الفصل الثانى

منهج البحث فى العلوم الرياضية

تمهيد:

تختلف العلوم الرياضية اختلافاً كبيراً عن العلوم الطبيعية التى تستخدم المنهج التجريبى كما ذكرنا حيث تعتمد على الملاحظة والتجربة، وتستخدم الآلات العلمية التى تتفاوت درجة دقتها قلة أو كثرة، لسد ما تعجز حواسنا عن إدراكه وتسجل وتقيس ما يطرأ على الظواهر من تغيرات. ولما كانت القضايا العامة، أو القوانين التى تقررها هذه العلوم تتوقف إلى حد كبير على طبيعة الظواهر، وعلى دقة الوسائل التى تستخدم فى دراستها كانت غير يقينية، وبخاصة لأننا لا نستطيع البرهنة على صدقها إلا بالرجوع إلى الملاحظات والتجارب، وهذه تحتوى على ضروب من النقص التى يمكن تجنبها.

أما العلوم الرياضية فلما كانت أول العلوم نشأة، وكانت تدرس موضوعات مجردة من كل مادة حسية، ولا يشترط أن توجد فى العالم الخارجى حقيقة، فإن القضايا التى تقررها مطلقة ويقينية. والفارق بين العلوم الطبيعية والرياضية هو الفارق بين علوم تدرس الظواهر، وتحاول الكشف عن قوانينها وأسبابها، وبين علوم مستقلة عن الأشياء المادية بحيث يحتل فيها العقل أكبر مكان ممكن، فى حين أن نصيب الحس فيها ضئيل جداً. ذلك لأن الرياضى ليس فى حاجة إلى العمليات الحسية التى لا غنى لعالم الطبيعة أو عالم الكيمياء عنها، بل يكفيه عدداً قليلاً من المواد الأولية التى لا تشبه الظواهر الطبيعية فى شئ، حتى يكون تفكيره منتجاً.

فعالم الجبر فى معادلاته يكتفى ببعض الحروف الأبجدية، وعالم الحساب لا يحتاج فى عملياته المختلفة إلا إلى فكرة العدد، أما عالم الهندسة فيستطيع أن يعرض تباعاً كل النظريات فى علمه بقطعة من الطباشير على سبورة.

ويترتب على ذلك أن عالم الطبيعة أو عالم الكيمياء مقيد بالظواهر التى توجد فعلاً. أما الرياضى فإنه يخلق الموضوعات التى يريد دراسة خصائصها، كالعدد الذى يمكن أن يتسلسل إلى ما لا نهاية والمثلثات والمربعات والدوائر والمخروطات وجميع الأشكال الهندسية التى يمكن تخيلها، ثم يعرف هذه الموضوعات دون البحث عما إذا كانت موجودة حقيقية أم لا. فيكفيه أن تكون ممكنة عقلا. فالمهم هو أن تكون القضايا الرياضية خلوا من كل تناقض عقلى، وأن تكون مطلقة ونهائية. ومن ثم فالعلوم الرياضية علوم عقلية بحتة، لأن العقل هو الذى يبتكرها وحده، دون حاجة إلى أى وسيلة مساعدة، ولأن موضوعاتها لا توجد حقيقة إلا باعتبار أنها مجردة من كل مادة حسية. فليس عالم الهندسة الذى يدرس خواص المخروط أو الدائرة فى حاجة إلى القول بوجود هذين الشكلين فى الطبيعة. وله حرية الابتكار فى الأشكال كيفما يشاء لأنه يعلم أن العالم الحسى لا يحتوى على خطوط مستقيمة تماماً أو على سطوح مستوية كل الأستواء. وعلى الرغم من أن بعض العلوم الطبيعية المتقدمة، كعلم الطبيعة تستخدم منهج الاستدلال الاستنتاجى الذى يستخدم فى العلوم الرياضية، إلا أن البراهين فى علم الطبيعة لايمكن أن تصل فى دقتها إلى درجة دقة العلوم الرياضية وما وصلت إليه من دقة، لأن المبادىء التى يتخذها علم الطبيعة مقدمات لاستنباط بعض النتائج الرياضية ليست إلا بعض القوانين الاستقرائية شديدة العموم، والتى تتصل على الرغم من ذلك بطبيعة الأشياء التى توجد وجوداً مادياً. وبناء على ذلك تعتمد البراهين الرياضية فى علوم الطبيعة على أسس تجريبية وهذا هو السبب فى أنها ليست يقينية، ولما كانت طبيعة المنهج تتوقف إلى حد كبير على طبيعة الموضوع الذى ينصب عليه التفكير، فى كل علم من العلوم، فمن البديهى إذن أن يكون للعلوم الرياضية منهج خاص بها يختلف عن منهج العلوم التجريبية. ويعرف هذا المنهج

باسم **المنهج الاستنتاجى أو المنهج الاستنباطى** deductive methed ويعنى بصفة عامة حركة الفكر فى انتقاله من موضوع أو أكثر إلى نتيجة بوصفها لازمة بالضرورة عن ذلك الموضوع. ويعرف الاستدلال منطقياً بأنه استنتاج قضية من قضية أخرى أو عدة قضايا معروفة، وذلك بطريقة عقلية ودون الالتجاء إلى التجربة الحسية أو المقارنة بالواقع الخارجى والمنهج الاستنباطى أو البرهان الرياضى يفرض علاقات ضرورية بين المقدمات والنتائج. وذلك لأن عملية اكتشاف الحقائق الرياضية الجديدة تشبه عملية الاختراع فى التكنولوجيا، وهى تستلزم أفكاراً موجهة وتنتج عن الحدس، بمعناه العقلى أو الحس على السواء.

