الفصل السادس
خطوط الانتظار Waiting Lines

المفهوم والأهمية:

أصبح الانتظار سمة من سمات الحياة المعاصرة، ويمكن ملاحظته بشكل واضح في قطاع الخدمات، مثل انتظار المسافرين في المطار والموانئ ومحطات القطار، وانتظار الزبائن في المصارف والمستشفيات. ومن الميزات التنافسية لأي منظمة قدرتها على تقليل وقت انتظار الزبون، والسرعة في تلبية حاجة المستهلك، وفي هذا الإطار تأتي نماذج الانتظار كأداة تحليلية، تساهم في دعم متخذ القرار عند الموازنة بين كلفة الانتظار وكلفة تقديم الخدمة؛ لتحقيق أقل كلفة ممكنة.

وترجع أصول خطوط الانتظار إلى المهندس (Erlang)، عندما اهتم بدراسة وتحليل مشكلة الازدحام في المكالمات الهاتفية، وذلك في عام ١٩٥٩م، ثم ازداد الاهتمام بها بعد الحرب العالمية الثانية، وتوسع مجال تطبيقها في القطاعات الخدمية والإنتاجية.

ويعرف أسلوب خطوط الانتظار بأنه أسلوب وطريقة كمية، تستخدم في معالجة مشاكل نظم الانتظار المختلفة؛ من حيث احتمالية وصول الزبائن المستفيدين من الخدمة، وطريقة تقديم الخدمة، وفترة كلفة التأخير في الانتظار.

وتساهم نظرية خطوط الانتظار في الإجابة عن أسئلة متخذ القرار المتعلقة بمشكلة الانتظار، ومن هذه الأسئلة:

- ما هو وقت انتظار الزبائن في خط الانتظار؟
- ما هو معدل وقت تقديم الخدمة للزبون؟
- ما هو متوسط عدد الزبائن في خط الانتظار؟
- ما هو متوسط عدد الزبائن في النظام؟
- ما هو احتمال وجود عدد معين من الزبائن في النظام؟

ويقصد بالنظام الموقع الذي يتم فيه تقديم الخدمة، أي المكان الذي تصل إليه الوحدات التي ترغب بالحصول على الخدمة.

مكونات نظم الانتظار:

لدراسة وتحليل أي نظام، ينبغي معرفة عناصره الأساسية، والتي يمكن توضيحها كالآتي:

١- **نمط الوصول:** ويقصد به معدل الوقت الذي يصل فيه طالبو الخدمة إلى مركز الخدمة، وهذا النمط؛ إما يكون عشوائيًّا أو ثابتًا ومحددًا.

٢- **نمط تقديم الخدمة:** وهو متوسط الوقت اللازم لتقديم الخدمة، وهو أيضًا إما عشوائي أو ثابت ومحدد.

٣- **طاقة النظام:** ويقصد بها مجموع طالبي الخدمة، وهم الذين ينتظرون في خط الانتظار، إضافةً إلى الذين يتلقون الخدمة عند انتظار الآخرين، وهذه الطاقة إمّا محدودة أو غير محدودة.

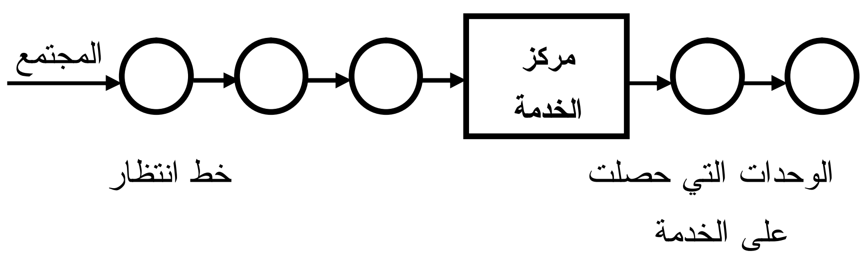
٤- **قواعد تقديم الخدمة:** وهي الأسس التي بموجبها ينتظم خط الانتظار، وتحدد معايير تقديم الخدمة. ومن أهم القواعد وأكثرها انتشارًا قاعدة (الواصل أولًا يخدم أولًا)، إضافةً إلى قاعدة خدمة الوحدات الحرجة أولًا.

