الفصل الخامس
نماذج النقل

مقدمة:

يختص هذا الفصل وينفرد بدراسة نماذج النقل، وهي أساليب مبسطة من البرمجة الخطية، وتهتم بنقل البضائع والسلع والمواد من مكان الإنتاج إلى المخزن أو الأسواق؛ بهدف:

١. تخفيض تكاليف النقل.

٢. تعظيم صافي الربح.

ويحتوي هذا الفصل على ستة أجزاء رئيسة، تبدأ بتعريف نماذج النقل، ثم دراسة حالة تخفيض التكاليف بطريقة أقل التكاليف، أو طريقة التوزيع المعدل، ثم تقييم أمثلية الحل.

في الجزء الثالث ستتعرف على الحل باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي، أما الجزء الرابع، فهو تقييم أمثلية الحل باستخدام طريقة (SSM) حجر الوطء. والجزء الخامس تقييم أمثليه الحل باستخدام طريقة (MODI) التوزيع المعدل، ويختم الفصل بالجزء السادس الذي يتبادل طريقة الحل باستخدام طريقة فوجيل التقريبيّة.

سيتخلل هذا الفصل أشكال إيضاحية وجداول ومصفوفات، إلى جانب أسئلة التقويم الذاتي والأنشطة والتدريبات.

وفي ختام الفصل ستحصل على الخلاصة؛ فهي في الغالب إجابة عن أهداف الفصل، أما إجابات التدريبات، فيمكن الرجوع إليها مع كل تدريب؛ لفهم الحل الصحيح. أما المراجع والمصادر، فهي المعين للدراس في طلب المزيد وتوثيق المصدر.

١. نماذج النقل Transportation Models:

نماذج النقل هي أسلوب مبسط من أساليب البرمجة الخطية، والتي تهتم بنقل سلعة ما من مكان ما (مصنع) إلى مكان آخر (مخازن أو أسواق)، **وذلك لتحقيق أحد الهدفين الآتيين:**

١. تخفيض تكاليف النقل.
٢. تعظيم صافي الربح؛ حيث إن صافي الربح يساوي الفرق بين سعر البيع وتكاليف تصنيع ونقل الوحدات.

ونجد أن هناك ثلاث طرق لنقل الوحدات من المصنع إلى المخازن أو الأسواق، وهي:

١. طريقة أقل تكلفة Least Cost Method (LCM).
٢. طريقة الركن الشمالي الغربي North West Method (NWCM).
٣. طريقة فوجيل التقريبية (Vogel's Approximation Method).

وعند استخدام أي طريقة من طرق النقل السابق ذكرها، يمكن أن نواجه إحدى الحالتين:

١- حالة أن العرض يساوي الطلب.
٢- حالة أن العرض لا يساوي الطلب.

ويأتي بعد استخدام أحد طرق النقل الثلاثة (حالة العرض يساوي الطلب أو العرض لا يساوي الطلب) تقييم أمثلية الحل، والتي تعني هل الحل الذي تم التوصل إليه هو الحل الأمثل أم لا؟ والحل الأمثل يعني الوصول إلى أقل تكلفة ممكنة إذا كان الهدف هو تخفيض التكاليف، أو الوصول إلى أقصى ربح ممكن إذا كان الهدف تعظيم الربح. ويمكن تقييم أمثلية الحل بإحدى طريقتين، هما:

١- طريقة حجر الوطء Stepping Stone Method (SSM).
٢- طريقة التوزيع المعدل Modified Distribution Method (MODI)

وسوف يتم استعراض هاتين الطريقتين من خلال النقطتين الآتيتين:

١- حالة تخفيض التكاليف.
٢- حالة تعظيم الأرباح.

ومن كل حالة سوف يتم استخدام الطرق الثلاثة المذكورة للنقل، ثم يتم تقييم أمثلية الحل بالطريقتين المذكورتين للتقييم.

٢. حالة تخفيض التكاليف:

لتفهم مشكلة النقل دعنا نفترض بعض الرموز:

a_i = كمية الإنتاج المتوافرة لدى المصنع I (العرض Supply).

b_j = كمية المنتج المطلوبة من السوق j (الطلب Demand).

C_{ij} = تكلفة نقل الوحدة من المصنع I إلى السوق J.

X_{ij} = عدد الوحدات (غير معلوم)، والمطلوب نقله من المصنع أو إلى السوق، وبالتالي يمكن التعبير عن مشكلة النقل بالصورة التالية:

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = a_i \,, a_i > 0, \qquad i = 1,2,3 \ldots\ldots\ldots n$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_i \,, b_i > 0, \qquad i = 1,2,3 \ldots\ldots\ldots m$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

فنجد أن دالة الهدف تعبر عن تخفيض تكاليف النقل إلى الحد الأدنى؛ حيث إن تكلفة النقل المراد تخفيضها تساوي **تكلفة نقل الوحدة مضروبة في عدد الوحدات، وذلك بشرط توافر القيود الآتية:**

القيد الأول: عدد الوحدات التي سوف يتم نقلها يساوي حجم الإنتاج (العرض).

القيد الثاني: عدد الوحدات التي سوف يتم نقلها يساوي حجم الطلب عليها (الطلب).

القيد الثالث: عدد الوحدات المعروضة يساوي عدد الوحدات المطلوبة (العرض = الطلب).

ولتبسيط هذه المشكلة يمكن عرضها في الجدول الآتي:

	D_1	D_2	D_3	Supply
S_1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	C_{13} X_{13}	a_1
S_2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	C_{23} X_{23}	a_2
S_3	C_{31} X_{31}	C_{32} X_{32}	C_{33} X_{33}	a_3
S_4	C_{41} X_{41}	C_{42} X_{42}	C_{43} X_{43}	a_4
Demand	b_1	b_2	b_3	$\sum a_i = \sum b_i$

وذلك بفرض أن لدينا أربعة مصانع هي S_1 , S_2 , S_3 , S_4، وثلاثة أسواق هي D_2 ,D_3 D_1؛ حيث إن المصنع يمثل جانب العرض Supply، والسوق يمثل جانب الطلب Demand؛ وذلك لتسهيل عرض المشكلة.

أ.١ طريقة أقل تكلفة Least Cost Method (LCM):

يتم فحص جميع التكاليف في الجدول، ونختار أصغر تكلفة ممكنة، ويتم تحميل هذه الخلية بأقصى قدر ممكن من الوحدات. والمقصود بأقصى قدر من الوحدات هو عدد الوحدات المتاحة أو المطلوبة لهذا الصف أو العمود أيهما أصغر. يتم إعادة الخطوات السابقة نفسها مع الخلية التي تليها مباشرة من حيث التكلفة (حيث يتم التعامل مع خلايا الجدول حسب الترتيب التصاعدي للتكاليف)، وهكذا حتى يتم نقل جميع الوحدات من المصانع إلى الأسواق أو المخازن، ولكن يعاب على هذه الطريقة أنها مطولة، ولا تعطي الحل الأمثل بطريقة مباشرة.

أ.٢ طريقة الركن الشمالي الغربي

North West Corner Method (NWCM)

تبدأ هذه الطريقة بتحميل أول خلية في أول صف، وأول عمود من جهة اليسار بأقصى عدد وحدات ممكنة، ثم نتجه إلى الخلية التالية له، سواء أكانت في صفها نفسه أو عمودها نفسه أو في الصف أو العمود التالي،

وهكذا. وهذه الطريقة يعاب عليها أنها مطولة ولا تعطي الحل الأمثل بطريقة مباشرة.

أ.٣ طريقة فوجيل التقديرية Vogel's Approximation Method (VAM):

يتم تحديد أصغر تكلفة في كل صف وكل عمود، ثم التكلفة التي تليها، ويتم حساب الفرق بينهما، ويتم تسجيل هذه الفروق في جدول، يلي ذلك تحديد أكبر فرق في صف أو عدد الفروق، ويتم تحميل الخلية صاحبة التكلفة الأقل في هذا الصف أو هذا العمود بأقصى عدد وحدات ممكن، ويتم إلغاء صف أو عمود الخلية التي تم تحميلها. يتم إعادة حساب الفروق للجدول الجديد، وتعاد الخطوات نفسها حتى نصل إلى تخصيص جميع الموارد لجميع الغايات.

ب. اختبارات الأمثلية Optimality tests:

يعد حل مشكلة النقل، أو تخصيص مجموعة من الموارد لمجموعة من الغايات، هي أن يتم اختبار ما إذا كان الحل هو الحل الأمثل، أم يوجد حل أفضل منه.

ومن اختبارات أمثلية الحل اختباران، هما:

١- طريقة حجر الوطء Stepping Stone Method (SSM).
٢- طريقة التوزيع المعدل Modified Distribution Method (MODI).

ب. ١ طريقة حجر الوطء (SSM) Stepping Stone Method:

بعد تحميل بعض خلايا الجدول بعدد من الوحدات، نجد أن هناك بعض الخلايا الأخرى فارغة، ولم يتم تحميلها، فيتم تقييم جميع الخلايا الفارغة؛ لمعرفة تأثير هذه الخلايا على الحل، وذلك عن طريق رسم خط سير يبدأ من الخلية الفارغة، ويتحرك مارًا بالخلايا المحملة فقط، ويعود مرة ثانية إلى الخلية الفارغة.

وتحسب التكلفة على أساس أن إشارة الخلية الصفرية موجبة، ثم تتردد الإشارات (سالب ثم موجب) ... وهكذا، فإن كانت نتيجة التغير في

التكاليف أكبر من الصفر، فهذا يعني أن هذه الخلية لو دخلت الحل سوف تؤدي إلى زيادة التكاليف، فيتم ترك هذه الخلية. أما إذا كانت نتيجة التغير في التكاليف تساوي صفرًا، فهذا يعني أن هذه الخلية لو دخلت الحل فلا تؤثر على التكالف بالزيادة أو النقص. أما إذا كانت نتيجة التغير أصغر من الصفر، فهذا يعني أن دخول هذه الخلية في الحل يؤدي إلى خفض التكاليف وبالتالي يتم تحديد عدد الوحدات التي يجب نقلها إلى هذه الخلية، وهو أصغر عدد من الوحدات موجود في المسار السالب؛ لتقييم هذه الخلية، على أن يتم تحميل هذه الخلية من الخلايا السالبة في المسار. يتم بعد ذلك تقييم جميع الخلايا الفارغة، ونبدأ بالخلية صاحبة أكبر تقييم سالب ثم التي تليها ... وهكذا. ويظل العمل مستمرًا حتى نصل إلى أن تقييم جميع الخلايا الفارغة أصفار، أو يعطي أرقامًا موجبة، وفي هذه الحالة يكون قد تم الحصول على الحل الأمثل.