ولا شك أن الفارق بين منهج العلوم الرياضية، ومنهج العلوم الطبيعية ليس فارقاً جوهرياً. فالرياضى يلجأ فى بعض الأحيان، إلى الوسائل التجريبية للتأكد من صدق إحدى القضايا الرياضية كذلك يضطر دائماً فى أثناء البحث عن حل لإحدى المسائل إلى وضع الفروض، فيحدس بالحل (أى يصل للحل عن طريق الحدس) كما يحدس عالم الطبيعة بالقانون (أى يصل أيضاً إلى القانون عن طريق الحدس) ثم يحاول البرهنة على صدقه بتطبيقه على إحدى الحالات الخاصة. وليس هذا التطبيق فى الواقع إلا نوعاً من التجريب. فاذا ثبت صدق هذا الحل بطريقة تجريبية انتقل الرياضى إلى مرحلة أخرى، وهى تطبيقه على عدة حالات خاصة أخرى.

مثال ذلك: عالم الهندسة يبدأ بقياس الزاويتين المقابلتين للساقين المتساوين فى إحدى المثلثات فيجد أنهما متساويتان ثم تقسيمهما فى عدة مثلثات أخرى متساوية الساقين، ليتأكد من صدق النتيجة التى أنتهى إليها فى الحالة الأولى. وبعد ذلك يقيم البرهان على صدق هذه القضية بطريقة استنتاجية محضة. ويبين لنا هذا المثال بأن الهندسة بدأت بأن كانت تجريبية ثم أصبحت استنتاجية، وأنه من الضرورى أن الرياضى قد سلك مسلكا تجريبياً فى أول الأمر، قبل العثور على المقدمات الضرورية التى تسمح له بعد ذلك باستخدام الاستنتاج العقلى دون الرجوع فى كل لحظة، إلى الأمور الحسية.

ولهذا كان التفكير الرياضى مثالاً أعلى قاد الحركة الفلسفية والعلمية لأن العلوم الطبيعية التجريبية و إن كانت قد حققت فى القرن التاسع عشر وبداية القرن العشرين كشوفاً بطريقة رياضية، وتعد معجزات بالنسبة إلى العثور السابقة. فلا شك أن التفكير الرياضى نفسة يُعد المعجزة الأولى فى تاريخ الفكر الإنسانى لأنه هو النبراس الذى مازالت تسترشد به بقية العلوم.

الفرق بين الرياضة والمنطق.

تشبه العلوم الرياضية المنطق الصورى فى أنها تتبع المنهج الاستنتاجى أو الاستنباطى فتضع بعض القضايا العامة وتستنبط منها نتائجها. وذلك الشبه دفع بعض المفكرين إلى القول بأن العلوم الرياضية تعد فرعاً من المنطق، لأنها تستخدم المبادئ المنطقية. ولكن الرياضة قد نشأت قبل ظهور المنطق الشكلى بنوعيه أى قبل نشأة المنطق (الأرسطو طاليسى) والمنطق الرياضى الذى يرجع إلى أواخر القرن التاسع عشر. ولذلك نرى أن وجه الشبه بين الرياضة والمنطق لا يبرر إرجاع الرياضة إلى المنطق، بل نذهب على عكس ذلك. إلى القول بأن تأثير العلوم الرياضية فى المنطق الصورى يبدو واضحاً وأكثر عمقاً منه فى العلوم الطبيعية.

١- الفرق بين الرياضة ومنطق أرسطو:

بالنسبة للمنطق القديم قد بينا أن الرياضة كانت مصدر وحى مباشر أو غير مباشر لأرسطو، وأن القياس المنطقى ليس إلا أحد مراحل البرهان الرياضى أو المنهج الاستنتاجى أو الاستنباطى بمعناه العام، ولذلك فمن الطبيعى أن تختلف الرياضة عن المنطق القديم من أوجه عديدة:

أولاً: التعريفات المنطقية التى ندرسها فى باب التصورات من أمثال (اللفظ المفرد واللفظ المركب، والأسم والأداة والكلمة، والكلى والجزئى، والمحصل والمعدول، والضد والنقيض، والما صدق) وغير ذلك فهى تعريفات قليلة العدد إذا قورنت

بالتعريفات أو المصطلحات العديدة التى يحتوى عليها أحد فروع الرياضة. فللهندسة تعريفاتها الخاصة بها من نقطة وخط ومستقيم وزاوية ومثلث ومربع ومستطيل ودائرة... الخ، كذلك للجبر رموز، وللحساب أعداد، وهذه الأخيرة لا تنتهى عند حد.

