة التى يقيم بها المستهلك التوليفات المختلفة من السلعتين . ذلك أن كل منحنى سواء يمثل مستوى معيناً للإشباع أو المنفعة يمكن الحصول عليه من عدد كبير جداً من توليفات السلعتين .

تأمل المنحنى U_1 فى الشكل رقم (١) أن كل نقطة على هذا المنحنى تمثل كمية معينة من السلعة ك$_١$ وكمية معينة من السلعة ك$_٢$ ، أى توليفة معينة من السلعتين تعطى مستوى معيناً المنفعة هو U_1 ، وبتجميع كل النقط التى تعطى نفس المستوى من المنفعة U_1 ، يمكن رسم منحنى السواء U_1 . وبالمثل يعطى المنحنى U_2 جميع التوليفات من السلعتين ك$_١$ ، ك$_٢$ التى تعطى للمستهلك مستوى الإشباع U_2 ، وهو

---

(١) منحنيات السواء = Indifference curves



شكل رقم (١)

أعلى من مستوى الإشباع U_1 ، ومعادلة منحنى السواء هى نفسها دالة المنفعة مع تحوير بسيط وهو أن U تثبت عند قيمة معينة مثل U_1 أو U_2 وهكذا . وعموماً تكتب معادلة منحنى السواء كالتالى :

$$\overline{U} = f(q_1 , q_2) \qquad (2)$$

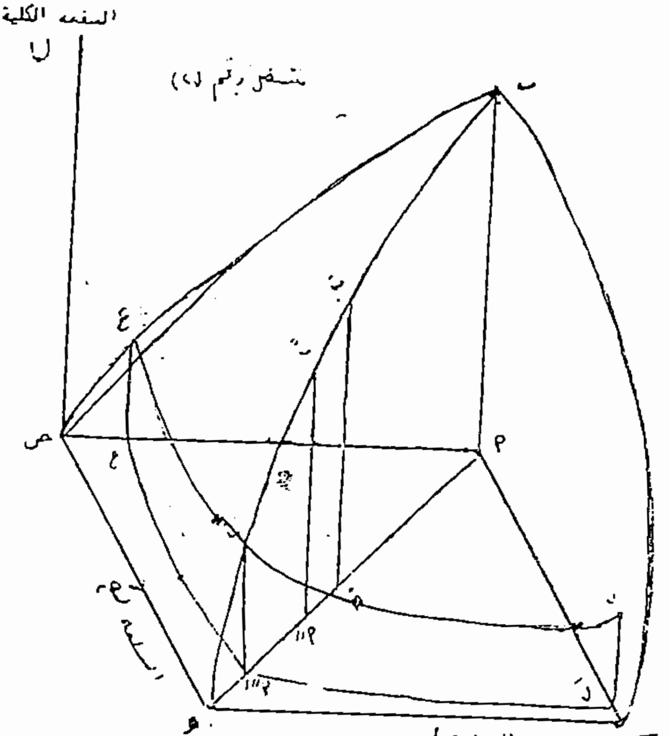
حيث $\overline{U}$ مستوى ثابت للمنفعة .

خواص منحنيات السواء :

الخاصية الأولى : كلما ابتعد المنحنى عن نقطة الأصل كلما كان ممثلا لمستوى أعلى للمنفعة . ويرجع ذلك ، كما يتضح من الشكل رقم (١) ، إلى أن ابتعاد منحنى السواء عن نقطة الأصل لا معنى له سوى حصول المستهلك على المزيد من السلعتين أو من إحداهما مع بقاء الأخرى ثابتة ، وفى هذا إضافة صافية للمنفعة .

نحو ارتفاع لمستوى الإشباع . قارن النقطة A_1 بالنقطة A_2 أو A_3 فى شكل رقم (١) .

<u>الخاصية الثانية</u> : <u>منحنيات السواء لا يمكن أن تتقاطع</u> ، وانما تتوازى هذه المنحنيات مع بعضها البعض. وهذا راجع إلى أن هذه المنحنيات ليست إلا مساقط كونتورات ، أى خطوط دائرية تلف حول مسطح المنفعة الكلية ، ويصل كل خط منها بين نقط ذات ارتفاع واحد ، يمثل المنفعة الكلية التى تعود على المستهلك من استهلاك أى من التوليفات التى تمثلها هذه النقط ولذا فلا سبيل إلى تقاطع هذه الخطوط إطلاقاً .



تأمل الشكل رقم (٢) فى هذا الشكل يمثل السطح ص ب س اتجاه المنفعة

الكلية . لو أخذنا قطاعاً على القطر ا و لحصلنا على مقادير المنفعة الكلية التى يحصل عليها الفرد بزيادة مقادير السلعتين معاً ، وهذه المقادير تمثلها الارتفاعات ا ب ، ا َ ب َ ، ا َ َ ب َ َ وهكذا .

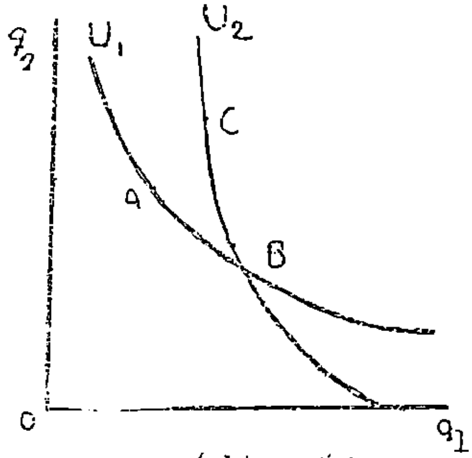
أما إذا ثبتنا الارتفاع عند ا َ َ َ ب َ َ َ ووصلنا النقط الواقعة على نفس الارتفاع ، فإن هذه النقط تمثل مقادير السلعتين التى يحصل منها الفرد على منفعة كلية متساوية . والخط الدائرى مثل ع ل الذى يصل كل النقط ذات الارتفاع الواحد يسمى contour ومسقط هذا الخط على مستوى الصفحة أى المنحنى ع َ ل َ يسمى منحنى سواء . ولو كررنا العملية بأخذ الكونتورات ذات الارتفاعات المختلفة ، لحصلنا على عدد من المنحنيات المتوازية ، مساقطها على الصفحة تعطى منحنيات سواء أخرى . وهكذا فلا يمكن أن تتقاطع منحنيات السواء .

ويمكن إثبات هذه الخاصية ، بافتراض أن منحنيين للسواء U_1 و U_2 تقاطعا كما فى الشكل رقم (٢) النظر فى نتيجة هذا التقاطع . النتيجة كما يلى :

أولا : حيث أن كلا من A و B يقعان على نفس منحنى السواء U_1 فإنهما يتكافآن من حيث المنفعة الكلية .

ثانياً : حيث أن كلا من C و B يقعان على نفس منحنى السواء U_2 فإنهما يتكافآن من حيث المنفعة الكلية .

من أولا وثانياً نصل الى أن A , C يتكافآن من حيث المنفعة الكلية . وهذ



شكل رقم (٢)

معناه أن C , A يقعان على نفس منحنى السواء على خلاف افتراضنا . ولكن C تعطى منفعة كلية أكبر من A لأنها تمثل توليفة تحتوى على مقادير أكثر من السلعتين ك$_1$ ، ك$_2$ وهذا متناقض مع النتيجة السابقة التى تقول بتكافؤ C , A من حيث درجة الإشباع التى ينجم عن استهلاكها . وهذا التناقض يؤدى بنا إلى رفض الافتراض الذى قبلناه جدلا فى البداية بشأن إمكان تقاطع منحنيات السواء .

الخاصية الثالثة : منحنيات السواء لها ميل سالب وانحناؤها لابد وأن يكون محدباً من ناحية نقطة الأصل . وذلك لأن معدل الإحلال السلعى للسلعة ك$_2$ محل السلعة ك$_1$ لابد وأن يتجه إلى التناقص ، كلما زاد الفرد من الكميات التى يحصل عليها من ك$_1$ ، على حساب إنقاص الكميات التى يحصل عليها من ك$_2$. ويمكن الحصول على قيمة معدل الإحلال السلعى بأخذ التفاضل الكلى لدالة المنفعة ، بافتراض أن هناك سلعتين فقط هما ك$_1$ ، ك$_2$ كالتالى :

$$d\,U = \frac{\partial\,U}{\partial\,q_1}\,dq_1 + \frac{\partial\,U}{\partial\,q_2}\,.\;dq_2$$

وحيث أن المنفعة الكلية لا تتغير على نفس منحنى السواء ، فإن $d\,U$ تساوى صفراً .

إذن :

$$\frac{\partial\,U}{\partial\,q_1}\,.\,d\,q_1 + \frac{\partial\,U}{\partial\,q_2}\,.\;d\,q_2 = 0$$

وبإعادة ترتيب الحدود نحصل على :

$$-\frac{d\;q_2}{d\;q_1} = \frac{\partial\,U / \partial\,q_1}{\partial\,U / \partial\,q_2} \qquad (3)$$

ولتفسير هذه النتيجة تذكر أن $(d\,q_2 / d\,q_1)$ هو ميل المماس لمنحنى السواء . أى أن الطرف الأيسر للمعادلة (٣) ليس إلا القيمة السالبة لميل المماس لمنحنى السواء عند نقطة معينة . ويطلق عليه معدل الإحلال السلعى (أو الحدى)(١) للسلعة ك٢ محل السلعة ك١ ويعرف الأخير بأنه عبارة عن الكمية من ك٢ التى يلزم أن يحصل عليها المستهلك مقابل تنازله عن وحدة واحدة من ك١ بحيث يظل متمتعاً بنفس مستوى الإشباع . وبالمثل ، يمكن تعريف معدل إحلال ك١ محل ك٢ ،

Rate of commodity substitution = معدل الإحلال

أى $d\,q_1 / d\,q_2$ — بأنه عبارة عن كمية ك$_1$ التى يبتغى أن يحصل عليها المستهلك لقاء تنازله عن وحدة واحدة من ك$_2$ ، بحيث يظل متمتعاً بنفس مستوى الإشباع .

وكما هو واضح من الطرف الأيمن المعادلة (٣) ، فإن المعدل الحدى للإحلال يساوى النسبة بين المنفعة الحدية لكل من السلعتين .

إذن :

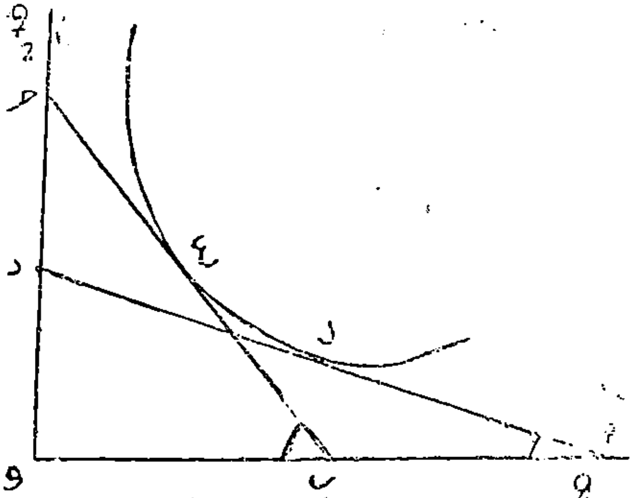
$$\text{معدل الإحلال السلعى للسلعة ك}_2 \text{ محل السلعة ك}_1 = \frac{\text{المنفعة الحدية للسلعة ك}_1}{\text{المنفعة الحدية للسلعة ك}_2}$$

$$= \frac{f_1}{f_2} \qquad (4)$$

حيث f_1 = التفاضل الجزئى $\partial U / \partial q_1$ ، f_2 = التفاضل الجزئى $\partial U / \partial q_2$

ومن الواضح أن معدل الإحلال للسلعة ك$_2$ محل ك$_1$ يتجه إلى التناقص كلما تغير وضع الفرد على منحنى السواء متجهاً من أعلى إلى أسفل ، أى كلما زاد مقدار ك$_1$ على حساب نقصان ما لدى المستهلك من ك$_2$. وحيث أن معدل الإحلال عند نقطة معينة يمثل ميل المماس لمنحنى السواء عند تلك النقطة ، فيمكن تبيان تناقص معدل الإحلال بأخذ نقطتين مثل ع ، ل فى شكل رقم (٤) ومقارنة معدل انحدار المماس لمنحنى السواء عند كل منهما . فهذا الانحدار قيمته (و ح / و ب) عند النقطة ع ، (و ى / و ا) عند النقطة ل . ومن الواضح أن (و ح / و ب) أكبر من (و ى / و ا) لأن الزاوية الداخلية ب أكبر من الزاوية الداخلية ا .

ويمكن صياغة قانون تناقص معدل الإحلال الحدى كما يلى :



شكل رقم (٤)

كلما زاد ما لدى المستهلك من ك$_1$ ، (أى كلما أحل ك$_1$ محل ك$_2$ ، على منحنى سواء معين ، كلما انخفض معدل إحلال ك$_2$ محل ك$_1$.

أى أن معدل إحلال ك$_2$ محل ك$_1$ دالة متناقصة فى ك$_1$. لاحظ أن معدل إحلال ك$_1$ محل ك$_2$ يتجه إلى التزايد مع تزايد ك$_1$. أى أن معدل إحلال ك$_1$ محل ك$_2$ دالة متزايدة فى ك$_1$.

٤ . ١ . ٤ . قيد الميزانية[1] :

المقصود بقيد الميزانية هو أن مجموع ما ينفقه المستهلك على مختلف السلع

(١) قيد الميزانية = Budget constraint

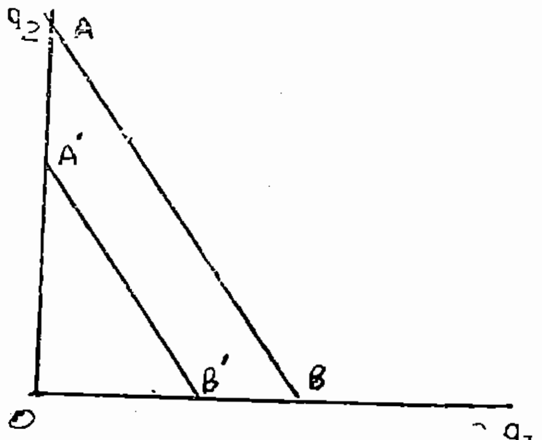
والخدمات لا يتعدى دخله الثابت أو الميزانية التى يخصصها للإنفاق الإستهلاكى . فإذا كان دخل المستهلك أو ميزانية إنفاقه — وسوف نعتبرهما مترادفان — $\overline{y}$ فإن قيد الميزانية يكتب كالتالى :

$$p_1\, q_1 + p_2\, q_2 = \overline{y} \qquad (5)$$

ويمكن إعادة كتابة هذه المعادلة كالتالى : بقسمه على p2

$$q_2 = \frac{\overline{y}}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}\, q_1 \qquad (5')$$

ومن الواضح أن هذه معادلة خط مستقيم ميله $\frac{p_1}{p_2}$ — كما فى الشكل رقم (٥) .



شكل رقم (٥)

فالكمية O B هى كمية ك١ التى يحصل عليها المستهلك إذا أنفق كل دخله على هذه السلعة ، بينما الكمية O A هى كمية ك٢ التى يمكن للمستهلك شراؤها بإنفاق

كل دخله على هذه السلعة فقط . أما النقط الواقعة على الخط A B فهي تمثل توليفات من السلعتين يستنفد الإنفاق عليهما كل دخل المستهلك .

لاحظ أن ميل خط الميزانية أو خط السعر كما يسمى أحياناً يمثل نفقة الفرصة البديلة وذلك لأن :

$$\frac{d\ q_2}{d\ q_1} = -\ \frac{p_1}{p_2}$$

فإذا كان سعر p_1 ضعف سعر p_2 أى أن $\frac{p_1}{p_2} = 2$ فإن تنازل المستهلك عن وحدة واحدة من السلعة ك١ يكون فى مقابل حصوله على وحدتين من السلعة ك٢ . ومن الواضح أن معدل الإحلال الحدى ل ك٢ محل ك١ يمثل أيضاً نفقة فرصة بديلة . ولكن الفارق بين نفقة الفرصة البديلة على خط السعر ونفقة الفرصة البديلة على منحنى السواء هو أن الأولى واحدة بالنسبة لكل المستهلكين فى السوق — ولذا يمكن تسميتها معدل الإحلال السوقى و الموضوعى — أما الثانية فهى تختلف من مستهلك لآخر لأنها تعكس التفضيلات الشخصية لكل مستهلك — ولذا يمكن تسميتها معدل الإحلال السيكولوجى أو الذاتى .

لاحظ أنه إذا ظلت أسعار السلع ثابتة وتغير دخل المستهلك ، فإن خطوط السعر المقترنة بدخول مختلفة تكون خطوطاً متوازية . فإذا انخفض الدخل فإن خط السعر ينتقل من الوضع A B إلى الوضع A¹B¹ . وبالمثل إذا تغير سعرى السلعتين بنفس النسبة وبقى دخل المستهلك ثابتاً ، فإن خط السعر ينتقل إلى وضع جديد يكون موازياً فيه للخط الأصلى . وحيث أن ميل هذا الخط يمثل النسبة بين

سعرى السلعتين ، فإن الميل لا يتغير بالطبع عندما تتغير الأسعار بنفس النسبة . . أى أن ميل الخط لا يتغير إلا إذا تغيرت الأسعار النسبية .

٤ . ٢ توازن المستهلك : تعظيم المنفعة فى ظل قيد ميزانية المستهلك :

كيف يتحقق التوازن للمستهلك ؟ الجواب هو أن التوازن يتحقق للمستهلك من إنفاقه على مختلف السلع عندما يتحقق هدف المستهلك والذى حددناه فيما سبق بأنه الظفر بأعلى مستوى للمنفعة ، أى عندما يعظم منفعته . وباستخدام لغة منحنيات السواء ، فإنه يمكن القول بأن الهدف الذى يسعى المستهلك لتحقيقه هو الوصول إلى أعلى منحنى ممكن للسواء ، فى حدود دخله الثابت . أما بلغة الرياضيات ، فإننا نقول أن هدف المستهلك هو تعظيم دالة المنفعة فى ظل قيد الميزانية . أى أنه المشكلة هى تحديد مقادير ك١ ، ك٢ ، أى q_1 , q_2 اللذان يجعلان دالة المنفعة :

$$U = f(q_1, q_2)$$

تأخذ أكبر قيمة ممكنة بشرط تحقق قيد الميزانية :

$$p_1 q_1 + p_2 q_2 = y$$

وذلك بفرض ثبات سعرى السلعتين p_1 , p_2 وثبات الدخل أو ميزانية الإنفاق .

وباستخدام طريقة مضروبات لاجرانج ، فإن التعظيم المشروط لدالة المنفعة يكافىء تعظيم الدالة التالية :

$$V = f(q_1, q_2) + \lambda\,(p_1 q_1 + p_2 q_2 - y) \qquad (6)$$

وكما أوضحنا فى ٣ ـ ٩ ، الشروط الضرورية لتعظيم هذه الدالة هى أن تتساوى التفاضلات الجزئية الأولية لها بالنسبة لكل من λ و q_1 ، q_2 مع الصفر . وباستخدام الرمزين f_1 ، f_2 للإشارة إلى التفاضلات الجزئية $\partial f / \partial q_1$ ، $\partial f / \partial q_2$ على التوالى ، فإنه يمكن كتابة الشروط الضرورية للتعظيم المشروط لدالة المنفعة كالتالى :

$$(7.1) \qquad \frac{\partial V}{\partial q_1} = f_1 + \lambda p_1 = 0$$

$$(7.2) \qquad \frac{\partial V}{\partial q_2} = f_2 + \lambda p_2 = 0$$

$$(7.3) \qquad \frac{\partial V}{\partial \lambda} = p_1 q_1 + p_2 q_2 - y = 0$$

أما الشروط الثانية لتعظيم المنفعة فهى تتطلب أن يكون المحدد المطوق التالى موجباً :

$$(8.1) \qquad \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & g_1 \\ f_{21} & f_{22} & g_2 \\ g_1 & g_2 & 0 \end{vmatrix} > 0$$

حيث :

$$f_{11} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} \; ; \; f_{12} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_2 \partial q_1} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_2 \partial q_1} \; ; \; g_1 = \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda \partial q_1} = p_1 \; ;$$

$$f_{21} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2} \; ; \; f_{22} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2} \; ; \; g_2 = \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda \partial q_2} = p_2 \, . \qquad (8.2)$$

وإذا رمزنا المحدد المكتوب فى (8.1) بالرمز $\triangle$ فإنه يمكن إعادة كتابة الشرط كالتالى :

$$\triangle = f_{11}(-p_2^2) - f_{12}(-p_1 p_2) + p_1(f_{21} p_2 - f_{22} p_1)$$

$$= -f_{11} p_2^2 + f_{12} p_1 p_2 + f_{21} p_1 p_2 - f_{22} p_1^2$$

$$= 2 f_{12} p_1 p_2 - f_{11} p_2^2 - f_{22} p_1^2 > 0 \qquad (8.3)$$

وذلك لأن :

$$f_{21} = f_{12}$$

٤ . ٢ . ٢ . تفسير شروط تعظيم المنفعة :

لتفسير الشرطين (7 1) , (7.2) نعيد كتابتهما كالتالى :

$$f_1 = -\lambda p_1 \qquad (9.1)$$

$$f_2 = -\lambda p_2 \qquad (9.2)$$

بقسمة (9 1) : (9 2) نحصل على المعادلة التالية :

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{p_1}{p_2} \qquad (9.3)$$

ويعني هذا الشرط أنه عند نقطة المنفعة العظمى تكون النسبة بين المنفعتين الحديتين للسلعتين ك١ و ك٢ مساوية للنسبة بين سعريهما . وحيث أن النسبة بين المنفعتين الحديتين ليست سوى معدل الإحلال السلعي (معادلة (4)) فإن الشرطين الضروريين للتعظيم المشروط للمنفعة يعنيان أن عند نقطة التوازن لابد وأن يكون معدل الإحلال السلعي مساوياً للنسبة بين سعري السلعتين التي هي ميل خط السعر . وهذا يتحقق عندما يتماس خط السعر مع منحنى السواء ، أي عند النقطة التي يكون عندها ميل منحنى السواء معادلا لميل خط السعر . وحيث أن ميل خط السعر يمثل معدل الإحلال السوقي أو الموضوعي ، وأن ميل المماس لمنحنى السواء عند نقطة معينة يمثل معدل الإحلال السيكولوجي أو الذاتي عند هذه النقطة ، فإنه يمكن القول بأن شرط التوازن هو تساوي معدل الإحلال الموضوعي ومعدل الإحلال الذاتي بين السلعتين . ويمكن كتابة الشرط (93) في صورة مختلفة كالتالي :

$$\frac{f_1}{p_1} = \frac{f_2}{p_2} \qquad (94)$$

أي أنه عند نقطة التوازن تكون النسبة بين المنفعة الحدية لسلعة معينة وسعرها مساوية للنسبة بين المنفعة الحدية للسلعة الأخرى وسعرها . وهذا الشرط يعني أنه لابد وأن تكون الإضافة للمنفعة التي تترتب على إنفاق جنيه إضافي على إحدى السلعتين مساوياً تماماً الإضافة للمنفعة التي تترتب على إنفاق جنيه إضافي على السلعة الأخرى ، وإلا لكان من مصلحة المستهلك إعادة توزيع إنفاقه للحصول على المزيد من إحدى السلعتين مقابل إنقاص ما يحتفظ به من السلعة الأخرى .

أى أن الشرط (9.4) معناه تعادل المنفعة الحدية للجنيه (الحدى) المنفق على كل من السلعة ك١ أو السلعة ك٢ .

بالنسبة للشرط الثالث من الشروط الضرورية للتعظيم (7.3) فيمكن إعادة كتابته كالتالى :

$$p_1 q_1 + p_2 q_2 = y \qquad (9.5)$$

أى أنه عند نقطة الإشباع الأعظم يكون مجموع المنفق على السلعتين مساوياً للدخل المعلوم للمستهلك . وهذا معناه أن نقطة التوازن تقع على خط الميزانية وليس تحته أو فوقه .

على أن الشروط الثلاثة الأولى ، إن كانت ضرورية لتعظيم المنفعة ، إلا أنها ليست كافية فى حد ذاتها لضمان الوصول إلى المنفعة القصوى . ولابد من توفر الشرط الثانى للتعظيم (8.1) أو (8.3) لضمان ذلك . ولتفسير هذا الشرط فإننا نبدأ بأخذ التفاضل الجزئى لميل منحنى السواء $\frac{d q_2}{d q_1}$ بالنسبة للمتغير q_1 :

$$\frac{d^2 q_2}{d q_1^2} = - \frac{d}{d q_1} \left(\frac{f_1}{f_2} \right) \qquad (9.6)$$

إذا رمزنا للمقدار $\frac{f_1}{f_2}$ بالرمز z فإن التفاضل المطلوب يكون $\frac{d z}{d q_1}$ حيث z دالة فى q_1 , q_2 ، أى أن :

$$(9.7) \qquad z = \frac{f_1}{f_2} = \varphi(q_1, q_2)$$

بأخذ التفاضل الكلى لهذه الدالة نحصل على :

$$dz = \frac{\partial z}{\partial q_1} \cdot dq_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2} \cdot dq_2$$

وبقسمة طرفى هذه المعادلة على على dq_1 نحصل على :

$$(9.8) \qquad \frac{dz}{dq_1} = \frac{\partial z}{\partial q_1} + \frac{\partial z}{\partial q_2} \cdot \frac{dq_2}{dq_1}$$

وحيث أن :

$$\frac{\partial z}{\partial q_1} = \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{f_1}{f_2}\right) = \frac{f_2 f_{11} - f_1 f_{21}}{f_2^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial q_2} = \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{f_1}{f_2}\right) = \frac{f_2 f_{12} - f_1 f_{22}}{f_2^2}$$

إذن بالتعويض عن هذه الكميات فى المعادلة (9.8) وبالتعويض كذلك عن $\frac{dz}{dq_1}$ من المعادلة (9.6) أى $\frac{dz}{dq_1} = -\frac{d^2 q_2}{dq_1^2}$ وبالتعويض أيضاً عن $\frac{dq_2}{dq_1}$ بقيمتها أى $\left(-\frac{f_1}{f_2}\right)$ نحصل على المعادلة التالية :

$$-\frac{d^2q_2}{dq_1^2}=\frac{f_2 f_{11}-f_1 f_{21}}{f_2^2}+\frac{f_2 f_{21}-f_1 f_{22}}{f_2^3}\left(-\frac{f_1}{f_2}\right)$$

$$=\frac{f_2^2 f_{11}-f_1 f_2 f_{21}-f_1 f_2 f_{21}+f_1^2 f_{22}}{f_2^3}$$

$$=\frac{f_2^2 f_{11}-2 f_1 f_2 f_{21}+f_1^2 f_{22}}{f_2^3}$$

وبالتعويض عن f_1 من المعادلة (9.1) أى :

$$f_1=f_2\frac{p_1}{p_2}$$

وباستخدام المعلومة $f_{12}=f_{21}$ فإننا نحصل على هذه المعادلة :

$$-\frac{d^2q_2}{dq_1^2}=\frac{f_2^2 f_{11}-2 f_2^2 f_{21}\frac{p_1}{p_2}+f_2^2\frac{p_1^2}{p_2^2}f_{22}}{f_2^3}$$

وبضرب البسط والمقام فى $\frac{p_2^2}{f_2^2}$ نحصل على النتيجة التالية :

$$-\frac{d^2q_2}{dq_1^2}=\frac{f_{11}p_2^2-2f_{21}p_1p_2+f_{22}p_1^2}{p_2^2 f_2}$$

وبضرب الطرفين فى -1 نحصل على :

$$\frac{d^2q_2}{dq_1^2}=\frac{2f_{21}p_1p_2-f_{11}p_2^2-f_{22}p_1^2}{p_2^2 f_2} \qquad (9.9)$$

وبمقارنة بسط (9.9) بالمقدار الذى ينبغى أن يكون موجباً حسب الشرط الثانى لتعظيم المنفعة ، أى الشرط (8.3) يتضح أنهما متساويان إذن يترتب على تحقق الشرط الثانى أن يكون بسط (9.9) موجباً وحيث أن كلا من p_2 ، r_2 موجباً فإن قيمة الكسر فى الطرف الأيمن للمعادلة (9.9) يكون موجباً أيضاً . وهذا معناه أن منحنيات السواء محدبة من ناحية نقطة الأصل وأن معدل الإحلال السلعى يتجه إلى التناقص كلما سار الفرد عليه متجهاً من أعلى إلى أسفل كما سبق إيضاحه فى ٤ ـ ١ ـ ٣ .

هذا عن تفسير الشروط الأولى والثانية للتعظيم المشروط للمنفعة أما عن كيفية تحديد الكميات q_1 ، q_2 فإنه يمكن الوصول إليها بحل المعادلات الثلاثة التى تمثل الشروط الضرورية لتعظيم المنفعة بطريقة التعويض أو بطريقة المحددات أو المصفوفات التى شرحناها فى ٣ ـ ٦ و ٣ ـ ٧ .

مثال : إذا كانت دالة المنفعة لمستهلك معين هى :

$$U = 3\, q_1^2\, q_2^3 \qquad (10.1)$$

ودخل المستهلك مثبت عند 28 جنيهاً وسعر السلعة ك١ هو 4 جنيهات وسعر السلعة ك٢ هو 5 جنيهات ، فأوجد مستوى الطلب على هاتين السلعتين ، وتحقق من أن الكميات تحقق الشرط الثانى للتعظيم المشروط للمنفعة .

الحل : الشروط الأولى لتعظيم المنفعة فى ظل قيد الميزانية :

$$4\, q_1 + 5\, q_2 = 28 \qquad (10.2)$$

هى الشروط الضرورية لتعظيم الدالة التالية :

$$(10.3)\qquad V = 8\, q_1^2\, q_2^3 + \lambda\,(\,4\, q_1 + 5\, q_2 - 28\,)$$

وهى :

$$(11.1)\qquad \frac{\partial V}{\partial q_1} = 6\, q_1\, q_2^3 + 4\,\lambda = 0$$

$$(11.2)\qquad \frac{\partial V}{\partial q_2} = 9\, q_1^2\, q_2^2 + 5\,\lambda = 0$$

$$(11.3)\qquad \frac{\partial V}{\partial \lambda} = 4\, q_1 + 5\, q_2 - 28 = 0$$

وللحصول على قيم q_1 ، q_2 نحل المعادلات الثلاث السابقة كالتالى :

نعيد كتابة (11.1) ، (11.2) كالتالى :

$$6\, q_1\, q_2^3 = -\,4\,\lambda$$

$$9\, q_1^2\, q_2^2 = -\,5\,\lambda$$

وبقسمة المعادلة الأولى على الثانية نحصل على :

$$\frac{6\, q_1\, q_2^3}{9\, q_1^2\, q_2^2} = \frac{-4\lambda}{-5\lambda} = \frac{4}{5}$$

ومنها يتضح أن :

$$\therefore q_1 = \frac{10}{12}\, q_2 = \frac{5}{6}\, q_2$$

بالتعويض عن q_1 فى (3 11) نحصل على :

$$q_2 = \frac{84}{25} = 3.36 \text{ وحدة} \qquad (12.1)$$

إذن :

$$q_1 = \frac{5}{6}\, q_2 = 2.8 \text{ وحدة} \qquad (12.2)$$

للتحقق من أن هذه الكميات تحقق للمستهلك أقصى إشباع ممكن ، نكتب الشرط الثانى للتعظيم وهو :

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & g_1 \\ f_{21} & f_{22} & g_2 \\ g_1 & g_2 & 0 \end{vmatrix} > 0 \qquad (13.1)$$

لإيجاد قيمة هذا المحدد نوجد أولا قيم عناصره المختلفة :

$$f_{11} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} = 6\, q_2^3 \; ; \; f_{12} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_2\, \partial q_1} = 18\, q_1\, q_2^2 \; ; \; g_1 = 4 \; ;$$

$$f_{21} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_1\, \partial q_2} = 18\, q_1\, q_2^2 \; ; \; f_{22} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2} = 18\, q_1^2\, q_2 \; ; \; g_2 = 5 .$$

بالتعويض عن هذه القيم فى (13.1) ثم قسمة الصف الأول البحدد على $2\,q_2^2$ والصف الثانى على $9\,q_1\,q_2$

نحصل على :

$$\triangle = \begin{vmatrix} 6\,q_2^3 & 18\,q_1\,q_2^2 & 4 \\ 18 q_1\,q_2^2 & 18\,q_1^2\,q_2 & 5 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix} = (2\,q_2^3)(9\,q_1\,q_2) \begin{vmatrix} 3\,q_2 & 9\,q_1 & \dfrac{2}{q_2^3} \\ 2\,q_2 & 2\,q_1 & \dfrac{5}{9q_1q_2} \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

إذن :

$$\triangle = 22.547\ 39 \qquad (13.2)$$

وبما أن هذا المحدد موجب ، فإن الشرط الثانى للتعظيم متحقق ، والكميات 2.8 وحدة من $ك_1$ و 3.36 وحدة من $ك_2$ تحقق فعلا نهاية عظمى لدالة المنفعة فى ظل قيد الميزانية .

٣٠٤ — السلوك الأمثل للمستهلك ومشكلة اختيار دالة المنفعة :

ذكرنا فيما تقدم أن القيم التى تأخذها U ليست مقاييس لمقادير المنفعة الكلية المتحصل عليها من استهلاك التوليفات المختلفة للسلع ، وإنما هى مجرد مؤشرات لا معنى لها سوى الدلالة على كبر أو صغر المنفعة الكلية لتوليفة معينة من السلع عن غيرها من التوليفات . والقيم التى تعطى لـ U ليست سوى قيم تحكمية[1] بمعنى أن الفرق بين أى قيمتين لتوليفتين مختلفتين لا يعنى سوى تفضيل المستهلك لتوليفة على الأخرى . ومن هنا فأى مجموعة من القيم تفى بالغرض . وبالتالى إذا استخدمت دالة معينة للمنفعة U فإنه يمكن استخدام أية دالة حافظة للترتيب أى منتظمة التزايد فى U لتحديد نفس السلوك الأمثل للمستهلك[2] . وتسمى الدالة G دالة منتظمة التزايد فى U إذا كانت $G(U_1) > G(U_0)$ عندما تكون $U_1 > U_0$. وهناك أمثلة عديدة على هذه الدوال ، مثل $G = aU + b$ ، $G = U^2$ وهكذا .

وسوف نثبت فى هذا القسم أن الكميات التوازنية من ك١ ، ك٢ التى نصل إليها بتعظيم U فى ظل قيد الميزانية هى نفسها التى يمكن الوصول إليها بتعظيم أية دالة أخرى حافظة لنفس ترتيب البدائل فى U مثل $G = F(U)$ ، حيث $U = f(q_1, q_2)$.

لتعظيم G فى ظل الميزانية نعظم الدالة التالية :

$$(14) \quad Z = G + \lambda(p_1 q_1 + p_2 q_2 - y)$$

---

(١) قيم تحكمية = Arbitrary Values

(٢) دالة منتظمة التزايد أو تحويلا مطردا أو دالة حافظة للترتيب = Monotonic Transformation

لاحظ أن G دالة فى U التى هى بدورها دالة فى q_1 ، q_2 . ولذلك فإنه يمكن الحصول على $\frac{\partial G}{\partial q_1}$ بتطبيق قاعدة تفاضل دالة الدالة كالتالى :

$$\frac{\partial G}{\partial q_1} = \frac{\partial G}{\partial U} \cdot \frac{\partial U}{\partial q_1} = F' f_1 \quad .$$

حيث F' هو المعامل التفاضلى الأول لـ G بالنسبة لـ U .

وبالمثل نحصل على $\frac{\partial G}{\partial q_2}$ كالتالى :

$$\frac{\partial G}{\partial q_2} = \frac{\partial G}{\partial U} \cdot \frac{\partial U}{\partial q_2} = F' f_2$$

يمكن إذن كتابة الشروط الأولى للتعظيم كالتالى :

$$(15.1) \qquad \frac{\partial z}{\partial q_1} = F' f_1 + \lambda p_1 = 0$$

$$(15.2) \qquad \frac{\partial z}{\partial q_2} = F' f_2 + \lambda p_2 = 0$$

$$(15.3) \qquad \frac{\partial z}{\partial \lambda} = p_1 q_1 + p_2 q_2 - y = 0$$

من (15.1) ، (15.2) نحصل على :

$$F' f_1 = -\lambda p_1$$

$$F' f_2 = -\lambda p_2$$

وبقسمة المعادلة الأولى على الثانية نحصل على نفس الشرط الأول لتعظيم الدالة U ، وهو الشرط (9.3) :

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

أى أن النسبة بين المنفعتين الحديتين ينبغى أن تساوى النسبة بين سعريهما بغض النظر عن الداله المختارة لتوضيح تفضيلات المستهلك . (طبيعى أن المنافع الحدية ستختلف من دالة لأخرى ، ولكن المهم ليس المقدار المطلق للمنافع وإنما فقط النسبة بينهما) .

أما الشرط (15.3) فهو قيد الميزانية .

الشروط الكافية للتعظيم المشروط للدالة G هى :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial q_2 \partial q_1} & \frac{\partial^2 z}{\partial \lambda \partial q_1} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial q_1 \partial q_2} & \frac{\partial^2 z}{\partial q_2^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial \lambda \partial q_2} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial \lambda \partial q_1} & \frac{\partial^2 z}{\partial \lambda \partial q_2} & 0 \end{vmatrix} > 0$$

ويمكن حساب عناصر المحدد السابق كما يلي :

أولا :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial q_1^2} = \frac{\partial}{\partial q_1}(F' f_1) = \frac{\partial F'}{\partial q_1} . f_1 + F' . \frac{\partial f_1}{\partial q_1}$$

$$= \left(\frac{\partial F'}{\partial u} . \frac{\partial u}{\partial q_1}\right) f_1 + F' \frac{\partial^2 f}{\partial q_1^2}$$

$$= (F'' f_1) f_1 + F' f_{11} = F'' f_1^2 + F' f_{11}$$

ثانياً : بالمثل يمكن أن تكتب :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial q_2^2} = F'' f_2^2 + F' f_{22}$$

ثالثاً :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial q_2 \, \partial q_1} = \frac{\partial (F' f_1)}{\partial q_2} = \frac{\partial F'}{\partial q_2} . f_1 + F' \frac{\partial f_1}{\partial q_2}$$

$$= \left(\frac{\partial F'}{\partial u} . \frac{\partial u}{\partial q_2}\right) . f_1 + F' \frac{\partial^2 f_1}{\partial q_2 \, \partial q_1}$$

$$= F'' f_2 . f_1 + F' f_{12}$$

وهي نفس قيمة $\frac{\partial^2}{\partial q_1 \, \partial q_2}$

رابعاً وأخيراً :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \lambda \, \partial q_1} = p_1 \; ; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial \lambda \, \partial q_2} = p_2$$

وبالتعويض من الشرط الأول عن p_1 ، p_2 يمكن كتابة :

$$g_1 = \frac{-F' f_1}{\lambda} \qquad\qquad g_2 = \frac{-F' f_2}{\lambda}$$

نستطيع الآن كتابة الشرط الثانى للتعظيم كالتالى :

$$(16.1)\ \Delta' = \begin{vmatrix} (F''f_1^2+F'f_{11}) & (F''f_2f_1+F'f_{12}) & -\dfrac{F'f_1}{\lambda} \\ (F''f_2f_1+F'f_{12}) & (F''f_2^2+F'f_{22}) & -\dfrac{F'f_2}{\lambda} \\ -\dfrac{F'f_1}{\lambda} & -\dfrac{F'f_2}{\lambda} & 0 \end{vmatrix} > 0$$

سنبين الآن أن هذا الشرط هو نفس الشرط الذى حصلنا عليه عند تعظيم U ، أى الشرط (8.1) . وسوف نستعين هنا ببعض خصائص المحددات التى سبق شرحها فى ٦٠٣ .

أولا : نضرب العمود الأخير فى $\frac{\lambda}{F'}$ ونضرب المحدد كله فى $\frac{F'}{\lambda}$ لتظل قيمته ثابتة :

$$\Delta' = \left(\frac{F'}{\lambda}\right) \begin{vmatrix} (F''f_1^2 + F'f_{11}) & (F''f_1f_2 + F'f_{12}) & -f_1 \\ (F''f_1f_2 + F'f_{12}) & (F''f_2^2 + F''f_{22}) & -f_2 \\ -F'f_1/\lambda & -F'f_1/\lambda & 0 \end{vmatrix}$$

ثانياً : نضرب الصف الأخير فى $\frac{\lambda}{F'}$ ونضرب المحدد كله فى $\frac{F'}{\lambda}$ لتظل قيمته ثابتة :

$$\Delta' = \left(\frac{F'}{\lambda}\right)^2 \begin{vmatrix} (F''f_1^2 + F'f_{11}) & (F''f_1f_2 + F'f_{12}) & -f_1 \\ (F''f_1f_2 + F'f_{12}) & (F''f_2^2 + F'f_{22}) & -f_2 \\ -f_1 & -f_2 & 0 \end{vmatrix}$$

ثالثاً : يمكن ضرب الصف الأخير فى $F''f_1$ ثم جمع الناتج على الصف الأول الأول وظل قيمة المحدد ثابتة :

$$\Delta' = \left(\frac{F'}{\lambda}\right)^2 \begin{vmatrix} F'f_{11} & F'f_{12} & -f_1 \\ (F''f_1f_2 + F'f_{12}) & (F''f_2^2 + F'f_{22}) & -f_2 \\ -f_1 & -f_2 & 0 \end{vmatrix}$$

رابعا : يمكن ضرب الصف الأخير فى $F'' f_2$ ثم جمع الناتج على الصف الثانى ، وتظل قيمة المحدد ثابتة :

$$\Delta' = \left(\frac{F'}{\lambda}\right)^2 \begin{vmatrix} F' f_{11} & F' f_{12} & -f_1 \\ F' f_{12} & F' f_{22} & -f_2 \\ -f_1 & -f_2 & 0 \end{vmatrix}$$

خامساً : عوض عن f_1 , f_2 من الشروط الأولى (15) أى :

$$f_1 = \frac{-\lambda p_1}{F'} \qquad\qquad f_2 = \frac{-\lambda p_2}{F'}$$

$$\Delta' = \left(\frac{F'}{\lambda}\right)^2 \begin{vmatrix} F' f_{11} & F' f_{12} & \dfrac{\lambda p_1}{F'} \\ F' f_{12} & F' f_{22} & \dfrac{\lambda p_2}{F'} \\ \dfrac{\lambda p_1}{F'} & \dfrac{\lambda p_2}{F'} & 0 \end{vmatrix}$$

سادساً : اضرب العمود الأخير فى $\frac{F'}{\lambda}$ واضرب المحدد فى $\frac{\lambda}{F'}$ لتظل قيمته ثابتة :

$$\Delta' = \left(\frac{F'}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{\lambda}{F'}\right) \begin{vmatrix} F' f_{11} & F' f_{12} & p_1 \\ F' f_{12} & F' f_{22} & p_2 \\ \frac{\lambda p_1}{F'} & \frac{\lambda p_2}{F'} & 0 \end{vmatrix}$$

سابعاً : اضرب الصف الأخير فى $\frac{F'}{\lambda}$ واضرب المحدد فى $\frac{\lambda}{F'}$ لتظل قيمته ثابتة :

$$\Delta' = \left(\frac{F'}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{\lambda}{F'}\right)^2 \begin{vmatrix} F'f_{11} & F'f_{12} & p_1 \\ F'f_{12} & F'f_{22} & p_2 \\ p_1 & p_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F'f_{11} & F'f_{12} & p_1 \\ F'f_{12} & F'f_{22} & p_2 \\ p_1 & p_2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= F'^2 \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & p_1 \\ f_{12} & f_{22} & p_2 \\ \frac{p_1}{F'} & \frac{p_2}{F'} & 0 \end{vmatrix} = F'^2 \left(\frac{1}{F'}\right) \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & p_1 \\ f_{12} & f_{22} & p_2 \\ p_1 & p_2 & 0 \end{vmatrix}.$$

∴ إذن الشرط الثانى لتعظيم z هو :

$$(17) \quad \Delta' = F' \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & p_1 \\ f_{12} & f_{22} & p_2 \\ p_1 & p_2 & 0 \end{vmatrix} > 0$$

أى أن $\Delta' = F' \, \Delta$ حيث Δ هو المحدد الوارد فى الشروط الكافية للتعظيم المشروط للدالة U .

وحيث أن F دالة منتظمة التزايد ، حسب افتراضنا الأساسى ، فإن F' لابد وأن تكون موجبة . وهذا معناه أن المحدد :

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & p_1 \\ f_{21} & f_{22} & p_2 \\ p_1 & p_2 & 0 \end{vmatrix}$$

لابد وأن يكون موجباً أيضاً . وهذا هو نفس الشرط الذى توصلنا إليه فى حالة تعظيم U (معادلة 8.1 بعد التعويض عن g_2, g_1) . أى أن الشرط الثانى لتعظيم المنفعة لا يتأثر بتغير الدالة المختارة للتعبير عن تفضيلات المستهلك .

ومن العرض السابق نخلص إلى النتيجة التالية :

إذا عظم المستهلك المنفعة الكلية فى ظل قيد الميزانية باستخدام دالة معينة للمنفعة ، فإن سلوكه لن يتغير فى كثير أو قليل مهما تغيرت دالة المنفعة ، طالما أن الدالة الجديدة هى دالة حافظة لنفس ترتيب البدائل فى الدالة الأصلية .

مثال : مستهلك دخله فى السنة ٣٠٠ جنيه ينفقه على سلعتين ك١ ، ك٢ ، أسعارهما هما ٥ ، ١٠ جنيهات على الترتيب . حدد نقطة توازن المستهلك بافتراض أن دالة منفعته هى $U = 5q_1 q_2$ ، وأثبت أن سلوك المستهلك لن يتغير إذا استبدلت دالة المنفعة بالدالة التالية : $G = 15 + 25 q_1^2 q_2^2$

الحل : لتعظيم U فى ظل قيد الميزانية $5 q_1 + 10 q_2 = 300$ نعظم الدالة V حيث

$$V = 5 q_1 q_2 + \lambda (5 q_1 + 10 q_2 - 300) \quad (18)$$

الشروط الضرورية للتعظيم هى :

$$(19) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial q_1} &= 5 q_2 + 5 \lambda = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial q_2} &= 5 q_1 + 10 \lambda = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \lambda} &= 5q_1 + 10 q_2 - 300 = 0 \end{aligned} \right.$$

ولحل هذه المعادلات بطريقة المحددات نعيد كتابتها كالتالى :

$$\begin{aligned} 5 q_2 + 5 \lambda &= 0 \\ 5 q_1 \qquad + 10 \lambda &= 0 \\ 5 q_1 + 10 q_2 \qquad &= 300 \end{aligned}$$

نحسب أولا قيمة المحدد التالى :

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 5 & 0 & 10 \\ 5 & 10 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 5\,(-50) + 5\,(50) = 500$$

ثم نحسب قيمة q_1 ، q_2 كالتالى :

$$q_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 10 \\ 300 & 10 & 0 \end{vmatrix}}{A} = \frac{300\ (50)}{500} = 30$$

$$q_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & 10 \\ 5 & 300 & 0 \end{vmatrix}}{A} = \frac{5(5 \times 300)}{500} = 15$$

وهكذا يتضح أن الكميات التوازنية هى :

$q_1 = 30$ وحدة $\qquad\qquad$ $q_2 = 15$ وحدة

وللتأكد من أن هذه الكميات تحقق تعظيم المنفعة نكتب الشرط الثانى للتعظيم ونحدد قيمة المحدد الذى يتضمنه الشرط كالتالى :

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & p_1 \\ f_{21} & f_{22} & p_2 \\ p_1 & p_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 5 & 0 & 10 \\ 5 & 10 & 0 \end{vmatrix} \begin{aligned} &= 0 - 5(-50) + 5(50) \\ &= 500 \end{aligned}$$

أى أنه كمية موجبة وهذا شرط النهاية العظمى .

إذا استبدلت دالة المنفعة بالدالة $G = 15 + 25\, q_1^2\, q_2^2$ فإن الشروط الأولى للتعظيم تصبح هى شروط تعظيم الدالة z حيث :

$$(20) \qquad z = 15 + 25\, q_1^2\, q_2^2 + \lambda\,(\,5\, q_1 + 10\, q_2 - 300\,)$$

الشروط الأولى للتعظيم :

$$(1) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial q_1} &= 50\, q_1 q_2^2 + 5\,\lambda &= 0 \\ \frac{\partial z}{\partial q_2} &= 50\, q_1\, q_2 + 10\,\lambda &= 0 \\ \frac{\partial z}{\partial \lambda} &= 5\, q_1 + 10\, q_2 - 300 &= 0 \end{aligned} \right.$$

ومن المعادلتين الأولى والثانية :

$$\frac{50\, q_1\, q_2^2}{50\, q_1^2\, q_2} = \frac{-5\,\lambda}{-10\,\lambda} = \frac{1}{2}$$

أى أن :

$$\frac{q_2}{q_1} = \frac{1}{2} \qquad\qquad q_2 = \frac{1}{2}\, q_1$$

وبالتعويض فى قيد الميزانية ، أو الشرط الضرورى الثالث نحصل على :

$$5\, q_1 + 10\left(\frac{1}{2}\, q_1 \right) = 300$$

$$10\, q_1 = 300 \quad \therefore\ q_1 = 30 \ \&\ q_2 = 15$$

وهى نفس الكميات التى حصلنا عليها بتعظيم U .

أما الشرط الثانى للتعظيم فهو :

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 z}{\partial q_1^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial q_2\, \partial q_1} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial \lambda\, \partial q_1} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 z}{\partial q_1\, \partial q_2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial q_2^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial \lambda\, \partial q_2} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 z}{\partial q_1\, \partial \lambda} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial q_2\, \partial \lambda} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 50\, q_2^2 & 100\, q_1 q_2 & 5 \\[2ex] 100 q_1 q_2 & 50\, q_1^2 & 10 \\[2ex] 5 & 10 & 0 \end{vmatrix} > 0$$

وبحساب قيمة هذا المحدد نجد أن :

$$\Delta' = 250 \,.\, 2 \times 4500 \ = 500 \times 4500$$

وهذه كمية موجبة حسب ما يتطلبه الشرط الثانى .

