الفصل الثاني
البرمجة الخطية

هي أسلوب تحليلي كمي تم استخدامه في العلوم الطبيعية والهندسية قبل استخدامه في العلوم الاجتماعية والإدارية ، وهي من النماذج المؤكدة وليست من النماذج الاحتمالية. وهي أحد فروع وأنواع البرمجة الرياضية.

الإطار العام للمشاكل التي تعالجها البرمجة الخطية:

هناك عدة مكونات/ عناصر لأي مشكلة تعالجها البرمجة الخطية، وهي كما يلي:

١- دالة الهدف.	OBJECTIVE FUNCTION
٢- متغيرات القرار.	DECISION VARIABLES
٣- قيود	CONSTRAIN
٤- شرط عدم السلبية	NONNEGATIVETY

ويمكن مناقشة هذه العناصر على النحو التالي:

١. دالة الهدف objective function

يجب تحديد هدف واحد بشكل قاطع الوضوح في صورة معيار قابل للقياس الكمي ، ودالة الهدف في مشكلة البرمجة الخطية إما أن تكون تعظيما maximization أو تقليلا minimization وهذا ما يعرف في لغة الرياضيات بالمثلى optimization ويعبر عن الهدف عادة في صورة متغير واحد أو أكثر، وتخضع هذه المتغيرات جميعا لعلاقة خطية، أي أنها جميعا مرفوعة لأس واحد صحيح. ويخضع تحقيق الهدف إلى تنفيذ أنشطة ووظائف متعددة تسمى موارد، متاح منها كميات محددة تشكل قيدا على تحقيق الهدف.

٢. متغيرات القرار decision variables

وهي التي تدخل ضمن دالة الهدف المراد تعظيمه أو تقليله وهي متغيرات من الدرجة الأولى ، وهذه المتغيرات إما أن تكون صفرية أو موجبة.

٣. قيد أو مجموعة من القيود constraint

تتمثل القيود في موارد محددة يتنافس على استغلالها واستخدامها مجالات مختلفة ، ويأتي التعبير عنها في مشكلة البرمجة الخطية من خلال المتاح من الموارد، بمعنى أننا نعظم أو نقلل المتغيرات الداخلة ضمن دالة الهدف في ظل قيود تتمثل في موارد محدودة . فمثلا إذا كان لدينا مائة متر مكعب من

الأخشاب يمكن أن نستغلها في صناعة الكراسي نقول أن الأخشاب مورد، ومائة متر منها قيد ،وأما الكراسي فمتغير.

ويعبر عن القيود في شكل معادلات خطية ، وهي كما يلي:

أ. متساوية : (=) equality

ب. متباينة : أقل من ($\geq$) less than or equal to

ج. متباينة : أكبر من ($\leq$) more than or equal to

ومن أهم أشكال القيود ما يلي:

أ. ندرة عناصر الإنتاج: وهذا يتمثل في محدودية الكمية المتاحة من عناصر الإنتاج كالموارد الأولية والآلات والعمل ورأس المال.

ب. محدودية الطاقة للموارد المتاحة بمعنى أن وجود مورد لا يعني بالضرورة قدرته على تلبية كامل الاحتياجات.

ت. النواحي الفنية والتقنية بمعنى أن النواحي الفنية قد تفرض علينا قدرا معينا من استغلال بعض الموارد.

ث. استيعاب السوق: حيث أن طاقة السوق على استيعاب المنتوجات أي بيعها تكون محدودة في بعض الأحيان نتيجة للمنافسة وغيرها من العوامل، وبالتالي لا تستطيع المنشأة بيع منتجاتها بالكامل إذا ما استغلت كامل طاقتها الإنتاجية.

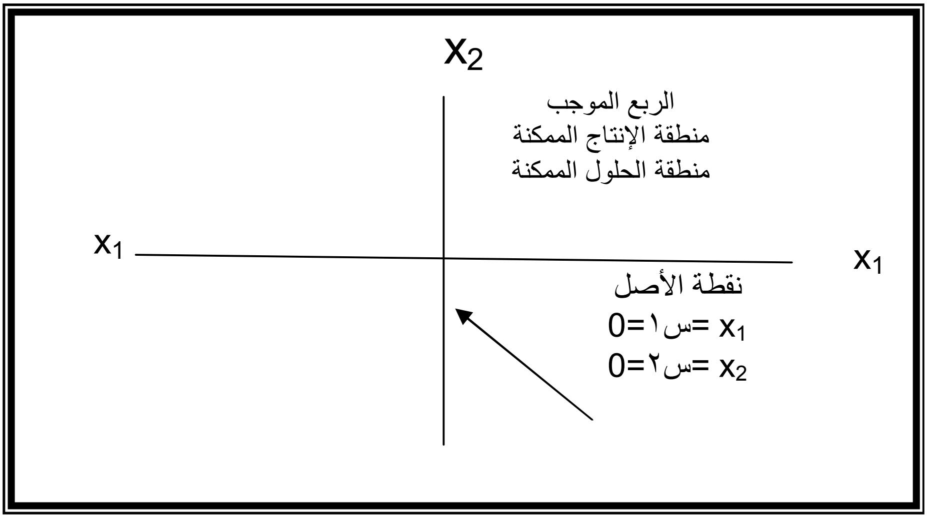
ج. جودة المنتجات والعناصر الداخلة في إنتاجها : حيث يتطلب ذلك زيادة في استغلال بعض الموارد دون الأخرى، وتظهر هذه المشكلة في المنتجات الغذائية؛ حيث أن المنتجات الداخلة في خلطة معينة تختلف في مكوناتها الغذائية، وبالتالي كلما قل العنصر المطلوب في المادة الخام كلما زادت الكمية المطلوبة منه.

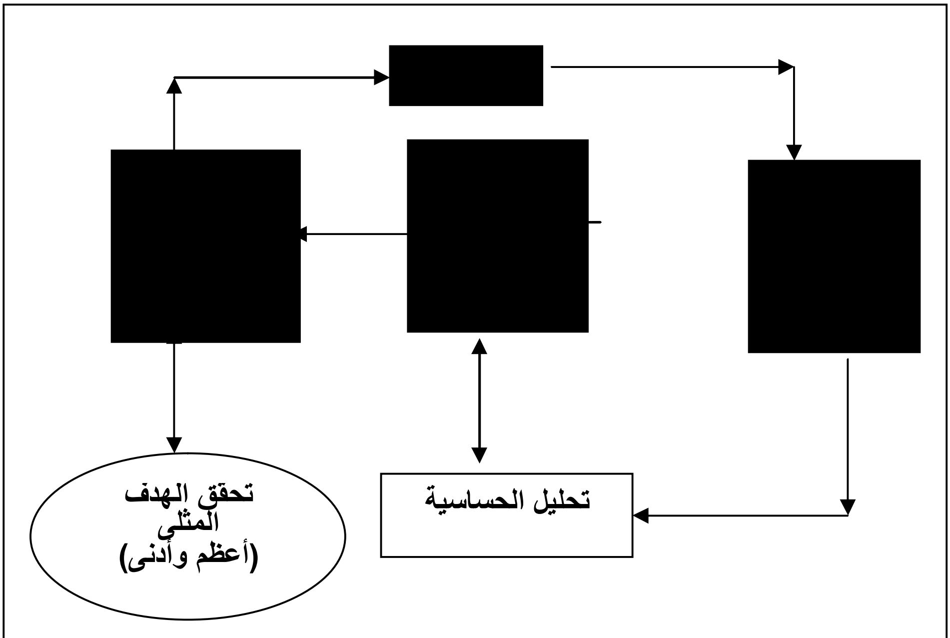
وغيرها من أنواع القيود التي يمكن أن تواجهها منشأة الأعمال أثناء عملية الإنتاج كالقيود القانونية التي تفرضها الدولة.

٤. **شرط عدم السلبية** nonnegative

للمتغيرات المراد تعظيمها أو تقليلها والواقعة في دالة الهدف:

حيث يتمشى هذا القيد مع منطقية دالة الهدف المراد تعظيمها أو تقليلها، والتي هي أصلا موجودة؛ حيث يستحيل التعامل معها في حالة العدم أو السلبية وفي حالة استخراج الحل بالطريقة البيانية، فإن الحل يقع في الربع الموجب كما هو موضح في الرسم البياني التالي:





وضع الإطار العام لمشكلة البرمجة الخطية ضمن نظام

رابعا : فروض البرمجة الخطية LP ASSUMPTIONS

تقوم البرمجة الخطية على عدة فروض أساسية :

١. التأكد: CERTAINTY

تفترض البرمجة الخطية معلومية جميع المتغيرات وعددها وقيم معاملاتها، وكذلك القيود وعددها وقيم معاملاتها معروفة ومحددة قبل الشروع في حلها.

٢. الخطية: LINEARITY

كما يدل اسمها (برمجة خطية)، تفترض البرمجة الخطية وجود علاقات خطية بين متغيرات المشكلة المراد حلها بها وتطبيقها عليها؛ أي أن الافتراض هنا هو أن متغيرات المشكلة هي من الدرجة الأولى؛ أي ذات أس واحد، لا يصح أن تكون مرفوعة إلى أكثر من واحد، وبناء عليه فإن العلاقة بين دالة الهدف والقيود تكون مستقيمة أو خطية.

وعلاقة الخطية هذه بين المتغيرات تتفرع عنها أو تتكامل معها بطريقة مباشرة مع الخصائص التالية لمتغيرات مشكلة البرمجة الخطية وهي: التناسبية، والإضافية وقابلية القسمة.