وللمطلع على كتب الهندسة أو الحساب يرى كثرة التعريفات فيه، وأن كل عدد حسابى تعريف قائم بذاته. فالعدد (٣) على سبيل المثال يعرف بأنه مجموع (٢ + ١)، والعدد (٥) يعرف بأنه مجموع (٤ + ١) وهكذا فيما يتعلق بجميع الأعداد. فتعريفات العلوم الرياضية كانت أكثر عدداً من تعريفات المنطق القديم، لأن هذا المنطق يتقيد حسب طبيعته بالألفاظ المستخدمة فى اللغة.

أما فى الرياضة، فلا يتقيد الباحث، بل يكون حراً فى اختراع ما يشاء من التعريفات الرياضية ولا يوجد ما يقف أمام نشاطه العقلى أو يحول دون حريته فى الابتكار مادام لا يقع فى التناقض. ونجد أن اختراع الرموز للتعبير عن الكم أدى إلى نشأة فرعين جديدين من فروع الرياضة وهما الجبر والهندسة التحليلية.

ثانياً: تحتوى العلوم الرياضية على كثير من الأوليات والبديهيات التى تفوق فى عددها كل ما يحتوى عليه المنطق القديم من هذا القبيل. وتطلق البديهيات والأوليات على القضايا شديدة العموم التى نسلم بصحتها وتستخدم فى استنباط بعض القضايا الضرورية وذلك عكس المنطق لأنه يعتمد على عدد قليل من المبادئ. فهو مثلاً يستخدم المبدأ القائل بأن "الكمين المتساويين لكم ثالث متساويان".

كذلك يستخدم البديهة القائلة بأن "ما يصدق على الجنس يصدق على النوع أيضاً". ومعنى ذلك أن صدق الحكم الكلى دليل على صدق الحكم الجزئى، لأن نفى الحكم مثلاً عن أحد أفراد النوع بعد إثباته لجميع أفراده يؤدى إلى الوقوع فى التناقض.

مثال ذلك: لا يجوز بداهة أن ننفى الإحساس عن الإنسان إذا أثبتناه للحيوان لأن الإنسان أحد أنواع الحيوان.

وأخيراً يمكن ارجاع مثل هذه البديهيات المنطقية إلى مبدأ واحد يقوم عليه المنطق الصورى بأكمله وهو مبدأ عدم التناقض، وهو مبدأ رياضى أيضاً.

ثالثاً: تحتوى العلوم الرياضية إلى جانب ما ذكرناه على عنصر جديد لا نجد ما يشبهه فى المنطق القديم، وهو ما يسمى بالنظريات الرياضية. ويقصد بها تلك القضايا أو الدعاوى التى يجب البرهنة على صحتها. ويجب ألا نخلط بين هذه النظريات وبين المقدمات فى القياس. فوجه الخلاف بينهما ينحصر فى أن النظريات المراد إثباتها. ويهتدى الرياضى إلى هذه الحقائق عندما يقوم بإحدى العمليات كمد الخطوط أو تنصيف الزوايا وما يشابه ذلك كوضع الفروض. ليس الأمر على هذا النحو فى القياس لأن المنطقى مقيد بمقدمتين وبشروط خاصة فى كل شكل من أشكال القياس لا يحق له إهمالها. فهو لا يستطيع الوصول إلى نتيجة بعد هذه الشروط والقيود غير الموجودة فى المقدمات بصفة ضمنية. ولذلك وصفنا القياس مسبقاً بأنه عقيم لا يؤدى إلى الكشف عن حقائق جديدة.

رابعاً: هناك فرق بين الرياضة (ومنطق أرسطو) فى طريقة التفكير. فالتفكير الرياضى الاستنتاجى أو الاستنباطى يعتمد على عملية التعميم التى تعد جوهر التفكير الاستقرائى أى ينتقل الرياضى من صدق قضية فى حالة جزئية إلى تأكيد صدقها فى جميع الحالات الأخرى الشبيهة بها. ويلجأ أيضاً فى حله لبعض المسائل إلى إدخال بعض الخصائص الرياضية الجديدة، وإلى وضع الفروض أو القيام ببعض العمليات الحسية كرسم الدوائر وغير ذلك.

أما المنطقى فينتقل من العام إلى الخاص أى يؤلف فى قياسه بين قضيتين عامتين لكى ينتقل إلى قضية ثالثة أقل عموماً منها. بالإضافة إلى أن المنطق القديم لا يعرف الأساليب السالف ذكرها فى الرياضة. ولذا فالفارق بينهما كبير.

موضوع العلوم الرياضية.

موضوع الرياضيات هو دراسة الكم بنوعيه، أى الكم المنفصل والكم المتصل. والكم قابل للزيادة والنقصان، بواسطة إضافة أو طرح أجزاء متجانسة، بعضها إلى بعض.

