الفصل الثاني

المعادلات
Equations

(٢.١) المعادلات الخطية [Linear Equations]

المعادلة هي أي علاقة مساواة بين طرفين. فمثلاً، كل من $3x = 2$، $5x^2 + x = 5$، $xy = 15$، $\sqrt{x} = 3x$ معادلة. المتغير (variable) أو المجهول (unknown) هو أي مقدار غير معلوم، فمثلاً، كل من x و y في المعادلات أعلاه متغير. أما الثابت (constant) فهو مقدار يأخذ قيمة واحدة في المعادلة، فمثلاً كل من 2، 5، 15 مقدار ثابت في المعادلات أعلاه. كما يسمى العدد 3 الذي يظهر في الحد $3x$.بمعامل (coefficient) المتغير x و العدد 5 في الحد $5x^2$ هو معامل x^2 وهكذا. تعرف درجة حد على أنها مجموع قوى متغيراته، فمثلاً، درجة الحد $3x^2y^3$ تساوي 5. و تعرف درجة المعادلة على أنها درجة أعلى حد من حدودها. فمثلاً، درجة المعادلة $2x^3 - 3x^2 + 5 = 0$ تساوي 3.

إن أبسط أنواع المعادلات هي المعادلة الخطية (أو معادلة الدرجة الأولى) وهي معادلة درجتها تساوي 1. على سبيل المثال، كل من المعادلات $2x = 5$، $2x - y = 3$، $x + y + 2z = 0$ معادلة خطية وكل من المعادلات $x^2y = 2$، $x^2 + 2y = 1$، $4^x + 2y = 6$ معادلة غير خطية. حل (solution) المعادلة يعني

إيجاد قيم المتغيرات التي تحقق المساواة في المعادلة.

مثال (١) حل المعادلة $x + 3 = 7$.

الحل

$$\begin{aligned} x + 3 &= 7 \\ x &= 7 - 3 \\ x &= 4 \,. \end{aligned}$$

◇

مثال (٢) حل المعادلة $2z + 4 = -7$.

الحل

$$\begin{aligned} 2z + 4 &= -7 \\ 2z &= -7 - 4 \\ 2z &= -11 \\ z &= \frac{-11}{2} \,. \end{aligned}$$

◇

مثال (٣) حل المعادلة $\frac{3}{2}\left(\frac{4}{3} - 6x\right) = \frac{9}{4}$.

الحل

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}\left(\frac{4}{3} - 6x\right) &= \frac{9}{4} \\ \frac{2}{3} \times \frac{3}{2}\left(\frac{4}{3} - 6x\right) &= \frac{2}{3} \times \frac{9}{4} \\ \frac{4}{3} - 6x &= \frac{3}{2} \\ -6x &= \frac{3}{2} - \frac{4}{3} \\ -6x &= \frac{1}{6} \\ x &= \frac{1}{6} \div (-6) \end{aligned}$$

$$x = -\frac{1}{36}.$$ ◇

مثال (٤) حل المعادلة $1 - 3(2x + 1) = x - 3$.

الحل

$$1 - 3(2x + 1) = x - 3$$
$$1 - 6x - 3 = x - 3$$
$$-6x - x = -3 + 2$$
$$-7x = -1$$
$$x = \frac{-1}{-7} = \frac{1}{7}.$$ ◇

مثال (٥) إذا كان $\frac{x-a}{x+b} = 4c$ فجد x بدلالة a، b، c.

الحل

$$\frac{x-a}{x+b} = 4c$$
$$x - a = 4c(x + b)$$
$$x - a = 4cx + 4bc$$
$$x - 4cx = a + 4bc$$
$$x(1 - 4c) = a + 4bc$$
$$x = \frac{a + 4bc}{1 - 4c}.$$ ◇

مثال (٦) حل المعادلة $\frac{18x^2 - 21x - 72}{3x^2 - 20x + 32} = -5$

الحل

$$\frac{18x^2 - 21x - 72}{3x^2 - 20x + 32} = -5$$
$$\frac{3\left(6x^2 - 7x - 24\right)}{3x^2 - 20x + 32} = -5$$

$$\frac{3(2x+3)(3x-8)}{(3x-8)(x-4)} = -5$$
$$\frac{3(2x+3)}{x-4} = -5$$
$$6x+9 = -5x+20$$
$$11x = 11$$
$$.\ x = 1$$
◇

مثال (٧)[AHSME 1950] قسمنا العدد 64 إلى ثلاثة أجزاء بنسبة $6:4:2$. جد أصغر هذه الأجزاء.

الحل

الأعداد التي تتناسب مع 2، 4، 6 هي $2x$، $4x$، $6x$. عندئذ،
$$2x+4x+6x = 46$$
$$12x = 64$$
$$x = 5\frac{1}{3}$$
إذن، أصغر الأجزاء هو العدد $2x = 10\frac{2}{3}$. ◇

مثال (٨)[AHSME 1950] بدأ أحمد وبدر المشي في اللحظة نفسها من جامعة الإمام محمد إلى مطار الملك خالد الذي يبعد عن جامعة الإمام مسافة 30 كم. بدر مشى بسرعة تزيد عن سرعة أحمد 2 كم في الساعة. في اللحظة التي وصل فيها بدر إلى مطار الملك خالد عاد أدراجه والتقى أحمد على بعد 6 كم من مطار الملك خالد. ما هي سرعة أحمد ؟

الحل

لنفرض أن سرعة أحمد تساوي r. الزمن الذي استغرقه أحمد يساوي $\frac{24}{r}$ والزمن

الذي استغرقه بدر يساوي $\frac{36}{r+2}$. إذن،

$$\begin{aligned} \frac{24}{r} &= \frac{36}{r+2} \\ 36r &= 24r + 48 \\ 12r &= 48 \\ r &= 4 \end{aligned}$$

إذن، سرعة أحمد تساوي 4 كم في الساعة. ◇

مثال (٩)[AMC12A 2005] إذا كان حل المعادلة $2x + 7 = 3$ هو أيضاً حلاً للمعادلة $bx - 10 = -2$ فما هي قيمة b ؟

الحل

$$\begin{aligned} 2x + 7 &= 3 \\ 2x &= 3 - 7 = -4 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

بما أن $x = -2$ حل للمعادلة $bx - 10 = -2$ فنرى أن

$$\begin{aligned} b(-2) - 10 &= -2 \\ -2b &= -2 + 10 \\ -2b &= 8 \\ b &= -4 \,. \end{aligned}$$

◇

مثال (١٠)[AMC10 2001] مجموع عددين يساوي S، أضفنا العدد 3 لكل من العددين وبعد ذلك ضاعفنا كلاً من العددين الناتجين. جد المجموع الجديد الذي نحصل عليه بدلالة S.

الحل

لنفرض أن العددين هما a و b. بداية كان $S = a + b$. المجموع الجديد هو

$2(a+3) + 2(b+3) = 2(a+b) + 12 = 2S + 12$. ◇

مثال (١١)[MAΘ 1992] يستطيع 30 شخصاً إنشاء طريق خلال 60 يوماً. بعد اليوم العاشر قررت الشركة أنها تريد إنجاز الطريق خلال 30 يوماً وليس 60 يوماً كما كان مقرراً. ما هو عدد الأشخاص الذين يتوجب إضافتهم إلى الطاقم الأصلي لإنجاز المهمة ؟

الحل

يستطيع 30 شخصاً إنجاز $\frac{1}{60}$ من الطريق في يوم واحد. ومن ثم يستطيع الشخص الواحد إنجاز $\frac{1}{1800}=\frac{1}{60}\times\frac{1}{30}$ من الطريق في اليوم الواحد.

أنجز الطاقم المكون من 30 شخصاً الجزء $\frac{1}{6}=10\left(\frac{1}{60}\right)$ من الطريق خلال العشرة أيام الأولى. بعد تغير خطة العمل يتوجب على الطاقم إنشاء $\frac{5}{6}$ من الطريق خلال 20 يوماً.لنفرض أن x هو عدد الأشخاص الذين تمت إضافتهم إلى الطاقم. عندئذ، يكون عدد أشخاص الطاقم الجديد هو $x+30$.

بما أن كل شخص يستطيع إنجاز $\frac{1}{1800}$ من الطريق في يوم واحد فباستطاعة $x+30$ شخصاًإنجاز $\frac{x+30}{1800}$ من الطريق في يوم واحد. إذن،

$$\begin{aligned}\frac{20(x+30)}{1800} &= \frac{5}{6}\\ 20x+600 &= 1500\\ 20x &= 900\\ x &= 45\end{aligned}$$

وبهذا يكون عدد الأشخاص اللذين أضيفوا إلى الطاقم هو $x=45$. ◇

(٢.٢) معادلة الدرجة الثانية [Quadratic Equation]

معادلة الدرجة الثانية في متغير واحد تأخذ الصيغة

$$ax^2 + bx + c = 0$$

حيث a، b، c أعداد ثابتة و $a \neq 0$.

توجد عدة طرق لحل معادلة الدرجة الثانية، نقدم ثلاثة من هذه الطرق.

(٢.٣) استخدام التحليل [By Factorization]

لحل معادلة الدرجة الثانية باستخدام التحليل نقوم بإعادة كتابتها بحيث يكون أحد طرفيها يساوي صفراً ثم نحلل الطرف الآخر ونستخدم القاعدة الهامة:

$ab = 0 \Rightarrow a = 0$ أو $b = 0$.

ومن ثم نحصل على الحلين بحل كل من المعادلتين الخطيتين الناتجتين.

مثال (١٢) حل المعادلة $3x^2 + 5x = 0$.

الحل

$$3x^2 + 5x = 0$$
$$x(3x + 5) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{أو} \quad 3x + 5 = 0$$
$$x = 0 \quad \text{أو} \quad x = \frac{-5}{3}$$

إذن، حلا المعادلة (يسميان أيضاً جذرا المعادلة أو صفرا المعادلة) هما $x_1 = 0$ و $x_2 = \frac{-5}{3}$. ◇

مثال (١٣) حل المعادلة $16x^2 + 9 = 24x$.

الحل

$$\begin{aligned}16x^2 + 9 &= 24x\\ 16x^2 - 24x + 9 &= 0\\ (4x-3)^2 &= 0\\ 4x - 3 &= 0\\ x &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

لاحظ أن جذري المعادلة متساويان وهما $x_1 = x_2 = \frac{3}{4}$. ◇

مثال (١٤) حل المعادلة $3x^2 = 16x + 12$.