أنواع أنظمة الانتظار:

يمكن تصنيف نظم الانتظار إلى الأنواع التالية:

١- خط انتظار واحد ومركز خدمة واحد:

وهو أبسط الأنواع، حيث يتم تقديم الخدمة من مركز خدمة واحد وبمرحلة واحدة. ويمكن توضيح النظام كما في الشكل الآتي:

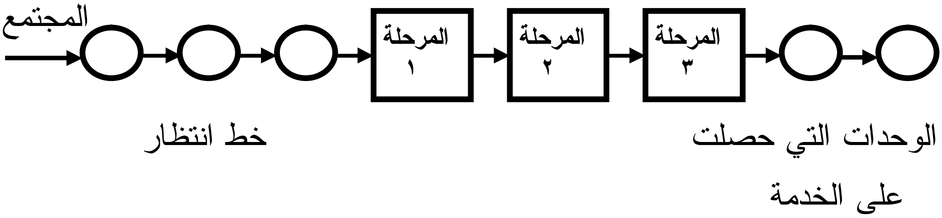


شكل (٦- ١) خط انتظار واحد ومركز خدمة واحد

وكمثال على هذا النظام، انتظار الزبائن أمام شباك تذاكر واحد في المستشفيات.

٢- خط انتظار واحد ومركز خدمة واحد بأكثر من مرحلة:

في هذا النظام يتم تقديم الخدمة من خلال مركز خدمة يتضمن عدة مراحل لإكمال الخدمة المطلوبة، مثال ذلك إنجاز المعاملة في دائرة خدمية بعد مرورها بكل الإجراءات الروتينية اللازمة لها. ويمكن توضيح هذا النظام في الشكل الآتي:

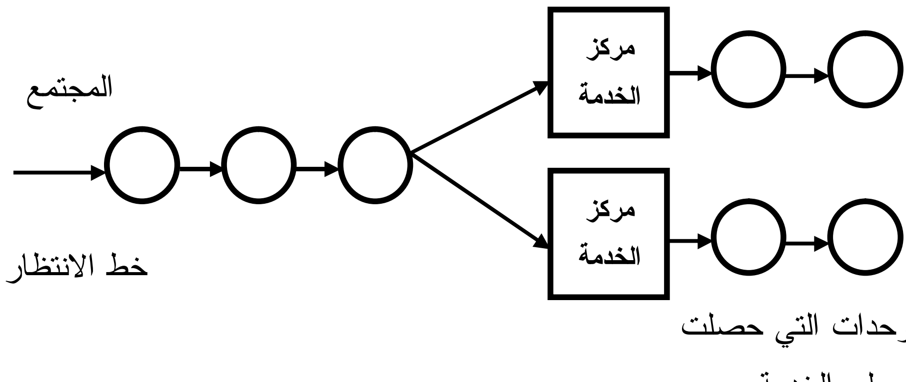


شكل (٦- ٢) خط انتظار واحد ومركز خدمة واحد بأكثر من مرحلة

٣- نظام انتظار متعدد مراكز الخدمة:

في هذا النظام يتم تقديم الخدمة من عدة مراكز خدمة، وكل مركز يقدم الخدمة بمرحلة واحدة، ومثال ذلك بيع تذاكر الدخول للسينما أو المسرح من خلال أكثر من شباك لبيع التذاكر.

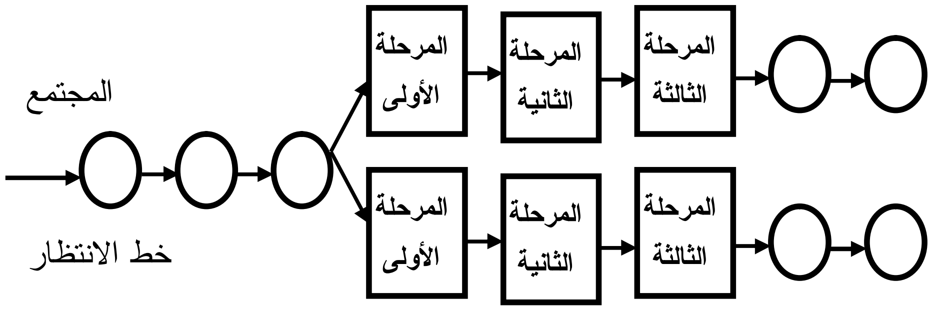
ويمكن توضيح النظام كما في الشكل الآتي:



شكل (٦- ٣) خط انتظار واحد وأكثر من مركز خدمة

٤- خط انتظار واحد وأكثر من مركز خدمة متعدد المراحل:

بموجب هذا النظام يتم تقديم الخدمة من عدة مراكز للخدمة، وكل مركز خدمة يتضمن عدة مراحل لإكمال الخدمة المطلوبة. مثال ذلك، أكثر من خط إنتاجي لتقديم المنتوج نفسه. ويمكن توضيح هذا النظام كما في الشكل الآتي:



شكل (٦- ٤) خط انتظار وأكثر من مركز خدمة متعدد المراحل

أساليب وصول الوحدات وتقديم الخدمة:

يمكن تصنيف حالات وصول الوحدات وتقديم الخدمة إلى حالتين رئيستين كالآتي:

١- الوصول عشوائي وتقديم الخدمة عشوائي:

في هذه الحالة يكون وصول الوحدات إلى مراكز الخدمة بشكل عشوائي، أي لا يمكن تحديده بمعدل ثابت. مثال ذلك وصول السيارات إلى محطات البنزين، كما أنّ تقديم الخدمة عشوائي. وهذه الحالة هي أكثر أهمية في دراسة وتحليل أنظمة الانتظار، والتي تتطلب تطبيق أحد نماذج الانتظار بما يتلاءم وطبيعة المشكلة المبحوثة.

٢- الوصول منتظم وتقديم الخدمة منتظم:

في هذه الحالة يمكن تشخيص ثلاثة أنواع من حالات الانتظار كما يلي:

أ. بدون خط انتظار مع وجود وقت عاطل في مركز الخدمة: وتحدث هذه الحالة عندما يكون معدل تقديم الخدمة أكبر من معدل الوصول،

مثال ذلك معدل الخدمة في أحد المصارف ٣٠ شخص – ساعة، ومعدل الوصول ٢٠ شخص - ساعة.

ب. بدون خط انتظار وبدون طاقة عاطلة: عندما يكون معدل الوصول يساوي معدل الخدمة.

ج. خط انتظار وبدون طاقة عاطلة: عندما يكون معدل الوصول أكبر من معدل الخدمة.

النموذج الرياضي لصفوف الانتظار:

توجد نماذج رياضية متعددة لصفوف الانتظار، تختلف حسب نوع نظام الانتظار، والتي تم توضيحها في الفقرة (٩- ٣)، وذلك طبقاً لأسلوب وصول الوحدات وتقديم الخدمة، وسيتم التركيز على نموذجين، هما:

١- نموذج صف انتظار واحد ومركز خدمة واحد بمرحلة واحدة.

٢- نموذج صف انتظار واحد وأكثر من مركز خدمة.

وقبل توضيح هذين النموذجين، نوضح الرموز المستخدمة في نماذج الانتظار.

الرموز المستخدمة في نماذج الانتظار:

N: عدد الوحدات في النظم.

λ: معدل الوصول (معدل عدد الوحدات الواصلة إلى النظام في وحدة زمنية).

μ: معدل الخدمة (معدل عدد الوحدات التي تحصل على الخدمة في وحدة زمنية).

Pn: احتمال وجود (n) من الوحدات في النظام.

Po: احتمال عدم وجود وحدات في النظام (معامل عدم الاستخدام).

P: احتمال وجود (n) من الوحدات في النظام خلال وحدة زمنية ومعامل الاستخدام.

Ls: عدد الوحدات المتوقع في النظام.

Lq: عدد الوحدات المتوقع في خط الانتظار.

Ws: الزمن الذي تنفقه الوحدة في النظام.

Wq: الزمن الذي تنفقه الوحدة في خط الانتظار.

K: عدد قنوات الخدمة.

نموذج خط انتظار واحد وقناة خدمة واحدة:

يفترض هذا النموذج وجود قناة واحدة لتقديم الخدمة، ويرمز لهذا النظام في المراجع العلمية لبحوث العمليات بالرمز (M. M. I).

ومن أهم شروط هذا النموذج ما يلي:

١-معدل وصول الوحدات يتبع توزيع بواسون، وبمقدار λ في وحدة زمنية.

٢-معدل تقديم الخدمة يتبع التوزيع الأسي، وبمقدار μ في وحدة زمنية.

٣-معدل الخدمة أكبر من معدل الوصول $\lambda < \mu$.

٤-طريقة تقديم الخدمة الواصل أولًا يخدم أولًا.

٥-طاقة النظام غير محدودة.

٦-عدد طالبي الخدمة غير محدود.

والعلاقات المستخدمة في تحليل النظام بموجب هذا النموذج كما يلي:

١- معامل الاستخدام: $P=\frac{\lambda}{\mu}$.

٢- معامل عدم الاستخدام: $Po = 1 - P$.

٣- احتمال وجود (n) من الوحدات في النظام: $P_n = \left[\frac{\lambda}{\mu}\right]^n (PO)$.

٤- عدد الوحدات المتوقع في النظام: $Ls = \frac{1}{\mu - \lambda}$.

٥- عدد الوحدات المتوقع في خط الانتظار: $Lq = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$.