أما بالنسبة للكم المتصل فهو يتألف من أجزاء متصلة، وتوجد درجات تصل بين الجزء والآخر ويطلق على المكان والزمان أو الحركة. لأن هذه الأشياء لا تتركب فى

الواقع من أجزاء منفصلة، بل نحن الذين نجزئها، ونفصل أجزائها بعضها عن بعض بطريقة تعسفية نتواضع عليها (فنقسم الزمان مثلاً إلى أيام وساعات ودقائق وثوان، والمكان إلى أمتار وسنتيمترات ومليمترات). ومن الممكن تقسيم كل من الزمان والمكان على أسس أخرى، مما يدل على أن التقسيم هنا اعتبارى فقط.

أما بالنسبة للكم المنفصل فيتألف من أجزاء، غير قابلة للقسمة، وبين الوحدة والأخرى، لا توجد أجزاء أو درجات. ويطلق على العدد. ويسمى العدد كماً منفصلاً لأن هناك هوه فاصلة بين كل عدد والعدد الذى يسبقه أو العدد الذى يليه فمثلاً توجد فجوة بين العدد (١، ٢)، وبين العددين (٢، ٣).

ولا تهدف الرياضة إلى دراسة الكم المنفصل أو الكم المتصل إلى حين، بل تدرس الكم المجرد عن كل طابع حسى أى كموضوع عقلى محض يمكن قياسه، مع صرف النظر عن كل الصفات الحسية التى يمكن أن يتصف بها. فنحن لا ندرس الأعداد فى الحساب على أنها رموز تعبر عن نوع خاص من الأشياء الحسية كالمحار أو حبات القمح أو الحصى أو وحدات الفاكهة، بل ندرس الأعداد فى ذاتها أى كرموز عقلية مجردة.

مثال ذلك: إننا إذا أجرينا بعض العمليات الحسابية من جمع أو طرح أو ضرب أو قسمة لم نفكر فى مدلولات الأعداد التى تستخدم فى كل عملية من هذه العمليات، وإنما ننظر إلى هذه الأعداد على أنها مجرد معان ذهنية يمكن الاستعانة بها على معرفة العلاقات التى توجد بين أجزاء الكم.

والعلوم الرياضية هى علوم عقلية بحتة، العقل هو الذى يبتكرها وحده دون واسطة أخرى. فيبتكر الأعداد والأشكال ويبحث فى العلاقات العقلية التى تربط بينها. فإذا توصل إلى بعض هذه العلاقات حددها على هيئة معادلات. ولا حدود للعقل فى ابتكار المعانى الرياضية وفى الكشف عن العلاقات أو الوظائف الجديدة. فله فى هذه الناحية حرية لا يحدها سوى الوقوع فى التناقض. ومن ثم فليس الرياضى مضطراً إلى

التقيد بالأمور الحسية، لأنه لا يعنى إلا بالكم البحت، أى إلا بالمقياس بصرف النظر عن كل شئ يمكن قياسه به. وهذا هو المسلك الوحيد الذى يتبعه علم الحساب، والذى يتشكل أيضاً بصورة الجبر، ويأتى بعده فى المرتبة علم الهندسة الذى يدرس الأشكال.

ويتضح لنا من طبيعة الموضوعات التى تدرسها الرياضة أن شروط البحث العلمى تتحقق فيها أتم وجه، لأن هدف العلم ينحصر فى دراسة الأشياء فى ذاتها ولذاتها، دون الاهتمام بمعرفة الفوائد العلمية تهدف إلى قياس المقادير الحسية بطريقة مباشرة أو غير مباشرة، لمعرفة العلاقات النظرية المجردة الموجودة بين الأعداد والأشكال غير محققين فى ذلك لأن هذا ليس صحيحاً.

والموضوعات الرياضية تمتاز بأنها يقينية ضرورية لأنها وليدة العقل، وذلك عكس القوانين الطبيعية التى تعبر عن ظواهر مادية متشابكة ومعقدة ويقين العلوم الرياضية مستمد من البداهة التامة، أى بداهة المعانى التى تصطنعها، ومن الترتيب الذى يجرى عليه تسلسل تلك المعانى، ولذلك علينا إذا شئنا أن نضفى على أى علم يقيناً يعدل يقين علم الحساب أو علم الهندسة. بأن لا نلقى بالاً وألا نشغل أنفسنا إلا بالمعانى الواضحة المتميزة. وأن نلتزم فى جميع معانينا بالترتيب الذى نجده فى العلوم الرياضية بحيث يكون كل معنى منها مسبوقاً بجميع المعانى التى يستند إليها سابقاً لجميع المعانى التى تستند إليه. أما كيفية بلوغ البداهة الرياضية فى حل المشاكل التى يبحثها أى شخص، فيكون بالتمهيد لذلك بأمور كثيرة منه طرح الأفكار الصادرة عن السلطات أيا كانت فلسفية أو اجتماعية أو سياسية أو دينية، لأن هذه الأفكار أكثر ميلاً مع الهوى وأكثرها بعداً عن اليقين، كذلك ينبغى علينا إبعاد شهادة الحس لأنها خادعة فى أغلب الأحيان، وبعد طرح جميع المعارف علينا أن نحلل طرائق هذين العلميين الرياضيين (الحساب والهندسة) لأنهما العلمان اللذان يقر جميع الناس بيقين نتائجهما التى لا شك فيها.