الحل

$$\begin{aligned}3x^2 &= 16x + 12\\ 3x^2 - 16x - 12 &= 0\\ (3x+2)(x-6) &= 0\end{aligned}$$

$$x - 6 = 0 \quad \text{أو} \quad 3x + 2 = 0$$

$$x = 6 \quad \text{أو} \quad x = \frac{-2}{3}$$

إذن، $x_1 = \frac{-2}{3}$ و$x_2 = 6$. ◇

مثال (١٥) حل المعادلة $\frac{x+3}{1-x} = -\frac{9}{x}$.

الحل

$$\begin{aligned} \frac{x+3}{1-x} &= -\frac{9}{x} \\ -9(1-x) &= x(x+3) \\ -9+9x &= x^2+3x \\ x^2-6x+9 &= 0 \\ (x-3)^2 &= 0 \end{aligned}$$

إذن، $x_1 = x_2 = 3$. ◇

مثال (١٦) حل المعادلة $(x+1)^2 = 2x^2 - 5x + 11$.

الحل

$$\begin{aligned} (x+1)^2 &= 2x^2-5x+11 \\ x^2+2x+1 &= 2x^2-5x+11 \\ x^2-7x+10 &= 0 \\ (x-2)(x-5) &= 0 \end{aligned}$$

$x-5=0$ أو $x-2=0$

$x=5$ أو $x=2$

إذن، $x_1 = 2$ و$x_2 = 5$. ◇

(٢.٤) إكمال المربع [Completing The Square]

إذا أردنا استخدام طريقة التحليل لحل المعادلة $x^2+6x-2=0$ فإننا سنواجه صعوبة في تحليل المقدار x^2+6x-2. ولكن من الممكن حل هذه المعادلة بطريقة إكمال المربع حيث يمكن تحويل معادلة الدرجة الثانية $ax^2+bx+c=0$ إلى معادلة مكافئة على الصورة $(x+p)^2=q$، وهذه معادلة يسهل حلها. سنوضح

هذه الطريقة ببعض الأمثلة.

مثال (١٧) حل المعادلة $x^2 + 6x - 2 = 0$.

الحل

تتم خطوات إكمال المربع على النحو التالي:

(١) نقوم بنقل الحد الثابت إلى الطرف الأيمن فنحصل على

$$x^2 + 6x = 2$$

(٢) نأخذ نصف معامل x وهو 3 في هذه الحالة ونربعه ونضيف الناتج إلى طرفي المعادلة فنحصل على

$$x^2 + 6x + 9 = 2 + 9$$

(٣) الآن الطرف الأيسر من المعادلة مربع كامل، وبهذا نحصل على المعادلة المكافئة

$$(x + 3)^2 = 11$$

(٤) نأخذ الآن الجذر التربيعي للطرفين فنحصل على

$$x + 3 = \pm\sqrt{11}$$
$$x = -3 \pm \sqrt{11}$$

إذن، $x_1 = -3 + \sqrt{11}$ و $x_2 = -3 - \sqrt{11}$. ◇

مثال (١٨) حل المعادلة $x^2 + 6x + 11 = 0$.

الحل

باتباع خطوات اكمال المربع نحصل على

$$x^2 + 6x = -11$$
$$x^2 + 6x + 9 = -11 + 9$$
$$(x + 3)^2 = -2$$

هنا، لدينا مربع مقدار سالب ومن ثم لا يمكن إيجاد جذر تربيعي حقيقي لهذا المقدار وبهذا فالمعادلة ليس لها جذور حقيقية ولكن جذريها مركبان وسنبين ذلك عند دراستنا للأعداد المركبة في كتاب الجبر (الجزء الثاني) من هذه السلسلة. ◇

ملحوظة

عند اتباع طريقة إكمال المربع لحل معادلة الدرجة الثانية يجب التأكد من أن معامل x^2 يساوي 1 فإذا لم يكن كذلك فنقوم أولاً بقسمة طرفي المعادلة على هذا المعامل والمثال التالي يوضح ذلك.

مثال (١٩) حل المعادلة $2x^2 - 10x + 3 = 0$.

الحل

$$\begin{aligned}
2x^2 - 10x + 3 &= 0 \\
x^2 - 5x + \frac{3}{2} &= 0 \\
x^2 - 5x &= -\frac{3}{2} \\
x^2 - 5x + \frac{25}{4} &= -\frac{3}{2} + \frac{25}{4} \\
\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 &= \frac{19}{4} \\
x - \frac{5}{2} &= \pm\frac{\sqrt{19}}{2} \\
x &= \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{19}}{2}
\end{aligned}$$

إذن، $x_1 = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{19}}{2}$ و $x_2 = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{19}}{2}$. ◇

(٢.٥) قانون معادلة الدرجة الثانية [The Quadratic Formula]

يصعب حل العديد من معادلات الدرجة الثانية باستخدام طريقة التحليل أو إكمال المربع. ولهذا يوجد قانون عام لحل معادلة الدرجة الثانية وسنبين هنا كيفية الحصول على هذا القانون.

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad ، \quad a \neq 0 .$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \qquad \text{(قسمنا طرفي المعادلة على } a\text{)}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \qquad \text{(أكملنا المربع)}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

إذن، $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ و $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ هما جذرا المعادلة.

ملحوظة

يمكن استخدام القانون العام لحل جميع معادلات الدرجة الثانية ولكن لا يفضل استخدامه إذا كان التحليل سهلاً.

مثال (٢٠) حل المعادلة $(3x+1)^2 = -2x$.

الحل

بكتابة المعادلة على الصيغة المطلوبة نجد أن المعادلة تكافئ $9x^2 + 8x + 1 = 0$.

الآن، بتطبيق القانون العام نحصل على

$$\begin{aligned} x &= \frac{-8 \pm \sqrt{64-36}}{18} \\ &= \frac{-8 \pm \sqrt{28}}{18} \\ &= \frac{-8 \pm 2\sqrt{7}}{18} \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{7}}{9} \end{aligned}$$

إذن، $x_1 = \frac{-4+\sqrt{7}}{9}$ و $x_2 = \frac{-4-\sqrt{7}}{9}$. ◇

مثال (٢١) حل المعادلة $2x - \frac{1}{x} = 3$.

الحل

بوضع المعادلة على الصيغة المناسبة نجد أن

$$2x^2 - 1 = 3x$$

$$2x^2 - 3x - 1 = 0$$

الآن، نستخدم القانون العام فنحصل على

$$\begin{aligned} x &= \frac{3 \pm \sqrt{9+8}}{4} \\ &= \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4} \end{aligned}$$

إذن، $x_1 = \frac{3+\sqrt{17}}{4}$ و $x_2 = \frac{3-\sqrt{17}}{4}$. ◇

(٢.٦) مميز معادلة الدرجة الثانية [The Discriminant of The Quadratic]

يسمى المقدار $b^2 - 4ac$ الذي يظهر في القانون العام داخل الجذر التربيعي، مميز معادلة الدرجة الثانية وسنرمز له بالرمز Δ. أي أن

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

وبهذا يمكن كتابة القانون العام على الصورة

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

لدينا الحالات التالية:

(١) إذا كان $\Delta = 0$ فلمعادلة الدرجة الثانية جذر مكرر واحد هو $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a}$.

(٢) إذا كان $\Delta > 0$ فلمعادلة الدرجة الثانية جذران حقيقيان مختلفان هما

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

(٣) إذا كان $\Delta < 0$ فإن $\sqrt{\Delta}$ ليس عدداً حقيقياً. وفي هذه الحالة جذرا معادلة الدرجة الثانية غير حقيقين.

(٤) إذا كانت الأعداد a، b، c كسرية وكان Δ مربعاً كاملاً فجذرا المعادلة عددان كسريان يمكن إيجادهما بطريقة التحليل.

مثال (٢٢) جد قيمة m بحيث يكون للمعادلة $x^2 - 2x + m = 0$:

(أ) جذران مكرران (ب) جذران حقيقيان مختلفان (ج) جذران غير حقيقين.

الحل

المميز هو $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times m = 4 - 4m$

(أ) لكي يكون للمعادلة جذران مكرران فإن $\Delta = 0$. من ذلك يكون $4 - 4m = 0$. أي أن $m = 1$.

(ب) لكي يكون الجذران حقيقيين مختلفين فيجب أن يكون $\Delta > 0$. أي أن $4 - 4m > 0$. وبحل هذه المتباينة الخطية (سندرس ذلك في الفصل الثالث) نرى أن $m < 1$.

(ج) لكي يكون جذرا المعادلة غير حقيقين فيجب أن يكون $\Delta < 0$. أي أن $4 - 4m < 0$. وبحل هذه المتباينة نجد أن $m > 1$. ◇

(٢.٧) مجموع وحاصل ضرب الجذرين [Sum And Products of The Roots]

لنفرض أن α و β هما جذرا معادلة الدرجة الثانية $ax^2 + bx + c = 0$. عندئذ،

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a(x-\alpha)(x-\beta) \\ &= a(x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta) \end{aligned}$$

وبقسمة طرفي المعادلة على $a \neq 0$ نجد أن

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta$$

وبمقارنة المعاملات نحصل على ما يسمى علاقات فــيتاي وهي

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a}\,.$$

مثال (٢٣) إذا كان مجموع جذري المعادلة $kx^2 - (1+k)x + (3k+2) = 0$ يساوي ضعف حاصل ضربهما فجد قيمة k ومن ثم جد الجذرين.

الحل

$a = k$، $b = -(1+k)$، $c = 3k+2$. الآن، لنفرض أن α و β هما جذرا المعادلة. عندئذ،

$$\begin{aligned}
\alpha + \beta &= 2\alpha\beta \\
-\frac{b}{a} &= 2\left(\frac{c}{a}\right) \\
\frac{1+k}{k} &= 2\left(\frac{3k+2}{k}\right) \\
6k^2 + 4k &= k + k^2 \\
5k^2 + 3k &= 0 \\
k(5k+3) &= 0
\end{aligned}$$

ولذا فإن $k = 0$ أو $k = -\dfrac{3}{5}$. وبما أن $k \neq 0$ (لماذا ؟) فنرى أن $k = -\dfrac{3}{5}$ بالتعويض عن k في المعادلة نجد أن.

$$\begin{aligned}
-\frac{3}{5}x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{1}{5} &= 0 \\
3x^2 + 2x - 1 &= 0 \\
(3x-1)(x+1) &= 0
\end{aligned}$$

إذن، $x_1 = \dfrac{1}{3}$ و $x_2 = -1$. ◇

مثال (٢٤) ليكن α و β جذري المعادلة $x^2 - 6x + 7 = 0$. جد معادلة من الدرجة الثانية جذراها $\alpha + \dfrac{1}{\beta}$ و $\beta + \dfrac{1}{\alpha}$.