٣. التناسبية: PROPORTIONALITY

وهذه الخاصية متكاملة مع خاصية الخطية، وتعني أن الزيادة أو النقص في قيم متغيرات دالة الهدف تتناسب تناسبا طرديا مع الزيادة أو النقص في قيمة أي من المتغيرات المفردة.

ومثال ذلك: إذا افترضنا أن الوحدة من المنتج تحقق ربحا مقداره ١٠$ فإن مبيعات ١٠ وحدات تحقق أرباحا قيمتها ١٠٠$ ومبيعات ٢٠ وحدة تحقق أرباحا قيمتها ٢٠٠$ وهكذا.

٤. الإضافية أو قابلية الجمع: ADDITIVITY

وهي اعتماد النتيجة النهائية على التغير في مجموع قيم المتغيرات، فإذا كان لدينا منتجين س١ ، س٢ ، وكانت الوحدة من س١ تحقق ربحا مقداره ١٠$، وكانت الوحدة من س٢ تحقق ربحا مقداره ١١$، وقمنا بإنتاج ١٠ وحدات من س١، وإنتاج ١٠ وحدات من س٢ فإن الربح الناتج = (١٠×١٠) + (١١×١٠) = ١٠٠ + ١١٠ = ٢١٠$.

وقابلية الجمع تعنى أنه إذا تغير إنتاج كمية أحد المنتجين فإن ذلك ستظهر نتيجته في مجمل الربح ، وذلك كما يلي: إذا زاد الإنتاج من س٢ : ٢٠ وحدة

فالربح الناتج = (١٠ × ١٠) + (٢٠ × ١١) = ١٠٠ + ٢٢٠ = ٣٢٠ $

وإذا انخفض إنتاج س١ إلى ٥ وحدات وزاد إنتاج س٢ ب١٠ وحدات، تكون النتيجة = (٥ × ١٠) + (٢٠ × ١١) = ٥٠ + ٢٢٠ = ٢٧٠ $، هكذا.

ولهذه الخاصية أهمية في تحديد المزيج الإنتاجي الأمثل، والذي يحقق أقصى العوائد أو أقل التكاليف، بحيث لا يؤثر زيادة أو انخفاض إنتاج معين بعينه على تحقيق أفضل النتائج.

٥. قابلية القسمة أو الكسرية: DIVISIBILTY OR FRACTIONALITY

يقسم علماء الرياضيات والإحصاء القيم التي نتعامل معها في حياتنا ومشاهداتنا إلى قيم أو متغيرات متصلة CON I NUOUS VARIABLES وهي التي تقبل الكسور ضمنها كدرجات الحرارة والمسافات والأطوال وغيرها ، التي يمكن أن تأخذ قيما عشرية مثل أن يكون الطول مساويا ١٠٥ سم وهكذا.

وعلى خلاف ذلك هناك قيم لا يكون فيها الكسر منطقيا، مثال على ذلك عدد الأفراد أو عدد السفن، وتسمى هذه القيم أو المتغيرات بالمتغيرات المنفصلة DISCRATE VARIABLES

محددات البرمجة الخطية: LP SETBACKS

١- العلاقات الخطية : LINER RELATION

افتراض العلاقات الخطية بين المتغيرات يقلل من انتشارها وتطبيقها على جميع المشاكل، لأن المشاكل الواقعية قد تتضمن وجود علاقات غير خطية بين متغيراتها ، لذلك تم تطوير أساليب البرمجة غير الخطية NONLINE PROGRAMMING كالبرمجة التربيعية.

٢- الكسور في الحل:

عند تطبيق البرمجة الخطية على متغيرات منفصلة قد تعطي حلولا تتضمن قيما فيها كسورا عشرية ، والكسور من الوحدات تبدو غير منطقية في هذه الحالات.

وتخلصا من إشكالية وجود كسر في قيمة المتغير المنفصل (الذي لا يقبل أن يكون فيه كسرا) يمكن معالجة الكسر بإحدى طريقتين، وذلك كما يلي:

الطريقة الأولى: تقريب الكسر للحد الأدنى، حيث أن الحد الأقصى قد يتخطى منطقة الإمكانيات المتاحة.

الطريقة الثانية: تطبيق أسلوب مستحدث أو مطور من البرمجة الخطية وهو البرمجة الكاملة INTEGER PROGRAMING التي تقوم على افتراض الأرقام الصحيحة ، وعدم وجود الكسور العشرية.

٣- **التأكد:** CERTAINTY

تقوم البرمجة الخطية على افتراض أن جميع المتغيرات والقيود قيمهامعلومة ومعروفة و محددة مسبقا في المشكلة المراد حلها، وهذا لا يتوافر أحيانا في الحياة العملية؛ فكثيرا ما تكون هناك حالة عدم التأكد،و أيضا نقص في المعلومات المتاحة عن المشكلة موضع الدراسة.

وللتخلص من هذه الإشكالية فقد استحدثت أو طورت دراسة تحليل الحساسية SENSITIVITY ANALYSIS التي تقوم على الإجابة على أسئلة مثل: ماذا يحدث لو وبالتالي نستطيع اختبار أكثر من فرضية لمواجهة نقص المعلومات أو حالة عدم التأكد.

طرق حل مشكلة البرمجة الخطية :

يمكن حل مشكلة البرمجية الخطية مستخدمين أحد الأساليب التالية:

١. الرسم البياني. GRAPHIC SOLUTION
٢. السمبلكس SIMPLEX SOLUTION
٣. الطريقة الجبرية. COEFFICIENT METHOD

أمثلة وتمارين على صياغة مشكلة البرمجة الخطية :

تعالج البرمجة الخطية مشاكل التعظيم (العوائد والأرباح)، كما تعالج مشاكل التقليل (التكاليف)، وهي ما تعرف في بحوث العمليات بالمثلى أو الفضلى OPTIMIZATION .

مثال محلول رقم ١:

تقوم شركة أثاثكو بتصنيع عدة منتجات من الأخشاب، يتمثل أهمها في الكراسي والطاولات، حيث يبلغ ثمن الكرسي الواحد في السوق ١٠$، ويحتاج إلى ساعة عمل واحدة في قسم النشر، وساعة عمل واحدة في قسم التجميع، بينما يبلغ ثمن الطاولة ٤٠$، وتحتاج إلى ساعتين عمل في قسم النشر، وخمسة ساعات عمل في قسم التجميع، وفي اللحظة التي يستوعب فيها السوق جميع المنتجات من كلا المنتجين.

لا يستطيع مدير الشركة الحصول شهريا على أكثر من مائة ساعة عمل في قسم النشر.

كما لا يستطيع الحصول على أكثر من مائة وخمسين ساعة عمل في قسم التجميع.

وفي هذه الحالة يحتاج مدير الشركة إلى أن يحدد مزيج الإنتاج من الكراسي والطاولات الذي يحقق لمؤسسته أعلى عائد ...

الحل :

في هذه الحالة نتبع الخطوات التالية في صياغة المشكلة:

أولا	الهدف	الهدف هنا هو تعظيم العائد.
ثانيا	المتغيرات	كراسي ، طاولات.
ثالثا	الرموز	نعبر عن الكراسي(X_1)، ونعبر عن الطاولات ب(X_2).
رابعا	الجدول	حتى يسهل تكوين المعادلات الرياضية توضع البيانات الموضحة في المشكلة في صورة مصفوفة كما يلي:

جدول يبين بيانات المشكلة

	X_1 كراسي	X_2 طاولات	الموارد المتاحة/ شهريا أقل من أو مساوية
قسم النشر	١	٢	١٠٠ساعة عمل
قسم التجميع	١	٥	١٥٠ ساعة عمل
سعر البيع	١٠$	٤٠$	

خامسا : وضع البيانات في الجدول أعلاه في صورة معادلات كما يلي:

دالة الهدف	Max $z=\$10X_1+\$40X_2$	Objective function
القيود	$1X_1+2X_2 \leq 100$ $1X_1+5X_2 \leq 150$	constraints
عدم السلبية	$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$	Non negative

سادسا : حل المشكلة عن طريق:

١. الرسم البياني

٢. أو السمبلكس

الطريقة البيانية لحل مشاكل البرمجة الخطية

GRAPHIC SOLUTION OF LP PROPLEMS

تعتبر طريقة الرسم البياني طريقة سهلة وبسيطة وواضحة في معالجة مشاكل البرمجة الخطية خاصة تلك المشاكل التي لا يزيد فيها عدد المتغيرات عن اثنين والتي تحتوي على عدد بسيط من القيود كما تفيد طريقة الرسم البياني كمقدمة لدراسة طرق وأساليب أخرى أكثر تعقيدا في حل مشاكل البرمجة الخطية مثل السمبلكس

وعند اتباع أسلوب الرسم البياني يجب اتباع الخطوات التالية:

١. رسم المحور السيني والصادي (الجزء الموجب من كل منهما)

٢. تحديد نقطتين لكل مستقيم (معادلة)

٣. رسم المستقيمات المعبرة عن المعادلات
٤. تحديد منطقة الامكانيات المتاحة
٥. تعيين النقطة ضمن منطقة الامكانيات المتاحة التي تعطي أفضل النتائج (أعلى عائد أو أقل تكلفة) وعادة تكون نقطة تقاطع مستقيمات وتكون في حالة تعظيم الأرباح أبعد ما يكون عن نقطة الأصل وتكون في حالة تقليل التكاليف أقرب ما يكون من نقطة الأصل