ب.٢ طريقة التوزيع المعدل Modified Distribution Method (MODI):

تعتمد طريقة التوزيع المعدل على إضافة عمود على يمين الجدول، ويسمى U_I؛ للتعبير عن صفوف الجدول. كما يتم إضافة صف أسفل الجدول يسمى V_J؛ للتعبير عن أعمدة الجدول. يتم تكوين مجموعة من المعادلات للخلايا المحملة فقط؛ حيث إن U_I أو V_j أو كليهما يساوي صفرًا في واحدة من المعادلات فقط؛ حتى نتمكن من حل مجموعة المعادلات آنيًا. يتم تقييم الخلايا الفارغة؛ حتى يتم تحديد قيمة هذه الخلية الفارغة، وهي القيم التي يمكن الحصول عليها باستخدام طريقة SSM، ونكمل الحل بالطريقة السابقة.

وجدير بالذكر أن عدد الخلايا المحملة يجب أن يساوي عدد الصفوف + عدد الأعمدة – ١ (m+n-1).

أما في حالة أن عدد الخلايا المحملة أكبر من (m+n-1)، توجد على الأقل خلية واحدة لها أكثر من تقييم، وأما في حالة أن عدد الخلايا المحملة أصغر من (m+n-1)، فإن هذه المشكلة تعتبر مشكلة عدم الانتظام.

ب.٣ حالة العرض يساوي الطلب:

مثال توضيحي رقم (١):

تمتلك إحدى الشركات (٣) مصانع هيA_1, A_2 , A_3 ، ولديها ٣ مخازن هي B_1 , B_3 , B_1، وكانت المصانع تقوم بإنتاج نوع معين من السلع، فإذا علمت أن الطاقة الإنتاجية Supply الثلاث للمصانع على الترتيب هي: ٤٠٠، ٦٠٠، ٢٠٠ وحدة، أما الطاقة الاستيعابية للمخازن الثلاثة على التريب هي: ٢٠٠، ٧٠٠، ٣٠٠ وحدة. المطلوب تحديد سياسة نقل الإنتاج من المصانع إلى المخازن.

إذا كانت المصفوفة التالية توضح تكلفة نقل الوحدة من كل مصنع إلى كل مخزن.

	B_1	B_2	B_3
A_1	120	150	40
A_2	100	80	50
A_3	50	20	100

سيتم حل هذا المثال بثلاث طرق هي: LCM , NWCM , VAM، ومع عرض كل طريقة من طرق الحل يتم تطبيق اختبار أمثلية الحل بطريقتين؛ هما MODI وSSM.

أولًا: الحل باستخدام طريقة LCM:

	B_1	B_2	B_3	Supply
A_1	120	150	40	400
A_2	100	80	50	600
A_3	50	20	100	200
Demand	200	700	300	1200

إن مصفوفة التكاليف يمكن أن تأخذ الرموز التالية:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 & 150 & 40 \\ 100 & 80 & 50 \\ 50 & 20 & 100 \end{bmatrix}$$

عند استخدام طريقة أقل تكلفة LCM يتم البحث عن أقل تكلفة في الجدول، فنجد أنها C_{32}، وفيها التكلفة ٢٠ جنيهًا للوحدة، يتم تحميل هذه الخلية بأقصى عدد وحدات ممكن من الوحدات، وأقصى عدد وحدات هو الرقم الأقل في صف وعمود هذه الخلية، ففي صف هذه الخلية نجد أن العرض Supply يساوي ٢٠٠ وحدة، وفي عمود هذه الخلية نجد أن Demand الطلب يساوي ٧٠٠ وحدة، وبالتالي يتم تحميل هذه الخلية بعدد الوحدات الأقل، وهو ٢٠٠ وحدة.

وعليه، فإن هذه الخطوة يمكن التعبير عنها بالجدول التالي:

Iteration 1-1				
	B_1	B_2	B_3	Supply
A_1	120	150	40	400
A_2	100	80	50	600
A_3	50	20 200	100	0
Demand	200	500	300	1000

يلاحظ في جدول Iteration 1-1 أن الخلية C_{32} يتم تحميلها بعدد ٢٠٠ وحدة، وبالتالي نقص عدد الوحدات المطلوبة من ٧٠٠ إلى ٥٠٠ وحدة، أما الوحدات المعروضة (الصف الثالث)، فأصبحت تساوي صفرًا؛ وذلك لأنه تم تحميل الكمية كلها (٢٠٠ وحدة) في الخلية C_{32}، وحيث إن الكمية المعروضة في الصف الثالث أصبحت تساوي صفرًا، فإن باقي خلايا هذا الصف لا تدرج في الخطوة التالية للحل، وهذه الخلايا هي A_3B_3، A_3B_1؛ وذلك نتيجة لتحميل الخلية A_3B_2 بعدد ٢٠٠ وحدة. ويلاحظ عند تحميل

إحدى الخلايا، فإن عملية التحميل ينتج عنها إلغاء خلايا صف أو عمود، فإذا كان عدد الوحدات المعروضة (صف) أصغر من عدد الوحدات المطلوبة (عمود)، فيتم تحميل الخلية بعدد الوحدات المطلوبة، ثم يلي ذلك إلغاء باقي خلايا العمود. ونتيجة إلغاء بعض الخلايا، سواء أكانت في صف أو عمود، فإن هذه الخلايا لا تدخل في الحل بعد ذلك، والخطوة التالية أو المحاولة الثانية Iteration 1-2 لتحميل خلية أخرى من خلايا الجدول، وذلك عن طريق البحث في الجدول السابق مباشرة عن أصغر تكلفة من بين الخلايا الفارغة المتاحة، فنجد أن الخلية C_{13}، وتكلفة نقل الوحدة فيها يساوي ٤٠ جنيهًا، وبالنظر إلى عدد الخلايا المتاحة في صفها (الصف الأول)، نجد أنها ٤٠٠ وحدة وعدد الخلايا المطلوبة في عمودها (العمود الثالث) هي ٣٠٠ وحدة، فيتم تحميل هذه الخلية بعدد الوحدات الأقل وهو ٣٠٠ وحدة. وبالتالي نحصل على الجدول التالي:

Iteration 1-2				
	B_1	B_2	B_3	Supply
A_1	120	150	40 300	100
A_2	100	80	50	600
A_3	50	20 200	100	0
Demand	200	500	0	700

يلاحظ في جدول ٢- Iteration١ – إن الخلية C_{13} تم تحميلها بعدد ٣٠٠ وحدة، وبالتالي، فإن عمودها أصبح يساوي صفرًا، وصفها أصبح يساوي ١٠٠ وحدة، وحيث إن عمودها أصبح يساوي صفرًا، فإن باقي الخلايا في هذا العمود لا تدرج في الخطوة التالية للحل، وهذه الخلايا: A_3B_3 , A_2B_3 , A_2B_3، وهي الخلايا التي يتم إلغاؤها نتيجة تحميل الخلية A_1B_3 بعدد ٣٠٠ وحدة.

بالبحث في الخلايا الفارغة والمتاحة في الجدول ٢- ١ Iteration، عن أقل تكلفة، نجد أن أقل تكلفة تالية هي الخلية C_{22}، وتكلفة نقل الوحدة

الواحدة فيها تساي ٨٠ جنيهًا. بفحص عدد الوحدات المتاحة في الصف الثاني (العرض)، والعمود الثاني (الطلب)، نجد أنهما على الترتيب ٦٠٠، ٥٠٠ وحدة.

وبالتالي يتم تحميل الخلية C_{22} بالعدد الأقل فيهما، وهو (٥٠٠) وحدة، وبهذا يمكن الحصول على الجدول الثالث 3- 1– –Iteration، والذي يأخذ الصورة التالية (ويلاحظ في هذه الخطوة أن العدد الأقل كان من جانب الطلب (العمود الثاني)، وبهذا فإن باقي الخلايا في العمود الثاني يتم إلغاؤها):

.Iteration 1-3				
	B_1	B_2	B_3	Supply
A_1	120	150	40 300	100
A_2	100	80 500	50	100
A_3	50	20 200	100	0
Demand	200	0	0	200

يلاحظ من هذا الجدول أن الوحدات المتاحة في العمود الثاني أصبحت تساوي صفرًا، وعدد الوحدات المتاحة في الصف الثاني أصبحت تساوي ١٠٠ وحدة؛ وذلك لأنه تم تحميل (٥٠٠) وحدة من (٦٠٠) وحدة متاحة. وكملحوظة عامة إذا حصلت أثناء الحل على خلية في عمود من أعمدة الطلب Demand تساوي صفرًا، فهذا يعني أن هذا العمود لا يمكن إضافة أي خلية إليه، وبالمثل إذا حصلت على خلية في صف من صفوف العرض Supply تساوي صفرًا، فهذا يعني أنه لا يمكن إضافة أي خلية إلى هذا الصف.

بالبحث في الجدول عن أقل تكلفة في الخلايا الباقية المتاحة، نجد أنها تقع في الخلية C_{21}، وتكلفة نقل الوحدة تساوي (١٠٠) جنيه. بفحص صفها وعمودها نجد أن عدد الوحدات المتاحة على الترتيب ١٠٠، ٢٠٠ وحدة، وبتحميل هذه الخلية بعدد الوحدات الأقل وهو ١٠٠ وحدة، يمكننا الحصول على الجدول التالي:

Iteration 1-4				
	B_1	B_2	B_3	Supply
A_1	120	150	40 300	100
A_2	100 100	80 500	50	0
A_3	50	20 200	100	0
Demand	100	0	0	100

بفحص الجدول 4- Iteration– نجد أن هناك خلية واحدة فارغة متاحة، وهي C_{11}، وتكلفة نقل الوحدة فيها ١٢٠ جنيهًا، بفحص صفها وعمودها نجد أن كلًّا منهما يحتوي على (١٠٠) وحدة، وبالتالي يتم تحميل عدد (١٠٠) وحدة في هذه الخلية، وبهذا نحصل على الجدول الأخير للحل، والذي يأخذ الصورة التالية:

Iteration 1-5				
	B_1	B_2	B_3	Supply
A_1	120 100	150	40 300	400
A_2	100 100	80 500	50	600
A_3	50	20 200	100	200
Demand	200	700	300	1200

وللتأكد من صحة الحل يتم تجميع الوحدات في كل صف وكل عمود، ومقارنتها بعدد الوحدات المتاحة من كل مصنع وعدد الوحدات المطلوبة لكل مخزن، فإذا كانت المجاميع متطابقة مع الوحدات المتاحة المطلوبة والمعروضة فهذا يثبت صحة الحل.