الحل

مجموع جذري المعادلة المطلوبة هو:

$$\alpha+\frac{1}{\beta}+\beta+\frac{1}{\alpha}=(\alpha+\beta)+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=6+\frac{6}{7}=\frac{48}{7}$$

حاصل ضرب جذري المعادلة المطلوبة هو:

$$\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}+2=7+\frac{1}{7}+2=\frac{64}{7}$$

إذن المعادلة المطلوبة هي:

$$7x^2-48x+64=0$$ ◇

نقدم الآن بعض الأمثلة الإضافية الذي يحتاج حلها إلى استخدام معادلة الدرجة الثانية.

مثال (٢٥) لدينا سلك طوله 12سم. هل من الممكن ثني هذا السلك ليكون ضلعي زاوية قائمة لمثلث مساحته 20سم٢ ؟

الحل

نفرض أن x هو طول أحد الضلعين. عندئذ، $12-x$ هو طول الضلع الآخر. ولنفرض أن A هي مساحة المثلث. من ذلك نجد أن

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}x(12-x)\\
\frac{1}{2}x(12-x) &= 20\\
x(12-x) &= 40\\
12x-x^2-40 &= 0\\
x^2-12x+40 &= 0
\end{aligned}$$

وباستخدام القانون العام لمعادلة الدرجة الثانية نجد أن

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

وهذا عدد غير حقيقي. ولذا فالإجابة هي لا. ◇

مثال (٢٦) عددان فرديان متتاليان حاصل ضربهما يساوي 255 . ما هذان العددان ؟

الحل

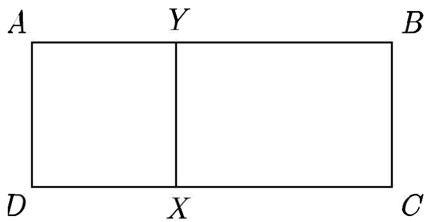
لنفرض أن أحد العددين يساوي x . عندئذ، $x + 2$ هو العدد الآخر. الآن

$$\begin{aligned} &x(x+2) = 255 \\ &x^2 + 2x - 255 = 0 \\ &(x+17)(x-15) = 0 \end{aligned}$$

إذن، $x = -17$ أو $x = 15$.

وبهذا فالعددان هما -17 و -15 أو 15 و 17 . ◇

مثال (٢٧) المستطيل الذهبي هو مستطيل يمكن تقسيمه برسم مستقيم مواز للضلع الأصغر (عرضه) إلى مربع و مستطيل أصغر بحيث يكون المستطيلان الكبير و الصغير متشابهان. أي إذا كان المستطيل $ABCD$ المبين في الشكل أدناه هو مستطيلاً ذهبياً فإن $ADXY$ مربع وأن $BCXY$ مستطيل يشبه المستطيل $ABCD$. تسمى النسبة $\frac{AB}{AD}$ النسبة الذهبية. باعتبار أن طول AB يساوي x وطول AD يساوي 1، أثبت أن النسبة الذهبية هي $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.



الحل

من تشابه المستطيلين $ABCD$ و $BCXY$ نجد أن

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{YB}$$

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$$

$$x^2 - x = 1$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

وباستخدام قانون معادلة الدرجة الثانية نجد أن

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

إذن، النسبة الذهبية $x = \frac{AB}{AD}$ تساوي $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (لماذا ؟) ◇

مثال (٢٨) إذا نقصت سرعة طائرة بمقدار 120كم في الساعة فإنها ستحتاج $\frac{1}{2}$ ساعة زيادة لقطع مسافة 1000كم. ما هي سرعة الطائرة ؟

الحل

لنفرض أن s هي سرعة الطائرة وأن t هو الزمن المستغرق لقطع مسافة 1000 كم. عندئذ، $s = \frac{1000}{t}$ أو $t = \frac{1000}{s}$. الآن، عندما تصبح السرعة $s - 120$ يكون الزمن اللازم لقطع مسافة 1000كم هو $t + \frac{1}{2}$. إذن،

$$s - 120 = \frac{1000}{t + \frac{1}{2}}$$

$$(s-120)\left(t + \frac{1}{2}\right) = 1000$$

$$(s-120)\left(\frac{1000}{s} + \frac{1}{2}\right) = 1000$$

$$(s-120)\left(\frac{2000+s}{2s}\right) = 1000$$

$$(s-120)(2000+s) = 2000s$$

$$2000s + s^2 - 240000 - 120s = 2000s$$

$$s^2 - 120s - 240000 = 0$$

وباستخدام القانون العام نجد أن

$$s = \frac{120 \pm \sqrt{(120)^2 - 4(1)(-240000)}}{2}$$

$$s = \frac{120 \pm \sqrt{974400}}{2}$$

$$s = \frac{120 \pm 987.1}{2}$$

إذن، $s = \frac{120 + 987.1}{2} = 553.6$. ◇

مثال (٢٩) اشترى أحمد عدد x من فطائر الجبنة بمبلغ 60 ريالاً. ولكنه وجد أنه لو استبدل فطائر الجبنة بفطائر الزعتر لاستطاع أن يشتري بنفس المبلغ عدداً من فطائر الزعتر يزيد بمقدار 3 عن عدد فطائر الجبنة. وإذا خفض له البائع ثمن كل من فطيرة الجبنة وفطيرة الزعتر ريالاً واحداً لكان بإمكانه شراء عدد من فطائر الزعتر يزيد بمقدار 5 عن عدد فطائر الجبنة بالمبلغ نفسه. جد عدد فطائر الجبنة

الذي يتمكن أحمد من شراءه بالسعر الأصلي.

الحل

عدد فطائر الجبنة الأصلي هو x وعدد فطائر الزعتر الأصلي هو $x+3$.

ثمن فطيرة الجبنة الأصلي هو $\frac{60}{x}$ ريال وثمن فطيرة الزعتر الأصلي هو $\frac{60}{x+3}$.

عدد فطائر الجبنة بعد التخفيض هو $\frac{60}{\frac{60}{x}-1}$ وعدد فطائر الزعتر بعض التخفيض

هو $\frac{60}{\frac{60}{x+3}-1}$. إذن،

$$\begin{aligned}
&\frac{60}{\frac{60}{x+3}-1}-\frac{60}{\frac{60}{x}-1}=5\\
&\frac{60(x+3)}{57-x}-\frac{60x}{60-x}=5\\
&60(x+3)(60-x)-60x(57-x)=5(57-x)(60-x)\\
&12\left(-x^2+57x+180-57x+x^2\right)=3420-117x+x^2\\
&2160=x^2-117x+3420\\
&x^2-117x+1260=0\\
&(x-12)(x-105)=0
\end{aligned}$$

إذن، $x=12$ أو $x=105$. ولكن $x=105$ مستحيل لأن ثمن فطيرة الجبنة سيكون في هذه الحالة $\frac{60}{105}-1=-\frac{3}{7}$ وهذا مرفوض. إذن، عدد فطائر الجبنة بالسعر الأصلي هو 12 فطيرة. ◇

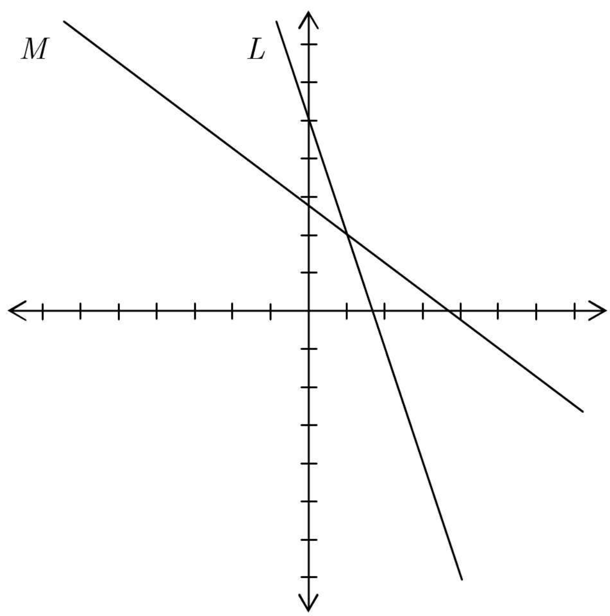
(٢.٨) معادلات في أكثر من متغير

[Equations With More Than One Vriable]

المعادلة الخطية ومعادلة الدرجة الثانية التي درسناها لحد الآن هي معادلات في متغير واحد. لنفرض الآن أن لدينا المعادلة

$$3x + y = 5 \tag{١}$$

لحل هذه المعادلة يتوجب علينا إيجاد قيم x و y التي تحققها. سنستخدم الزوج المرتب (x,y) للتعبير عن حل المعادلة. بالتجريب نرى أن $(-1,8)$ حل للمعادلة. كما أن $(0,5)$ ، $\left(\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right)$ ، $(1,2)$ ، $\left(\frac{5}{3},0\right)$ ، $(15,-40)$ هي أيضاً حلول للمعادلة. في الحقيقة عدد الأزواج المرتبة (الحلول) التي تحقق المعادلة هو عدد غير منته. وكما سنرى لاحقاً فإن بيان جميع حلول المعادلة $3x + y = 5$ هو الخط المستقيم L المبين في الشكل أدناه



لنفرض الآن أن لدينا معادلة أخرى هي

$$3x + 4y = 11 \qquad (٢)$$

بيان هذه المعادلة هو المستقيم M المبين في الشكل السابق.

تسمى المعادلتان (١) و (٢) نظاماً من المعادلات الخطية في المتغيرين x و y (سندرس أنظمة المعادلات بصورة أكثر تفصيلاً في الجزء الثاني من هذه السلسلة).

لاحظ أن حل النظام هو نقطة تقاطع المستقيمين M و L. توجد عدة طرق لحل أنظمة المعادلات جبرياً، نقدم منها طريقتين ونرجئ دراسة بعض الطرق الأخرى للجزء الثاني من هذه السلسلة.

(٢.٩) طريقة الحذف[Elimination Method]

تعتمد طريقة الحذف على التخلص من أحد المتغيرين والحصول على معادلة في المتغير الآخر.

مثال (٣٠) استخدم طريقة الحذف لحل النظام

$$3x + y = 5 \qquad (١)$$

$$3x + 4y = 11 \qquad (٢)$$

الحل

بضرب المعادلة (١) بالعدد -1 والجمع نحصل على

$$3y = 6$$

من ذلك نجد أن $y = 2$. الآن بالتعويض عن y بالمعادلة (١) نجد أن

$$3x + 2 = 5$$
$$3x = 3$$
$$x = 1$$

إذن، حل النظام هو $(x, y) = (1, 2)$. ◇

(٢.١٠) طريقة التعويض [Substitution Method]

نستخدم هنا إحدى المعادلتين للحصول على متغير بدلالة المتغير الآخر ثم نقوم بتعويض ذلك في المعادلة الأخرى لنحصل على معادلة في متغير واحد.