٦- متوسط الوقت الذي تنفقه الوحدة في النظام: $Ws = \frac{1}{\mu - \lambda}$.

٧- متوسط الوقت الذي تنفقه الوحدة في خط الانتظار: $Wq = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$.

ولتوضيح كيفية تطبيق العلاقات المذكورة أعلاه نأخذ المثال التالي:

مثال (٦- ١):

تتكون محطة بنزين من مضخة واحدة، وكان معدل الوصول إليها (٦) سيارات في الساعة، ومعدل الخدمة (٩) سيارات في الساعة.

بموجب المعطيات أعلاه حدِّد المؤشرات التالية:

١- معدل الاستخدام.

٢- معامل عدم الاستخدام.

٣- احتمال وجود (٣) سيارات في المحطة.

٤- ما هو عدد السيارات المتوقع في المحطة؟

٥- ما هو عدد السيارات المتوقع في خط الانتظار؟

٦- ما هو الزمن المتوقع لانتظار السيارة في خط الانتظار؟

٧- ما هو الزمن المتوقع أن تنفقه السيارة في المحطة حتى حصولها على الخدمة؟

الحل:

قبل تحديد المؤشرات تحدد قيمة المتغيرات الداخلة في احتساب المؤشرات.

سيارة - ساعة ٦ = λ

سيارة - ساعة ٩ = μ

١- معامل الاستخدام (احتمال أن تكون المحطة مشغولة):

$$P = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{6}{9} = 0.67$$

٢- معامل عدم الاستخدام (احتمال عدم وجود سيارة في المحطة):

$$Po = 1 - P = 1 - 0.67 = 0.33$$

٣- احتمال وجود (٣) سيارات في المحطة:

$$Pn = (P)^n(Po) = (0.67)^3(0.33)$$

٤- عدد السيارات المتوقع في المحطة:

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{6}{9-6} = 2 \quad \text{ساعة – سيارة}$$

٥- عدد السيارات المتوقع في خط الانتظار:

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{(6)^2}{9(9-6)} = \frac{36}{27}$$

٦- الزمن المتوقع لانتظار السيارة في المحطة في خط الانتظار:

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{6}{9(9-6)} = \frac{6}{27}$$ ساعة

٧- الزمن المتوقع لانتظار السيارة في المحطة حتى حصولها على الخدمة:

$$W_s = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{9-6} = \frac{1}{3}$$ ساعة

نموذج انتظار لنظام ذي قنوات خدمة متعددة:

يفترض هذا النموذج وجود أكثر من قناة خدمة، أي اثنين أو أكثر من قنوات الخدمة التي تقدم الخدمة نفسها إلى الزبائن القادمين.

إن وصول القادمين يتبع توزيع بواسون، وإن أوقات الخدمة تتبع التوزيع الأسي، وإنّ من يأتي أولًا يخدم أولًا. كما أنّ النموذج يفترض أنّ معدل الخدمة مضروبًا بعدد قنوات الخدمة يجب أن يكون أكبر من معدل الوصول، أي ($k\mu>\lambda$)، ولوصف خصائص هذا النموذج في حل المشاكل تستخدم العلاقات الرياضية التالية:

١- معامل الاستخدام:

$$P = \frac{\lambda}{km}$$

٢- احتمال عدم وجود وحدات في النظام:

$$P_o = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(\lambda\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda\mu)^k}{k!\left[\frac{k_\mu}{k_\mu - \lambda}\right]}$$

٣- معدل عدد الوحدات في خط الانتظار:

$$L_q = \frac{P_o \left[\frac{\lambda}{\mu} \right]}{k!(1-P)^2}$$

٤- معدل عدد الوحدات في النظام:

$$L_s = L_q + \frac{\lambda}{\varpi}$$

٥- معدل الوقت الذي تنفقه الوحدة في النظام:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

٦- معدل الوقت الذي تنفقه الوحدة في النظام:

$$W_s = W_q \frac{\lambda}{\mu}$$

٧- احتمال وجود (n) من الوحدات في النظام:

$$P_n = \left[\frac{\left(\frac{\lambda^{\ n}}{\mu} \right)}{n!} \right] (Pn) - \ for \ \ n \leq k$$

$$P_n = \left[\frac{\left(\frac{\lambda^{\ n}}{\mu} \right)}{k!k^{\ n-k}} \right] (Pn) - \ for \ \ n > k$$

ولتوضيح كيفية تطبيق العلاقات المذكورة سابقاً نستخدم المثال الآتي:

مثال (٦-٢):

في أحد المطاعم للوجبات السريعة توجد نافذتان لخدمة الزبائن، وكانت المؤشرات المتاحة عن نظم الانتظار كالآتي:

شخص - دقيقة = μ شخص - دقيقة ٠,٧٥ = λ ، k = ٢

المطلوب:

باستخدام مؤشرات نموذج الانتظار متعدد القنوات، حدد خصائص النظام الحالي للخدمة.