حل المثال السابق بطريقة الرسم البياني: يتطلب الحل البياني ما يلي :

١- تكوين الاحداث السيني والاحداث الصادي (x_1-x_2)

٢- رسم مستقيمات القيود كما يلي:

أ- تحويل القيود الى متساويات وذلك كما يلي:

المستقيم الأول $x_1+2x_2=100$

المستقيم الثاني $x_1+5x_2=150$

ب- تحديد نقطتين لكل مستقيم حتى يمكن رسمه وذلك بمعرفة قيم الاحداثين كما يلي:

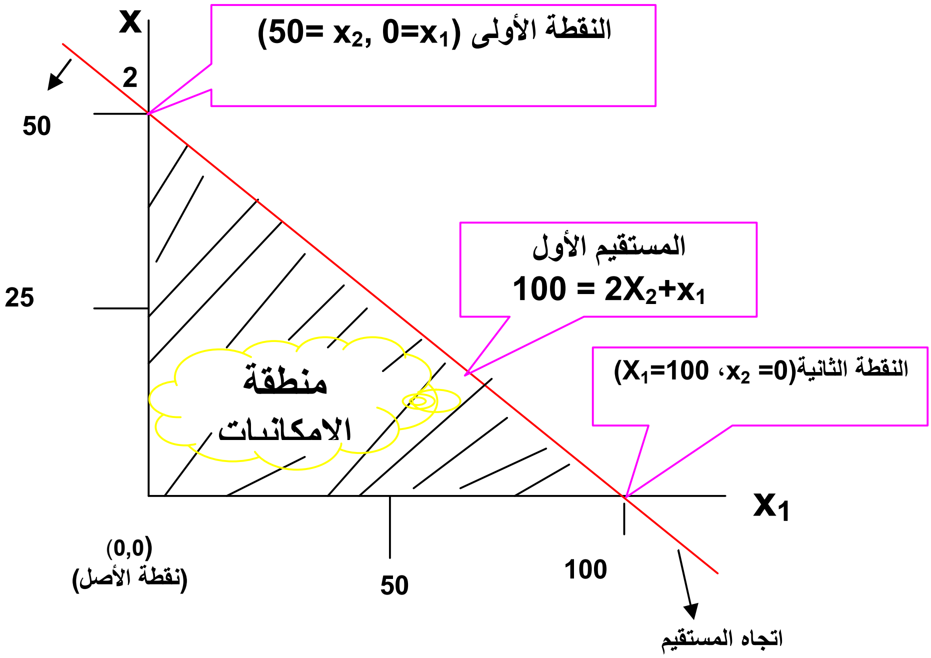
المستقيم الأول	
X_1	X_2
0	50
100	0

وتوضيحا لما تعنيه هذه الأرقام ، افترض ما يلي:

لو فرضنا أن المنتج ركز على إنتاج الطاولات (X_2)، وأهمل الكراسي (X_1) ، فإنه يستطيع إنتاج ٥٠ طاولة من ساعات الآلة المتوفرة لديه (بفرض أن القيد الأول يعبر عن ساعات العمل لآلة).

بينما إذا ركز الإنتاج على الكراسي (X_1) مهملا الطاولات (X_2) فإنه يستطيع إنتاج ١٠٠ كرسي من ساعات الآلة المتوفرة.

يمكن الآن رسم الإحداثي السيني و الصادي وتحديد المستقيم الأول عليه كما يلي :



تحديد اتجاه المستقيم الذي يحققه:

نختبر المستقيم مع نقطة الأصل أي نعوض $X_1=$ صفر، $X_2=$ صفر $0+0\leq100$ (true) إذن اتجاه المستقيم هو نحو نقطة الأصل، وهذا يعني ببساطة أن أي نقطة على المستقيم أو بينه و بين نقطة الأصل تحققه.

والمنطقة بين المستقيم و نقطة الأصل تسمى منطقة الإمكانيات المتاحة وفق هذا القيد بمعنى أن المنتج يستطيع إنتاج أي كمية ضمن المساحة المظللة ووفق القيد الأول.

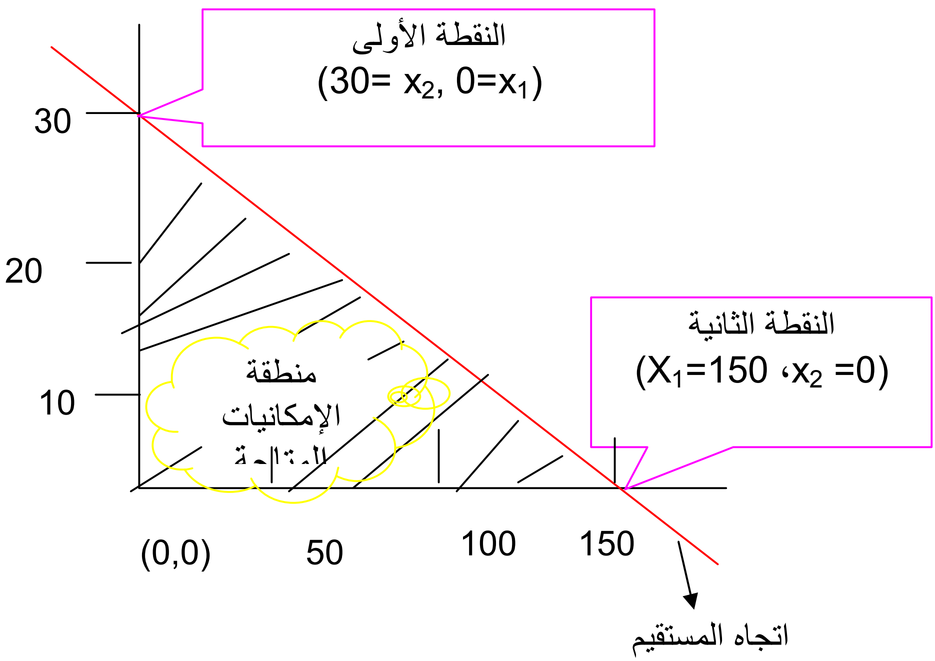
المستقيم الثاني	
X_1	X_2
0	30
150	0

وتوضيحا لما تعنيه هذه الأرقام:

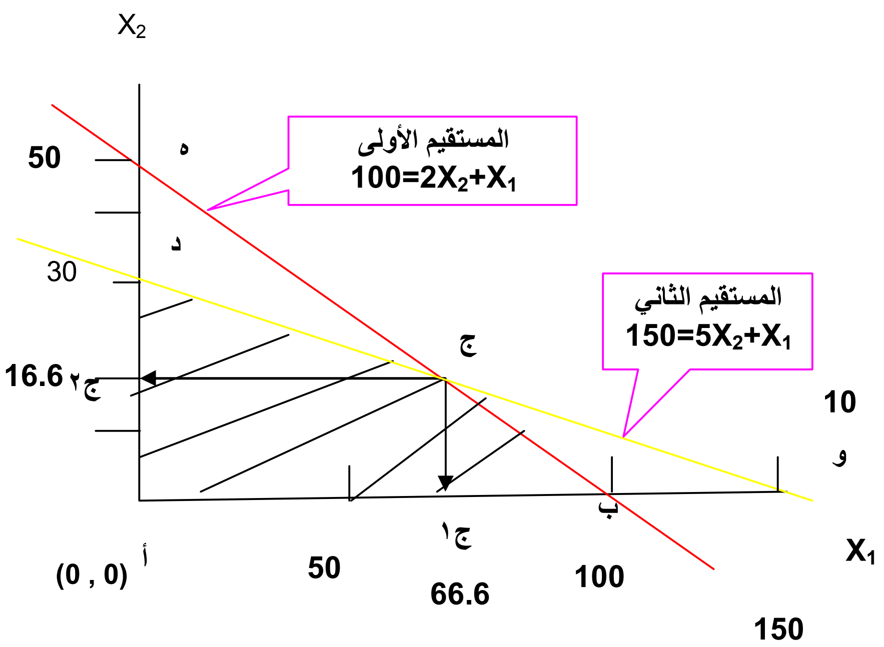
لو فرضنا أن المنتج ركز على إنتاج الطاولات (X2) فقط ، وأهمل إنتاج الكراسي (X1) ، فإنه يستطيع إنتاج 30 طاولة من ساعات العمل المتوفرة لديه (بفرض أن هذا القيد يمثل ساعات عمل).

بينما إذا ركز الإنتاج على الكراسي (X1) مهملا للطاولات (X2) فإنه يستطيع إنتاج 150 كرسي من ساعات العمل المتوفرة لديه .

يمكن الآن رسم الإحداثي السيني والصادي وتحديد المستقيم الثاني عليه كما يلي :



ويمكن الآن رسم الإحداثي السيني والصادي وتحديد المستقيمين الأول والثاني عليه كما يلي:



نقوم بداية بتحديد منطقة الإمكانيات المتاحة والتي تحقق كلا المستقيمين، وهي في هذه الحالة المنطقة أ ب ج د المظللة، حيث يستطيع المنتج إنتاج أي كمية داخل هذه المنطقة وفق القيدين وهما: الوقت المتاح من العمل والوقت المتاح من الآلة .

والهدف من حل هذه المشكلة هو تحقيق أعلى عائد ممكن، و بإجراء التجارب وجد أن أعلى عائد يتحقق عند نقاط تقاطع المستقيمات، لذلك يتم اختبار دالة الهدف عند هذه النقاط، وهي أ ب ج د .