مثال (٣١) حل النظام المقدم في المثال (٣٠) بطريقة التعويض.

الحل

من المعادلة (١) نجد أن $y = 5 - 3x$. بالتعويض عن y في المعادلة (٢) نجد أن

$$\begin{aligned} 3x + 4(5 - 3x) &= 11 \\ 3x + 20 - 12x &= 11 \\ -9x &= -9 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

بالتعويض عن قيمة x في المعادلة $y = 5 - 3x$ نجد أن $y = 5 - 3 \times 1 = 2$.

إذن، حل النظام هو $(x, y) = (1, 2)$. ◇

مثال (٣٢) اشترى تاجر 120 آلة حاسبة بثمن x ريالاً لكل منها واشترى 100 كتاباً بثمن y ريالاً لكل منها. ثم وضع 6 الآت حاسبة و 5 كتب في كل كيس وباع الكيس بمبلغ $9x + 6y$ ريالاً. إذا كان المبلغ الذي دفعه التاجر ثمن الآلات الحاسبة والكتب هو 8000 ريالاً وكانت نسبة ربحه تساوي 38% فجد كلاً من x و y .

الحل

الثمن الذي دفعه التاجر هو $120x + 100y$ ريالاً. عدد الأكياس التي باعها التاجر هو $120 \div 6 = 20$ (أو $100 \div 5 = 20$). المبلغ الذي حصل عليه التاجر من المبيعات هو $20(9x + 6y) = 180x + 120y$ ريالاً.الآن، لدينا

$$120x + 100y = 8000 \quad (١)$$

مكسب التاجر هو

$$180x + 120y - (120x + 100y) = 0.38 \times 8000$$

$$60x + 20y = 3040 \quad (٢)$$

بضرب المعادلة (٢) بالعدد -2 وإضافة الناتج إلى المعادلة (١) نجد أن

$$60y = 1920$$

$$y = \frac{1920}{60} = 32 \text{ ريال}$$

بالتعويض في المعادلة (١) نجد أن

$$120x + 100(32) = 8000$$
$$120x = 8000 - 3200$$
$$120x = 4800$$
$$x = 40 .$$

◇

(٢.١١) مسائل محلولة

(١) ما قيمة x التي تحقق المعادلة $\dfrac{3+2x}{x-3} = 4$ ؟

(أ) $\dfrac{9}{2}$ (ب) $-\dfrac{9}{2}$ (ج) $\dfrac{15}{2}$ (د) $-\dfrac{15}{2}$

(٢) [Mathcounts 1990] يوجد بحوزة أحمد 16 ورقة نقدية من فئتي الخمسة ريالات والعشرة ريالات. إذا كان مجموع ما بحوزة أحمد هو 105 ريالاً فما عدد الأوراق النقدية من فئة الخمسة ريالات التي يملكها أحمد ؟

(أ) 11 (ب) 5 (ج) 8 (د) 10

(٣) ما جذرا المعادلة $5 - 4x^2 = 3(2x+1) + 2$ ؟

(أ) 0 و $\dfrac{3}{2}$ (ب) 0 و $-\dfrac{3}{2}$ (ج) 0 و $\dfrac{2}{3}$ (د) 0 أو $-\dfrac{2}{3}$

(٤) ما جذرا المعادلة $x + \dfrac{2}{x} = 3$ ؟

(أ) -1 و -2 (ب) -1 و 2 (ج) 1 و -2 (د) 1 و 2

(٥) ما جذرا المعادلة $5x^2 - 15x + 2 = 0$ ؟

(أ) $-\dfrac{3}{2} \pm \sqrt{\dfrac{37}{20}}$ (ب) $\dfrac{3}{2} \pm \sqrt{\dfrac{37}{20}}$

(ج) $-\dfrac{5}{2} \pm \sqrt{\dfrac{36}{21}}$ (د) $\dfrac{5}{2} \pm \sqrt{\dfrac{36}{21}}$

(٦) ما جذرا المعادلة $(x+2)(x-1) = 2 - 3x$ ؟

(أ) $-2 \pm 2\sqrt{2}$ (ب) $2 \pm 2\sqrt{2}$

(ج) $-3 \pm 3\sqrt{2}$ (د) $3 \pm 3\sqrt{2}$

(٧) ما جذرا المعادلة $\dfrac{x-1}{2-x} = 2x + 1$ ؟

(أ) $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{7}$ (ب) $-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{7}$

(ج) $1 \pm \sqrt{7}$ (د) $-1 \pm \sqrt{7}$

(٨) ما قيمة m التي تجعل للمعادلة $x^2 + 4x + m = 0$ جذران مكرران ؟

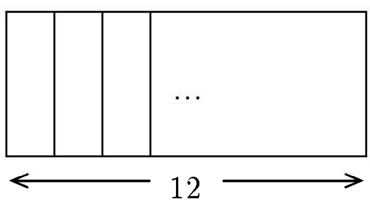
(أ) 4 (ب) 5 (ج) $\frac{1}{4}$ (د) $\frac{1}{5}$

(٩) إذا كان جذرا المعادلة $ax^2 - 6x + a - 2 = 0$ حيث $a \neq 0$ هما α و 2α فما قيم a ؟

(أ) $a = 2$ ، $a = 4$ (ب) $a = -2$ ، $a = 4$

(ج) $a = -2$ ، $a = -4$ (ج) $a = 2$ ، $a = -4$

(١٠) استخدمنا ورق جدران متساوية العرض لتغطية جدار طوله 12 متر كما هو مبين في الشكل.



إذا استبدلنا ورق الجدران بورق آخر يزيد عرضه كل منها بمقدار 0.2 متر عن عرض الورق السابق لاستطعنا توفير ورقتين. ما عرض ورق الجدران المستخدم لغرض التوفير ؟

(أ) $\frac{1}{2}$ متر (ب) 1متر (ج) $1\frac{1}{2}$ متر (د) 2 متر

(١١) اتفق مجموعة من الرجال المتقاعدين على القيام برحلة فاستأجروا حافلة بمبلغ 1600 ريال. في اللحظة الأخيرة تخلف 8 منهم بسبب تعرضهم لوعكة

صحية مما أدى إلى أن يدفع كل من بقية الرجال 10 ريالات زيادة لتغطية أجرة الحافلة. ما هو عدد الرجال الذين قاموا بالرحلة ؟

(أ) 32 (ب) 40 (ج) 48 (د) 56

(١٢) ما طول المستطيل الناشئ عن ثني سلك طوله 20 سم إذا علمت أن مساحة المستطيل تساوي 30 سم٢ ؟

(أ) 3 سم (ب) 5 سم

(ج) 6 سم (د) لا يمكن إنشاء مثل هذا المستطيل

(١٣) عددان صحيحان موجبان زوجيان متتاليان حاصل ضربهما يساوي 360. ما مجموعهما ؟

(أ) 18 (ب) 20 (ج) 38 (د) 40

(١٤) لنفرض أن المستقيم $y = 3x + c$ يقطع $y = x^2 + x - 5$ في نقطتين مختلفتين. إحدى قيم c التي تحقق ذلك هي

(أ) 0 (ب) -8 (ج) -10 (د) -12

(١٥) إذا كان α و β جذري المعادلة $2x^2 - 3x = 4$ فما معادلة الدرجة الثانية التي لها الجذرين $\frac{1}{\alpha}$ و $\frac{1}{\beta}$ ؟

(أ) $3x^2 + 3x = 2$ (ب) $2x^2 + 3x = 4$

(ج) $4x^2 + 3x = 2$ (د) $4x^2 - 3x = 2$

(١٦) مثلث قائم الزاوية يزيد طول أحد ضلعي القائمة عن طول ضلع القائمة الآخر بمقدار 7 سم ويزيد طول الوتر عن طول ضلع القائمة الأكبر بمقدار 2 سم. ما طول الوتر ؟

(أ) 15 سم (ب) 17 سم (ج) 19 سم (د) 21 سم

(١٧) [AHSME 1968] إذا كان x و y عددين غير صفريين يحققان $x = 1 + \frac{1}{y}$ و $y = 1 + \frac{1}{x}$ فإن y يساوي

(أ) $x - 1$ (ب) $1 - x$ (ج) $-x$ (د) x

(١٨) [Mathcounts 1990] قسمنا العدد 66 إلى عددين كل منهما أصغر من 66. إذا كان أحدهما يزيد بمقدار 3 عن ضعف العدد الآخر فما العدد الأكبر ؟

(أ) 21 (ب) 33 (ج) 41 (د) 45

(١٩) [AHSME 1960] للمعادلة $x - \frac{7}{x-3} = 3 - \frac{7}{x-3}$

(أ) عدد غير منته من الجذور الصحيحة (ج) لا يوجد لها جذور

(ب) جذر صحيح واحد فقط (د) جذران متساويان غير صحيحين

(٢٠) $ABCD$ مستطيل يزيد طوله عن ضعف عرضه بمقدار 3 سم. $PQRS$ مستطيل آخر يزيد عرضه عن عرض المستطيل $ABCD$ بمقدار 2 سم ويزيد طوله عن ثلاثة أمثال عرضه بمقدار 4 سم. إذا كانت مساحة المستطيل $PQRS$ هي ضعف مساحة المستطيل $ABCD$ فما عرض المستطيل $ABCD$ ؟

(أ) $5 + 3\sqrt{5}$ سم (ب) $5 - 3\sqrt{5}$ سم

(ج) $5 + 5\sqrt{3}$ سم (د) $5 + 3\sqrt{3}$ سم

(٢١) [MAΘ 1991] يحتاج رجل 9 أيام لإنهاء عمل ويحتاج إبنه 16 يوماً لإنهاء

العمل نفسه. بدأ الرجل وإبنه العمل معاً وبعد 4 أيام توقف الإبن عن العمل وأنهى والده العمل بمفرده. ما عدد الأيام الكلي الذي عمل بها الرجل لإنجاز العمل ؟

(أ) $2\frac{3}{4}$ (ب) $4\frac{3}{4}$ (ج) $6\frac{3}{4}$ (د) $8\frac{3}{4}$

(٢٢) [AHSME 1988] ما قيمة c التي تجعل المساواة $(x+2)(x+b)=x^2+cx+6$ محققة ؟

(أ) 3 (ب) -2 (ج) 5 (د) -3

(٢٣) اشترى تاجر عدداً من أطباق المائدة بمبلغ 120 ريالاً. باع منها 16طبقاً بربح 4 ريالات للطبق الواحد وباع باقي الأطباق بسعر 6 ريالات للطبق الواحد. إذا كان مجموع مبيعات التاجر منها يساوي 192 ريالاً فما عدد الأطباق التي اشتراها التاجر ؟