الحل:

١- احتمال عدم وجود زبون في المطعم: Po = - 0.4545

يتم استخراج القيمة أعلاه من الجدول الإحصائي في الملحق (ب)، وذلك بعد استخراج $\frac{\lambda}{K\mu}$ ؛ حيث كانت النتيجة" $\frac{0.75}{2} = 0.38$ ، وباستخدام الجدول مقابل قيمة $\frac{\lambda}{K\mu}$ ، وتحت عدد قنوات الخدمة (٢)، تبين أن Po = 0.45

٢- احتمال أن الشخص الواصل سينتظر حتى حصوله على الخدمة:

$$P = \frac{1}{21}\left(\frac{0.75}{1}\right)^2\left(\frac{(2)(1)}{z(1)-0.75}\right)(0.45) = 0.2045$$

٣- احتمال وجود (n) من الزبائن في المطعم:

$$P_1 = \left[\frac{\left(\frac{0.75}{1}\right)^1}{1!}\right](0.45) = 0.3490$$

$$P_2 = \left[\frac{\left(\frac{0.75}{1}\right)^2}{2!} \right](0.45) = 0.1278$$

$$P_3 = \left[\frac{\left(\frac{0.75}{1}\right)^3}{3!} \right](0.45) = 0.0479$$

$$P_4 = \left[\frac{\left(\frac{0.75}{1}\right)^4}{4!} \right](0.45) = 0.0180$$

٤- معدل الأشخاص في خط الانتظار:

$$L_q = \left[\frac{\left(\frac{0.75}{1}\right)^2 (0.75)(1)}{(2-1)!\,((2)(1)-0.75)^2} \right](0.45) = 0.3490$$

٥- معدل عدد الأشخاص في المطعم:

$$L_s = 0.1227 + \frac{0.75}{1}\ 0.8727$$ شخص

٦- معدل الوقت الذي ينفقه الشخص في خط الانتظار:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0.1227}{0.75} = 0.1636$$ دقيقة

٧- معدل الوقت الذي ينفقه الشخص في المطعم حتى حصوله على الخدمة:

$$W_s = 0.1227 + \frac{0.75}{1} \; 0.8727$$ دقيقة

تكاليف الانتظار Waiting Costs:

يواجه متخذ القرار عند تحليل مشكلة الانتظار، تحديد نقطة توازن النظام التي عندها يكون مجموع تكاليف النظام أقل ما يمكن.

ويمكن تلخيص تكاليف نظام الانتظار بنوعين من التكاليف، هما:

١- **كلفة الخدمة** Service Cost:

وتتمثل بالتكاليف المباشرة وغير المباشرة التي تتحملها المنظمة عند تقديمها الخدمة لمستوى جودة معين، أي أنها ترتبط بعلاقة طردية مع مستوى جودة الخدمة، أي أنه كلما كان في خطط متخذ القرار تحسين مستوى جودة الخدمة، ينبغي عليه تحمل تكاليف إضافية؛ مثال ذلك: عندما تقوم إدارة بنك بفتح نافذة جديدة لتقديم خدمة الإيداع والسحب للزبائن، سيترتب على ذلك دفع أجور لمقدم الخدمة في النافذة الجديدة.

٢- **كلفة الانتظار** Waiting Cost:

وهي الكلفة التي تتحملها المنظمة بشكل مباشر أو غير مباشر؛ نتيجة الوقت الذي ينفقه المستفيد من الخدمة في الانتظار حتى حصوله على الخدمة. وكلما ارتفعت جودة الخدمة كلما انخفضت هذه الكلفة، أي أنها ترتبط بعلاقة عكسية مع مستوى جودة الخدمة.

ويصعب قياس هذه الكلفة أحيانًا، مثال ذلك: عندما ينسحب الزبائن من المتجر أو البنك نتيجة طول وقت الانتظار، وبحثهم عن متجر أو بنك يقدم الخدمة بوقت أقل. في هذه الحالة لا يمكن بسهولة تحديد التكاليف التي تتحملها المنظمة نتيجة انسحاب الزبائن إلّا في بعض الحالات يمكن تحديدها

بسهولة، مثال ذلك عندما يتأخر مقاول في إنجاز المشروع في الوقت المحدد والمتفق عليه، في هذه الحالة سيتحمل المقاول غرامات على تأخره في إنجاز المشروع، وهذه الغرامات تمثل كلفة الانتظار. وفي مثال آخر عندما يتأخر مصنع في تجهيز الطلبية المتفق عليها، في هذه الحالة سيتحمل المصنع تكاليف التأخير حسب شروط العقد مع الطرف الآخر، وفي هذه الحالة ستمثل كلفة التأخير كلفة الانتظار.