ملاحظات:

أولاً: منطقة الإمكانيات المتاحة هي أ ب ج د والتي تحقق كلا المستقيمين.

ثانياً: خروج منطقة و ب ج من منطقة الإمكانيات المتاحة لأنها تحقق المستقيم الثاني فقط، ولا تحقق المستقيم الأول.

ثالثا: خروج منطقة هـ د ج من منطقة الإمكانيات المتاحة لأنها تحقق المستقيم الأول فقط، ولا تحقق المستقيم الثاني.

تحديد النقطة التي عندها يكون الربح أعلى ما يكون، وذلك بإحدى الطريقتين :

١- تقييم نقاط تقاطع المستقيمات على أطراف منطقة الإمكانيات المتاحة.

٢- رسم مستقيم دالة الهدف Iso-profit line.

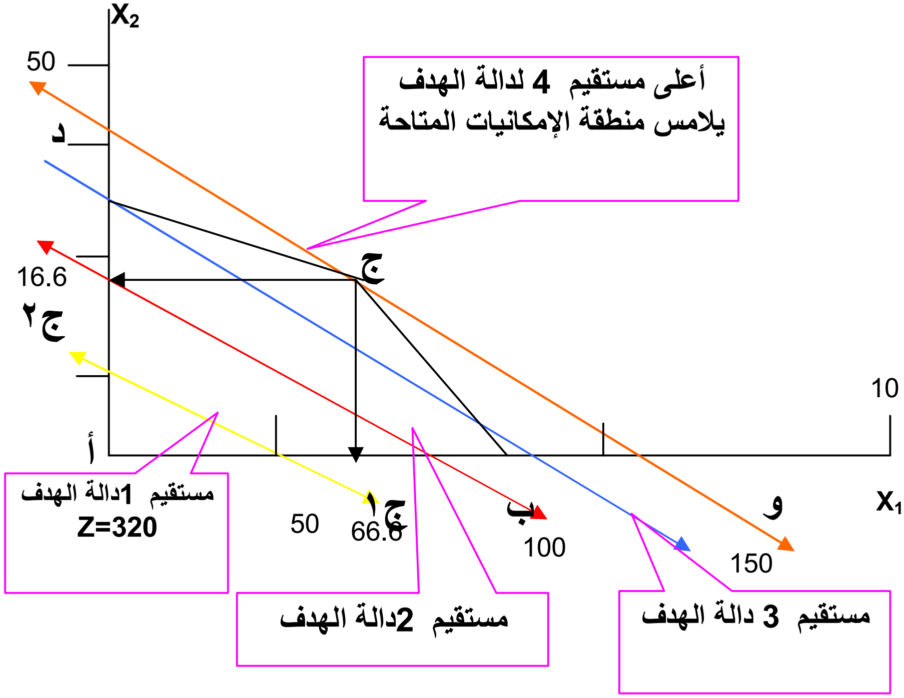
الطريقة الأولى: تقييم نقاط تقاطع المستقيمات وهي كما يلي:

النقطة	X_1	X_2	$Z=\$10\ x_1+\$40\ x_2$	النتيجة ($)
أ	0	0	$0 \times 40 + 0 \times 10$	0
ب	100	0	$0 \times 40 + 100 \times 10$	1000
ج	66.7	16.7	$16.7 \times 40 + 66.7 \times 10$	1335
ج	66.	16	$16 \times 40 + 66 \times 10$	1300
د	0	30	$30 \times 40 + 0 \times 10$	1200

الطريقة الثانية: رسم مستقيم دالة الهدف Iso-profit line**، وذلك كما يلي :**

دالة الهدف :	$Z=\$10\ x_1+\$40\ x_2$

بافتراض أن $Z=320$ نوجد نقطتين لرسم مستقيم دالة الهدف وهي (8,0) ، (0,32) ثم نقوم برسم هذا المستقيم كما يلي:



نلاحظ أن المستقيم رقم 1 عند قيمة $ 320 ل z يقع ضمن الإمكانيات المتاحة نقوم بافتراض قيم أعلى فينتج لدينا المستقيم رقم 2 و 3 وأخيرا مستقيم رقم 4 الذي يقع على حافة منطقة الإمكانيات المتاحة، وهذا يعني أن أعلى ربح هو عند هذا المستقيم $ Z=1335.

ويجب ملاحظة أن جميع مستقيمات دالة الهدف متوازية بعض النظر عن اختلاف قيم Z، وذلك لأن ميل المستقيمات ثابت لا يتغير، والذي يغير ميل المستقيم هي معاملات X2, X1 وليس قيمة Z.

ملاحظات على نتيجة الحل:

نلاحظ أن أعلى عائد قد تحقق عند النقطة ج، أي يجب إنتاج 66.7 كرسي، و 16.7 طاولة لتحقيق عائد قدره $1335 ونتيجة أنه لا يمكننا إنتاج كسور من الكراسي أو الطاولات يتم تقريبها للقيمة الأدنى حتى تكون ضمن منطقة الإمكانيات المتاحة .

كما يمكن تحديد مدى استغلال الموارد عند النقطة ج (66.666)، (16.666) :

القيود	الطاقة المتاحة	معادلة دالة الهدف	المستغل	الفائض
x_1+2x_2	100	66.666❖ ١ + 16.666❖ 2	99.996	لا شيء تقريبا
x_1+5x_2	150	66.666❖ ١ + 16.666❖5	149.996	لا شيء تقريبا

مثال محلول رقم ٢:

تقوم الشركة الصناعية العامة بإنتاج نوعين من الدفاتر المدرسية: دفاتر كتابة وكراس رسم، ولإتمام العملية الإنتاجية ؛ لابد من استخدام آلة، وعدد معين من ساعات العمل، والوقت المتاح للآلة هو ٢٤ساعة، بينما الوقت المتاح من عنصر العمل هو ١٦ساعة ، تحتاج كل وحدة منتجة من دفاتر الكتابة إلى ساعتين من الآلة، وساعتين من العمل، بينما تحتاج كل وحدة من كراس الرسم إلى ٣ ساعات من الآلة و ساعة واحدة من العمل.

ويبلغ سعر كل وحدة مباعة من دفاتر الكتابة ١٢$ ، ومن كراس الرسم١٤$، علما بأن الشركة تستطيع أن تبيع سبع وحدات فقط من المنتج الأول ، وست وحدات من المنتج الثاني.

وفي هذه الحالة يحتاج مدير الشركة إلى أن يحدد كمية الإنتاج من السلعتين التي تحقق للشركة أعلى عائد.

الحل: في هذه الحالة نتبع الخطوات التالية في صياغة المشكلة:

أولا	الهدف	الهدف هنا هو تعظيم العائد
ثانيا	المتغيرات	دفتر كتابة ، كراس رسم
ثالثا	الرموز	نعبر عن دفتر الكتابة بـ x_1 نعبر عن كراس الرسم بـ x_2
رابعا	الجدول	حتى يسهل تكوين المعادلات الرياضية توضع البيانات الموضحة في المشكلة في صورة مصفوفة كما يلي

جدول يبين بيانات المشكلة :

	X_1 دفتر كتابة	X_2 كراس رسم	الموارد المتاحة أقل من أو مساوية
الآلة	٢	٣	٢٤
العمل	٢	١	١٦
سوق١	١	-	٧
سوق٢	-	١	٦
السعر	$١٢	$١٤	

خامسا: وضع البيانات في الجدول أعلاه في صورة معادلات، وذلك كما يلي:

max $z=\$12\, x_1+\$14\, x_2$
Subject to:
$2x_1 + 3x_2 \le 24$
$2x_1 + 1x_2 \le 16$
$x_1 \le 7$
$x_2 \le 6$
$x_1 \ge 0 \qquad x_2 \ge 0$

سادسا :حل المشكلة عن طريق:

١. الرسم البياني ٢- أو السمبلكس

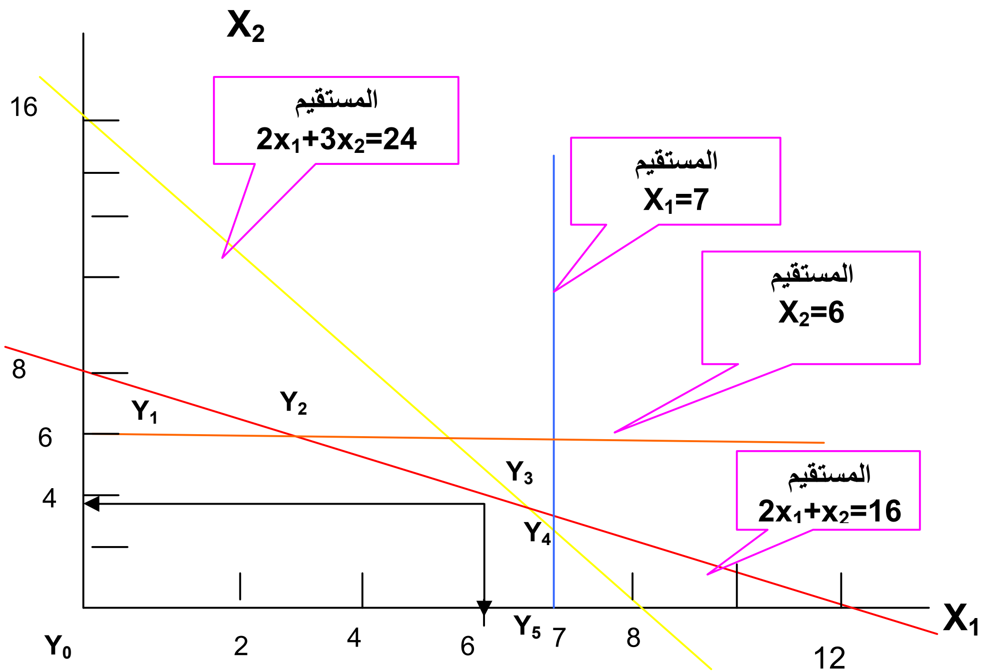
الحل : نقوم بإتباع نفس الخطوات المفصلة في المثال الأول ، ولكن يمكننا وضع الحل مختصرا كما يلي :

المستقيم الأول	
$2X_1 + 3X_2 = 24$	
X_1	X_2
0	8
12	0

المستقيم ٢	
$2X_1 + X_2 = 16$	
X_1	X_2
0	16
8	0

المستقيم 3
$X_1=7$
X_1
7
—

المستقيم 4
$X_2=6$
X_2
6
—



نقوم بداية بتحديد منطقة الإمكانيات المتاحة، والتي تحقق كلا المستقيمين.