وبمقارنة قيمة المحدد الأخير بقيمة المحدد الذى يظهر فى الشروط الكافية

للتعظيم المشروط للدالة U يتضح أنه وفقاً التحليل النظرى :

$$\triangle' = \triangle \cdot F'$$

ولكن :

$$F' = \frac{\partial G}{\partial U} = \frac{\partial}{\partial U}(15 + U^2) = 2U = 4500$$

إذن :

$$\triangle' = \triangle \cdot (4500)$$

وهذه هى نفس النتيجة التى وصلنا إليها مما سبق لأن $\triangle = 500$

٤ . ٤ . منحنيات الطلب الفردى : اشتقاقها وخواصها .

٤ . ٤ . ١ . اشتقاق منحنيات الطلب .

هدفنا الآن أن نوضح أنه يمكن اشتقاق منحنى طلب المستهلك على سلعة من السلع من تحليل تعظيم المنفعة . وطريقة الاشتقاق سهلة وبسيطة وقد جربناها فى الأمثلة السابقة فعلا . فالشروط الأولى للتعظيم المشروط فى حالة سلعتين تعطى ٣ معادلات فى ٣ مجاهيل هى q_1 ، q_2 ، λ ، والحصول على دوال الطلب لا يتطلب أكثر من حل هذه المعادلات آنياً فى هذه المجاهيل الثلاثة . فهذا سيعطينا q_1 ، q_2 كدوال فى p_1 ، p_2 ، $\bar{y}$

لتسهيل العرض نأخذ دالة منفعة محددة ولتكن $U = a + bq_1 q_2$ حيث a , b ثابتين . وبافتراض أن المستهلك يعظم منفعته الكلية فى ظل قيد الميزانية ، فإننا نكتب المعادلة التالية :

$$(22) \quad V = a + b\, q_1 q_2 + \lambda\,(p_1 q_1 + p_2 q_2 - \bar{y})$$

ونحصل على الشروط الأولى للتعظيم المشروط للمنفعة بمساواة التفاضلات الجزئية لـ V بالنسبة لـ q_1 ، q_2 ، λ بالصفر :

$$
(23)\quad \left\{ \begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial q_1} &= b\,q_2 + p_1\,\lambda = 0 \\
\frac{\partial V}{\partial q_2} &= b\,q_1 + p_2\,\lambda = 0 \\
\frac{\partial V}{\partial \lambda} &= p_1 q_1 + p_2 q_2 - \overline{y} = 0
\end{aligned} \right.
$$

من المعادلتين الأوليين نصل إلى أن :

$$\frac{b\,q_2}{b\,q_1} = \frac{-\lambda\,p_1}{-\lambda\,p_2}$$

$$q_2 = q_1\,\frac{p_1}{p_2}$$

بالتعويض فى المعادلة الثالثة نحصل على :

$$p_1 q_1 + p_2 \left(q_1\,\frac{p_1}{p_2} \right) = \overline{y}$$

إذن :

$$2\,p_1 q_1 = \overline{y}$$

ومنها نحصل على q_1 بدلالة $\overline{y}$ ، p_1 وهى معادلة الطلب الفردى على ك١ :

$$q_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{y}}{p_1}\right) \qquad (24.1)$$

وبالمثل نحصل على q_2 بدلالة $\overline{y}$ ، p_2 :

$$q_2 = q_1 \frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\overline{y}}{p_1} \cdot \frac{p_1}{p_2}$$

إذن :

$$q_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{y}}{p_2}\right) \qquad (24.2)$$

أى أن الكمية المطلوبة من سلعة معينة تتناسب عكسياً مع سعرها وطردياً مع دخل المستهلك .

لاحظ أن الشكل المحدد الذى افترضناه لدالة المنفعة أوصلنا إلى معادلات للطلب تحتوى على الدخل وسعر السلعة المعنية ، فى حين أن أشكالا أخرى لدالة المنفعة يمكن أن توصلنا لدوال طلب تحتوى على سعرى السلعتين $q_i = \phi(p_1 , p_2 , \overline{y})$ كما فى المثال التالى .

مثال : إذا كانت دالة المنفعة لمستهلك ما هى :

$$U = (q_1 - 10)^{0.5} (q_2 - 20)^{0.5}$$

فإن التعظيم المشروط لهذه الدالة يكافىء تعظيم الدالة V حيث :

$$V = (q_1 - 10)^{0.5} (q_2 - 20)^{0.5} + \lambda \left(p_1 q_1 + p_2 q_2 - \overline{y}\right) \qquad (24.3)$$

الشروط الضرورية لتعظيم V هى :

$$(24.4) \qquad \frac{\partial V}{\partial q_1} = 0.5\,(q_1-10)^{0.5-1}(q_2-20)^{0.5} + \lambda\, p_1 = 0$$

$$(24.5) \qquad \frac{\partial V}{\partial q_2} = 0.5\,(q_1-10)^{0.5}(q_2-20)^{0.5-1} + \lambda\, p_2 = 0$$

$$(24.6) \qquad \frac{\partial V}{\partial \lambda} = p_1 q_1 + p_2 q_2 - \bar{y} = 0$$

لكن الشرطين الأول والثانى يمكن كتابتهما كالتالى :

$$(24.7) \qquad \frac{0.5\,U}{(q_1-10)} = -\lambda\, p_1$$

$$(24.8) \qquad \frac{0.5\,U}{(q_2-20)} = -\lambda\, p_2$$

وبقسمة (24.7) على (24.8) وإعادة ترتيب الحدود نحصل على :

$$(24.9) \qquad q_1 = \left(10 - 20\,\frac{p_2}{p_1}\right) + \frac{p_2}{p_1}\cdot q_2$$

وبالتعويض عن q_1 فى قيد الميزانية (24.6) وإعادة ترتيب الحدود نحصل على :

$$(24.10) \qquad q_2 = 10 + \frac{\bar{y} - 10\,p_1}{2\,p_2}$$

وبالتعويض عن q_2 فى (24.9) نحصل على :

$$q_1 = 5 + \frac{\overline{y} - 20\,p_2}{2\,p_1} \qquad (24.11)$$

ومن الواضح أن كلا من q_1 , q_2 دالة فى الدخل وسعرى السلعتين .

٤ . ٤ . ٢ . خواص منحنيات الطلب : لدوال الطلب خصائص عديدة ولكننا سنركز هنا على خاصيتين رئيسيتين وخاصية ثانوية لمنحنيات الطلب الفردى :

الخاصية الرئيسية الأولى : الطلب على سلعة ما هو دالة وحيدة القيمة فى الأسعار والدخل(١) :

وهذه الخاصية مترتبة فى الواقع على كون منحنيات السواء منحنيات محدبة من ناحية نقطة الأصل ، وبالتالى فإن هنا قيمة عظمى واحدة للمنفعة وبالتالى توليفة واحدة من السلعتين تناظر مستوى معين للدخل والأسعار .

الخاصية الرئيسية الثانية : دوال الطلب على سلعة ما هى دوال متجانسة من الدرجة الصفرية فى الأسعار والدخل(٢) :

معنى هذه الخاصية هو أن لو تغير الدخل بنسبة معينة وتغيرت أسعار جميع السلع بنفس النسبة ، فإن الكمية المطلوبة من السلعة تظل كما هى بلا تغير ، وتوصل المستهلك إلى تعظيم المنفعة الكلية .

---

(١) دالة وحيدة القيمة = A single—Valued Function

(٢) دالة متجانسة = Homogeneous Function

الشكل العام لدالة الطلب هو :

$$q_1 = g\,(p_1\,,\,p_2\,,\,\ldots\,,\,p_n\,,\,\overline{y}\,)$$

ومعنى أن تكون الدالة متجانسة من الدرجة الصفرية ، أنه إذا تغير الدخل بنسبة k ، وتغيرت جميع الأسعار بنفس النسبة k ($k = 2$ تعنى تضاعف الدخل وتضاعف أسعار جميع السلع) فإن الكمية المطلوبة q_1 تظل على حالها بلا أدنى تغير . أي أن :

$$q^1_1 = g\,(\,k\,p_1\,,\,k\,p_2\,,\,\ldots\,,\,k\,p_n\,,\,k\,y\,)$$

$$= k^0\,g\,(\,p_1\,,\,p_2\,,\,\ldots\,,\,p_n\,,\,\overline{y}\,)$$

$$= g\,(\,p_1\,,\,p_2\,,\,\ldots\,,\,p_n\,,\,\overline{y}\,) = q_1$$

ومعنى هذه النتيجة من الناحية الاقتصادية هو عدم خضوع المستهلك لظاهرة الخداع النقدى(١) :

حيث أن المستهلك لا يزيد من الكميات على مختلف السلع إذا ارتفع دخله النقدى بنسبة معينة ، وارتفعت الأسعار بنفس النسبة لأن ارتفاع الأسعار بنفس النسبة فى هذه الحالة يعنى أن المستهلك يظل عند نفس المستوى من الغنى (أو الفقر) وبالتالى ليس هناك ما يدعو لتغير سلوكه الإنفاقى . أما إذا انساق المستهلك وراء التغير فى دخله النقدى بالرغم من تغير الأسعار بنفس النسبة فإنه يكون فى هذه الحالة واقعاً تحت وهم الإزدياد الظاهرى فى درجة غناه ، أى أنه ينخدع بالزيادة النقدية فى دخله .

---

(١) الخداع النقدى = Money illusion

يمكن الوقوف على افتراض عدم وجود خداع نقدى بكتابة معادلة خط الميزانية كالتالى :

$$q_2 = \frac{v}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} q_1$$

فإذا افترضنا أن الأسعار والدخل قد تغيرت بنفس النسبة k فإن الكمية المشتراة من q_2 تصبح :

$$q_2 = \frac{k\ v}{k\ p_2} - \frac{k\ p_1}{k\ p_2} q_1 = q_2$$

وبالمثل يمكن أن نكتب معادلة مشابهة لـ q_1 .

إثبات أن شروط تعظيم المنفعة تظل كما هى إذا تغيرت جميع الأسعار وتغير الدخل بنسبة معينة . إذا تغير الدخل بنسبة k وتغيرت الأسعار أيضاً بنفس النسبة فى حالة سلعتين فقط ك١ ، ك٢ ، يصبح قيد الميزانية :

$$k\ p_1\ q_1 + k\ p_2\ q_2 - k\ \overline{y} = 0$$

وللتعظيم المشروط للمنفعة ، نكتب الدالة :

$$V = f(q_1, q_2) + \lambda(k\ p_1\ q_1 + k\ p_2\ q_2 - k\ \overline{y}) \tag{25}$$

الشروط الأولى للتعظيم هى :

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = f_1 + \lambda\ k\ p_1 = 0 \tag{26.1}$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_2} = f_2 + \lambda\ k\ p_2 = 0 \tag{26.2}$$

$$(26.3) \qquad \frac{\partial V}{\partial \lambda} = k\, p_1\, q_1 + k\, p_2\, q_2 - k\, \overline{y} = 0$$

من المعادلتين (26.1) , (26.2) نحصل على :

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{-\lambda\, k\, p_1}{-\lambda\, k\, p_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

وهذا هو نفس الشرط الذى حصلنا عليه عند تعظيم U فى ظل قيد الميزانية الأصلى وهو (9.3) .

الشرط (26.3) يمكن إعادة كتابته كالتالى :

$$k\, p_1\, q_1 + k\, p_2\, q_2 - k\, \overline{y} = 0$$

وبقسمة الطرفين على k نحصل على :

$$p_1\, q_1 + p_2\, q_2 - \overline{y} = 0$$

وهو نفس قيد الميزانية الأصلى .

أى أن معادلات الطلب فى ظل قيد الميزانية المعدل تشتق من نفس مجموعة المعادلات التى حصلنا عليها فى ظل قيد الميزانية الأصلى ، وعليه فإننا نحصل على دوال طلب متطابقة فى الحالتين .

ولبيان أن الشروط الثانية للتعظيم لا تتأثر بتغير الدخل والأسعار بنفس القسمة نكتب الشرط الثانى وهو :

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & g_1 \\ f_{21} & f_{22} & g_2 \\ g_1 & g_2 & 0 \end{vmatrix} > 0$$

الآن ، فى ظل قيد الميزانية الجديد :

$$g_1 = k\, p_1 \qquad\qquad g_2 = k\, p_2$$

الشرط هو :

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & k\, p_1 \\ f_{21} & f_{22} & k\, p_2 \\ k p_1 & k p_2 & 0 \end{vmatrix} > 0 \tag{27}$$

وبقسمة العمود الأخير والصف الأخير على k وضرب المحدد فى k^2 لتظل قيمته ثابتة ، يأخذ الشرط الصورة التالية :

$$k^2 \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & p_1 \\ f_{21} & f_{22} & p_2 \\ p_1 & p_2 & 0 \end{vmatrix} > 0$$

وحيث أن k^2 موجبة ، فإن هذا الشرط يتطلب أن يكون المحدد المكتوب أعلاه موجب أيضاً . وهذا هو نفس شرط تعظيم المنفعة فى ظل قيد الميزانية الاصلى . وبهذا يكتمل إثبات أن دوال الطلب متجانسة من الدرجة الصفرية فى الدخل والأسعار .

مثال : بافتراض أن دالة المنفعة هى $U = q_1 q_2$ اثبت أن دالتى الطلب متجانستين من الدرجة الصفرية فى الدخل والأسعار .

الحل : الشروط الأولى لتعظيم المنفعة فى ظل قيد الميزانية الأصلى $p_1 q_1 + p_2 q_2 = \overline{y}$ نحصل عليها كالمعتاد بمساواة التفاضلات الجزئية الأولى للدالة :

$$V = q_1 q_2 + \lambda \left(p_1 q_1 + p_2 q_2 - \overline{y} \right)$$

بالصفر . إذن لدينا المعادلات الآتية :

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = q_2 + \lambda p_1 = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_2} = q_1 + \lambda p_2 = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = p_1 q_1 + p_2 q_2 - \overline{y} = 0$$

وبحل هذه المعادلات نحصل على دالتى الطلب :

$$q_1 = \frac{\overline{y}}{2p_1} \qquad q_2 = \frac{\overline{y}}{2p_2}$$

افرض الآن أن الدخل والأسعار تغيرت بالنسبة k ، بحيث أصبح قيد الميزانية :

$$k\, p_1 q_1 + k\, p_2 q_2 - k\, \overline{y} = 0$$

فى هذه الحالة تصبح الشروط الأولى للتعظيم المشروط المنقحة :

$$q_2 + \lambda\,(k\,p_1) = 0$$

$$q_1 \qquad + \lambda\,(k\,p_2) = 0$$

$$q_1\,(k\,p_1) + q_2\,(k\,p_2) = (k\,\overline{y})$$

وبحل هذه المعادلات الثلاثة نحصل على q_1 ، q_2 :

$$q_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & kp_1 \\ 0 & 0 & kp_2 \\ k\overline{y} & kp_3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 & kp_1 \\ 1 & 0 & kp_2 \\ kp_1 & kp_2 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-1(-k^2\,p_2\,\overline{y}\,)}{1(-k^2 p_1 p_2) + kp_1(kp_2)} = \frac{k^2\,p_2\,\overline{y}}{2\,k^2\,p_1\,p_2} = \frac{\overline{y}}{2p_1}$$

$$q_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & kp_1 \\ 1 & 0 & kp_2 \\ kp_1 & k\overline{y} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 & kp_1 \\ 1 & 0 & kp_3 \\ kp_1 & kp_2 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{k\,p_1\,(\,k\,\overline{y}\,)}{2\,k^3\,p_1\,p_2} = \frac{\overline{y}}{2p_2}$$

وهى نفس معادلات الطلب التى حصلنا عليها فى ظل قيد الميزانية الأصلى .

أى أن الكميات المطلوبة لا تتغير إذا تغير الدخل وتغيرت الأسعار بنفس النسبة .

الشرط الثانى للتعظيم قبل تغير الدخل والأسعار هو :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & p_1 \\ 1 & 0 & p_2 \\ p_1 & p_2 & 0 \end{vmatrix} > 0 \quad \therefore \quad -1(-p_1p_2) + p_1(p_2 > 0$$

أى أن $2\,p_1\,p_2 > 0$

وهو صحيح بالطبع .

بالمقارنة الشرط الثانى للتعظيم بعد تغير الأسعار والدخل هو :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & kp_1 \\ 1 & 0 & kp_2 \\ kp_1 & kp_2 & 0 \end{vmatrix} > 0 \quad \therefore \quad -1(-k^2p_1p_2)+kp_1(-kp_2) > 0$$

$$k^2(2\,p_1\,p_2) > 0 = \quad 2\,p_1\,p_2 > 0$$

وهو نفس الشرط السابق .

<u>الخاصية الثانوية من خواص منحنيات الطلب :</u>

مجموع المرونة السعرية الذاتية والمرونات المقطعية والمرونة الدخلية للطلب يساوى صفر .

هذه الخاصية مترتبة على كون منحنيات الطلب متجانسة من الدرجة الصفرية .

فطبقاً لنظرية أويلر للدوال المتجانسة ، إذا كانت الدالة :

$$q_i = f_i \left(p_1 , p_2 , \dots \ p_n , y \right)$$

متجانسة من الدرجة r فإن :

$$p_1 \frac{\partial q_i}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial q_i}{\partial p_2} + \cdots$$

$$+ p_n \frac{\partial q_i}{\partial p_n} + y \frac{\partial q_i}{\partial y} = r\, q_i$$

بقسمة طرفى المعادلة على q_i نحصل على المعادلة التالية :

$$\left(\frac{p_1}{q_i} \cdot \frac{\partial q_i}{\partial p_1} \right) + \left(\frac{p_2}{q_i} \cdot \frac{\partial q_i}{\partial p_2} \right) + \cdots$$

$$+ \left(\frac{p_n}{q_i} \cdot \frac{\partial q_i}{\partial p_n} \right) + \left(\frac{y}{q_i} \cdot \frac{\partial q_i}{\partial y} \right) = r$$

من الواضح أن :

(ا) المقدار الأول من اليسار هو المرونة السعرية الذاتية للطلب عندما تكون $i = 1$

(ب) المقادير الثانية والثالثة . . ورقم n هى المرونات السعرية المقطعية للطلب .

(حـ) المقدار الأخير فى الطرف الأيسر للمعادلة هو المرونة الدخلية للطلب .

وحيث أن :

(ى) $r = 0$ لأن دوال الطلب متجانسة من الدرجة الصفرية فإننا نكون قد أثبتنا الخاصية المذكورة أعلاه وهى أن :

مجموع المرونات السعرية الذاتية والمقطعية والمرونة الدخلية للطلب يساوى صفر .

وبهذا يكتمل شرحنا لخصائص منحنيات الطلب .

٤ . ٥ . تحليل أثر التغير فى سعر سلعة ما على الكمية المطلوبة منها :

افرض أن المستهلك مستقر عند وضع توازن معين وليكن الوضع الذى تعبر عنه الشروط الأولى للتعظيم المشروط المذكورة فى ٤ . ٢ :

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} f_1 + \lambda p_1 &= 0 \\ f_2 + \lambda p_2 &= 0 \\ p_1 q_1 + p_2 q_2 - y &= 0 \end{aligned} \right.$$

نفرض الآن حدوث التغيرات التاليه فى الأسعار والدخل :

$$p_1 \longrightarrow p_1 + d\,p_1$$

$$p_2 \longrightarrow p_2 + d\,p_2$$

$$y \longrightarrow y + d\,y$$

طبيعى أن الكميات المشتراة من السلعتين ك$_1$ ، ك$_2$ سوف تتغير وسوف ينتقل المستهلك إلى وضع توازنى جديد يحقق الشروط الأولى للتعظيم فى ظل

الأسعار الجديدة والدخل الجديد ، وغرضنا الآن هو تحديد هذا الوضع التوازنى الجديد أى إيجاد الكميات الجديدة $(q_1 + d\,q_1)$ ، $(q_2 + d\,q_2)$ ، وحيث أننا نعرف q_1 ، q_2 من البداية فإن المطلوب هو إيجاد قيمة $d\,q_1$ ، $d\,q_2$ وتحليل عملية انتقال المستهلك من الوضع التوازنى الأصلى إلى الوضع التوازنى الجديد ، أى تحليل الأثر السعرى . للحصول على هذه الكميات نفرض أن كل المتغيرات المؤثرة فى سلوك المستهلك تتغير فى نفس الوقت . أى نفترض تغير λ ، y ، p_2 ، p_1 بالإضافة إلى تغير q_1 ، q_2 ونجرى التفاضل الكلى على كل معادلة من المعادلات (7) .

لإجراء التفاضل الكلى على المعادلة الأولى فى (7) نعيد كتابتها أولا كالتالى :

$$F = f_1 + \lambda\, p_1 = \varphi\,(q_1, q_2, p_1, p_2, y, \lambda) = 0$$

التفاضل الكلى للدالة فى صورتها العامة هو :

$$dF = \frac{\partial F}{\partial q_1} \cdot dq_1 + \frac{\partial F}{\partial q_2} \cdot dq_2 + \frac{\partial F}{\partial p_1} \cdot dp_1 + \frac{\partial F}{\partial p_2} \cdot d\,p_2$$

$$+ \frac{\partial F}{\partial y}\,d\,y + \frac{\partial F}{\partial \lambda}\,d\,\lambda = 0$$

وبالتعويض عن تفاضلات F نحصل على :

$$f_{11}\,d\,q_1 + f_{12}\,d\,q_2 + \lambda\,d\,p_1 + 0 + p_1\,d\,\lambda = 0 \qquad (28.1)$$

بالمثل نحصل على التفاضل الكلى للمعادلة الثانية فى (7) :

$$f_{21}\,d\,q_1 + f_{22}\,q_2 + 0 + \lambda\,d\,p_2 + p_2\,d\,\lambda = 0 \qquad (28.2)$$

وكذلك نحصل على التفاضل الكلى للمعادلة الثالثة فى (7) :

$$p_1\,d\,q_1 + p_2\,d\,q_2 + q_1\,d\,p_1 + q_2\,d\,p_2 - d\,y + 0 = 0 \qquad (28.3)$$

حيث أن الزيادة فى الدخل والأسعار تكون معلومة وكذلك الأسعار والكميات الأصلية فإننا نحل المعادلات (28.1) — (28.3) فى $d\,q_1 , d\,q_2 , d\,\lambda$ بطريقة المحددات بعد إعادة كتابتها كالتالى :

$$f_{11}\,d\,q_1 + f_{12}\,d\,q_2 + p_1\,d\,\lambda = -\lambda\,d\,p_1 \qquad (29.1)$$

$$f_{21}\,d\,q_1 + f_{22}\,d\,q_2 + p_2\,d\,\lambda = -\lambda\,d\,p_2 \qquad (29.2)$$

$$p_1\,d\,q_1 + p_2\,d\,q_2 \qquad = (d\,y - q_1\,d\,p_1 - q_2\,d\,p_2) \qquad (29.3)$$

نكتب قيمة $d\,q_1$ كالتالى :

$$d\,q_1 = \frac{D_1}{\Delta}$$

حيث :

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & p_1 \\ f_{21} & f_{22} & p_2 \\ p_1 & p_2 & 0 \end{vmatrix}$$

وهو نفس المحدد الذى نحصل عليه فى الشرط الثانى لتعظيم المنفعة .

الآن نكتب قيمة المحددات المرافقة لعناصر هذا المحدد كالتالى :

$$D_{11} = -p_2^2 \qquad D_{12} = -p_1 p_2 \qquad D_{13} = f_{21} p_2 - f_{22} p_1$$

$$D_{22} = -p_1^2 \qquad D_{23} = f_{11} p_2 - f_{12} p_1 \qquad D_{33} = f_{11} f_{22} - f_{12} f_{21}$$

أما المحدد D_1 فهو :

$$D_1 = \begin{vmatrix} -\lambda\, dp_1 & f_{12} & p_1 \\ -\lambda\, dp_2 & f_{22} & p_2 \\ k & p_2 & 0 \end{vmatrix}$$

حيث :

$$k = d\,y - q_1\, d\, p_1 - d_2\, d\, p_2$$

إذن :

$$D_1 = -\lambda\, dp_1\,(-p_2^2) - f_{12}(-p_2 k) + p_1(-\lambda\, dp_2 \cdot p_2 - f_{22} k)$$

$$= -\lambda\,(-p_2^2)\,dp_1 + \lambda\,(-p_1 p_2)\,dp_2 + (f_{12} p_2 - f_{22} p_1)\,k$$

وحيث أن المقادير الموضوعة بين أقواس ليست إلا D_{11} ، D_{12} ، D_{13} فإننا نكتب :

$$D_1 = -\lambda\, D_{11}\, d\, p_1 + \lambda\,(D_{13})\, d\, p_2 + D_{13}\, k$$

وبالتعويض عن D_1 فى معادلة $d\, q_1$ نحصل على النتيجة التالية :

$$d\, q_1 = \frac{-\lambda\, D_{11}\, d\, p_1 + \lambda\, D_{12}\, d\, p_2 + D_{13}\, k}{\triangle} \tag{30}$$

بالمثل نحصل على $d\, q_2$ من المعادلة :

$$d\, q_2 = \frac{D_2}{\triangle}$$

حيث :

$$D_2 = \begin{vmatrix} f_{11} & -\lambda\, dp_1 & p_1 \\ f_{21} & -\lambda\, dp_2 & p_2 \\ p_1 & k & 0 \end{vmatrix}$$

وبحساب قيمة هذا المحدد نجد أن :

$$D_2 = f_{11}(-p_2 k) + \lambda\, dp_1(-p_1 p_2) + p_1(f_{21} k - (-\lambda\, dp_2)\, p_1)$$

وبإعادة ترتيب الحدود ، واستخدام تعاريف المحددات المرافقة لعناصر المحدد نستطيع أن نكتب قيمة D_2 على النحو التالى :

$$D_2 = \lambda\, D_{12}\, d\, p_1 - \lambda\, D_{22}\, d\, p_2 - k\,(f_{11}\, p_2 - f_{12}\, p_1)$$

$$= \lambda\, D_{12}\, d\, p_1 - \lambda\, D_{22}\, d\, p_2 - D_{23}\, k$$

وبالتعويض عن D_2 فى معادلة $d\, q_2$ نحصل على النتيجة التالية :

$$(31) \qquad d\, q_2 = \frac{\lambda\, D_{12}\, d\, p_1 - \lambda\, D_{22}\, d\, p_2 - D_{23}\, k}{\Delta}$$

بعد أن حصلنا على قيمة كل من $d\, q_1$, $d\, q_2$ نريد الآن أن نعرف أثر تغير السعر p_1 (بمقدار $d\, P_1$) على الكمية المطلوبة منك q_1 بفرض ثبات جميع المتغيرات الأخرى y , p_2 . أى أننا نريد أن نحصل على $\frac{d\, q_1}{d\, p_1}$ بفرض ثبات العوامل الأخرى ، وهذا المقدار هو $\frac{\partial\, q_1}{\partial\, p_1}$ طبعاً . تثبيت العوامل الأخرى يعنى أن تساوى dy , dp_2

صفر فى المعادلة (30) . بقسمة طرفى المعادلة (٣٠) على dp_1 ومساواة dp_2 , dy بالصفر نحصل على النتيجة التالية :

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_1} = \frac{-\lambda D_{11}\, dp_1 + \lambda D_{12}(0) + D_{13}(0 \cdot q_1\, dp_1 - q_2 \cdot 0)}{dp_1 \cdot \Delta}$$

إذن :

$$(32)\quad \frac{\partial q_1}{\partial p_1} = \frac{-\lambda D_{11}}{\Delta} - q_1 \frac{D_{13}}{\Delta}$$

بنفس الطريقة يمكن أن نحسب أثر تغير الدخل y (بمقدار dy) على الكمية المطلوبة من السلعة ك١ ، بفرض ثبات جميع العوامل الأخرى ، وهذا يعنى تثبيت p_1 , p_2 ، أى أننا نفترض أن $dp_1 = dp_2 = 0$ للحصول على $\frac{dq_1}{dy}$ والتى تساوى فى هذه الحالة $\frac{\partial q_1}{\partial y}$. إذن بقسمة طرفى (٣٠) على dy ومساواة كل من dp_1 , dp_2 بالصفر نحصل على النتيجة التالية :

$$\frac{\partial q_1}{\partial y} = \frac{-\lambda D_{11}(0) + \lambda D_{12}(0) + D_{13}(dy - q_1 \cdot 0 - q_2 \cdot 0)}{dy\ \Delta}$$

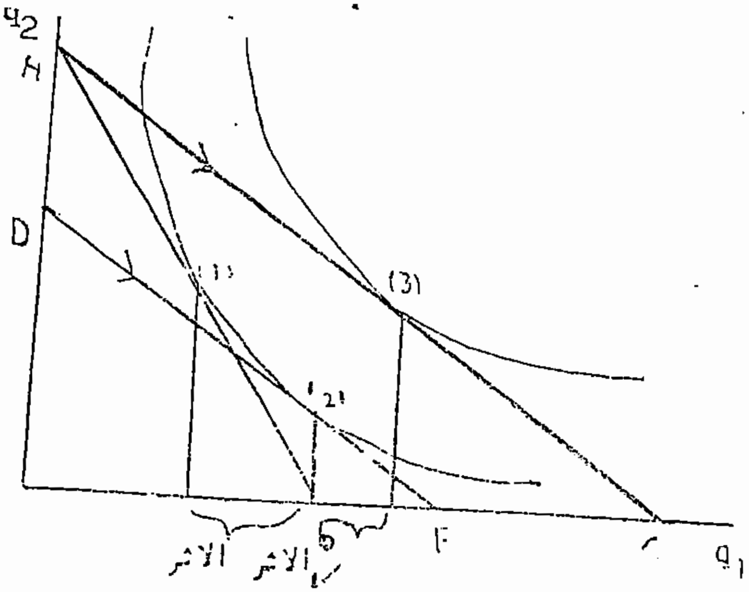
$$(33)\qquad \frac{\partial q_1}{\partial y} = \frac{D_{13}}{\Delta}$$

بالطبع يؤدى تغير سعر السلعة ك١ إلى انتقال المستهلك إلى منحنى سواء جديد

بحيث يتحقق له أقصى إشباع عند تماس خط السعر الجديد مع هذا المنحنى الجديد للسواء. وغرضنا الآن هو دراسة عملية انتقال المستهلك من الوضع التوازنى القديم إلى الوضع التوازنى الجديد.

لتوضيح القوى التى تؤدى فى النهاية إلى تحديد نقطة التوازن الجديدة نستعين بشكل (٥) حيث نفترض انخفاض سعر ك١ وانتقال المستهلك نتيجة لذلك من الوضع (١) إلى الوضع (٣). ويتم تحليل هذه النقلة بتقسيم الخطوة من الوضع الأصلى (١) إلى الوضع الجديد (٣) إلى خطوتين كالتالى :

[ا] خطوة إلى وضع مؤقت (٢) — أى إحلال ك١ محل ك٢ للرخص النسبى لـ ك١ .



شكل رقم (٥) أثر انخفاض سعر ك١

[ب] خطوة من الوضع المؤقت (٢) إلى الوضع الجديد (٣) — أى زيادة استهلاك ك١ (زيادة الدخل الحقيقى) .

أى أننا نرسم موازياً لخط السعر الجديد يمس منحنى السواء الأصلى ، دلالة على أننا سحبنا من المستهلك ما طرأ عليه من زيادة فى الدخل الحقيقى . فيكون الانتقال من (١) إلى (٢) معبراً عن رد الفعل لتغير الأسعار النسبية فقط . أما الانتقال من (٢) إلى (٣) فهو يعبر عن رد فعل المستهلك للتحسن فى دخله الحقيقى(١) .

فلنر الآن كيف نستطيع أن نحلل الأثر السعرى جبرياً .

افرض الآن أنه فى نفس الوقت الذى تغير فيه سعر السلعة ك١ غيرنا دخل المستهلك تغيراً معوضاً للتغير فى السعر ، بحيث يظل على نفس حالته السابقة من الفقر أو الغنى . فإذا انخفض سعر السلعة ك١ مثلاً ، نفرض أننا نخفض أيضاً من دخل المستهلك بحيث يظل عند نفس منحنى السواء الأصلى . فى هذه الحالة تكون $d\,U = 0$ ويكون :

$$f_1\, d\, q_1 + f_2\, d\, q_2 = 0$$

وحيث أنه من شروط التوازن أن تتحقق المعادلة :

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{P_1}{P_2}$$

فبالتعويض عن f_1 بقيمتها ($f_1 = f_2\, P_1 / P_2$) فى المعادلة السابقة نحصل على :

---

(١) الأثر الدخلى = Income effect
الأثر الإحلالى = Substitution effect

$$f_2 \frac{p_1}{p_2} d q_1 + f_2 d q_2 = 0$$

وبالقسمة على f_2 والضرب فى p_2 نحصل على :

$$(34) \qquad p_1 d q_1 + p_2 d q_2 = 0$$

ولكن

بالنظر إلى تعريف k فى المعادلة (29.3) نجد أن :

$$k = d y - q_1 d p_1 - q_2 d p_2 = p_1 d q_1 + p_2 d q_2$$

إذن فى هذه الحالة :

$$(35) \qquad k = 0$$

بالتعويض عن (35) فى (30) مع مراعاة أن $d p_2 = 0$ لافتراض ثبات سعر السلعة ك٢ ، نحصل على :

$$d q_1 = \frac{- \lambda D_{11} d p_1}{\triangle}$$

وبقسمة الطرفين على $d p_1$ ومراعاة أن $\frac{d q_1}{d p_1}$ تساوى $\frac{\partial q_1}{\partial p_1}$ فى هذه الحالة،

نحصل على :

$$(36) \qquad \left(\frac{\partial q_1}{\partial p_1}\right)_{\overline{U}} = - \frac{\lambda D_{11}}{\triangle}$$

لاحظ أننا كتبنا $\overline{U}$ فى ذيل القوس الذى يحتوى على $\frac{\partial q_1}{\partial p_1}$ للتذكير بأن

$\frac{\partial q_1}{\partial p_1}$ هى معدل تغير q_1 بالنسبة لـ p_1 وذلك :

باقتراض أن تغير السعر قد عوضه تغير الدخل بحيث يظل المستهلك على نفس منحنى السواء ، أى بحيث تظل U ثابتة عن مستوى معين وليكن $\overline{U}$. وهذه المعادلة مختلفة طبعاً عن المعادلة (32) التى تعطينا $\frac{\partial q_1}{\partial p_1}$ بفرض ثبات الدخل وسعر السلعة الأخرى . والمتأمل فى هاتين المعادلتين (32) , (36) سوف يلاحظ وجود علاقة بينهما ، وذلك لأن الطرف الأيمن لـ (36) هو نفسه الحد الأول فى (32) . وهكذا نستطيع أن نعيد كتابة (32) كالتالى :

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_1} = \left(\frac{\partial q_1}{\partial p_1} \right)_{\overline{U}} - q_1 \frac{D_{13}}{\triangle}$$

لكن $\frac{D_{13}}{\triangle}$ تساوى $\frac{\partial q_1}{\partial y}$ فى المعادلة (33) .

إذن نستطيع أن نكتب معادلة معدل تغير الكمية المطلوبة من السلعة q_1 بالنسبة للتغير فى سعرها ، بفرض ثبات العوامل الأخرى كالتالى :

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_1} = \left(\frac{\partial q_1}{\partial p_1} \right)_{\overline{U}} - q_1 \left(\frac{\partial q_1}{\partial y} \right)_{\overline{p}} \qquad (37)$$

وقد أضفنا $\overline{p}$ فى ذيل القوس $(\partial q_1 / \partial p_1)$ للتذكير بثبات سعرى السلعتين عند مستوى معين .

حصلنا الآن على معادلة هامة يطلق عليها معادلة سلاتسكي(١) . وهي تبين لنا أنه يمكن النظر إلى الأثر الكلي لتغير سعر سلعة معينة على الكمية المطلوبة منها على أنه مكون من جزئين :

الجزء الأول هو $\left(\frac{\partial q_1}{\partial p_1}\right)_{\overline{u}}$ وهو يعبر عن الكمية التي يزيد بها المستهلك من استهلاكه من السلعة التي انخفض ثمنها — مع بقائه عند نفس منحنى السواء نتيجة لتعويض التغير الذي طرأ على السعر بتغير مناظر في الدخل . وحيث أن المستهلك باق على نفس منحنى السواء ، فإن أي زيادة في ك١ لابد وأن يصاحبها نقص في ك٢ . بعبارة أخرى فإن التغير في استهلاك ك١ يمثل إحلال السلعة ك١ محل السلعة ك٢ . ولهذا يطلق على هذا الجزء الأثر الإحلالي .

الجزء الثاني هو $\left(\frac{\partial q_1}{\partial Y}\right)_{\overline{p}}$ q_1 — وهو يقيس التغير في استهلاك السلعة ك١ الناتج عن تغير دخل المستهلك ، مع بقاء سعري السلعتين على ما هو عليه . ولذا يطلق على هذا الجزء الأثر الدخلي .

فلنتأمل الآن كلا من هذين الأثرين :

(ا) الأثر الإحلالي يساوي $(-\lambda D_{11} / \triangle)$ من المعادلة (36) . لكن $\triangle$ يساوي :

$$\triangle = 2 f_{12} p_1 p_2 - f_{11} p_2^2 - f_{22} p_1^2$$

(١) معادلة سلاتسكي : Slutsky Equation

ومنه كية موجبة حسب الشروط الثانية للتعظيم المشروط للمنفعة .

أيضاً D_{11} يساوى $-p_2^2$ ، أى أن D_{11} مقدار سالب .

أما λ فإنها تساوى $\frac{-f_1}{p_1} = \frac{-f_2}{p_2}$ وحيث أن كلا من المنفعة الحدية والسعر كمية موجبة فإن λ سالبة فى هذه الحالة* .

$$\text{إذن الأثر الإحلالى} = \frac{-(\text{سالب})(\text{سالب})}{\text{موجب}} = \text{سالب}$$

أى أن الأثر الإحلالى يكون دائماً سالباً ، بمعنى أن ارتفاع سعر سلعة معينة مثل q_1 — مع تعويض المستهلك بزيادة فى الدخل لإبقائه عند نفس مستوى المنفعة λ يؤدى إلى نقصان مشترياته من هذه السلعة .

(ب) بالنسبة للأثر الدخلى فإنه يساوى $-q_1\left(\frac{\partial q_1}{\partial y}\right)_{\bar{q}}$. وحيث أن $-q_1$ كمية سالبة ، فإن إشارة الأثر الدخلى تتوقف على إشارة $(\partial q_1/\partial y)_{\bar{p}}$. وهذه يمكن أن تكون سالبة أو موجبة ، حسب مستوى دخل المستهلك وطبيعة السلعة ونسبة إنفاقه عليها ، كما سيتضح بعد قليل .

وعليه فإن الأثر الصافى للتغير فى السعر على الطلب يتوقف على القوة النسبية

---

* λ هى المنفعة الحدية للدخل (النقود) والمفروضة أنها موجبة . وظهورها كمقدار سالب هنا ناتج عن طريقة كتابتنا لمعادلة لاجرانج على أنها دالة المنفعة مضافاً إليها λ فى الشرط . ولو كنا طرحنا λ فى الشرط من دالة المنفعة لكنا حصلنا على قيمة موجبة لـ λ .

لكل من الأثر الإحلالى والدخلى وكذلك على اتجاه (أو إشارة) التغير الدخلى .

وعموماً يمكن القول بأنه كلما كانت الكمية المطلوبة من السلعة كبيرة ، كلما كان الأثر الدخلى ضئيلا وكان التغير فى الكمية المطلوبة متوقفاً بدرجة كبيرة على الأثر الإحلالى . وبناء على ذلك يكون الأثر الصافى سالباً مثل الأثر الإحلالى ، بمعنى أن خفض السعر يزيد الطلب ورفع السعر يخفض الطلب .

اما إذا كان الأثر الدخلى موجباً ، بمعنى أن $\left(\frac{\partial q_i}{\partial y_i}\right)_{\overline{p}}$ سالباً ومن ثم $q\left(\frac{\partial q_i}{\partial y}\right)_{\overline{p}}$ — موجباً وكبيراً لدرجة أنه يلغى الأثر السالب الإحلال ويترك معدل تغير الكمية بالنسبة للسعر موجباً ، فإن السلعة تسمى فى هذه الحالة « سلعة رديئة »[1] .

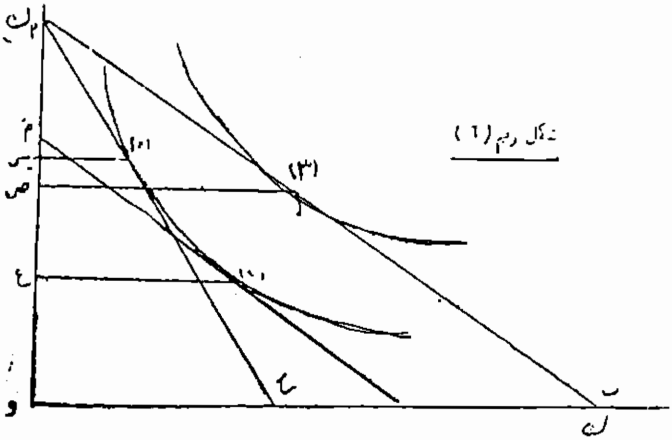
أى أن انخفاض السعر يؤدى إلى انخفاض الطلب ، وارتفاع السعر يزيد من الطلب على السلعة . وربما يحدث ذلك عندما يكون المستهلك فقيراً لدرجة أنه ينفق جزءاً كبيراً من دخله على سلعة ضرورية . وهكذا عندما ينخفض سعر هذه السلعة فإن هذا يؤدى إلى ارتفاع كبير فى الدخل الحقيقى للمستهلك ، قد يدفعه إلى تخفيض استهلاكه من هذه السلعة وزيادة إنفاقه على سلع أخرى أقل ضرورة .

---

(١) سلعة رديئة = Inferior good ومثالها خبز الذرة فى الريف المصرى حيث يشكل نسبة كبيرة من استهلاك الأسر الفقيرة ولكن ارتفاع دخلها يؤدى بعد حد معين الى التحول من خبز الذرة الى خبز القمح .

٤ . ٦ . أثر التغير فى سعر سلعة ما على الطلب على سلعة أخرى :

يمكن تصوير أثر التغير فى سعر سلعة ما ولتكن ك$_1$ على الكمية المطلوبة من السلعة الأخرى ك$_2$ بالرسم كالتالى :



الانتقال من الوضع الأصلى (١) إلى الوضع المؤقت (٢) يمثل الأثر الإحلالى ، أى التغير فى استهلاك السلعة ك$_2$ من و س إلى و ع نتيجة لانخفاض سعر السلعة ك$_1$ ، بافتراض أنه قد حدث تغير معوض فى الدخل بحيث يظل المستهلك على منحنى السواء الأصلى . أى أن انخفاض سعر ك$_1$ يؤدى إلى نقص المطلوب من ك$_2$.

أما الانتقال من الوضع المؤقت (٢) إلى الوضع الجديد (٣) فهو يمثل الأثر الدخلى وهنا ارتفع استهلاك ك$_2$ من و ع إلى و ص نتيجة التحسن الذى طرأ على الدخل الحقيقى للمستهلك .

فلنر الآن كيف نحدد هذه الآثار المختلفة جبرياً .

يمكن استخدام المعادلات (30) ، (31) لإيجاد أثر التغير فى سعر سلعة معينة على الطلب على سلعة أخرى ، أى إيجاد $(\partial q_1 / \partial p_2)$ ، $(\partial q_2 / \partial p_1)$. فبإفتراض ثبات y , p_1 وبقسمة طرفى المعادلة (30) على $d\, p_2$ نحصل على $(\partial q_1 / \partial p_2)$:

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_2} = \frac{-\lambda D_{11}(0) + \lambda D_{12}\, d\, p_2 + D_{13}\,(0 - q_1(0) - q_2\, dp_2)}{d\, p_2 \cdot \triangle}$$

إذن :

$$(38) \qquad \frac{\partial q_1}{\partial p_2} = \lambda \frac{D_{12}}{\triangle} - q_2 \frac{D_{13}}{\triangle}$$

وبالمثل نستطيع حساب $(\partial q_2 / \partial p_1)$ بفرض ثبات y , p_2 من المعادلة (31) كالتالى :

$$\frac{\partial q_2}{\partial p_1} = \frac{\lambda D_{12}\, d\, p_1 - \lambda D_{22}(0) - D_{23}\,(0 \ d p_1 - q_2(0))}{d\, p_1 \cdot \triangle}$$

ومنها :

$$(39) \qquad \frac{\partial q_2}{\partial p_1} = \frac{\lambda D_{12}}{\triangle} + q_1 \frac{D_{23}}{\triangle}$$

بمقارنة المعادلتين (38) ، (39) يتضح لنا أن أول حد فى الجانب الأيمن لكل معادلة متطابق فى المعادلتين وهو $\lambda \frac{D_{12}}{\triangle}$ ويسمى هذا المقدار بالأثر الإحلالى

لكل سلعة نتيجة لتغير سعر السلعة الأخرى . وهكذا فإن الأثر الإحلالى لتغير الطلب على السلعة ك١ نتيجة لتغير سعر السلعة ك٢ يساوى الأثر الإحلالى لتغير الطلب على السلعة ك٢ نتيجة لتغير سعر السلعة ك١ . وتعتبر هذه الظاهرة ، ويطلق عليها ظاهرة تماثل الأثر الإحلالى المقطعى ، واحدة من أهم النتائج فى نظرية سلوك المستهلك . ونضرب مثلا لتوضيح معناها كالتالى : إذا كان تغيراً فى سعر كيلو البطاطس بمقدار قرش صاغ يؤدى إلى زيادة الطلب على الطماطم بمقدار نصف كيلو ، فإن النتيجة التى توصلنا إليها تعنى أن طلب هذا المستهلك على البطاطس يزداد بمعدل نصف كيلو لكل تغير فى سعر كيلو الطماطم بمقدار قرش صاغ .

لاحظ أن الأثر الإحلالى فى حالة سلعتين يكون دائماً موجباً . وذلك لأن D_{12} تساوى $p_1\,p_2$ — وهذه كمية سالبة و λ تساوى $\frac{-f_i}{p_i}$ وهذه أيضاً كمية سالبة ، أما $\triangle$ فهى موجبة بالشرط الكافى للتوازن . أما إذا كان هناك أكثر من سلعتين فقد يتنافس بعضها أو يتكامل مع البعض الآخر . ويمكن فى هذه الحالة أن يكون الأثر الإحلالى سالباً أو موجباً كما فى حالة الأثر الدخلى .

كذلك تمدنا النتيجة السابقة بتعريف دقيق للسلع البديلة أو المنافسة والسلع المتكاملة فالتعريف الشائع لسلعتين بديلتين هو أنهما يشبعان نفس الحاجة عند المستهلك كالبرتقال والموز ، أو البطيخ والشمام ، أما التعريف الشائع لسلعتين متكاملتين فهى أنهما يستهلكان سوياً لإشباع حاجة معينة كالشاى والسكر أو الحذاء والجورب . أما التعاريف الأدق المستمدة من المعادلتين (38) , (39) فيمكن صياغتها على النحو التالى :

تعتبر السلعتين ك١ ، ك٢ سلعتين بديلتين فى الاستهلاك إذا كان $(\lambda D_{12} / \triangle)$

موجباً. وأما إذا كان $(\lambda D_{12}/\Delta)$ سالباً، فإن السلعتين تعتبران متكاملتان في الإستهلاك. وحيث أن $(\lambda D_{12}/\Delta)$ تقيس التغير في استهلاك ك$_1$ نتيجة لتغير سعر ك$_2$ بافتراض تعويض المستهلك عن التغير في دخله ليظل على نفس منحنى السواء، أي أنها تساوى $\overline{U}\,(\partial q_2/\partial p_1)$. باختصار فإنه يمكن إعادة تعريف السلع البديلة والمتكاملة كالتالي:

إذا كان $\overline{U}\,(\partial q_2/\partial p_1)$ موجباً فإن السلعتين بديلتين، حيث أن

انخفاض سعر ك$_1$ يؤدى إلى انخفاض الطلب على ك$_2$ وإحلال ك$_1$ محل ك$_2$ وبالعكس يؤدى ارتفاع سعر ك$_1$ إلى ارتفاع الطلب على ك$_1$ وإحلال ك$_2$ محل ك$_1$.

بالمثل إذا كان $\overline{U}\,(\partial q_2/\partial p_1)$ سالباً فإن السلعتين متكاملتين، حيث أن انخفاض سعر ك$_1$ يؤدى إلى ارتفاع الطلب على ك$_2$، نظراً لزيادة الطلب على ك$_2$ نتيجة لزيادة الطلب على ك$_1$. وبالعكس يؤدى ارتفاع سعر ك$_1$ إلى انخفاض الطلب على ك$_2$ نتيجة لانخفاض الطلب على ك$_1$.

وأخيراً إذا كان $\overline{U}\,(\partial q_2/\partial p_1)$ صفراً فإن السلعتين ك$_1$, ك$_2$ تعتبران سلعتين مستقلتين.

مثال: نأخذ كمثال على اشتقاق معادلة سلاتسكى وتبيان طبيعة العلاقة القائمة بين السلعتين ك$_1$ ، ك$_2$ المشكلة المعطاة سابقاً كمثال على تجانس دالة الطلب، والتى افترضنا فيها أن دالة المنفعة تأخذ الشكل $U = q_1\, q_2$.