ولتحديد نقطة التوازن سيبحث متخذ القرار عن النقطة التي يكون فيها مجموع التكاليف - أي كلفة الخدمة وكلفة الانتظار – أقل ما يمكن، وفي هذه النقطة يحاول متخذ القرار أن يتجنب تكاليف الخدمة غير الاقتصادية، أي وجود طاقات عاطلة لا تستثمر في تقديم الخدمة، مثال ذلك وجود ثلاث نوافذ لتقديم الخدمة في إحدى البنوك، مع حجم منخفض من الزبائن، سيجعل نسبة الوقت الذي ينشغل فيه العاملون في تقديم الخدمة منخفضة، أي أن البنك يتحمل تكاليف خدمات لا تتناسب مع العوائد المتوقعة والمتحققة. كما أن متخذ القرار يحاول أن يتجنب الخدمة المنخفضة الجودة، التي تجعل الزبائن ينفقون وقتًا كبيرًا في الانتظار، مثال ذلك وجود نافذة واحدة لتقديم الخدمة في أحد البنوك مع حجم كبير من الزبائن.

لذلك يحاول متخذ القرار أن يقوم بتحليل مشكلة الانتظار في ضوء حجم التكاليف التي يتحملها، بافتراض مستويات مختلفة من الجودة؛ لكي يحدد مستويات الجودة التي يكون عندها مجموع التكاليف (كلفة الخدمة وكلفة الانتظار) أقل ما يمكن.

ويمكن حساب مجموع التكاليف بموجب العلاقة التالية:

$$Tc = Cs + Cw$$

Tc = مجموع التكاليف.

Cs = كلفة الخدمة.

Cw = كلفة الانتظار.

ويمكن توضيح أثر التكاليف في تحليل مشكلة الانتظار كما في المثال التالي:

مثال: يخطط أحد مراكز تصليح الأجهزة الكهربائية لفتح ورشة جديدة لتصليح الأجهزة، وتم الإعلان في الصحف عن حاجة المركز إلى (مصلح واحد) يوظف لإدارة الورشة الجديدة وتصليح الأجهزة، تقدم للعمل شخصان، كانت قدرة الأول على التصليح (٤) جهاز – ساعة، وطلب أجرًا يوميًا (٩) دينارات، أمّا الثاني فكانت قدرته على التصليح (٦) جهاز - ساعة وطلب أجرًا يوميًا (١٥) دينارًا، وتتوقع إدارة المركز أن يكون معدل وصول الأجهزة إلى الورشة الجديدة جهازًا واحدًا كل (٢٠) دقيقة، وكانت ساعات العمل اليومية (٧) ساعات، وكلفة انتظار الجهاز الواحد (٣) دينارات.

المطلوب: في ضوء المعطيات المتاحة من هو الأفضل لإدارة الورشة الجديدة باستخدام معيار تكاليف نظام الانتظار.

الحل:

معدل وصول الأجهزة = $\frac{60}{20}$ = ٣ جهاز – ساعة.

- تكاليف الانتظار للشخص الأول:

λ = ٣ جهاز – ساعة

μ = ٤ جهاز – ساعة

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{3}{4-3}$$ = ٣ جهاز – ساعة

عدد الأجهزة المتوقع انتظارها خلال يوم عمل = (٣) × (٧) = ٢١ جهازًا.

نوع تكاليف الانتظار = كلفة الخدمة + كلفة الانتظار

$$TC = Cs + Cw$$

= ٩ + (٣) × (٢١) = ٧٢ دينارًا

أجر الشخص الأول يمثل كلفة الخدمة.

- تكاليف الانتظار للشخص الثاني:

λ = ٣ جهاز – ساعة

μ = ٤ جهاز – ساعة =

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{3}{6-3}$$ = ١ جهاز – ساعة =

عدد الأجهزة المتوقع انتظارها خلال يوم عمل = (١) × (٧) = ٧ أجهزة.

نوع تكاليف الانتظار = كلفة الخدمة + كلفة الانتظار

Cs + Cw = TC

= ٩ + (٣) × (٧) = ٣٠ دينار

∴ الشخص الثاني هو الأفضل لإدارة الورشة؛ لأنه يحقق أقل مجموع تكاليف.