بعد تحميل خلايا الجدول بعدد الوحدات الممكنة، يتم حساب تكاليف نقل هذه الوحدات كما يلي:

$$= 100\ (120) + 300\ (40) + 100\ (100) + 500\ (80) + 200\ (20) = 78000\ \text{LE}$$

ب.٤ تقييم أمثلية الحل باستخدام طريقة حجر الوطء SSM:

يتم تقييم الخلايا الصفرية أو الفارغة، فإذا كان التقييم نتيجته أصفارٌ أو قيمٌ موجبة، فهذا يعني أن الحل الذي تم التوصل إليه حل أمثل. أما في حالة

وجود خلية أو أكثر تقييمها يعطي رقمًا سالبًا، فهذا يعني إمكانية إدخال هذه الخلية لتخفيض التكاليف. فمن الجدول الأخير نجد أن الخلايا الفارغة هي: A_3B_3 A_3B_1 , A_2B_3 , A_1B_2، ويتم تقييم كل خلية فارغة على حدة، وذلك على النحو التالي:

تبدأ بالخلية الفارغة مع إعطائها الإشارة الموجبة، يلي ذلك أول خلية مملوءة وقريبة منها، (سواء أكانت على يسار أو يمين أو أعلى أو أسفل الخلية الفارغة، مع ضرورة الأخذ في الاعتبار أن التحرك من الخلية الفارغة إلى خلية مملوءة يتم أفقيًا أو رأسيًا فقط)، وتأخذ الإشارة السالبة، ويتتابع الحل، بحيث نحصل على دورة تنتهي مرة ثانية عند الخلية الفارغة المراد تقييمها، مرورًا بالخلايا المملوءة فقط، وبهذا فإن مسار تقييم الخلية A_1B_2 يكون على الشكل التالي:

$$A_1B_2 = C_{12} - C_{11} + C_{21} - C_{22} = 150 - 120 + 100 - 80 = +50$$

من تقييم الخلية A_1B_2 نجد أن نتيجة التقييم أعطت رقمًا موجبًا، وهذا يعني أن دخول هذه الخلية إلى الحل سوف يؤدي إلى زيادة التكاليف، وبهذا يتم رفض هذه الخلية. يتم بعد ذلك تقييم الخلايا الفارغة؛ خلية تلي الأخرى كما يلي:

تقييم الخلية A_2B_3:

$$A_2B_3 = C_{23} - C_{13} + C_{11} - C_{21} = 50 - 40 + 120 - 100 = +30$$

تقييم الخلية A_2B_3:

$$A_3B_1 = C_{31} - C_{21} + C_{22} - C_{32} = 50 - 100 + 80 - 20 = +10$$

يلاحظ عند تقييم الخلية A_2B_3 أن أقرب خلية مملوءة هي A_2B_3 (أعلى الخلية A_2B_3) أو الخلية A_2B_2 (على يسار الخلية A_2B_3)، فنبدأ المسار بإحداهما، وعلى سبيل المثال نبدأ بالخلية A_1B_3، حيث نجد أن أقرب خلية مملوءة لهذه الخلية هي A_1B_1 .. نجد أن أقرب خلية مملوءة لهذه الخلية هي A_1B_1، وفي المسار نجد أنه تم الانتقال من A_1B_3 إلى A_1B_1 متخطيًا الخلية

الفارغة A_1B_2، ثم يتم الانتقال من A_1B_1 إلى A_2B_3 متخطيًا الخلية A_2B_2، وهي خلية مملوءة؛ وذلك لأنه تم تخطي الخلية المقابلة لها في الصف الأول.

أما في حالة بدء التقييم بالخلية A_2B_2، فهذا يعني أن المسار يبدأ بالخلية الفارغة A_2B_3، ثم يتجه يسارًا إلى الخلية A_2B_2، ثم يسارًا إلى الخلية A_2B_1، إلى أعلى إلى الخلية A_1B_1، ثم يمينًا إلى الخلية A_1B_3، وفي هذه الحالة نجد أن الخلية A_2B_2 تم أخذها في الاعتبار عند تصميم التقييم، ولكن الخلية المقابلة لها في الصف الأول فارغة وتم تخطيها، وبالتالي يجب تخطي هذه الخلية A_2B_2 عند التقييم، وبهذه الطريقة يكون مسار التقييم كما يلي:

$$A_2B_3 = C_{23} - C_{21} + C_{11} - C_{13} = 50 - 100 + 120 - 40 = 30$$

وبهذا التقييم نجد أنه إذا تم البدء بالخلية A_1B_3 أو الخلية A_2B_3، فإن نتيجة التقييم تكون واحدة.

تقييم الخلية A_3B_3:

$$A_3B_3 = C_{23} - C_{21} + C_{11} - C_{13} = 50 - 100 + 120 - 40 = +30$$

من تقييم الخلايا الفارغة نجد أن جميع الخلايا تعطي قيمًا موجبة، وبهذا فإن الحل الذي تم التوصل إليه هو الحل الأمثل، ولا يمكن تخفيض التكاليف عن ٧٨٠٠٠ جنيه.

ب.٥ تقييم أمثلية الحل باستخدام طريقة التوزيع المعدل:

بالرجوع إلى الجدول الأخير Iteration 1-5 للحل يتم إضافة عمود على يمين الجدول، يسمى U_J؛ للتعبير عن صفوف الجدول، كما يتم إضافة صف أسفل الجدول يسمى V_J؛ للتعبير عن أعمدة الجدول، وبهذا يكون الجدول كما يلى:

Iteration 1-5

	B_1	B_2	B_3	Supply	U_i
A_1	120 100	150	40 300	400	U_1
A_2	100 100	80 500	50	600	U_2
A_3	50	20 200	100	200	U_3
Demand	200	700	300	1200	
V_j	V_1	V_2	V_3		

ثم يتم تكوين معادلات الخلايا المملوءة فقط، حيث إن:

$$C_{ij} = U_i + V_j$$

$$C_{11} = U_1 + V_1 \quad \therefore \quad 120 = U_1 + V_1$$

$$C_{13} = U_1 + V_3 \quad \therefore \quad 40 = U_1 + V_3$$

$$C_{21} = U_2 + V_1 \quad \therefore \quad 100 = U_2 + V_1$$

$$C_{22} = U_2 + V_2 \quad \therefore \quad 80 = U_2 + V_2$$

$$C_{32} = U_3 + V_2 \quad \therefore \quad 20 = U_3 + V_2$$

يلاحظ أنه يتكون لدينا خمس معادلات وستة مجاهيل، ولحل هذه المعادلات يفترض أن $U_1 = 0$، وباستخدام التعويض المتتابع نحصل على قيم المتغيرات الستة، وتكون النتائج كما يلي:

$$U_1 = 0 \qquad V_1 = 120$$

$$U_2 = -20 \qquad V_2 = 100$$

$$U_3 = 80 \qquad V_3 = 40$$

يتم إضافة قيم هذه المتغيرات إلى جدول الحل الأخير Iteration 1-5 كما يلي: - - - م. يلي ذلك إعادة تقييم الخلايا الفارغة، عن طريق تقدير تكلفة النقل لهذه الوحدات؛ حيث إن التكلفة المقدرة هي C_{ij}، وذلك باستخدام المعادلة كما يلي:

$$C_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$$

$$C_{12} = C_{12} - U_1 - V_2 = 150 - 0 - 100 = +50$$

$$C_{23} = C_{23} - U_2 - V_3 = 50 - -20 - 40 = +30$$

$$C_{31} = C_{31} - U_3 - V_1 = 50 - -80 - 120 = +10$$

$$C_{33} = C_{33} - U_3 - V_3 = 100 - -80 - 40 = 140$$

ومن تقييم الخلايا الفارغة، نجد أن جميع تكاليف النقل المقدرة موجبة (أو أصفار)، وهذا يعني أنه لا يمكن إدخال أي وحدة إلى الحل لتخفيض التكاليف، أو أن جدول الحل الأخير Iteration 1-5 هو الحل الأمثل، والذي يقوم بنقل الوحدات المعروضة من المصانع إلى المخازن بأقل تكلفة ممكنة.

٣. الحل باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي (NWCM):

هذه الطريقة تبدأ بتحميل أول خلية في شمال غرب الجدول بأقصى عدد وحدات ممكنة، ثم نتجه إلى الخلية التالية لها، سواء أكانت في صفها أو في عمودها، ويلاحظ أن الانتقال من الخلية الأولى إلى الخلية التالية يجب أن يكون أفقيًا أو رأسيًا فقط. يتم تحميل هذه الخلية بأقصى عدد وحدات ممكنة، وهكذا حتى يتم نقل جميع الوحدات المعروضة من المصانع إلى المخازن، وذلك على النحو التالي:

نبدأ بالخلية A_1B_1، وهي تقع في أقصى شمال غرب الجدول، وبفحص صفها وعمودها، نجد أن عدد الوحدات المطلوبة ٢٠٠ وحدة (العمود الأول)، بينما عدد الوحدات المعروضة ٤٠٠ وحدة (الصف الأول)، وبتحميل هذه الخلية بأقصى عدد وحدات ممكنة، فيتم تحميلها بعدد (٢٠٠) وحدة، وبهذا لا يمكن إضافة أي وحدات في العمود الأول، بينما يتبقى عدد ٤٠٠ – ٢٠٠ = ٢٠٠ وحدة، يمكن تحميلها في الخلايا الباقية من الصف الأول، ويلاحظ أن الخلية A_1B_1 تم تحميلها بعدد ٢٠٠ وحدة (الطلب)، وبهذا يتم إلغاء باقي الخلايا في العمود الأول، وهي الخلايا A_3B_1، A_2B_1، وبهذا فإن هذه الخلايا غير متاحة في الخطوة التالية.