عند إيجاد النهاية العظمى لهذه الدالة فى ظل قيد الميزانية:

$$p_1 q_1 + p_2 q_2 = y$$

وجدنا أن الشروط الأولى للتعظيم هى :

$$q_2 + \lambda \quad p_1 = 0$$

$$q_1 + \lambda \quad p_2 = 0$$

$$p_1 q_1 + p_2 q_2 - y = 0$$

الصورة العامة للتفاضل الكلى لأى من هذه الدوال يمكن كتابته كالتالى :

$$\frac{\partial F}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial F}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial F}{\partial p_1} dp_1 + \frac{\partial F}{\partial p_2} dp_2$$

$$+ \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial \lambda} d\lambda = 0$$

بتطبيق هذه المعادلة على كل من الدوال الثلاث السابقة نحصل على :

$$dq_2 + \lambda\, dp_1 + p_1 d\lambda = 0$$

$$dq_1 + \lambda\, dp_2 + p_2 d\lambda = 0$$

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + q_1 dp_1 + q_2 dp_2 - dy = 0$$

الآن نعيد كتابة هذه المعادلة كالتالى :

$$dq_2 + p_1 d\lambda = -\lambda\, dp_1$$

$$dq_1 + p_2 d\lambda = -\lambda\, dp_2$$

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 = dy - q_1 dp_1 - q_2 dp_2 = k$$

المحدد الرئيسى لهذه المعادلات هو :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & p_1 \\ 1 & 0 & p_2 \\ p_1 & p_2 & 0 \end{vmatrix} = -1\,(-p_1 p_2) + p_1\,(p_2) = 2 p_1 p_2$$

الآن :

$$d\,q_1 = \frac{D_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} -\lambda d p_1 & 1 & p_1 \\ -\lambda d p_2 & 0 & p_2 \\ k & p_2 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\left\{ \begin{array}{l} -d p_1(-p_2^2)-(-k p_2) \\ +p_1\left(-\lambda\ d\ p_2\ p_2\right) \end{array} \right\}}{2\,p_1\,p_2}$$

إذن :

$$d\,q_1 = \frac{\lambda\ p_2^2\ d\ p_1 - \lambda\ p_1\ p_2\ d p_2 + p_2\ k}{2\ p_1\ p_2}$$

وإذا افترضنا تغير سعر السلعة الأول مع ثبات سعر السلعة الأخرى والدخل فإننا نحصل على المعادلة التالية :

$$\frac{\partial\, q_1}{\partial\, p_1} = \frac{\lambda\ p_2^2\ d\ p_1 - \lambda\ p_1\ p_2\,(0) + p_2\,(0 - q_1\ d\ p_1 - 0)}{d\ p_1\ 2\ p_1\ p_2}$$

$$\frac{\partial\, q_1}{\partial\, p_1} = \frac{\lambda\ p_2}{2\ p_1} - \frac{q_1}{2\ p_1}$$

يمكننا الحصول على قيمة λ وذلك بالتعويض فى الشرط الأول للتعظيم عن قيمة q_1 ، q_2 التى نحصل عليها بحل الشروط الأولى للتعظيم . أى :

$$q_1 = \frac{y}{2\,q} \qquad\qquad q_2 = \frac{y}{2\,p_2}$$

من الشرط الأول :

$$\lambda = -\frac{q_2}{p_1} = -\frac{y}{2\,p_1\,p_2}$$

بالتعويض عن قيمة λ فى معادلة $\frac{\partial q_1}{\partial p_1}$ نحصل على :

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_1} = \frac{-y}{2\,p_1\,p_2} \cdot \frac{p_2}{2\,p_1} - \frac{q_1}{2\,p_1}$$

إذن :

$$\boxed{\frac{\partial q_1}{\partial p_1} = -\frac{y}{4\,p_1^2} - \frac{q_1}{2\,p_1}}$$

وهذه هى معادلة سلاتسكى .

إذا كان دخل المستهلك ١٠٠ جنيه فى السنة وسعرى السلعتين التى يستهلكهما هما :

$$p_1 = 2 \qquad\qquad p_2 = 5$$

بالجنيهات ، فإن الكميات التوازنية للسلعتين هما :

$$q_1 = \frac{100}{2 \times 2} = 25 \qquad\qquad q_2 = \frac{100}{2 \times 5} = 10$$

وبالتعويض عن y ، p_1 q_1 فى معادلة سلاتسكى نحصل على :

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_1} = -\frac{100}{4(2)^3} - \frac{25}{2(2)} = -6\frac{1}{4} - 6\frac{1}{4} = -12\frac{1}{2}$$

وتفسير هذه النتيجة أنه إذا كان المستهلك فى وضع توازنى معين، وتغير سعر السلعة ك ۱ ، مع ثبات الدخل وسعر السلعة ك ۲ ، فإن طلب المستهلك على السلعة ك ۱ يتغير بمعدل $12\frac{1}{2}$ وحدة لكل تغير فى سعر ك ۱ بمقدار جنيه واحد ، وأن اتجاه تغير الكمية المطلوبة هو عكس اتجاه التغير فى السعر . وتدل النتيجة على أن قيمة الأثر الإحلالى هى $6\frac{1}{4}$ — وأن قيمة الأثر الدخلى هى $6\frac{1}{4}$ — .

أى أن الأثرين الإحلالى والدخلى متساويان فى هذه الحالة .

بالمثل يمكن حساب معادلة سلاتسكى للسلعة ك ۲ . وللحصول عليها نوجد أولا قيمة $d\,q_2$ من مجموعة معادلات التفاضلات الكلية لشروط التوازن :

$$d q_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -\lambda\, d p_1 & p_1 \\ 1 & -\lambda\, d p_2 & p_2 \\ p_1 & k & 0 \end{vmatrix}}{\triangle} = \frac{0 + \lambda\, d p_1(-p_1 p_2) + p_1(k + p_1 \lambda\, d p_2)}{2\, p_1\, p_2}$$

$$= \frac{-\lambda\, p_1\, p_2\, d p_1 + p_1 k + \lambda\, p_1^2 d p_2}{2\, p_1\, p_2}$$

معدل تغير q_2 بالنسبة لـ p_2 — مع ثبات p_1 ، y — هو :

$$\frac{\partial q_2}{\partial p_2} = \frac{\lambda\, p_1^2}{2\, p_1\, p_2} + p_1 \frac{(-q_2)}{2\, p_1\, p_2} = \frac{\lambda\, q_1}{2\, p_2} - \frac{q_2}{2\, p_2}$$

وبالتعويض عن λ نحصل على :

$$\boxed{\frac{\partial q_2}{\partial p_2} = -\frac{y}{4\,p_2^2} - \frac{q_2}{2\,p_2}}$$

وهذه معادلة سلاتسكى للسلعة ك٢ وبالتعويض عن y ، p_2 ، q_2 نحصل على:

$$\frac{\partial q_2}{\partial p_2} = \frac{-100}{4\,(5)^2} - \frac{10}{2(5)} = -\frac{100}{100} - \frac{10}{10} = -1 - 1 = \quad 2$$

أى أن التغير فى سعر ك٢ بمقدار جنيه واحد ، مع ثبات الدخل وسعر السلعة ك١ ، يؤدى إلى تغير فى الكمية المطلوبة منها بمقدار وحدتين . والعلاقة بين التغير فى السعر والتغير فى الطلب عكسية . كذلك يتساوى الأثران من حيث المقدار وكل منهما = — ١ .

يمكن أن نحدد أثر التغير فى p_2 على q_1 من المعادلة التى تعطى $d\,q_1$ وذلك بقسمة طرفى المعادلة على $d\,p_2$ ومساواة $d\,p_1$ ، $d\,y$ بالصفر :

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_2} = \frac{\lambda\, p_2^2\; 0 . - \lambda\, p_1\, p_2\, d\, p_2 + p_2\,(-q_2\, d\, p_2)}{(a\,p_2)\cdot(2\,p_1\,P_2)}$$

$$= \frac{-\lambda}{2} - \frac{q_2}{2\,p_1} = \;\tfrac{1}{2}\left(\frac{-y}{2\,p_1\,p_2}\right) - \frac{q_2}{2\,p_1}$$

إذن :

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_2} = \frac{y}{4\,p_1\,p_2} - \frac{q_2}{2p_2}$$

وهذه المعادلة تعطى $\frac{y}{4 p_1 p_2}$ كأثر إحلالى، $\frac{q_2}{2 p_1}$ — كأثر التغير فى الدخل الحقيقى نتيجة لانخفاض سعر السلعة ك٢ على المطلوب من السلعة ك١ ويساوى $2 \frac{1}{2} = \frac{10}{2 \times 2}$. طبعاً $\frac{y}{4 p_1 p_2}$ كمية موجبة . وهذا معناه أن السلعتين ك١ ، ك٢ سلعتين بديلتين .

يمكن أن نحسب أيضاً أثر تغير سعر السلعة ك١ على الطلب على السلعة ك٢ بنفس الطريقة :

$$\frac{\partial \bar{q}_2}{\partial p_1} = \frac{-\lambda p_1 p_2 d p_2 + p_1(-q_1 d p_1) + \lambda p_1^2 (0)}{d p_1 (2 p_1 p_2)}$$

$$= \frac{-\lambda}{2} - \frac{q_1}{2 p_2} = \frac{y}{4 p_1 p_2} - \frac{q_1}{2 p_2}$$

والأثر الإحلالى هنا أيضاً موجب . وواضح أنه يساوى الأثر الإحلالى الذى حصلنا عليه عند حساب $\frac{\partial q_1}{\partial p_2}$. وقيمة الأثر الإحلالى فى الحالتين هو $2 \frac{1}{2}$. أى أن انخفاض سعر ك١ بمقدار جنيه واحد يؤدى إلى انخفاض الطلب على ك٢ بوحدتين ونصف ، وانخفاض سعر ك٢ بمقدار جنيه واحد يؤدى إلى انخفاض الطلب على ك١ بوحدتين ونصف أيضاً .

٧٠٤ . تمارين :

تمرين [١] : إذا كان دخل مستهلك ما هو ٢٠ جنيهاً وسعر الوحدة من إحدى السلعتين (ولتكن ك$_1$) التي يستهلكهما هو ٣ قروش ، فأوجد دالة الطلب على السلعة الأخرى بافتراض أن المستهلك ينفق كل دخله على سلعتين فقط وأن دالة منفعته هي :

(أ) $$U = 4\, q_1\, q_2$$

(ب) $$U = e^{9 q_1 q_2}$$

(حـ) $$U = 2\, q_1 - 3\, q_1^2 + q_2 - 4\, q_2^2 + 200$$

(ء) $$U = 7\, q_1^2\, q_2^3$$

(هـ) $$U = (q_1 - 10)^2\, (q_2 - 5)^3$$

تمرين [٢] : إذا كانت الدالة $U = 18 - \frac{1}{2} x^2 - y^2 + 2\, x\, y$ هي دالة المنفعة لمستهلك دخله الشهري ١٢ جنيه ، حيث x , y هي الكميات التي يشتريها من مجموعتين من السلع متوسط سعرها على التوالي هو ٢ ، ٣ جنيهات للوحدة :

(ا) أوجد الكميات التي إذا اشتراها المستهلك يتحقق له أقصى إشباع وتحقق من أن هذه الكميات تحقق له الإشباع الأقصى فعلا .

(ب) اشتق جبرياً دالة الطلب لكل مجموعة من المجموعتين السابقتين ، ثم

استخدم الدالتين التى تحصل عليهما لحساب مرونات الطلب عندما يكون سعر السلعة x ٤ جنيهات وسعر السلعة y ٦ جنيهات .

(حـ) اثبت أن دالتى الطلب تنتميان إلى مجموعة الدوال المتجانسة من الدرجة الصفرية .

تمرين [٣] : بفرض أن دالة المنفعة لمستهلك دخله الشهرى ١٠٠ جنيه هى $U = 64\, q_1^2\, q_2^2$ ، وبفرض أنه يستهلك سلعتين فقط ك$_1$ ، ك$_2$ سعرهما ٢ ، ٤ جنيهات على التوالى ، فالمطلوب :

(ا) إيجاد الكميات التوازنية والمنفعة الحدية للنقود .

(ب) توضيح أن الكميات التوازنية تظل كما هى إذا عبر المستهلك عن علاقة المنفعة بالدالة $\sqrt{U}$ بدلا من U .

(حـ) إثبات أن الكميات التوازنية تظل كما هى هى إذا تغير الدخل وتغيرت الأسعار بنفس النسبة .

تمرين [٤] : وضح كيف يمكن تقسيم أثر التغير فى سعر السلعة ك$_1$ على الكمية المطلوبة منها إلى أثر دخلى وأثر إحلالى ، وبين أيضا طبيعة العلاقة بين السلعتين بافتراض أن دالة المنفعة هى $z = 15\, y + 10\, y - 2\, x^2 - y^3$ حيث z هى المنفعة الكلية ، x الكمية المشتراة من السلعة ك$_1$ ، y هى الكمية المشتراة من السلعة ك$_2$.

أوجد قيم كل من الأثر الإحلالى والأثر الدخلى وتحقق من تماثل الأثر الإحلالى المقطعى عندما يكون سعر ك$_1$ هو ٣ جنيهات وسعر ك$_2$ هو ٢ جنيه ودخل المستهلك هو ٤٠٠ جنيه .

تمرين [٥] : مستهلك دخله السنوى ٣٠٠ جنيه ينفقه على ٣ سلع ك١ و ك٢ و ك٣ أسعارها ٥ ، ١٠ ، ٤ جنيهات للوحدة على التوالى . فإذا كانت دالة منفعته هى :

$$U = 10 + 5\, q_1\, q_2 + 4\, q_2\, q_3 + 2\, q_1\, q_3$$

فالمطلوب :

(ا) اشتقاق دالة الطلب لكل سلعة جبرياً ، أى قبل التعويض عن قيم المتغيرات .

(ب) إيجاد الكميات التوازنية من السلع الثلاث .

(ح) حساب مرونات الطلب السعرية والدخلية والمقطعية عندما يتحقق التوازن للمستهلك .

الفصل الخامس

نظرية سلوك المنتج

يهتم هذا الفصل بعرض النظرية الاقتصادية لسلوك المنتج أو سلوك المنشأة(١). ويبتدىء الفصل باستعراض لبعض المفاهيم وأدوات التحليل المستخدمة في هذه النظرية. ثم يشرح كيفية تحديد السلوك الأمثل للمنتج في ظل ظروف المنافسة الكاملة. بعد ذلك نبين كيفية تحليل توازن المنتج باستخدام دوال التكاليف، وكيفية اشتقاق منحنيات العرض الفردى من تحليل سلوك المنتج. يلى ذلك عرض لشروط التوازن فى حالة استخدام دالة إنتاج لأكثر من منتج واحد. وأخيراً نختتم هذا الفصل بمناقشة كيفية تحديد سلوك المنتج بافتراض حالة الاحتكار.

٥ . ١ . مفاهيم وأدوات تحليل رئيسية :

٥ . ١ . ١ فرض الرشد الاقتصادى فى الإنتاج : تفترض النظرية الاقتصادية الرشد الاقتصادى فى سلوك المنتج — كما سبق افتراضه بالنسبة لسلوك المستهلك. وهذا يعنى أن كل منتج عندما يتخذ قراراته الإنتاجية، أى القرارات الخاصة بتحديد مشترياته من خدمات عناصر الإنتاج المختلفة، وتحديد مبيعاته من السلعة التى ينتجها، فإنه يسعى لتعظيم أرباحه. وقد يكون هذا التعظيم مشروطاً كما فى حالة سلوك المستهلك، بمعنى أن المنتج يحاول تعظيم أرباحه فى ظل قيد معين على الميزانية التى يخصصها للإنفاق على العملية الإنتاجية.

---

(١) المنتج = Producer ، المنشأة = Firm

كذلك يمكن صياغة مشكلة المنتج فى بعض الظروف على أنها مشكلة تعظيم غير مشروط للربح ، وذلك بافتراض أن المنتج يستطيع تدبير التكاليف اللازمة لإنتاج الكمية المثلى من السلعة . ومن ناحية أخرى يمكن التوصل إلى السلوك الرشيد للمنتج فى أحوال معينة ، باعتبار أنه يحاول تدنية تكاليف إنتاج كمية معينة من السلعة التى ينتجها . هذا وسوف نلاحظ فيما بعد أن السلوك الاقتصادى للمنتج الذى تلخصه شروط التوازن ، تختلف اختلافاً بيناً باختلاف ظروف السوق التى يعمل فيها ، وبالذات باختلاف درجة المنافسة التى تسود السوق .

٥ . ١ . ٢ . دالة الإنتاج لسلعة واحدة :

تحتل دالة الإنتاج[١] فى تحليل سلوك المنتج نفس المكانة التى تحتلها داله المنفعة فى تحليل سلوك المستهلك . وتعرف دالة الإنتاج بأنها العلاقة التى تربط بين كميات المدخلات من عناصر الإنتاج المختلفة ، وكمية المخرج من السلعة المنتجة[٢]. فإذا كان هناك عنصران من عناصر الإنتاج المتغيرة س١ ، س٢ يستخدم المنتج منهما الكميات أى المدخلات x_1 , x_2 على التوالى ، لإنتاج الكمية q من السلعة ك ، فإنه يمكن التعبير عن دالة الإنتاج بشكل عام كالتالى :

$$(1) \qquad q = f(x_1, x_2)$$

وقبل أن نشرح خصائص دالة الإنتاج ، يجمل بنا أن نذكر فارقاً هاماً يميز دالة الإنتاج عن دالة المنفعة . فدالة الإنتاج تعتبر فى الواقع تعبيراً موضوعياً عن

---

(١) دالة الإنتاج = Production Function ،
دالة الإنتاج لمنتج واحد = Single—product Production Function
(٢) مدخل (بضم الميم) = Input ، مخرج (بضم الميم) = Output

الظروف الفنية للإنتاج يستطيع أى مهندس تحديدها ، وذلك لأن كلا من الإنتاج والمدخلات قابل للقياس ، ودالة الإنتاج دالة فريدة . أما دالة المنفعة فهى تعبير ذاتى عن مزاج مستهلك معين ، لا يستطيع أحد سواه تحديدها . أضف إلى ذلك أن دالة المنفعة دالة ترتيبية نظراً لكون المنفعة غير قابلة للقياس . وأخيراً فإن دالة المنفعة ليست دالة فريدة ، وإنما يمكن لأية دالة حافظة للترتيب أن تقوم بوظيفتها .

خصائص دالة الإنتاج :

(ا) يفترض فى دالة الإنتاج أنها دالة وحيدة القيمة ومتصلة ، وأن لها مشتقات أولى وثانية متصلة أيضاً . وهذا يتضمن افتراض القابلية للتقسيم أو التجزئة بالنسبة لعناصر الإنتاج والسلعة المنتجة .

(ب) دالة الإنتاج غير ذات معنى إذا أخذ أى من المتغيرات الداخلة فيها قيمة سالبة . أى أنها ذات معنى فقط فى المنطقة التى ترسمها القيم غير السالبة للمتغيرات x_1 , x_2 , q .

(حـ) يفترض عند كتابة دالة الإنتاج أن عناصر الإنتاج الثابتة تكون عند مستوى معين ليس باستطاعة المنتج تغييره خلال الفترة الزمنية محل الاعتبار . فإذا تغير هذا المستوى إلى مستوى آخر فإن الدالة تتغير أيضاً . (وهذه خاصية لدالة الإنتاج القصيرة الأجل بالذات ، أما دالة الإنتاج الطويلة الأجل فكل ما فيها من عناصر إنتاج يكون قابلا للتغيير) .

(د) لا تتضمن دالة الإنتاج كل المعلومات الفنية — تكنولوجيا الإنتاج — الخاصة بالسلعة المنتجة ، بمعنى أنها لا تعطى كل الإمكانيات المختلفة لتكوين

التوليفات المختلفة لعناصر الإنتاج اللازمة للحصول على مستوى معين أو مستويات مختلفة من الإنتاج . وإنما هي تتضمن فقط التوليفات التي تحقق أقصى إنتاج . أي أن دالة الإنتاج تختلف عن تكنولوجيا الإنتاج من زاوية أن الأولى تفترض تحقق الكفاءة الفنية في الإنتاج — أي أنها تفترض أن المشكلة الهندسية والفنية قد حلت وأنها بذلك تعطي الإنتاج الأقصى المتوقع من توليفة معينة من عناصر الإنتاج . ولذا يمكن القول بأن دالة الإنتاج تعبر عن أفضل طريقة إنتاج (تكنيك) من ضمن طرق الإنتاج العديدة الممكنة فنياً .

(هـ) لدالة الإنتاج بعد زمني معين . ذلك أن العملية الإنتاجية تتضمن إنقضاء فترة زمنية معينة من لحظة دخول عناصر الإنتاج في العملية الإنتاجية حتى لحظة تحولها إلى سلعة منتجة . ولذا فإن المدخلات والمخرجات ليست إلا تدفقات خلال فترة معينة وليست أرصدة عند لحظة معينة[١] . وليست هناك فترة بعينها يلزم اتخاذها كبعد زمني لدالة الإنتاج ، وإنما كل المطلوب هو أن تكون هذه الفترة من القصر بحيث لا يمكن للمنتج تغيير مستوى العناصر الثابتة وبحيث لا يطرأ تغيير على طرق الإنتاج أثناءها . كذلك أن تكن من الطول بحيث تعطى فسحة كافية من الوقت لإتمام تحويل المدخلات إلى مخرجات ، وفقاً للمتطلبات الفنية للعملية الإنتاجية .

٥ · ١ · ٣ · منحنيات الإنتاجية :

يمكن التمييز بين ثلاث أنواع من منحنيات الإنتاجية لكل عنصر من عناصر الإنتاج[٢] :

---

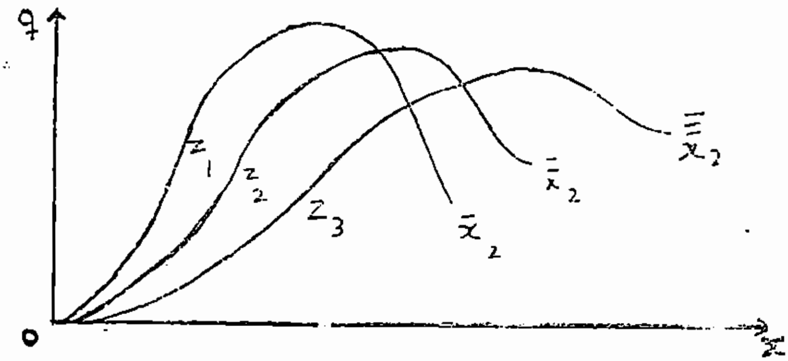
(١) تدفق = Flow ، رصيد = Stock

(٢) منحنيات الإنتاجية = Productivity Curves

أولا : منحنى الإنتاجية الكلية(١) للعنصر س١ هو المنحنى الذى يعبر عن العلاقة بين الكميات المستخدمة من هذا العنصر وكمية الإنتاج من السلعة ك بافتراض ثبات المدخل المستخدم من العنصر الآخر س٢ عند مستوى معين . أى أن دالة الإنتاجية الكلية للعنصر س١ هى :

$$(2) \qquad q = f(x_1, \overline{x_2})$$

حيث تشير الشرطة الموضوعة فوق x_2 على ثبات س٢ عند مستوى معين . وطبيعى أن تغير المستوى الذى نثبت عنده س٢ ، يؤدى إلى الحصول على دالة إنتاجية جديدة للعنصر س١ ، كما هو موضح بالشكل رقم (١) .



شكل رقم (١)

وحيث أنه فى العادة تزداد كمية x_2 كلما نقصت كمية x_1 الضرورية للحصول على مستوى إنتاج معين ، فإنه كلما اقتربت خطوط الإنتاجية من المحور الرأسى كلما كان معنى ذلك تزايد كمية x_2 .

---

(١) الإنتاجية الكلية = Total Productivity

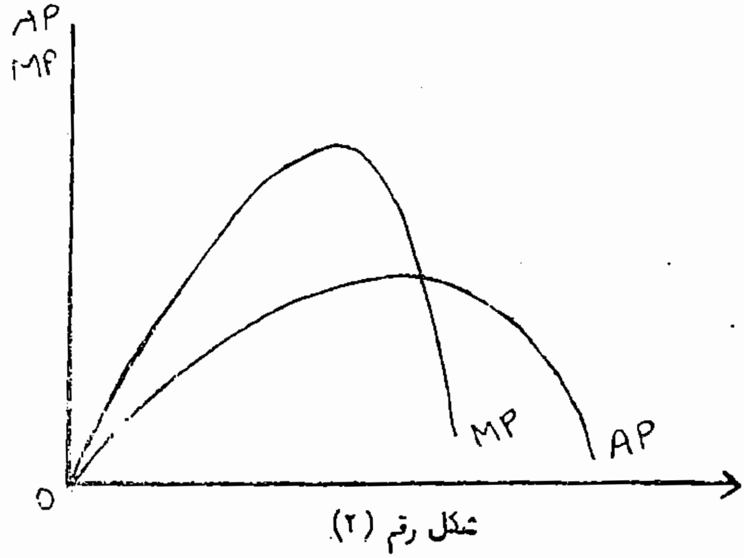
أى أن :

$$\overline{x_2} > \overline{\overline{x_2}} > \overline{\overline{\overline{x_2}}}$$

ثانياً : منحنى الإنتاجية المتوسطة(١) للعنصر س١ . تعرف الإنتاجية المتوسطة AP للعنصر س١ بافتراض ثبات x_2 عند مستوى معين — بأنها خارج قسمة الإنتاج على الكمية المستخدمة من x_1 .

$$(3) \qquad AP = \frac{q}{x_1} = \frac{f(x_1 , \overline{x_2})}{x_1}$$

والخط الذى يوصل النقط المختلفة التى تمثل خارج القسمة يسمى منحنى الإنتاجية المتوسطة . وهو مبين فى الشكل رقم (٢) . وطبيعى أننا نستطيع رسم عدد لا نهائى من هذه المنحنيات كل واحد يناظر مستوى معين للمتغير x_2 .



شكل رقم (٢)

---

(١) الإنتاجية المتوسطة = Average Productivity

ثالثاً : منحنى الإنتاجية الحدية(١) للعنصر س١ . تعرف الإنتاجية الحدية MP بأنها معدل تغير الإنتاج نتيجة لتغير المدخل من س١ بوحدة واحدة — مع ثبات x_2 عند مستوى معين أو بتعبير أدق :

$$(١) \qquad MP = \frac{\partial q}{\partial x_1} = \frac{\partial f(x_1, \bar{x}_2)}{\partial x_1}$$

أى أن الإنتاجية الحدية للعنصر س١ هى المعامل التفاضلى الأول للدالة الإنتاجية الكلية للعنصر س١ ، وسوف نرمز لها بالرمز f_1 ، كما سنرمز للإنتاجية الحدية للعنصر س٢ بالرمز f_2 .

والرسم السابق يعطى صورة لهذا المنحنى . وطبيعى أنه يمكننا رسم مجموعة كبيرة من هذه المنحنيات ، وذلك بافتراض مستويات مختلفة لـ x_2 .

افترضنا فى الرسمين السابقين أنه كلما زاد المستخدم من x_1 مع ثبات x_2 فإن كلا من AP ، MP يتزايد فى البداية ثم يأخذ فى التناقص بعد ذلك(٢) . أى أن الإنتاج يزيد بمعدل متزايد فى البداية ثم يتزايد بمعدل متناقص حتى يصل إلى نهاية عظمى يأخذ بعدها فى التناقص . وواضح فى الرسم أن لـكل من AP ، MP نهاية عظمى وأن المنحنى MP يصل إلى نهايته العظمى عند مستوى للمتغير x_1 أقل من المستوى الذى يصل عنده المنحنى AP إلى نهايته العظمى ، وأن المنحنيان يتقاطعان عند نقطة النهاية العظمى للمنحنى AP .

---

(١) الإنتاجية الحدية = Marginal Productivity

(٢) يطلق على هذه الظاهرة قانون تناقص الغلة أو تناقص الإنتاجية الحدية = Law of diminishing marginal productivity .

ويمكن إثبات ذلك كما يلى :

نكتب أولا الشرط الضرورى للنهاية العظمى للمنحنى AP وذلك بمساواة المشتقة الأولى لـ AP بالصفر كالتالى :

$$\frac{\partial AP}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{q}{x_1}\right) \tag{5}$$

$$= \frac{x_1 \frac{\partial q}{\partial x_1} - q \frac{\partial x_1}{\partial x_1}}{x_1^2} = \frac{x_1 f_1 - q}{x_1^2} = 0$$

$$\therefore \quad x_1 f_1 - q = 0$$

أى أنه عند نقطة النهاية العظمى للدالة الإنتاجية المتوسطة تكون :

$$x_1 f_1 = q$$

أو بقسمة طرفى المعادلة على x_1 ، نحصل على الشرط التالى :

$$f_1 = \frac{q}{x_1} \tag{6}$$

وهذا معناه أن :

$$MP = AP$$

إذن الإنتاجية الحدية والإنتاجية المتوسطة يتساويان عندما يصل منحنى الإنتاجية المتوسطة لنهايته العظمى .

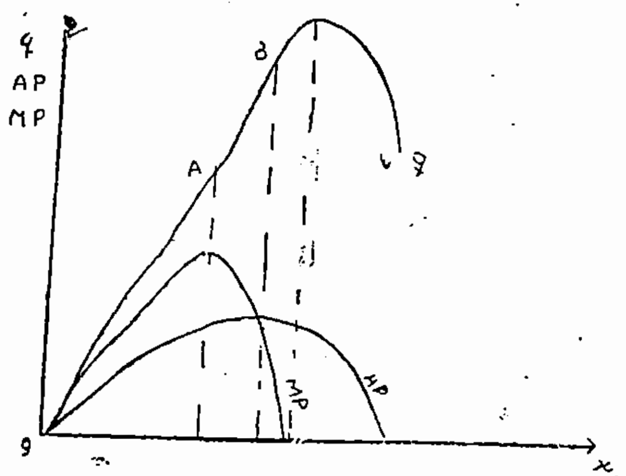
لاحظ الحقائق التالية التى يوضحها شكل (٣) :

(أ) مستوى x_1 الذى يصل عنده منحنى AP إلى نهايته العظمى هو نفس

مستوى x_1 الذى يكون عنده ميل المماس لمنحنى الإنتاجية الكلية المنطلق من نقطة الأصل أكبر ما يمكن (النقطة B) .

(ب) مستوى x_1 الذى يصل عنده المنحنى MP إلى الصفر هو نفسه مستوى x_1 الذى يصل عنده منحنى الإنتاجية الكلية لـ x_1 إلى نهايته العظمى ويكون ميله مساوياً للصفر . إن هذا فى الواقع هو الشرط الضرورى للنهاية العظمى للإنتاج (النقطة C) .

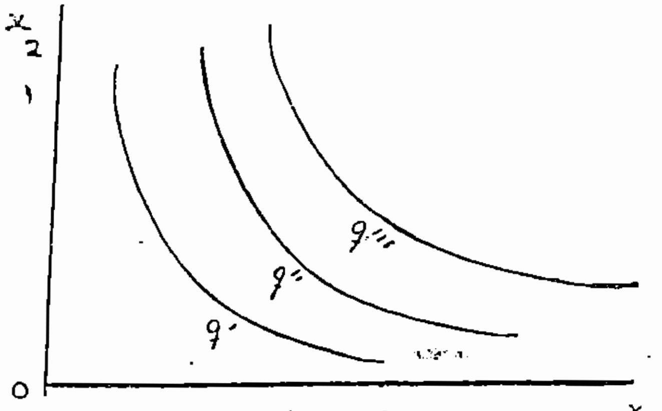
(حـ) مستوى x_1 الذى يصل عنده المنحنى MP إلى نهايته العظمى هو نفس المستوى x_1 الذى تحدث عنده نقطة انقلاب فى منحنى الإنتاجية الكلية — النقط Z_1 , Z_2 , Z_3 فى شكل رقم (١) — أى النقطة التى يكون ميل المماس لمنحنى الناتج الكلى عندها أكبر ما يمكن .



شكل رقم (٢)

٥٠١٠٤ . منحنيات الناتج المتساوى[١] :

وهى تناظر منحنيات السواء فى نظرية سلوك المستهلك . حيث أن كل منحنى من هذه المنحنيات يعطى كل توليفات x_1 , x_2 التى يمكن استخدامها للحصول على كمية معينة من المنتج ك ، كما فى الشكل رقم (٤) .



شكل رقم (٤)

ومعادلة المنحنى $\overline{q}$ مثلا هى :

$$\overline{q} = f\,(x_1 , x_2) \qquad (7)$$

ومثل منحنيات السواء ، فإن منحنيات الناتج المتساوى تتمتع بالخصائص التالية:

(ا) تؤدى زيادة الكمية المستخدمة من س١ ، س٢ إلى مستوى أعلى للإنتاج

---

(١) منحنيات الناتج المتساوى = Iso—product curves

وبالتالى إلى الانتقال إلى منحنى ناتج متساوى أعلى . حيث أنه كلما بعد المنحنى عن نقطة الأصل ، كلما كان معنى ذلك ارتفاع مستوى الإنتاج .

(ب) منحنيات الناتج المتساوى لا تتقاطع وإنما يوازى بعضها بعضاً .

(حـ) منحنيات الناتج المتساوى لها ميل سالب وانحناؤها محدب من ناحية نقطة الأصل . ميل المماس لنقطة على أى منحنى ناتج متساوى يقيس معدل إحلال س٢ محل س١ أو س١ محل س٢ للمحافظة على المستوى المعين للإنتاج . والقيمة السالبة للميل تسمى معدل الإحلال الفنى(١) RTS . فمعدل إحلال س٢ محل س١ هو :

$$(8) \qquad RTS_{21} = -\frac{d\,x_2}{d\,x_1}$$

وبأخذ التفاضل الكلى لدالة الإنتاج $d\,q = f_1\,d\,x_1 + f_2\,d_2\,x_2$

وحيث أن $d\,q$ تساوى صفر عندما تتحرك على نفس منحنى الناتج المتساوى فإن :

$$f_1\,d\,x_1 + f_2\,d\,x_2 = 0$$

ومنها :

$$(9 \qquad RTS_{21} = -\frac{d\,x_2}{d\,x_1} = \frac{f_1}{f_2}$$

أى أن معدل الإحلال الفنى للعنصر س٢ محل العنصر س١ عند نقطة معينة

---

(١) معدل الإحلال الفني = Rate of Technical Subsitution

يساوى النسبة بين الإنتاجية الحدية للعنصرين عند هذه النقطة $(f_1 : f_2)$

١٠ ، ٥ ، مثال على دوال الإنتاج :

أشهر دوال الإنتاج فى التطبيقات العملية هى دالة كوب — دوجلاس التى تأخذ الصورة التالية :

$$(10.1) \qquad q = \alpha\, x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2}$$

(أ) فى هذه الحالة نجد أن معادلة منحنى الإنتاجية المتوسطة للعنصر س١ بافتراض ثبات العنصر س٢ عند مستوى معين هى :

$$(10.2) \qquad AP_1 = \frac{q}{x_1} = \frac{\alpha\, x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2}}{x_1} = \alpha\, x_1^{\beta_1 - 1} x_2^{\beta_2}$$

(ب) معادلة منحنى الإنتاجية الحدية للعنصر س١ — بافتراض ثبات المستخدم من العنصر س٢ — هى :

$$(10.3)\ MP_1 = \frac{\partial q}{\partial x_1} = \alpha\, \beta_1\, x_1^{\beta_1 - 1} x_2^{\beta_2} = \frac{\alpha\, x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2}}{} = \beta_1 \frac{q}{x_1}$$

أى الإنتاجية الحدية للعنصر س١ تساوى أس x_1 فى دالة الإنتاج مضروباً فى الإنتاجية المتوسطة للعنصر س١ . والواقع أن أس x_1 فى دالة الإنتاج عبارة عن مرونة الإنتاج بالنسبة للعنصر س١ ، وتعريفها كالتالى :

$$E_1 = \frac{\partial q}{\partial x_1} \cdot \frac{x_1}{q}$$

وتعوض من المعادلة (10.3) عن $\frac{\partial q}{\partial x_1}$ فنحصل على :

$$E_1 = \left(\beta_1 \frac{q}{x_1} \right) \left(\frac{x_1}{q} \right) = \beta_1 \tag{10.4}$$

وواضح أن مرونة الإنتاج ثابتة لا تتغير بتغير الكمية المستخدمة من العنصر أو مستوى الإنتاج .

(حـ) معادلة منحنى الناتج المتساوى . وهذه نحصل عليها بالتعبير عن x_1 بدلالة q , x_2 (أو x_2 بدلالة q , x_1) . من دالة الإنتاج (10.1) :

$$x_1^{\beta_1} = \frac{\bar{q}}{\alpha\, x_2^{\beta_2}} .$$

إذن المعادلة المطلوبة هى :

$$x_1 = \left(\frac{\bar{q}}{\alpha\, x_2^{\beta_2}} \right)^{1/\beta_1} \tag{10.5}$$

(ى) معدل الإحلال الفنى :

$$RTS_{21} = \frac{d\, x_2}{d\, x_1} = \frac{f_1}{f_2} = \frac{\beta_1 \cdot \frac{q}{x_1}}{\beta_2 \cdot \frac{q}{x_2}} = -\left(\frac{\beta_1}{\beta_2} \right) \cdot \left(\frac{x_2}{x_1} \right) \tag{10.6}$$

وواضح أن معدل الإحلال يتوقف على النسبة بين العنصرين . فإذا ظلت هذه النسبة ثابتة بالرغم من تغير مستوى الإنتاج يظل معدل الإحلال ثابتاً .

٥ . ١ . ٦ . خطوط التكلفة المتساوية :

إذا كانت C تمثل الإنفاق الكلى على العملية الإنتاجية ، فإننا نستطيع أنه نكتب قيد التكاليف كالتالى :

$$(11.1) \qquad C = a + r_1 x_1 + r_2 x_2$$

حيث r_1 , r_2 هما سعرى العنصرين x_1 , x_2 على التوالى و a هى تكاليف عناصر الإنتاج الثابتة . (وهذه الدالة تناظر قيد الميزانية فى نظرية توازن المستهلك) .

وبتثبيت C عند مستوى معين $\overline{C}$ نحصل على معادلة خطوط التكلفة المتساوية (١) الموضحة بالشكل رقم (٥) :

$$(11.2) \qquad \overline{C} = a + r_1 x_1 + r_2 x_2$$

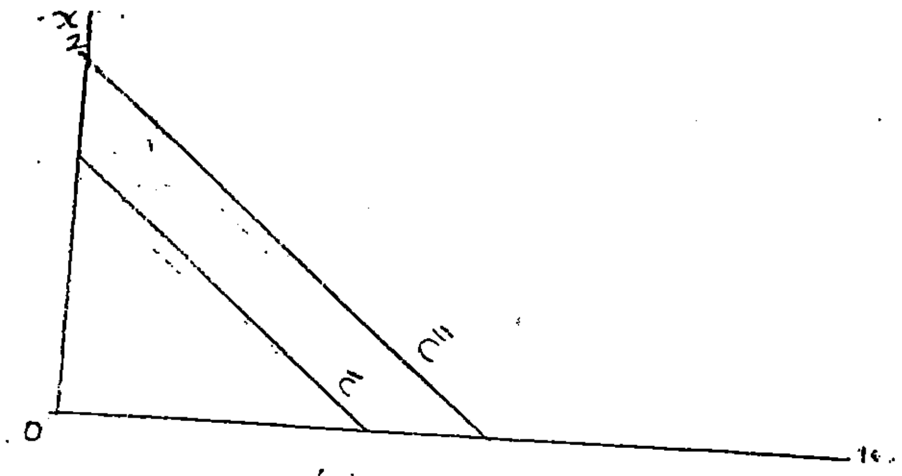
وبحل هذه المعادلة فى x_2 ، أى بالتعبير عن x_2 بدلالة $\overline{C}, x_1$ نحصل على العلاقة التالية :

$$(11.3) \qquad x_2 = \left(\frac{\overline{C} - a}{r_2}\right) - \left(\frac{r_1}{r_2}\right) x_1$$

أى أن ميل خط التكلفة المتساوية $\overline{C}$ هو القيمة السالبة للنسبة بين سعرى عنصرى الإنتاج المستخدمين . والمقطع $\frac{\overline{C} - a}{r_2} = \frac{\text{إجمالى التكاليف المتغيرة}}{\text{سعر س}_2}$ = كمية x_2 التى يمكن شراؤها بإنفاق كل التكاليف المتغيرة على العنصر س٢ (أى عندما تكون x_1 = صفر) .

---

(١) خطوط التكلفة المتساوية = Iso – cost lines



شكل رقم (٥)

٥ - ٢ - ١ - السلوك الأمثل للمنتج في ظروف المنافسة :

نفترض فيما يلي أن المنتج لا يستطيع التأثير في أسعار عناصر الإنتاج التي يستخدمها ولا في سعر السلعة التي ينتجها ، أي أنه يشتري ويبيع في أسواق تنافسية . كما سبقت الإشارة هناك ٣ أنماط للسلوك الأمثل للمنتج ، وهي :

(أ) تعظيم الإنتاج في ظل قيد على تكاليف الإنتاج ، أو التعظيم المشروط للإنتاج .

(ب) تدنية التكاليف في ظل قيد على مستوى الإنتاج ، أو التدنية المشروطة للتكاليف .

(ح) تعظيم الارباح بلا قيد ولا شرط أو التعظيم غير المشروط للارباح .

٥ ٠ ٢ ٠ ١ . تعظيم الإنتاج فى ظل قيد تكاليف الإنتاج :

وهذه الطريقة تماثل تعظيم المستهلك للمنفعة فى ظل قيد الميزانية . أى أننا نعبر عن مشكلة المنتج على أنها تعظيم دالة الإنتاج :

$$q = f(x_1, x_2)$$

فى ظل قيد التكاليف (11.2) :

$$\overline{C} = a + r_1 x_1 + r_2 x_2$$

وهكذا تكون معادلة لاجرانج كالتالى :

$$V = f(x_1, x_2) + \lambda (a + r_1 x_1 + r_2 x_2 - \overline{C}) \tag{12}$$

حيث λ هى مضروب لاجرانج .

الشروط الضرورية للتعظيم المشروط لـ q هى :

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = f_1 + \lambda r_1 = 0 \tag{13.1}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = f_2 + \lambda r_2 = 0 \tag{13.2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = a + r_1 x_1 + r_2 x_2 - \overline{C} = 0 \tag{13.3}$$

الآن من (13.1) ، (13.2) نحصل على :

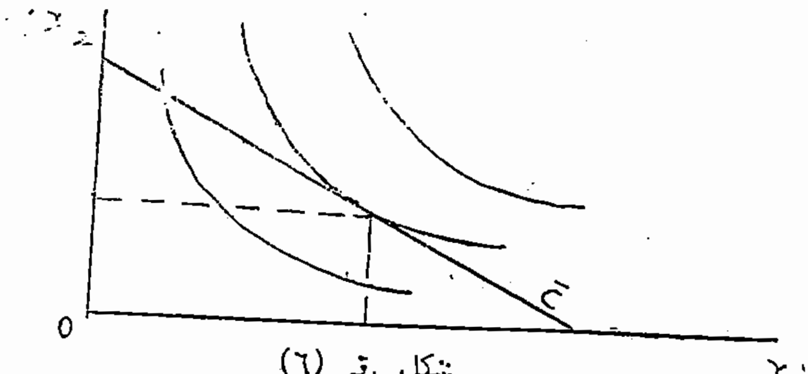
$$f_1 = -\lambda r_1$$

$$f_2 = -\lambda r_2$$

ومن هاتين المعادلتين يتضح أن :

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{r_1}{r_2} \qquad (14)$$

أى أن الشرط الأول لتعظيم المشروط للإنتاج هو تعادل النسبة بين الإنتاجية الحدية للعنصرين س١ ، س٢ مع النسبة بين سعريهما . وحيث أن النسبة بين السعرين هى ميل خط التكاليف المتساوية ، والنسبة $\frac{f_1}{f_2}$ هى ميل منحنى ناتج متساوى ، أى معدل الإحلال الفنى ، فإن التوازن يتم عند نقطة تماس خط التكلفة المتساوية مع أعلى منحنى ناتج متساوى كما فى الشكل رقم (٦) .



شكل رقم (٦)

وبإعادة كتابة (14) كالتالى :

$$-\lambda = \frac{f_1}{r_1} = \frac{f_2}{r_2} \qquad (15)$$

أى أن إنتاجية آخر جنيه ينفق على س١ ينبغى أن تساوى إنتاجية آخر جنيه منفق على س٢ . طبعاً الشرط (13.3) هو قيد التكاليف الذى ينبغى تحققه في وضع التوازن .

أما الشروط الثانية للتعظيم المشروط للإنتاج فهى تتلخص فى أن يكون المحدد التالى موجباً :

$$(16) \qquad \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & r_1 \\ f_{21} & f_{22} & r_2 \\ r_1 & r_2 & 0 \end{vmatrix} > 0$$

حيث :

$$f_{11} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} \qquad f_{12} = f_{21} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2}$$

وكما أثبتنا فى حالة سلوك المستهلك ، فإن معنى هذا الشرط أن معدل تغير ميل المماس لمنحنى الناتج المتساوى موجباً أى $\frac{d^2 x_2}{d x_1^2} > 0$ عند نقطة التماس. وهذا معناه أن منحنى الناتج المتساوى محدب من ناحية نقطة الأصل ، وأن معدل الإحلال الفنى لابد وأن يتجه إلى التناقص كلما زاد المنتج من استخدامه لعنصر على حساب إنقاص المستخدم من العنصر الآخر .

٥ . ٢ . ٢ . تدنية التكاليف فى ظل قيد على مستوى الإنتاج :

يمكن صياغة مشكلة المنتج على أنها مشكلة تحقيق حجم إنتاج معين بأقل تكلفة

ممكنة . أى أننا فى هذه الحالة نحاول تدنية التكاليف (11.1) فى ظل قيد دالة الإنتاج وعلى ذلك يمكن كتابة معادلة لاجرانج كالتالى :

$$(17) \qquad V = a + r_1 x_1 + r_2 x_2 + \lambda \left(f(x_1, x_2) - \overline{q} \right)$$

الشروط الضرورية للتدنية المقيدة للتكاليف هى :

$$(18.1) \qquad \frac{\partial V}{\partial x_1} = r_1 + \lambda f_1 = 0$$

$$(18.2) \qquad \frac{\partial V}{\partial x_2} = r_2 + \lambda f_2 = 0$$

$$(18.3) \qquad \frac{\partial V}{\partial \lambda} = f(x_1, x_2) - \overline{q} = 0$$

وبالنظر إلى أول شرطين يتضح لنا أنه يمكن اختزالهما إلى الشرط التالى :

$$(19.1) \qquad \frac{f_1}{f_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

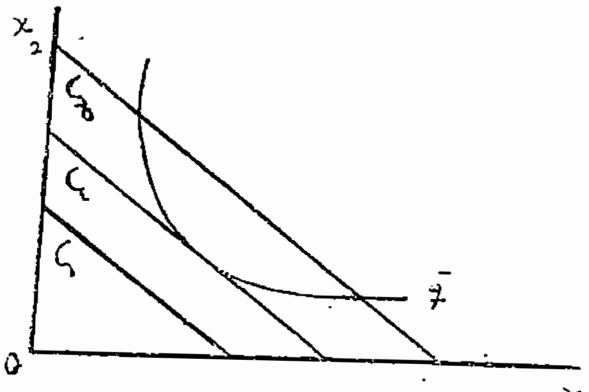
أو فى صورة أخرى :

$$(19.2) \qquad \frac{f_1}{r_1} = \frac{f_2}{r_2}$$

وحيث أن $\frac{f_1}{f_2}$ هو معدل الإحلال الفنى فإن الشرط (19.1) يمكن كتابته كالتالى :

$$(19.3) \qquad RTS_{21} = \frac{r_1}{r_2}$$

وواضح أن هذه هى نفس الشروط التى توصلنا إليها فى ٥ - ٢ - ١ ونوضحها فى شكل رقم (٧) كالتالى :



شكل رقم (٧)

أما الشروط الثانية للتدنية المقيدة للتكاليف فهى تتلخص فى التالى :

$$(20.1) \quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial \lambda \partial x_1} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial \lambda \partial x_2} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 V}{\partial \lambda \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial \lambda \partial x_2} & 0 \end{vmatrix} < 0$$

أى أن :

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_1 \\ f_{12} & f_{22} & f_2 \\ f_1 & f_2 & \end{vmatrix} < 0$$

وحيث أنه من (18.1) , (18.2) :

$$f_1 = -\frac{r_1}{\lambda}$$

$$f_2 = -\frac{r_2}{\lambda}$$

فإن المحدد يكتب كالتالى :

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & -r_1/\lambda \\ f_{12} & f_{22} & -r_2/\lambda \\ -r_1/\lambda & -r_2/\lambda & 0 \end{vmatrix} < 0$$

وبقسمة عناصر الصفين الأول والثانى على λ ، نحصل على الشرط التالى :

$$(\lambda \cdot \lambda)\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & -r_1/\lambda^2 \\ f_{12} & f_{22} & -r_2/\lambda^2 \\ -r_1/\lambda & -r_2/\lambda & 0 \end{vmatrix} < 0$$

وبضرب عناصر العمود الثالث فى λ^2 — وعناصر الصف الثالث فى λ — نحصل على :

$$\frac{\lambda^2}{(-\lambda^2)(-\lambda)}\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & r_1 \\ f_{12} & f_{22} & r_2 \\ r_1 & r_2 & 0 \end{vmatrix} < 0$$

أى أن الشرط الثانى يصبح :

$$\frac{1}{\lambda}\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & r_1 \\ f_{21} & f_{22} & r_2 \\ r_1 & r_2 & 0 \end{vmatrix} < 0$$

ولكن من (18.1) , (18 2) :

$$\lambda = -\frac{r_1}{f_1} = -\frac{r_2}{f_2}$$

وحيث أن كلا من r_1 , r_2 , f_1 , f_2 عبارة عن كمية موجبة ، إذن $\lambda = -k$:

حيث k كمية موجبة هى نسبة السعر إلى الإنتاجية الحدية لأى من العنصرين .

إذن يمكن كتابة الشرط كالتالى :

$$-k \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & r_1 \\ f_{12} & f_{22} & r_2 \\ r_1 & r_2 & 0 \end{vmatrix} < 0$$

وبضرب الطرفين فى — ١ نحصل على :

$$(20.2) \qquad k \cdot \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & r_1 \\ f_{12} & f_{22} & r_2 \\ r_1 & r_2 & 0 \end{vmatrix} > 0$$

وحيث أن k موجبة ، فإن الشرط يصبح هو نفسه الشرط الذى حصلنا عليه فى ٥ ٠ ٢ ٠ ١ ، أى الشرط (16) . وهذا الشرط يتحقق إذا كانت منحنيات الناتج الحدى محدبة من ناحية نقطة الأصل . أى أن الطريقتين ٥ ٠ ٢ ٠ ١ ، ٥ ٠ ٢ ٠ ٢ متكافئتين بمعنى أنه إذا كان q أقصى إنتاج يتحصل عليه بتكلفة مقدارها $\overline{C}$ ، فإن $\overline{C}$ تكون هى أيضاً أدنى تكلفة لتحقيق حجم معين من الإنتاج قدره $\overline{q}$.