حالات تطبيقية مختلفة:

مثال (١): في إحدى ورش تصليح السيارات كان معدل فترة تصليح السيارة الواحدة (١٢) دقيقة، وكان معدل وصول السيارات سيارة واحدة كل (١٥) دقيقة، وكلفة الانتظار (١) جنيه للسيارة الواحدة.

المطلوب:

١- ما هو متوسط عدد السيارات في الورشة؟

٢- ما هو الحد الأدنى للمواقف التي ينبغي توفيرها لضمان انتظار السيارات؟

٣- ما هو متوسط الوقت الذي تنفقه السيارة في الورشة؟

٤- ما هي الكلفة الكلية لتصليح سيارة واحدة؟

الحل:

١- متوسط عدد السيارات في الورشة:

$\lambda = \frac{60}{15}$ = ٤ سيارة – ساعة =

$\mu = \frac{60}{12}$ = ٥ سيارة – ساعة =

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{4}{5-4}$$ = ٤ سيارة – ساعة =

٢- الحد الأدنى للمواقف:

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{(4)^2}{5(5-4)} = \frac{16}{5}$$ = ٣.٢ سيارة – ساعة

∴ عدد المواقف التي ينبغي توفيرها كحد أدنى (٤) مواقف؛ لأنّ متوسط عدد السيارات في خط الانتظار أكثر من ثلاث سيارات.

٣- متوسط الوقت الذي تنفقه السيارة في الورشة:

$$W = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{5-4}$$ = ١ ساعة

٤- الكلفة الكلية لتصليح سيارة واحدة:

$$Cs + Cw = Tc$$

= ٥ + (١) (١) = ٦ جنيه

مثال (٢):

محطة بنزين تتكون من مضخة واحدة، كان معدل وصول السيارات إليها (١٥) سيارة في الساعة، ومعدل الخدمة (٢٤) سيارة في الساعة.

المطلوب:

١- ما هو احتمال أن تكون المحطة شاغرة؟
٢- ما هو متوسط عدد السيارات في المحطة؟
٣- ما هو الحد الأدنى لمواقف السيارات لضمان انتظار الزبائن؟
٤- ما هو متوسط الوقت الذي تنفقه السيارة في خط الانتظار؟
٥- ما هو احتمال وجود ثلاث سيارات في المحطة؟

الحل:

λ = ١٥ سيارة – ساعة

μ = ٢٤ سيارة – ساعة

1- $$P_o = L\frac{\lambda}{\mu} = \frac{15}{24} = 0.375$$

2- $L_s = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} + \frac{15}{9} = 1.66$ سيارة – ساعة

3- $L_q = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)(P_o) \Rightarrow P_3 + \left(\frac{15}{24}\right)^3 (0.375) = 0.09$ سيارة – ساعة

مثال (٣):

ورشة لتصليح الأجهزة الكهربائية، كان معدل وصول الأجهزة ٢٤ جهاز – ساعة، ومعدل تقديم الخدمة ٣ دقائق للجهاز الواحد، ويعمل في هذه الورشة ثلاثة فنيين، يقومون بتقديم الخدمة نفسها بشكل متوازٍ.

المطلوب:

١- حدد عدد الأجهزة المتوقع انتظارها حتى تحصل على الخدمة.

٢- ما هو متوسط عدد الأجهزة في الورشة؟

٣- ما هو متوسط الوقت الذي ينفقه الجهاز حتى يحصل على الخدمة؟

الحل:

λ = ٢٤ سيارة – ساعة

μ = ٢٠ جهاز – ساعة

$k = 3$

$$P = \frac{\lambda}{k\mu} = \frac{24}{(3)(20)} = 0.4$$

باستخدام الجدول في الملحق (ب) نحصل على قيمة Po = 10.29

وذلك تحت عدد قنوات (٣)، ومقابل P = 0.4

1- $L_q = \frac{(0.29)(1.2)^3(0.4)}{(3!)(0.6)^3} = 0.15$ جهاز – ساعة

2- $L_s = 0.15 + \frac{24}{20} = 1.35$ جهاز – ساعة

3- $W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0.15}{24} = 0.006 \text{ ساعة}$$

$$W_s = 0.006 + \frac{1}{20} 0.056 \text{ ساعة}$$

أسئلة الفصل السادس

س١ : بين أهمية دراسة نماذج الانتظار في دعم متخذ القرار، وخاصة في قطاع الخدمات.

س٢ : ما هي المكونات الأساسية لنظام الانتظار، والتي ينبغي دراستها وتحليلها عند التخطيط لحل أي مشكلة انتظار؟

س٣ : وضح مع الرسم أهم أنواع أنظمة الانتظار.