بالانتقال إلى الخلية A_1B_2، وبفحص صفها وعمودها نجد أن عمودها يحتوي على (٧٠٠) وحدة، بينما عدد الوحدات الباقية في صفها (٢٠٠) وحدة، يتم تحميلها بعدد الوحدات الأقل من صفها أو عمودها، وبالتالي يتم تحميل هذه الخلية بعدد (٢٠٠) وحدة، وبهذا يكون الصف الأول قد تم تحميله بالكامل، ولا يمكن إضافة أي وحدات في الخلايا الباقية في هذا الصف، ويتبقى في العمود الثاني (٥٠٠) وحدة، وبالانتقال إلى الخلية التالية، وهي A_2B_3، بعد ذلك نجد أنه يتبقى خلية واحدة هي A_3B_3، وعدد وحدات صفها يساوي عدد وحدات عمودها، وهو (٢٠٠) وحدة، وبتحميل هذه الخلية بهذا العدد من الوحدات، يكون قد تم نقل جميع الوحدات المعروضة إلى المخازن المطلوبة. وبهذا يكون جدول النقل في الصورة التالية بعد تحميل خلايا الجدول. ويتم حساب تكاليف النقل كما يلي:

Iteration 1-5					
	B_1	B_2	B_3	Supply	U_i
A_1	120	150	40	400	0
	100		300		
A_2	100	80	50	600	-20
	100	500			
A_3	50	20	100	200	-80
		200			
Demand	200	700	300	1200	
V_j	120	100	40		

$$= 200(120) + 200\,(150) + 500\,(80) + 100\,(50) + 200\,(100) = 11900LE$$

٤. تقييم أمثلية الحل باستخدام طريقة حجر الوطأ (SSM):

يتم تقييم الخلايا الفارغة على النحو التالي:

$$A_1B_3 = C_{13} - C_{23} + C_{22} - C_{12} = 40 - 50 + 80 - 150 = -80$$

$$A_2B_1 = C_{21} - C_{11} + C_{12} - C_{22} = 100 - 120 + 150 - 80 = +50$$

$$A_3B_1 = C_{31} - C_{33} + C_{23} - C_{22} + C_{12} - C_{11} = 50 - 100 + 50 - 80 - 150 - 120 = -50$$

$$A_3B_2 = C_{32} - C_{22} + C_{23} = 20 - 80 + 50 - 100 = -110$$

من تقييم الخلايا الفارغة نجد أن هناك خلايا تقييمها موجب، وخلايا تقييمها سالب، بالطبع الخلايا التي تقييمها موجب أو أصفار لا تؤدي إلى خفض التكاليف، بينما الخلايا التي تقييمها سالب سوف تؤدي إلى تحسين الحل وتخفيض التكاليف. بالبحث عن أكبر رقم سالب نجد أن الخلية A_3B_2 تعطي أكبر رقم سالب (- ١١٠). لإدخال هذه الخلية في الحل يتم تحميلها بأقل عدد من الوحدات يقع في مسار تقييمها، وبشرط أن تكون الخلية لها إشارة سالبة، فنجد أن مسار التقييم هو:

$$A_3B_2 = C_{32} - C_{22} + C_{23} - C_{33}$$

فنجد أن الخلايا السالبة هي: A_2B_2 , A_3B_3 والخلية A_3B_3 صاحبة أقل عدد وحدات من خلايا المسار السالبة، وبها ٢٠٠ وحدة. يتم نقل هذه الوحدات من الخلية A_3B_3 إلى الخلية A_3B_2. ويقابل هذه العملية خفض خلايا المسار الموجبة بعدد الوحدات نفسها، ويمكن أن تتم عملية النقل على النحو التالي:

$$A_3B_2 = A_3B_2 - A_2B_2 + A_2B_3 - A_3B_3$$

$$A_3B_2 = 0 + 200 = 200$$

$$A_2B_2 = 500 - 200 = 300$$

$$A_2B_3 = 100 + 200 = 300$$

$$A_3B_3 = 200 - 200 = 0$$

يتم إعادة تصوير الجدول بعد هذا التعديل كما يلي:

	B_1	B_2	B_3	Supply
A_1	(1) 200 / 120	(2) 200 / 150	40	400
A_2	100	(3) 500 / 80	(4) 100 / 50	600
A_3	50	20	(5) 200 / 100	200
Demand	200	700	300	1200

بإعادة تقييم الخلايا الفارغة لجدول Iteration 2-2، نجد أن:

$$A_1B_3 = C_{13} - C_{12} + C_{22} - C_{23} = 40 - 150 + 80 - 50 = -89$$

$$A_2B_1 = C_{21} - C_{11} + C_{12} - C_{22} = 100 - 120 + 150 - 80 = +50$$

$$A_3B_1 = C_{31} - C_{11} + C_{12} - C_{32} = 50 - 120 + 150 - 20 = +60$$

$$A_3B_3 = C_{33} - C_{23} + C_{22} - C_{32} = 100 - 50 + 80 - 20 = +110$$

نجد أن تقييم الخلية A_1B_3 سالب (وفي حالة وجود أكثر من خلية تقييمها سالب، نبدأ بالخلية صاحبة أكبر رقم سالب)، وبهذا يتم إدخالها إلى الحل بالطريقة السابقة، فنجد أن مسار تقييمها هو:

$$A_1B_3 = A_1B_3 - A_1B_2 + A_2B_2 - A_2B_3$$

$$A_1B_3 = 0 + 200 = 200$$

$$A_1B_2 = 200 - 200 = 0$$

$$A_2B_2 = 300 - 200 = 500$$

$$A_2B_3 = 300 - 2\square0 = 100$$

يتم إعادة تصوير الجدول بعد إجراء هذا التعديل، فتكون المحاولة الثالثة للوصول إلى الحل في الصورة التالية:

	B_1	B_2	B_3	Supply
A_1	120 200	150	40 200	400
A_2	100	80 500	50 100	600
A_3	50	20 200	100	200
Demand	200	700	300	1200

بإعادة تقييم الخلايا الفارغة لجدول Iteration 2-3 نجد أن:

$$A_1B_2 = C_{12} \quad C_{13} \mid C_{23} \quad C_{22} = 150 \quad 40 \mid 50 \quad 80 = \mid 80$$

$$A_2B_1 - C_{21} - C_{11} + C_{13} - C_{23} - 100 - 120 + 40 - 50 - -30$$

$$A_3B_1 = C_{31} - C_{11} + C_{13} - C_{23} + C_{22} - C_{32} = 50 - 120 + 40 - 50 + 80 - 20 = -20$$

$$A_3B_3 = C_{33} - C_{23} + C_{22} - C_{32} = 100 - 50 + 80 - 20 = +110$$

نجد أن أكبر رقم سالب (- ٣٠)، والخلية هي A_2B_1، وبهذا يتم إدخال هذه الخلية إلى الحل على النحو التالي:

$$A_2B_1 = A_1B_2 - A_1B_3 + A_2B_3 - A_2B_2$$

$$A_2B_1 = 0 + 100 = 100$$

$$A_1B_1 = 200 - 100 = 100$$

$$A_1B_3 = 200 + 100 = 300$$

$$A_2B_3 = 10\_ - 100 = 0$$

وبهذا تكون المحاولة الرابعة للوصول إلى الحل تأخذ الصورة التالية:

	B_1	B_2	B_3	Supply
A_1	120 100	150	40 300	400
A_2	100 100	80 500	50	600
A_3	50	20 200	100	200
Demand	200	700	300	1200

بإعادة تقييم الخلايا الفارغة سنجد أنها تعطي أرقامًا موجبة، وبحساب إجمالي تكالف النقل، سنجد أنها ٧٨٠٠٠ جنيه، وسنترك تقييم الخلايا الفارغة، وحساب إجمالي تكاليف النقل للقارئ لحسابها.

٥. تقييم أمثلية الحل باستخدام طريقة التوزيع المعدل (MODI):

عزيزي الدارس، كما سبق الذكر، يتم تكوين معادلات للخلايا المملوءة فقط على النحو التالي، وذلك من جدول الحل الأول Iteration 2-1 .

$$C_{ij} = U_i + V_j$$

$$C_{11} = U_1 + V_1 \quad \therefore \quad 120 = U_1 + V_1$$

$$C_{12} = U_1 + V_2 \quad \therefore \quad 150 = U_1 + V_2$$

$$C_{22} = U_2 + V_2 \quad \therefore \quad 80 = U_2 + V_2$$

$$C_{23} = U_2 + V_3 \quad \therefore \quad 50 = U_2 + V_3$$

$$C_{33} = U_3 + V_3 \quad \therefore \quad 100 = U_3 + V_3$$

يلاحظ أنه يتكون لدينا خمس معادلات وستة مجاهيل. ولحل هذه المعادلات يفترض أن $U_1 = 0$، وباستخدام التعويض المتتابع يتم تقدير قِيَم باقي المتغيرات (المجاهيل)، وتكون النتائج على النحو التالي:

$$U_1 = 0 \qquad V_1 = 120$$
$$U_2 = -70 \qquad V_2 = 150$$
$$U_3 = 20 \qquad V_3 = 120$$

بإضافة قيم المتغيرات المقدرة إلى الجدول Iteration 2-1 نحصل على الصورة التالية:

	B_1	B_2	B_3	Supply	U_i
A_1	120 200	150 200	40	400	0
A_2	100	80 500	50 100	600	-70
A_3	50	20	100 200	200	-20
Demand	200	700	300	1200	
V_j	120	150	120		

يتم تقييم الخلايا الفارغة باستخدام المعادلة:

$$C_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$$
$$C_{13} = C_{13} - U_1 - V_3 = 40 - 0 - 120 = 080$$
$$C_{21} = C_{21} - U_2 - V_1 = 100 - -70 - 120 = +50$$
$$C_{31} = C_{31} - U_3 - V_1 = 50 - -20 - 120 = -50$$
$$C_{32} = C_{32} - U_3 - V_2 = 20 - -20 - 150 = -110$$

يتم إدخال الخلية صاحبة أكبر رقم سالب إلى الحل بالطريقة السابقة نفسها SSM، ويتم إعادة حساب U_I , V_J مرة أخرى؛ حتى نصل إلى جميع المقدرة C_{ij} أصفار أو قيم موجبة.