(أ) 20 (ب) 22 (ج) 24 (د) 26

(٢٤) [AHSME 1968 , AMC12B 2002] إذا كان $m\neq 0$ و $n\neq 0$هما جذري المعادلة $x^2+mx+n=0$ فإن مجموع الجذران هو:

(أ) $-\frac{1}{2}$ (ب) -1 (ج) $\frac{1}{2}$ (د) 1

(٢٥) غادر أحمد المدينة A قاصداً المدينة B التي تبعد مسافة 15 كم عن المدينة A راكباً دراجته بسرعة منتظمة مقدارها x كم في الساعة. إذا زاد أحمد سرعته بمقدار 4 كم في الساعة فإنه سيصل المدينة B قبل الموعد المحدد بنصف ساعة. ما سرعة أحمد الأصلية ؟

(أ) $2\sqrt{31}-2$ كم في الساعة (ب) $2\sqrt{31}+2$ كم في الساعة

(ج) $4\sqrt{31}-2$ كم في الساعة (د) $3\sqrt{31}+2$ كم في الساعة

(٢٦) [AHSME 1970] لنفرض أن p و q عددان موجبان. إذا كان الفرق بين جذري المعادلة $x^2+px+q=0$ يساوي 1 فإن p يساوي:

(أ) $\sqrt{4q-1}$ (ب) $q+1$ (ج) $\sqrt{4q+1}$ (د) $q-1$

(٢٧) [AMC12 2000] لنفرض أن $f\left(\dfrac{x}{3}\right)=x^2+x+1$. عندئذ، مجموع جذري المعادلة $f(3z)=7$ هو

(أ) $-\dfrac{1}{3}$ (ب) $-\dfrac{1}{9}$ (ج) $\dfrac{5}{9}$ (د) $\dfrac{5}{3}$

(٢٨) ذهبت لينا وباسمة للتسوق معاً. اشترت لينا 2 كغم من اللحم و 6 كغم من السمك ودفعت ثمن مشترياتها 224 ريالاً. أما باسمة فاشترت ضعف كمية اللحم ونصف كمية السمك التي اشترتها لينا ودفعت ثمن مشترياتها 250 ريالاً. ما ثمن كيلو غرام اللحم ؟

(أ) 22 (ب) 46 (ج) 50 (د) 54

(٢٩) اشترى علي خمسة أشمغة من النوع الممتاز واستنتج أنه يستطيع توفير 100 ريال لو أنه اشترى خمسة أشمغة من النوع الجيد عوضاً عن أشمغة النوع الممتاز. أما سعيد فاشترى تسعة أشمغة من النوع الممتاز ووجد أن بإمكانه أن يشتري ثلاثة أشمغة أخرى لو غير رأيه واشترى النوع الجيد. ما ثمن الشماغ من النوع الجيد ؟

(أ) 40 (ب) 60 (ج) 80 (د) 100

(٣٠) [AHSME 1957] إذا كان $\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}+1=0$ فما قيمة $4x$؟

(أ) 4 (ب) 5 (ج) $\frac{5}{4}$ (د) $\frac{4}{5}$

(٣١) [AHSME 1959] إذا كان r و s هما جذري المعادلة $x^2-3x+1=0$ فإن r^2+s^2 هو:

(أ) عدد صحيح موجب (ب) عدد كسري ولكنه غير صحيح

(ج) عدد صحيح موجب أصغر من 4 (د) عدد صحيح موجب أكبر من 9

(٣٢) [MAΘ1990] يستطيع سلطان أن ينجز عملاً بعشرة أيام ولكن بمقدور وليد أن ينجز العمل نفسه بستة عشر يوماً. بعد أن عمل وليد بمفرده لمدة ثلاثة أيام انضم إليه سلطان واشتغلا معاً لإنجاز العمل. ما عدد الأيام التي اشتغلها سلطان ؟

(أ) 3 (ب) 4 (ج) 5 (د) 6

(٣٣) [MAΘ 1990] يملك سعيد 301 ريالاً من فئات الريال، الخمسة ريالات، العشرة ريالات. إذا كان عدد ما يملكه من فئة الريالات يزيد بمقدار 4 عن عدد ما يملكه من فئة العشرة ريالات وعدد ما يملكه من فئة الخمسة ريالات يزيد بمقدار 1 عن عدد ما يملكه من فئة الريالات. ما عدد ما يملكه سعيد من فئة العشرة ريالات ؟

(أ) 17 (ب) 21 (ج) 22 (د) 24

(٣٤) [AHSME 1958] عددان مجموعهما يساوي 10 وحاصل ضربهما يساوي 20 . ماجموع مقلوبيهما ؟

(أ) $\frac{1}{10}$ (ب) 10 (ج) $\frac{1}{2}$ (د) 2

(٣٥) ما قيمة a التي تجعل للمعادلتين

$x^2 + ax + 1 = 0$ و $x^2 - x - a = 0$

جذراً حقيقياً مشتركاً ؟

(أ) -1 (ب) 1 (ج) 2 (د) 3

(٢,١٢) حلول المسائل

(١) الإجابة هي (ج): المعادلة تكافئ المعادلة

$$\begin{aligned} 4x - 12 &= 3 + 2x \\ 4x - 2x &= 3 + 12 \\ 2x &= 15 \\ x &= \frac{15}{2} . \end{aligned}$$

(٢) الإجابة هي (أ): لنفرض أن x هو عدد الأوراق النقدية ذات فئة الخمسة ريالات. عندئذ، $16 - x$ هو عدد الأوراق النقدية ذات فئة العشرة ريالات. وبما أن مجموع النقود يساوي 105 ريالاً فنرى أن

$$\begin{aligned} 5x + 10(16 - x) &= 105 \\ 160 - 5x &= 105 \\ -5x &= -55 \\ x &= 11 . \end{aligned}$$

(٣) الإجابة هي (ب):

$$\begin{aligned} 5 - 4x^2 &= 3(2x + 1) + 2 \\ 5 - 4x^2 &= 6x + 3 + 2 \\ -4x^2 - 6x &= 0 \\ -2x(2x + 3) &= 0 \end{aligned}$$

$$-2x = 0 \quad \text{أو} \quad 2x + 3 = 0$$

إذن، $x_1 = 0$ و $x_2 = -\frac{3}{2}$.

(٤) الإجابة هي (د):

$$x + \frac{2}{x} = 3$$

$$x^2 + 2 = 3x$$
$$x^2 - 3x + 2 = 0$$
$$(x-1)(x-2) = 0$$
$$x - 1 = 0 \quad \text{أو} \quad x - 2 = 0$$

إذن، $x_1 = 1$ و $x_2 = 2$.

(٥) الإجابة هي (ب): باستخدام القانون العام نجد أن

$$x = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 4 \times 5 \times 2}}{10} = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 40}}{10}$$
$$= \frac{15 \pm \sqrt{185}}{10} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{5 \times 37}{100}} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{37}{20}}$$

(٦) الإجابة هي (أ):

$$(x+2)(x-1) = 2 - 3x$$
$$x^2 + x - 2 = 2 - 3x$$
$$x^2 + 4x - 4 = 0$$

الآن باستخدام القانون العام نجد أن

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 1 \times (-4)}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{32}}{2}$$
$$= \frac{-4 \pm 4\sqrt{2}}{2} = -2 \pm 2\sqrt{2}$$

(٧) الإجابة هي (أ):

$$\frac{x-1}{2-x} = 2x + 1$$
$$(2x+1)(2-x) = x - 1$$
$$4x - 2x^2 + 2 - x = x - 1$$
$$-2x^2 + 2x + 3 = 0$$
$$2x^2 - 2x - 3 = 0$$

الآن باستخدام القانون العام نجد أن

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4-4\times2\times(-3)}}{4}=\frac{2\pm\sqrt{28}}{4}$$
$$=\frac{2\pm2\sqrt{7}}{4}=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{7}$$

(٨) الإجابة هي (أ): بحساب المميز نجد أن $\Delta = 16-4m$.

ولكي يكون جذرا المعادلة مكرران فيجب أن يكون $\Delta = 0$. أي أن $16-4m=0$. وبهذا يكون $m=4$.

(٩) الإجابة هي (ب): لدينا $\alpha+2\alpha=\frac{6}{a}$ و $\alpha(2\alpha)=\frac{a-2}{a}$

أي أن
$$\alpha=\frac{2}{a} \tag{١}$$
$$2\alpha^2=\frac{a-2}{a} \tag{٢}$$

بالتعويض عن قيمة α في المعادلة الثانية نرى أن

$$2\left(\frac{4}{a^2}\right)=\frac{a-2}{a}$$
$$\frac{8}{a}=a-2$$
$$a^2-2a=8$$
$$a^2-2a-8=0$$
$$(a-4)(a+2)=0$$
$$a-4=0 \quad \text{أو} \quad a+2=0$$

إذن، $a=4$ أو $a=-2$.

(١٠) الإجابة هي (ب): لنفرض أن x متر هو عرض كل من أوراق الجدران المستخدمة لتغطية الجدار. عندئذ، عدد الأوراق التي نحتاجها لتغطية الجدار

هو $\frac{12}{x}$. الآن، إذا كان عرض كل من أوراق الجدران يساوي $x+\frac{1}{5}$ لكان العدد الذي نحتاجه لتغطية الجدار يساوي $\frac{12}{x}-2$. إذن،

$$\begin{aligned}
\left(x+\frac{1}{5}\right)\left(\frac{12}{x}-2\right) &= 12\\
12-2x+\frac{12}{5x}-\frac{2}{5} &= 12\\
-2x+\frac{12}{5x}-\frac{2}{5} &= 0\\
-10x^2+12-2x &= 0\\
5x^2+x-6 &= 0\\
(5x+6)(x-1) &= 0
\end{aligned}$$

إذن، $x=1$ أو $x=-\frac{6}{5}$. وبما أن $x>0$ فنجد أن $x=1$.

(١١) الإجابة هي (أ): لنفرض أن عدد الرجال الذين اتفقوا على القيام بالرحلة هو x. إذن، المفروض أن يدفع كل منهم $\frac{1600}{x}$ ريالاً. وبعد تخلف 8 منهم تحتم على كل من باقي الرجال وعددهم $x-8$ أن يدفع $10+\frac{1600}{x}$ لتغطية النقص. إذن،

$$\begin{aligned}
(x-8)\left(\frac{1600}{x}+10\right) &= 1600\\
(x-8)\left(\frac{1600+10x}{x}\right) &= 1600\\
(x-8)(1600+10x) &= 1600x\\
1600x+10x^2-12800-80x &= 1600x\\
10x^2-80x-12800 &= 0\\
x^2-8x-1280 &= 0
\end{aligned}$$

باستخدام القانون العام لحل المعادلة نجد أن

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4(1)(-1280)}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{5184}}{2} = \frac{8 \pm 72}{2}$$

إذن، $40 = \frac{8+72}{2} = x$. وبهذا يكون عدد الرجال الذين أكملوا الرحلة هو $32 = 8 - x$.