مثال (١) : بافتراض أن دالة الإنتاج هى $q = 2\,x_1\,x_2$ وأن قيد التكاليف هى $C = 20 + x_1 + 2\,x_2$ ، أوجد السلوك الأمثل للمنتج بافتراض أن تكاليفه الكلية فى حدود ١٠٠ جنيه .

السلوك الأمثل للمنتج فى هذه الحالة يعنى تعظيم الإنتاج فى ظل قيد التكاليف ،
أى تعظيم الدالة :

$$V = 2\,x_1\,x_2 + \lambda\,(\,20 + x_1 + 2\,x_2 - 100\,)$$

الشروط الضرورية للتوازن هى :

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = 2\,x_2 + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = 2\,x_1 + 2\,\lambda = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = 20 + x_1 + 2\,x_2 - 100 = 0$$

ومن الشرطين الأولين نجد أن :

$$2\,x_2 = -\,\lambda$$

$$2\,x_1 = -\,2\,\lambda$$

أى أن المعادلة الأخيرة هى :

$$x_1 = -\,\lambda$$

إذن من المعادلتين يتضح أن :

$$2\,x_2 = x_1$$

وبالتعويض عن x_1 فى الشرط الأخير نحصل على :

$$20 + 2\,x_2 + 2\,x_2 = 100$$

ومنها :

$$4\,x_2 \qquad = \; 80$$

إذن :

$$x_2 \qquad = \; 20$$

وبالتالى :

$$x_1 = 2\,x_2 = 40$$

وهذا معناه أن الحجم الأمثل للإنتاج هو :

$$q = 2\,x_1\,x_2 = 2 \times 20 \times 40 = 1600 \text{ وحدة}$$

الشرط الثانى للتعظيم هو :

$$\begin{vmatrix} & & g_1 \\ V_{21} & V_{22} & g_2 \\ g_1 & g_2 & 0 \end{vmatrix} > 0$$

حيث V_{ij} هو الشرط ز بالنسبة للمتغير ى i , g_j هى تفاضل الشرط بالنسبة لـ λ .

وقيمة هذا المحدد هى :

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2(-2) + 1(4) = 8$$

وهذه كمية موجبة كما هو مطلوب .

مثال (٢) : نستطيع الآن إثبات أنه لو كان المنتج يريد إنتاج ما قيمته ١٦٠٠ جنيه بأدنى تكلفة فإن قيمة x_1 , x_2 لن تتغير وأن هذه التكلفة الدنيا هى الـ ١٠٠ جنيه المعطاة فى المثال السابق .

المشكلة الآن هى تدنية التكاليف فى ظل قيد دالة الإنتاج . نكتب معادلة لاجرانج كالتالى :

$$V = 20 + x_1 + 2x_2 + \lambda(2x_1x_2 - 1600)$$

الشروط الضرورية هى :

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = 1 + 2\lambda x_2 = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = 2 + 2\lambda x_1 = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = 2x_1x_2 - 1600 = 0$$

من الشرط الأول والثانى :

$$\lambda = -\frac{1}{2x_2}$$

$$\lambda = -\frac{1}{x_1}$$

إذن :

$$\frac{1}{2x_2} = -\frac{1}{x_1}$$

أى أن :

$$x_1 = 2x_2$$

وبالتعويض عن x_1 فى الشرط الثالث نحصل على :

$$2(2x_2)(x_2) = 1600$$

$$4x_2^2 = 1600$$

إذن :

$$x_2 = 20$$

وبالتالى :

$$x_1 = 2x_2 = 40$$

وهذه نفس الكميات التى حصلنا عليها فى الحل الأول للمشكلة . وبالتعويض عن هذه القيم لـ x_1 , x_2 فى دالة التكاليف ، نحصل على القيمة الدنيا لتكاليف إنتاج ما قيمته ١٦٠٠ جنيه وهى :

$$C = 20 + x_1 + 2x_2 = 20 + 40 + 2(20) = 100$$

وهذه هى نفس التكاليف المعطاة فى المثال الأول .

٥ . ٢ . ٣ . تعظيم الأرباح بلا قيد ولا شرط :

وهذه الطريقة مكافئة لتعظيم الأرباح فى ظل دالة الإنتاج .

الأرباح هى الفرق بين الإيراد الكلى من بيع الكمية المنتجة :

$$p \cdot q = p f(x_1, x_2)$$

حيث p سعر السلعة المنتجة ، والتكاليف الكلية :

$$C = a + r_1 x_1 + r_2 x_2$$

أى أن الأرباح z هى :

$$(21) \qquad z = pq - C = p f(x_1, x_2) - a - r_1 x_1 - r_2 x_2$$

إذا كان المنتج قادراً على تغيير الإنتاج والتكاليف فإن الشروط الضرورية لتعظيم z هى :

$$(22.1) \qquad \frac{\partial z}{\partial x_1} = p \cdot f_1 - r_1 = 0$$

$$(22.2) \qquad \frac{\partial z}{\partial x_2} = p \cdot f_2 - r_2 = 0$$

ومنها نحصل على الشرطين التاليين :

$$(22.3) \qquad p f_1 = r_1$$

$$(22.4) \qquad p f_2 = r_2$$

أى أن قيمة الإنتاجية الحدية لكل وحدة من العنصر ينبغى أن تعادل سعر الوحدة من هذا العنصر عند نقطة التوازن .

ويمكن طبعاً كتابة هذين الشرطين كالتالى :

$$(22.5) \qquad p = \frac{f_1}{r_1} = \frac{f_2}{r_2}$$

أو :

$$(22.6) \qquad \frac{f_1}{f_2} = \frac{r_1}{r_2} = RTS_{21}$$

وهى شروط مماثلة للشروط التى سبق لنا الحصول عليها فى ٥ · ٢ · ١ · ٤ ، ٥ · ٢ · ٢ . ولكن ينبغى مراعاة أن (22.5) تعتبر حالة خاصه من (15) حيث أن قيمة $\frac{f_i}{r_i}$ تساوى p بالذات وليس λ — كما فى الحالتين الأولى والثانية .

أما الشروط الثانية للتعظيم غير المقيد للارباح فهى :

$$(23) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} < 0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} > 0$$

أى أن المطلوب هو :

$$p\, f_{11} < 0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} p\, f_{11} & p\, f_{12} \\ p\, f_{12} & p\, f_{22} \end{vmatrix} > 0$$

وحيث أن p موجب فإن الشروط تصبح :

$$f_{11} < 0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21}' & f_{22} \end{vmatrix} > 0$$

وبإيجاد قيمة المحدد السابق ، نجد أن الشرط يصبح :

$$f_{11}\, f_{22} - f_{12}\, f_{21} > 0$$

وحيث أن $f_{21} = f_{12}$ فإن الشرط هو :

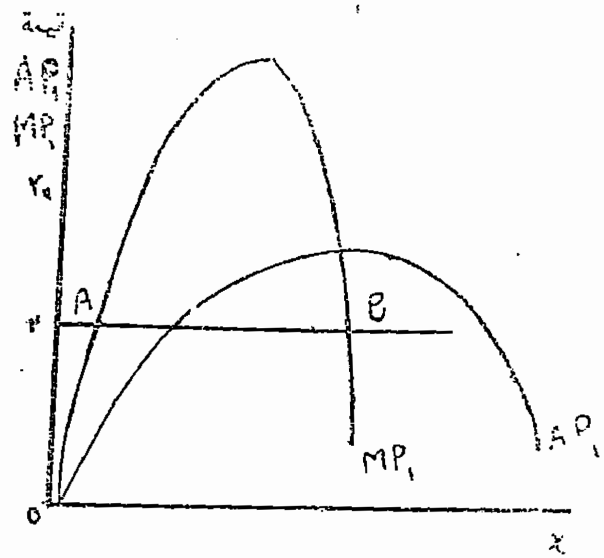
$$f_{11}\, f_{22} > \left(f_{12} \right)^2$$

وحيث أن (f_{11}) سالب ، $(f_{12})^2$ موجب فإن الشرط السابق لابد وأن يعنى أن :

$$f_{22} < 0$$

ومعنى أن يكون f_{11} ; f_{22} سالبين أنه عند نقطة التوازن لابد وأن تكون الإنتاجية الحدية لكل عنصر آخذة فى التناقص . بتأمل الشكل رقم (٨) يتضح التالى:

الشروط الضرورية محققة عند النقطة B وكذلك عند النقطة A . ولكن B هى نقطة التوازن . A ليست نقطة توازن لأنه يمكن زيادة الأرباح باستخدام وحدات أكثر من العنصر س١ . أما B فهى نقطة توازن لأنه لا يمكن زيادة الربح باستخدام كميات أكثر أو أقل من x_1 .



شكل رقم (٨)

مثال : أوجد نقطة توازن المنتج (الإستخدام الأمثل لعناصر الإنتاج ، الكمية المثلى للإنتاج ، وتكاليف إنتاجها) واثبت أنها تحقق أقصى أرباح بافتراض أن دالة الإنتاج هى :

$$q = 50 - q (x_1 - 6)^2 - 4 (x_2 - 4)^2$$

وأن سعر العنصر س١ هو ٢ جنيه وسعر س٢ هو ٨ جنيه وسعر المنتج هو ١ جنيه للوحدة . وأن تكاليف عناصر الإنتاج الثابته هى ٦ جنيهات .

الأرباح هى :

$$z = p.q - C = 50 - (x_1 - 6)^2 - 4(x_2 - 4)^2 - 2x_1 - 8x_2 - 6$$

الشرط الضرورى لتعظيم الربح هو :

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = -2(x_1 - 6) - 2 = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = -4x_2(x_2 - 4) - 8 = 0$$

من الشرط الأول :

$$-2x_1 + 12 - 2 = 0$$

أى أن :

$$-2x_1 = -10$$

إذن :

$$x_1 = 5 \text{ وحدة}$$

ومن الشرط الثانى :

$$-8x_2 + 32 - 8 = 0$$

أى أن :

$$-8x_2 = -24$$

إذن :

$$x_2 = 3 \text{ وحدة}$$

الشروط الثانية تتطلب أولا $\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} < 0$ وهذا صحيح لأن :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} = -2 < 0$$

وهى تتطلب ثانياً :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} > 0$$

وهذا متحقق حيث أن قيمة المحدد هى :

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} = (-2) \times (-8) - 0 = 16 > 0$$

الإنتاج الأمثل هو :

$$q = 50 - (x_1 - 6)^2 - 4(x_2 - 4)^2$$

$$= 50 - (5 - 6)^2 - 4(3 - 4)^2$$

$= 50 - 1 - 4 = 45$ وحدة

وتكاليف هذا الإنتاج الأمثل هى :

$$C = 6 + 2x_1 + 8x_2$$
$$= 6 + 2 \times 5 + 8 \times 3 = 40$$

أما الأرباح فهى :

$$z = 45 - 40 = 5$$

∴ الربح المعظم ٥ جنيه .

٥ . ٢ . ٤ . خط توسع المشروع :

رأينا فيما تقدم أن التوازن يتحقق للمشروع عندما تتعادل النسبة بين سعرى كل عنصرين من عناصر الإنتاج مع النسبة بين سعريهما :

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

وهذا هو ما يحدث عند نقطة تماس خط التكاليف المتساوية مع منحنى الناتج المتساوى . وبالطبع كلما زادت ميزانية الإنفاق الإنتاجى C كلما انتقل المنتج إلى نقطة توازن جديدة . فإذا وصلنا نقط التوازن المتمشية مع ميزانيات إنفاق مختلفة فإننا نحصل على خط يعطينا مسار نمو المشروع ، بفرض ثبات الأسعار وفنون الإنتاج ، وزيادة ميزانية الإنفاق فقط . ويسمى هذا الخط بخط التوسع[1] . فخط التوسع إذن عبارة عن المحل الهندسى لنقط تماس خطوط التكلفة المتساوية المتوازية مع منحنيات الناتج المتساوى . وهو يوضح كيف تتغير نسب تضافر عوامل الإنتاج عندما تتغير ميزانية المشروع . بفرض ثبات الأسعار وفنون الإنتاج .

---

(١) خط التوسع = Expansion Path

ويمكن تحديد خط التوسع كما يلي : وجدنا في ٥ . ٢ . ١ أن تعظيم الإنتاج الذي يمكن الحصول عليه من ميزانية إنفاق معلومة ، يتطلب تحقق الشروط الضرورية التالية :

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = f_1 + \lambda \, r_1 = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = f_2 + \lambda \, r_2 = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = a + r_1 x_1 + r_2 x_2 - C = 0$$

وعموماً يمكن حل هذه المعادلات لإيجاد قيمة كل من x_1 , x_2 بدلالة C ، وهذه العلاقات الثلاثة الناتجة تكفي لتحديد خط التوسع .

مثال : إذا كانت دالة الإنتاج هي :

$$q = 0.5 \log x_1 + \log x_2$$

وسعر x_1 هو ٣ قروش وسعر x_2 هو ٦ قروش والتكاليف الثابتة هي ٣٠٠ جنيه ، فإن تعظيم الإنتاج في ظل قيد التكاليف يعطي معادلة لاجرانج التالية :

$$V = 0.5 \log x_1 + \log x_2 + \lambda \left(300 + 0.02\, x_1 + 0.06\, x_2 - C\right)$$

حيث نعبر عن التكاليف والأسعار بالجنيهات .

والشروط الضرورية تعطينا المعادلات الثلاث التالية :

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = \frac{0.5}{x_1} + 0.02\lambda = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = \frac{1}{x_2} + 0.06\lambda = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = 300 + 0.02\,x_1 + 0.06\,x_2 - C = 0$$

من المعادلة الأولى والثانية :

$$\frac{0.5}{x_1} \cdot x_2 = \frac{0.02}{0.06}$$

إذن :

$$x_2 = \frac{2}{3}\,(x_1) \qquad \text{or} \qquad x_1 = \frac{3}{2}\,x_2$$

وبالتعويض عن x_2 فى دالة التكاليف نحصل على المعادلة التالية :

$$x_1 = \frac{C}{0.06} - 5000$$

وبالتعويض عن x_1 فى قيد التكاليف نحصل على المعادلة التالية :

$$x_2 = \frac{C}{0.09} - 3333.3$$

وبالمثل يمكن إيجاد λ بدلالة C . ومن معادلتى x_2 , x_1 يمكن إيجاد قيم

المناظرة لأى ميزانية إنفاق إنتاجى ، أى الحصول على النقط الواقعة على x_1 ، x_2 خط توسع المنشأة ، بافتراض أن أسعار عناصر الإنتاج ثابتة .

لاحظ أننا نستطيع كتابة دالة ضمنية لخط التوسع كالتالى : حيث أن

$$x_2 = \frac{2}{3} x_1$$

فإن المعادلة المطلوبة هى :

$$2 x_1 - 3 x_2 = 0$$

٥ . ٣ تحليل توازن المنتج باستخدام دوال التكاليف :

٥ . ٣ . ١ . السلوك الأمثل للمنتج فى الزمن القصير :

ركزنا فى التحليل السابق للسلوك الأمثل للمنتج على دالة الإنتاج ونسب تضافر عوامل الإنتاج ، أى مقادير x_1 ، x_2 التى تتحد سوياً لإنتاج q . وفى الحقيقة يمكننا تناول السلوك الأمثل للمنتج من زاوية أخرى ، إذا افترضنا أن مشكلة نسب تضافر عوامل الإنتاج معروف طريقة حلها ، وأن مشكلة المنتج هى تحديد الحجم الأمثل للإنتاج ، أى تحديد حجم الإنتاج الذى يجعل الأرباح أكبر ما يمكن وحيث أن الربح ليس إلا الفرق بين قيمة الإنتاج pq وتكاليف الإنتاج $C = a + r_1 x_1 + r_2 x_2$ ، وحيث أن التكاليف تتوقف على حجم الإنتاج ، وأن جميع الأسعار ثابتة ، فإننا نستطيع أن نكتب دالة التكاليف كما يلى :

$$C = a + g(q) \qquad (24)$$

أى أن تكاليف الإنتاج دالة صريحة فى حجم الإنتاج q ، مضافاً إليها

التكاليف الثابتة . كذلك نستطيع الآن التعبير عن الربح كدالة فى حجم الإنتاج كالتالى :

$$(25) \qquad R = p\,q - a - g\,(q)$$

ويمكن أن نحدد الآن الحجم الأمثل للإنتاج بتعظيم دالة الربح (25) . والشرط الضرورى لتعظيم الربح هو :

$$(26) \qquad \frac{d\,R}{d\,q} = p - \frac{d}{d\,q}\left\{ g\,(q) \right\} = 0$$

أما الشرط الكافى للتعظيم فهو :

$$(27) \qquad \frac{d^2\,R}{d\,q^2} = - \frac{d^2}{d\,q^2}\left\{ g(q) \right\} < 0$$

علينا الآن أن نفسر هذه الشروط ونوضح مغزاها الاقتصادى . الشرط الضرورى للتعظيم يحتوى على المعامل التفاضلى الأول للدالة g (q) الذى هو أيضاً المعامل التفاضلى الأول لدالة التكاليف :

$$\frac{d\,C}{d\,q} = \frac{d}{d\,q}\left\{ g\,(q) \right\} = g'$$

ويطلق عليه التكاليف الحدية(١) . فالتكاليف الحدية تعبر عن التغير فى التكاليف الكلية الناجم عن زيادة الإنتاج أو نقصانه بوحدة — بفرض أن الوحدة

---

(١) التكاليف الحدية = Marginal cost
التكاليف الثابتة = Fixed costs أو Overhead costs
التكاليف المتغيرة = Variable cost أو Direct cost
التكاليف المتوسطة = Average cost

ذات حجم صغير جداً . وحيث أن التكاليف الثابتة لا تتغير مع حجم الإنتاج — في الزمن القصير — فإن التكاليف الثابتة الحدية تساوى صفر دائماً . ولهذا فإن التكاليف الحدية هى بالضرورة تكاليف متغيرة حدية ، أى أنها مستقلة عن حجم الوحدة الإنتاجية الذى تعبر عنه التكاليف الثابتة . وهكذا يمكن كتابة الشرط الضرورى لتعظيم الأرباح كالتالى :

$$(28) \qquad p = g'$$

أى أن الشرط الضرورى لتعظيم الأرباح يقضى بأن حجم الإنتاج الأمثل هو ذلك الحجم الذى تتعادل عنده التكاليف الحدية مع السعر الثابت لبيع الوحدات المنتجة .

بعبارة أخرى ، يستطيع المنتج زيادة أرباحه فقط عندما تكون الإضافة إلى إيراداته (أى p) أكبر من الإضافة إلى تكاليفه (أى g') ، ويتوقف عن تعديل الإنتاج عندما تتعادل الإضافة إلى الإيرادات مع الإضافة إلى التكاليف .

أما الشرط الكافى للتعظيم ، فيتضح معناه إذا أعدنا كتابته كالتالى :

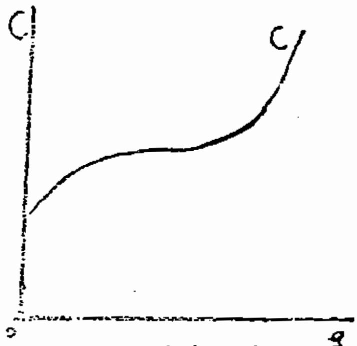
$$(29) \qquad \frac{d^2C}{d\,q^2} > 0$$

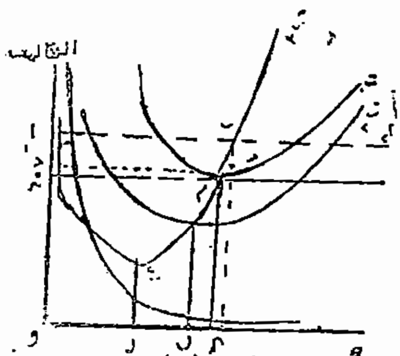
أى أن تعظيم الأرباح يشترط أن تكون المشتقة الثانية لدالة التكاليف موجبة ، وحيث أن $\frac{d\,g'}{d\,q} = \frac{d^2\,C}{dq^2}$ فإن الشرط يعنى أن تكون التكاليف الحدية آخذة فى التزايد عند حجم الإنتاج المعظم للربح .

ومما تقدم يتضح أن شروط تعظيم الربح لم تتضمن سوى التكاليف الحدية .

بعبارة أخرى لم تظهر التكاليف الثابتة فى أى من شرطى التعظيم . وعليه فالمستوى التوازنى للإنتاج لا يتأثر بحجم التكاليف الثابتة ، وإنما الذى يؤثر فيه هو التكاليف المتغيرة فقط ، حيث أن تغير الأخيرة هو نفسه التكاليف الحدية(١) وهذا صحيح فى الزمن القصير . ولذا فإننا ينبغى أن نؤكد على أن دالة التكاليف المستخدمة حتى الآن هى دالة التكاليف الأجل القصير .

ويمكن توضيح العلاقة بين منحنيات التكلفة المختلفة وشروط التوازن بالرسم . كما يلى . فى الشكل (٨) نرسم دالة التكاليف الكلية ، بالشكل الذى درج


شكل رقم (٨)


شكل رقم (٩)

الاقتصاديون على افتراضه . فدالة التكاليف هذه دالة تكعيبية تعبيراً عن أن التكاليف تتزايد بمعدل متناقص فى البداية ثم تتزايد بمعدل متزايد عند المستويات الأعلى للإنتاج .

---

(١) يمكن للقارىء التحقق من أنه لو فرضت ضريبة إجمالية على الإنتاج فإنها لن تؤثر على الحجم الأمثل للإنتاج ، لأن مثل هذه الضريبة ترفع فقط من التكاليف الثابتة للإنتاج وهذه لا تدخل فى تحديد حجم الإنتاج فى الأجل القصير . لكن الأمر مختلف بالنسبة لفرض ضريبة على كل وحدة منتجة كما موضح فى تمرين ٥ فى آخر الفصل الثالث .

ولذا تأخذ دالتى التكاليف المتوسطة المتغيرة والتكاليف المتوسطة الكلية (ت$_٢$ ، ت$_١$ على التوالى) شكل حرف U بمعنى أن التكاليف المتوسطة تتناقص فى البداية ، ثم تأخذ فى الارتفاع بعد ما تصل إلى أدنى حد ممكن . أما دالة التكاليف الحدية (ت$_٣$) فهى تتناقص فى البداية ، لأن إمكانيات إدارة الإنتاج بكفاءة عن طريق زيادة العناصر المتغيرة تكون متوفرة فى البداية . ولكن هذه الإمكانيات تأخذ فى الإنكماش بازدياد حجم الإنتاج بعد حد معين . وتفرض زيادة الإنتاج بعد هذا الحد أعباء إضافية على الإدارة مما يرفع من التكاليف الحدية . وهكذا تتزايد تكلفة الوحدات الإضافية بعد وصول الإنتاج إلى المستوى و ل ، بمعنى أن كل وحدة إضافية منتجة تزيد التكاليف بقدر أكبر من الوحدات التى سبقتها فى الإنتاج . ويؤدى هذا التطور فى تكاليف الإنتاج الحدية إلى تطور مماثل فى كل من تكاليف الإنتاج المتوسطة ، المتغيرة والكلية . ويستمر منحنى التكاليف المتوسطة المتغيرة فى الانخفاض حتى بعد ما تكون التكاليف الحدية قد أخذت فى الارتفاع ، لأنه طالما أن التكاليف الإضافية لأى وحدة منتجة أقل من متوسط تكاليف إنتاج كل الوحدات المنتجة حتى هذه الوحدة فإن التكاليف المتوسطة لابد وأن تهبط(١) . ولهذا لا تأخذ التكاليف المتوسطة المتغيرة فى الارتفاع إلا بعد ما يكون الإنتاج قد وصل إلى المستوى و ك ، والذى تبدأ بعده التكاليف الحدية فى الارتفاع عن التكاليف المتوسطة لكل الوحدات المنتجة .

---

(١) يمكن إثبات هذه المقولة كالتالى : $\frac{C_n}{n} > \frac{C_{n-1}}{n-1}$ يعنى أن $C_{n-1}\, n > C_n (n-1)$ ومنها $C_n > (C_n - C_{n-1})\, n$. إذن $\frac{C_n}{n} > \frac{C_{n-1}}{n-1}$ عندما تكون $(C_n - C_{n-1}) > \frac{C_n}{n}$ ، حيث $n-1, n$ هى عدد الوحدات المنتجة .

أما التكاليف المتوسطة الكلية فهى تأخذ فى الهبوط فى البداية لسببين : أولهما أن التكاليف المتوسطة الثابتة (ت$_{م}$) تكون آخذة فى الهبوط ، حيث أن القدر الثابت من التكاليف يتوزع على عدد أكبر من الوحدات المنتجة ، وثانيهما أن التكاليف المتوسطة المتغيرة آخذة فى الهبوط هى الأخرى . وحيث أن التكاليف المتوسطة الكلية تساوى التكاليف المتوسطة المتغيرة مضافاً إليها متوسط التكاليف الثابتة :

$$(30) \qquad \frac{a+g(q)}{q} = \frac{a}{q} + \frac{g(q)}{q}$$

فإنها لابد وأن تهبط أيضاً . وبعد وصول الإنتاج إلى المستوى و ك ، فإن التكاليف المتوسطة المتغيرة تأخذ فى الإرتفاع ولكن التكاليف المتوسطة الثابتة تكون آخذة فى الهبوط ، نظراً لهبوط التكاليف الثابتة المتوسطة بمعدل أكبر من معدل ارتفاع التكلفة المتوسطة المتغيرة . لكن مع زيادة الإنتاج ، لا يلبث معدل ارتفاع التكلفة المتوسطة المتغيرة أن يصبح أكبر من معدل هبوط التكاليف المتوسطة الثابتة ، ولذا تأخذ التكاليف المتوسطة الكلية فى الإرتفاع . وهذا يلاحظ بعد وصول الإنتاج إلى المستوى و هـ .

لاحظ أن منحنى التكاليف المتوسطة الثابتة يمكن التعبير عنه بالدالة التالية :

$$\overline{F} = \frac{a}{q}$$

حيث $\overline{F}$ هى متوسط التكاليف الثابتة . ومن ثم فمعادلة هذا المنحنى هى :

$$(13) \qquad \overline{F} \cdot q = a$$

وحيث أن a ثابت ، فإن هذه معادلة قطع زائد قائم[1] .

---

(١) قطع زائد قائم = Rectanguler hyperbole

يمكننا الآن توضيح شروط التوازن كالتالى : مستوى الإنتاج التوازنى هو و ح ، الذى نحصل عليه بإسقاط عمود من نقطة تقاطع الخط ا١ ا٢ الذى يمثل السعر و ا١ مع منحنى التكاليف الحدية ت م . لاحظ أننا نأخذ نقطة التقاطع فى الجزء الصاعد من منحنى التكاليف الحدية (أى النقطة ب) ولا نأخذها فى الجزء الهابط من هذا المنحنى (أى النقطة ن) . بعبارة أخرى هناك نقطتان يتحقق عندهما الشرط الأول (الضرورى) للتعظيم ، ولكن الأرباح تكون عند إحداهما (النقطة ن) أقل ما يمكن وعند الأخرى (النقطة ب) أكبر ما يمكن . والشرط الثانى (الكافى) للتعظيم هو الذى يقرر اختيار النقطة الثانية لأن التكاليف الحدية تكون آخذة فى الارتفاع عندما أى أن $\frac{d^2C}{dq^2}$ موجبة عند هذه النقطة . وعند هذه النقطة يكون الإيراد الكلى عبارة عن المستطيل ا١ و هـ ب والتكاليف الكلية عبارة عن المستطيل ء و هـ حـ والأرباح هى المستطيل ا١ ء حـ ب .

لاحظ أنه إذا كان السعر مساوياً و ق ، فإن الكمية المثلى للإنتاج تكون م ق حيث أن شرطى التوازن يتحققان عند هذه النقطة . وحيث أنه عند هذه النقطة لا تكون هناك أرباح ولا خسائر (حيث أن السعر يغطى متوسط التكلفة الكلية) فإن هذه النقطة تسمى Break – even point أى نقطة اللاربح واللا خسارة . وهذه نقطة التوازن فى الآجل الطويل .

مثال : إذا كانت دالة التكاليف هى $C=0.02q^3-0.6q^2+7.4\,q+20$ وكان سعر السلعة المنتجة هو ٥ جنيهات للوحدة . فإن تعظيم الربح $p\,q - C$ يستلزم تحقق الشرط التالى :

$$\therefore \frac{d(pq - C)}{dq} = p - \frac{dC}{dq} = 0$$

أى أن :

$$5 = 0.06\, q^2 - 1.2\, q + 7.4$$

وهذا الشرط يعطينا المعادلة التربيعية التالية :

$$0.06\, q^2 - 1.2\, q + 2.4 = 0$$

أو :

$$q^2 - 20\, q + 40 = 0$$

وحلها[1] هو $q = 17.79$ ، $q = 2.25$. أى أن هناك مستويين للإنتاج يحققان الشرط الضرورى لتعظيم الأرباح ولذا يتعين علينا تقدير الشرط الكافى للتعظيم عند كل منهما حتى يتسنى إختيار إحداهما . الشرط الكافى للتعظيم هو :

$$\frac{d^2C}{dq^2} = 0.12\, q - 1.2$$

بالتعويض عن $q = 2.25$ نجد أن $\frac{d^2C}{dq^2}$ يساوى 0.93 — وبالتعويض عن $q = 17.79$ نجد أن $\frac{d^2C}{dq^2}$ يساوى 0.93 أى أن الشرط الكافى متحقق عندما يقوم المنتج ببيع ١٧,٧٩ وحدة . وعند هذا المستوى من الإنتاج يحقق المنتج ربحاً قدره ١٤,٥٩ جنيهاً .

---

(١) حل المعادلة التربيعية $a x^2 + b x + c = 0$ هو $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

٥ . ٣ . ٢ . السلوك الأمثل للمنتج فى الزمن الطويل :

افترضنا فى القسم السابق أن المنتج يحاول تعظيم أرباحه خلال فترة قصيرة بحيث لا يمكنه أن يغير من مستوى عناصر الإنتاج الثابتة (s) ولذا كان العامل المؤثر فى قرارات المنتج هو التكلفة المتغيرة . أما فى الزمن الطويل ، فإن كل شيء يكون قابلا للتغير فلا تقتصر تعديلات الإنتاج على تغيير مستوى استخدام العناصر المتغيرة وإنما تمتد لتغيير عناصر الإنتاج الثابتة . أى حجم المنشأة أو حجم الجهاز الإنتاجى[١] ، والذى سنرمز له بالرمز s . فكلما زادت s كلما زاد حجم الجهاز الإنتاجى للمنشأة ، وتأخذ دالة الإنتاج فى هذه الحالة الصورة التالية :

$$(32) \qquad q = f(x_1, x_2, s)$$

كذلك يصبح قيد التكاليف :

$$(33) \qquad C = r_1 x_1 + r_2 x_2 + v(s)$$

حيث نعبر عن التكاليف الثابتة فى هذه الحالة كدالة متزايدة فى حجم الجهاز الإنتاجى للمنشأة ، بمعنى أن المشتقة الأولى لهذه الدالة موجبة :

$$(34) \qquad v'(s) > 0$$

وعموماً ، يمكن كتابة دالة التكاليف كالتالى :

$$(35) \qquad C = g(q, s) + v(s)$$

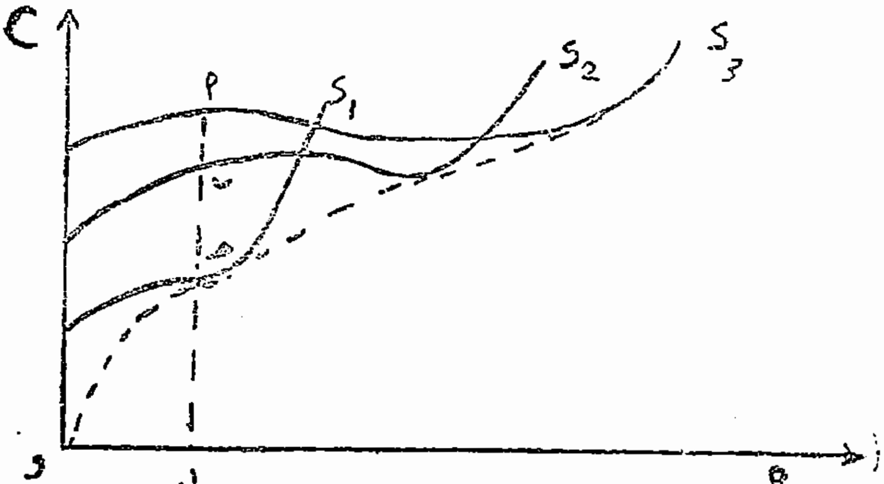
وهذه دالة تكاليف طويلة الأجل . لكن بمجرد أن يختار المنتج حجماً معيناً

---

(١) حجم الجهاز الإنتاجى = Plant size

الجهاز الإنتاجى مثل $ء = \bar{ء}$ فإن دالة التكاليف تتحول إلى دالة قصيرة الأجل والمشكلة التى تواجه المنتج فى هذه الحالة هى مشكلة تحديد المستوى الأمثل لإنتاجه والتى تعرضنا لها فى القسم السابق .

ودالة التكاليف الطويلة الأجل هى تلك الدالة التى تعطى التكلفة الدنيا لإنتاج الكميات المختلفة من السلعة . وهى موضحة بالشكل رقم (١٠) . فإذا كان المنتج يريد إنتاج مقدار معين من السلعة ، فإننا نفترض أن يقوم بحساب تكلفة إنتاج هذا المقدار المقترنة بأحجام مختلفة للجهاز الإنتاجى . مثلا يستطيع المنتج إنتاج المقدار و ل بتكلفة ل ح للجهاز الإنتاجى s_1 ، ل ب للجهاز الإنتاجى s_2 ، ل م للجهاز الإنتاجى s_3 . ومن الواضح أن أقل هذه الأجهزة الإنتاجية الثلاثة نفقة

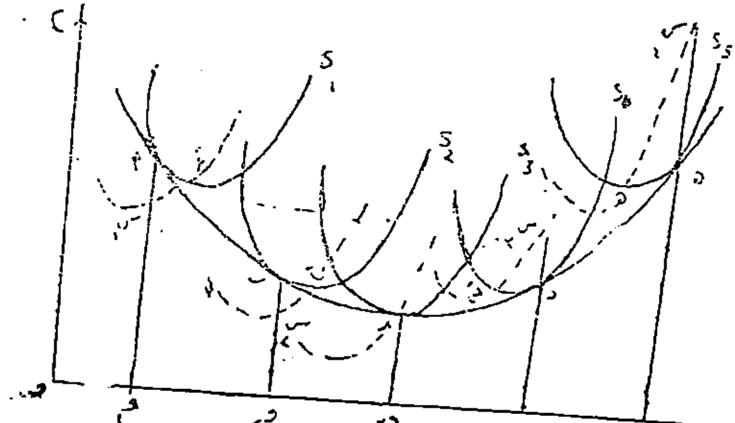


شكل رقم (١٠)

هو s_1 . ولذا فإن النقطة ح تقع بالضرورة على منحنى التكاليف الكلية الطويل الأجل . وبنفس الطريقة يمكن تحديد النقط الأخرى التى يضمها هذا المنحنى بالنسبة للمستويات الأخرى من الإنتاج . بعبارة أخرى ، منحنى التكاليف الطويل

الأجل هو المحل الهندسي للنقط الممثلة للتكاليف الدنيا لإنتاج الكميات المختلفة من السلعة. ولعل فيما تقدم الكفاية لإيضاح علاقة منحنى التكاليف الطويل الأجل بمنحنيات التكاليف القصار الأجل. وتتلخص هذه العلاقة في أن منحنى التكاليف الطويل الأجل يمس كل واحد من منحنيات التكلفة القصار الأجل، ولا يتقاطع مع أي منها. أي أنه المظروف أو الغلاف الذي يغلف هذه المنحنيات أو الإطار الذي يحتضنها جميعاً(١).

ويمكن اشتقاق منحنيات التكلفة المتوسطة الطوال الأجل بقسمة التكاليف الكلية على حجم الإنتاج عند كل مستوى للإنتاج، ووصل النقط الناتجة. ويمكن أيضاً الحصول على منحنى التكلفة المتوسطة الطويل الأجل برسم مظروف منحنيات التكلفة المتوسطة القصار الأجل. أي أن المنحنى المطلوب هو ذلك المنحنى الذي يمس منحنيات التكلفة القصيرة الأجل كما في الشكل رقم (١١).



شكل رقم (١١)

---

(١) مظروف أو غلاف أو إطار بالمعنى الرياضي = Envelope

فى هذا الشكل نجد أن المنحنيات s_1 , s_2 , s_3 , s_4 , s_5 تمثل منحنيات التكاليف المتوسطة للحجوم المختلفة للأجهزة الإنتاجية فى الأجل القصير . ومن الواضح أن منحنى التكاليف المتوسطة الطويل الأجل يعطى أقل تكلفة متوسطة لإنتاج أى كمية من الإنتاج ولهذا فإنه يمس منحنيات التكلفة المتوسطة لجميع الأجهزة الإنتاجية ولا يمكن أن يرتفع فوق أى منها . لاحظ أن النقط الدنيا لمتوسط التكاليف الكلية للأجهزة الإنتاجية الواقعة على يسار النقطة حو ، تقع على يمين نقاط تماس المنحنيات القصيرة الأجل الممثلة لهذه الأجهزة مع المنحنى الطويل الأجل . كذلك تكون النقط الدنيا لمتوسط التكاليف الكلية للأجهزة الإنتاجية الواقعة على يمين حو واقعة على يسار نقط التماس . ومعنى ذلك أن المشروع يميل إلى الاحتفاظ بجانب من الطاقة الإنتاجية الفائضة(١) حتى تكون تحت تصرفه عندما تستدعى ظروف السوق التوسع فى الإنتاج ، ولكى يواجه بمساعدتها متطلبات النمو العادى لنشاطه الذى يأخذ فى التزايد مع اكتساب المشروع لعملاء جدد ، ومع تمكنه من الصناعة وذياع صيته . ويستمر المشروع فى الاحتفاظ بجزء من الطاقة الإنتاجية كاحتياطى لمواجهة النمو الطبيعى أو الطوارىء ، حتى يصل إلى حجم معين للجهاز الإنتاجى هو الحجم s_3 ، والذى يعد بمثابة الحجم الأمثل للجهاز الإنتاجى وتكون عنده التكاليف المتوسطة للإنتاج أقل ما يمكن . أما بعد هذا الحجم ، فإن المشروع يعمد إلى بناء أجهزة إنتاجية تقل طاقتها المثلى عن الطاقة التى يتوقع أن تستغل فعلا ، فلا تترك طاقة إنتاجية إحتياطية . ويرجع ذلك إلى تزايد مشاكل المشروع مع تزايد حجم الجهاز الإنتاجى بعد حد معين ، مما يجعل أمر إدارته أمراً متزايد الصعوبة ، متزايد التكلفة . بعبارة أخرى لا يكون من الحكمة بعد تجاوز الحجم الأمثل للجهاز الإنتاجى تحمل تكاليف إنتاجية تتزايد باطراد وتحمل تكاليف الاحتفاظ بطاقة إنتاجية تفيض عن الحاجة أيضاً .

---

(١) طاقة إنتاجية فائضة = Surplus or Excess capacity

ويأخذ منحنى التكاليف المتوسطة الطويل الأجل نفس الشكل الذى تأخذه منحنيات التكلفة القصار الأجل ، أى شكل حرف U . وذلك يعنى أن تزايد حجم الجهاز الإنتاجى يصاحبه فى البداية من الوفورات الاقتصادية ما يربو على أية تكاليف إضافية تترتب على كبر الحجم ، بحيث يكون من صالح المشروع التوسع حتى يصل إلى نقطة معينة تبدأ بعدها التكاليف الإضافية ومشاكل الإدارة والتنسيق فى التزايد بدرجة أسرع من الوفورات الاقتصادية . ولذا فإننا نقول أن الإنتاج يخضع لظاهرة تزايد الغلة بالنسبة للحجم فى البداية ، ويستمر كذلك حتى يصل إلى حجم يتعادل عنده معدل زيادة عناصر الإنتاج كلها مع معدل زيادة الإنتاج يبدأ بعده الإنتاج فى الخضوع لظاهرة تناقص الغلة بالنسبة للحجم(١) .

ويمكن تعريف العلاقة بين الغلة والحجم بسهولة باستخدام دوال التكاليف . افرض أن دالة الإنتاج التالية :

$$q = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

متجانسة من الدرجة k ، حيث k ثابت . فى هذه الحالة إذا زادت جميع عناصر الإنتاج بنسبة t فإن الإنتاج يتزايد بنسبة t^k :

$$q^* = f(t x_1, t x_2, \ldots, t x_n)$$

$$= t^k \; f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$= t^k . q$$

---

(١) تزايد الغلة بالنسبة للحجم = Increasing Returns to Scale
وتناقص الغلة بالنسبة للحجم = Decreasing Returns to Scale
وثبات الغلة بالنسبة للحجم = Constant Returns to Scale

ويقال أن دالة الإنتاج تتميز بتزايد الغلة بالنسبة للحجم إذا كانت $k > 1$ ، وبثبات الغلة بالنسبة للحجم إذا كانت $k = 1$ ، وبتناقص الغلة بالنسبة للحجم إذا كانت $k < 1$. وفى حالة دالة كوب/دوجلاس ، والمعروف أنها متجانسة :

$$q = A\, x_1^{\alpha_1}\, x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

نجد أنه يستدل على طبيعة العلاقة بين الغلة والحجم بمجموع مرونات الإنتاج $(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)$. فإذا كان مجموع المرونات أكبر من الواحد الصحيح كانت الغلة متزايدة بالنسبة للحجم وإذا كان المجموع أقل من الواحد الصحيح كانت الغلة متناقصة بالنسبة للحجم ، وإذا كان المجموع واحد صحيح ، كانت الغلة ثابتة بالنسبة للحجم .

أما منحنى التكاليف الحدية الطويل الأجل فيمكن الحصول عليه بوصل النقط الممثلة للمشتقات الأولى لدالة التكلفة الكلية الطويلة الأجل . كذلك يمكن اشتقاق هذا المنحنى من منحنيات التكلفة الحدية القصار الأجل . ذلك أن المنحنى المطلوب هو المحل الهندسى لتلك النقط على منحنيات التكلفة الحدية القصار الأجل المناظرة لنقط تماس منحنيات التكلفة المتوسطة القصار الأجل مع منحنى التكلفة المتوسطة الطويل الأجل . أى أن المنحنى الذى يصل النقط س١ و س٢ و حـ و س٣ و س٤ وأمثالها على منحنيات التكلفة الحدية القصار الأجل . ومن الواضح أن منحنى التكلفة الحدية الطويل الأجل يمر بأدنى نقطة على منحنى التكاليف المتوسطة الطويل الأجل ، كما يحدث بالنسبة لمنحنيات التكلفة القصار الأجل .

تحديد الحجم الأمثل للجهاز الإنتاجى :

افرض أن دالة التكاليف الطويلة الأجل هى :

$$C = \frac{1}{3} q^3 - q^2 - k q + k^2 \qquad (36)$$

حيث k هى مؤشر يدل على حجم الجهاز الإنتاجى .

الشرط الضرورى للتوازن ، أى شرط تعظيم الأرباح فى هذه الحالة هو :

$$\frac{d}{d q} (p \cdot q - C) = 0$$

أى أن التكاليف الحدية الطويلة الأجل تساوى السعر :

$$p = \frac{d C}{d q} \qquad (37)$$

والشرط الثانى هو أن تكون التكاليف الحدية الطويلة الأجل متزايدة :

$$\frac{d^2 C}{d q^2} > 0 \qquad (38)$$

لتحديد الحجم الأمثل للجهاز الإنتاجى نكتب دالة التكاليف فى صورة ضمنية كالتالى :

$$C = \frac{1}{3} q^3 + q^2 + k \cdot q - k^2 = 0 \qquad (39)$$

ونساوى مشتقتها الأولى بالنسبة لـ k بالصفر . إذن :

$$q - 2 k = 0$$

ومنها :

$$k = {}^1/_2\, q \qquad (40)$$

وبالتعويض عن k فى دالة التكاليف نحصل على :

$$C = \frac{1}{3} q^3 - q^2 - \frac{1}{2} q^2 + \frac{1}{4} q^2 = \frac{1}{3} q^3 - 1\,{}^1/_4\, q^2 \quad (42)$$

وهكذا عبرنا عن التكاليف كدالة فى حجم الإنتاج q ، وهذه هى معادلة المظروف .

إذا كان سعر السلعة هو ١ جنيه فإن شرط التوازن يقتضى أن تكون التكلفة الحدية مساوية للسعر :

$$q^2 - 2.5 = 1$$

أى أن :

$$q^2 - 2.5\, q - 1 = 0$$

وحلها 0.35 — , 0.8 والشرط الثانى متحقق بالنسبة للحل الأخير :

$$\frac{d^2 C}{d\, q^2} = 3.1 > 0$$

يمكننا الآن إيجاد الحجم الأمثل للجهاز الإنتاجى :

$$k = {}^1/_2\, q = \frac{2.8}{2} = 1.4$$

وعندما ينتج المشروع ٢,٨ وحدة بسعر جنيه للوحدة فإنه يحقق ربحاً مقداره :

$$p\, q - C = 2.8 - 2.73 = 0.07 \text{ جنيهاً}$$

٤ . ٥ اشتقاق دوال العرض الفردى :

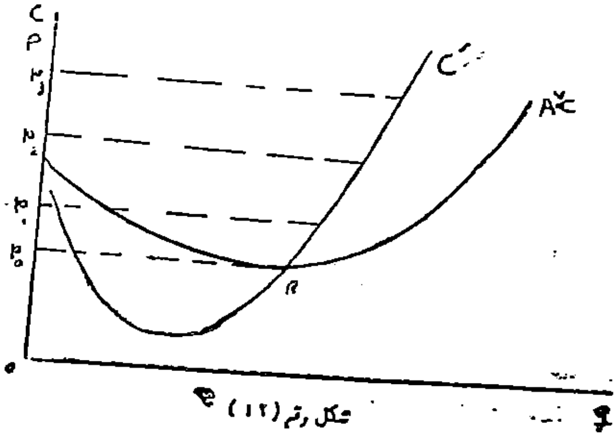
يعبر منحنى العرض عن العلاقة بين كمية السلعة التى يكون المنتج مستعداً لتقديمها للبيع عند كل سعر من الأسعار الممكنة لبيع السلعة فى السوق . أى أن دالة العرض الفردى هى :

$$S = g\,(p) \qquad (42)$$

ويمكن اشتقاق دالة العرض الفردى من الشروط الضرورية لتعظيم الأرباح . والشرط الضرورى لتعظيم الأرباح هو تعادل التكاليف الحدية مع سعر بيع السلعة المنتجة :

$$\frac{dC}{dq} = p \qquad (43)$$

وهكذا فإنه يمكن إيجاد الكميات التى تعرض عند الأسعار المختلفة للسلعة . وذلك عند نقط تقاطع الخطوط الأفقية الممثلة للأسعار المختلفة للسلعة مع منحنى الإنتاجية الحدية كما فى شكل رقم (١٢) .



شكل رقم (١٢)

ومن الرسم يتضح أن منحنى العرض هو فى الواقع جزء من منحنى التكاليف الحدية . وهو الجزء البادىء من نقطة تقاطع التكاليف الحدية مع منحنى التكاليف المتغيرة المتوسطة ؛ حيث أن المنتج لن يقدم أية كمية من السلعة للبيع إذا كان سعر السوق أقل من أدنى متوسط للتكاليف المتغيرة فى الأجل القصير ، أما إذا كان سعر البيع أعلى من p_0 فإن الكمية المعروضة تكون متوقفة على السعر . وهكذا فإن منحنى العرض الفردى فى الزمن القصير يتكون من المسافتين $R\,C'$ ، $0\,p_0$. أى أن :

$$S = g(p) > 0 \quad \text{إذا كان} \quad p_i \geqslant \min.\left(\frac{VC}{q}\right) \quad \text{أى إذا كان} \quad p \geqslant p_0$$

$$S = 0 \quad \text{إذا كان} \quad p_i < \min.\left(\frac{VC}{q}\right) \quad \text{أى إذا كان} \quad p < p_0$$

حيث $V\,C$ هى التكاليف المتغيرة ، $\frac{VC}{q}$ متوسط التكاليف المتغيرة .