٦. الحل باستخدام طريقة فوجيل التقريبية (VAM):

هذه الطريقة تعتمد على حساب الفرق بين أصغر تكلفة والتكلفة التي تليها مباشرة، وذلك لكل صف وكل عمود على حدة. يتم اختيار أكبر فرق ممكن، فيتم تحديد الصف أو العمود الذي نعمل عليه، وفي هذا الصف أو العمود نختار الخلية صاحبة أقل تكلفة نقل، ويتم تحميلها بأقصى عدد من الوحدات، وبهذا يكون قد تم تكوين الصف الأول في جدول الفروق. نعيد الحسابات نفسها مرة أخرى لتكوين الصف الثاني في الجدول، ونختار خلية جديدة ... وهكذا.

وبالرجوع إلى المشكلة الأصلية، نجد أن جدول التكاليف يأخذ الصورة التالية:

	B_1	B_2	B_3	Supply
A_1	120	150	40	400
A_2	100	80	50	600
A_3	50	20	100	200
Demand	200	700	300	1200

بحساب الفرق بين أقل تكلفة، والتكلفة التالية لها في كل صف وكل عمود، نحصل على جدول الفروق الآتي:

Rows			Columns			Cells	Units
A_1	A_2	A_3	B_1	B_2	B_3		
80	30	30	50	60	10	A_1B_3	300
30	20	30	50	60	-	A_3B_2	200
30	20	-	20	70	-	A_2B_2	500
120	100	-	20	-	-	A_1B_1	100
100	-	-	100	-	-	A_2B_1	100

نجد أن جدول الفروق يتكون من أربعة أجزاء؛ الجزء الأول للتعبير عن الصفوف *Rows*، وهذا الجزء مقسم إلى ثلاثة أعمدة *A1 , A2 , A3*، بواقع عمود لكل مصنع، والجزء الثاني للتعبير عن الأعمدة *Columns*، ومقسم إلى ثلاثة أعمدة؛ هي*B2 , B3 , B1*، بواقع عمود لكل مخزن، أما الجزء الثالث فيتم تحديد الخلايا *Cells* التي يتم تحميلها، والجزء الرابع لتحديد عدد الوحدات التي يتم تحميلها في كل خلية.

إن هذا الجدول (جدول الفروق) يتم تكوينه صفًّا يلي الآخر على النحو التالي:

الصف الأول من جدول الفروق:

ففي جدول المشكلة الأصلي نجد أن الفرق بين أصغر تكلفة والتكلفة التالية لها مباشرة في الصف الأول هي ١٢٠ – ٤٠ = ٨٠، وذلك من جدول النقل، وفي صف *A2* نجد أن الفرق بين أصغر تكلفتين هي ٨٠ – ٥٠ =٣٠، وفي صف *A3* نجد أن الفرق بين أصغر تكلفتين هي ٥٠ - ٢٠=٣٠، وهكذا بالنسبة لكل عمود، فنجد أن الفرق بين أصغر تكلفتين في أعمدة جدول النقل على الترتيب هي (٥٠) للمخزن الأول *B1*، *60*، للمخزن الثاني B_2، *10*، للمخزن الثالث *B3* لكل من *B3 , B2 , B1*. بالنظر إلى جدول الفروق والبحث عن أكبر فرق فيه، نجد أن أكبر فرق هو (٨٠)، وهو يمثل الفرق بين الخليتين A_1B_1 , A_1B_3. باختيار الخلية التي تحقق أقل تكلفة، نجد أنها A_1B_3 وتكلفة النقل فيها ٤٠ جنيهًا للوحدة، يتم تحميل هذه الخلية بأقصى عدد من الوحدات (عدد الوحدات الأقل من صفها ٤٠٠ وعمودها ٣٠٠) وهو (٣٠٠) وحدة، فيتم كتابة اسم الخلية في عمود *Cells*، وعدد الوحدات في عمود *Units*، بهذا يكون عمود B_3 قد تم استنفاده، ولا يمكن إضافة وحدات جديدة إليه. أما الصف الأول، فنجد فيه أن عدد الوحدات الباقية فيه (١٠٠) وحدة.

نرجع مرة أخرى إلى جدول الفروق لتسجيل الفرق بين أصغر تكلفتين في الصفوف والأعمدة الباقية، مع الأخذ في الاعتبار أن العمود الثالث من جدول النقل قد تم استنفاده. بحساب الفرق للصفوف والأعمدة على الترتيب، نحصل

على الصف الثاني من جدول الفروق، وهو ٦٠، ٥٠، ٣٠، ٢٠، ٣٠، ونجد أن أكبر فرق هو ٦٠، ويقع في عمود B_2 من جدول النقل، ونجد أن أصغر تكلفة تقع في الخلية A_3B_2، وبتحميلها بأقصى عدد وحدات ممكنة من صفها وعمودها، نجد أن عدد هذه الوحدات (٢٠٠) وحدة، وبهذا يكون الصف الثالث من جدول النقل قد تم استنفاذه، والعمود الثاني يتبقى به (٥٠٠) وحدة ... وهكذا حتى نصل إلى الخلية A_1B_1، وعدد الوحدات الباقية هي (١٠٠) وحدة، وبهذا يكون قد تم تحميل جميع الخلايا. ويظهر الحل في الجدول التالي:

	B_1	B_2	B_3	Supply
A_1	120 100	150	40 300	400
A_2	100 100	80 500	50	600
A_3	50	20 200	100	200
Demand	200	700	300	1200

لعل طريقة الحل باستخدام VAM تبدو صعبة، وتحتاج إلى تركيز من القارئ حتى لا تخطئ في الحل، ولتبسيط هذه الطريقة سيتم حل المثال السابق بطريقة توضيحية أكثر، حيث يتم البدء من الجدول الأول للمثال، ونبدأ بإضافة عمود وصف إلى الجدول؛ لنسجل فيه الفرق بين أصغر تكلفتين في كل صف وكل عمود، وهذا العمود يسمى *Diff*.

	B_1	B_2	B_3	Supply	Diff
A_1	120	150	40 300	400	80
A_2	100	80	50	600	30
A_3	50	20	100	200	30
Demand	200	700	300	1200	
Diff	50	60	10		

من صف وعمود *Diff* يتم اختيار أكبر رقم (أكبر فرق)، ونجد أنه يقع في الصف الأول، وقيمته ٨٠. بفحص هذا الصف نجد أن أصغر تكلفة في هذا الصف هي A_1B_3، فيتم تحميلها بأقصى قدر ممكن (عدد الوحدات الأقل من صفها وعمودها)، وهو ٣٠٠ وحدة. بهذا يكون العمود الثالث قد تم استنفاده، والصف الأول يتبقى به (١٠٠) وحدة فقط. يتم الانتقال إلى الجدول التالي لإعادة الخطوات السابقة نفسها.

ويلاحظ في هذا الجدول أن الفرق بين أصغر تكلفتين في الصف الأول بين الخليتين A_1B_1 , A_1B_2؛ وذلك لأن A_1B_3، قد يتم تحميلهما. وفي الصف الثاني نجد أن الفرق بين A_2B_1 , A_2B_2، وذلك لأن العمود الثالث قد تم استنفاده، وكذلك الصف الثالث كان الفرق بين A_3B_1 , A_3B_2، أما بالنسبة للأعمدة، فقد تم حساب الفرق للعمودين الأول والثاني، أما الثالث فلم يتم حسابه؛ لأنه لا يدخل في الحل هذه المحاولة. باختيار أكبر رقم من صف وعمود *Diff*، نجد أنه (٦٠)، وهو يقع في العمود الثاني. بفحص العمود الثاني نجد أن أصغر تكلفة هي A_3B_2، وبتحميل هذه الخلية بأقصى قدر ممكن من الوحدات، نجد أنه يمكن تحميلها بعدد (٢٠٠) وحدة، وبهذا يكون الصف الثالث من الجدول قد تم استنفاده، والعمود الثاني يتبقى به (٥٠٠) وحدة. ويمكن أن يكون الجدول التالي في الصورة التالية.

بحساب الفرق للخلايا الباقية واختيار أكبر فرق، نجد أنه يقع في العمود الثاني، ومقداره (٧٠)، حيث إن أصغر تكلفة في العمود الثاني هي A_2B_2، فيتم تحميلها بعدد (٥٠٠) وحدة.

وبالتالي يمكن الحصول على الجدول التالي:

	B_1	B_2	B_3	Supply	Diff
A_1	120	150	40 300	100	30
A_2	100	80 500	50	600	20
A_3	50	20 200	100		
Demand	200				
Diff	20				

بحساب الفرق للخلايا المتاحة واختيار أكبر رقم من صف وعمود *Diff*، نجد أنه يقع أمام الخلية A_1B_1، فيتم تحميلها بعدد (١٠٠) وحدة، ويلي ذلك الخلية الباقية الوحيدة، وهي A_2B_1، فيتم تحميلها بالوحدات الباقية، وهي (١٠٠) وحدة.

ويكون الجدول الأخير في الصورة التالية:

	B1	B2	B3	Supply
A1	120 100	150	40 300	400
A2	100 100	80 500	50	600
A3	50	20 200	100	200
Demand	200	700	300	1200

وبحساب إجمالي تكاليف النقل نجد أن:

$$= 100\,(120) + 300\,(40) + 100\,(100) + 500\,(80) + 200\,(20) = 78000\text{LE}$$

وبتقييم الحل بإحدى الطريقتين *SSM* أو *MODI* نجد أن هذا هو الحل الأمثل.

الحالة الثانية: حالة العرض لا يساوي الطلب:

في المثال السابق كان عدد الوحدات المعروضة يساوي عدد الوحدات المطلوبة. أما الآن فنتطرق إلى حالة أخرى، وهي أن عدد الوحدات المطلوبة لا يساوي عدد الوحدات المعروضة، وفي هذه الحالة يتم إضافة خانة وهمية *Dummy* إلى الرقم الأقل؛ حتى يتساوى العرض مع الطلب، ويلاحظ أن تكلفة النقل في الخانة الوهمية يساوي صفرًا.

مثال توضيحي رقم (٢):

شركة تأجير سيارات لديها معرضان لإيجار السيارات، وعدد السيارات المتاحة في المعرض ١٣، ١٥ سيارة على الترتيب، وكان على الشركة نقل السيارات المؤجرة من (٤) أماكن إلى المعرضين، وكانت تكاليف نقل السيارة من كل مكان من الأماكن الأربعة (حيث يتركها العميل) إلى مقري الشركة، موضح بالجدول الآتي:

	1	2	3	4
Source 1	45	17	21	30
Source 2	14	18	19	31

وكان عدد السيارات في الأماكن الأربعة على الترتيب ٩، ٦، ٧، ٩ سيارة، وكان المطلوب نقل هذه السيارات من الأماكن الأربعة إلى مقري الشركة، **باستخدام طريقة** *VAM*.