وقد ازدادت الرياضة تقدماً وأحرزت نصيباً كبيراً فى ذلك عندما استعاض (ديكارت) عن "هندسة إقليدس" التى تُعتبر أصدق مثال على عبقرية الأغريق، وكانت

ترجع دائماً إلى الأشكال الحسية، وهى الأشكال التى يمكن أن تبلغ أقصى مرتبة من الدقة – بهندسة أخرى أكثر تجريداً وهى الهندسة التحليلية التى تعبر عن العلاقات بين الأشكال بالمعادلات الجبرية. كذلك كان اختراع الأعداد الكسرية والأعداد الدائرة والأعداد الخيالية سبباً فى تقدم الحساب.

والعلوم الرياضية التى نستخدمها كأداة فى العلوم الأخرى، هى التى تقيس الكم. والحق أننا لا نستطيع تقديم تعريف لكم بمعناه المجرد، وإن كنا ندركه إدراكاً مباشراً بالحدس. فالكم المجرد تصور بسيط وواضح، بينما صفات الأشياء العينية، أو كيفياتها الحسية تكون أكثر تركيباً وغموضاً. ونقصد بالحدس هنا الإدراك العقلى المباشر الذى يدرك به الذهن بعض الحقائق دفعة واحدة وفى زمن واحد وهو يبلغ من الوضوح والتميز درجة يزول معها كل شك.

العلوم الرياضية.

من الممكن أن نقسم العلوم الرياضية إلى قسمين:

١- الرياضيات البحتة.

٢- الرياضيات التطبيقية.

أولاً- الرياضيات البحتة:

لا تتصل بالخبرة الحسية من قبيل (١+٢= ٣) وتقتصر على استدلال صيغة من أخرى حتى تنتهى هذه الصيغة لمسلمات. وتشمل الرياضيات البحتة الحساب والجبر والهندسة والحساب اللا متناهى أو التفاضل والتكامل.

ويستخدم علم الحساب معانى العدد والترتيب والنسب بمفهومها المجرد. وكذلك الحال بالنسبة لعلم الجبر.

وتعتبر الوحدة فى علم الحساب، كماً محدداً، وسلسلة الأعداد تكون غير متصلة، باعتبار أن كل عدد، وحدة منفصلة بذاتها. وتنطبق الأعداد على كل الأشياء، وكذلك

الرموز الجبرية. وتعتبر نظرية الدالات من أهم النظريات الرياضية، التى بلغت درجة عالية من التجريد.

هكذا يتأسس علم الحساب على معنى (الوحدة) فى نظر العديد من العلماء، وعلى معنى (الكثرة) فى نظر (أدموند هوسرل) فالكثرة فى رأيه تصور أهم وأشمل من الوحدة، وهو الذى يفسر لنا كيفية ضم الوحدات أو فصل بعضها عن بعض. ولا تكون العمليات الحسابية ممكنة بدون مفهوم الكثرة.

والهندسة تدرس الأشكال التى يمكن أن يكون لها بعد أو أكثر فى المكان ومجالها هو الكم المتصل. وتعتبر الهندسة التحليلية التى أسسها (ديكارت) صورة واضحة لحساب الأعداد بالشكل والأشكال بالعدد. أما الحساب اللا متناهى- التفاضل والتكامل، فهو كما ذكرنا يفترض وجود عدد لا متناهى من الكسور بين كل عدد صحيح وآخر.

ثانياً- الرياضيات التطبيقية:

أول العلوم الرياضية التطبيقية أو الفيزيائية، كما يقول البعض هو علم الميكانيكا. وهو يُستخدم بالإضافة إلى معانى الجبر والهندسة معنى القوة والكتلة والسرعة. وهو ينقسم بدوره إلى السينمانيكا التى تدرس مستقلة عن القوى، والاستاتيكا، التى تدرس القوى مستقلة عن الحركة، ثم الديناميكا، التى تدرس القوى من حيث صلتها بالحركة.

وبجانب الميكانيكا الأرضية، توجد الميكانيكا الكونية التى تهتم بدراسة كتل وحركات الأفلاك والكواكب، وهى بعبارة أخرى ميكانيكا السماء. ومن قضايا الرياضيات التطبيقية أيضاً مبادئ الهندسة الاقليدية من قبيل القضية القائلة:

"أن الخطين المستقيمين يتقاطعان عند نقطة واحدة فقط" وهى من قبيل بديهيات هندسة إقليدس فهى تختلف عن قضايا الرياضة البحتة لأنها تشتمل على

أخبـــار جديـدة ومعرفـة جديـدة. وأكبر الظن أن المناطقـة الوضـعيين يسلمـون بأنهـا قضايـا إخباريـة فمثلاً القضـية القائلـة: "إن الخـط المستقيم أصغر خـط يصل بين نقطتين" لا يمكن القول بأنها قضية تكرارية، بل هى قضية إخبارية لأن الخط المستقيم هو موضوع القضية لا يتضمن محموله أصغر خط يصل بين نقطتين. فالقضية ليست مجرد إبراز لعنصر متضمن فى مدلول كلمة (الخط المستقيم) بل هى إبراز لعنصر جديد.