ولاشتقاق دالة العرض الفردى للزمن القصير يمكن اتباع أى من الطريقتين التاليتين :

٥ . ٤ . ١ . الطريقة الأولى : لإمكان اشتقاق حل محدد ، نفترض أن دالة التكاليف هى :

$$C = 0.02\,q^3 - 0.8\,q^2 + 16\,q + 10 \qquad (44)$$

وعلى ذلك فإن دالة التكاليف المتوسطة المتغيرة هى :

$$\frac{VC}{q} = 0.02\,q^2 - 0.8\,q + 16 \qquad (45)$$

ويمكننا إيجاد أدنى مستوى يمكن أن يصل إليه متوسط التكاليف المتغيرة بمساواة المعامل التفاضلي الأول لـ $\frac{VC}{q}$ النسبة لـ q بالصفر:

$$\frac{d(VC/q)}{dq} = 0.04\,q - 0.8 = 0$$

ومنها يتضح أن التكاليف المتوسطة المتغيرة تصل إلى نهايتها الدنيا عندما تكون :

$$q = 20$$

وقيمة التكاليف المتوسطة المتغيرة عند هذا المستوى من الإنتاج هي :

$$\frac{VC}{q} = 0\ 02\,(20)^2 - 0.8\,(20) + 16 = 8$$

إذن إذا كان السعر أقل من ٨ قروش فإن المنتج صاحب دالة التكاليف (45) أعلاه ، لن يقدم أي إنتاج للبيع . أما إذا كان السعر ٨ قروش أو أكثر ، فإن الكمية المعروضة ستكون موجبة ومتوقفة على السعر :

$$S_i = g\,(p_i)$$

ولاشتقاق هذه الدالة نساوي السعر p بالتكاليف الحدية ، حيث $p > 8$:

$$p = \frac{dC}{dq}$$

$$p = 0.06\,q^2 - 1.6\,q + 16$$

ومنها :

$$0.06\,q^2 - 1.6\,q\,(16 - p) = 0$$

وحلها :

$$q = S = \frac{1.6 \pm \sqrt{0.24\,p - 1.28}}{0.12}$$

وهذه معادلة منحنى له فرعين مناظرين للإشارتين السالبة والموجبة قبل علاقة الجذر التربيعى . وحيث أن الإشارة السالبة تعنى أن ميل المنحنى سالب ، فإننا نستبعد الفرع المناظر للإشارة السالبة لأن الشرط الثانى لتعظيم الأرباح يفترض أن التكاليف الحدية متزايدة . إذن منحنى عرض المنشأة فى الأجل القصير هو :

$$(46) \qquad \begin{aligned} S &= 0 && \text{if } p < 8 \\ S &= \frac{1.6 + \sqrt{0.24\,p - 1.28}}{0.12} && \text{if } p \geqslant 8 \end{aligned}$$

٥ ٤ ٠ ٢ . الطريقة الثانية : يمكن اشتقاق دالة العرض الفردى من الشروط الضرورية لتعظيم الأرباح $R = p\,q - r_1 x_1 - r_2 x_2 - a$ مع فرض قيد يمثل الشروط الفنية للإنتاج ، أى دالة الإنتاج . إذا افترضنا أن دالة الإنتاج هى $q = B_1 \log x_1 + B_2 \log x_2$ لإمكان اشتقاق حل محدد ، فإننا نبدأ بإيجاد الشروط الضرورية للتعظيم المقيد للربح . معادلة لاجرانج فى هذه الحالة هى :

$$(47) \quad V = p\,q - r_1 x_1 - r_2 x_2 - a + \lambda \left(B_1 \log x_1 + B_2 \log x_2 - q \right)$$

والشروط الضرورية هى :

$$\frac{\partial V}{\partial q} = p - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = - r_1 + \lambda \frac{B_1}{x_1} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = -r_2 + \lambda \frac{B_2}{x_2} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = B_1 \log x_1 + B_2 \log x_2 + q = 0$$

ومن هذه المعادلات يمكن أن نحصل على الحلول التالية للمجاهيل q ، x_1 ، x_2 ، λ بدلالة r_1 ، r_2 ، p :

من المعادلة الأولى نحصل على قيمة λ وهى $p = \lambda$.

وبالتعويض عن λ فى المعادلة الثانية نحصل على قيمة x_1 :

$$x_1 = \frac{B_1}{r_1} p \qquad (48)$$

بالمثل نحصل على قيمة x_2 من المعادلة الثالثة :

$$x_2 = \frac{B_2}{r_2} p \qquad (49)$$

وبالتعويض عن x_1 ، x_2 فى دالة الإنتاج أى الشرط الأخير نحصل على :

$$q = B_1 \log \left(\frac{B_1}{r_1} p \right) + B_2 \log \left(\frac{B_2}{r_2} p \right)$$

أى أن دالة العرض الفردى فى الأجل القصير هى :

$$q = S = \left(B_1 \log \frac{B_1}{r_1} + B_2 \log \frac{B_2}{r_2} \right) + (B_1 + B_2) \log p \qquad (50)$$

حيث p هو سعر يجعل الأرباح موجبة ويحقق الشروط الكافية للتعظيم .

لاحظ أن الدالتين (48) , (49) هما دالتى الطلب المشتق على عنصرى الإنتاج(١) إذ تظهر فيهما الكمية المطلوبة من أى من العنصرين كدالة فى سعر بيع الوحدة من السلعة المنتجة .

وأخيراً ، لاحظ أنه بالإمكان أن نحصل على نفس النتائج السابقة لو كنا عظمنا الربح :

$$z = p\,q - r_1 x_1 - r_2 x_2$$

فالشروط الضرورية للتعظيم هى :

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = p\,\frac{B_1}{x_1} - r_1 = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = p\,\frac{B_2}{x_2} - r_2 = 0$$

وهذين الشرطين يعطيان المعادلتين (48) , (49) اللتان يمكن استخدامهما للتعويض عن x_1 , x_2 فى دالة الإنتاج ، لكى نحصل على دالة العرض المطلوبة .

٣ . ٤ . ٥ . دالة العرض فى الأجل الطويل : لاحظ أننا فى التحليل السابق اقتصرنا على الزمن القصير . وقد كان ذلك واضحاً حينما افترضنا أن أدنى سعر هو ذلك السعر الذى يغطى أدنى قيمة لتوسط التكاليف المتغيرة . أما فى الأجل الطويل ، فإن المنتج لا يستطيع أن يتحمل العبء المترتب على عدم تغطية تكاليفه الثابتة ، ولذا فإن أدنى سعر يدفع المنتجون إلى عرض سلعتهم فى السوق ، هو

---

(١) طلب مشتق = Derived Demand

ذلك السعر الذى يغطى التكاليف المتوسطة الكلية . ويتمثل منحنى العرض فى الفترة الطويلة من ذلك الجزء من منحنى التكاليف الحدية الطويل الأجل البادىء من نقطة تقاطعه مع منحنى التكاليف الكلية المتوسطة الطويلة الأجل ، أى ذلك الجزء من منحنى التكاليف الحدية الذى تزيد فيه التكاليف الحدية على التكاليف الكلية المتوسطة .

ويمكن اشتقاق دالة العرض الأجل بنفس الطريقة التى شرحناها سابقاً ، حيث تساوى السعر p بالتكلفة الحدية للأجل الطويل ، و توجد الكمية q بدلالة p مع ملاحظة أن ميل منحنى العرض الطويل الأجل موجب ، تمشياً مع الشروط الكافية لتعظيم الربح فى الأجل الطويل والتى تتطلب تزايد التكاليف الحدية الطويلة الأجل .

٥ . ٥ . دالة الإنتاج المتعددة المنتجات :

فى الشرح السابق ، افترضنا أن المنتج يقوم بإنتاج سلعة واحدة وأن الكمية المنتجة من هذه السلعة تتوقف على كميات عناصر الإنتاج . أى أننا افترضنا وجود دالة إنتاج ذات منتج واحد . لكن فى العادة تقوم المنشأة بإنتاج عدد من المنتجات ، كما فى حالة قيام المزارع بإنتاج أكثر من محصول على مدار السنة أو حتى فى نفس الموسم ، أو قيام مصنع بإنتاج منتج رئيسى وعدد من المنتجات الثانوية . ويمكن فى هذه الحالة كتابة دالة إنتاج ذات منتجات متعددة فى صورة ضمنية كالتالى(١) :

---

(١) دالة إنتاج ذات منتج واحد = Single — product production Function

دالة إنتاج عديدة المنتجات = Multiple — product production Function

$$(51) \qquad F(q_1, q_2, \ldots, q_m ; x_1, x_2 \ldots x_n) = 0$$

وكما فى حالة الدالة الوحيدة المنتج ، فإننا نفترض أن الدالة العديدة المنتجات هى دالة مستمرة لها مشتقات جزئية أولى وثانية تختلف عن الصفر لكل حلولها الممكنة . كما نفترض أن الدالة يتوفر فيها شروط الكفاءة الفنية ، بمعنى أنها تعطى أكبر قيمة لـ q_i عندما تكون كل المنتجات الأخرى q_j ثابتة $(j \neq i)$ وعندما تستخدم توليفة معينة من عناصر الإنتاج : $(x_1 \ldots x_n)$.

للتبسيط سوف نأخذ الحالة التى يستخدم فيها عنصران من عناصر الإنتاج لإنتاج سلعتين ، أى حالة دالة الإنتاج :

$$(52) \qquad F(q_1, q_2, x_1, x_2) = 0$$

ولتحديد السلوك الأمثل للمنتج ، فإننا نعظم دالة الربح فى ظل القيد المتمثل فى دالة الإنتاج . فى هذه الحالة نكتب معادلة لاجرانج كالتالى :

$$(53) \qquad L = p_1 q_1 + p_2 q_2 - r_1 x_1 \quad r_2 x_2 + \lambda F(q_1, q_2, x_1, x_2)$$

الشروط الضرورية للتعظيم المقيد للربح هى :

$$(54.1) \qquad \frac{\partial L}{\partial q_1} = p_1 + \lambda \frac{\partial F}{\partial q_1} = 0$$

$$(54.2) \qquad \frac{\partial L}{\partial q_2} = p_2 + \lambda \frac{\partial F}{\partial q_2} = 0$$

$$(54.3) \qquad \frac{\partial L}{\partial x_1} = -r_1 + \lambda \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0$$

$$(54.4) \qquad \frac{\partial L}{\partial x_2} = -r_2 + \lambda \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0$$

$$(54.5) \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = F(q_1, q_2, x_1, x_2) = 0$$

أما الشروط الكافية للتعظيم فى أن تتقلب إشارات المحددات Δ_1 ، Δ_2 ، Δ_3 من موجبة إلى سالبة إلى موجبة :

$$(55) \qquad \Delta_1 > 0 \quad ; \Delta_2 < 0 \quad ; \Delta_3 > 0$$

حيث :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial q_2 \partial q_1} & \frac{\partial F}{\partial q_1} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial q_1 \partial q_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial q_2^2} & \frac{\partial F}{\partial q_2} \\ \frac{\partial F}{\partial q_1} & \frac{\partial F}{\partial q_2} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{3} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial q_2 \partial q_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial q_1} & \frac{\partial F}{\partial q_1} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial q_1 \partial q_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial q_2^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial q_2} & \frac{\partial F}{\partial q_2} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial q_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial q_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F}{\partial q_1} & \frac{\partial F}{\partial q_2} & \frac{\partial F}{\partial x_1} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{2} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial q_2 \partial q_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial q_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial q_1} & \frac{\partial F}{\partial q_1} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial q_1 \partial q_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial q_2^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial q_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial q_2} & \frac{\partial F}{\partial q_2} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial q_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial q_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial q_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial q_2 \partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} & \frac{\partial F}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F}{\partial q_1} & \frac{\partial F}{\partial q_2} & \frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial F}{\partial x_2} & 0 \end{vmatrix}$$

ويمكن أن نوضح معنى هذه الشروط كما يلى :

الشروط الضرورية : من المعادلتين (45.1) ; (45.2) نحصل على الشرط التالى :

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\partial F / \partial q_1}{\partial F / \partial q_2} \qquad (56)$$

وحيث أنه بقاعدة تفاضل الدالة الضمنية :

$$\frac{\partial F / \partial q_1}{\partial F / \partial q_2} = - \frac{\partial q_2}{\partial q_1}$$

إذن أول شرطين من الشروط الضرورية يتطلبان أن يكون :

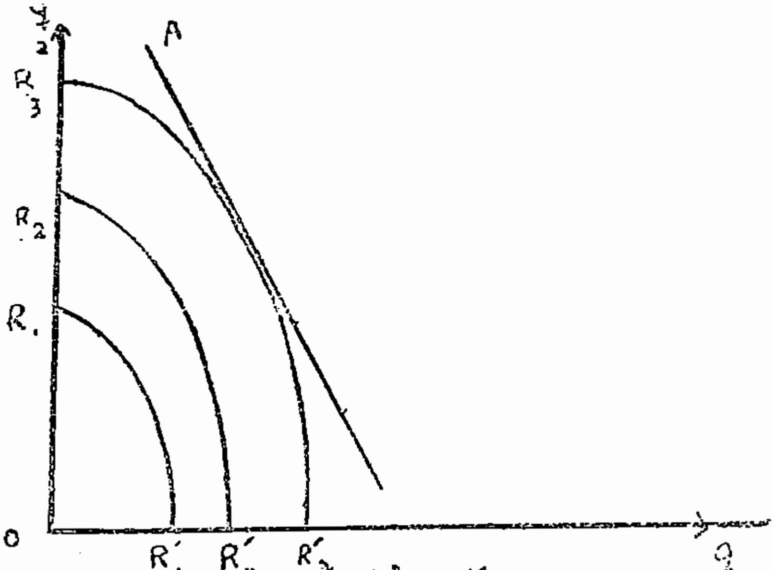
$$\frac{p_1}{p_2} = - \frac{\partial q_2}{\partial q_1} \qquad (57)$$

ويعبر $\frac{\partial q_2}{\partial q_1}$ — عن معدل التحول الإنتاجى[1] للمنتج ك٢ على المنتج ك١ ، أى الكمية من ك٢ التى تلزم لتعويض نقصان ك١ بوحدة واحدة ، مع الاحتفاظ بكمية الموارد المستخدمة ؛ أى x_1 , x_2 ثابتة . وفى الواقع أن هذا ليس إلا القيمة السالبة لميل منحنى التحويل الإنتاجى أو خط إمكانات الإنتاج الذى ذكرناه فى ١٠٢٠١ ، وافترضنا للتبسيط أنه خط مستقيم . أما فى الحالة الراهنة ، وكما سيتضح من الشروط الكافية لتعظيم الربح ، فإن المنحنى يكون مقعراً من ناحية

---

(١) معـدل التحول الإنتاجى = Rate of product Transformation
أى التحول من إنتاج سلعة إلى إنتاج سلعة أخرى .

نقطة الأصل كما فى الشكل رقم (١٣) . ومنحنى التحويل الإنتاجى عبارة عن المحل الهندسى لجميع النقط الممثلة للتوليفات المختلفة من السلعتين والتى يمكن إنتاجها بنفس القدر من الموارد .



شكل رقم (١٣)

فى هذا الشكل رسمنا ثلاثة منحنيات للتحويل الإنتاجى ، كل واحد يناظر مجموعة معينة من عناصر الإنتاج وكلما ابتعد المنحى عن نقطة الأصل كلما كان معنى ذلك أن حجماً أكبر من الموارد يوجه لإنتاج السلعتين .

بعبارة أخرى فإن الشرطين الضروريين الأول والثانى للتنظيم المقيد للربح يقتضيان بتعادل معدل التحول الإنتاجى بين السلعتين مع النسبة بين سعريهما . وهذا الشرط متحقق عند نقطة تماس منحنى التحول الإنتاجى والخط الذى يكون ميله

هو النسبة بين السعرين . ويسمى الخط الأخير خط الإيراد المتكافىء[1] ومعادلته هى :

$$R = p_1 q_1 + p_2 q_2 \qquad (58.1)$$

حيث R هى الإيراد الكلى . أو إذا عبرنا عن q_2 بدلالة q_1 فإننا نحصل على المعادلة التالية :

$$q_2 = \frac{R}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} q_1 \qquad (58.2)$$

وواضح منها أن ميل هذا الخط هو النسبة بين سعرى السلعتين .

أما الشرطين الضروريين الثالث والرابع فهما يؤديان إلى الشرط التالى :

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\partial F / \partial x_1}{\partial F / \partial x_2} \qquad (59)$$

ولكن من قاعدة الدالة الضمنية :

$$\frac{\partial F / \partial x_1}{\partial F / \partial x_2} = - \frac{\partial x_2}{\partial x_1}$$

وهذا هو المعدل الحدى للإحلال الفنى بين عنصرى الانتاج . أى أنه من الضرورى أن تتساوى النسبة بين سعرى العنصرين مع المعدل الحدى للإحلال الفنى. وهذا يتحقق عند نقطة تماس خط التكلفة المتساوية مع منحنى الناتج المتكافىء .

---

(١) خط الإيراد المتكافىء Iso revenue line أى المحل الهندسى لجميع النقط التى تمثل توليفات مختلفة من السلعتين ينتج من بيعهما جميعاً نفس الإيراد الكلى .

كذلك من الشرط الأول والثالث نحصل على الشرط التالى :

$$- \frac{r_1}{p_1} = \frac{\partial F / \partial x_1}{\partial F / \partial q_1} \qquad (60)$$

ولكن قاعدة الدالة الضمنية تفيدنا أن :

$$\frac{\partial F / \partial x_1}{\partial F / \partial q_1} = - \frac{\partial q_1}{\partial x_1}$$

أى أن :

$$\frac{r_1}{p_1} = \frac{\partial q_1}{\partial x_1} \quad \text{or} \quad r_1 = p \, \frac{\partial q_1}{\partial x_1} \qquad (61)$$

لكن $\frac{\partial q_1}{\partial x_1}$ هى الإنتاجية الحدية للعنصر x_1 بالنسبة للسلعة الأولى . أى أن قيمة الإنتاجية الحدية للعنصر الأول يجب أن تساوى سعر هذا العنصر . بالمثل يمكن اشتقاق شرط مماثلة للإنتاجية للعنصر الأول بالنسبة للسلعة الثانية ، والإنتاجية الحدية للعنصر الثانى بالنسبة لكل من السلعتين .

أما بالنسبة للشروط الكافية للتعظيم فيمكن إثبات أنها تتطلب أن يكون ميل منحنيات الناتج المتكافىء سالب وأن تكون هذه المنحنيات محدبة من ناحية نقطة الاصل ، وأن يكون ميل منحنيات التحويل الإنتاجى سالب وأن تكون هذه المنحنيات مقعرة من ناحية نقطة الاصل .

وهكذا يمكن تلخيص شروط التوازن فيما يلى :

الشروط الضرورية هى :

(أ) تساوى معدل الإحلال الفنى لأى عنصرين مع النسبة بين سعريهما .

(ب) تساوى معدل التحول الإنتاجى بين أى سلعتين مع النسبة بين سعريهما .

(حـ) تساوى قيمة الإنتاجية الحدية لكل عنصر مع سعره .

والشروط الكافيه هى :

(أ) منحنيات الناتج المتكافىء ميلها سالب ومحدبة من ناحية نقطة الأصل .

(ب) منحنيات التحويل الإنتاجى ميلها سالب ومقعرة من ناحية نقطة الأصل.

مثال : إذا كانت دالة الإنتاج هى الدالة السامية :

$$q_1^{\alpha_1} \; q_2^{\alpha_2} \; e^{b_1 q_1 + b_2 q_2} = a \, x_1^{\beta_1} \, x_2^{\beta_2} \, e^{c_1 x_1 + c_2 x_2}$$

أو بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس e وإعادة ترتيب الحدود :

$$F = \alpha_1 \ln q_1 + \alpha_2 \ln q_2 + b_1 q_1 + b_2 q_2 - \ln a - \beta_1 \ln x_1$$
$$- \beta_2 \ln x_2 - c_1 x_1 - c_2 x_2 = 0$$

التعظيم المقيد للربح يعنى تعظيم الدالة :

$$L = p_1 q_1 + p_2 q_2 - r_1 x_1 - r_2 x_2 + \lambda (\alpha_1 \ln q_1 + \alpha_2 \ln q_2 + b_1 q_1 + b_2 q_2 - \ln a$$
$$- \beta_1 \ln x_1 - \beta_2 \ln x_2 - c_1 x_1 - c_2 x_2)$$

الشروط الضرورية للتعظيم هى

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = p_1 + \lambda \left(\frac{\alpha_1}{q_1} + b_1 \right) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = p_2 + \lambda \left(\frac{\alpha_2}{q_2} + b_2 \right) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -r_1 - \lambda \left(\frac{\beta_1}{x_1} + c_1 \right) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -r_2 - \lambda \left(\frac{\beta_2}{x_2} + c_2 \right) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \alpha_1 \ln q_1 + \alpha_2 \ln q_2 + b_1 q_1 + b_2 q_2 - \ln a$$
$$- \beta_1 \ln x_1 - \beta_2 \ln x_2 - c_1 x_1 - c_2 x_2 = 0$$

من المعادلتين الأولى والثانيه يمكن أن نحصل على الشرط التالى :

$$\frac{r_1}{p_1} = - \frac{\frac{\beta_1}{x_1} + c_1}{\frac{\alpha_1}{q_1} + b_1}$$

لكن الإنتاجية الحدية للعنصر ١ بالنسبة للسلعة ١ هى :

$$\frac{\partial q_1}{\partial x_1} = - \frac{\partial F / \partial x_1}{\partial F / \partial q_1} = - \frac{-\beta_1 / x_1 - c_1}{\alpha_1 / q_1 + b_1} = \frac{\beta_1 / x_1 + c_1}{\alpha_1 / q_1 + b_1}$$

أى أن الشرط المستخرج من المعادلتين الأولى والثالثة هو شرط تعادل سعر العنصر ١ مع قيمة إنتاجيته الحدية بالنسبة للسلعة ١ . ويمكن بالطبع استخراج الشروط المماثلة التالية :

$$\frac{r_1}{p_2} = \frac{\partial q_2}{\partial x_1} = \frac{\frac{\beta_1}{x_1} + c_1}{\frac{\alpha_2}{q_2} + b_2}$$

$$\frac{r_2}{p_1} = \frac{\partial q_1}{\partial x_2} = \frac{\frac{\beta_2}{x_2} + c_2}{\frac{\alpha_1}{q_1} + b_1} \qquad \frac{r_2}{p_2} = \frac{\partial q_2}{\partial x_2} = \frac{\frac{\beta_2}{x_2} + c_2}{\frac{\alpha_2}{q_2} + b_2}$$

كذلك من المعادلتين الأولى والثانية نحصل على الشرط التالى :

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\alpha_1 / q_1 + b_1}{\alpha_2 / q_2 + b_2}$$

ولكن معدل التحول الإنتاجى للسلعة ٢ و السلعة ١ هو :

$$-\frac{\partial q_2}{\partial q_1} = \frac{\partial F / \partial q_1}{\partial F / \partial q_2} = \frac{\alpha_1 / q_1 + b_1}{\alpha_2 / q_2 + b_2}$$

أى أن الشرط الذى نحصل عليه من المعادلتين الأولى والثانية هو شرط تعادل معدل التحول الإنتاجى بين المنتجين مع النسبة بين سعريهما .

وأخيراً من المعادلتين الثالثة والرابعة نحصل على الشرط التالى :

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\beta_1 / x_1 + c_1}{\beta_2 / x_2 + c_2}$$

ولكن المعدل الحدى للإحلال الفنى للعنصر ٢ محل العنصر ١ هو :

$$-\frac{\partial x_2}{\partial x_1} = \frac{\partial F / \partial x_1}{\partial F / \partial x_2} = \frac{\beta_1 / x_1 + c_1}{\beta_2 / x_2 + c_2}$$

أى أن الشرط الأخير هو شرط تعادل المعدل الحدى للإحلال الفنى بين العنصرين مع النسبة بين سعريهما

أما الشروط الكافية لتعظيم الأرباح فهى :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -\lambda \alpha_1 q_1^{-2} & 0 & (\alpha_1 q_1^{-1} + b_1) \\ 0 & -\lambda \alpha_2 q_2^{-2} & (\alpha_2 q_2^{-1} + b_2) \\ (\alpha_1 q_1^{-1} + b_1) & (\alpha_2 q_2^{-1} + b_2) & 0 \end{vmatrix} > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -\lambda\alpha_1 q_1^{-2} & 0 & 0 & (\alpha_1 q_1^{-1}+b_1) \\ 0 & -\lambda\alpha_2 q_2^{-2} & 0 & (\alpha_2 q_2^{-1}+b_2) \\ 0 & 0 & \lambda\beta_1 x_2^{-2} & -(\beta_1 x_1^{-1}+c_1) \\ (\alpha_1 q_1^{-1}+b_1) & (\alpha_2 q_2^{-1}+b_2) & -(\beta_1 x_1^{-1}+c_1) & 0 \end{vmatrix} < 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -\lambda\alpha_1 q_1^{-2} & 0 & 0 & 0 & (\alpha_1 q_1^{-1}+b_1) \\ 0 & \lambda\alpha_2 q_2^{-2} & 0 & 0 & (\alpha_2 q_2^{-1}+b_2) \\ 0 & 0 & \lambda\beta_1 x_1^{-2} & 0 & -(\beta_1 x_1^{-1}+c_1) \\ 0 & 0 & 0 & \lambda\beta_2 x_2^{-2} & -(\beta_2 x_2^{-1}+c_2) \\ (\alpha_1 q_1^{-1}+b_1) & (\alpha_2 q_2^{-1}+b_2) & -(\beta_1 x_1^{-1}+c_1) & -(\beta_2 x_2^{-1}+c_2) & 0 \end{vmatrix} > 0$$

٦٠٥ . السلوك الأمثل للمنتج فى ظروف احتكارية :

افترضنا حتى الآن صراحة أن المنتج الفردى يعتبر سعر بيع سلعته من المعطيات التى لا يمكنه التأثير فيها بتغيير حجم إنتاجه . كذلك افترضنا — صراحة أيضاً — أن أسعار عناصر الإنتاج معطيات لا يملك المنتج الفردى التحكم فيها بتغيير حجم مشترياته . وبناء على هذين الافتراضين الصريحين كنا نفترض أن المنتج يعمل فى ظروف يطلق عليها الاقتصاديون المنافسة الكاملة[1] . وتتلخص مجموعة الظروف التى إذا سادت سوق سلعة من السلع ، فإننا نصف هذه السوق بأنها سوق تنافسية ، كاملة فيما يلى :

(ا) ينتج جميع المنتجين سلعة متجانسة[2] ، ويتساوى جميع مستهلكى السلعة فى نظر كل المنتجين بمعنى انهم لا يتوقعون أية مزايا أو مساوىء من التعامل مع مستهلك دون غيره . وهذا الشرط يعنى عدم تميز سلعة منتج عن سلعة منتج آخر ، ومن ثم عدم تفضيل المستهلكين التعامل مع منتج دون آخر ، من ناحية . ومن ناحية أخرى ، فإن هذا الشرط يعنى عدم تفضيل المنتجين لمستهلك على مستهلك آخر ، فكلهم سواء ، ولا يفوز بالصفقة إلا من يقدم أعلى سعر .

(ب) كثرة عدد المشترين والبائعين : بحيث لا تشكل مشتريات أو مبيعات أى وحدة اقتصادية سوى نسبة ضئيلة من مجموع المشتريات أو المبيعات الكلية وهذا يضمن عدم تأثير أى مشتر أو بائع فى سعر السوق .

(حـ) يملك المشترون والبائعون كل المعلومات المتعلقة بظروف السوق :

---

(١) المنافسة التكاملة = Perfect Competition

(٢) سلعة متجانسة = Homogeneous Commodity

أى المعلومات عن السعر السائد وخصائص السلع المعروضة ، وحالة العرض والطلب . كما أنهم يغتنمون أية فرصة تسنح زيادة المنفعة أو الربح . وهذا الشرط يضمن عدم إمكان قيام أى بائع بالحصول على سعر أعلى من السعر السائد ، ولا قيام أى مشترى بدفع سعر أقل من السعر السائد ، ومن ثم فهو يضمن سيادة سعر واحد للسلعة .

(ى) حرية دخول السوق أو الخروج منه مكفولة تماماً لكل المشترين والبائعين : وهذا يفترض حرية مختلف الموارد فى الإنتقال من إنتاج سلعة إلى إنتاج سلعة أخرى . وهذا الشرط يضمن خروج المنتج غير الكفء من السوق ، ودخول المنتجين الأكفاء ، وتواءم المشترين والبائعين مع ظروف السوق اغتناماً لفرص الكسب وتجنباً لمخاطر الخسارة .

لكن ظروف السوق فى الحياة العملية تختلف عن هذه الظروف التى ذكرناها ، إذ قد تفتقد بعض الأسواق لشرط أو أكثر من هذه الشروط . فهناك بعض السلع التى تشبع نفس الحاجات ، ولكن يعتبرها المشترون سلعاً غير متجانسة ، كما فى حالة السلع المتميزة بعلامات تجارية أو المرتبطة فى ذهن المستهلك بخصائص معينة سواء كانت حقيقية أو وهمية . وعدم تجانس السلعة يعنى أنه حتى لو كان حجم مبيعات كل منتج صغيراً بالنسبة للمبيعات الكلية ، إلا أنه يملك درجة من التحكم فى السعر الذى يبيع به سلعته . كذلك هناك حالات لا يتولى الإنتاج فيها سوى عدد قليل من المنتجين ، ومن ثم يكون لكل منتج وزن خاص وإمكانية محسوسة للتأثير فى سعر بيع سلعته ، وهناك حالات معينة قد لا يوجد فيها سوى نفر قليل من المنتجين أو حتى منتج واحد يعرض سلعة معينة . كذلك لا يتوفر العلم الكامل فى كل الأسواق . ولا يتيسر دائماً حرية الدخول والخروج منها . وأخيراً هناك حالات معينة ينفرد فيها قلة من المشترين بشراء سلعة معينة . وفيها

عدا الحالة التي ينفرد فيها مشترى واحد أو بائع واحد بالسوق ، فإن الحالات الأخرى لا تعني انتفاء المنافسة وإنما تعني أنها منافسة مقيدة أو منافسة تشوبها بعض عناصر الاحتكار ، أي منافسة احتكارية[1] .

وتشمل المنافسة الاحتكارية الحالة التي يوجد فيها عدد كبير من البائعين يكون لهم حرية دخول السوق والخروج منه ولكنهم يبيعون سلعاً متميزة عن بعضها البعض . وحالة احتكار القلة[2] ، أي الحالة التي لا يوجد فيها سوى عدد قليل من البائعين أو المشترين وحالة الاحتكار الثنائي[3] ، أي الحالة التي ينفرد فيها اثنين من المنتجين بشراء أو بيع سلعة ما . أما الحالة التي ينفرد فيها واحد أو مشتر واحد بالسوق فيطلق عليها حالة الاحتكار أو الاحتكار المطلق[4] وقد تتميز هذه عن حالات احتكار القلة والاحتكار الثنائي بتجانس السلعة أو بالتمييز بين السلع ، ويطلق على الحالة الأخيرة حالة التمايز السلعي[5] . كما قد يتميز الاحتكار المطلق بالتمييز بين الأسواق من حيث السعر أو بعدم التمييز بينها واعتبارها سوقاً واحدة . وسوف يقتصر العرض التالي على مناقشة سلوك المنتج المحتكر في بعض الظروف المختلفة .

---

(١) المنافسة المقيدة أو الاحتكارية =
Imperfect , Restricted or Monopolistic competition

(٢) احتكار القلة = Oligopoly في حالة البيع
Oligopsony في حالة الشراء .

(٣) الاحتكار الثنائي = Duopoly في حالة البيع
Duopsony في حالة الشراء .

(٤) الاحتكار المطلق = Monopoly في حالة البيع
Monopsony في حالة الشراء .

(٥) التمايز السلعي = Product Differentiation .

٥ ـ ٦ ـ ٤ ـ سلوك المنتج المحتكر فى حالة عدم التمييز بين الأسواق :

افرض أن هناك منتج واحد يقوم بإنتاج سلعة معينة . فى هذه الحالة يكون فى إمكان المنتج المحتكر التأثير فى سعر سلعته ، وذلك بإنقاص ما يعرضه منها للبيع . فالمنتج فى هذه الحالة لا يستطيع بيع أية كمية بسعر واحد كما فى حالة المنافسة الكاملة ، وذلك لأن منحنى الطلب على سلعته يأخذ الشكل المألوف لمنحنى الطلب السوقى أو الكلى . أى أنه منحنى ذو ميل سالب ، بحيث أنه كلما زاد المنتج من الكمية التى يعرضها للبيع فإنه لن يستطيع بيع الكمية الأكبر إلا بسعر أقل . وهكذا فإن حجم مبيعات المنتج المحتكر دالة وحيدة القيمة فى سعر بيع السلعة . أى أن :

$$q = f(p) \tag{62}$$

حيث :

$$\frac{dq}{dp} < 0$$

وحيث أن الدالة الطلب مقلوب وحيد ، فإنه يمكن لنا أن نعبر عن السعر كدالة وحيدة القيمة فى حجم المبيعات . أى أن :

$$p = g(q) \tag{63}$$

حيث :

$$\frac{dp}{dq} < 0$$

ونظراً لاختلاف شكل منحنى الطلب الذى يواجه المنتج فى حالة المنافسة الكاملة عن شكله فى حالة المنتج المحتكر ، فإن تحديد السلوك الأمثل يختلف

بعض الشيء أيضاً . ففي حالة المنافسة ، يقبل المنتج سعر السوق كمعطاية من المعطيات ، ويحاول تعظيم أرباحه بالنسبة للتغيرات في مستوى الإنتاج . أما في حالة الاحتكار فإن المنتج قد يعظم أرباحه على هذا النحو ، أو قد يعظم أرباحه على نحو آخر مترتب على إمكان تحكمه في السعر ، أي يعظم الأرباح بالنسبة للتغيرات في مستوى السعر . لكن المنتج المحتكر لا يملك التحكم في السعر والكمية معاً ، حيث أنه بمجرد أن تتحدد إحداهما ، تتحدد الأخرى بدالة الطلب (62) أو (63) .

دوال الإيراد في حالة الاحتكار :

الإيراد الكلى للمنتج المحتكر R هو حاصل ضرب الكمية المباعة في سعر بيعها :

$$R = p \cdot q \tag{64}$$

إذن الإيراد الحدي يساوي :

$$\frac{dR}{dq} = p + q \cdot \frac{dp}{dq} \tag{65}$$

وحيث أن $\frac{dp}{dq}$ سالب ، فإننا نستنتج أن الإيراد الحدى أقل من السعر :

$$\frac{dR}{dq} < p$$

وذلك ناتج من أن المنتج المحتكر لا يستطيع عند سعر معين بيع وحدات إضافية بنفس السعر ، وانما يستطيع تصريف وحدات إضافية فقط إذا قام بتخفيض

السعر الذى يتقاضاه . ومن الواضح أن هذا وضع مختلف تماماً عن وضع المنتج فى حالة المنافسة الكاملة ، حيث يستطيع الأخير تصريف أية كمية بالسعر السائد ، ولذا يتساوى إيراده الحدى مع السعر ، لأن $\frac{dp}{dq}$ يساوى صفر فى هذه الحالة .

إذا افترضنا أن دالة الطلب هى الدالة الخطية :

$$p = a - b\,q$$

فإن دالة الإيراد الكلى تصبح :

$$R = a\,q - b\,q^2$$

ودالة الإيراد الحدى تصبح :

$$\frac{dR}{dq} = a - 2\,b\,q$$

وكما أوضحنا فى المثال المعطى فى الفصل الثالث (٣ . ١ . ٣) ، فإن كلا من الإيراد الحدى والمتوسط يمكن تمثيله بخط مستقيم ذى ميل سالب وثابت ، وأن كل وحدة مباعة تؤدى إلى نقص السعر بالمقدار b ونقص الإيراد الحدى بضعف هذا المقدار ، أى 2 b . كذلك أوضحنا أن منحنى الإيراد الحدى يقطع محور الكمية عند منتصف المسافة بين نقطة الأصل ونقطة تقاطع منحنى الإيراد المتوسط (دالة الطلب) مع نفس المحور — ويوضح الشكل رقم (٢) بالقسم ٣ . ١ . ٣ — شكل كل منحنى من هذه المنحنيات . وأخيراً ، أثبتنا فى تمرين ٢ بالفصل الثالث ، أنه يمكن التعبير عن الإيراد الحدى كدالة فى السعر والمرونة السعرية الذاتية للطلب E :

(66) $$\frac{dR}{dq} = p\left(1 - \frac{1}{E}\right)$$

السلوك الأمثل للمحتكر : تحديد الإنتاج

أرباح المنتج المحتكر هى الفرق بين إيراده الكلى R وتكاليفه الكلية C . وحيث أن كلا من R , C دالة فى حجم الإنتاج أو المبيعات q ، فإننا يمكن أن نكتب دالة الربح كالتالى :

(67) $$z = R(q) - C(q)$$

الشرط الضرورى لتعظيم الربح هو :

$$\frac{dz}{dq} = \frac{dR}{dq} - \frac{dC}{dq} = 0$$

أى أنه من الضرورى تعادل الإيراد الحدى مع التكاليف الحدية ، لتعظيم الربح :

(68.1) $$\frac{dR}{dq} = \frac{dC}{dq}$$

بعبارة أخرى ، فإن المنتج المحتكر يستطيع زيادة أرباحه بزيادة الإنتاج (أو خفضه) طالما أن الإضافة إلى الإيراد الكلى (أى الإيراد الحدى) أكبر (أو أقل) من الإضافة إلى التكاليف الكلية (أى التكاليف الحدية) .

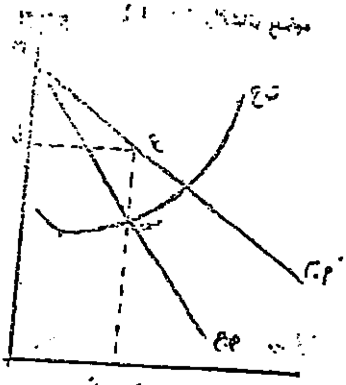
أما الشرط الكافى لتعظيم الربح فهو :

$$\frac{d^2 z}{dq^2} = \frac{d^2 R}{dq^2} - \frac{d^2 C}{dq^2} < 0$$

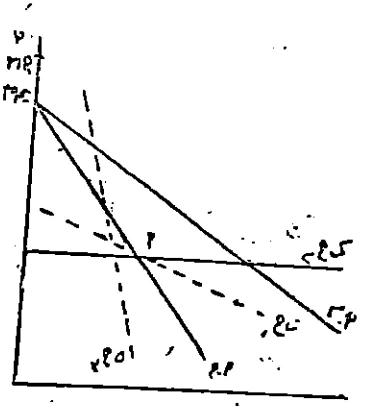
أو :

$$\frac{d^2 R}{d q^2} < \frac{d^2 C}{d q^2} \qquad (68.2)$$

أى أن معدل تناقص الإيراد الجدى ينبغى أن يكون أقل من معدل تزايد التكاليف الحدية عند نقطة تعظيم الأرباح . وهذا الشرط متحقق إذا كان منحنى الإيراد الحدى هابطاً من اليسار إلى اليمين (أى دالة متناقصة فى الكمية) ، ومنحنى التكاليف الحدية صاعداً من اليسار إلى اليمين (أى دالة متزايدة فى الكمية) كما يفترض عموماً ، وكما هو موضح بالشكل (١٤ أ) .



شكل رقم (١٤ أ)



شكل رقم (١٤ ب)

أما إذا كان منحنى التكاليف الحدية هابطاً (أى دالة متناقصة فى الكمية) فإن الشرط الكافى للتعظيم يتطلب أن يكون الإيراد الحدى متناقصاً بمعدل أكبر أو أسرع كما فى حالة المنحنى ت ح١ ، ت ح٢ فى الشكل رقم (١٤ ب) . أما فى حالة المنحنى ت ح٣ فإن الشرط غير متحقق لأن القيمة المطلقة لميل منحنى التكاليف الحدية أكبر من القيمة المطلقة لميل منحنى الإيراد الحدى . ولذا فإنه برغم تحقق الشروط الضرورية لتعظيم الربح عند النقط ص ، أ ، ب فإن الشروط

الكافية لتعظيم الربح لا تتوفر إلا عند النقطتين ص ، ا . أما عند النقطة ب فلا توجد نقطة نهاية عظمى للربح ، حيث أنه من مصلحة المنتج أن يستمر فى الإنتاج بعد نقطة التقاطع ، لأن الإيراد الحدى يفوق التكاليف الحدية عند مستويات الإنتاج الأكبر من مستوى الإنتاج المناظر للنقطة ب .

مثال : إذا كانت دالة التكاليف لمنتج محتكر هى :

$$C = 0.02\, q^3 - 0.4\, q^2 + 10\, q$$

وكان هذا المنتج يواجه دالة الطلب :

$$p = 30 - 1.4\, q$$

حيث q بالطن ، C , p بالجنيه ؛ فإن دالة الإيراد الكلى هى :

$$R = p.q = 30\, q - 1.4\, q^2$$

والشرط الضرورى لتعظيم الربح هو :

$$\frac{dR}{dq} = \frac{dC}{dq}$$

$$30 - 0.8\, q = 0.06\, q^2 - 0.8\, q + 10$$

أى أن :

$$0.06\, q^2 + 2\, q - 20 = 0$$

وحلها :

$$q = \frac{-2 \pm \sqrt{8\ 8}}{0\ 12} \simeq 8\ ;\ -41$$

واستبعد الحل السالب ، لأنه لا معنى لكون الإنتاج ذو قيمة سالبة . إذن الشرط الضرورى لتعظيم الربح متحقق عندما يكون مستوى الإنتاج ٨ طن .

أما الشرط الكافى للتعظيم فهو يتطلب :

$$\frac{d^2 R}{d q^2} < \frac{d^2 C}{d q^2}$$

وحيث أن :

$$\frac{d^2 R}{d q^2} = - 2.8$$

$$\frac{d^2 C}{d q^2} = - 0.12 q - 0.8 = - 1.76$$

أى أن الإيراد الحدى يتناقص بمعدل أسرع من معدل تزايد التكلفة الحدية عندما يكون مستوى الإنتاج ٨ طن . وهذا ما يتطلبه الشرط الكافى لتعظيم الربح .

إذن الإنتاج الأمثل هو ٨ طن ويمكن تحديد السعر الذى تباع به هذه الكمية من دالة الطلب :

$p = 30 - 1\ 4 (8) = 18\ 8$ جنيها

وبذلك يكون الإيراد الكلى :

$R = p . q = 150 . 4$ جنيها

والتكاليف الكلية:

$C = 0\ 02 (8)^3 - 0.4 (8)^2 + 10 (8) = 64\ 64$ جنيها

وبذلك تكون أقصى أرباح يمكن أن يحققها المنتج المحتكر فى ظل ظروف التكاليف والطلب المفترضة هى :

$$z = R - C = 150\ 4 - 64.64 = 85.76 \text{ جنيهاً}$$

وهكذا فى ظل ظروف الطلب والتكاليف المفترضة يكون أنسب إنتاج هو ٨ طن ، يباع بسعر ١٨,٨ جنيهاً للطن ، ويدر ربحاً قدره ٨٥,٧٦ جنيهاً .

السلوك الأمثل للمحتكر : تحديد السعر

ذكرنا فيما سبق أن المنتج المحتكر بإمكانه أن يحدد الكمية المنتجة أو أن يحدد سعر البيع . وقد رأينا فى الفقرة السابقة ، كيف يمكن للمنتج أن يحدد الكمية المنتجة ويترك السعر يتحدد فى السوق . وسوف نرى الآن كيف يمكن للمنتج أن يحدد سعر البيع ويترك الكمية المباعة تتحدد فى السوق . وسوف يتضح لنا أن كلتا الطريقتين تؤديان إلى نفس الكمية ونفس السعر التوازنيين .

هدف المنتج هو تعظيم الربح :

$$(69\ 1) \qquad z = R - C = p.q - F(q)$$

حيث $C = F(q)$. إذا كانت دالة الطلب هى :

$$q = \varphi(p)$$

فإننا نكتب دالة الربح كالتالى :

$$z = p \cdot \varphi(p) - F\{\varphi(p)\}$$

ـ شروط تعظيم هذه الدالة هى :

$$\frac{dz}{dp} = 0 \quad ; \quad \frac{d^2 z}{dp^2} < 0 \tag{69.2}$$

الشرط الضرورى للتعظيم هو :

$$\frac{dz}{dp} = \frac{d}{dp}\left[p \cdot \varphi(p) - F\{\varphi(p)\}\right]$$

$$= \varphi(p) + p \cdot \varphi'(p) - \frac{dC}{dq} \cdot \varphi'(p) = 0$$

حيث $\varphi'(p)$ هى المعامل التفاضلى الأول للدالة $\varphi(p)$ بالنسبة للمتغير p ، وبقاعدة تفاضل دالة الدالة :

$$\frac{dC}{dp} = \frac{dC}{dq} \cdot \frac{dq}{dp} = \frac{dC}{dq} \cdot \varphi'(p)$$

إذن المعادلة التى بحلها نحصل على السعر التوازنى هى :

$$\varphi(p) + \varphi'(p) \cdot \left[p - \frac{dC}{dq} \right] = 0 \tag{69.3}$$

وبإعادة ترتيب حدود هذه المعادلة ، يتضح لنا أنها تعطى نفس شرط تعظيم الربح فى حالة تحديد كمية الإنتاج ، أى التعادل بين التكاليف الحدية والإيراد الحدى ـــ معادلة (68.1) . فبقسمة طرفى (69.3) على $\varphi'(p)$ وتحويل $\frac{dC}{dq}$ إلى الطرف الآخر للمعادلة نحصل على :

$$\frac{\varphi(p)}{\varphi'(p)} + p - \frac{dC}{dq} = 0$$

ومنها :

$$\frac{dC}{dq} = \frac{\varphi(p) + p \cdot \varphi'(p)}{\varphi'(p)}$$

لكن :

$$\frac{dR}{dp} = \varphi(p) + p \cdot \varphi'(p)$$

و

$$\varphi'(p) = \frac{dq}{dp}$$

إذن :

$$\frac{dC}{dq} = \frac{\frac{dR}{dp}}{\frac{dq}{dp}} = \frac{\frac{dR}{dq} \cdot \frac{dq}{dp}}{\frac{dq}{dp}} = \frac{dR}{dq}$$

وهذا هو نفس الشرط الضرورى لتعظيم الربح فى حالة تحديد الكمية المثلى للإنتاج . أما الشرط الكافى لتعظيم الربح فهو :

$$\frac{d^2 z}{dp^2} = \frac{d}{dp}\left\{\varphi(p) + p \cdot \varphi'(p) - \frac{dC}{dq} \cdot \varphi'(p)\right\}$$

$$= \varphi'(p) + \left\{\varphi'(p) + p \cdot \varphi''(p)\right\} - \left\{\frac{dC}{dq} \cdot \varphi''(p) + \varphi'(p)\frac{d^2C}{dq^2} \cdot \varphi'(p)\right\}$$

$$= 2\varphi'(p) + p\,\varphi''(p)\,\frac{dC}{dq}\;\;\varphi''(p) - \left\{\varphi'(p)\right\}^2 \cdot \frac{d^2C}{dq^2} < 0$$

إذن الشرط الكافى للتعظيم هو :

$$(69.5) \quad \phi'(p)\left\{2-\phi'(p)\cdot\frac{d^2C}{dq^2}\right\}+\phi''(p)\cdot\left\{p-\frac{dC}{dq}\right\}<0$$

حيث $\phi''(p)$ هى العامل التفاضلى الثانى للدالة $q=\phi(p)$ وعليه فإن أى قيمة للمتغير p تحقق المعادلة (69.3) وتحقق فى نفس الوقت المتباينة (69.5) تعتبر قيمة ممكنة للسعر التوازنى . وبالتعويض عن مثل هذه القيمة فى دالة الطلب نحصل على كمية الإنتاج المثلى .

مثال : خذ المثال الذى سبق إعطاؤه لتحديد الكمية التوازنية للمنتج حيث دالة الربح هى :

$$z=R-C=(30q-1.4q^2)-(0.02q^3-0.4q^2+10q)$$

وحيث نعيد كتابة دالة الطلب $p=30-1.4q$ كالتالى :

$$q=\phi(p)=21.4-0.7p$$

بتطبيق الشرط الضرورى للتعظيم (60.3) نحصل على المعادلة التالية :

$$\phi(p)+\phi'(p)\cdot\left[p\quad\frac{dC}{dq}\right]=$$

$$(21.4-0.7p)-0.7(p-0.06q^2+0.8q-10)=0$$

ومنها نحصل على المعادلة :

$$0.02p^2-2.27p+35.65=0$$

وحلها :

$$p=92.25 \qquad p=18.25$$

وبالتعويض عن هذين السعرين فى دالة الطلب نحصل على الكمية :

$$q = -45.3 \qquad q = 8.6$$

والقيمة السالبة للإنتاج مرفوضة بالطبع ويرفض معها السعر المناظر لها . إذن الكمية التوازنية هى 8.6 طن والسعر التوازنى هو 18.25 جنيهاً . قارن هذه النتائج بما حصلنا عليه فى الحل الأول للمثال : $q = 8 \; ; \; p = 18.8$ وتشابه النتائج واضح بما فيه الكفاية والحقيقة أن النتائج ينبغى أن تكون واحدة فى الحالتين ، لكن أخطاء التقريب هى السبب فى الإنحرافات الظاهرة .

٥ ـ ٦ ـ ٢ . سلوك المنتج المحتكر فى حالة إمكان التمييز السعرى بين الأسواق :

كثيراً ما تسمح الظروف للمنتج المحتكر ببيع سلعته للمجموعات المختلفة من المستهلكين أو للأسواق المختلفة بأسعار مختلفة . ويطلق على هذه الظاهرة التمييز السعرى أو الاحتكارى(١) . فقد يجنى المنتج المحتكر أرباحاً من بيع سلعته فى سوقين مختلفين بسعرين مختلفين ، أكبر من أرباحه التى يحققها لو باع سلعته بسعر واحد فى كل من السوقين . يشترط لإمكان التمييز الاحتكارى :

(ا) ألا يكون فى مقدرة المشترين شراء السلعة من السوق الأرخص وإعادة بيعها فى السوق الأغلى ، مما يعمل على تساوى السعر فى السوقين فى آخر الأمر . وهذا أمر متحقق (ا / ١) فى حالة الخدمات الشخصية ، التى هى فى الغالب غير قابلة للتحويل من شخص لآخر مثل الكهرباء والمياه ونحو ذلك و (ا/٢) فى حالة انفصال أسواق البيع بمسافات بعيدة ، كما فى حالة السوق المحلية والسوق الأجنبية ، أو فى الحالة التى يكون ممكناً فيها فصل السوقين بفرض تعريفة جمركية عالية .

---

(١) التمييز السعرى أو الاحتكارى = Price or Monopolistic Discrimination

(ب) أن تكون مرونة الطلب على السلعة مختلفة فى السوقين ، فهذا كما سوف نرى هو شرط اختلاف السعر فى السوقين .