الحل: نجد أن عدد السيارات المتاحة في مقري الشركة تمثل العرض $Supply = 15 + 13 = 28$؛ بينما عدد السيارات المراد نقلها من الأماكن التي يتركها فيها العملاء تمثل الطلب $Demand = 9 + 6 + 7 = 31$.

وحيث إن العرض لا يساوي الطلب بفارق ثلاث سيارات، فيتم إضافة خانة وهمية *Dummy* تكلفة النقل فيها تساوي صفرًا. ويلاحظ في هذا الجدول أن مقري الشركة S_1 , S_2 يمثلان جانب العرض؛ ولهذا يتم وضعها في يسار الجدول، أما الأماكن الأربعة D_4 , D_3 , D_2 , D_1، فيمثلان جانب الطلب؛ ولهذا يتم وضعهم أعلى الجدول. نجد من الجدول أن مجموع الصفوف (جانب العرض) يساوي (٢٨) سيارة، أما مجموع الأعمدة (جانب الطلب) فيساوي (٣١) سيارة. إذن مجموع الصفوف أصغر من مجموع الأعمدة، وفي هذه الحالة يتم إضافة صف وهمي؛ حتى يتساوى مجموع الصفوف مع مجموع الأعمدة. أما في حالة أن مجموع الأعمدة أقل من مجموع الصفوف، فيتم إضافة عمود وهمي؛ ليتساوى مجموع الأعمدة مع مجموع الصفوف.

وبهذا يصبح جدول النقل الأساسي كما يلي:

Rows			Columns				Cells	Units
S_1	S_2	S_3	D_1	D_2	D_3	D_4		
4	4	0	14	17	19	30	S_3D_4	3
4	4	-	31	1	2	1	S_2D_1	9
4	1	-	-	1	2	1	S_1D_2	6
9	12	-	-	-	2	1	S_2D_3	4
9	-	-	-	-	21	30	S_1D_4	6
21	-	-	-	-	21	-	S_1D_3	3

نبدأ بتكوين جدول الفروق؛ حيث يتم حساب الفرق بين أصغر تكلفة والتكلفة التي تليها في كل صف وكل عمود على حدة؛ لتكون الصف الأول من جدول الفروق، ثم نختار أكبر رقم من هذا الصف، ونحدد الخلية التي تعطي أقل تكلفة، ويتم تحميلها بأقصى عدد ممكن من الوحدات.

	D_1	D_2	D_3	D_4	Supply
S_1	45	17	21	30	15
S_2	14	18	19	31	14
S_3 Dummy	0	0	0	0	3
Demand	9	6	7	9	31

وبهذا يكون جدول الحل النهائي في الصورة التالية:

	D_1	D_2	D_3	D_4	Supply
S_1	45	17 6	21 3	30 6	15
S_2	14 9	18	19 4	31	14
S_3 Dummy	0	0	0	0 3	3
Demand	9	6	7	9	31

وتكون تكلفة نقل الوحدات من الأماكن الأربعة إلى مقري الشركة؛ هي:

مثال توضيحي رقم (٣):

جِدْ الحل الأمثل لمشكلة النقل التالية باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي NWCM؛ حيث إن العمود الأخير يمثل العرض والصف الأخير يمثل الطلب، والأرقام داخل الجدول تكاليف نقل الوحدة التالية:

F_i / W_i	F_1	F_2	F_3	Supply
W_1	2	6	4	8
W_2	5	4	3	2
W_3	3	2	1	8
Demand	5	6	7	18

الحل:

في طريقة *NWCM* نبدأ بالخلية التي تقع في أعلى مسار الجدول، وهي الخلية W_1F_1، ويتم تحميلها بأقصى عدد من الوحدات. وأقصى عدد من الوحدات هو عدد الوحدات الأقل في صفها أو عمودها، ونجد أن العمود الأول المطلوب فيه خمس وحدات، والصف الأول المتاح فيه ثماني وحدات، وبهذا يتم تحميل الخلية $W1F1$ بخمس وحدات، وبهذا يكون العمود الأول قد تم استنفاده بالكامل، ويتبقى من الصف الأول ثلاث وحدات. يلي ذلك الاتجاه يمينًا إلى الخلية $W1F2$، ويتم تحميلها بثلاث وحدات، ثم الاتجاه رأسيًا وإلى أسفل إلى الخلية $W2F2$، وهكذا حتى نحصل على الجدول التالي:

F_i / W_i	F_1	F_2	F_3	Supply
W_1	(1) 5 | 2	(2) 3 | 6	4	8
W_2	5	(3) 2 | 4	3	2
W_3	3	(4) 1 | 2	(5) 7 | 1	8
Demand	5	6	7	18

ويمكن من هذا الجدول حساب إجمالي تكاليف النقل كما يلي:

تقييم أمثلية الحل بطريقة *SSM*:

يتم تقييم الخلايا الصفرية كما يلي:

تقييم الخلية W_1F_3:

$$W_1F_3 = C_{13} \quad C_{12} + C_{32} \quad C_{33} = 4 \quad 6 + 2 \quad 1 = \quad 1$$

تقييم الخلية W_2F_1:

$$W_2F_1 = C_{21} - C_{11} + C_{12} - C_{22} = 5 - 2 + 6 - 4 = +5$$

تقييم الخلية W_2F_3:

$$W_2F_3 = C_{23} - C_{22} + C_{32} - C_{33} = 3 - 4 + 2 - 1 = ZERO$$

تقييم الخلية W_3F_1:

$$W_3F_1 = C_{31} - C_{11} + C_{12} - C_{32} = 3 - 2 + 6 - 2 = +5$$

يلاحظ عند تقييم الخلايا الفارغة في مشكلة تخفيض التكاليف أنه إذا كانت:

- جميع النتائج أرقامًا موجبةً أو أصفارًا، فهذا يعني الوصول إلى الحل الأمثل.
- إذا كانت النتائج أرقامًا سالبة، فهذا يعني عدم الوصول إلى الحل الأمثل، ويمكن تحسين الحل لخفض التكاليف، وذلك بإدخال الخلية الفارغة صاحبة أكبر رقم سالب في الحل.

يلاحظ أن الخلية W_1F_3 صاحبة أكبر رقم سالب، ولإدخالها في الحل يتم تحميلها بأقل عدد من الوحدات في مسار تقييمها، بشرط أن تكون للخلية إشارة سالبة. ونجد أن مسار تقييم هذه الخلية هو:

$$W_1F_3 = W_1F_3 - W_1F_2 + W_3F_2 - W_3F_3$$

فنجد أن الخلايا السالبة هي: W_1F_2، W_3F_3، والخلية W_1F_2 بها أقل عدد وحدات (ثلاث وحدت)، يتم نقل ثلاث وحدات من الخلايا السالبة إلى الخلايا الموجبة على النحو التالي:

$$W_1F_3 = W_1F_3 - W_1F_2 + W_3F_2 - W_3F_3$$

$$W_1F_3 = \square + 3 = 3 \qquad W_1F_2 = \square - 3 = 0$$

$$W_3F_2 = \square + 3 = 4 \qquad W_3F_3 = \square - 3 = 4$$

وبهذا يكون جدول النقل كما يلي:

	F1	F2	F3	supply
W1	$\boxed{٢}$ ٥	$\boxed{٦}$	٣ $\boxed{٤}$	8
W2	$\boxed{٥}$	$\boxed{4}$ ٢	$\boxed{3}$	٢
W3	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$ ٤	$\boxed{1}$ ٤	٨
Demand	٥	٦	٧	١٨

يتم تقييم الخلايا الصفرية في الجدول الأخير على النحو التالي:

$$W_1F_2 = 6 - 4 + 1 - 2 = 1$$

$$W_2F_1 = 5 - 2 + 4 - 1 = 4$$

$$W_2F_3 = 3 - 4 + 2 - 1 = ZERO$$

$$W_3F_1 = 3 - 2 + 4 - 1 = +4$$

وحيث إن نتائج التقييم كلها أصفار أو أرقام موجبة، فهذا يعني أن الجدول الأخير هو جدول الحل الأمثل، وبهذا تكون تكاليف النقل هي:

حالة تعظيم الأرباح:

حالة تعظيم الأرباح تختلف عن تخفيض التكاليف في النقاط التالية:

١. عند استخدام طريقة LCM كان يتم اختيار أصغر تكلفة في الجدول؛ وذلك بهدف تخفيض التكاليف، أما في حالة الأرباح، فيتم اختيار أكبر خلية في الجدول؛ لنبدأ الحل بها، وتسمى هذه الطريقة Maximum Profit Method) (MPM)؛ وذلك بهدف تعظيم الأرباح.

٢. عند استخدام طريقة VAM كان يتم حساب الفرق بين أصغر تكلفتين لكل صف وكل عمود؛ وذلك بهدف تخفيض التكاليف. أما في حالة تعظيم الأرباح، فيتم حساب الفرق بين أكبر رقمين لكل جدول، ويلي ذلك اختيار أكبر فرق، ويتم تحميل الخلية الكبرى وليست الصغرى.

٣. عند تقييم أمثلية الحل بطريقة SSM، يتم اختيار الخلايا صاحبة أكبر رقم موجب في التقييم.

٤. الحل الأمثل يتمثل في الحصول على تقييم الخلايا الفارغة، عندما يكون أصفارًا أو قيمًا سالبة.

مثال توضيحي رقم (٤):

شركة لديها ثلاثة مصانع: A_1 , A_2 , A_3، ولديها ثلاثة مخازن B_3 , B_2 , B_1، وتوافرت لدينا البيانات التالية عن حجم الإنتاج وتكاليف الإنتاج للوحدة، بالإضافة إلى تكاليف نقل الوحدة من أي من المصانع الثلاثة إلى أي من المخازن الثلاثة.

المصنع	عدد الوحدات	تكلفة الإنتاج	تكلفة النقل		
			B_1	B_2	B_3
A_1	2000	200	60	80	50
A_2	2500	280	100	30	100
A_3	1800	300	80	120	70

وكان عدد الوحدات المطلوبة للمخزن الأول B_1 هي ١٦٠٠ وحدة، وللمخزن الثاني B_2 هي ٢٤٠٠ وحدة، والمخزن الثالث B_3 2000 وحدة، إذا علمت أن سعر الوحدة في المخزن الأول B_1 450 جنيهًا، وفي المخزن الثاني B_2 420 جنيهًا، وفي المخزن الثالث B_3 400 جنيه. المطلوب تحديد عدد الوحدات الواجب نقلها من كل مصنع إلى كل مخزن بشرط تعظيم الأرباح.