وهي في هذه الحالة المنطقة $Y_5\ Y_4\ Y_3\ Y_2\ Y_1\ Y_0$، حيث يستطيع إنتاج أي كمية داخل هذه المنطقة وفق القيود، وهي الوقت المتاح من العمل، والوقت المتاح من الآلة والقدرة التسويقية لكلا المنتجين .

والهدف من حل هذه المشكلة هو تحقيق أعلى عائد ممكن.

وبإجراء التجارب وجد أن أعلى عائد يتحقق عند نقاط تقاطع المستقيمات.

لذلك يتم اختبار دالة الهدف عند هذه النقاط ، $Y_5\ Y_4\ Y_3\ Y_2\ Y_1\ Y_0$.

تقييم نقاط تقاطع المستقيمات :

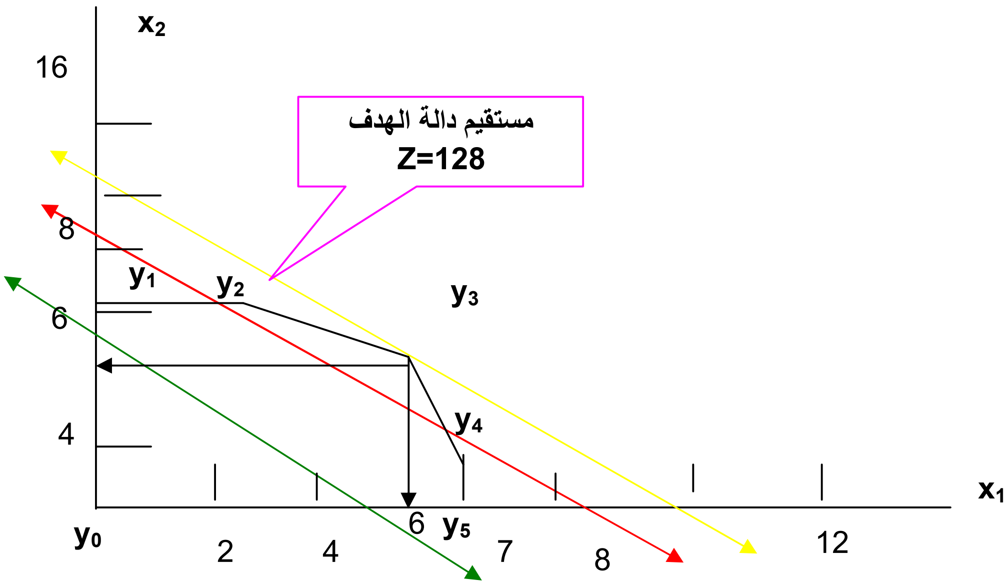
- دالة الهدف هي : $\text{Max } z = \$12X_1 + \$14X_2$

النقطة	x_1	x_2	$Z=\$12x_1+\$14x_2$	النتيجة($)
Y_0	0	0	$0 \times 14 + 0 \times 12$	صفر

Y_1	0	6	$6\times14+0\times12$	84
Y_2	3	6	$6\times14+3\times12$	120
Y_3	6	4	$4\times14+6\times12$	128
Y_4	7	3	$3\times14+6\times12$	126
Y_5	7	0	$0\times14+7\times12$	84

نلاحظ أن أعلى عائد قد تحقق عند النقطة Y_3 ، أي يجب إنتاج 6 دفاتر ، 4 كراسات رسم لتحقيق عائد قدره ١٢٨$

يمكن أيضا رسم مستقيم دالة الهدف عند قيم مختلفة، كما يلي:



كما يمكن تحديد مدى استغلال الموارد عند النقطة الأفضل $Y_3(6=X_1)$ ، $(4=1X_2)$:

الفائض	المستغل	معادلة دالة الهدف	الطاقة المتاحة	القيود
لا شيء	24	$6\times_2+4\times_3$	24	$2X_1+3X_2$

لا شيء	16	$6\times_2 + 4\times_1$	16	$2X_1+1X_2$
1	6	$6\times_1$	7	$1X_1$
2	4	$4\times_1$	6	$1X_2$

الطريقة المبسطة Simplex Method:

تعتبر هذه الطريقة من أهم الطرق المستخدمة في حل مشاكل البرمجة الخطية؛ وذلك لأنها ستمكن متخذ القرار من حل المشاكل المعقدة التي تحتوي على أكثر من متغيرين؛ حيث إن طريقة الحل البياني لا يمكن أن تساهم إلا في حل المشاكل ذات المتغيرين، كما أن هذه الطريقة تتميز بالدقة العالية، كما أن كفاءة استخدامها أصبحت عالية بفضل استخدام البرمجيات الجاهزة، حيث أصبحت هذه البرمجيات عاملًا مهمًّا في اتساع استخدام البرمجة الخطية ونماذج بحوث العمليات الأخرى.

تتميز الطريقة المبسطة بأنها تتضمن مجموعة من المراحل التي من خلالها يتحسن الحل الأول، والذي يسمى الحل الابتدائي، وصولًا إلى الحل الأمثل، ويمكن عرض هذه المراحل كما يلي:

المرحلة الأولى: تكوين النموذج القياسي: تتمثل هذه المرحلة بتحويل النموذج الأولي لمشكلة البرمجة الخطية (Primal Model) إلى النموذج القياسي (Standard Model)، وتتلخص هذه الخطوة بما يلي:

١- تحويل المتباينات في النموذج الأولي إلى معادلات كالآتي:

أ. إذا كانت إشارة القيد (≤) أقل أو يساوي، يتم إضافة متغير مكمل إلى الجانب الأيسر للقيد، ويسمى المتغير الخامل (Slack Variable)، ونرمز له بـ (Si)، ويظهر هذا المتغير بمعامل (٠) في دالة الهدف.

ب. إذا كانت إشارة القيد (≥) أكبر أو يساوي، يتم طرح متغير فائض (Surplus Variable) من الجانب الأيسر للقيد، ونرمز له بـ (Si- - -) ثم نضيف متغيرًا اصطناعيًّا (Artificial Variable)، ونرمز له بـ (a). ونضيف المتغير الفائض إلى دالة الهدف بمعامل (٠). أمّا المتغير الاصطناعي فيظهر بإشارة موجبة، وبمعامل (M)، والتي ترمز إلى

معامل رقمي كبير، وذلك في حالة كون دالة الهدف بإشارة (Min) تقليل. أمّا إذا كانت دالة الهدف (Max)، فنضيف المتغير - - الفائض بمعامل (٠)، والمتغير الاصطناعي بإشارة سالبة وبمعامل (M).

ج. إذا كانت إشارة القيد (=) مساواة، فيتم إضافة متغير اصطناعي للقيد، ويضاف إلى دالة الهدف بإشارة موجبة، وبمعامل (M) إذا كانت الدالة (تقليل) (Min) وبإشارة سالبة وبمعامل (M) إذا كانت الدالة تعظيم (Max). ويمكن توضيح القواعد السابقة كما في الجدول (٢- ١).

جدول (٢- ١) قواعد تحويل المتباينات إلى معادلات

نوع القيد	الإجراء	دالة الهدف Max	دالة الهدف Min
$\leq$	S+	OS	OS
$\geq$	S +a -	OS-Ma	OS+Ma
=	a+	Ma -	Ma+

المرحلة الثانية:

تكوين جدول الحل الابتدائي؛ للحصول على حل أولي ممكن، والذي يناظر الحل الأولي عند نقطة الأصل في طرية الحل البياني وتنظم بيانات النموذج القياسي في جدول الحل الابتدائي كما هو مبين في الجدول (٢- ٢)

المرحلة الثالثة:

التحقق من أمثلية الحل في المرحلة السابقة، وذلك من خلال قيم الصف (Cj-Zj)، والذي يسمى صف تقييم الحل، والذي يعبر عن مساهمة كل متغير من متغيرات دالة الهدف عند إضافة وحدة واحدة. ويتم التقييم كالآتي:

أ. إذا كانت دالة الهدف تعظيم (Max)، فإن الحل الأمثل يتحقق عندما تكون قيم (Cj-Zj) تساوي أو أقل من صفر، أي (Cj-Zj٠≥).

ب. إذا كانت دالة الهدف تقليل (Min)، فإن الحل الأفضل يتحقق عندما تكون قيم (Cj-Zj) تساوي أو أكبر من صفر، أي (Cj-Zj٠≤).