والقضايا الرياضية التطبيقية ليست ضرورية الصدق ضرورة مطلقة. ولكنها ضرورية الصدق ضرورة مقيدة.

نشأة المعانى الرياضية وطبيعتها.

لقد اختلف الفلاسفة وعلماء الرياضيات فى تفسير نشأة الموضوعات الخاصة بالعلم الرياضى وانقسموا تجاه هذه المشكلة إلى ثلاثة مذاهب هى:

أولاً- مذهب التجريبيين أو الحسيين:

يرى أتباع هذا المذهب من أمثال (ديفيد هيوم - وجون إستيوارت ميل - وهربرت سبنسر) أن المعانى الرياضية مهما بلغت أقصى مرتبة من التجريد والاستقلال عن الأمور الحسية فإنها ليست فطرية فى العقل، بل يكتسبها الإنسان عن طريق ملاحظاته وتجاربه. فهى مستمدة من الأمور الحسية بدون شك.

وقد تبدو هذه النظرة صحيحة من الناحية التاريخية. فكان الإنسان البدائى لا يستطيع التفرقة بين العدد والصفات الحسية للأشياء. فبدأ العد بواسطة أصابعه أو الحصى. ومن هنا إشتقت كلمة الحساب من الكلمة اليونانية التى تعنى (الحصى).

ولقد اكتشف الإنسان بواسطة التجربة، بعض خواص الأعداد، والأشكال الهندسية، مثل المربع والدائرة والمثلث.

وباختصار ينكر التجريبيون أن تكون المعانى الرياضية فطرية، أى سابقة

للملاحظة والتجربة. وعلى الرغم من اعترافهم بأن الأشكال الحسية لا يمكن أن تكون مطابقة تمام المطابقة للتعريفات والمعانى الرياضية، فإنهم يؤكدون أن المعانى الرياضية ترجع فى أصلها إلى الأمور الحسية، وأن عملية التجريد هى التى تجعل هذه المعانى كما لو كانت ذات طبيعة قائمة بذاتها. فهم يرون أن الطبيعة وإن كانت لا تحتوى على مثلثات ومربعات ودوائر مضبوطة كتلك التى يدرسها عالم الهندسة لتحديد خواصها والعلاقات بينها، فإنها تحتوى على أشياء مختلفة الأحجام والسطوح والأشكال التى تصلح أن تكون أساساً لتجريد المعانى الرياضية. وهذا ما يؤيده المذهب العقلى.

ثانياً- مذهب العقليين:

يرى أصحاب هذا المذهب أمثال (ديكارت وليبنتس وغيرهم) أن المعانى الرياضية مثالية بمعنى أن العقل الإنسانى هو الذى يبتكرها دون أن يتجه إلى الظواهر الطبيعية والأشياء الخارجية لكى يستخلص منها فكرة الأعداد أو الأشكال المختلفة فى الحساب والهندسة ولذا فهناك فارق بين موضوعات الرياضة وموضوعات العلوم الطبيعية. فإذا كانت الأخيرة (العلوم الطبيعية) تهتم بدراسة الظواهر وقوانينها، وتهدف إلى فهم الطبيعة وتفسيرها. فإن العلوم الرياضية لا تتوقف صحتها ومشروعيتها على وجود موضوعات مادية حقيقية. فإذا كان على سبيل المثال عالم الكيمياء يدرس العناصر التى توجد بالفعل فإن الرياضى لا يهتم بما إذا كانت المعانى والموضوعات التى يدرسها أموراً واقعية، إذ يكفيه أن تكون ممكنة عقلاً وخالية من التناقض.

ونستخلص من هذا أن أصحاب المذهب العقلى كانوا يرون أن المعانى الرياضية سابقة لكل معرفة حسية تجريبية (apriori) وأنها توجد فى العقل بصفة فطرية، أى لا تكتسب بالتجارب. وإذا كانت هذه المعانى فطرية فمن الواجب أن يكون العقل هو الذى يبتكرها، ولا تعتبر الظواهر الخارجية إلا عاملاً ثانوياً يحفز العقل على إبتكارها. ولذا يقول (ديكارت) بأن المعانى الرياضية فطرية فى النفس وشأنها فى ذلك شأن بقية المعانى الأبدية. كما نجد (كانط) يذهب مذهباً قريباً من ذلك، عندما

ينص على أن فكرة الزمان والمكان فكرتان سابقتان لكل ملاحظة وتجربة، وأن العقل يفرضهما ويطبقهما على الأشياء الخارجية.