الحل:

التكاليف الكلية = تكاليف الإنتاج + تكاليف النقل.

يلاحظ في هذه المصفوفة أن تكلفة الإنتاج في المصنع الأول A_1 هي (٢٠٠) جنيه للوحدة، وتكلفة نقل الوحدة من المصنع الأول إلى المخزن الأول (٦٠) جنيهًا، وإلى المخزن الثاني (٨٠) جنيهًا، وإلى المخزن الثالث (٥٠) جنيهًا، وبالتالي فإن التكلفة الكلية للوحدة المنتجة بواسطة المصنع الأول تساوي (٢٦٠) جنيهًا في المخزن الأول، و(٢٨٠) جنيهًا في المخزن الثاني، و(٢٥٠) جنيهًا في المخزن الثالث. وخلاصة القول أنه عند حساب التكاليف الكلية يتم جمع الصفوف، حيث إن الصفوف تمثل المصانع الثلاثة.

صافي الربح = سعر البيع – إجمالي التكاليف.

يلاحظ في هذه المصفوفة أن أعمدة المصفوفة تمثل المخازن، ولهذا عند حساب صافي الربح، يتم طرح سعر بيع الوحدة في المخزن الأول - وهو (٤٥٠) جنيهًا - من التكلفة الكلية للوحدة من المخزن الأول، والواردة إليه من المصانع الثلاث.

$$\begin{bmatrix} 450 \\ 420 \\ 400 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 260 & 280 & 250 \\ 380 & 310 & 380 \\ 380 & 420 & 320 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 450 & 420 & 400 \\ 450 & 420 & 400 \\ 450 & 420 & 400 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 260 & 280 & 250 \\ 380 & 310 & 380 \\ 380 & 420 & 320 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 190 & 140 & 150 \\ 70 & 110 & 20 \\ 70 & 0 & 30 \end{bmatrix}$$

وبهذا يمكن تكوين جدول صافي الربح كما يلي:

	B_1	B_2	B_3	Supply
A_1	190	140	150	2000
A_2	70	110	20	2500
A_3	70	0	30	1800
Demand	1600	2400	2000	6300/ 6000

يلاحظ أن العرض Supply أكبر من الطلب Demand، فيجب إضافة عمود وهمي؛ حتى يتساوى العرض مع الطلب، وهذا المتغير الوهمي يكون ربحه صفرًا، وبهذا يصبح الجدول في الصورة التالية:

	B_1	B_2	B_3	B_4	Supply
A_1	190	140	150	0	2000
A_2	70	110	20	0	2500
A_3	70	0	30	0	1800
Demand	1600	2400	2000	300	6300

الحل بطريقة (MPM) أسلوب تعظيم الأرباح:

نبدأ بالبحث عن أكبر ربح في الجدول، ثم الخلية التي تليها ... وهكذا.

أكبر	الخلية	المتاح فى	المتاح فى	التحميل	باقى فى	باقى فى	إلغاء
١٩٠	A_1B_1	٢٠٠٠	١٦٠٠	١٦٠٠	٤٠٠	٠	B_1
١٥٠	A_1B_3	٤٠٠	٢٠٠٠	٤٠٠	-	١٦٠٠	A_1
١١٠	A_2B_2	٢٥٠٠	٢٤٠٠	٢٤٠٠	١٠٠	-	B_2
٣٠	A_3B_3	١٨٠٠	١٦٠٠	١٦٠٠	٢٠٠	-	B_3
٥	A_3B_4	٢٠٠	٢٠٠	٢٠٠	-	-	A_3
٥	A_2B_4	١٠٠	١٠٠	١٠٠	-	-	

وبهذا يكون جدول الحل كما يلي:

	B_1	B_2	B_3	B_4 dummy	Supply
A_1	190 1600	140	150 400	0	2000
A_2	70	110 2400	20	0 100	2500
A_3	70	0	30 1600	0 200	1800
Demand	1600	2400	2000	300	6300

الحل بطريقة فوجيل التقريبية (VAM):

يتم تكوين جدول الفروق كما يلي:

Rows			Columns				Cells	Units
A_1	A_2	A_3	B_1	B_2	B_3	B_4		
40	40	40	120	30	120	0	A_1B_1	1600
10	90	30	-	30	120	0	A_1B_3	400
-	90	30	-	110	10	0	A_2B_2	2400
-	20	30	-	-	10	0	A_3B_3	1600
-	0	0	-	-	-	0	A_2B_4	100
			-			0	A_3B_4	200

يلاحظ في السطر الأخير من جدول الفروق، أن جميع الفروق أصبحت أصفارًا، أي لا نستطيع اختيار إحدى الخلايا. ولكن بالنظر إلى الخلايا غير المحملة في الجدول نجد أنها A_3B_4 A_2B_4، ولا يمكن أن نخطئ في تحميلها؛ لأن كل خلية ليس لها إلا سبيل واحد للتحميل، وهو ١٠٠، ٢٠٠ وحدة على الترتيب. ونجد أن جدول الحل الذي يتم التوصل إليه بطريقة VAM هو الجدول نفسه الذي توصلنا إليه بطريقة MPM السابقة، حيث نجد في هذا الحل أن الخلية A_2B_4 بها ١٠٠ وحدة، وحيث إن B_4 مخزن وهمي، فهذا يعني أن المصنع A_2 يجب تخفيض إنتاجه بعدد ١٠٠ وحدة، وكذلك المصنع A_3 يجب تخفيض إنتاجه بعدد (٢٠٠) وحدة.

ومن هذا الجدول نجد أن إجمالي الأرباح هو:

$$Z = 190\,(1600) + 150\,(400) + 110(2400) + 30(1600) = 685000\,L.E$$

تقييم أمثلية الحل باستخدام طريقة SSM:

تقييم الخلايا الصفرية أو الخلايا الفارغة:

$$A_1B_2 - C_{12} - C_{13} + C_{33} - C_{34} + C_{24} - C_{22} - \square 40 - 150 + 30 - 0 + 0 - 110 - -90$$

$$A_1B_4 = C_{14} - C_{34} + C_{33} - C_{13} = 0 - 0 + 30 - 150 = -120$$

$$A_2B_1 = C_{21} - C_{24} + C_{34} - C_{33} + C_{13} - C_{11} = 70 - 0 + 0 - 30 + 150 - 190 = Zero$$

$$A_2D_3 - C_{23} - C_{24} + C_{34} - C_{3\square} - 20 - 0 + 0 - 30 - -10$$

$$A_3B_1 = C_{31} - C_{33} + C_{13} - C_{11} = 70 - \square 0 + 150 - 190 = Zero$$

$$A_3B_2 = C_{32} - C_{34} + C_{24} - C_{22} = 0 - 0 + 0 - 110 = -110$$

يلاحظ عند تقييم الخلايا الصفرية، وفي حالة تعظيم الأرباح أنه:

١. إذا كان تقييم الخلايا موجبًا، فهذا يعني أن هذه الخلية تؤدي إلى زيادة الأرباح، وبالتالي نبحث عن أكبر رقم موجب في الخلية من التقييم، ونحاول تحميلها.

٢. إذا كان تقييم الخلية صفرًا، فهذا يعني أن دخول هذه الخلية لا يؤثر على الأرباح بالزيادة أو النقص.

٣. إذا كان تقييم الخلية سالبًا، فهذا يعني أن هذه الخلية تؤثر على الأرباح بالنقص، ويجب أن نترك هذه الخلية.

تمارين عامة:

١. إذا توافرت لديك البيانات التالية عن تكلفة نقل الوحدة من ثلاثة مصانع A,B,C إلى مخزنين N, M، وكان العمود الأخير يمثل الكميات المعروضة من المصانع الثلاث، والصف الأخير يمثل الكميات المطلوبة لكل مخزن. المطلوب إيجاد الحل الأمثل لهذه المشكلة بطريقة الركن الشمالي الغربي.

Stores / Factories	m	n	Supply
A	٦٠	٥٠	٧
B	٦٥	٥٢	٨
C	٥٥	٤٨	١٠
Demand	١٢	٥	

جد الحل الأمثل لمشكلة النقل الآتية باستخدام طريقة فوجيل التقريبية VAM؛ حيث إن العمود الأخير بالمصفوفة يمثل العرض، والصف الأخير يمثل الطلب، والأرقام داخل المصفوفة تمثل تكلفة نقل الوحدة. ثم اختبر أمثلية الحل بطريقة MODI.

Stores / factories	m	n	o	p	Supply
A	٢	٤	٢	٦	٢٧٠٠
B	٣	٣	٥	٤	٣٠٠٠
Demand	١٠٠	١٥٠٠	١٢٠٠	٢٠٠٠	٥٧٠٠

شركة لديها ثلاثة مصنع A , B , C ولديها أربعة مخازنD , E , F , G إذا علمت أن الإنتاج الشهري للمصنع A يبلغ (٧٠) وحدة، وللمصنع (B) 90 وحدة، وللمصنع (C) 115 وحدة، وكانت الطاقة الاستيعابية للمخازن الأربعة على الترتيب ٥٠، ٦٠، ٧٠، ٩٥. إذا توافرت لديك بيانات عن تكاليف نقل الوحدة من كل مصنع إلى كل مخزن في المصفوفة التالية، فجِدْ الحل الأمثل لهذه المشكلة إذا كان الهدف هو تخفيض التكاليف الكلية للنقل، مستخدمًا طريقة فوجيل التقريبية VAM، ثم اختبر أمثلية الحل مستخدمًا طريقة SSM.

	D	E	F	G
A	١٧	٢٠	١٣	١٢
B	١٥	٢١	٢٦	٢٥
Demand	١٥	١٤	١٥	١٧

جد الحل الأمثل لمشكلة النقل الآتية، والتي تشتمل على أربعة مصادر وخمسة مراكز للطلب باستخدام طريقة فوجيل التقريبية VAM:

BI / AI	B1	B2	B3	B4	B5	supply
AI	٦	٢	٨	٧	٥	٤٠
A2	٤	٣	٧	٥	٩	٧٠
A3	٢	١	٣	٦	٤	٦٠
A4	٥	٦	٤	٨	٣	٣٠
Demand	٣٠	٦٠	٥٠	٤٠	٢٠	٢٠٠

جدْ الحل الأمثل لمشكلة النقل الآتية مستخدمًا طريقة أقل تكلفة LCM، ثم اختبر أمثلية الحل باستخدام طريقة حجر الوطء SSM.