فإذا تحقق شرط الأمثلية، يتم التوقف عند هذه المرحلة، ويكون الحل المتحقق هو الحل الأمثل، وإذا لم يتحقق ننتقل إلى المرحلة الرابعة.

المرحلة الرابعة:

تحديد المتغير الداخل (Entering Variable) والمتغير الخارج (Leaving Variable):

- يتم تحديد المتغير الداخل على أساس قيم صف تقييم الحل (Cj-Zj)، فإذا كانت دالة الهدف تعظيم (Max) نختار (أعلى قيمة موجبة)، ويكون المتغير المرتبط بها المتغير الداخل، ويسمى العمود الذي يقع فيه بالعمود المحوري (Pivot Column).
- أمّا إذا كانت دالة الهدف تقليل (Min)، نختار أعلى قيمة (بإشارة سالبة) في صف (Cj-Zj)، ويكون المتغير المرتبط بها المتغير الداخل.

جدول (٢- ٢) الحل الابتدائي

متغيرات دالة الهدف		X_1	X_2	$\dots X_n$	S_1	S_2	$\dots S_m$	bi
المتغيرات الأساسية C	معاملات متغيرات دالة الهدف Cj	C_1	C_2	C_n	0	0	0	
S_1	0	a_{11}	a_{12}	a_{14}	0	1	0	b_1
S_2	0	a_{21}	a_{22}	a_{24}	0	1	0	b_2
: : :								
S_m	0	a_{n1}	a_{n2}	a_{mn}	0	0	1	b_m
Zj		0	0	0	0	0	0	0
Cj-Zj		C_1	C_2	C_3	0	0	0	

- أمّا المتغير الخارج، فيتحدد بقسمة قيم العمود (bi) على القيم المناظرة لها في العمود المحوري، ويكون المتغير الخارج الذي يقابل أقل حاصل قسمة موجبة، ويسمى الصف الذي يقع فيه المتغير الخارج بالصف المحوري

(Pivot Row)، ويسمى العنصر الذي يتقاطع عنده العمود المحوري مع الصف المحوري بالعنصر المحوري (Pivot Element).

المرحلة الخامسة:

تكوين جدول جديد: يتم تكوين الجدول الجديد، بإجراء بعض الحسابات على مصفوفة المعاملات في جدول الحل الأولي، حيث يرتبط الجدول الجديد بهذا الجدول؛ باعتباره مرحلة لاحقة له. وتتلخص هذه الحسابات بما يلي:

١- قسمة عناصر الصف المحوري على العنصر المحوري، والذي نرمز له بـ (٢_{pq})؛ حيث تمثل p: رقم الصف المحوري في مصفوفة المعاملات. q: رقم العمود المحوري في مصفوفة المعاملات.
ويسمى الصف الناتج بصف العمل (Working Row).

٢- حساب قيم عناصر الصفوف الأخرى بموجب القاعدة التالية:

القيمة الجديدة = القيمة الحالية - (**<u>(العنصر المقابل لها في الصف المحوري)×(العنصر المقابل لها في العمود المحوري</u>**)

وبعد اكتمال عملية الحساب، يتم تقييم أمثلية الحل كما في المرحلة الثالثة. ويمكن توضيح مراحل الحل كما في المخطط الانسيابي شكل (٢- ٣).

ويمكن توضيح هذه المراحل كما في المثال الآتي:

شركة إلكترونية تقوم بتجميع نوعين من أجهزة الحاسوب، الربح المتوقع للنوع الأول (٥٠) دينارًا، والنوع الثاني (٤٠) دينارًا، الطاقة الإنتاجية المتاحة

للتجميع (١٤٠) ساعة أسبوعيًا، ويحتاج النوع الأول إلى (٣) ساعات، والنوع الثاني إلى (٥) ساعات للتجميع.

وكانت الطاقة التخزينية (٣٠٠) قدم مربع، ويحتاج النوع الأول إلى (٨) قدم مربع، والثاني إلى (٥) قدم مربع. كما أن إدارة التخزين أوضحت بأنها تملك للنوع الثاني من الحاسوب مكونات لتجميع (٢٠) جهازًا فقط.

المطلوب:

تحديد عدد الأجهزة الواجب تجميعها من كلا النوعين لتحقيق أعلى أرباح ممكنة.

الحل:

- نفرض أن X_1 = عدد الوحدات من النوع الأول

  X_2 = عدد الوحدات من النوع الثاني

- النموذج الرياضي الذي يمثل المشكلة أعلاه كما يلي:

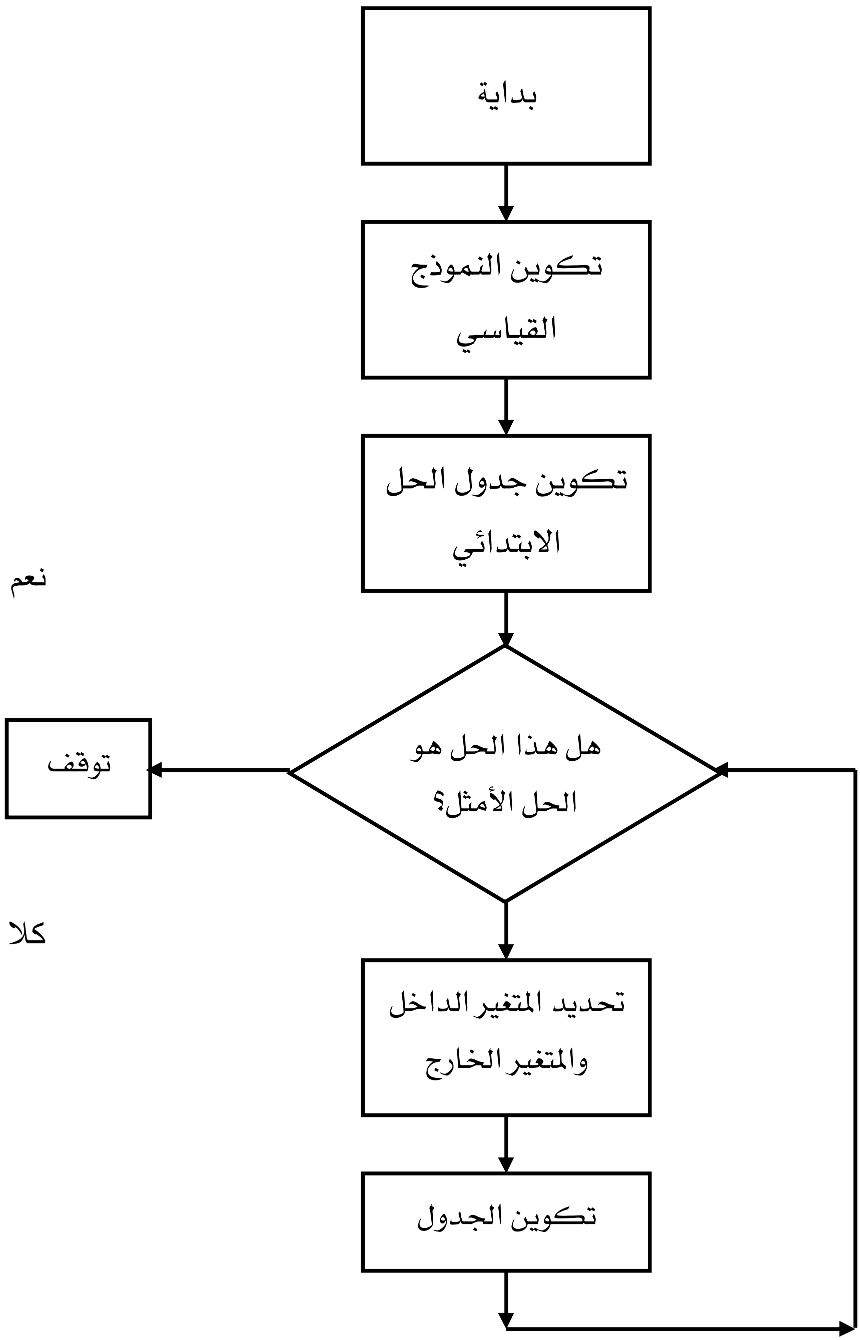
$$\text{Max } 50\,X_1 + 40\,X_2$$

s. t

$3X_1 = X_2 \leq 150$ $\longrightarrow$ قيد الطاقة

$X_2 \leq 20$ $\longrightarrow$ قيد مكونات النوع الثاني

$8X1 + 5\,X2 \leq 300$ $\longrightarrow$ قيد طاقة التخزين



شكل (٢- ٣) المخطط الانسيابي لمراحل الحل بطريقة السيمبلكس

نقوم بتكوين النموذج القياسي كما مبين أدناه:

$$\text{Max } 50X_1 + 40X_2 + OS_1 + OS_2 + OS_3$$

s.t

$$3X_1 + 5X_2 + S_1 = 150$$

$$X_2 + S_2 = 20$$

$$8X_1 + 5X_2 + S_3 = 300$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

- جدول الحل الابتدائي باستخدام معطيات النموذج القياسي كما موضح في الجدول (٢- ٣).