(١٢) الإجابة هي (د): لنفرض أن طول المستطيل هو x وعرضه هو y. عندئذ،

$$x + y = 10$$
$$xy = 30$$

من المعادلة الأولى نرى أن $x - 10 = y$. وبالتعويض في المعادلة الثانية نحصل على

$$x(10 - x) = 30$$
$$10x - x^2 = 30$$
$$x^2 - 10x + 30 = 0$$

مميز المعادلة هو $\Delta = b^2 - 4ac = 100 - 120 = -20$ وهذا عدد سالب. إذن، لا توجد حلول حقيقية للمعادلة.

(١٣) الإجابة هي (ج): لنفرض أن العدد الأصغر هو x. عندئذ، يكون العدد الأكبر هو $x + 2$. من ذلك نجد

$$x(x + 2) = 360$$
$$x^2 + 2x - 360 = 0$$
$$(x + 20)(x - 18) = 0$$
$$x = -20 \quad \text{أو} \quad x = 18$$

بما أن x موجب فنرى أن $x = 18$. ومن ثم $20 = 2 + x$. ويكون مجموع العددين هو 38.

(١٤) الإجابة هي (أ) : نقاط التقاطع تتحقق عندما يكون

$$x^2 + x - 5 = 3x + c$$
$$x^2 - 2x - (c+5) = 0$$

مميز المعادلة هو $\Delta = 4 + 4(c+5) = 24 + 4c$. ولكي يكون هناك نقطتا تقاطع مختلفتان فيجب أن يكون $\Delta > 0$. أي أن $c > -6$. ولذا فالإجابة الصحيحة هي (أ).

(١٥) الإجابة هي (ج): بما أن α و β جذرا المعادلة $2x^2 - 3x - 4 = 0$ فإن $\alpha + \beta = \frac{3}{2}$ و $\alpha\beta = -2$.

المعادلة التي جذراها هما $\frac{1}{\alpha}$ و $\frac{1}{\beta}$ هي

$$a\left(x - \frac{1}{\alpha}\right)\left(x - \frac{1}{\beta}\right) = 0 \quad \text{حيث} \quad a \neq 0$$
$$\left(x - \frac{1}{\alpha}\right)\left(x - \frac{1}{\beta}\right) = 0$$
$$\left(\frac{\alpha x - 1}{\alpha}\right)\left(\frac{\beta x - 1}{\beta}\right) = 0$$
$$(\alpha x - 1)(\beta x - 1) = 0$$
$$\alpha\beta x^2 - (\alpha + \beta)x + 1 = 0$$
$$-2x^2 - \frac{3}{2}x + 1 = 0$$
$$4x^2 + 3x - 2 = 0 \ .$$

(١٦) الإجابة هي (ب): لنفرض أن طول ضلع القائمة الأطول يساوي x سم. عندئذ، يكون طول ضلع القائمة الأصغر يساوي $x - 7$ وطول الوتر يساوي $x + 2$. استناداً إلى مبرهنة فيثاغورس نجد أن

$$(x+2)^2 = x^2 + (x-7)^2$$
$$x^2 + 4x + 4 = x^2 + x^2 - 14x + 49$$
$$x^2 - 18x + 45 = 0$$
$$(x-3)(x-15) = 0$$

إذن، $x = 3$ أو $x = 15$.

إذا كان $x = 3$ فيكون $x - 7 = -4$ وهذا مرفوض. إذن، $x = 15$ ويكون طول الوتر $x + 2 = 17$.

(١٧) الإجابة هي (د):

$$x = 1 + \frac{1}{y}$$
$$xy = y + 1$$

أيضاً،

$$y = 1 + \frac{1}{x}$$
$$xy = 1 + x$$

إذن، $x + 1 = 1 + y$ ومن ذلك نجد أن $x = y$.

(١٨) الإجابة هي (د): نفرض أن العدد الأصغر هو x. عندئذ يكون العدد الأكبر هو $2x + 3$. الآن،

$$x + 2x + 3 = 66$$
$$3x = 63$$
$$x = 21$$

إذن، العدد الأكبر هو $2x + 3 = 2(21) + 3 = 45$.

(١٩) الإجابة هي (ج): بإضافة $\frac{7}{x-3}$ للطرفين نحصل على $x = 3$. ولكن كل من الطرفين غير معرف عند $x = 3$. إذن، لا توجد قيم تحقق المعادلة.

(٢٠) الإجابة هي (أ): نفرض أن عرض المستطيل $ABCD$ هو x. عندئذ، طول المستطيل $ABCD$ هو $2x+3$ و عرض المستطيل $PQRS$ هو $x+2$.

طول المستطيل $PQRS$ هو $3(x+2)+4=3x+10$. الآن،

$$(x+2)(3x+10)=2x(2x+3)$$
$$3x^2+16x+20=4x^2+6x$$
$$x^2-10x-20=0$$

وباستخدام القانون العام نجد أن

$$x=\frac{10\pm\sqrt{100+80}}{2}=\frac{10\pm\sqrt{180}}{2}$$
$$=\frac{10\pm 6\sqrt{5}}{2}=5\pm 3\sqrt{5}$$

ولكن $5-3\sqrt{5}$ عدد سالب. إذن، عرض المستطيل $ABCD$ هو $x=5+3\sqrt{5}$.

(٢١) الإجابة هي (ج): عند عمل الإبن والأب معاً فإنهما ينجزان جزءاً من العمل يساوي $\frac{1}{9}+\frac{1}{16}=\frac{25}{144}$ في اليوم الواحد. ولذا يكون مقدار ما أنجزاه معاً في أربعة أيام يساوي $4\left(\frac{25}{144}\right)=\frac{25}{36}$. ولهذا يكون على الأب إنجاز الجزء $\frac{11}{36}$ من العمل بمفرده. لنفرض أن x هو عدد الأيام التي عمل فيها الأب بمفرده. عندئذ،

$$x\left(\frac{1}{9}\right)=\frac{11}{36}$$
$$36x=99$$

$$x = \frac{99}{36} = 2\frac{3}{4}$$

إذن، عدد أيام عمل الأب الكلي يساوي $4 + 2\frac{3}{4} = 6\frac{3}{4}$.

(٢٢) الإجابة هي (ج): جذرا المعادلة $(x+2)(x+b) = 0$ هما $x_1 = -2$ و $x_2 = -b$. وهذان هما جذرا المعادلة $x^2 + cx + 6 = 0$. إذن، $x_1 x_2 = 2b = 6$ ونجد أن $b = 3$. كذلك،

$$x_1 + x_2 = -2 - b = -c$$
$$-2 - 3 = -c$$
$$c = 5\ .$$

(٢٣) الإجابة هي (ج): لنفرض أن x هو عدد الأطباق التي اشتراها التاجر. عندئذ، مجموع المبيعات هو $16(\frac{120}{x} + 4) \times 6(x-16)$. إذن،

$$16\left(\frac{120}{x} + 4\right) + 6(x-16) = 192$$
$$3x^2 - 112x + 960 = 0$$

$$x = \frac{112 \pm \sqrt{112^2 - 4(3)(960)}}{6} = \frac{112 \pm \sqrt{1024}}{6} = \frac{112 \pm 32}{6}$$

إذن، $x_1 = \frac{112+32}{6} = 24$ و $x_2 = \frac{112-32}{6} = 13.3$.

x_2 مرفوض لأن عدد الأطباق يجب أن يكون عدداً صحيحاً. ولذا فإن $x = 24$.

(٢٤) الإجابة هي (ب): لدينا

$$mn = n$$
$$m + n = -m$$

من ذلك نرى أن $m = 1$ و $n = -2m = -2$. إذن،

. $m + n = 1 - 2 = -1$

(٢٥) الإجابة هي (أ): الزمن اللازم لإنهاء الرحلة بسرعة x كم في الساعة يساوي $\frac{15}{x}$ ساعة. الزمن الازم لإنهاء الرحلة بعد زيادة السرعة يساوي $\frac{15}{x+4}$ ساعة. إذن،

$$\begin{aligned}
\frac{15}{x} - \frac{15}{x+4} &= \frac{1}{2}\\
15(x+4) - 15x &= \frac{1}{2}x(x+4)\\
15x + 60 - 15x &= \frac{x^2+4x}{2}\\
x^2 + 4x - 120 &= 0\\
x = \frac{-4 \pm \sqrt{496}}{2} &= \frac{-4 \pm 4\sqrt{31}}{2} = -2 \pm 2\sqrt{31}
\end{aligned}$$

إذن، سرعة أحمد الأصلية هي $x = -2 + 2\sqrt{31}$ كم في الساعة.

(٢٦) الإجابة هي (ج): لنفرض أن α أحد جذري المعادلة. عندئذ، $\alpha + 1$ هو الجذر الآخر.الآن،

$2\alpha + 1 = -p$ و $\alpha(\alpha+1) = q$. من ذلك نرى أن

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{-1-p}{2}\\
\alpha + 1 &= \frac{-1-p}{2} + 1 = \frac{1-p}{2}\ .
\end{aligned}$$

وبهذا يكون

$$q = \alpha(\alpha+1) = \left(\frac{-1-p}{2}\right)\left(\frac{1-p}{2}\right) = \frac{p^2-1}{4}$$

إذن، $p^2 = 4q + 1$ ويكون $p = \sqrt{4q+1}$.

(٢٧) الإجابة هي (ب): لنفرض أن $y = \frac{x}{3}$. عندئذ،

$$f(y) = (3y)^2 + 3y + 1 = 9y^2 + 3y + 1 \,.$$

وبهذا يكون

$$\begin{aligned} f(3z) = 81z^2 + 9z + 1 &= 7 \\ 81z^2 + 9z + 1 &= 7 \\ 81z^2 + 9z - 6 &= 0 \\ 27z^2 + 3z - 2 &= 0 \\ (9z-2)(3z+1) &= 0 \end{aligned}$$

وبهذا فإن $z_1 = -\frac{1}{3}$ و $z_2 = \frac{2}{9}$. إذن،

$$z_1 + z_2 = -\frac{1}{3} + \frac{2}{9} = -\frac{1}{9} \,.$$

(٢٨) الإجابة هي (ب): لنفرض أن ثمن كيلو غرام اللحم هو x ريالاً وثمن كيلوغرام السمك هو y ريالاً. إذن، من معلومات المسألة نحصل على النظام

$$\begin{aligned} 2x + 6y &= 224 \\ 4x + 3y &= 250 \end{aligned}$$

بضرب المعادلة الثانية بالعدد -2 وإضافة الناتج إلى المعادلة الأولى نحصل على

$$\begin{aligned} -6x &= -276 \\ x &= \frac{-276}{-6} = 46 \,. \end{aligned}$$

(٢٩) الإجابة هي (ب): لنفرض أن x ثمن الشماغ الواحد من النوع الممتاز وأن y ثمن الشماغ الواحد من النوع الجيد. من معلومات المسألة نحصل على

النظام

$$5x - 5y = 100 \qquad (١)$$

$$9x - 12y = 0 \qquad (٢)$$

بضرب المعادلة (١) بالعدد -9 والمعادلة (٢) بالعدد 5 نحصل على النظام المكافئ

$$-45x + 45y = -900 \qquad (٣)$$

$$45x - 60y = 0 \qquad (٤)$$

بجمع المعادلتين (٣) و (٤) نجد أن

$$-15y = -900$$

$$y = \frac{-900}{-15} = 60$$ ريال.