ويمكن تحديد السلوك الأمثل للمنتج المحتكر فى هذه الحالة كالتالى : افرض أن هناك سوقين يحتكر فيهما المنتج بيع السلعة ، وأن الإيراد الكلى المتحقق فى السوق الأولى هو R_1 والإيراد الكلى المتحقق فى السوق الثانية هو R_2 حيث كل من R_1 ، R_2 دالة فى الكمية المباعة فى السوق المعينة ، أى q_1 ، q_2 على التوالى . إذن يمكن كتابة دالة الإيراد الكلى المتحقق من السوقين كالتالى :

$$R = R_1(q_1) + R_2(q_2) \tag{70}$$

وحيث أن التكاليف الكلية دالة فى الكمية الكلية المنتجة ، أى :

$$q = q_1 + q_2$$

فإن دالة الربح تصبح :

$$z = R_1(q_1) + R_2(q_2) - C(q_1 + q_2) \tag{71}$$

الشروط الضرورية لتعظيم هذه الدالة هى :

$$\frac{\partial z}{\partial q_1} = \frac{d R_1}{d q_1} - \frac{d C}{d q_1} = 0 \tag{72.1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial q_2} = \frac{d R_2}{d q_2} - \frac{d C}{d q_2} = 0 \tag{72.2}$$

وحيث أن $\frac{d C}{d q_2} = \frac{d C}{d q_1} = \frac{dC}{d q}$ لأن كلاهما يعبر عن الزيادة فى التكاليف المترتب على إنتاج وحدة إضافية ، سواء عرضت هذه الوحدة للبيع فى السوق

الأولى أو السوق الثانية . أى أن الشرط الضرورى لتعظيم الربح يقتضى تعادل الإيراد الحدى فى كل من السوقين مع التكلفة الحدية لإنتاج السلعة :

$$\frac{dR_1}{dq_1} = \frac{dR_2}{dq_2} = \frac{dC}{dq} \qquad (73)$$

بعبارة أخرى ، لو كان الإيراد الحدى فى إحدى السوقين أكبر من الإيراد الحدى فى السوق الأخرى فإنه يكون باستطاعة المنتج زيادة أرباحه بزيادة العرض فى السوق الأولى وخفضه فى السوق الثانية دون أن يؤثر ذلك على التكاليف الكلية . أما بخصوص سعر البيع فى كل سوق ، فإننا يمكن أن نستخدم العلاقة التى سبق ذكرها بين الإيراد الحدى والسعر ومرونة الطلب (57) لإلقاء بعض الضوء على هذه المشكلة . إذا رمزنا لسعرى البيع فى السوقين الأولى والثانية بالرمزين p_1 ، p_2 على الترتيب ، ولمرونتى الطلب فى السوقين بالرمزين E_1 و E_2 على التوالى ، فإنه يمكن إعادة كتابة شرط تساوى الإيراد الحدى فى كل من السوقين كالتالى :

$$p_1\left(1 - \frac{1}{E_1}\right) = p_2\left(1 - \frac{1}{E_2}\right)$$

ومنها :

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\left(1 - \frac{1}{E_2}\right)}{\left(1 - \frac{1}{E_1}\right)} \qquad (74)$$

يتضح من هذه العلاقة أن السعر سيكون أقل فى السوق ذات مرونة الطلب الأكبر عنه فى السوق ذات مرونة الطلب الأقل . كذلك يتضح لنا أن نفس السعر يسود فى كل من السوقين فقط عندما تتساوى مرونتى الطلب . أى أنه لن تكون

هناك مصلحة للمنتج فى التمييز السعرى فى هذه الحالة . إذن ، باختصار :

$E_1 = E_2$ فقط إذا كانت $p_1 = p_2$

$E_1 < E_2$ إذا كانت $p_1 < p_2$

أما الشروط الكافية لتعظيم ربح المحتكر فهى أن تتقلب إشارات المحددات الرئيسية المحدد التالى مبتدئة بإشارة سالبة :

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{d^2R_1}{dq_1^2} - \frac{d^2C}{dq^2}\right) & \left(-\frac{d^2C}{dq^2}\right) \\ \left(-\frac{d^2C}{dq^2}\right) & \left(\frac{d^2R_2}{dq_2^2} - \frac{d^2C}{dq_2^2}\right) \end{vmatrix}$$

إذن الشروط المطلوبة هى :

أولا :

$$\frac{d^2R_1}{dq_1^2} - \frac{d^2C}{dq^2} < 0 \qquad (75.1)$$

أى أن :

$$\frac{d^2R_1}{dq_1^2} < \frac{d^2C}{dq^2}$$

وثانياً :

$$\left(\frac{d^2R_1}{dq_1^2} - \frac{d^2C}{dq^2}\right)\left(\frac{d^2R_2}{dq_2^2} - \frac{d^2C}{dq^2}\right) - \left(\frac{d^2C}{dq^2}\right)^2 > 0 \qquad (75.2)$$

وهذا يتضمن اشتراط :

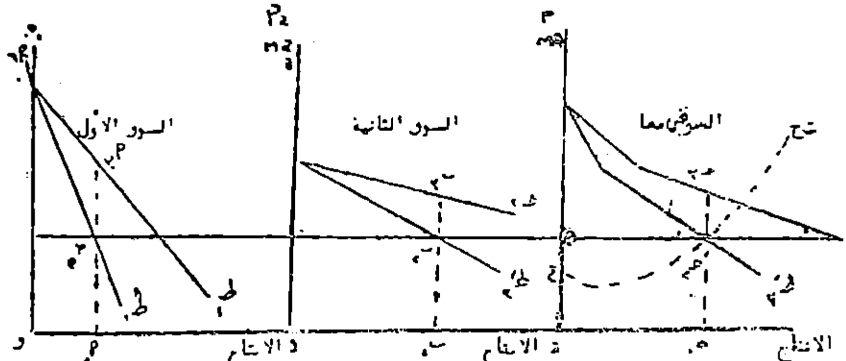
$$\left(\frac{d^2R_2}{dq_2^2} - \frac{d^2C}{dq^2}\right) < 0$$

أى اشتراط :

$$\frac{d^2 B_2}{d q_2^2} < \frac{d^2 G}{d q^2}$$

بعبارة أخرى ، فإن الشرط الكافى لتعظيم أرباح المحتكر الذى يمارس التمييز السعرى بين الأسواق هو أن يكون الإيراد الحدى فى كل سوق متزايداً بمعدل أقل من معدل تزايد التكاليف الحدية .

ويمكن توضيح شروط التوازن فى حالة التمييز السعرى بين سوقين باستخدام شكل رقم (١٥) . وهذا الشكل يتكون من ثلاثة أشكال نبين فيها منحنى الإيراد المتوسط والحدى فى كل من السوقين ط١ ، ط١َ بالنسبة للسوق الأول (شكل ١٥ حـ) ، ط٢ ، ط٢َ ، بالنسبة للسوق الثانية (شكل ١٥ ب) ، كما نبين منحنى الإيراد المتوسط والحدى للسوقين معاً ط٣ ، ط٣َ فى (شكل ١٥ أ) .



شكل (١٥ حـ)   شكل (١٥ ب)   شكل (١٥ أ)

يتحدد الحجم الكلى للإنتاج عند تقاطع منحنى الإيراد الحدى الإجمالى مع منحنى التكلفة الحدية ، وكما يتضح من شكل (١٥ أ) ينتج المنتج و حـ١ وحده . وبمساواة التكاليف الحدية عند هذا المستوى من الإنتاج (أى حـ١ و) بالإيراد

الحدى فى كل من السوقين نحصل على الكمية التى ينبغى تصريفها فى كل سوق وهى و ا١ فى السوق الأولى ، و ب٢ فى السوق الثانية . وواضح أن السعر فى السوق الأولى (ذات منحنى الطلب الأقل مرونة) أعلى من السعر فى السوق الثانية (ذات منحنى الطلب الأكثر مرونة) . كما أنه بمقارنة السعر فى السوقين بالسعر الذى كان يمكن أن يتحقق لو أن المنتج لم يمارس التمييز الاحتكارى ، فإننا نجد أن السعر الواحد (حـ١ حـ٢) أعلى من السعر فى السوق ذات الطلب الأكثر مرونة (ب١ ب٢) وأقل من السعر فى السوق ذات الطلب الأقل مرونة (ا١ ا٢) .

فى العرض السابق افترضنا أن المنتج يحتكر البيع فى السوقين . لكن من الجائز أن يكون أحد السوقين محتكراً للمنتج (السوق المحلية مثلا) بينما أن السوق الأخرى تسودها المنافسة الكاملة (السوق الخارجية مثلا). بعبارة أخرى منحنى الطلب فى إحدى السوقين سيكون كامل المرونة ، بما يكون ضعيف المرونة فى السوق الأخرى . فى هذه الحالة يتحقق للمنتج أقصى ربح عندما يبيع سلعته بسعر أقل فى السوق الخارجية وبسعر أعلى فى السوق المحلية ، بشرط أن يتعادل الإيراد الحدى فى كل من السوقين مع التكلفة الحدية للإنتاج كله .

__مثال__ : إذا كانت دالة تكاليف محتكر هى $C = 0.12\,q^2 - 2\,q + 11$ وإذا كانت السلعة المنتجة تباع فى سوقين منفصلتين دالة الطلب فيهما كالتالى :

$$q_1 = 20 - 0.2\,p_1$$

$$q_2 = 32 - 0.3\,p_2$$

حيث q ، p بالجنيه ، q_1 ، q_2 بالطن ، فإن دالة الإيراد الكلى فى السوق الأولى هى :

$$B_1 = p_1 q_1 = (100 - 5 q_1) q_1 = 100 q_1 - 5 q_1^2$$

ودالة الإيراد الكلى فى السوق الثانية هى :

$$B_2 = p_2 q_2 = (106.6 - 3.3 q_2) q_2 = 106.6 q_2 - 3.3 q_2^2$$

تعظيم الأرباح يتطلب تساوى الإيراد الحدى فى كل سوق مع التكلفة الحدية :

$$100 - 10 q_1 = 0.24 q - 2$$

$$106.6 - 6.6 q_2 = 0.24 q - 2$$

بالتعويض عن $q = q_1 + q_2$ وإعادة ترتيب الحدود نحصل على المعادلتين الآتيتين :

$$10.24 q_1 + 0.24 q_2 = 102$$

$$0.24 q_1 + 6.84 q_2 = 108.6$$

وحلهما :

$$q_1 = \frac{\begin{vmatrix} 102 & 0.24 \\ 108.6 & 6.84 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10.24 & 0.24 \\ 0.24 & 6.84 \end{vmatrix}} = \frac{671.62}{69.98} = 9.6$$

$$q_2 = \frac{\begin{vmatrix} 10.24 & 102 \\ 0.24 & 108 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10.24 & 0.24 \\ 0.24 & 6.84 \end{vmatrix}} = \frac{1081.44}{69.98} = 15.4$$

وبالتعويض عن q_1 ، q_2 فى معادلات الطلب نحصل على سعر البيع فى كل من السوقين ؛

$$P_1 = 100 \quad 5\,(9\ 6) = 52 \text{ جنيهاً}$$

$$P_2 = 106.6 - 3.3\,(15\ 4) = 55.76 \text{ جنيهاً}$$

أما الشروط الكافية فهى متحققة لأن :

$$\frac{d^2R_1}{d\,q_1^2} - \frac{d^2C}{d\,q^2} = -10 - 0.24 = -10.24$$

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{d^2R_1}{dq_1^2} - \frac{d^2C}{dq^2}\right) & -\frac{d^2C}{dq^2} \\ -\frac{d^2C}{dq^2} & \left(\frac{d^2R_2}{dq_2^2} - \frac{d^2C}{dq^2}\right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -10\ 24 & -0\ 24 \\ -0\ \ 4 & -6\ 62 \end{vmatrix} = 69\ 8$$

٥ : ٦ : ٣ . سلوك المنتج المحتكر المالك لأكثر من مصنع :

نناقش الآن حالة منتج محتكر يملك مصنعين لكل مصنع دالة التكاليف الخاصة به $C_1(q_1)$ و $C_2(q_2)$ ، ولكن منتجاتهما تباع فى سوق واحدة . فى هذه الحالة يصبح الربح :

$$z = R\,(q_1 + q_2) \quad C_1\,(q_1) - C_2\,(q_2) \qquad (76)$$

حيث q_1 ، q_2 تمثلان الآن إنتاج المصنع الأول وإنتاج المصنع الثانى على الترتيب .

الشروط الضرورية لتعظيم الربح فى هذه الحالة هى :

$$(77\ 1)\qquad \frac{\partial z}{\partial q_1} = \frac{dR}{d\,q_1} - \frac{d\,C_1}{d\,q_1} = 0$$

$$(77\ 2)\qquad \frac{\partial z}{\partial q_2} = \frac{dR}{d\,q_2} - \frac{d\,C_2}{d\,q_2} = 0$$

وحيث أن الإيراد الحدى واحد لأن السلعة تباع فى نفس السوق فإن :

$$\frac{dR}{d\,q} = \frac{dR}{d\,q_1} = \frac{dR}{d\,q_2}$$

إذن الشرط الضرورى لتعظيم أرباح المنتج من المصنعين هو :

$$\frac{dR}{d\,q} = \frac{d\,C_1}{d\,q_1} = \frac{d\,C_2}{d\,q_2}$$

أى أن التكلفة الحدية لإنتاج كل مصنع ينبغى أن تساوى الإيراد الحدى للإنتاج كله .

الشروط الكافية للتعظيم هى أن تتقلب إشارات المحيددات الرئيسية للمحدد التالى مبتدئة بإشارة سالبة :

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{d^2 R}{d\,q^2} - \frac{d^2 C_1}{d\,q_1^2}\right) & \left(\frac{d^2 R}{d\,q^2}\right) \\ \left(\frac{d^2 R}{d\,q^2}\right) & \left(\frac{d^2 R}{d\,q^2} - \frac{d^2 C_2}{d\,q_2^2}\right) \end{vmatrix}$$

أى أن المطلوب هو — أولا :

$$\frac{d^2 R}{d\,q^2} - \frac{d^2 C_1}{d q_1^2} < 0$$

أى أن :

$$(78.1) \qquad \frac{d^2R}{dq^2} < \frac{d^2C_1}{dq_1^2}$$

وهذا معناه أن تكون التكاليف الحدية لإنتاج المصنع الأول متزايدة بمعدل أسرع من معدل تزايد الإيراد الحدى

وثانياً :

$$\left(\frac{d^2R}{dq^2} - \frac{d^2C_1}{dq_1^2}\right)\left(\frac{d^2R}{dq^2} - \frac{d^2C_2}{dq_2^2}\right) - \left(\frac{d^2R}{dq^2}\right) > 0$$

وهذا يتضمن اشتراط أن تكون :

$$\left(\frac{d^2R}{dq^2} - \frac{d^2C_2}{dq_2^2}\right) < 0$$

أى أن :

$$(78.2) \qquad \frac{d^2R}{dq^2} < \frac{d^2C_2}{dq_2^2}$$

وهذا معناه أن تكون التكاليف الحدية لإنتاج المصنع الثانى متزايدة بمعدل أسرع من معدل تزايد الإيراد الحدى .

مثال : افرض أن دالة الطلب على سلعة منتج محتكر هى $p = 170 - 4q$ وأن إنتاج هذا المحتكر يستمد من مصنعين دالة التكاليف للمصنع الأول منهما هى $C_1 = 100 + 10 q_1$ وللمصنع الثانى $C_2 = 50 + 0.7 q_2^2 - 4 q_2$ حيث p, C_2, C_1 بالجنيه ، q بالطن . إذن دالة الإيراد الكلى هى :

$$R = p\, q = 170\, q - 4\, q^2$$

الشروط الضرورية لتعظيم الربح هى :

$$\frac{dR}{dq} = \frac{dC_1}{dq_1} \qquad \qquad \frac{dR}{dq} = \frac{dC_2}{dq_2}$$

إذن :

$$170 - 8q = 10$$

$$170 - 8q = 1.4\,q_2 - 4$$

وبحل هاتين المعادلتين يتضح أن $q = 20$, $q_2 = 10$, $q_1 = 10$ وبذلك يكون $p = 90$.

أما الشروط الكافية للتعظيم فهى متحققة :

$$\frac{d^2R}{dq^2} - \frac{d^2C_1}{dq_1^2} = -8 - 0 = -8 < 0$$

$$\frac{d^2R}{dq^2} - \frac{d^2C_2}{dq_2^2} = -8 - 1.4 = -9.4 < 0$$

٥ . ٦ . ٤ . أثر الضرائب على إنتاج المحتكر :

(أ) كيف يتأثر سلوك المنتج المحتكر الذى يعتمد إنتاجه من مصنع واحد ويبيع سلعته فى سوق واحدة إذا فرضت الحكومة عليه ضريبة إجمالية[1] ، أى مبلغ معين يدفعه بغض النظر عن مستوى إنتاجه أو سعر البيع . افرض أن الضريبة الإجمالية هى T . إذن تصبح أرباح المنتج بعد الضريبة هى :

---

(١) ضريبة إجمالية = Lump — Sum Tax

$$z = R(q) - C(q) - T \qquad (79)$$

الشرط الضرورى لتعظيم الربح فى هذه الحالة هو :

$$\frac{dR}{dq} = \frac{dC}{dq} \qquad (80)$$

أى أن إنتاج المنتج يتحدد عند نقطة تعادل الإيراد الحدى مع التكاليف الحدية ، مثلما يحدث فى حالة فرض ضريبة بالضبط . و T هنا يمكن اعتبارها بمثابة إضافة إلى التكاليف الثابتة ، وهذه لا تؤثر بالطبع فى قرار المنتج فى الزمن القصير أى أن الضريبة الإجمالية تخفض من ربح المنتج المحتكر ، ولكنها لا تؤثر على حجم إنتاجه ولا سعر بيع سلعته ، إذ يظلان كما فى حالة عدم فرض الضريبة .

(ب) ماذا لو كانت الضريبة مفروضة كنسبة من الأرباح ، أى ضريبة أرباح(1) فى هذه الحالة :

$$T = t\left[R(q) - C(q)\right] \qquad (81)$$

حيث T هى جملة الضريبة التى تدفع و t معدل الضريبة ، وحيث نفرض أن $0 < t < 1$.

إذن دالة الربح تصبح :

$$z = R(q) - C(q) - t\left[R(q) - C(q)\right] \qquad (82)$$

$$= (1 - t) \cdot \left[R(q) - C(q)\right]$$

---

(1) ضريبة أرباح = Profit Tax

تعظيم الربح فى هذه الحالة يتطلب كشرط ضرورى :

$$\frac{dz}{dq} = (-t)\left[\frac{dR}{dq} - \frac{dC}{dq}\right] = 0$$

أى أن الشرط هو تساوى الإيراد الحدى مع التكلفة الحدية :

$$\frac{dR}{dq} = \frac{dC}{dq} \qquad (83)$$

وهذا هو نفس الشرط الذى حصلنا عليه فى حالة عدم فرض ضريبة . أى أن فرض ضريبة أرباح على المنتج المحتكر لا تؤثر على مستوى إنتاجه أو سعر بيع سلعته .

(ﺣ) ماذا لو كانت الضريبة مفروضة كمبلغ معين يدفع عن كل وحدة منتجة ، أى ضريبة على كمية المبيعات[١] ؟ فى هذه الحالة تكون جملة الضريبة المدفوعة كالتالى :

$$T = t \cdot q \qquad (84)$$

إذن تصبح أرباح المحتكر كالتالى :

$$z = R(q) - C(q) - t \cdot q \qquad (85)$$

الشرط الضرورى لتعظيم الربح هو :

$$\frac{dz}{dq} = \frac{dR}{dq} - \frac{dC}{dq} - t = 0$$

---

(١) ضريبة على كمية أو حجم المبيعات = Specific sales Tax

إذن المطلوب هو :

$$\frac{dR}{dq} = \frac{dC}{dq} + t \tag{86}$$

أى أن تعظيم أرباح المنتج يقتضى معادلة إيراده الحدى بتكاليفه الحدية مضافاً إليها قيمة الضريبة المفروضة على كل وحدة منتجة . وهذا شرط مختلف عن الشرط الذى حصلنا عليه فيما سبق فى حالة عدم فرض ضريبة أو فى حالة الضريبة الإجمالية أو ضريبة المبيعات . ولذا فإنه من المتوقع أن يختلف حجم الإنتاج وسعر البيع فى هذه الحالة . ولاكتشاف أثر الضريبة على حجم الإنتاج ، نأخذ التفاضل الكلى للشرط الضرورى للتعظيم :

$$\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{dz}{dq}\right) \cdot dq + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{dz}{dq}\right) \cdot dt = 0$$

أى أن :

$$\left(\frac{d^2 R}{dq^2} - \frac{d^2 C}{dq^2}\right) \cdot dq - dt = 0$$

ومنها :

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{\dfrac{d^2 R}{dq^2} - \dfrac{d^2 C}{dq^2}} \tag{87}$$

ومن المعلوم أنه إذا تحققت الشروط الثانية فإن مقام الكسر على يمين (87) يكون سالباً ، ومن ثم فإن :

$$\frac{dq}{dt} < 0 \tag{88}$$

أى أن الحجم الأمثل الإنتاج يتناقص كلما زاد معدل الضريبة المفروضة على كل وحدة مباعة . وحيث أن دالة الطلب واحدة فى الحالتين ، فإن الكمية الأصغر سوف تقترن بسعر أعلى للبيع . إذن نستطيع أن نستنتج أن فرض ضريبة على كل وحدة مباعة — أى على كمية المبيعات — يؤدى إلى انخفاض مستوى الإنتاج وارتفاع مستوى السعر .

(د) هل نصل إلى نتيجة مختلفة لو كانت الضريبة مفروضة كنسبة من قيمة المبيعات ، أى ضريبة إيراد[1] ؟ فى هذه الحالة يكون إجمالى الضريبة المدفوعة :

$$T = r \cdot R(q) \tag{89}$$

حيث r هى معدل الضريبة على الإيراد : $1 > r > 0$. إذن تصبح دالة الربح :

$$\begin{aligned} z &= R(q) - C(q) - r\,R(q) \\ &= (1 - r)\,R(q) - C(q) \end{aligned} \tag{90}$$

والشرط الضرورى لتعظيم الربح هو :

$$\frac{dz}{dq} = (1 - r)\frac{dR}{dq} - \frac{dC}{dq} = 0$$

أى أن :

$$(1 - r)\frac{dR}{dq} = \frac{dC}{dq} \tag{91}$$

---

(١) ضريبة على قيمة المبيعات أو ضريبة ايراد = Total Revenue Tax

وهذا معناه أن تعظيم الارباح يتطلب من المنتج أن يعادل تكلفته الحدية مع تلك النسبة التى تبقى له من الإيراد الحدى بعد خصم الضريبة . ولمعرفة أثر هذه الضريبة على الكمية المباعة ، نأخذ التفاضل الكلى للشرط الضرورى للتعظيم :

$$\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{dz}{dq}\right)\cdot dq+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{dz}{dq}\right)\cdot dr=0$$

أى أن :

$$\left[(1-r)\frac{d^2R}{dq^2}-\frac{d^2C}{dq^2}\right]\cdot dq-\frac{dR}{dq}dr=0$$

ومنها :

$$(92)\qquad \frac{dq}{dr}=\frac{\frac{dR}{dq}}{(1-r)\frac{d^2R}{dq^2}-\frac{d^2C}{dq^2}}$$

وحيث أن الشرط الاول للتعظيم يعنى أن الإيراد الحدى موجب ، وأن الشروط الكافية للتعظيم تتطلب أن يكون مقام الكسر فى الطرف الأيمن للمعادلة (92) سالباً ، فإن :

$$(93)\qquad \frac{dq}{dr}<0$$

وهكذا يؤدى فرض ضريبة على الإيراد الكلى إلى تخفيض حجم الإنتاج ، وبالتالى ارتفاع السعر .

(هـ) لاحظ أن فرض ضريبة قيمية(١) ، أى فرض ضريبة على سعر الوحدة ، يؤدى إلى نتيجة مماثلة للنتيجة الأخيرة . لأن دالة الربح تصبح فى هذه الحالة — بافتراض أن r هى معدل الضريبة على السعر :

$$(94) \qquad z = q.(1-r)p - C(q)$$
$$= (1-r)R(q) - C(q)$$

وهى نفس دالة الربح التى استخدمت فى حالة الضريبة على قيمة المبيعات .

مثال : إذا كانت دالة تكاليف المنتج المحتكر هى $C = 0.4q^2 + 7q + 50$ ودالة الطلب على سلعته هى $q = 50 - 2p$ ، حيث q بالكيلوجرامات ، p بالجنيهات ، فإن تعظيم الربح :

$$(95.1) \qquad z = q(25 - 0.5q) - (0.4q^2 - 7q + 50)$$
$$= 25q - 0.5q^2 - 0\ 4q^2 - 7q - 50$$

يتطلب تحقق الشرط الضرورى التالى :

$$(\cdot 5.2) \qquad \frac{dz}{dq} = 25 - q - 0.89 \cdot 7 = 0$$

ومن هذا الشرط يتضح أن $q = 10$. إذن سعر البيع $p = 20$ ، الإيراد الكلى $R = 200$ ، التكلفة الكلية $C = 160$ ، والربح $z = 40$.

(ا) افرض الآن أن الحكومة فرضت ضريبة إجمالية مقدارها ٢٠ جنيه على هذا المنتج . تعظيم الربح فى هذه الحالة :

---

(١) ضريبة قيمية = Ad valorem Tax

$$(95.3) \qquad z = 25\,q - 0.5\,q^2 - 0.4\,q^2 - 7\,q - 50 - 20$$

يؤدى إلى نفس شرط التعظيم (95.2) . ومن ثم نفس الكمية ونفس السعر والإيراد الكلى والتكلفة الكلية لكن الربح فى هذه الحالة يصبح ٢٠ جنيهاً فقط .

(ب) افرض أن الحكومة فرضت ضريبة أرباح نسبتها ٥٠ ٪ من الأرباح ، فإن دالة الربح تصبح :

$$(95.4) \qquad z = 0.50\,(\,25\,q - 0.5\,q^2 - 0.4\,q^2 - 7\,q - 50\,)$$

وتعظيم الربح يتطلب تحقق الشرط التالى :

$$\frac{dz}{dq} = 0.50\,(\,25 - q - 0.8\,q - 7\,) = 0$$

الذى هو نفس شرط تعظيم الربح قبل فرض الضريبة (95.2) . إذن نفس الكمية سوف تنتج وتباع بنفس السعر ، ومن ثم يتحقق نفس الإيراد والتكاليف ، لكن الأرباح تصبح ٢٠ جنيهاً فى هذه الحالة .

(ح) إذا فرضت ضريبة مقدارها جنيه واحد على كل وحدة منتجة ، فإن دالة الربح تصبح :

$$(95.5) \qquad z = 25\,q - 0.5\,q^2 - 0.4\,q^2 - 7\,q - 50 - q$$

الشرط الضرورى لتعظيم الأرباح فى هذه الحالة هو :

$$(95.6) \qquad \frac{dz}{dq} = 25 - q - 0.8\,q - 7 - 1 = 0$$

ومنه $q = 9.44$. وبالتعويض عن q فى دالة الطلب نحصل على سعر البيع

وهو ٢٠,٢٨ جنيها والإيراد الكلى ١٩١,٤٤ جنيهاً والربح قبل الضريبة ٣١,٤٤ جنيها والضريبة المدفوعة ٩,٤٤ جنيهاً ، والربح الذى يذهب لخزينة المنتج المحتكر فعلا هو ٢٢ جنيها . لاحظ أن الارتفاع فى سعر البيع أقل من قيمة الضريبة المفروضة .

لاحظ أنه لو فرضت ضريبة إجمالية قدرها ٩,٤٤ جنيها أى نفس قيمة حصيلة الضريبة على كمية المبيعات ، فإن الكمية المباعة وسعر البيع يظلان كما كانا قبل فرض الضريبة أى أن المنتج يبيع ١٠ كيلوجرامات بسعر ٢٠ جنيها للكيلو ويحصل على ربح قبل الضريبة مقداره ٤٠ جنيهاً ، يدفع منها ٩,٤٤ جنيها ضريبة ويابقى له ٣٠,٥٦ جنيهاً تدخل خزينته كربح صاف. أى أن الحكومة تحصل على نفس الإيراد ، والمستهلك يدفع ثمناً أقل وأرباح المنتج المحتكر تنخفض بنسبة أقل بفرض ضريبة إجمالية على المنتج بدلا من فرض ضريبة على كمية المبيعات . ولذا فإن بعض الاقتصاديين يفضلون الضريبة الإجمالية على الضريبة على حجم المبيعات .

(ى) افرض الآن أن الحكومة فرضت ضريبة على قيمة المبيعات بنسبة ٥ ٪ فى هذه الحالة تصبح دالة الربح المراد تعظيمها :

$$z = (1-0.05)(25q - 0.5q^2) - 0.4q^2 - 7q - 50 \qquad (95.?)$$

والشرط الضرورى لتعظيم الربح فى هذه الحالة هو :

$$\frac{dz}{dq} = (0.95)(25 - q) - 0.8q - 7 = 0$$

ومنها يتضح أن كمية المبيعات هى ٩,٥ كيلوجرام . وبالتعويض عن الكمية فى دالة الطلب يتضح أن سعر البيع هو ٢٠,٥٢ جنيهاً ، ومن ثم فالإيراد الكلى

هو ٩٢,٣٧ جنيهاً والربح قبل الضريبة هو ٣٢,٣٧ جنيهاً ، والضريبة المدفوعة هى ٩,٦٢ جنيهاً ، والربح الذى يدخل خزينة المحتكر هو ٢٢,٧٥ جنيهاً . وهكذا فبالمقارنة بالوضع قبل فرض الضريبة نجد أن كمية أصغر أصبحت تباع الآن بسعر أعلى ، وأن ربح المحتكر قد انخفض من ٤٠ إلى ٢٢,٧٥ جنيهاً .

(هـ) إذا فرضت الحكومة ضريبة قيمية مقدارها ٥ ٪ من ثمن البيع فإن دالة الربح أصبح :

$$z = q\,(1 - 0.05)\,p - C = 0.95\,R - C$$

وهى نفس دالة الربح التى استخدمت فى المثال السابق ، ولذا فإننا نصل إلى نفس النتائج التى وصلنا إليها فى حالة الضريبة على قيمة المبيعات .

٥ . ٧ . تمارين :

تمرين (١) : شركة تنتج سلعة متجانسة باستخدام المدخلين x , y فإذا كانت الميزانية التى تخصصها هذه الشركة للإنتاج هى ٤٠٠ جنيه ، وكان سعر الوحدة من المدخل x جنيه واحد وسعر الوحدة من المدخل y جنيهان وكانت كمية الإنتاج معطية بالدالة $Q = 200\,x + 100\,y - \frac{1}{2}\,x^2 - \frac{1}{2}\,y^2$
فالمطلوب :

(ا) إيجاد كميات عناصر الإنتاج التى لو استخدمتها الشركة لحصلت على أكبر إنتاج ممكن دون الالتجاء إلى مصادر خارجية للتمويل فى الزمن القصير . حل المعادلات بطريقة المحددات .

(ب) تحقق من أن الحل يضمن فعلا التعظيم المشروط للإنتاج .

(ح) قارن كمية الإنتاج فى الحالة السابقة بكمية الإنتاج فى حالة ارتفاع سعر المدخل x إلى جنيهان مع بقاء العوامل الأخرى ثابتة . وضح المقارنة بالرسم .

تمرين (٢) : دالة الإنتاج الخاصة بمصنع لإنتاج السكر هى :

$$q = 0.5 \log x_1 + \log x_2$$

حيث x_1 , x_2 هى المدخل من العمل ورأس المال وحيث r_1 سعر الوحدة من العمل يساوى ١٠ قروش و r_2 سعر للوحدة من رأس المال يساوى ١٠٠ قرش . إذا كانت التكاليف الثابتة لهذا المصنع هى ٥٥٠ جنيه ، فالمطلوب :

(ا) تحديد أقصى إنتاج يمكن الحصول عليه بشرط ألا تزيد التكاليف عن ١٠٠٠ جنيه .

(ب) التحقق من أن الحل فى (ا) يضمن فعلا التعظيم المشروط للإنتاج وإعطاء المعنى الاقتصادى لهذه النتيجة .

(حـ) إيجاد خط توسع المنشأة ، وتفسير معناه .

تمرين (٣) : إذا كانت دالة الإنتاج لمنشأة ما هى :

$$q = 150 - (x_1 - 6)^2 - 4(x_2 - 1)^2$$

وكان قيد التكاليف الخاص بها هو :

$$C = 498 + x_1 + x_2$$

فأوجد السلوك الأمثل للمنشأة إذا كانت أقصى ميزانية تستطيع تخصيصها للإنتاج هى ١٠٠٠ جنيه . قارن حجم الإنتاج الذى تحصل عليه بحجم الإنتاج الذى كانت المنشأة تحققه لو لم يكن هناك أى قيد أو شرط على تعظيم أرباحها . أعط الشروط الثانية للتعظيم فى الحالتين .

تمرين (٤) : شركة تحتكر صناعة السلعتين A_1 , A_2 وتواجه دالتى الطلب التاليتين :

$$Q_2 = 12 + 3\,p_1 - 7\,p_2 \qquad , \qquad Q_1 = 3\,(p_2 - p_1)$$

وتتكلف 0.3 جنيه للوحدة من السلعة A_1 , 0.4 جنيه للوحدة من السلعة A_2 .

(ا) أوجد سعرى السلعتين اللذان يحققان للمنتج المحتكر أقصى إيراد صافى .

(ب) وضح كيف تختلف إجابتك لو أنه كانت هناك شركتان مستقلتان إحداهما تحتكر إنتاج السلعة A_1 والأخرى تحتكر إنتاج السلعة A_2 بفرض أن

تكاليف إنتاج الوحدة من كل من السلعتين تظل كما هى . وأن كل منتج يفترض عندما يقوم بتحديد سعره أن سعر المنتج الآخر لن يتغير .

(ح) ما هى الأسعار التى تحقق أكبر ربح ممكن لكل من المنتجين المستقلين فى وقت واحد ؟

تمرين (٥) : إذا علمت أن شركة لإنتاج التليفزيونات تنتج q جهاز فى الأسبوع بتكلفة كلية قدرها $(q^2 / 25 + 3\,q + 100)$ ، وأن العلاقة بين الكمية المطلوبة وسعر الجهاز p $q = 75 - 3\,p$. فأوجد كلا من السعر الاحتكارى والكمية الاحتكارية ، وتحقق من أنهما يعطيان أكبر ربح ممكن ثم أوجد أثر فرض ضريبة مقدارها ٣ جنيهات على كل جهاز على السعر والإنتاج .

تمرين (٦) : إذا علمت أن منتجاً احتكارياً يوزع سلعته فى سوقين منفصلين دالتى الطلب فيهما هما :

$$p_1 = 80 - 5\,q_1 \qquad\qquad p_2 = 180 - 2\,q_2^2$$

وإذا علمت أن دالة تكاليف الإنتاج هى :

$$C = 50 + 20\,(q_1 + q_2)$$

فأوجد السعر والكمية المناسبين لكل سوق ، واحسب مرونة الطلب فى كل سوق عند وضع التوازن . احسب مستوى الربح الكلى وتحقق من أنه أكبر ما يمكن .

تمرين (٧) : افرض أن دالة الطلب على سلعة تنتجها منشأة احتكارية هى :

$$p = 100 - 4q$$

وافرض أن دالة التكاليف الكلية هى :

$$C = 50 + .0 q$$

(ا) أوجد السعر والكمية اللذان يحققان أقصى ربح ممكن للمنتج ، واحسب قيمة دالة الربح فى هذه الحالة .

(ب) ناقش أثر فرض ضريبة مقدارها ٨ وحدات نقدية على كل وحدة منتجة .

(حـ) ما هو أثر فرض ضريبة إجمالية على المنشأة قدرها ٧٢ وحدة نقدية؟

(ء) ما هو أثر فرض ضريبة قيمية بنسبة ١٠ ٪ من سعر الوحدة المباعة ؟

الفصل السادس

التوازن السوقى ومسالة استقراره

نناقش فى هذا الفصل توازن سوق سلعة ما أو عنصر ما من عناصر الإنتاج ، وذلك بافتراض : [ا] أن هذه السوق هى سوق تنافسية كاملة ، [ب] أن الأسعار تظل ثابتة فى كل الأسواق الأخرى . والمقصود بالسوق التنافسية الكاملة هو تلك السوق التى تتوفر فيها الشروط التالية :

(ا) تجانس السلعة التى ينتجها كل المنتجين ، وتجانس المستهلكين من وجهة نظر جميع البائعين .

(ب) كثرة عدد المنتجين والمستهلكين ، وبالتالى صغر حجم معاملات أى منتج أو مستهلك بالنسبة للحجم الكلى للمبيعات والمشتريات .

(ح) توفر العلم الكامل لدى كل الأطراف المتعاملة فى السوق ، واغتنامهم أية فرصة لزيادة أرباحهم أو اشباعهم .

(ى) حرية دخول السوق والخروج منه مكفولة للجميع فى الزمن الطويل .

أما المقصود بتوازن السوق فهو تلك الحالة التى تتوافق فيها رغبات المشترين مع رغبات البائعين ، ولا يكون لدى أى منهم حافزاً للانتقال إلى حالة أخرى . هذا وسوف نتعرض فى هذا الفصل لكيفية تحديد التوازن فى السوق ، أى كيفية تحديد السعر والكمية التوازنية عن طريق التفاعل بين قوى العرض والطلب فى السوق ، مستخدمين بعض النتائج الهامة التى وصلنا إليها فى الفصلين السابقين بخصوص

اشتقاق دوال العرض والطلب الفردية . كذلك سوف نهتم بموضوع استقرار التوازن ، وبتحديد الشروط الضرورية للاستقرار فى عدد من الحالات الهامة .

٦ ـ ١ . توازن السوق فى الأجلين القصير والطويل :

ذكرنا أن التوازن يتم عن طريق التفاعل بين قوى الطلب وقوى العرض فى السوق . ولكن مم تتكون قوى الطلب ومم تتكون قوى العرض ؟ إن قوى الطلب فى السوق تتكون من مجموع طلب مختلف المشترين للسلعة محل البحث أى من دالة الطلب السوقى . وقد رأينا فى الفصل الرابع كيف يمكن اشتقاق دالة الطلب الفردى لكل مستهلك ، فى ظل الافتراض الخاصة بالتعظيم المشروط للمنفعة . وعموماً وجدنا أن الكمية التى يطلبها المستهلك i من السلعة j ، ونرمز لها بالرمز D_{ij} ، تتوقف على أسعار جميع السلع بما فيها السلعة j أى على $p_1 \; \ldots\ldots \; p_m$ حيث نفترض وجود m سلعة ، كما تتوقف على دخل المستهلك i ، ونرمز له بالرمز y_i . إذن دالة الطلب الفردى على السلعة هى :

$$D_{ij} = f_{ij}(p_1, \ldots, p_j, \ldots p_m, y_i) \qquad (1)$$

وحيث أننا نفترض ثبات أسعار جميع السلع الأخرى وثبات دخل المستهلك ، فإن الدالة السابقة يمكن إعادة كتابتها كالتالى :

$$D_{ij} = f_{ij}(p_j)$$

وحيث أننا سنركز على سلعة واحدة j ، فإننا سنحذف الحرف j عند كتابتنا لدالة الطلب الفردى . إذن سنكتب دالة الطلب على النحو التالى :

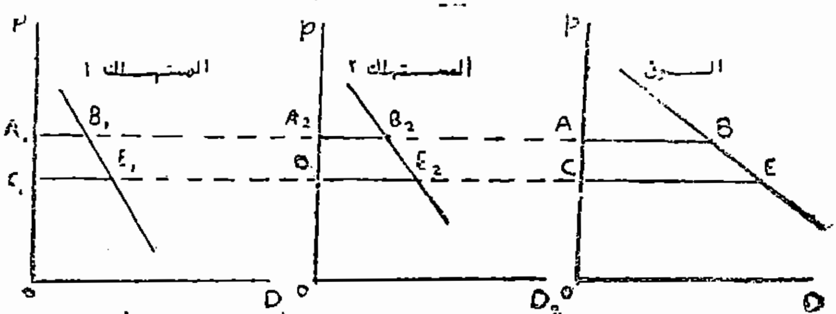
$$D_i = f_i(p) \qquad (2)$$

وبافتراض أن هناك n من المشترين أى أن $i = 1 , \ldots\ldots , n$ فإن دالة الطلب للسوق D عبارة عن حاصل جمع n من دوال الطلب (٢) :

$$(3) \qquad D = \sum_{i=1}^{n} D_i = \sum_{i=1}^{n} f_i\,(p) \equiv D\,(p)$$

ويمكن توضيح كيفية اشتقاق منحنى طلب السوق بالرسوم التالية :

ويمكن توضيح كيفية اشتقاق منحنى طلب السوق بالرسوم التالية :



شكل (١ - أ)   شكل (١ - ب)   شكل (١ - حـ)

افرض أن هناك ٢ مستهلكين ، منحنى طلب المستهلك الأول هو D_1 ومنحنى طلب المستهلك الثانى هو D_2 . للحصول على منحنى طلب السوق ، نحسب طلب كل مستهلك عند سعر معين وليكن السعر $OA_1 = OA_2 = OA$. المستهلك الأول يطلب الكمية A_1B_1 ، والثانى الكمية A_2B_2 عند ذلك السعر . إذن طلب السوق يساوى الكمية $AB = A_1B_1 + A_2B_2$. وهكذا نحصل على النقطة B فى شكل (١ - حـ) . بالمثل يمكن أن نحصل على نقطة أخرى مثل E على منحنى طلب السوق ، وذلك بجمع الكمية التى يطلبها المستهلك الأول عند السعر $OC_1 = OC_2$ والكمية التى يطلبها المستهلك الثانى عند السعر نفسه . إذن طلب السوق عند السعر $OC_1 = OC_2 = OC$ هو $CE = C_1E_1 + C_2E_2$. وهكذا نكون حددنا

النقطتين B و E . وبفرض أن دوال الطلب خطية ، فإن هاتين النقطتين يكفيان لتحديد دالة طلب السوق المرسومة فى شكل (١ حـ) .

أما منحنى عرض السوق ، فيمكن الحصول عليه بطريقة مماثلة من منحنيات العرض الفردية التى حصلنا عليها فى الفصل الخامس . هناك رأينا أن منحنى العرض الفردى للمنتج i فى الزمن القصير عبارة عن ذلك الجزء من منحنى التكاليف الحدية لذلك المنتج البادىء من نقطة التقاطع مع منحنى التكاليف المتغيرة :

$$S_i = S_i(p) \quad \text{فإن} \quad p \geq \min \ AVC \quad \text{إذا كان}$$
$$(4)$$
$$S_i = O \quad \text{فإن} \quad p < \min. \ AVC \quad \text{وإذا كان}$$

ومنحنى عرض السوق S عبارة عن مجموع منحنيات العرض الفردية :

$$S = \sum_{i=1}^{n} S_i(p) = S(p) \qquad (5)$$

وذلك بفرض وجود n من المنتجين .

وفى الزمن الطويل ، وجدنا أن منحنى العرض الفردى هو ذلك الجزء من منحنى التكاليف الحدية الطويلة الاجل البادىء من نقطه التقاطع مع منحنى التكاليف الكلية المتوسطة ، وبجمع هذه المنحنيات الفردية يمكن أن نحصل على منحنى عرض السوق أو منحنى عرض الصناعة .

وفيما يختص بميل منحنيات طلب وعرض السوق فإن منحنى طلب السوق يكون عادة ذا ميل سالب لنفس الاسباب التى ذكرناها بالنسبة للميل السالب لمنحنيات الطلب الفردية فى الفصل الرابع ، ومنحنى العرض السوقى فى الزمن القصير

ذا ميل موجب حيث أن منحنيات العرض الفردية من الضرورى أن يكون ميلها موجب حسب ما تتطلبه شروط تعظيم الربح ، كما أوضحنا فى الفصل الخامس . أما منحنى العرض فى الزمن الطويل فله موجب فى حالة غياب الوفورات الخارجية، وقد يكون سالباً فى بعض — وليس فى كل — الحالات التى توجد فيها وفورات خارجية بعبارة أخرى ، ليس من الضرورى أن يكون ميل منحنى العرض السوقى الطويل الأجل سالباً فى حالة وجود وفورات خارجية ، فذلك لا يحدث إلا إذا كان الخفض فى التكاليف الناتج عن توسع الصناعة كبيراً جداً بحيث يعوض الزيادة فى التكاليف الناتجة عن توسع كل منشأة على حدة .

وشرط التوازن السوقى فى الأجل القصير حيث لا يكون ممكناً تغيير حجم الجهاز الإنتاجى لأى منشأة ولا دخول منتجين جدد هو أن يتعادل العرض والطلب السوقيين . فالسعر التوازنى والكمية التوازنية عبارة عن احداثيات نقطة تقاطع منحنى عرض السوق ومنحنى طلب السوق . فإذا كان منحنى طلب ومنحنى عرض السوق كالتالى :

$$D = 200 - 40\,p \qquad\qquad S = 50 + 10\,p$$

فإن شرط التوازن هو : $D - S = 0$

وبالتعويض عن كل من D , S فى شرط التوازن نجد أن :

$$p = 3 \quad , \quad D = S = 80$$

أما فى الزمن الطويل حيث يصبح فى الإمكان تغيير حجم الجهاز الإنتاجى لكل منشأة ودخول منتجين جدد أو خروج بعض المنتجين الحاليين من السوق ، فإن شرط التوازن هو أن يكون الربح لكل منشأة صفراً . وعليه فإن نموذج السوق يأخذ الشكل التالى : بافتراض تماثل منحنيات تكاليف المنشآت المختلفة ،

فإن منحنيات العرض الفردية تكون متماثلة ، ومن ثم فإن منحنى عرض السوق أو الصناعة يكون :

$$(6) \qquad S(p) = n\, S_i'(p)$$

حيث n عدد المنتجين . افرض أن منحنى طلب السوق هو :

$$(7) \qquad D = D(p)$$

إذا كان الربح صفراً لكل منشأة فى الأجل الطويل ، فإن معنى هذا أن :

$$(8) \qquad Z_i = p S_i - g(S_i) = 0 \qquad i = 1, \ldots, n$$

حيث $g(S_i)$ هى دالة التكاليف الكلية الطويلة الأجل لكل منشأة لإنتاج مقداره $S_i = S/n$. وهذا يتضمن اشتراط أن $p = AC = g(S_i)/S_i$.

وكالعادة ، فإننا نكتب شرط توازن السوق كالتالى :

$$(9) \qquad D(p) = S(p) = 0$$

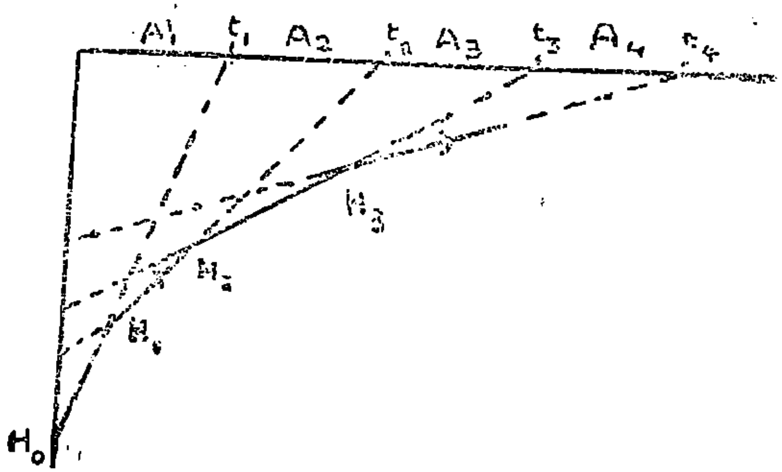
الآن لدينا أربعة معادلات (٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩) فى أربعة مجاهيل هى $D, S_i, p; n$. إذن بحل هذه المعادلات نحصل على إنتاج كل منشأة وسعر البيع والطلب الكلى وعدد المنشآت . بعبارة أخرى ، فإن قوى السوق فى ظل المنافسة الكاملة فى الزمن الطويل لا تحدد السعر والكمية التوازنيين فقط ، وإنما تحدد أيضاً عدد المنشآت العاملة فى الصناعة ، أى الحجم الأمثل للصناعة .

٦ . ٢ . احتمال تحقق التوازن السوقى :

أهم ما يميز حالة التوازن هو رضى البائعين والمشترين عن الوضع القائم

(الأمر الواقع) فلا يكون لدى أى منهم حافز لتعديل سلوكه . لكن وجود نقطة للتوازن مناظرة لظروف عرض وطلب معينة لا تعنى بأية حال أن السوق يعمل عند هذه النقطة ، كما أنه ليس هناك أى ضمان لوصول السوق إليها إذا كان السوق فى حالة اختلال عند بدء التعامل . وبالطبع ليس هناك ما يبرر افتراض أن السعر الإفتتاحى فى السوق سيكون سعراً توازنياً ، فلن يحدث ذلك إلا بمحض الصدفة .

ويرجع ذلك إلى أن التغيرات لا تتوقف عن الظهور فى الحياة العملية ، فلا شىء يثبت على حال فى عالم الاقتصاد . الأذواق تتغير وأساليب الإنتاج تتغير والدخول يتغير والأسعار تتغير بين الحين والآخر . ولذا فإنه ما أن يحدث تغير معين فى أى من هذه المتغيرات حتى تصبح نقطة التوازن القديمة غير ذات معنى ، ويبدأ السوق فى التحرك نحو نقطة توازن أخرى جديدة . ولكن أثناء سير السوق نحو هذه النقطة يأخذ عامل من العوامل فى التغير ، فتصبح نقطة التوازن القديمة غير ذات معنى ، وينشأ اتجاه نحو نقطة توازن جديدة ، وهكذا لا يصل السوق إلى أى من نقط التوازن المناظرة لأى مجموعة من الظروف ، وإنما يظل السوق يطارد أوضاعاً للتوازن من غير أن يستطيع اللحاق بأى منها . ويمكن تصوير هذه الفكرة فى شكل (٢) بالمنحنيات التى أسماها باريتو منحنيات الملاحقة أو المطاردة . (Pareto's Courbes des Poursuite) . فإذا مثلنا الوضع الأولى للسوق بالنقطة H_0 وكانت هناك ظروف معينة خلال الفترة يناظرها وضع توازنى معين نرمز له بالرمز A_1 ، فإن السوق سوف يتجه إلى هذا الوضع التوازنى على المسار $H_0 t_1$. ولكن قد يحدث أثناء سير السوق نحو الوضع التوازنى A_1 ، أن يتغير عامل أو أكثر ، مما يؤدى إلى الحصول على مجموعة جديدة من الظروف هى التى تسود خلال الفترة t_2 والتى يناظرها وضع التوازن A_2 . فى هذه الحالة يبدأ السوق فى تغيير مساره عند النقطة H_1 من $H_0 t_1$ إلى $H_2 t_2$ سعياً وراء الوضع



شكل رقم (٢)

التوازنى الجديد A_2 . ولكن الظروف الجديدة لا تلبث أن تتغير ويتغير معها الوضع التوازنى المناظر إلى A_3 مثلا وهكذا يتغير مسار السوق من جديد عند النقطة H_2 مثلا ، سعياً وراء الوضع التوازنى الجديد . وهكذا فإنه يكون هنالك دائماً اتجاه نحو أوضاع توازن جديدة تبعاً لتغير العوامل الاقتصادية ، برغم أن أيا من هذه الأوضاع قد لا يتحقق و أى وقت .