من الجدول نلاحظ ما يلي:

- أن الحل الأساسي في الجدول يتمثل بوجود المتغيرات الخاملة في الحل، أي أن قيمة دالة الهدف = ٠ وإن $S_1 = 120$، $S_2 = 20$، $S_3 = 300$، وهذا يعني عدم استغلال الطاقات الإنتاجية المتاحة بالكامل.
- تم استخراج قيم Zj كالآتي:

$$Z_1 = 0(3) + 0(0) + 0(8) = 0$$

$$Z_2 = 0(5) + 0(0) + 0(5) = 0$$

$$Z_3 = 0(1) + 0(0) + 0(0) = 0$$

$$Z_4 = 0(0) + 0(0) + 0(1) = 0$$

$$Z_5 = 0(0) + 0(0) + 0(1) = 0$$

$Z_6 = 0(15) + 0(20) + 0(300) = 0$ قيمة دالة الهدف

- تم استخراج قيم $Cj - Zj$، بطرح معامل كل متغير في صف Cj من القيمة المناظرة لها في صف Zj، فمثلًا معامل $X_1 = 50$، والذي يمثل C_1 و$Z_1 = 0$، إذن:

$$C1 = Z1 \Rightarrow 50 - 0 = 50$$

وهكذا لبقية القيم.

- قيمة دالة الهدف تمثل بقيمة (٠)، التي تقع تحت عمود (bi)، وفي نهاية صف Zj.

جدول (٢- ٣) الحل الابتدائي

الحل الأساسي	Cj	العمود المحوري X_1 50	X_2 40	S_1 0	S_2 0	S_3 0	b_i	
S_1	0	3	5	1	0	0	150	$\frac{1501}{3}=50$
S_2	0	0	1	0	1	0	20	$\frac{20}{0}=$
S_3	0	8	5	0	0	1	300	$\frac{300}{8}=37.5$
Zj		0	0	0	0	0	0	الصف المحوري
Cj-Zj		50	40	0	0	0		

العنصر المحوري

٣- من خلال تقييم قيم صف (Cj-Zj)، نلاحظ وجود قيم موجبة، وهذا يعني عدم تحقق الحل الأمثل؛ لذلك نبحث عن حل أفضل، من خلال تحديد المتغير الداخل والمتغير الخارج. نبحث عن أعلى قيمة موجبة في صف (Cj-Zj)؛ لأنها تعطي أعلى مساهمة لدالة الهدف، وفي المثال الحالي تتمثل بـ (٥٠)، والتي تقع تحت المتغير (X_1)، وبالتالي فإن (X_1) هو المتغير الداخل، وعموده هو العمود المحوري، أي أنّ العمود الأول هو العمود المحوري. نقوم بقسمة قيم عمود bi على قيم العمود المحوري كما يلي:

$$37.5=\frac{300}{8} \quad , \quad 50=\frac{15}{3}$$

ونختار أقل حاصل قسمة موجبة، وهي ٣٧,٥؛ وبذلك فإن (S_3) هو المتغير الخارج، وإن الصف الثالث هو الصف المحوري، وإن العنصر (a_{31}) ويساوي (٨) هو العنصر المحوري، والذي عنده يتقاطع العمود المحوري مع الصف المحوري، كما مؤشر في الجدول (٣- ٢).

٤- نقوم بتكوين جدول جديد كما في الجدول (٤- ٢)، الذي بموجبه نحصل على الحل الأفضل، وذلك بعد إجراء الحسابات التالية:

١- تكوين صف العمل، وذلك بقسمة الصف المحوري على العنصر المحوري:

$$\frac{8}{8}=1\ ,\ \frac{5}{8},\frac{0}{8}=0\ ,\frac{0}{8}=0\ ,\frac{1}{8},\frac{300}{8}=\frac{75}{2}$$

٢- تكوين الصف الأول للجدول الجديد بموجب العلاقة التالية:

القيمة الجديدة =

$$\frac{\text{(القيمة المقابلة في الصف المحوري)} \times \text{(القيمة المقابلة لها في العمود المحوري)}}{abq}$$

$$3-\frac{(8)(3)}{8}=0\ ,\ 5-\frac{(3)(5)}{8}=\frac{25}{8}\ ,\ 1-\frac{(3)(0)}{8}=1\ ,$$

$$0-\frac{(3)(0)}{8}=0\ ,\ 0-\frac{(1)(3)}{8}=-\frac{3}{8}\ ,150-\frac{(300)(3)}{8}=\frac{75}{2}$$

٣- تكوين الصف الثاني بالطريقة نفسها، ونحصل على:

0 1 0 1 0 20

جدول (٤- ٢) الحصول على الحل الأفضل

الحل الأساسي	Cj	X_1 50	X_2 40	S_1 0	S_2 0	S_3 0	b_i
S_1	0	3	$\frac{25}{8}$	1	0	$-\frac{3}{8}$	$\frac{75}{2}$
S_2	0	0		0	1		20
X_1	50	1	1	0	0	0	$\frac{75}{2}$
			$\frac{5}{8}$			$\frac{1}{8}$	
Zj		50	0	$\frac{250}{8}$	0	0	$\frac{50}{8}$
Cj-Zj		0	40	$\frac{70}{8}$	0	0	$-\frac{50}{8}$

$$\frac{\frac{75}{2}}{\frac{25}{8}}=12$$
$$\frac{20}{1}=8$$
$$\frac{\frac{75}{2}}{\frac{5}{8}}=60$$

٤- يتم احتساب صف Zj كما يلي:

$$Z_1 = 0(0) + 0(0) + 50(1) = 50$$

$$Z_2 = 0\left(\frac{25}{8}\right) + 0(1) + 50\left(\frac{5}{8}\right) = \frac{250}{8}$$

$$Z_3 = 0(1) + 0(0) + 50(0) = 0$$

$$Z_4 = 0(0) + 0(1) + 50(0) = 0$$

$$Z_5 = 0\left(\frac{-3}{8}\right) + 0(0) + 50\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{50}{8}$$

$$Z_6 = 0\left(\frac{75}{2}\right) + 0(20) + 50\left(\frac{75}{2}\right) = 1875$$

قيمة دالة الهدف

٥- حساب صف Cj-Zj كما يلي:

$$C_1 - Z_1 = 50 - 50 = 0$$

$$C_2 - Z_2 = 40 - \frac{250}{8} = \frac{70}{8}$$

$$C_3 - Z_3 = 0 - 0 = 0$$

$$C_4 - Z_4 = 0 - 0 = 0$$

$$C_5 - Z_5 = 0 - \frac{50}{8} = \frac{-50}{8}$$

٥- يتم تقييم صف (Cj-Zj)، فنلاحظ وجود قيمة موجبة تحت المتغير (X_2)، وهذا يعني أن الحل الحالي لا يمثل الحل الأمثل؛ لذلك نقوم بتكرار الخطوات الأربعة التي أجريناها على جدول الحل الابتدائي؛ حيث يتحدد (X_2) كمتغير داخل؛ لأنه يمتلك أعلى قيمة موجبة في صف (Cj-Zj)، ويكون العمود الثاني هو العمود المحوري، ثم نقوم بقسمة قيم العمود (bi) على قيم العمود المحوري المناظرة لها، فنحصل على:

$$\frac{\frac{75}{2}}{\frac{25}{8}} = 12 \quad , \quad \frac{20}{1} = 20 \quad , \quad \frac{\frac{75}{2}}{\frac{5}{8}} 60$$

وكما نلاحظ، فإن أقل حاصل قسمة هو (١٢)، ويقابل المتغير الخامل (S_1).

أي أن (S_1) هو المتغير الخارج، والصف الأول هو الصف المحوري، ثم نقوم باحتساب الصفوف بالقواعد نفسها التي تم شرحها سابقاً، فنحصل على الجدول المبسط (٥- ٢).

الحل الأساسي	Cj	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	b_i
		50	**40**	**0**	**0**	**0**	
X_1	40	0	1	$\frac{8}{25}$	0	$-\frac{3}{25}$	12
S_2	0	0	0	$-\frac{8}{25}$	1	$\frac{3}{25}$	8
X_1	50	1	0	$-\frac{5}{25}$	0	$\frac{5}{25}$	30
	Zj	50	40	$\frac{14}{5}$	0	$\frac{26}{5}$	1980
	Cj-Zj	0	0	$-\frac{14}{5}$	0	$-\frac{26}{5}$	

نقوم بتقييم قيم صف (Cj-Zj) للجدول (٥- ٢)، فنجد أن جميع قيم الصف أقل من أو تساوي صفرًا، أي أن الحل في هذا الجدول هو الحل الأمثل. ويتلخص الحل في إنتاج (٣٠) جهازًا من النوع الأول و(١٢) جهازًا من النوع الثاني، وبقاء مكونات (٨) أجهزة من النوع الثاني فائضة في المخزن، وإن قيمة الأرباح (١٩٨٠). كما نلاحظ بأن قيمة (S_1) و(S_3) تساوي صفرًا، وهذا يعني أن طاقة قسم التجميع - والممثلة بالقيد الأول - قد استخدمت بالكامل، وأن طاقة التخزين - والممثلة بالقيد الثالث - قد استغلت بالكامل أيضًا.