ثالثاً- مذهب التوفيق بين الحس والعقل:

لو نظرنا إلى هذين المذهبين لوجدنا أن فيهما جانباً من الصدق. فلا شك أن العقل ليس مستقلاً تماماً عن التجربة كما أنه لا يخضع تماماً لتركيب التجربة. فمن الأكيد أن المعانى العقلية ليست فطرية فى النفس، كما أن الملاحظات والتجارب لا يمكن أن تكون المنبع الوحيد لها. ومما يدل على ذلك أن تاريخ العلوم الرياضية يبين لنا أن هذه المعانى لم تنشأ دفعة واحدة، بل نمت فى أثناء الزمن، وتطورت تطوراً كبيراً جداً. ولكن هذه النشأة التدريجية تعبر فى نفس الوقت عن تدخل العقل الإنسانى فى كل مرحلة من مراحل تطورها فهى إذن تراث عقلى إنسانى ترجع أصوله إلى الحس والعقل معاً.

وعندئذ نرى أن أصحاب المذهب العقلى قد بالغوا فى تعضيد أو تأكيد وجهة نظرهم حتى أنكروا حقيقة تاريخية. وهى نشأة المعانى الرياضية فى أثناء قرون عديدة، كما غالى أصحاب المذهب أكثر مما ينبغى، وحسبوا أنهما يكفيان فى تفسير طبيعة المعانى الرياضية، ومن ثم ضنوا (أى أنكروا) على العقل أهم صفاته، وهى القدرة على الاختراع والابتكار، والانتقال من البسيط إلى المركب.

وحقيقة لا يمكن العثور على المعانى الرياضية بالعقل وحده أو عن طريق الملاحظة والتجربة فحسب، لأن الواقع يكذب كلا من هذين الرأيين المتناقضين، ولأنه من الضرورى أن يساهم العقل والحس كلا بنصيبه.

وفى الحقيقة كانت الملاحظة الحافز الضرورى الأول لنشأة الرياضة، وما كان من المستطاع أن توجد الهندسة مثلاً ما لم تحتوى الطبيعة على أجسام صلبة لا تفقد أشكالها عند تحركها. ولكن لم يكن حافز الطبيعة وحدة كافياً. فكان لابد من وجود معانى مجردة من كل مادة. ويؤلف العقل بينها بعمليات تخضع للمبادئ العقلية وحدها.

لذلك فمن الممكن تعريف المعانى الرياضية، بأنها معانى يجردها العقل من التجربة، ثم يركبها تركيباً عقلياً. ومثل هذه المعانى، الامتداد بالنسبة للهندسة والعدد بالنسبة للحساب. فإذا نظرنا إلى العدد، فإننا نلاحظ أنه ليس خاصية للأشياء، ونحن لا ندركه إدراكاً حسياً. والعدد ليس فى الحقيقة مستقلاً عن العقل، لأنه من صنعه وتركيبه.

فالرأى الفاصل فى هذه المشكلة الخاصة بنشأة المعانى الرياضية هو (الجمع بين مذهب التجريبيين ومذهب العقليين) لأن تلك هى الوسيلة التى تفسر لنا كيف كانت العلوم الرياضية استقرائية وتجريبية فى أول أمرها، ثم أصبحت علوماً استنتاجية بحتة، غير أنها لم تصل إلى هذه المرحلة من التجريد إلا بعد أن مرت بمراحل عديدة. وبيان ذلك أنها كانت تجريبية لدى قدماء المصريين والهنود والصينيين. فقدماء المصريين اهتدوا بطريقتهم التجريبية إلى تقرير بعض الحقائق الرياضية. وكذلك الأغريق كانوا أول من استطاعوا تجريد الرياضة من الأمور الحسية عندما اعتمدوا على بعض المبادئ الأولية التى يسلم المرء بصدقها ويستخدمها فى براهينه. وقد نشأت هندسة إقليدس تبعاً لذلك، وبدأ الطابع العقلى يغلب على البراهين الرياضية، لأن الرياضيين أرادوا أن تكون براهينهم يقينية على خلاف البراهين التى يستخدمها التفكير التجريبى. كذلك تطورت الرياضة وزادت درجة التجريد عندما أخترع الهنود الأعداد المعروفة باسمهم. وأدى ذلك إلى تقدم الحساب، وفيما بعد إلى اختراع الجبر.

وفى عصور متأخرة نشأت الهندسة التحليلية على يد (ديكارت) وحساب التفاضل والتكامل، على يد كل من (ليبنز) و(نيوتن) وكان إبتكار هذه الفروع الجديدة يعتمد من جانب آخر على قدرة العقل الذى يستطيع أن يتجاوز نطاق التجربة ويعتمد على التفكير العقلى المحض. ولذلك يقول (جاك مارتيان): إن التجربة، بالنسبة للرياضيات ليس لها إلا قيمة سابقة على العلم. فنحن لا نستطيع أن نعرف معنى الخط أو الدائرة إلا بعد رؤيتنا لأشياء مستقيمة أو مستديرة فى الواقع. كذلك فإنه لا

يمكن أن تكون لدينا فكرة عن الواقع، إلا إذا تمثلنا الوحدة، والكثرة بواسطة العدد. والتصورات الرياضية، لا تتحقق فى الأشياء المحسوسة إلا إذا فقدت خواصها المثالية.