س٤ : كيف يمكن تصنيف حالات وصول الوحدات وتقديم الخدمة في نظام الانتظار، مبينًا أي الحالات أكثر أهمية في الحياة العملية؟

س٥ : وضح دلالة الرموز التالية:

λ:

μ:

Ls:

Lq:

P:

Po:

س٦ : وضح مع الرسم أنواع تكاليف الانتظار، مبينًا أهمية دراسة تكاليف الانتظار في دعم متخذ القرار.

س٧ : ورشة لتصليح السيارات، كان متوسط عدد السيارات الواصلة إليها سيارة واحدة كل (١٢) دقيقة، وكان معدل الخدمة للمصلح الواحد (١٥) سيارة في الساعة. وإن خدمة التصليح تقدم من خلال مصلح واحد.

المطلوب:

١- ما هو احتمال أن تكون الورشة شاغرة؟

٢- ما هو متوسط عدد السيارات في الورشة؟

٣- ما هو متوسط الوقت الذي تنفقه السيارة في خط الانتظار؟

٤- بافتراض أنّ مدير الورشة يخطط لتحسين مستوى الخدمة، من خلال توظيف مصلح ثانٍ، ويتوقع أن يكون متوسط السيارات الواصلة

سيارة واحدة كل (٥) دقائق، مع ثبات معدل الخدمة للمصلح الواحد (١٥ سيارة - ساعة).

المطلوب:

أ- ما هو احتمال أن تكون الورشة شاغرة؟

ب- ما هو متوسط الوقت الذي تنفقه السيارة في خط الانتظار؟

ج- ما هو تقييمك لقرار توظيف مصلح ثانٍ؟

س٨: في أحد المصارف التجارية توجد ثلاث نوافذ لتقديم خدمة الإيداع والسحب، وكان معدل وصول الزبائن شخصًا واحدًا كل ثلاث دقائق، وكان معدل الخدمة للنافذة الواحدة (٨) أشخاص في الساعة.

المطلوب:

١- ما هو احتمال أن تكون جميع النوافذ شاغرة؟

٢- ما هو احتمال أن تكون نافذة واحدة شاغرة؟

٣- ما هو متوسط الوقت الذي ينفقه الشخص قبل حصوله على الخدمة؟

٤- ما هو متوسط عدد الأشخاص في خط الانتظار؟

٥- في حالة وجود مقترحين لتحسين مستوى الخدمة كما يلي:

أ. فتح نافذة جديدة على أن كلفة توظيف شخص لإدارة النافذة (٢٠٠) دينار، وأن كلفة الانتظار (١٥) دينارًا للشخص الواحد.

ب. تحسين مستوى الخدمة إلى (١٢) شخصًا في الساعة، وعدم زيادة عدد النوافذ.

أيهما في رأيك أفضل لإدارة المصرف؟

س٩: يوجد في أحد المطارات الدولية (٥) بوابات لاستقبال الطائرات القادمة للمطار، وتبين أن الطائرات تصل بشكل عشوائي وبمتوسط ٣٠ طائرة - ساعة، كما وجد أنّ معدل الخدمة للبوابة الواحدة (٦) دقائق للطائرة الواحدة.

المطلوب:

١- ما هو متوسط عدد الطائرات في المطار في أي لحظة؟

٢- ما هو متوسط الوقت الذي تنفقه الطائرة في خط الانتظار؟
٣- ما هو احتمال عدم وجود بوابة فارغة؟
٤- ما هو احتمال وجود بوابتين فارغتين؟
٥- يوجد في المطار رصيف واحد للإقلاع ومغادرة المطار، وتبين أنّ معدل وصول الطائرات إلى الرصيف (٢٠) طائرة – ساعة، فيما يمكن للرصيف استيعاب (٢٤) إقلاعًا في الساعة.

المطلوب:

أ. تحديد متوسط عدد الطائرات في خط الانتظار.
ب. ما هو متوسط الوقت الذي تنفقه الطائرة في خط الانتظار؟
ج. ما هو احتمال وجود أكثر من ثلاث طائرات على الرصيف؟

س١٠: في أحد مراكز تصليح الأجهزة الكهربائية، كان معدل وصول الأجهزة جهازًا واحدًا كل (٢٠) دقيقة، ومتوسط عدد الأجهزة في المركز (٣) أجهزة في الساعة.

المطلوب:

١- ما هو متوسط الوقت الذي ينفقه الجهاز في الانتظار؟
٢- ما هو احتمال أن يكون المركز شاغرًا؟
٣- ما هو متوسط عدد الأجهزة في المركز في أي لحظة؟