٢- ٣- ٢- ١ تطبيق الطريقة المبسطة على مشكلة التقليل (**Min**):

لتوضيح أهم الفروقات في تطبيق الطريقة المبسطة على مشكلة التقليل، نأخذ المثال التالي، والذي يهدف إلى إيجاد أقل التكاليف عند إنتاج نوعين من المنتجات كما يلي:

النموذج الرياضي:

$$Min\ Z = 2X_1 + X_2$$

s. t

$$X_1 + 3X_2 \geq 30$$

$$4X_1 + sX_2 \geq 40$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

لحل النموذج أعلاه، نقوم بالخطوات التالية:

١- تكوين النموذج القياسي، باستخدام القواعد التي تم توضيحها سابقًا كما يلي:

$$Min\ 2X_1 + X_2 + OS_1 + Ma_1 + Ma_2$$

s. t

$$X_1 + 3X_2 + S_1 + a_1 = 30$$

$$4X_1 + 2X_2 - S_2 + a_2 = 40$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2, S_3, a_1, a_2 \geq 0$$

جدول (٦- ٢) الحل الابتدائي

الحل الأساسي	Cj	X_1 2	X_2 1	S_2 0	a_1 M	a_2 M	b_i
a_1 a_2	M M	1 4	3 2	0 -1	1 0	0 1	30 40
Zj Cj-Zj		5M 2-5M	5M 1-5M	-M M	M 0	M 0	70M

ويلاحظ في النموذج أعلاه ما يلي:

Decision Variable	متغيرات القرار:	X_1, X_2
Surplus Variable	متغيرات فائضة:	S_1, S_2
Decision Variable	متغيرات اصطناعية:	a_1, a_2
	مقدار كبير جدًا:	M

لذلك يسمى أسلوب الحل الذي يعتمد على استخدام (M) الكبيرة بأسلوب (إم الكبيرة) (Big-M)، ويحمل هذا المعامل إشارة موجبة في حالة دالة التقليل، وسالبة في حالة التعظيم. وإضافة (إم الكبيرة) تساعد في إخراج المتغيرات الاصطناعية من الحل الأمثل.

٢- تكوين جدول الحل الابتدائي كما في الجدول (٦- ٢)، وبالقواعد نفسها التي تم شرحها في طريقة التعظيم، مع وجود فرق أساسي، يتمثل في أن متغيرات الحل الأساسي أصبحت المتغيرات الاصطناعية، ويكون المتغير الاصطناعي متغيرًا أساسيًا في الحل الابتدائي، عندما يوجد قيد بإشارة أكبر من أو يساوي (≥)، أو قيد بإشارة مساواة (=). ثم نقوم باختبار أمثلية الحل، على أساس أن جميع قيم صف (٠ ≥Cj- Z)، أي جميعها موجبة أو تساوي صفرًا، ونلاحظ وجود قيم سالبة، أي أن الجدول الحالي لا يمثل الحل الأمثل.

٣- نحدد المتغير الداخل والخارج؛ في حالة مشكلة التقليل تكون قاعدة المتغير الداخل في البحث عن أعلى قيمة في صف (Cj-Zj) بإشارة سالبة. وفي المثال الحالي (٢- M٥)، وتقع هذه القيمة تحت المتغير (X_1)، وبالتالي سيكون (X_1) المتغير الداخل، والعمود الأول العمود المحوري، أمّا المتغير الخارج فيتم تحديده بالقاعدة نفسها التي استخدمت في مشكلة التعظيم. وفي المثال الحالي، فإن المتغير الخارج سيكون (a_2)؛ لأنه يقابل أقل حاصل قسمة (bi) على قيم العمود المحوري، ويكون الصف الثاني هو الصف المحوري.

٤- تكوين جدول جديد بالقواعد نفسها التي تم توضيحها في مشكلة التعظيم، فيكون لدينا الجدول (٧- ٢).

جدول (٧- ٢) الحل الأفضل

الحل الأساسي	Cj	X_1 2	X_2 1	S_1 0	S_2 0	a_1 M	a_2 M	b_i
a_1	M	0	2.5	-1	0.25	1	0.25	20
X_1	2	1	0.5	0	-0.25	0	0.25	10
Zj		2	1+2.2M	-M	-0.5+0.25M	M	0.5-0.25M	20+20M
Cj-Zj		0	-2.5M	M	0.5-0.25M	0	1.25M-0.5	

٥- نختبر أمثلية الحل في الجدول (٧- ٢)، فنلاحظ وجود قيم سالبة، فنختار أعلى قيمة بإشارة سالبة، وتقع تحت المتغير (X_2)، ويكون المتغير الداخل (X_2)، والعمود الثاني العمود المحوري، و(a_1) المتغير الخارج؛ ومن ثم نكون جدولًا جديدًا كما في الجدول (٨- ٢).

ومن خلال تقييم صف (Cj-Zj) في الجدول (٨- ٢)، نلاحظ أن جميع القيم موجبة أو صفر، وهذا يعني أن الحل في هذا الجدول يمثل الحل الأمثل، والذي يعطي أقل قيمة لدالة الهدف، وتساوي (٢٠)، وتنتج من المنتوج الأول (6) (X_1) وحدات والمنتوج الثاني (8) (X_2) وحدات.

جدول (٨- ٢) الحل الأفضل

الحل الأساسي	Cj	X_1 2	X_2 1	S_1 0	S_2 0	a_1 M	a_2 M	b_i
X_2	1	0	1	-0.4	0.1	0.4	-0.1	8
X_1	2	1	0	0.2	-0.3	-0.2	0.3	6
Zj		2	0	0	-0.6	0	0.5	20
Cj-Zj		0	0	0	0.6	M	M-0.5	

أسئلة وتطبيقات عملية

س١: وضح مفهوم البرمجة الخطية، ثم بيِّن الحالات التي يمكن فيها أن تقدم البرمجة الخطبة دعمًا لمتخذ القرار.

س٢: ما هي أهم مستلزمات تطبيق البرمجة الخطية؟

س٣: عدِّد فقط أهم الطرق المستخدمة في حل نموذج البرمجة الخطية.

س٤: وضِّح مفهوم تحليل الحساسية وأهميته في دعم متخذ القرار.

س٥: ما هو مفهوم سعر الظل؟ وكيف يمكن استخدامه في تقييم قرارات الاستثمار في الموارد المتاحة؟

س٦: أوجد الحل الأمثل باستخدام طريقة الحل البياني لمشاكل البرمجة الخطية التالية:

$$\text{Max } Z = 4X_1 + 4X_2$$

$$\text{s.t}$$

$$3X_1 + 5X_2 \leq 150$$

$$X_1 - X_2 \leq 10$$

$$5X_1 + 3X_2 \leq 30$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

$$\text{Min } Z = X_1 + 2X_2$$

$$\text{s.t}$$

$$X_1 + 3X_2 \geq 90$$

$$8X_1 + 2X_2 \geq 160$$

$$3X_1 + 2X_2 \geq 120$$

$$X_2 \geq 70$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

س٧:   أدناه مجموعة من مشاكل البرمجة الخطية، والمطلوب تحديد نوع الحالة الخاصة لكل مشكلة:

(1)

$$\text{Max } 10X_1 + 10X_2$$

s.t

$$2X_1 \le 10$$
$$2X_1 + 4X_2 \le 16$$
$$4X_2 \le 8$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

(2)

$$\text{Max } 3X_1 + 2X_2$$

s.t

$$X_1 \ge 2$$
$$X_1 \ge 2$$
$$2X_2 \ge 8$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

(3)

$$\text{Max } X_1 + 2X_2$$

s.t

$$X_1 \le 1$$
$$2X_1 \le 2$$
$$X_1 + 2X_2 \le 2$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

(4)

$$\text{Max } 3X_1 + 3X_2$$

s.t

$$4X_1 + 6X_2 \le 48$$
$$4X_1\ 2X_1 \le 12$$
$$3X_2 \ge 2$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

س٨:   أدناه نموذج للبرمجة الخطية:

$$\text{Max } 3X_1 + 5X_2$$

$$s.t$$
$$X_2 \le 6$$
$$3X_1 + 2X_2 \le 18$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

المطلوب:

(١) إيجاد الحل الأمثل باستخدام السيمبلكس.

(٢) إيجاد الحل الأمثل بطريقة الحل البياني.

(٣) ما هي نقاط الاشتراك بين طريقة السيمبلكس وطريقة الحل البياني في كل مرحلة من مراحل الحل؟

س٩: أدناه نموذج للبرمجة الخطية:

$$\text{Min } Z = 50X_1 + 10X_2 + 75X_3$$
$$s.t$$
$$X_1 - X_2 = 1000$$
$$2X_1 + 2X_2 = 2000$$
$$X_1 \le 1500$$
$$X_1, X_2, X_3 \ge 0$$

س١٠: كوِّن النموذج المقابل لمشاكل البرمجة الخطية التالية:

$$\text{Max } 80X_1 + 40X_2 + 12X_3 + 10X_4$$
$$s.t$$
$$X_1 + 2X_2 + X_3 + 5X_1 \le 150$$
$$X_2 - 4X_3 + 8X_4 = 70$$
$$6X_1 + 7X_2 + 2X_3 - X_4 \ge 120$$
$$X_1, X_2, X_3, X_4 \ge 0$$

$$\text{Max } 150X_1 + 100X_2 + 25X_3$$
$$s.t$$
$$5X_1 + X_2 = 500$$
$$X_2 - X_3 = 1000$$
$$X_1 + X_2 + X_3 \le 1500$$
$$X_1, X_2, X_3, X_4 \ge 0$$

س١١: أدناه الحل الأمثل لإحدى مشاكل البرمجة الخطية:

		X_1	X_2	S_1	S_3	Bi
الحل الأساسي	Cj	7	9	0	0	
X_1 S_2	10 0	1 0	4 6	2 -7	0 1	160 200
Zj		10	40	20	0	
Cj-Zj		0	-10	-20	0	1600

المطلوب:

١- ما هو سعر الظل لـ (S_1) و(S_2) و(S_3)؟

٢- ما هو الحد الأقصى الذي يمكن لمتخذ القرار أن يزيد الاستثمار في (S_2)؟

٣- ما هو مدى الأمثلية لـ (X_3)؟