BI / AI	B1	B2	B3	B4	B5	supply
AI	١٢	٤	٩	٥	٨	٥٥
A2	٨	١	٦	٦	٧	٤٥
A3	١	١٢	٤	٧	٧	٣٠
A4	١٠	١٥	٦	٩	١	٥٠
A5	٤٠	٢٠	٥٠	٤٠	٢٠	١٨٠

جدْ الحل الأمثل لمشكلة النقل الآتية باستخدام طريقة فوجيل التقريبية VAM، ثم اختبر أمثلية الحل إذا كان الهدف تخفيض تكاليف النقل الكلية.

BI / AI	B1	B3	B2	B3	supply
AI	٩	٩	٨	٦	١٥٠
A2	٤	٤	٥	٧	١٠٠
A3	٦	٦	١٠	١٢	٢٠٠
A4	٢٠٠	٦	١٧٥	٧٥	٤٥٠

٢. شركة لإنتاج الغذاء، لديها مصنعان لإنتاج الخبز، فإذا كانت بيانات المصنعين؛ هي:

المصنع	الطاقة الإنتاجية	تكلفة الإنتاج
A	٢٥٠٠	٢٣
B	١٢٠٠	٢٣

وكان هناك أربعة مطاعم تريد شراء هذا الخبز، فإذا كانت بيانات الطلب هي:

المصنع	الاحتياج الكلي	السعر المقدم
C	١٨٠٠	٣٩
B	٢٣٠٠	٣٤
E	٥٥٠	٤٠
F	١٧٥٠	٣٦

كما أن أسعار نقل الخبز من المصانع إلى المطاعم هي:

	C	B	E	F
A	٦	٨	١١	G
B	١٢	٦	٨	٥

المطلوب مساعدة مدير الشركة على بيع إنتاج المطاعم الأربعة بشرط تعظيم الأرباح.

الخاتمة:

نماذج النقل هي أسلوب مبسط من أساليب البرمجة الخطية، يهدف إلى تخفيض تكاليف النقل أو تعظيم الربح، وبأخذ جدول في شكل مصفوفة، نجد أن هنالك ثلاث طرق لنقل الوحدات من المصانع إلى المخازن، حيث نجد محددات طول المسافة تزيد من التكاليف، وكذلك حجم المخازن تستدعي قدرًا معينًا؛ الطريقة الأولى هي طريقة أقل التكاليف (فوجيل التقريبية)، وهنالك حالات العرض الذي يساوي الطلب، وحالة العرض الذي لا يساوي الطلب.

يتم تقييم الحل بطريقتين؛ أولاهما: طريقة حجر الوطء، والثانية: طريقة التوزيع المعدل. وطريقة أقل تكلفة تعتمد على مصفوفة تمثل العرض والطلب وسعر أو تكلفة الوحدة من المصنع إلى المخزن تحدد داخل مربع صغير، تجده محصورًا إلى أعلى في الجانب اليمين. وأقل مبلغ في هذه المربعات الصغيرة يمثل أقل تكلفة حيث تبدأ بتحمل أكبر قدر ممكن من المصفوفة ثم تكرار المحاولة في المصفوفة الجديدة هكذا والتعامل يتم حسب الترتيب التصاعدي للتكاليف.

طريقة حجر الوطء تتم بعد تحميل بعض خلايا الجدول بعدد الوحدات، فنجد هنالك خلايا فارغة. بعد تقييم الخلايا الفارغة لمعرفة التأثير، يتم رسم خط سير يبدأ من الخلية الفارغة، ويحرك مارًّا بالخلايا المحملة فقط ليعود إلى الخلية نفسها. لا تنس إشارة الخلية الصفرية موجبة بعدها سالب ثم موجب.

طريقة التوزيع المعدل:

فيها إضافة عمود يمين الجدول، وإضافة صف أسفل الجدول. يتم تكوين مجموعة من المعادلات للخلايا المحملة فقط، بافتراض أن العمود والصف المضاف يساوي صفرًا، ويتم حل المعادلات آنيًّا.

تقييم أمثلية الحل باستخدام طريقة حجر الوطء يتم فيها تقييم الخلايا الصفرية أو الفارغة، وإذا كان التقييم نتيجته أصفارًا أو قيمًا موجبةً، فهذا يفيد بأن الحل الذي تم التوصل إليه هو حل أمثل. أما تقييم الأمثلية بطريقة التوزيع المعدل، ففيها تتم معادلات الخلايا المملوءة، وحلها جبريًا عن طريق المجاهيل والتعويض، وإضافة المتغيرات لجدول الحل، ثم يتم إعادة تقييم الخلايا الفارغة. عندما تصل إلى أن جميع تكاليف النقل المقدرة موجبةٌ أو أصفارٌ، فإنّ هذا هو جدول الحل الأخير، وهو الحل الأمثل.

مشاكل التخصيص: Assignment Problems

تتضمن مشكلة التخصيص جدولة العاملين فردا فردا ومن المفترض ان يكون عدد العاملين مساويا عدد الأعمال ويجب ضمان هذا الشرط بإضافة عاملين وهميين او عمل إضافية عند الحاجة من اجل المحافظة على هذا الشرط. ويكون الزمن (التكاليف ....) c_{ij} اللازم للعامل رقم i لإتمام العمل رقم j معروفاً ومن ثم يكون الهدف هو تخصيص العمال على الأعمال بحيث تتم إجمالي الأعمال في اقل وقت ممكن.

الأعمال

		١	٢	٣	. . .	n
	1	C11	C12	C13	. . .	C1n
	2	C21	C22	C23	. . .	C2n
العمال	**3**	C31	C32	C33	. . .	C3n
	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
	n	Cn1	Cn2	Cn3	. . .	Cnn

خطوات الحل:

١. اطرح اقل قيمة في كل صف من كل القيم في هذا الصف
٢. اطرح اقل قيمة في كل عمود من كل القيم في هذا العمود.
٣. حدد اذا ما كان يوجد عدد n من الاصفار بحيث لا يوجد صفريين في نفس العمود او الصف.
٤. غط كل الاصفار في المصفوفة بأقل عدد من الخطوط الرئسية والعرضية بحيث يغطي الخط كل العمود او الصف وبحيث يكون عدد الخطوط اقل من n وان يكون عدد ممكن من الخطوط.

٥. اطرح اقل عدد غير مغطى من القيم الغير مغطاة وأيضا أضف هذا للعدد إلى القيم المغطاة بخطيين متقاطعين (راسي وافقي)

٦. اختار عدد n من الاصفار بحيث لا صفريين في نفس العمود او الصف وبذلك يكون تخصيص العمال الي الاعمال عندهم.

٧. احسب إجمالي الوقت عن طريق جمع جميع القيم محل تلك الاصفار.

مثال:

ماكينة

		I	II	III	IV	V
	A	15	10	25	25	10
	B	1	8	10	20	2
	C	8	9	17	20	10
عامل	**D**	14	10	25	27	15
	E	10	8	25	27	12

الحل:

بطرح اقل قيمة في كل صف من كل القيم في هذا الصف نحصل عل المصفوفة التالية:

ماكينة

		I	II	III	IV	V
	A	5	٠	5١	5١	٠
	B	٠	٧	٩	١٩	١
عامل	**C**	٠	١	٩	١٢	٢
	D	4	٠	5١	7١	5
	E	٢	٠	١٧	١٩	٤

بطرح اقل قيمة في كل عمود من كل القيم في هذا العمود نحصل عل المصفوفة التالية:

ماكينة

عامل

	I	II	III	IV	V
A	5	٠	٦	٣	٠
B	٠	٧	٠	٧	١
C	٠	١	٠	٠	٢
D	4	٠	٦	٥	5
E	٢	٠	٨	٧	٤

نلاحظ انه لايوجد عدد n من الاصفار وغير مشتركة في صف او عمود لذا يجب تغطية كل الاصفار في المصفوفة بأقل عدد من الخطوط الرئيسية والعرضية بحيث يغطي الخط كل العمود او الصف وبحيث يكون عدد الخطوط اقل من n وان يكون عدد ممكن من الخطوط انظر المصفوفة التالية:

ماكينة

عامل

	I	II	III	IV	V
A	5	٠	٦	٣	٠
B	٠	٧	٠	٧	١
C	٠	١	٠	٠	٢
D	4	٠	٦	٥	5
E	٢	٠	٨	٧	٤

نبحث عن اقل قيمة غي مغطاة وهي (٢) اطرحها من القيم الغير مغطاة وأيضا أضف هذا للعدد (٢) إلى القيم المغطاة بخطيين متقاطعين (راسي وافقي) فنحصل علي المصفوفة التالية:

ماكينة

		I	II	III	IV	V
	A	5	٢	٦	٣	٠
عامل	B	٠	٩	٠	٧	١
	C	٠	٣	٠	٠	٢
	D	٢	٠	٤	٣	٣
	E	٠	٠	٦	٥	٢

بالنظر الي المصفوفة السابقة نجد انه يوجد عدد n من الاصفار بحيث لا صفريين في نفس العمود او الصف وبذلك يكون تخصيص العمال الي العمالة عندهم. انظر المصفوفة التالية:

ماكينة

		I	II	III	IV	V
	A	5	٢	٦	٣	٠
	B	٠	٩	٠	٧	١
عامل	C	٠	٣	٠	٠	٢
	D	٢	٠	٤	٣	٣
	E	٠	٠	٦	٥	٢

احسب إجمالي الوقت عن طريق جمع جميع القيم محل تلك الاصفار كما يلي:

إجمالي اقل التكلفة = A V + B III+ C IV + D II +E I

= 10 + 10+ 20+ 10+ 10

= ٦٠

تلخيص الحل:

يتم تخصيص العامل A علي الماكينة V

و يتم تخصيص العامل B علي الماكينة III

و يتم تخصيص العامل C علي الماكينة IV

و يتم تخصيص العامل D علي الماكينة II

و يتم تخصيص العامل A علي الماكينة I

بإجمالي اقل التكلفة = ٦٠ جنية.