لذا فإن التحليل الساكن الذى يحدد لكل مجموعة من ظروف العرض والطلب وضع توازن خاص بها ذو قيمة محدودة للغاية ، نظراً لضآلة احتمال تحقق التوازن . لكن الأهمية الحقيقية لهذا التحليل هو أنه يشكل الخطوة الأولى التى تمكننا من إجراء تحليل ساكن مقارن يمكننا من اكتشاف أثر تغير ظرف من الظروف على مسار السوق أو النظام الاقتصادى .

٢٠٦ . شروط استقرار التوازن السوق(١)

يقال إن التوازن مستقر إذا عاد السوق إلى حالة التوازن الأصلية بعد حدوث اختلال ، أى بعد ما تؤدى بعض العوامل إلى انحراف السعر الفعلى عند سعر التوازن .

ويقال أن التوازن غير مستقر عندما لا يعود السوق إلى حالة التوازن الأصلية بعد حدوث اختلال ، أى بعد انحراف عن السوق عن وضع التوازن الأصلى .

ويمكن أن ندرس موضوع استقرار التوازن إما عن طريق التحليل الساكن وإما عن طريق التحليل الحركى كما سيأتى بيانه .

عموماً أى اختلال فى التوازن يؤدى إلى عملية تعديل فى أوضاع الأطراف المعنية فى السوق . مثلا إذا كان السعر الفعلى أقل من السعر التوازنى ، فإن بعض المشترين قد يعرضون أسعاراً أعلى . وعملية التعديل هذه تستمر لبعض الوقت ، وبالتالى يتكون لها مسار زمنى معين . إذ هناك أمران :

١ — طبيعة عملية التعديل ، أى فى اتجاه التوازن أو بعيداً عنه .

٢ — المسار الزمنى لعملية التعديل ، أى بتقلبات أو دون تقلبات .

والتحليل الساكن يركز على النقطة الاولى أى طبيعة عملية التعديل . أما التحليل الحركى فهو يركز على النقطة الثانية أى المسار الزمنى لعملية التعديل .

---

(١) استقرار = Stability ، مستقر = stable ، غير مستقر = unstable.

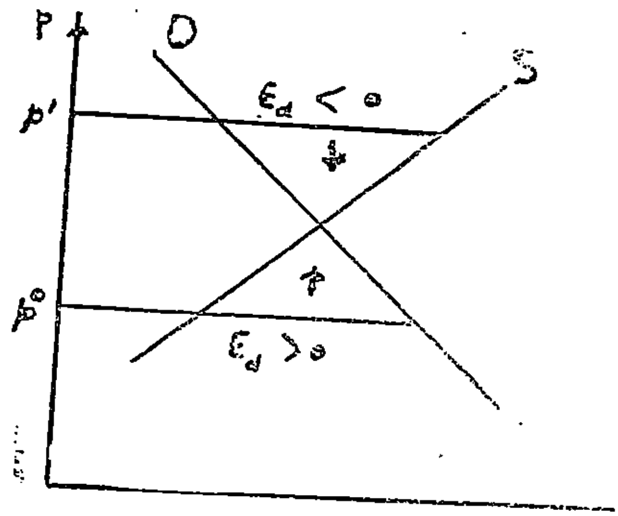
٦٠٣٠١٠ مفهوم الاستقرار الساكن :

أولا : شرط فالراس للاستقرار :

نعرف أولا فائض الطلب عند أي سعر :

$$E_d = D - S \qquad (10)$$

يلاحظ في شكل (٣) أنه عند السعر p^0 يكون فائض الطلب موجباً . أما عند السعر p^1 فإن فائض الطلب سالب .



شكل رقم (٣)

وشرط فالراس مبنى على افتراض معين بخصوص سلوك المشترين والبائعين . وهو أن المشترين يرفعون السعر عندما يكون فائض الطلب موجباً ، ويخفضون السعر عندما يكون فائض الطلب سالباً .

إذا صح هذا الشرط ، فإن السوق يكون مستقراً إذا أدى ارتفاع السعر إلى تخفيض فائض الطلب ، أى إذا كان :

$$\frac{dE_d}{dp} < 0 \qquad (11)$$

فإذا كانت دالة الطلب هى $D = a + bp$ ودالة العرض هى $S = c + dp$ فإن فائض الطلب هو :

$$E_d = a + bp - c - dp$$

$$= (a - c) + (b - d)p$$

إذن شرط فالراس لاستقرار التوازن هو :

$$\frac{dE_d}{dp} = b - d < 0$$

وهذا يعنى تحقق استقرار التوازن فى أى من الحالات التالية :

(أ) b سالبة ، d موجبة ، وهذه هى الحالة العادية .

أو :

(ب) b سالبة ، d سالبة ، ولكن $|d| > |b|$ أو $|1/d| < |1/b|$
أى إذا كان منحنى الطلب أكثر استواء من منحنى العرض .

أو :

(جـ) b سالبة ، d صفر .

أو :

(د) b صفر ، d موجبة .

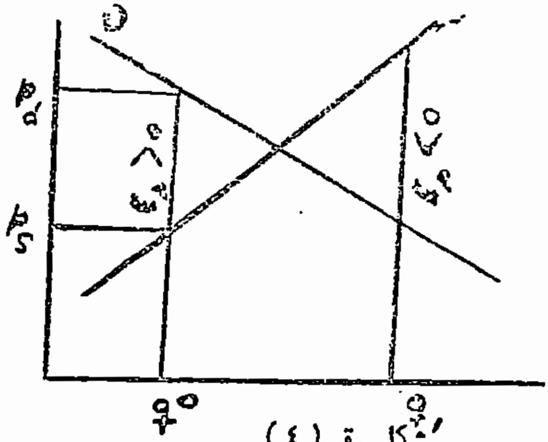
أو :

(هـ) كلا من d , b موجب ولكن ميل الطلب أكبر $|1/d| > |1/b|$.

لكن السوق لن تكون متمتعة بتوازن مستقر إذا كانت b سالبة ، d سالبة ، ولكن $|d| < |b|$ أو $|1/d| < |1/b|$ أى منحنى العرض أكثر استواء من منحنى الطلب . أو إذا كان كلا من b , d موجب ولكن ميل العرض أكبر :

$$|1/d| > |1/b|$$

ثانياً : شرط مارشال للاستقرار :



شكل رقم (٤)

نعرف أولا فائض السعر E_p :

$$E_p = P_d - P_s \qquad (12)$$

أى الفرق بين السعر الذى تطلب عنده كمية معينة والسعر الذى تعرض عنده نفس الكمية .

شرط مارشال مبنى على افتراض معين بخصوص سلوك المشترين والبائعين وهو أن أن البائعين يعمدون إلى زيادة الإنتاج عندما يكون $E_p > 0$ وإلى خفضه عندما تكون $E_p < 0$.

إذا صح هذا الشرط فإن التوازن يكون مستقراً إذا أدت زيادة الكمية المعروضة إلى خفض فائض السعر ، أى إذا كان :

$$\frac{d\,E_p}{d\,q} < 0 \qquad (13)$$

فإذا كانت دالة الطلب هى :

$$D = a + b\,p_d$$

ودالة العرض هى :

$$S = c + d\,p_s$$

فإن :

$$p_d = \frac{-a}{b} + \frac{1}{b}\,D$$

$$p_s = \frac{-c}{d} + \frac{1}{d}\,S$$

وعندما تكون $D = S = q$ فإن فائض السعر E_p يكون :

$$E_p = p_d - p_s = \frac{-a}{b} + \frac{c}{d} + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{d}\right) q$$

إذن شرط استقرار التوازن تبعاً لمارشال هو :

$$\frac{dE_p}{dq} = \frac{1}{b} - \frac{1}{d} < 0$$

وهذا يتضمن اشتراط أى من الشروط التالية :

(أ) b سالبة ، d موجبة ، وهذه هى الحالة العادية .

أو :

(ب) b سالبة ، d سالبة ولكن $|1/d| < |1/b|$ أو $|d| < |b|$.
وهذا عكس شرط فالراس .

لكن السوق لن تكون مستقرة طبقاً لشرط مارشال إذا كان :

(أ) $b < 0 \;,\; d < 0$ لكن $\left|\frac{1}{d}\right| < \left|\frac{1}{b}\right|$
أى إذا كان $|d| > |b|$ وهذا عكس شرط فالراس .

أو :

(ب) $b , d > 0$ وميل الطلب أكبر من ميل العرض $\left|\frac{1}{d}\right| > \left|\frac{1}{b}\right|$

نخلص مما سبق إلى النتيجة التالية :

١ — إذا كان منحنى الطلب ذو ميل سالب ومنحنى العرض ذو ميل موجب (الحالة العادية) فإن التوازن يكون مستقراً طبقاً لكل من شرط مارشال وشرط فالراس .

٢ — لكن إذا كان ميل منحنى الطلب سالباً وأيضاً ميل منحنى العرض سالباً ، فإنه إذا كان التوازن مستقراً طبقاً لأحد الشرطين ، فلن يكون مستقراً طبقاً للشرط الآخر. فالتوازن مستقر طبقاً لشرط فالراس إذا كانت $|d| > |b|$ أى إذا كان منحنى الطلب أكثر استواء من منحنى العرض ، وغير مستقر فى الحالة

العكسية عندما تكون | d | < | b | . أما طبقاً لشرط مارشال فإن التوازن مستقر إذا كانت | d | < | b | أى إذا كان منحنى الطلب أقل استواء من منحنى العرض وغير مستقر فى الحالة العكسية عندما تكون | d | < | b | .

٣ — بالمثل إذا كان ميل كل من منحنى العرض والطلب موجباً ، فإنه إذا كان التوازن مستقر لأحد الشرطين ، لا يكون مستقراً طبقاً للشرط الآخر . فالتوازن مستقر طبقاً لفالراس إذا كان $\left|\frac{1}{d}\right| > \left|\frac{1}{b}\right|$ أى ميل الطلب أكبر من ميل العرض وغير مستقر فى الحالة العكسية . أما طبقاً لمارشال فالتوازن مستقر إذا كان $\left|\frac{1}{d}\right| < \left|\frac{1}{b}\right|$ أى إذا كان ميل العرض أكبر ، وغير مستقر فى الحالة العكسية .

والآن أيهما أصلح : الاستقرار الفالراس أم الاستقرار المارشالى ؟

لا يستطيع المرء أن يجزم بصحة أحد الشرطين وخطأ الشرط الآخر فى الحياة العملية . فشروط استقرار التوازن فى أى سوق تعتمد على الفروض الخاصة بميكانزم السوق وعلى سلوك الأطراف المشتركة فيه ، وهذه تختلف من سوق لأخرى . لذا فإن الحكم غير ممكن الا فى ضوء بيانات واقعية عن ظروف وسلوك المتعاملين ، وتحليل هذه البيانات تحليلا دقيقاً .

٦ ـ ٣ ـ ٢ مفهوم الاستقرار الحركى :

نريد الآن أن نتعرف ليس فقط على طبيعة التوازن ، أى ما إذا كان انحرافاً معيناً عن وضع التوازن يعود بالسوق إلى حالة التوازن أم لا ، ولكن نريد أن

نعرف شكل المسار الزمنى لعملية التعديل أو المواءمة أى تحليل dp / dt من فترة إلى أخرى للتعرف على ما إذا كانت :

$$\frac{d(p_t - \overline{p})}{dt} \begin{matrix} > 0 \\ < 0 \end{matrix}$$

أى ما إذا كان p_t يبتعد تدريجياً عن سعر التوازن $\overline{p}$ أو يقترب تدريجياً منه ، وكذلك للتعرف على ما إذا كان الابتعاد أو الاقتراب من $\overline{p}$ بتقلبات أو بدونها ، وما إذا كانت التقلبات ثابتة أو متزايدة أو متناقصة كلما زادت t .

ويقال أن التوازن مستقر بالمعنى الحركى إذا كان السعر الفعلى يقترب تدريجياً من السعر التوازنى بمرور الوقت ، والتوازن غير مستقر إذا كان السعر الفعلى يبتعد عن السعر التوازنى بمرور الوقت ، وهذا تعريف فالراس ($p_t \rightarrow \overline{p}$) .

بالمثل يمكن تعريف التوازن المستقر بواسطة الكمية فالتوازن مستقر إذا كانت الكمية المعروضة تقترب تدريجياً من الكمية التوازنية وغير مستقر إذا كانت الكمية الفعلية تبتعد تدريجياً عن الكمية التوازنية وهذا تعريف مارشال ($q_t \rightarrow \overline{q}$) .

التحليل بافتراض سريان ظروف السوق الفالراسية :

فى هذه الحالة لو كان هناك فائض طلب E_d موجب فإنه يؤدى إلى رفع السعر . ويمكن التعبير عن هذا الفرض كالتالى :

$$(14) \qquad p_t - p_{t-1} = k\, E_{d,t-1}$$

حيث k ثابت موجب . وهذه المعادلة تقرر أنه لو كان هناك فائض طلب

موجب فى الفترة (t — 1) ، فإن هذا يؤدى إلى رفع السعر فى الفترة التالية :

$$E_{d_{t-1}} > 0 : (D_{t-1} > S_{t-1}) \rightarrow P_t > P_{t-1}$$

أى أن :

$$(15) \qquad p_t = p_{t-1} + k\,(D_{t-1} - S_{t-1}) > p_{t-1}$$

وهذه هى المعادلة التى تعطينا تطور السعر من فترة لأخرى أو المسار الزمنى للسعر .

ولتوضيح كيفية إيجاد المسار للسعر نأخذ حالة محددة ، العرض فيها ثابت فى كل الفترات والطلب هو الذى يتغير مع تغير السعر . أى أن نموذج السوق الذى نفترضه هو :

$$(16) \qquad S_t = c$$

$$(17) \qquad D_t = a + b\,p_t$$

$$(18) \qquad p_t - p_{t-1} = k\,E_{d,t-1}$$

$$(19) \qquad D_t = S_t$$

حيث c ثابت .

نبدأ بإيجاد الحل الساكن للنموذج ، أى نحل النموذج مع تجاهل دليل الزمن ، أو تجاهل معادلة تعديل السعر . بمساواة العرض والطلب :

$$a + b\bar{p} = c$$

إذن السعر التوازنى هو :

$$\bar{p} = \frac{c - a}{b} \qquad (20)$$

ثم نوجد الحل الحركى للنموذج ، أى مع مراعاة اختلاف الفترات الزمنية وأخذ معادلة تعديل السعر فى الاعتبار . بالتعويض عن D_{t-1} ، S_{t-1} فى معادلة فائض الطلب :

$$E_{d,t-1} = D_{t-1} - S_{t-1} = a + b\,p_{t-1} - c$$

وبالتعويض عن $E_{d,t-1}$ فى معادلة تعديل السعر (١٨) :

$$p_t = p_{t-1} + k\,(a + b\,p_{t-1} - c)$$

إذن :

$$p_t = (1 + k\,b)\,p_{t-1} - k\,(c - a) \qquad (21)$$

وهذه معادلة فروق غير متجانسة وخطية من الدرجة الأولى . وكما سبق شرحه فى ٣ ـ ١١ ، فإن الحل العام لمعادلة فروق غير متجانسة وخطية من الدرجة الأولى مثل :

$$y_t = B\,y_{t-1} + C \qquad (22)$$

فى حالة كون $B \neq 1$ هو :

$$y_t = B^t \cdot A + C\left(\frac{1 - B^t}{1 - B}\right) \qquad (23)$$

حيث A هو الحل الإبتدائى y_0 .

إذن بافتراض أن معامل P_{t-1} فى المعادلة (٢١) لا يساوى الواحد الصحيح ، فإن حل معادلة الفروق السعرية هو :

$$(24) \qquad P_t = (1+kb)^t \; P_0 - k(c-a) \left[\frac{1-(1+kb)^t}{1-(1+kb)} \right]$$

$$= (1+kb)^t \; P_0 - \frac{k(c-a)}{-kb} + \frac{k(c-a)(1+kb)^t}{-kb}$$

$$= (1+kb)^t \left(P_0 - \frac{c-a}{b} \right) + \left(\frac{c-a}{b} \right)$$

ولكن معادلة (٢٠) :

$$\overline{P} = \frac{c-a}{b}$$

إذن يمكن إعادة كتابة معادلة (٢٤) كالتالى :

$$(25) \qquad P_t = (1+kb)^t \left(P_0 - \overline{P} \right) + \overline{P}$$

وبتأمل المعادلة (٢٥) يتضح أنه :

(أ) إذا كانت $1 < (1+kb)$ ، فإن هذه حالة مستبعدة لأن k موجبة ، b سالبة . إذن المقدار $(1+kb)$ دائماً أقل من الواحد الصحيح .

(ب) إذا كانت $1 > (1+kb) > 0$ فإن $(1+kb)^t$ تأخذ فى التناقص باستمرار حتى تصل إلى الصفر عندما تصل t إلى ما لا نهاية . ولذا فإن P_t يقترب تدريجياً من $\overline{P}$ بدون تقلبات . وبناء عليه فإن التوازن يكون مستقراً .

(حـ) إذا كانت $0 < (1+kb) < 1-$ فإن $|(1+kb)^t|$ تتناقص باستمرار كلما زادت t، ولكن نظراً للإشارة السالبة، فإنه تحدث تقلبات كلما تغيرت t من عدد زوجي إلى عدد فردي. إذن في هذه الحالة تحدث تقلبات متناقصة، ويقترب p_t تدريجياً من $\overline{p}$. أي أن التوازن مستقر.

(ى) إذا كانت $(1+kb) < -1$ فإنه تحدث تقلبات متزايدة وتتباعد p_t تدريجياً عن $\overline{p}$ كلما زادت t. أي أن التوازن غير مستقر.

(هـ) إذا كانت $(1+kb) = -1$ فإن التقلبات تكون منتظمة ويتقلب السعر بين القيمتين $p_t = 2\overline{p} - p_0$, $p_t = p_0$. والتوازن غير مستقر في هذه الحالة.

لاحظ أن الحالة $(1+kb) = 1$ مستبعدة، لأنها تعني أن $k\,b = 0$ وحيث أن $b \neq 0$، فإن k لابد وأن تساوي الصفر، وهذا متعارض مع افتراضنا أن k موجبة.

مثال (١): ناقش تطور السعر عبر الزمن في سوق دالة الطلب فيها هي $D_t = 10 - 0.5\,p_t$ والعرض فيها ثابت عند ٦ وحدات، بفرض أن:

$$p_t - p_{t-1} = 0.5\,E_{d,t-1}.$$

الآن $S_t = 6$، وبالتعويض عن S_{t-1} ، D_{t-1} في معادلة تعديل السعر نحصل على النتيجة التالية:

$$p_t = p_{t-1} + 0.5\,(10 - 0.5\,p_{t-1} - 6)$$

$$= 0.75\,p_{t-1} + 2$$

وهذه معادلة فروق غير متجانسة وخطية من الدرجة الأولى حلها :

$$p_t = 0.75^t\ p_0 + 2\left(\frac{1-0.75^t}{1-0.75}\right)$$

$$= 0.75^t\ p_0 + 8 - 8(0.75^t)$$

$$= 0.75^t\ (p_0 - 8) + 8$$

لاحظ أنه من الحل الساكن للنموذج :

$$D = S$$

$$10 - 0.5\ \overline{p} = 6$$

$$\overline{p} = 8$$

أى أن معادلة المسار الزمنى للسعر هى :

$$p_t = 0.75^t\ (p_0 - \overline{p}) + \overline{p}$$

وحيث أن معامل p_0 أقل من الواحد الصحيح وموجب ، فإن التوازن يكون مستقراً ، ويقترب السعر الفعلى من السعر التوازنى بدون تقلبات .

مثال (٢) : إذا كانت :

$$S_t = c + d\,p_t \quad , \quad D_t = a + b\,p_t$$

$$p_t - p_{t-1} = k\,E_{d,t-1}$$

فإن الحل الساكن لهذا النموذج هو :

$$\overline{p} = \frac{a-c}{d-b}$$

والحل الحركى هو :

$$p_t = p_{t-1} + k\,(a + b\,p_{t-1} - c - p_{t-1})$$

$$= \left[\,1 - k\,(d - b)\,\right]\,p_{t-1} + k\,(a - c)$$

وحل معادلة الفروق هذه بافتراض أن السعر الإبتدائى هو p_0 هو :

$$p_t = \left[1 - k\,(d - b)\right]^t (p_0 - \overline{p}) + \overline{p}$$

$$= G^t\,(p_0 - \overline{p}) + \overline{p}$$

حيث $G = 1 - k\,(d - b)$.

فإذا كانت $0 < G < 1$ فإن السعر الفعلى يقترب تدريجياً من سعر التوازن بدون تقلبات ويكون التوازن مستقراً .

أما إذا كانت $-1 < G < 0$ فإن التوازن يكون مستقراً ، ولكن مع وجود تقلبات ، أى أن التقلبات تكون متناقصة .

ويكون التوازن غير مستقر ، لو كانت $G < -1$ ، حيث تحدث تقلبات متباعدة .

<u>مثال (٣)</u> : <u>النموذج العنكبوتى</u>(١) : فى هذا النموذج نفترض أن :

$$D_t = a + b\,p_t$$

$$S_t = c + d\,p_{t-1}$$

$$S_t = D_t$$

---

(١) النموذج العنكبوتى = Cobweb model

والحل الساكن لهذا النموذج يعطى السعر التوازنى :

$$\overline{p} = \frac{a - c}{d - b}$$

أما الحل الحركى فهو يعطى النتيجة التالية :

$$p_t = -\frac{(a - c)}{b} + \left(\frac{d}{b}\right) p_{t-1}$$

وحل معادلة الفروق هذه هو :

$$p_t = \left(\frac{d}{b}\right)^t (p_0 - \overline{p}) + \overline{p}$$

فإذا كانت b سالبة ، d موجبة وهى الحالة العادية ، فإن (d / b) تكون سالبة ومن ثم نتوقع حدوث تقلبات فى السعر . هذه التقلبات تكون منتظمة أو متساوية فى الحالة التى تكون فيها $d / b = -1$. أما إذا كانت $-1 < d / b < 0$ فإن التقلبات تكون متناقصة ، ويكون التوازن مستقراً . وأخيراً إذا كانت $d / b < -1$ فإن التقلبات فى السعر تكون متزايدة ، ويكون توازن السوق غير مستقر .

٦ . ٤ . تمارين :

تمرين (١) : إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هى $D = 120 - 6\,p$ ودالة عرضها هى $S = 2\,p$ فأوجد السعر التوازنى ، وتحقق من استقرار التوازن طبقاً لمعيار فالراس ومعيار مارشال للاستقرار الساكن . قارن بين طبيعة التوازن حسب هذين المعيارين فى الحالات التالية :

(أ) إذا كان معامل السعر فى دالة العرض يساوى -2 ، ودالة الطلب كما هى معطاة أعلاه .

(ب) إذا كان معامل السعر فى دالة الطلب يساوى $+3$ ، ودالة العرض كما هى معطاة أعلاه .

(حـ) إذا كان معامل السعر فى دالة الطلب يساوى $+3$ ، ودالة العرض كما هى معطاة فى (أ) .

تمرين (٢) : إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هى $D_t = 20 - 3\,p_t$ ودالة العرض هى $S_t = 4\,p_{t-1}$ فاشتق النموذج العنكبوتى للسعر . وحل النموذج (أى معادلة الفروق) ، وأوجد السعر p_t للفترات من $t = 1$ حتى $t = 6$ بفرض أن الشرط الإبتدائى هو $p_0 = 3$ ، وعلق على تطور السعر من فترة لأخرى .

تمرين (٣) : إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هى $D_t = 4 - p_t$ ودالة العرض هى $S_t = 1 + 0.5\,p_{t-1}$ فأكتب معادلة المسار الزمنى للسعر ،

الفصل السابع

تحليل المدخلات والمخرجات

نشرح فى هذا الفصل طريقة لوصف العلاقات أو التشابكات بين مختلف الصناعات أو القطاعات التى يتكون منها الاقتصاد القومى ، وأسلوب لضمان اتساق الخطة الاقتصادية وتحقيق الانسجام بين مكوناتها المختلفة . ويطلق على هذه الطريقة تحليل المدخلات والمخرجات[١] ، ويرجع الفضل فى التوصل إليها إلى الاقتصادى الأمريكى ليونتيف . كذلك يطلق على هذه الطريقة فى الكتابات الاقتصادية تحليل التدفقات القطاعية أو الصناعية أو تحليل التشابك الصناعى[٢] .

١ . ٧ وصف جدول المدخلات والمخرجات :

إن أول خطوة فى تكوين جدول المدخلات والمخرجات أو ميزان التشابك القطاعى هى أن يقسم الاقتصاد القومى إلى عدد من القطاعات[٣] مثل قطاع الزراعة ، قطاع الصناعة التحويلية ، قطاع الخدمات ... الخ . افرض أن هناك n من القطاعات ، وافرض أن الإنتاج الكلى لكل قطاع هو X_i . الآن

---

(١) تحليل المدخلات والمخرجات = Input — output analysis

(٢) تحليل التدفقات القطاعية (أو الصناعية) = Analysis of inter – sector (or interindustry) flows

تحليل التشابك الصناعى = Analysis of inter—industry relations

(٣) قطاع = Sector

كيف يتوزع إنتاج أى قطاع على مختلف الاستخدامات ؟ بصفة عامة ، يستخدم جزء من إنتاج أى قطاع فى القطاع نفسه ، بينما يذهب الباقى إلى القطاعات المنتجة الأخرى ، ويبقى عادة جزء من إنتاج القطاع يتجه للاستهلاك أو الاستثمار أو التصدير أو زيادة المخزون . فانتاج القطاع X_1 يتوزع كالتالى :

X_{11} وهو ذلك الجزء من إنتاج القطاع ١ الذى يستخدم كمدخلات فى القطاع ١ ،

X_{12} وهو ذلك الجزء من إنتاج القطاع ١ الذى يستخدم كمدخلات فى القطاع ٢ ،

X_{13} وهو ذلك الجزء من إنتاج القطاع ١ الذى يستخدم كمدخلات فى القطاع ٣ ،

. . . .

X_{1n} وهو ذلك الجزء من إنتاج القطاع ١ الذى يستخدم كمدخلات فى القطاع n ،

Y_1 وهو ذلك الجزء من إنتاج القطاع ١ الذى يتبقى بعد استيفاء حاجة مختلف القطاعات المنتجة والذى يمثل الطلب النهائى (استهلاك ، استثمار ، تصدير ، زيادة فى المخزون) على منتجات هذا القطاع .

وعموماً فإن إنتاج القطاع i وهو X_i يتوزع فى صورة مدخلات للقطاعات الأخرى X_{ij} حيث $j = 1, \ldots, n$ ، ويطلق عليها التدفقات القطاعية ، وطلب نهائى Y_i . ويمكن توضيح كيفية توزيع منتجات القطاعات المختلفة على مختلف الاستخدامات باستخدام الجدول (١) والذى يطلق عليه جدول المدخلات والمخرجات أو ميزان التشابك القطاعى .

فى هذا الجدول ، يبين كل صف من الصفوف من ١ إلى n كيفية التصرف فى منتجات قطاع معين بين مدخلات لمختلف القطاعات بما فيها القطاع نفسه ، وبين طلب نهائى . وبفرض أن الإنتاج مقاس بالنقود ، أى أن الـ X_{ij} والـ Y_i

جدول (١)

Sector	1	2	......	n	Y_i	X_i
1	X_{11}	X_{12}	......	X_{1n}	Y_1	X_1
2	X_{21}	X_{22}	......	X_{2n}	Y_2	X_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	X_{n1}	X_{n2}	.. ...	V_{nn}	Y_n	X_n
V_i	V_1	V_2	......	V_n	$\boxed{\frac{Y}{V}}$	—
X_i	X_1	X_2	....	X_n	—	$\boxed{X}$

عبارة عن قيم نقدية (كميات منتجة × سعر السلعة المنتجة) ، فإنه من الواضح أنه يمكننا جمع مكونات كل صف وأن حاصل الجمع عبارة عن قيمة الإنتاج الكلى للقطاع . وهذا ما يظهر فى آخر عمود فى الجدول . إذن لكل صف i من الـ n صف الأولى فى الجدول نستطيع أن نكتب معادلة توضح توزيع إنتاج القطاع i كالتالى :

$$(1) \qquad X_{i1} + X_{i2} + \dots + X_{in} + Y_i = X_i \qquad i = 1, \dots, n$$

إذا نظرنا إلى الأعمدة التى يتكون منها الجدول ، فمن الواضح أن العمود 1 مثلا يبين مصادر المدخلات المستخدمة فى القطاع و كمياتها . فهذا القطاع

يحصل على الكمية X_{11} من القطاع ١ نفسه ، والكمية X_{21} من القطاع ٢ ، وهكذا. ومن الواضح أن قيمة إنتاج القطاع تكون أكبر من قيمة المدخلات المستخدمة فيه عادة ، والفرق بين قيمة الإنتاج الكلى للقطاع أو مجموع قيم المدخلات التى استخدمها هى عبارة عن القيمة المضافة والتى ترمز لها بالرمز V_1 . إذن لكل عمود j من الـ n عمود الأولى نستطيع أن نكتب معادلة توضح تقسيم الناتج الكلى لهذا القطاع إلى مدخلات من مختلف القطاعات والقيمة المضافة المتحققة فى القطاع :

$$(2) \qquad X_{1j} + X_{2j} + \dots + X_{nj} + V_j = X_j \qquad j = 1, \dots, n$$

لاحظ أننا استطعنا أن نجمع عناصر أى عمود بفضل افتراضنا أن المتغيرات التى تظهر فى الجدول مقاسة بالنقود ، أى أنها عبارة عن قيم المدخلات والقيمة المضافة أما إذا كانت عناصر الجدول مقاسة بوحدات عينية (أطنان ، أرادب ، أمتار ... الخ) فمن الواضح أننا نستطيع فى هذه الحالة جمع عناصر أى صف لأن لها نفس وحدات القياس ولكننا لا نستطيع جمع عناصر الصفوف ، لأنها عبارة عن كميات منتجات مختلفة مقاسة بوحدات مختلفة .

وحيث أن القيمة المضافة تمثل عوائد عناصر الإنتاج المختلفة ، كعائد العمل (الأجور) وعائد رأس المال (الفوائد) ، وعائد الأرض (الريع) وعائد التنظيم (الأرباح) ، فمن الواضح أننا نستطيع أن نوضح المكونات المختلفة للقيمة المضافة لكل قطاع وذلك باستبدال الصف V بمجموعة من الصفوف كل صف منها يمثل مكوناً من مكونات القيمة المضافة . وبالمثل ، فإننا يمكن أن نستبدل عمود الطلب النهائى بمجموعة من الأعمدة يمثل كل عمود منها نوعاً من أنواع الطلب النهائى . ولكن هذه مسألة مرتبطة بدرجة التفصيل المرغوب

إظهارها فى جدول المدخلات والمخرجات ، وهى تتوقف على الغرض الذى يعد من أجله الجدول ومدى توفر بيانات مناسبة .

من الواضح أن مجموع عناصر صف القيمة المضافة ونرمز له بالرمز V عبارة عن القيمة المضافة فى الاقتصاد القومى أو عوائد عناصر الإنتاج التى أسهمت فى خلق الناتج القومى ، وهذا هو الدخل القومى . إذن لدينا المعادلة التالية للدخل القومى :

$$(3) \qquad V_1 + V_2 + \dots + V_n = V$$

ومن الواضح أن مجموع عناصر عمود الطلب النهائى ونرمز له بالرمز Y عبارة عن قيمة المنتجات النهائية المتولدة فى الاقتصاد القومى وهذا هو الناتج القومى :

$$(4) \qquad Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = Y$$

وحيث أن الناتج القومى يساوى الدخل القومى* ، فإن يعنى ذلك أن مجموع عناصر عمود الطلب النهائى يساوى مجموع عناصر صف القيمة المضافة . أى أن :

$$(5) \qquad V_1 + V_2 + \dots + V_n = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$$

٢٠٧ نموذج المدخلات والمخرجات :

افرض أن المدخل من القطاع i إلى القطاع j دالة للإنتاج الكلى للقطاع j أى أن x_{ij} دالة لـ x_j . إذا افترضنا أيضا أن هذه الدالة خطية ومتجانسة ،

---

* راجع تعريف الناتج القومى والدخل القومى فى ١ ، ٢ ، ٣ .

فإننا نستطيع أن نكتب المعادلة التالية :

$$(6) \qquad X_{ij} = a_{ij} X_j$$

حيث a_{ij} ثابت عبارة عن مستلزمات إنتاج الوحدة من منتجات القطاع من j منتجات القطاع i :

$$(7) \qquad a_{ij} = X_{ij} / X_j$$

من الواضح أن لدينا فى هذه الحالة مصفوفة كاملة من المعاملات a_{ij} وهى :

$$(8) \qquad A^{*} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ويطلق على هذه المصفوفة مصفوفة المعاملات الفنية للإنتاج أو مصفوفة التكنولوجيا(١). وهناك عدد من الافتراضات الهامة بالنسبة لهذه المصفوفة وهى :

(ا) أن أى عنصر من عناصر المصفوفة يمكن أن يكون موجباً وأقل من

---

(١) Technical or input — output coefficients, technology matrix.

الواحد الصحيح أو صفراً ولكنه لا يمكن أن يكون سالباً :

$$1 > a_{ij} \geqslant 0 \qquad (8.1)$$

بعبارة أخرى فإنه من الجائز أن تنتج سلعة فى القطاع j دون أن تتطلب مستلزمات إنتاج من القطاع i . أما إذا تطلب إنتاج السلعة مستلزمات من هذا القطاع ، فإن المعامل الفنى للإنتاج ينبغى أن يكون موجباً إذ ليس هناك معنى لمدخل سالب ، وأقل من الواحد الصحيح لأن قيمة الإنتاج عادة أكبر من قيمة المستلزمات الداخلة فى صنعه .

(ب) يفترض أن مجموع عناصر أى عمود أقل من الواحد الصحيح :

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1 \qquad (8\ 2)$$

لأنه لو كان ذلك غير صحيح بمعنى أن المجموع أكبر من واحد ، فإن معنى ذلك أن القيمة الكلية لمدخلات القطاع أكبر من قيمة الإنتاج الكلى ، وتصبح القيمة المضافة سالبة ، وهذا أمر نفترض عدم حدوثه ، وإن كان حدوثه ليس بالأمر المستبعد عملياً (صناعة خاسرة) .

(ح) نفترض أن هناك ثبات للغلة بالنسبة للحجم ، وأنه ليست هناك وفورات أو ضياعات خارجية . أى أن حجم الإنتاج أو الصناعة لا أثر له على النسب بين المدخلات والمنتج ، وأن إنتاج القطاعات الأخرى لا أثر له على هذه النسب . وهذا ما يمكننا من التعبير عن التكنولوجيا بمعاملات ثابتة . نستطيع الآن باستخدام المعادلة (٧) أن نعيد كتابة المعادلات (١) كالتالى :

$$
\begin{aligned}
a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \dots + a_{1n} X_n + Y_1 &= X_1 \\
a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \dots + a_{2n} X_n + Y_2 &= X_2 \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \quad \cdot \quad \cdot \qquad (9) \\
a_{n1} X_1 + a_{n2} X_2 + \dots + a_{nn} + Y_n &= X_n
\end{aligned}
$$

الآن إذا عرفنا المتجهين التاليين :

$$
X^* = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n \end{bmatrix} \qquad\qquad Y^* = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_n \end{bmatrix}
$$

فإننا نستطيع أن نعيد كتابة المعادلات (٩) فى الصورة التالية :

$$(10) \qquad A^* X^* + Y^* = X^*$$

وبطرح $A^* X^*$ من الطرفين نحصل على المعادلة التالية :

$$(11) \qquad Y^* = X^* - A^* X^* = (I^* - A^*) X^*$$

حيث I^* هى مصفوفة الوحدة . ويطلق على المصفوفة $(I^* - A^*)$ مصفوفة ليونتيف . وهى عبارة عن مصفوفة يحتوى قطرها الرئيسى على قيم موجبة ، بينما تكون كل العناصر الأخرى فيها سالبة وذلك بحكم الافتراض (82) . أى أن -

$$(12)\qquad (I^{*}-A^{*})=\begin{bmatrix}(1-a_{11}) & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & (1-a_{22}) & \cdots & -a_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & (1-a_{nn})\end{bmatrix}$$

لآن بضرب طرفى (١١) فى مقلوب مصفوفة ليونتيف نحصل على المعادلة التالية :

$$(13)\qquad (I^{*}-A^{*})^{-1}\,Y^{*}=X^{*}$$

وبفضل هذه المعادلة فإنه لو كان عمود الطلب النهائى معلوماً ، وكانت مصفوفة التكنولوجيا معلومة أيضاً ، فإننا نستطيع حساب الإنتاج الكلى لكل قطاع من قطاعات الاقتصاد القومى . كذلك بفضل المعادلة (١٠) يمكن أن نحسب توزيع ناتج كل قطاع على مختلف القطاعات . وبفضل المعادلة (٢) يمكننا حساب القيمة المضافة فى كل قطاع . بالإضافة إلى ذلك فإننا نستطيع أن نتحقق من مدى واقعية أهداف الإنتاج التى يتطلبها عمود مستهدف للطلب النهائى ، وذلك إذا عرفنا الطاقة الإنتاجية القصوى لكل قطاع . وسوف يتضح لنا ذلك من المثال التالى .

٣٠٧ . استخدام جدول المدخلات والمخرجات :

افرض أن الاقتصاد مقسم إلى ٣ قطاعات هى الصناعة والزراعة والخدمات . ونرمز لها بالرموز I, A, S . افرض أن مصفوفة التكنولوجيا (بالجنيهات) هى :

$$
\begin{array}{c|ccc|}
 & I & A & S \\
\hline
I & 0.2 & 0.2 & 0.1 \\
A & 0.4 & 0.1 & 0.3 \\
S & 0.2 & 0.5 & 0.1 \\
\end{array}
$$

من الواضح أن هذه المصفوفة محققة للافتراضات التى سبق ذكرها ، حيث أن كل عناصرها موجبة وأقل من الواحد الصحيح ، ومجموع عناصر أى عمود أقل من الواحد الصحيح .

افرض أن الخطة الاقتصادية المقترحة للاقتصاد القومى تستهدف تحقيق قائمة الطلب النهائى التالية : ١٠٠ مليون جنيه منتجات صناعية ، ٢٠ مليون جنيه منتجات زراعية ، ٤٠ مليون جنيه خدمات . يمكننا أن نحسب الإنتاج الكلى لكل قطاع اللازم للوفاء بهذه القائمة باستخدام العلاقة :

$$\overset{*}{X} = (\overset{*}{I} - \overset{*}{A})^{-1}\, \overset{*}{Y}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.8 & -0.2 & -0.1 \\ -0.4 & 0.9 & -0.3 \\ -0.2 & -0.5 & 0.9 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 100 \\ 20 \\ 40 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.65 & 0.58 & 0.38 \\ 1.05 & 1.75 & 0.70 \\ 0.95 & 1.10 & 1.60 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 100 \\ 20 \\ 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 190 \\ 168 \\ 180 \end{bmatrix}$$

أى أنه للحصول على قائمة الطلب النهائى المذكورة ينبغى أن يكون الإنتاج

الـكلى للصناعة ١٩٠ مليون جنيه ، وللزراعة ١٦٨ مليون جنيه ، وللخدمات ١٨٠ مليون جنيه .

يمكننا أن نحسب كيفية توزيع منتجات كل قطاع على مختلف القطاعات أى حساب للتدفقات القطاعية كالتالى :

$$A^{*}X^{*}=\begin{bmatrix}0.2 & 0.2 & 0.1\\ 0.4 & 0.1 & 0.3\\ 0.2 & 0.5 & 0.1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}190\\ 168\\ 180\end{bmatrix}$$

١٩٠ ١٦٨ ١٨٠

$$=\begin{bmatrix}38+34+18\\ 77+17+54\\ 38+84+18\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}90\\ 148\\ 140\end{bmatrix}$$

أى الإنتاج الكلى لقطاع الصناعة والبالغ ١٩٠ مليون جنيه يستخدم منه ما قيمته ٣٨ مليون جنيه كمدخلات لقطاع الصناعة ، ٣٤ مليون جنيه كمدخلات لقطاع الزراعة ، ١٨ مليون جنيه كمدخلات لقطاع الخدمات ، والـ ١٠٠ مليون جنيه الباقية عبارة عن نصيب الطلب النهائى المحدد مسبقاً . وبالمثل يمكن تفسير معنى بقية الصفوف .

من هذه المعلومات نستطيع أن نرسم جدول المدخلات والمخرجات كالتالى :

٣٨ = ٢/١٠ × ١٩٠	٣٣,٦ = ٢/١٠ × ١٦٨
٧٦ = ٤/١٠ × ١٩٠	١٦,٨ = ١/١٠ × ١٦٨
٣٨ = ٢/١٠ × ١٩٠	٨٤ = ٥/١٠ × ١٦٨

Sector	I	A	C	Y	X
I	38	34	18	100	190
A	77	17	54	20	168
C	38	84	18	40	180
V	37	33	90	160	
X	190	168	180	—	538

وقد استطعنا حساب القيمة المضافة فى كل قطاع باستخدام المعادلة (٢) ، أى بحساب الفرق بين الإنتاج الكلى لكل قطاع وقيمة مدخلاته الكلية .

افرض أنه من المعروف أن الطاقة الإنتاجية القصوى هى ١٨٠ مليون جنيه للصناعة ، و١٧٠ مليون جنيه للزراعة و ١٨٥ مليون جنيه للخدمات . فى ضوء هذه المعلومات نستطيع أن نقول أن الخطة المقترحة هى خطة غير واقعية لأنها تتوقع من قطاع الصناعة إنتاجاً كلياً أكثر مما يستطيع تحقيقه لو عمل بأقصى طاقته .

افرض أن واضع الخطة قرر فى ضوء المعلومات السابقة تخفيض الطلب النهائى على منتجات الصناعة بمقدار ١٠ مليون جنيه ، مع ثبات الطلب النهائى للقطاعين الآخرين . فى هذه الحالة نستطيع أن نحسب التغير فى الإنتاج الكلى للقطاعات المختلفة كالتالى :

من (١٢) نستطيع أن نكتب معادلة جديدة هى :

$$\Delta X^{*} = I^{*} - A^{*})^{-1} \cdot \Delta Y^{*}$$

حيث ΔX^{*} هى التغير فى عمود الإنتاج الكلى المترتب على تغير عمود الطلب النهائى بـ ΔY^{*} . إذن التغير فى الإنتاج الكلى لكل قطاع هو :

$$\Delta X^{*} = \begin{bmatrix} 1\ 65 & 0\ 58 & 0.38 \\ 1\ 05 & 1.75 & 0.70 \\ 0.95 & 1.10 & 1.60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16\ 5 \\ -10.5 \\ -\ 9.5 \end{bmatrix}$$

أى أن تخفيض الطلب النهائى لقطاع الصناعة بما قيمته ١٠ مليون جنيه يترتب عليه تخفيض الإنتاج الكلى لهذا القطاع بما قيمته ١٦٫٥ مليون جنيه ، وكذلك تخفيض الإنتاج الكلى لقطاع الزراعة بما قيمته ١٠٫٥ مليون جنيه ، ولقطاع الخدمات بما قيمته ٩٫٥ مليون جنيه .

طبعاً باستخدام المعادلة السابقة من الممكن أن نحسب التغير فى عمود الطلب النهائى المترتب على تخفيض الإنتاج الكلى لقطاع الصناعة بما قيمته ١٠ مليون جنيه .

$$\Delta \overset{*}{Y} = (\overset{*}{I} - \overset{*}{A})\, \Delta \overset{*}{X}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.8 & -0.2 & -0.1 \\ -0.4 & 0.9 & -0.3 \\ -0.2 & -0.5 & 0.9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

أى أن الطلب النهائى على منتجات الصناعة ينخفض بما قيمته ٨ مليون جنيه ، وحيث أن الإنتاج الكلى لقطاع الصناعة قد انخفض ، فإنه يترتب على ذلك انخفاض فى مستلزمات الإنتاج من القطاعات الأخرى لهذا القطاع . وحيث أننا افترضنا ثبات الإنتاج الكلى بالزراعة والخدمات ، فإن المتاح للطلب النهائى من هذين القطاعين يزداد بما قيمته ٤ مليون جنيه منتجات زراعية ، ٢ مليون جنيه خدمات .

٧ . ٤ . تمارين :

تمرين (١) : إذا كانت مصفوفة المعاملات الفنية للإنتاج هى A^*، فاحسب متجه الإنتاج الكلى X^* الذى يتناسب مع عمود الطلب النهائى Y_1^* ، ثم احسب التغير فى الإنتاج الكلى لكل قطاع الذى يترتب على تغيير عمود الطلب النهائى إلى Y_2^*، حيث :

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 1/8 & 1/4 \\ 1/2 & 1/8 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{bmatrix} \quad Y_1^* = \begin{bmatrix} 10 \\ 30 \\ 20 \end{bmatrix} \quad Y_2^* = \begin{bmatrix} 20 \\ 70 \\ 50 \end{bmatrix}$$

تمرين (٢) : إذا علمت أن إجمالى الناتج القومى فى بلد ما فى سنة معينة كان ١٤٠٠ مليون جنيه موزعة كالتالى ٥٠٠ مليون جنيه إنتاج صناعى ، ٦٠٠ مليون جنيه إنتاج زراعى ، ٣٠٠ مليون جنيه خدمات ، وأن مصفوفة المعاملات الفنية للانتاج هى :

$$\begin{array}{r} \text{صناعة} \\ \text{زراعة} \\ \text{خدمات} \end{array} \begin{bmatrix} 0.30 & 0.20 & 0.20 \\ 0.30 & 0.35 & 0.10 \\ 0.20 & 0.10 & 0.20 \end{bmatrix}$$

فالمطلوب منك إعداد ميزان التشابك القطاعى للاقتصاد القومى .

تمرين (٣) : ناقش مدى واقعية خطة اقتصادية تستهدف تحقيق طلب

تهاكى قدره ٩٥ مليون جنيه موزع كالتالى : ٦٠ مليون جنيه صناعة ، ٢٠ مليون جنيه زراعة ، ١٥ مليون جنيه خدمات ، مع العلم بأن مصفوفة التكنولوجيا هى :

$$\begin{array}{cc} \text{زراعة} & \multirow{3}{*}{} \\ \text{صناعة} & \\ \text{خدمات} & \end{array} \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.03 \\ 0.1 & 0.05 & 0.1 \end{bmatrix}$$

وأن الطاقة الإنتاجية القصوى هى ١٠ مليون جنيه للصناعة ، ٣٥ مليون جنيه للزراعة ، ٣٠ مليون جنيه للخدمات .

الفصل الثامن

حل مشكلات الأمثلية بواسطة البرمجة الخطية

البرمجة، خطية كانت أو غير خطية(١)، هي أسلوب رياضي يساعد الاقتصاديين وغيرهم على حل ما يصادفهم من مشكلات الأمثلية ، أي تلك المشكلات التي يراد فيها توزيع قدر محدد من الموارد المختلفة على عدد محدد من الاستخدامات البديلة ، توزيعاً يجعل دالة هدف معينة أكبر أو أقل ما يمكن . ويرجع الفضل في التوصل إلى أسلوب البرمجة إلى عالمي الرياضيات ل . كانتورفتش الروسي ، وهو أول من صاغ المشكلة ، وج . دانزج الأمريكي ، وهو أول من توصل إلى طريقة عامة وناجحة لحل المشكلة. سوف نقتصر في هذا الفصل على إعطاء فكرة سريعة عن معنى البرمجة ولماذا نشأت الحاجة إليها بالرغم من وجود أساليب أخرى معروفة لحل مشكلات الأمثلية ، كما سوف نوضح طريقة الحل هندسياً وجبرياً ، في حالة البرامج الخطية فقط .

* ٨ . ١ . معنى البرمجة وضرورتها :

تختص البرمجة بتحديد الحلول المثلى للمشكلات ، وهي لذلك مناسبة لتحليل السلوك الرشيد ، سواء في مجالات الإنتاج أو الاستهلاك أو التوزيع أو النقل أو غير ذلك من المجالات الاقتصادية . بل أن تطوير أسلوب البرمجة نفسه جاء

---

(١) البرمجة الخطية = Linear Programming ،
البرمجة غير الخطية = Non-linear Programming.

تلبية لحاجة قطاع غير اقتصادى أساساً ، وهو القطاع الحربى (تخطيط الأنشطة المختلفة للقوات الجوية الأمريكية على يد دانزج فى ١٩٤٧) .

والخاصية المميزة لشاكل البرمجة هى أنه يراد تعظيم دالة هدف معينة أو تدنيتها فى ظل قيد أو أكثر على المتغيرات الداخلة فى المشكلة ، بحيث تأخذ القيود شكل متباينات(١) . إذا أخذنا مشكلة منتج ينتج سلعتين C_1 ، C_2 باستخدام عنصرين من عناصر الإنتاج هما R_1 ، R_2 ، فمن الواضح أنه يمكن صياغة هذه المشكلة على النحو التالى : إيجاد الكمية الواجب إنتاجها من كل من السلعتين ، ولتكن y_1 من السلعة C_1 ، y_2 من السلعة C_2 بحيث يتحقق للمنتج أكبر ربح ممكن ، وبحيث لا تزيد الكميات المستخدمة من كل عنصر إنتاجى عن قدر معين يفترض أنه أكبر كمية متاحة للمنتج . فإذ رمزنا للربح بالرمز p ، والربح عن كل وحدة مباعة من C_1 هو ٢ جنيه ، والربح عن كل وحدة مباعة من C_2 هو ٣ جنيه . وإذا افترضنا أن دالة الهدف خطية ، فإنه يمكن القول بأن هدف المنتج هو إيجاد y_1 ، y_2 اللذان يعظمان :

$$p = 2\,y_1 + 3\,y_2 \qquad (1)$$

بحيث لا تزيد الكمية الكلية المطلوبة من العنصر R_1 عن الحد الأقصى المتاح منه والذى سنفترض أنه ٧ وحدات ، وبحيث لا تزيد الكمية الكلية المطلوبة من العنصر R_2 عن أقصى كمية متاحة منه للمنتج والتى نفترض أنها ١٠ وحدات .