(٣٠) الإجابة هي (ب):

$$\begin{aligned}
\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1} + 1 &= 0 \\
\sqrt{x-1} &= \sqrt{x+1} - 1 \\
(x-1) &= (x+1) - 2\sqrt{x+1} + 1 \\
x - 1 - x - 1 - 1 &= -2\sqrt{x+1} \\
-3 &= -2\sqrt{x+1} \\
9 &= 4(x+1) \\
9 &= 4x + 4 \\
4x &= 9 - 4 = 5
\end{aligned}$$.

(٣١) الإجابة هي (أ): لاحظ أن

$rs = 1$ و $r + s = 3$. من ذلك نرى أن

$$\begin{aligned}
r^2 + s^2 = r^2 + 2rs + s^2 - 2rs = (r+s)^2 - 2rs &= 3^2 - 2(1) \\
&= 7
\end{aligned}$$

إذن، الإجابة (أ) هي الصائبة.

(٣٢) الإجابة هي (ج): ما أنجزه وليد في ثلاثة أيام يساوي $\frac{3}{16}$ من العمل. بعد انضمام سلطان يكون بمقدور الإثنين معاً أن ينجزا $\frac{26}{160} = \frac{1}{16} + \frac{1}{10}$ من العمل في يوم واحد. لنفرض أن x عدد الأيام التي اشتغلها سلطان. عندئذ،

$$x\left(\frac{26}{160}\right) = \frac{13}{16}$$

$$x = \frac{(13)(160)}{(16)(26)} = 5 \, .$$

(٣٣) الإجابة هي (أ): لنفرض أن عدد فئة العشرة ريالات التي يملكها سعيد هو x. عندئذ، عدد فئات الريال هو $x + 4$ وعدد فئات الخمسة ريالات هو $x + 4 + 1 = x + 5$. إذن،

$$10x + (x + 4) + 5(x + 5) = 301$$

$$16x + 29 = 301$$

$$16x = 301 - 29 = 272$$

$$x = \frac{272}{16} = 17 \, .$$

(٣٤) الإجابة هي (ج): لنفرض أن العددين هما x و y. عندئذ، $x + y = 10$ و $xy = 20$. الآن،

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{y + x}{xy} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} \, .$$

(٣٥) الإجابة هي (ج): لكي تشترك المعادلتين في جذر فيجب أن يكون

$$x^2 + ax + 1 = x^2 - x - a$$
$$ax + x + a + 1 = 0$$
$$x(a+1) + (a+1) = 0$$
$$(x+1)(a+1) = 0$$

إذن، $x = -1$ أو $a = -1$.

إذا كان $a = -1$ فإن $x^2 - x + 1 = 0$. وهذه المعادلة ليس لها جذور حقيقية لأن مميزها

$$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0.$$

أما إذا كان $x = -1$ فإن

$$a = x^2 - x = (-1)^2 - (-1) = 2.$$

حينئذ،تكون المعادلة الأولى

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$
$$(x+1)^2 = 0$$
$$x = -1$$

وتكون المعادلة الثانية

$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$(x-2)(x+1) = 0$$
$$x = 2 \quad \text{أو} \quad x = -1$$

وبهذا فالحل المشترك هو $x = -1$.

(٢.١٣) مسائل غير محلولة

(١) قيمة x التي تحقق المعادلة $2x - 19 = 6(x - 2)$ هي

(أ) $-\frac{7}{4}$ (ب) $\frac{7}{4}$ (ج) $-\frac{4}{7}$ (د) $\frac{4}{7}$

(٢) ما قيمة x بدلالة a و b التي تحقق المعادلة $a = \frac{ax - b}{b(a - bx)}$ ؟

(أ) $\frac{b(a^2 - 1)}{a(b^2 + 1)}$ (ب) $\frac{b(a^2 + 1)}{a(b^2 + 1)}$

(ج) $\frac{b^2(a + 1)}{a(b^2 + 1)}$ (د) $\frac{b^2(a + 1)}{a(b^2 - 1)}$

(٣) ما قيمة y التي تحقق المعادلة $10y - (21 - y) = 1$ ؟

(أ) 2 (ب) -2 (ج) 1 (د) -1

(٤) [AHSME 1957] إذا كان $x : y : z$ هو $2 : 3 : 5$ وكان مجموع الثلاثة أعداد x، y، z يساوي 100 وكان $y = ax - 10$ فما قيمة a ؟

(أ) 2 (ب) $\frac{3}{2}$ (ج) 3 (د) $\frac{5}{2}$

(٥) [AHSME 1956] صرح مهندس بأنه يستطيع إنجاز العمل المكلف به في ثلاثة أيام باستخدام الآلات المتوفرة لديه وأنه إذا أضيفت ثلاثة آلات أخرى فإنه يستطيع إنجاز العمل في يومين. على افتراض أن جميع الآلات تعمل بالكفاءة نفسها فما عدد الأيام اللازمة لإنجاز العمل باستخدام آلة واحدة فقط ؟

(أ) 16 (ب) 17 (ج) 18 (د) 19

(٦) [AHSME 1954] حلول المعادلة

$$\frac{2x^2}{x-1}-\frac{2x+7}{3}+\frac{4-6x}{x-1}+1=0$$ هي:

(أ) 1 و 4 (ب) 1 فقط (ج) 4 فقط (د) -1 و -4

(٧) [AHSME 1955] القيم التي تحقق المعادلة $\frac{2}{x-2}=\frac{1}{x-1}$ هي:

(أ) $x=0$ فقط (ب) $x=1$ و $x=2$

(ج) $x=1$ (د) $x=2$ فقط

(٨) [AHSME 1956] قيم x التي تحقق المعادلة

$3y^2+y+4=2(6x^2+y+2)$ عندما يكون $y=2x$ هي:

(أ) جميع قيم x الحقيقية (ب) $x=0$ فقط

(ج) جميع قيم x الصحيحة (د) لا توجد قيم لـــ x

(٩) [AHSME 1955] إذا كانت a، b، c أعداداً حقيقية تحقق $\sqrt{a+\frac{b}{c}}=a\sqrt{\frac{b}{c}}$ فما قيمة c بدلالة a و b ؟

(أ) $\frac{a\left(b^2-1\right)}{b}$ (ب) $\frac{b\left(a^2-1\right)}{a}$

(ج) $\frac{b^2\left(a-1\right)}{a}$ (د) $\frac{a^2\left(b-1\right)}{b}$

(١٠) [AHSME 1958] ما قيمة x التي تحقق المعادلة $x^2+b^2=(a-x)^2$ ؟

(أ) $\frac{a^2+b^2}{2a}$ (ب) $\frac{b^2-a^2}{2a}$ (ج) $\frac{a^2-b^2}{2}$ (د) $\frac{a^2-b^2}{2a}$

(١١) [AHSME 1966] ما عدد القيم x التي تحقق المعادلة

$$\frac{2x^2-10x}{x^2-5x}=x-3 \text{ ؟}$$

(أ) 0 (ب) 1 (ج) 2 (د) 3

(١٢) [MAΘ 1992] ما قيمة x إذا كان 1 مطروحاً منه مقلوب $x-1$ يساوي مقلوب $1-x$ ؟

(أ) 0 (ب) 1 (ج) 2 (د) -1

(١٣) [MAΘ 1990] ما العدد الأكبر لعددين صحيحين فرديين متتاليين بحيث يكون ثلث العدد الأصغر مضافاً إليه ضعف العدد الأكبر يزيد بمقدار 7 عن مجموع العددين؟

(أ) 13 (ب) 15 (ج) 17 (د) 19

(١٤) [AHSME 1960] إذا كان a و b عددين حقيقين فيكون للمعادلة $3x-5+a=bx+1$ حل عندما:

(أ) $a\neq 2b$ (ب) $a\neq 6$ (ج) $b\neq 0$ (د) $b\neq 3$

(١٥) الفرق بين الجذر الأكبر والجذر الأصغر للمعادلة $2x^2-13x=7$ هو:

(أ) $\frac{13}{2}$ (ب) $-\frac{13}{2}$ (ج) $\frac{15}{2}$ (د) $-\frac{15}{2}$

(١٦) جذرا المعادلة $3x+\frac{2}{x}=-7$ هما

(أ) $-\frac{1}{3}$ و -2 (ب) $-\frac{1}{3}$ و 2 (ج) $\frac{1}{3}$ و -2 (د) $\frac{1}{3}$ و 2

(١٧) [AMC12A 2005] توجد قيمتان للعدد a بحيث يكون للمعادلة $4x^2+ax+8x+9=0$ حل واحد. ما مجموع هاتين القيمتين ؟

(أ) 8 (ب) 20 (ج) -8 (د) -16

(١٨) [AHSME 1951] إذا كان جذرا المعادلة

$$\frac{x(x-1)-(m+1)}{(x-1)(m-1)}=\frac{x}{m}$$

متساويين فما قيمة m ؟

(أ) 1 (ب) $\frac{1}{2}$ (ج) $-\frac{1}{2}$ (د) -1

(١٩) إذا كان r و s جذري المعادلة $2x^2+3x-6=0$ فإن $|r-s|$ يساوي:

(أ) $\sqrt{57}$ (ب) 0 (ج) $\frac{\sqrt{57}}{2}$ (د) $\frac{3}{2}$

(٢٠) مجموع قيم k التي تجعل للمعادلة $(k+1)x^2+kx+k=0$ جذراً واحداً مكرراً هو

(أ) 0 (ب) $-\frac{4}{3}$ (ج) $\frac{4}{3}$ (د) $-\frac{3}{4}$

(٢١) إذا كان أحد جذري المعادلة $kx^2+(k-8)x+(1-k)=0$ يزيد بمقدار 2 عن الجذر الآخر فما قيم k الممكنة ؟

(أ) $k=4$ و $k=16$ (ب) $k=4$ فقط

(ج) $k=16$ فقط (د) $k=-4$ و $k=-16$

(٢٢) ما قيمة k التي تجعل للمعادلتين $y=3x+k$ و $y=x^2+x-5$ حلاً مشتركاً واحداً فقط ؟

(أ) $k=4$ (ب) $k=-4$ (ج) $k=6$ (د) $k=-6$

(٢٣) [AHSME 1955] لكل من المعادلات:

$3x^2 - 2 = 25$ ، $(2x-1)^2 = (x-1)^2$ ، $\sqrt{x^2-7} = \sqrt{x-1}$

(أ) جذران صحيحان

(ب) لا توجد جذور لأي منها أكبر من 3

(ج) لكل منها جذر موجب وجذر سالب

(د) لكل منها جذر واحد فقط

(٢٤) [AHSME 1955] إذا كان r و s جذري المعادلة $x^2 - px + q = 0$ فما قيمة $r^2 + s^2$ ؟

(أ) $p^2 + 2q$ (ب) $p^2 - 2q$ (ج) $q^2 - 2p$ (د) $q^2 - 2p$

(٢٥) [AHSME 1955] عددان مجموعهما يساوي 6 والقيمة المطلقة للفرق بينهما تساوي 8. المعادلة التي جذراها هذان العددان هي:

(أ) $x^2 - 6x + 7 = 0$ (ب) $x^2 - 6x - 7 = 0$

(ج) $x^2 + 6x - 7 = 0$ (د) $x^2 + 6x - 8 = 0$

(٢٦) [AHSME 1954] ما قيم k التي تجعل جذري المعادلة $2x^2 - kx + x + 8 = 0$ متساويين ؟

(أ) -7 و 9 (ب) -7 فقط (ج) 7 و 9 (د) 9 فقط

(٢٧) [AMC12A 2002] إذا كان جذرا المعادلة $x^2 - 63x + k = 0$ عددين أوليين فما عدد القيم الممكنة لـــ k ؟

(أ) 0 (ب) 1 (ج) 2 (د) 4

(٢٨) إذا كان α و β جذري المعادلة $2x^2 - 3x = 4$ فإن المعادلة التي جذراها $\frac{1}{\alpha}$ و $\frac{1}{\beta}$ هي:

أ) $4x^2 + 3x - 3 = 0$ ب) $4x^2 - 3x - 3 = 0$

ج) $4x^2 - 3x + 2 = 0$ د) $4x^2 + 3x - 2 = 0$

(٢٩) إذا كان m و n جذري المعادلة $3x^2 - 2x - 2 = 0$ فإن المعادلة التي جذراها $m - \frac{1}{n}$ و $n - \frac{1}{m}$ هي:

أ) $6x^2 - 10x - 25 = 0$ ب) $6x^2 + 10x - 25 = 0$

ج) $6x^2 + 10x + 25 = 0$ د) $6x^2 - 10x + 25 = 0$

(٣٠) إذا كان α و β جذري المعادلة $4x^2 - 3x - 3 = 0$ فإن المعادلة التي جذراها α^3 و β^3 هي:

أ) $64x^2 + 135x - 27 = 0$ ب) $64x^2 - 135x + 27 = 0$

ج) $64x^2 - 135x - 27 = 0$ د) $64x^2 + 135x + 27 = 0$

(٣١) [AMC12B 2005] إذا كان جذرا المعادلة $x^2 + mx + n = 0$ هما ضعف جذري المعادلة $x^2 + px + m = 0$ حيث $m \neq 0$ ، $n \neq 0$ ، $p \neq 0$ فإن قيمة $\frac{n}{p}$ تساوي:

أ) 1 ب) 2 ج) 4 د) 8

(٣٢) [AHSME 1954]إذا كان أحد جذري المعادلة $a(b-c)x^2 + b(c-a)x + c(a-b) = 0$ هو 1 فما الجذر الآخر ؟

أ) $\frac{b(c-a)}{a(b-c)}$ ب) $\frac{a(b-c)}{c(a-b)}$

(ج) $\dfrac{c(a-b)}{a(b-c)}$ (د) $\dfrac{c(a-b)}{b(c-a)}$

(٣٣) [AHSME 1956] يكون أحد جذري المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ مقلوباً للجذر الآخر عندما:

(أ) $a = b$ (ب) $a = bc$ (ج) $c = a$ (د) $c = b$

(٣٤) [AHSME 1956] القيمة المطلقة للفرق بين جذري المعادلة $\dfrac{15}{x^2-4} - \dfrac{2}{x-1} = 0$ هي:

(أ) 4 (ب) 5 (ج) 6.5 (د) 7.5

(٣٥) [AHSME 1957] مجموع جذري المعادلة $2x^2 - hx + 2k = 0$ يساوي 4 وحاصل ضربهما يساوي -3. ما قيمة كل من h و k ؟

(أ) $h = 8$ و $k = 3$ (ب) $h = 8$ و $k = -3$

(ج) $h = -8$ و $k = 3$ (د) $h = -8$ و $k = -3$

(٣٦) [AHSME 1958] لنفرض أن أحد جذري المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ هو ضعف الجذر الآخر. ما العلاقة بين المعاملات a، b، c ؟

(أ) $4b^2 = 9c$ (ب) $2b^2 = 9ac$

(ج) $2b^2 = 9a$ (د) $b^2 = 8ac$

(٣٧) [AHSME 1985] لنفرض أن جذري المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ هما r و s. إذا كان جذرا المعادلة $x^2 + px + q = 0$ هما r^2 و s^2 فما قيمة p ؟

(أ) $\dfrac{b^2-4ac}{a^2}$ (ب) $\dfrac{b^2-2ac}{a^2}$ (ج) $\dfrac{2ac-b^2}{a^2}$ (د) $\dfrac{b^2-2c^2}{a^2}$

(٣٨) [AHSME 1959] إذا كان جذرا المعادلة $x^2 + bx + c = 0$ حقيقيين وكل منهما أكبر من 1 وإذا كان $s = b + c + 1$ فإن s :

(أ) يمكن أن يساوي صفراً (ب) يجب أن يكون أكبر من الصفر

(ج) يجب أن يكون أصغر من الصفر (د) يقع بين العددين -1 و 1.

(٣٩) [AHSME 1960] إذا كان حاصل ضرب جذري المعادلة $x^2 - 3kx + 2k^2 - 1 = 0$ يساوي 7 فإن الجذرين:

(أ) عددان صحيحان موجبان (ب) عددان صحيحان سالبان

(ج) عددان كسريان (د) عددان غير كسرين

(٤٠) [AHSME 1952] إذا كان جذرا المعادلة $\frac{x^2 - bx}{ax - c} = \frac{m-1}{m+1}$ متساويين في المقدار ومختلفين في الإشارة فإن قيمة m تساوي:

(أ) $\frac{a-b}{a+b}$ (ب) $\frac{a+b}{a-b}$ (ج) $\frac{1}{c}$ (د) 1

(٤١) حقل على شكل مستطيل طوله 52 متراً وعرضه 35 متراً يوجد ممر حول الحقل مساحته 558 متراً مربعاً. ما عرض الممر ؟

(أ) 3 متر (ب) 5 متر (ج) 6 متر (د) 7 متر

(٤٢) عمر سيدة الآن خمسة أمثال عمر إبنتها. وقبل عامين كان مجموع مربعي عمريهما يساوي 1114 عاماً ما عمر الإبنة الآن ؟

(أ) 35 (ب) 21 (ج) 14 (د) 7

(٤٣) [AHSME 1952] إذا كان p هو محيط مستطيل وكان d هو قطره فما الفرق بين طول وعرض المستطيل ؟

(أ) $\dfrac{\sqrt{8d^2+p^2}}{2}$ (ب) $\dfrac{\sqrt{8d^2-p^2}}{2}$

(ج) $\dfrac{\sqrt{8d^2+p^2}}{4}$ (د) $\dfrac{\sqrt{8d^2-p^2}}{4}$

(٤٤) [AHSME 1953] أثناء محاولة حل مسألة تؤدي إلى معادلة من الدرجة الثانية، ارتكب أحد الطلاب خطأ في الحد الثابت للمعادلة فقط وحصل على الجذرين 2 و 8. وارتكب طالب آخر خطأ في معامل x فقط وحصل على الجذرين -1 و -9. ما معادلة الدرجة الثانية الصحيحة ؟

(أ) $x^2-10x+9=0$ (ب) $x^2+10x+9=0$

(ج) $x^2-10x+16=0$ (د) $x^2-8x-9=0$

(٤٥) مجموع عدد ومقلوبه يساوي $\dfrac{61}{30}$. ما القيم الممكنة للعدد ؟

(أ) $\dfrac{5}{6}$ و $\dfrac{6}{5}$ (ب) 3 و $\dfrac{1}{3}$ (ج) $\dfrac{3}{4}$ و $\dfrac{4}{3}$ (د) $\dfrac{7}{6}$ و $\dfrac{6}{7}$

(٤٦) نحتاج إلى عدد y من أباريق الماء التي سعة كل منها يساوي x ملليتر لملئ خزان من الماء. إذا استبدلنا الأباريق بأخرى سعة كل منها يزيد بمقدار 400 ملليتر فسنحتاج إلى عدد من الأباريق أقل من العدد الأصلي بمقدار 8 لملئ الخزان. أما إذا استخدمنا أباريق سعة كل منها يقل عن سعة الإبريق الأصلي بمقدار 200 ميلليتر فسوف يزيد عدد الأباريق التي نحتاجها لملئ الخزان عن العدد الأصلي بمقدار 10 أباريق. ما سعة خزان الماء باللترات ؟

(أ) 8 لتر (ب) 10 لتر (ج) 12 لتر (د) 14 لتر

(٢.١٤) اجابات المسائل غير المحلولة

(١) أ	(٢) ب	(٣) أ	(٤) أ	(٥) ج
(٦) ج	(٧) أ	(٨) ب	(٩) ب	(١٠) د
(١١) أ	(١٢) د	(١٣) ج	(١٤) د	(١٥) ج
(١٦) أ	(١٧) د	(١٨) ج	(١٩) ج	(٢٠) ب
(٢١) أ	(٢٢) د	(٢٣) ب	(٢٤) ب	(٢٥) ب
(٢٦) أ	(٢٧) ب	(٢٨) د	(٢٩) أ	(٣٠) ج
(٣١) د	(٣٢) ج	(٣٣) ج	(٣٤) ج	(٣٥) ب
(٣٦) ب	(٣٧) ج	(٣٨) ب	(٣٩) د	(٤٠) أ
(٤١) أ	(٤٢) د	(٤٣) ب	(٤٤) أ	(٤٥) أ
(٤٦) ج				