إذا افترضنا بالإضافة إلى ما تقدم أن إنتاج كل وحدة من C_1 يتطلب ٣ وحدات من العنصر R_1 ، ٢ وحدة من العنصر R_2 ، وأن إنتاج كل وحدة من C_2 .

---

(١) متباينة = Inequality

يتطلب ٢ وحدة من العنصر R_1 ، ٤ وحدة من العنصر R_2 ، فإنه يكون لدينا القيدين التاليين على عملية تعظيم دالة الربح (١) :

$$(2) \quad 3\,y_1 + 2\,y_2 \leqslant 7$$

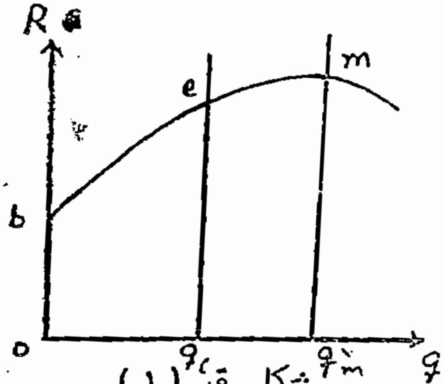
$$(3) \quad 2\,y_1 + 4\,y_2 \leqslant 10$$

بالإضافة إلى هذين القيدين ، يفترض عادة خضوع عملية التعظيم لقيد ثالث (٤) وهو أنه غير مسموح للمتغيرين y_1 ، y_2 أن يأخذا قيماً سالبة ، حيث أنه لا معنى لكون الإنتاج سالب :

$$(4) \quad y_1 , y_2 > 0$$

من الواضح في هذا المثال الذي يبين كيفية صياغة مشكلة المنتج في صورة برنامج (خطى) ، أن الشروط التي ينبغي أن تخضع لها عملية التعظيم (أو التدنية) الهدف تأخذ صورة متباينات وليست متساويات . وهنا تتضح ضرورة أسلوب البرمجة . فلو كانت المشكلة هي مجرد تعظيم أو تدنية دالة هدف في ظل عدد من المعادلات أو الشروط الدقيقة (المتساويات) لكان بالإمكان استخدام حساب التفاضل (التعظيم المشروط للدوال في ظل عدد من القيود) . ولكن المشكلة هي تعظيم (أو تدنية) دالة هدف في ظل عدد من المتباينات أو الشروط غير الدقيقة ، وهذا ما لا يصلح حساب التفاضل أو التحليل الحدى لإنجازه .

ويمكن توضيح لماذا يفشل التحليل الحدى في وجود قيود على هيئة متباينات باستخدام شكل (١) والذى يمثل فيه المنحنى bem دالة الإيراد الكلي ، ويقاس فيه الإنتاج على المحور الأفقي ، والإيراد الكلي على المحور الرأسي . الآن من التحليل الحدى أفضل إنتاج ممكن هو oq_m ، حيث يتحقق أكبر ربح ممكن للمنتج عند النقطة m ، وهنا يكون الربح الحدى (ميل منحنى الإيراد الكلي)



شكل رقم (١)

مساوياً للصفر . (أو يتعادل الإيراد الحدى مع التكلفة الحدية). لكن أفرض أن هناك قيد على الموارد المتاحة بحيث أن كمية الإنتاج لا يمكن أن تزيد عن oq_e . فى هذه الحالة تصبح المشكلة هى اكتشاف ما إذا كانت نقطة أقصى ربح ممكن هى C أو أى نقطة على يسارها . ولا نستطيع استخدام الشرط الضرورى للتعظيم فى هذه الحالة (الربح الحدى = ميل منحنى الإيراد الكلى = صفر ، أو الإيراد الحدى = التكاليف الحدية) ، لأنه عند مستوى الإنتاج oq_e لا يمكن إنطباق مثل هذا الشرط .

خلاصة ما تقدم هو أن شكل القيود التى تخضع لها عملية تعظيم أو تدنية دالة الهدف ، أى كونها متباينات وليست متساويات ، هو أهم ما يميز مشكلات البرمجة ، وهو ما استدعى أصلا إبتداع أسلوب البرمجة ، حيث يفشل التحليل الحدى أو حساب التفاضل فى معالجة مثل هذه المشكلات .

٨ . ٢ . البرمجة الخطية وتصوير فكرة الحل هندسياً :

يمكن تعريف البرمجة الخطية بأنها وسيلة التحليل للمشكلات التى يراد فيها

تعظيم أو تدنية دالة خطية لعدد من المتغيرات (دالة هدف) حيث تكون هذه المتغيرات خاضعة لعدد من القيود التى تأخذ صورة متباينات خطية .

إذن أهم ما يميز البرمجة الخطية هو كون دالة الهدف دالة خطية والقيود متباينات خطية أيضاً ، بمعنى أن الدالة أو المتباينات لا تشتمل على متغيرات مرفوعة لأس أكبر أو أقل من الواحد الصحيح ، أو على تحويلات للمتغيرات كلوغاريتماتها أو أى تحويلات أعقد من ذلك . والمثال الذى ضربناه فى ١٠٨ - أعلاه يمثل مشكلة برمجة خطية لهذا السبب . والواقع أن فرض الخطية له مدلول اقتصادى ، وليس مجرد خاصية رياضية خالصة . فى مثال مشكلة المنتج ينطوى هذا الفرض على ثبات وفورات الحجم أو العائد للسعة ، أو ثبات معاملات الإنتاج (أو نسب المدخلات)(١) ، وكذلك على ثبات أسعار المخرجات والمدخلات . فالربح المتحقق من إنتاج أية سلعة يتناسب دائماً مع مستوى إنتاجها (أى مع عدد الوحدات المنتجة) ولا يتأثر بمستوى إنتاج أية سلعة أخرى تنتج . كذلك فإن مستلزمات إنتاج الوحدة من أى سلعة من عناصر الإنتاج المختلفة ثابتة دائماً ، بمعنى أنها لا تتوقف على مستوى الإنتاج . ومن الواضح أن هذه الافتراضات إن صحت فى بعض الحالات ، فإنها بالتأكيد ليست صحيحة أو قابلة للانطباق فى كل الحالات . فهناك ظروف عديدة قد يكون منطقياً فيها افتراض تزايد الغلة بالنسبة للحجم أو تناقصها ، وكذلك افتراض تغير مستوى أسعار المدخلات والمخرجات . فى مثل هذه الظروف لابد وأن نتخلى عن فرض الخطية . ولكن ليس معنى هذا رفض أسلوب البرمجة برمته لأنه يعنى ضرورة استبدال البرمجة الخطية بالبرمجة غير الخطية التى تنطوى على على قدر أكبر من التعقيد .

---

(١) نسب المدخلات = Input proportions

ولحل مشكلات البرمجة ، خطية كانت أو غير خطية ، فإن الأسلوب الذى يتبع هو أسلوب التقريب المتتابع[1] . وهذه فى الواقع ليست أكثر من تسمية مهذبة لطريقة التجربة والخطأ . كل ما فى الأمر أن التجربة (والخطأ) لا تتم على غير هدى وانما يحكم التجارب المتتابعة ضوابط وروابط محددة . باختصار طريقة التقريب المتتابع هى طريقة تجربة وخطأ منتظمة[2] بمعنى أنها تتسم على الأقل بالسمات التالية :

(ا) أن الطريقة تتضمن قاعدة يتحدد انا بمقتضاها عند نهاية كل خطوة أو تجربة ، وفى ضوء نتائجها ، الخطوة أو التجربة التالية .

(ب) أن الطريقة مصممة بحيث نضمن بمقتضاها أن كل حل يقربنا أكثر من الحل السابق عليه إلى الحل الصحيح .

(حـ) أن الطريقة مصممة بحيث تؤدى إلى الحصول على الحل الصحيح فى عدد محدود[3] من الخطوات بالنسبة لطائفة كبيرة من المشكلات ، أو بحيث تمكننا من حساب الخطأ المحتمل حدوثه فى الحل فى غير ذلك من الحالات .

فى حالة البرمجة الخطية . هناك أكثر من طريقة للتقريب المتتابع يمكن استخدامها فى حل المشكلة . ولكننا سنقتصر هنا على الطريقة الأكثر شيوعاً عن غيرها وهى طريقة السمبلكس[4] . وقبل أن ندخل فى تفاصيل هذه الطريقة سوف نقدم

---

(١) أسلوب التقريب المتتابع = Interative procedure

(٢) منتظمة = systematic

(٣) عدد محدود = A finite number

(٤) طريقة السمبلكس = Simplex method

حلا إهندسياً لمشكلة البرمجة الخطية يتضح لنا من خلال دراسته جوهر الحل بطريقة السمبلكس .

دعنا نعد لمشكلة المنتج التى قدمناها فى صورة مشكلة برمجة خطية فى القسم السابق كالتالى* :

أوجد y_1 ، y_2 اللذان يجعلان دالة الهدف :

$$(1) \qquad p = 2\,y_1 + 3\,y_2$$

أكبر ما يمكن ويحققان فى الوقت نفسه القيود التالية :

$$(2) \qquad 3\,y_1 + 2\,y_2 \leqslant 7$$

$$(3) \qquad 2\,y_1 + 4\,y_2 \leqslant 10$$

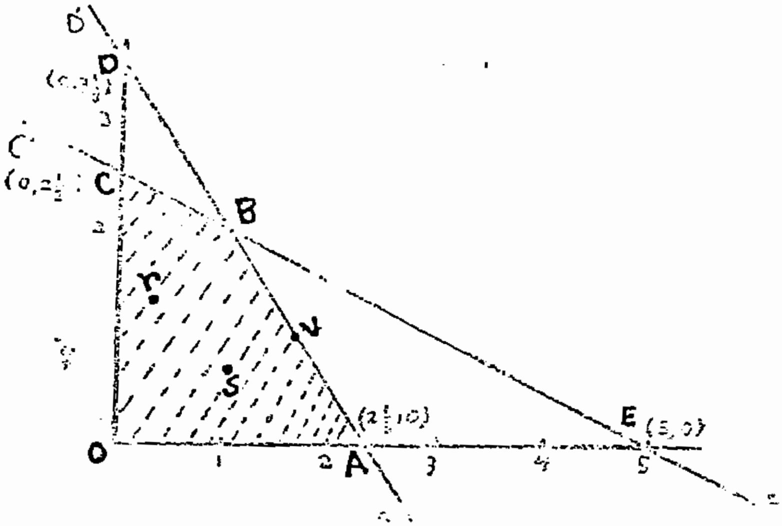
$$(4) \qquad y_1 , y_2 \geqslant 0$$

ارسم خطاً يمثل القيد (2) فى حالة التساوى ، وليكن الخط $A^1 L^1$ فى شكل (٢) . أى نقطة على هذا الخط تمثل الحالة التى تستخدم فيها الكمية المتاحة من العنصر R_1 بالكامل ، وهى نقط محققة الشرط (٢) . لكن النقط الواقعة أسفل هذا الخط وإلى يساره ، مثل q ، r ، s تحقق أيضاً المتباينة (٢) ، لأنها تتضمن قيماً للمتغيرين y_1 , y_2 ، أى كميات إنتاج لا تستوعب كل المتاح من عنصر الإنتاج R_1 . وهكذا فإن المتباينة مثل (٢) لا تمثل بخط كما فى حالة المتساوية ، وإنما تمثل بمنطقة أو حيز(١) وهو الحيز أسفل الخط $A^1 D^1$. بالمثل نعبر عن المتباينة

---

* هذا المثال مستعار من كتاب B. Singh, Operations Research, pp. 104.

(١) منطقة أو حيز = Region



شكل (٢)

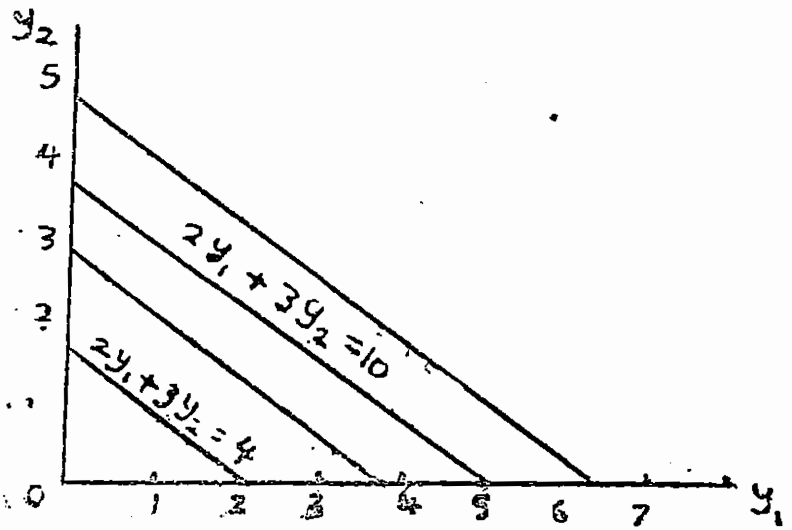
(٣) هندسياً ، بالحيز أسفل الخط E' C' . وحيث أن الكميات y_1 و y_2 ينبغى أن تكون محققة للقيدين (٢) ، (٣) سوياً ، فإن معنى ذلك أن النقط المسموح بها هى النقط الواقعة فى الحيز أسفل الخط C' B A' . ولكن y_1 ، y_2 ينبغى أيضاً أن تحقق الشرط (٤) فى نفس الوقت ، أى أنها ينبغى ألا تكون سالبة . وهذا القيد يحدد الحيز المسموح به إلى OA BC ، أى المنطقة المظللة فقط والتى يطلق عليها الحيز المباح أو حيز الإمكان(١) ، وذلك لأن كل النقط الواقعة فى هذا الحيز تمثل توليفات من السلعتين لا تتعارض مع القيود المفترضة : أى أن الموارد المتاحة تجعل من الممكن إنتاج مثل هذه التوليفات . ولهذا السبب فإن أى نقطة فى هذا الحيز مثل s أو r أو v تعتبر حلا ممكناً(٢) لمشكلة البرمجة محل البحث .

---

(١) الحيز المباح أو حيز الإمكان = Feasible region

(٢) حل ممكن = Feasible solution

دالة الهدف عبارة عن دالة خطية لكل من y_1 ، y_2 . وحيث أن الربح p غير معلوم ، ويمكن أن يأخذ قيماً مختلفة ، فإنه يكون لدينا مجموعة من الخطوط المتوازية كل منها عبارة عن المحل الهندسي لقيم مختلفة من y_1 ، y_2 تعطى قيمة معينة للمتغير ، كما فى شكل (٣) .



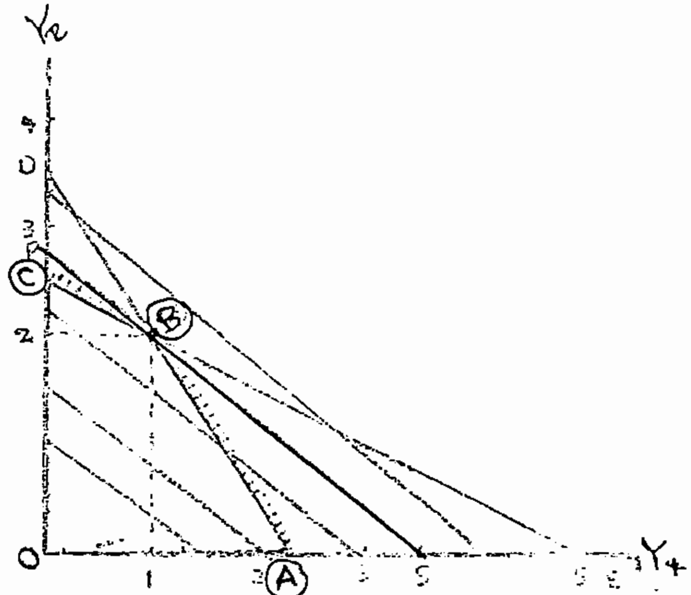
شكل (٣)

ويمكن أن نطلق على هذه الخطوط خطوط الربح المتساوى[1] ، وهى — كما هو واضح — تشبه خطوط الميزانية والتكاليف السابق لنا استخدامها فى نظرية سلوك المستهلك والمنتج .

الآن يمكننا أن نعبر عن مشكلة البرمجة موضع البحث فى رسم واحد وذلك بإدماج الشكلين (٢) ، (٣) سوياً فى شكل واحد ، وهو شكل (٤) . وحيث

(١) خطوط الربح المتساوى = Iso profit lines .

أن الهدف هو اختيار تلك النقطة من الحيز المباح التى تحقق أكبر أرباح ممكنة . فمن الواضح أن تلك النقطة لابد وأن تقع على أبعد خط ربح متساوى عند نقطة الأصل ، ويمر فى نفس الوقت بنقطة داخل الحيز المباح أو على حدوده ، وهى النقطة B الواقعة على الخط PS والتى تمثل إحدى النقط الركنية(1) للحيز المباح . وذلك لأن أى نقطة أسفل الخط PS تعطى ربحاً أقل . بينما أن أى نقطة أعلى ذلك الخط تعطى ربحاً أكبر ولكنها تقع فى الحيز المحظور .



شكل (٦)

لاحظ أنه نظراً لأنه كلما ابتعد خط الربح المتساوى عند نقطة الأصل كلما زاد الربح ، فإن النقطة المثلى تكون دائماً واقعة على حدود الحيز المباح . أى أنه يمكن القول بأن النقطة المثلى تكون دائماً نقطة ركنية — إلا فى الحالة التى يكون فيها

(١) نقطة ركنية = Corner point

خط الربح المتساوى موازياً لأحد حدود الحيز المباح مثل B A ، فى هذه الحالة تكون كل النقط الواقعة على ذلك الحد بما فيها النقط الركنية A , B نقطاً مثلى . وهذه النتيجة مترتبة فى الواقع على فرض الخطية وما يعنيه من أن إنتاج أى سلعة يمكن أن يتزايد دون أى تناقص فى عائد السعة ودون أى أثر غير موات على أسعار المدخلات أو المخرجات إلى أن نصطدم بحد ما من حدود الطاقة القصوى ، أى إلى أن نصل إلى حد ما من حدود الحيز المباح .

إذن فى أى برنامج خطى ، هناك دائماً نقطة مثلى واحدة على الأقل ، وهى تقع على أحد أركان الحيز المباح . وهذه نتيجة هامة ويطلق عليها « النظرية الأساسية للبرمجة الخطية(١) » . وتكمن أهميتها فى أنه فى بحثنا عن الحل الأمثل لأية مشكلة برمجة خطية ، نستطيع أن نتجاهل العدد الكبير من النقط الواقعة داخل الحيز المباح ونقصر مقارنات الربحية على النقط الركنية لهذا الحيز . ولا يخفى ما فى هذا من اقتصاد كبير فى العمل الحسابى ، خاصة فى مشكلات البرمجة الكبيرة ، أى التى تتضمن عدداً ضخماً من المتغيرات والقيود .

من العرض السابق يتضح أن جوهر طريقة حل مشكلة البرمجة الخطية يتلخص فى الخطوتين التاليتين :

(ا) تحديد الحيز المباح ، أى ذلك الحيز الذى يضم جميع النقط المحققة للقيود . وهو الشكل OA BC فى المثال السابق .

(ب) حساب قيمة دالة الربح عند كل نقطة من النقط الركنية للحيز المباح . فى

---

(١) النظرية الأساسية للبرمجة الخطية =

The basic theorem of linear programming .

المثال السابق ، إذا ابتدأنا بالركن O حيث $y_1 = y_2 = 0$ نجد أن $p = 0$ ، وعليه ينبغى أن ننظر فى قيمة دالة الهدف عند ركن آخر ، وليكن A عند هذا الركن نجد أن $y_1 = 2\frac{1}{3}$, $y_2 = 0$ والربح $p = 2\left(2\frac{1}{3}\right) + 3\,(0) = 4\frac{2}{3}$ وحيث أن الربح قد زاد عند هذه النقطة الركنية ، فإنه يتعين علينا أن ندرس احتمال زيادته أكثر ، بتقييم دالة الهدف عند نقطة ركنية أخرى ولتكن B . عند هذه النقطة نجد أن $y_1 = 1$, $y_2 = 2$, $p = 8$. وبما أن الربح قد زاد ، فعلينا أن نأخذ النقطة الركنية الأخرى وهى C حيث $y_1 = 2\frac{1}{2}$, $y_2 = 0$ ونحسب قيمة دالة الهدف عندها وهى $p = 7\frac{1}{2}$. حيث أن الربح قد أخذ فى الانخفاض عند هذه النقطة ، فإن معنى ذلك أن النقطة B هى نقطة أقصى ربح ممكن ، أى أنها النقطة المثلى .

وهاتين الخطوتين يشكلان فى الواقع جوهر الطريقة الجبرية للحل ، وهى طريقة السمبلكس والتى نشرحها فى القسم التالى .

٣٠٨ . حل مشكلات البرمجة الخطية بطريقة السمبلكس :

طريقة السمبلكس هى أكثر الطرق شيوعاً لحل مشكلات البرمجة الخطية . وهى كما سبقت الإشارة طريقة من طرق التقريب المتتابع ، أو التجربة (والخطأ) المنتظمة . وسوف نستعين بمشكلة برمجة بسيطة ومحددة فى شرح هذه الطريقة* . افرض أن المطلوب هو إيجاد كميات الإنتاج X_1 , X_2 التى تعظم دالة الهدف :

$$Z = 2.5\,X_1 + 2\,X_2 \qquad (5)$$

* هذا المثال مستمد من كتاب :

W. B[illegible]umol, E[illegible]onomic Theory and Operations Analysis, pp. 87.

فى ظل القيود التالية على عنصرى الإنتاج R_1 , R_2 :

$$(6) \qquad X_1 + 2X_2 \leqslant 8000$$

$$(7) \qquad 3X_1 + 2X_2 \leqslant 9000$$

$$(8) \qquad X_1 \ , \ X_2 \geqslant 0$$

ويطلق على القيدين (٦) ، (٧) القيود الهيكلية أو العادية ، تمييزاً لها عن قيد عدم السالبية (٨) .

لحل هذه المشكلة بطريقة السمبلكس ، علينا أولا أن نعيد صياغتها بطريقة مختلفة بعض الشيء ، وذلك بإدخال متغيرين إضافيين ، وليكونا S_2 , S_1 يطلق عليهما المتغيرات الخاملة[1] ، تمييزاً لهما عن المتغيرات الأصلية X_1 , X_2 والذى يطلق عليهما أحيانا المتغيرات العادية أو الهيكلية[2] . والغرض من استخدام هذه المتغيرات الخاملة هو تحويل المتباينات (٦) ، (٧) إلى متساويات :

$$(6') \qquad X_1 + 2X_2 + S_1 = 8000$$

$$(7') \qquad 3X_1 + 2X_2 + S_2 = 9000$$

$$(8') \qquad X_1 \ , \ X_2 \ , \ S_1 \ , \ S_2 \geqslant 0$$

بعبارة أخرى ، حيث أن هذه القيود قيوداً تعبر عن الكميات القصوى من عنصرى الإنتاج R_1 , R_2 فإن S_1 يمثل كمية R_1 التى تظل عاطلة ، أى لا تستخدم

---

(١) متغيرات خاملة = Disposal or Slack Variables

(٢) متغيرات عادية أو هيكلية = Ordinary or structural variables

فى الإنتاج . وبالمثل S_2 تمثل كمية R_2 التى تبقى عاطلة ولا تستخدم كمدخل فى العملية الإنتاجية .

حيث أن طريقة الحل تعتمد على التقريب المتتابع ، أى على التوصل إلى حلول تقترب أكثر فأكثر من الحل الأمثل ، فإن معنى ذلك أنه أثناء بحثنا عن الحل الأمثل سنصادف حلولا عديدة للمشكلة . ويهمنا الآن أن نميز بين نوعين من الحلول :

(أ) حل ممكن : وهو عبارة عن أى مجموعة من قيم المتغيرات (X_1 , X_2 , S_1 , S_2) التى تحقق القيود العادية (٦) و (٧) وكذلك شرط عدم السلبية (٨) .

(ب) حل أساسى[1] ، وهو عبارة عن أى مجموعة من قيم المتغيرات (X_1 , X_2 , S_1 , S_2) التى يكون فيها عدد المتغيرات ذات القيم غير الصفرية مساوياً لعدد القيود العادية (٦) و (٧) .

فالحل $(X_1 = 0 , X_2 = 0 , S_1 = 8000 , S_2 = 9000)$ هو حل أساسى لأن عدد المتغيرات غير الصفرية فيه (S_1 , S_2) مساو لعدد القيود العادية (٦ ، ٧) .

لكن الحل $(X_1 = 2000 , X_2 = 0 , S_1 = 6000 , S_2 = 3000)$ هو حل غير أساسى لأن عدد المتغيرات غير الصفرية فيه (٣) أكبر من عدد القيود العادية (٢) بواحد .

لاحظ أيضاً أن الحل الأول هو حل ممكن وذلك لأنه فضلا عن تحقق القيود

---

(١) حل أساسى = …sic Solution

العادية (٦َ ، ٧َ) فإن قيد عدم السلبية (٨َ) متحقق أيضاً . إذن هذا الحل يمثل حلا ممكناً وأساسياً[١]. أما الحل الثانى فهو ممكن ولكنه غير أساسى . باستخدام هذه التعاريف ، يمكن إعادة صياغة النتيجة التى أسميناها فى القسم السابق بـ النظرية الأساسية للبرمجة الخطية ، كالتالى : يمكننا إيجاد الحل الامثل لأية مشكلة برمجة خطية بالاقتصار على دراسة الحلول الأساسية . ذلك لأنه يمكن إثبات أن :

(أ) هناك حل أمثل دائماً بين النقط الركنية للحيز المباح .

(ب) أى نقطة ركنية تعبر فى الواقع عن حل أساسى حيث يتساوى عدد المتغيرات غير الصفرية مع عدد القيود العادية للمشكلة .

لتسهيل عرض طريقة السمبلكس ، سوف نعيد كتابة العلاقات الممثلة للمشكلة على النحو التالى :

أوجد X_1 ، X_2 اللذان يجعلان دالة الهدف :

$$(9) \qquad Z = 0 + 2.5\,X_1 + 2\,X_2$$

نهاية عظمى بشرط تحقق القيود التالية :

$$(10) \qquad S_1 = 8000 - X_1 - 2\,X_2$$

$$(11) \qquad S_2 = 9000 - 3\,X_1 - 2\,X_2$$

$$(12) \qquad X_1\,,\,X_2\,,\,S_1\,,\,S_2 \geqslant 0$$

تتلخص طريقة السمبلكس فى البدء بأى حل أساسى وحساب قيمة دالة الهدف

---

(١) حل ممكن وأساسى = Basic feasible solution

عنده . وفى حالات كثيرة ، يمكن الحصول على حل أساسى ، بإعطاء قيم صفرية لكل المتغيرات العادية (X_1 , X_2) ، وإعطاء المتغيرات الخاملة (S_1 , S_2) القيم القصوى . فالحل $X_1 , X_2 = 0$, $S_1 = 8000$, $S_2 = 9000$ هو حل ممكن وأساسى كما سبقت الإشارة إلى ذلك . ومعنى هذا الحل هو أن تظل جميع الموارد معطلة ، وأن يتوقف المنتج عن الإنتاج . ومن الواضح أن مثل هذا الحل عادة بعيد تماماً عن الامثلية ولكننا نبدأ به بالرغم من ذلك لسهولة التعرف عليه .

بعد ذلك ننتقل إلى حل أساسى آخر ، بشرط أن يكون أيضاً حلا ممكناً ، ونقارن قيمة دالة الهدف عنده بقيمتها السابقة ، فإذا كانت هذه القيمة زادت ننتقل إلى حل أساسى جديد ، ، بشرط أن يكون أيضاً حلا ممكناً . وهكذا نستمر فى الإنتقال من حل أساسى إلى حل أساسى آخر حتى نصل إلى الحل الأمثل . ولكن كيف نعرف أثناء إنتقالنا من حل أساسى إلى حل أساسى آخر ، إذا كان ذلك الحل ممكناً ، ومتى نعرف أننا وصلنا إلى حل أمثل ؟ هناك قاعدتين يمكن أن نستعين بهما فى هذا الصدد وهما قاعدة الإمكانية وقاعدة الأمثلية[1] :

(ا) قاعدة الإمكانية : لو كانت الحدود المطلقة (الثوابت الاولى) للقيود العادية (١٠ ، ١١) غير سالبة ، فإن الحل الأساسى يكون حلا ممكناً . لان مثل هذا الحل يحقق كل القيود (١٠ ، ١١ ، ١٢) المفروضة على تعظيم دالة الهدف .

(ب) قاعدة الأمثلية : الحل الأساسى يكون حلا أمثلا فقط فى الحالة التى لا يكون فيها أياً من معاملات دالة الهدف المصاحبة لهذا الحل موجباً . وسوف

---

(١) قاعدة الإمكانية = Feasibility rule
قاعدة الأمثلية = Optim. , rule

يتضح لنا مغزى هذه القاعدة أثناء عرض حل مشكلة البرمجة التى اتخذناها كمثال .

للحصول على حل للمشكلة التى وضعناها فى الصيغة (٩) — (١٢) ، نكتب مصفوفة المعاملات المناظرة لهذه الصيغة كالتالى :

(13)

	Col (1)	X_1	X_2
Z	0	2.5	2
S_1	8000	-1	-2
S_2	9000	$\boxed{-3}$	-2

أول حل أساسى نبدأ به هو الحل التالى :

$$(X_1 = 0 \; ; \; X_2 = 0 \; ; \; S_1 = 8000 \; ; \; S_2 = 9000)$$

لاحظ أن المتغيرات الصفرية (X_1 , X_2) تظهر كأعمدة بينما أن المتغيرات الموجبة تظهر كصفوف .

الآن علينا أن نصل إلى حل أساسى ثان ومصفوفة مناظرة للمعاملات ، وذلك بإعطاء قيمة موجبة لواحد من المتغيرات التى أخذت قيمة صفرية فى الحل الأساسى الأول ، وإعطاء قيمة صفرية لواحد من المتغيرات غير الصفرية السابقة . بعبارة أخرى يبادل واحد من المتغيرات التى تظهر على رؤوس الأعمدة وليكن X_1 ، مكانه مع أحد المتغيرات التى تظهر فى الصفوف ، وليكن S_2 . وحيث أن العنصر المشترك بين هذين المتغيرين فى المصفوفة (١٣) هو العنصر $\boxed{-3}$ الذى وضعنا حوله مربعاً ، فإننا نقول أننا نرتكز على هذا العنصر أو نعتبره نقطة ارتكاز أو

مرتكز (١) ، [redacted] ؟

القاعدة التى نختار المرتكز وفقاً لها يمكن صياغتها كما يلى :

١ — يختار المرتكز من العمود الذى يوجد فى قمته أكبر عنصر موجب ، وذلك بالمقارنة مع قمم باقى الأعمدة (ما عدا العمود الأول) . ومن الواضح أن عمود X_1 هو الذى تتحقق فيه هذه الخاصية . والحكمة فى هذا الاختيار هى أننا عندما نختار مثل هذا العمود ، فإننا نختاره لإدخاله كمتغير غير صفرى فى الحل الأساسى التالى . وحيث أن المعامل ٢,٥ (الذى يوجد فى قمة هذا العمود) هو معامل X_1 فى دالة الهدف أى الربح الحدى لـ X_1 ، فإن معنى ذلك أننا نقرر إدخال ذلك المتغير X_1 الذى يحقق أكبر ربح حدى ممكن بالمقارنة بغيره من المتغيرات التى كانت لها قيمة صفرية فى الحل الأساسى السابق (فالربح الناتج عن إنتاج وحدة إضافية من X_2 هو ٢ فقط) . أى أن هذا الاختيار تمليه الرغبة فى زيادة الأرباح بأسرع ما يمكن فى الحل الأساسى الثانى .

٢ — الخطوة التالية فى اختيار المرتكز من العمود المختار طبقاً للقاعدة (١) هى أن نأخذ كل عنصر سالب فى العمود المختار ونقسم العنصر المناظر فى العمود الأول عليه . ويكون المرتكز هو ذلك العنصر الذى يعطى أصغر قيمة مطلقة (أى بغض النظر عن الإشارة) لخارج القسمة . أى أننا نقسم ٨٠٠٠ على —١ وخارج القسمة هو —٨٠٠٠ ، ونقسم ٩٠٠٠ على —٣ وخارج القسمة هو —٣٠٠٠ . إذن أصغر خارج قسمة (بغض النظر عن الإشارة) هو ٣٠٠٠ الذى استخدمنا فيه العنصر —٣ من عمود X_1 فى المصفوفة (١٣) . وعليه يكون هذا

---

(١) مرتكز = Pivot

العنصر هو المرتكز المختار . وهذا يعنى أن المتغير الصفرى السابق X_1 سيحل محل المتغير غير الصفرى السابق S_2 .

والحكمة فى اختيار S_2 ليتحول إنتاجه إلى صفر حتى نسمح للمتغير X_1 بأن تزداد قيمته ، هو أن كل وحدة إضافية من X_1 تؤدى إلى نقصان إنتاج S_2 بوحدة واحدة (طبقاً للقيد ١٠) ، بينما أن كل وحدة إضافية من X_1 تؤدى إلى نقصان إنتاج S_2 بوحدتين (طبقاً للقيد ١١) . وحيث أن هناك ٨٠٠٠ وحدة من S_1 فى الحل الأساسى الأول ، فإن نقصان إنتاج S_1 إلى صفر يعنى زيادة إنتاج X_1 إلى ٨٠٠٠ وحدة ، بينما نقصان إنتاج S_2 إلى صفر يعنى زيادة إنتاج X_1 إلى ٣٠٠٠ وحدة . بعبارة أخرى فإن S_2 يصل إلى القيمة صفر قبل أن يصل إنتاج X_1 إلى الـ ٨٠٠٠ وحدة اللازمة لإلغاء S_1 . أى أنه يستحيل زيادة إنتاج X_1 عن ٣٠٠٠ وحدة ، ومن ثم فإن S_2 هو المتغير الذى يتوقف إنتاجه أولا . ولذا فإننا اخترنا S_2 وليس S_1 ليحل محل X_1 فى الحل الأساسى التالى ، كما هو واضح فى (١٤) .

بعد أن اخترنا المرتكز المناسب للحل الأساسى الثانى ، علينا أن نعرف كيف نملأ مصفوفة المعاملات المناظرة لهذا الحل ويتم ذلك وفقاً للقواعد التالية :

(14)

	Col. (1)	S_2	X_2
Z	7500	$-\frac{5}{6}$	$\frac{1}{3}$
S_1	5000	$\frac{1}{3}$	$\boxed{-\frac{4}{3}}$
X_1	3000	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$

١ — العنصر الذى يحل محل المرتكز المختار عبارة عن مقلوب المرتكز القديم ، أى $\frac{١}{—٣}$.

٢ — نحصل على العناصر الأخرى فى الصف الواقع فيه المرتكز القديم بتغيير إشارات عناصر الصف القديم (أى العنصرين ٩٠٠٠ و —٢ فى (١٣)) وقسمتها على المرتكز المختار وهكذا يظهر العنصر $\frac{—٩٠٠٠}{—٣} = ٣٠٠٠$ محل العنصر —٩٠٠٠ ، ويظهر العنصر $\frac{٢}{—٣}$ محل العنصر —٢ فى الصف الأخير للمصفوفة (١٤) .

٣ — بالنسبة للعناصر الأخرى فى عمود S_2 : نقسم عناصر العمود القديم الواقع فيه المرتكز المختار على المرتكز . أى نقسم ٢,٥ على —٣ فنحصل على العنصر $—\frac{٥}{٦}$ ، ونقسم —١ على —٣ فنحصل على العنصر $\frac{١}{٣}$ فى عمود S_2 .

٤ — بالنسبة لباقى عناصر مصفوفة المعاملات : فلنأخذ العنصر ٢ فى قمة عمود X_2 فى المصفوفة (١٣) . تأمل المحيدد الذى يتكون قطره من هذا العنصر والمرتكز المختار أى المحيدد :

$$\begin{vmatrix} 2.5 & 2^{*} \\ -3 & -2 \end{vmatrix}$$

حيث نضع علامة * على العنصر المراد الحصول على قيمته الجديدة . نحصل على هذه القيمة - وفقاً للقاعدة التالية :

$$\text{العنصر الجديد} = \frac{\text{حاصل الضرب التقاطعي}}{\text{المرتكز القديم}}$$

حيث :

حاصل الضرب التقاطعي = العنصر القديم × المرتكز — حاصل ضرب العنصرين الركنيين الباقيين .

أي أن قيمة العنصر الجديد $= \frac{(٢- \times ٢,٥) - (٣- \times ٢)}{٣-} = \frac{١-}{٣-} = \frac{١}{٣}$

وهكذا نضع $\frac{١}{٣}$ فى أول خانة فى عمود X_2 فى المصفوفة (١٤) وبالمثل نحصل على باقى معاملات المصفوفة (١٤) .

بقراءة مصفوفة المعاملات (١٤) مع مراعاة أن المتغيرات الصفرية هى التى تظهر كأعمدة والمتغيرات غير الصفرية هى التى تظهر كصفوف يتضح أن الحل الأساسى الثانى الذى وصلنا إليه هو :

$$(S_1 = 5000 \; ; \; X_1 = 3000 \; ; \; S_2 = 0 \; , \; X_2 = 0)$$

وقيمة دالة الربح المصاحبة لهذا الحل هى $Z = ٧٥٠٠$ ، أى أن الربح قد زاد كثيراً عن الربح فى الحل السابق . وهذا حل ممكن لأن كل الثوابت المطلقة فى معادلات القيود العادية غير سالبة . أى أن قيم أول عنصرين فى الصفين الثانى والثالث للمصفوفة (١٤) قيم غير سالبة . وهذا ما تتطلبه قاعدة الإمكانية . ولكنه حل غير أمثل ، لأن هناك قيمة موجبة لأحد معلمات دالة الهدف وهى معلمة

المتغير X_2 فى المصفوفة (١٤) . وطبقاً لقاعدة الأمثلية ينبغى ألا تكون هناك أية معلمات موجبة فى دالة الهدف المصاحبة للحل .

الخطوة التالية فى الحل هى أن نختار مرتكزاً جديداً ، ونبدل أحد المتغيرات الصفرية بمتغير غيرصفرى ، ونملأ مصفوفة المعاملات الممثلة للحل الأساسى الثالث بنفس الطريقة التى اتبعناها فى الحل الأساسى الثانى . بالنظر إلى رؤوس الأعمدة ما عدا العمود الأول فى المصفوفة (١٤) نجد أن أكبر عنصر موجب يوجد على قمة عمود X_2 . وبقسمة كل عنصر من عناصر العمود الأول لهذه المصفوفة على العناصر المناظرة ذات القيم السالبة فى عمود X_2 نجد أن لدينا

$$٥٠٠٠ / \left(\frac{-٤}{٣}\right) = - ٣٧٥٠$$ بالنسبة للعنصر $-\frac{٤}{٣}$ ،

$$٣٠٠٠ / \left(-\frac{٢}{٣}\right) = - ٤٥٠٠$$ بالنسبة للعنصر $-\frac{٢}{٣}$. طبقاً للقواعد السابق شرحها يكون المرتكز الجديد هو العنصر الذى يعطى أصغر خارج قسمة بغض النظر عن الإشارة أى العنصر $-\frac{٤}{٣}$ ، وهو العنصر الذى وضعنا حوله دائرة فى (١٤) . وهذا يعنى أن X_2 تصبح قيمته موجبة و S_1 تصبح قيمته صفراً فى الحل الأساسى الثالث . ويمكن أن نحصل على المصفوفة المصاحبة لهذا الحل بنفس الطريقة السابقة وهى :

		Col. (1)	S_2	S_1
	Z	8750	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$
(15)	X_2	3750	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$
	X_1	500	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

وبقراءة (١٥) يتضح لنا أن الحل الأساسى الثالث هو :

$$(X_2 = 3750 \ ; \ X_1 = 500 \ ; \ S_2 = 0 \ , \ S_1 = 0)$$

وقيمة دالة الربح المصاحبة لهذا الحل هى ٨٧٥٠ = z

من الواضح أن هذا الحل ممكن لأن كل الثوابت المطلقة فى معادلات القيود العادية سالبة . وحيث أنه ليس بين معاملات دالة الهدف أى معامل موجب (غير معامل العمود الأول وهو الربح) فإنه طبقاً لقاعدة الأمثلية ، هذا حل أمثل أيضاً . بعبارة أخرى نظراً لأن معاملات S_2 ، S_1 تمثل الربح الحدى لكل من هذين النشاطين ، وحيث أن قيم هذه المعاملات سالبة ، فإننا لو أعطينا هذه المتغيرات (الصفرية فى هذا الحل) قيماً غير صفرية لنقص الربح . إذن الحل الأمثل لمشكلة البرمجة يقتضى إنتاج ٥٠٠ وحدة من X_1 و ٣٧٥٠ وحدة من X_2 ومستوى الربح هو ٨٧٥٠ وحدة .

٨ . ٤ . ملاحظات ختامية :

نختتم هذا العرض السريع لأسلوب البرمجة بالملاحظات المختصرة التالية :

١ — المشكلة التي استعرضناها فيما سبق كانت مشكلة تعظيم دالة الهدف في ظل قيود تمثل الحدود القصوى للموارد المتاحة . ونفس أسلوب الحل ينطبق على مشكلة تدنية دالة الهدف مع مراعاة بعض التعديلات وأهمها :

(أ) أن العمود الذي يختار منه المرتكز ينبغي أن يكون في قمته عنصر سالب ، حتى يؤدي إدخال المتغير المناظر له بقيمة موجبة إلى تصغير دالة الهدف .

(ب) أننا نصل إلى الحل الأمثل عندما تكون كل عناصر صف دالة الهدف في المصفوفة المصاحبة للحل موجبة ، لأنه عند هذه المرحلة لا ينتج أي انخفاض في دالة الهدف بإعطاء قيم موجبة لأحد المتغيرات الصفرية .

٢ — في بعض مشكلات البرمجة قد لا يكون مناسباً البدء بحل أساسي تأخذ فيه كل المتغيرات العادية قيماً صفرية ، وتأخذ المتغيرات الخاملة أقصى القيم الموجبة الممكنة . في مثل هذه الحالات تعاد صياغة المشكلة بتكوين مشكلة برمجة بديلة حلها الأمثل هو نفس الحل الأمثل للمشكلة الأصلية ويطلق عليها برنامج الإمكانية[1] . ولا يتسع المقام هنا للدخول في تفاصيل هذا البرنامج وكيفية حله . ولكننا نكتفي بالتنبيه إلى المشكلة وبلفت النظر إلى وجود حل بسيط لها .

٣ — يمكن إثبات أنه يصاحب كل مشكلة برمجة خطية للتعظيم مشكلة برمجة خطية وثيقة الصلة للتدنية ، والعكس بالعكس . ويطلق على هذه الخاصية خاصية

---

(١) برنامج الامكانية = Feasibility program

الثنائية(١) . وقد حظى تحليل مشاكل البرمجة الثنائية باهتمام من جانب علماء الرياضيات والاقتصاد نظراً لأنه يترتب على هذه الخاصية نظريات تساعد كثيراً فى الوصول إلى فهم أعمق للبرمجة الخطية ، وعلى تسهيل حل مشكلاتها . كما أن هذه الخاصية تساعد على إعطاء تفسير اقتصادى واضح للكثير من جوانب مشكلة البرمجة . وهى بالذات توضح أن التحليل الخدى متضمن دائماً فى البحث عن حل أمثل لأى مشكلة برمجة خطية .

٤ — كما سبقت الإشارة فى أكثر من مناسبة ، أسلوب البرمجة الخطية لا يصلح إلا فى الحالات التى يمكن فيها افتراض دالة هدف خطية وقيود خطية . ويؤدى تطبيق البرمجة الخطية على غير ذلك من الحالات إلى الحصول على نتائج غير منطقية . لذا فإنه من الواجب التدقيق فى مدى انطباق فرض الخطية على المشكلة ، والأخذ بأسلوب برمجة غير خطية فى الحالات التى لا يكون مناسباً فيها افتراض خطية دالة الهدف والقيود .

(١) الثنائية = Duality

٨ : ٥ . تمارين :

١ ـــ أوجد قيم x , y , z التى تعظم دالة الهدف $R = 3x + 7y + 6z$ بشرط أن تتحقق أيضاً القيود التالية :

$$x2 + 2y + 2z \leqslant 8$$

$$x + y \leqslant 3$$

$$x , y , z \geqslant 0$$

٢ ـــ عظم دالة الهدف $R = 4x + y$ فى ظل القيود التالية :

$$x + 2y \leqslant 5$$

$$3x + 2y \leqslant 4$$

$$x , y \geqslant 0$$

٣ ـــ أوجد بالرسم الإنتاج الأمثل لشركة تصنع المنتجات C_1 , C_2 باستخدام أربعة عناصر إنتاج R_1 , R_2 , R_3 , R_4 بمعلومية البيانات التالية :

المدخلات اللازمة لإنتاج	R_4	R_3	R_2	R_1
وحدة من C_1	3	1	2	3
وحدة من C_2	2	3	4	2
الكميات القصوى المتاحة من كل عنصر	7	3	10	7

والربح الصافى عن كل وحدة من C_1 هو ٢ وحدة وعن كل وحدة من C_2 هو ٣ وحدة. تأكد من صحة الحل بالرسم بإعادة حل المشكلة بطريقة السمبلكس.

٤ - أوجد كميات الإنتاج y , x التى تجعل الربح أكبر ما يمكن بفرض أن دالة الربح هى $p = 4x + 6y$ مع مراعاة القيود التالية :

$$0.5x + y \leqslant 4$$

$$2x + y \leqslant 8$$

$$4x - 2y \leqslant 2$$

$$x, \quad y \geqslant 0$$

المراجع

1. Allen, R. G. D., Mathematical Analysis for Economists, Macmillan, London, 1964.

2. ———, Mathematical Economics, Macmillan, London, 1955.

3. ———, Macro—Economic Theory, Macmillan, London 1968.

4. Archibald, G.C. and Lipsey, R.G., An Introduction to a Mathematical Treatment of Economics, 2nd ed, Weidenfeld & Nicolson, 1973.

5. Baumol, W.J., Economic Theory And Operations Analysis, 2nd ed., Printice Hall, 1965.

6. ———, Economic Dynamics, 2nd ed., Macmillan, New-york, 1955.

7. Henderson, J.M. and Quandt, R.E., Micro — Economic Theory, Mc Graw Hill, 1958.

8. Huang, D. S., Introduction to the Use of Mathematics in Economic Analysis, John Wiley, New York, 1964.

9. Lange, O., Introduction to Econometrics, 2nd. ed., Pergamon Press, 1962.

10. Lewis, J. P., An Introduction to Mathematics for Students of Economics, Macmillan, London, 1959.

11. Lipsey, R. G., An Introduction to Positive Economics, Weidenfeld & Nicolson, London, 1963.

12. Peston, M. H., Elementary Matrices for Economists, Routledge & Kegan Paul, London, 1971.

13. Samuelson, P., Economics : An Introductory Analysis, 6 th ed, Mc Graw, Hill, New York, 1961.

14. Schneider, E., Pricing and Equilibrium, Allen & Unwin, London, 1962.

15. Singh, J., Operations Research, Penguin, London, 1968.

16. Stonier, A. W. and Hague, D. C, A Texbook of Economic Theory ; 3 rd. ed, Longmans, London, 1964.

17. Thompson, S. P., Calculus Made Easy. 2 nd. ed., Macmillan, London, 1934

مراجع فى مبادىء الإقتصاد باللغة العربية :

١ — فوزى منصور ، محاضرات فى مبادىء علم الاقتصاد السياسى للبلدان النامية ، الجزء الأول : القضايا والمنهج ، قوى الإنتاج وعلاقات الإنتاج ، دار النهضة العربية ، القاهرة ، ١٩٧٣ — ١٩٧٤ .

٢ — فوزى منصور ، محاضرات فى نظرية الثمن : عرض نقدى للفكر الاقتصادى الرأسمالى فى نظرية الثمن ، دار النهضة العربية ، القاهرة ، ١٩٧٣ — ١٩٧٤ .

قائمة المحتويات

الصفحة

الصفحة

تصويب

ص ٦٦ — شكل رقم (٢) : المعادلة المكتوبة علــى منحنى الطلب تقرأ $D = 100 - 0.5\,p$ والمتغير المقاس على المحور الأفقى هو D .

ص ٦٨ — شكل رقم (٤) : الحرف H يقرأ A_1 ، والمتغيرات المقاسة على المحور الأفقى هى D , S . منحنى العرض S_2 يتقاطع مع المحور الأفقى فى النقطة (c — d t) .

ص ٦٩ — شكل رقم (٥) : منحنى العرض الأفقى الأقرب إلى المحور الأفقى هو S_3 والأبعد عنه هو S_3' . منحنى العرض المائل بعد فرض الضريبة هو S_2' . منحنى العرض الرأسى يتقاطع مع المحور الأفقى فى النقطة c ، ومع S_2 فى النقطة p_1 ، والمسافة الرأسية بين S_2 و S_2' هى t .

ص ٧٣ — شكل رقم (٦) : منحنى الطلب الرأسى هو D_2 ومنحنى الطلب المائل هو D_3 . S. تقرأ S_1 .

ص ٩٧ — ص ١١٢ — فى مواضع عديدة من هذه الصفحات ظهرت علامة التفاضل الجزئى على هيئة العدد 8 كاملا أو مشوهاً .

ص ٢١٠ — شكل رقم (١) : الرمز المكتوب تحت المحور الأفقى x_1 وليس x .

ص ٢١٩ — شكل رقم (٢) : المتغير المقاس على المحور الأفقى هو x_1 .

ص ٢٢٢ — شكل رقم (٢) : قمة المنحنى q هى النقطة C .

ص ٢٣٣ — شكل رقم (٧) : خطوط التكاليف المتساوية هى من أسفل إلى أعلى C_1 ، C_2 ، C_3 ، والمتغير المقاس على المحور الأفقى هو x_1 .

ص ٢٩٢ — شكل رقم (١٤ب) على اليسار . النقطة ب هى نقطة تقاطع ت ح٢ مع ا ح .

تنويه

نظراً لظروف لم يمكن تفاديها أثناء الطبع تظهر الصفحات من ١٦٠ الى ١٦١ بالأرقام ١٦٠م١ ، ١٦٠م٢ ، ... وهكذا ، لذا لزم التنويه .