فإذا نظرنا إلى الأشكال الهندسية، فقد نصادف بعضها فى الواقع بينما يستحيل وجود البعض الآخر فى العالم المحسوس. ولكننا نجد المهندس إذا أراد أن يرسم خطاً، أو يبنى جداراً، فإنه يستخدم آلاته لتصحيح الواقع.

وباختصار فأنه ليس من الضرورى أن تكون الموضوعات الرياضية نسخة من الأشياء الحسية، بل يكفى أن تكون ممكنة فى ذاتها، كما يجب مهما كانت مبتكرة، أن تظل على صلة بالأشياء الخارجية حتى يمكن تطبيقها تطبيقاً عملياً.

مبادئ المنهج فى العلوم الرياضية.

لا شك أن طريقة البرهنة فى العلوم الرياضية طريقة استنتاجية، فإذا أردنا البرهنة على صدق قضية ما وجب علينا أن نربط بينها وبين قضية أخرى تعد مقدمة لها. فالرياضى يضطر إلى التسليم بصدق بعض القضايا العامة، لأنه يعجز عن العثور على قضايا أخرى أشد عموماً منها، بحيث يمكن اتخاذها أساساً للبرهنة عليها.

وهذه القضايا التى لا يمكن البرهنة عليها، والتى تتخذ أساساً للاستنتاج الرياضى تنقسم إلى الأنواع التالية:

(الأوليات/ والبديهيات/ والتعريفات).

أولاً- الأوليات:

تطلق على القضايا التى تبدو بديهية وضرورية ولا يمكن البرهنة على صدقها، لأن كل نتيجة تستنبط من مقدمات وهذه المقدمات إما أن تكون بديهية فى ذاتها وليست فى حاجة إلى البرهنة على صحتها، وإما لا يمكن تقريرها إلا بالاعتماد على قضايا أخرى أشد عموماً منها بحيث تكون مقدمات لها. ولما كان من الصعب الوصول على هذا النحو إلى ما لا نهاية له وجب الوقوف عند بعض القضايا التى لا يمكن البرهنة عليها. وهذه هى الأوليات.

وتصدق على الكم (المتصل) أى على الحساب والهندسة وهذه الأمثلة توضح طبيعة هذه القضايا:

١- الكمان المتساويان لكم ثالث متساويان.

٢- إذا اضيفت كميات متساوية إلى أخرى متساوية كانت النتائج متساوية.

٣- إذا قسمت كميات متساوية على أخرى متساوية كانت النواتج متساوية.

٤- إذا اضيفت كميات غير متساوية إلى أخرى غير متساوية كانت النواتج غير متساوية، وبنفس الكمية.

٥- الكل أكبر من أى جزء من أجزائه.

وهذه الأوليات أو المبادئ تستخدم فى التفكير الرياضى كقواعد عامة يجب مراعاتها فى أثناء هذا التفكير. وليست كمقدمات تستنبط منها بعض القضايا الأخرى.

ثانيا- البديهيات:

تطلق على بعض القضايا شديدة العموم التى توضع فى أحد فروع الرياضة (كالهندسة أو الحساب) دون إمكان البرهنة عليها لشدة عمومها. فمثلاً تستخدم هندسة (إقليدس) البديهيات الآتية:

١- يمكن رسم خط مستقيم واحد - وواحد فقط بحيث يمر بنقطتين معلومتين. ويمكن تسمية المستقيم بأى نقطتين تقعان معاً.

٢- لا يتقاطع المستقيمان إلا فى نقطة واحدة. فإذا اشتركا فى أكثر من نقطة واحدة فإنهما يتطابقان.

٣- لا توجد سوى نقطة واحدة بحيث ينقسم بها الخط المستقيم إلى قسمين متساوين

٤- ليس سوى خط واحد مستقيم تنقسم به الزاوية إلى قسمين متساوين.

٥- لا يمكن أن نرسم نقطة سوى خط مستقيم واحد موازلخط معين.

أما الحساب فبديهيات قليلة العدد. يمكن إرجاعها إلى البديهة القائلة بتسلسل الاعداد الصحيحة إلى مالا نهاية له. وبيان الاعداد تنشأ بسبب وضع وحدة معينة هى الرقم واحد وتستمر بإضافة هذا العدد أولا إلى نفسه للحصول على العدد ٢، وبإضافته بعد ذلك إلى عدد جديد.

أوجه الشبه والاختلاف بين البديهيات والأوليات.

وتشبه البديهيات الأوليات فى شدة العموم وفى عدم القدرة على البرهنة على صحتها. ولكنها تختلف عنها من الناحيتين الآتيتين:

أولا: ليس للبديهيات الضرورة المنطقية التى تتميز بها الأوليات فالرياضى لا يستطيع إنكار الأوليات دون الوقوع فى التناقض العقلى ولكن من الممكن الاستعاضة عن البديهيات الهندسية مثلاً بغيرها. وهذا ما حدث بالفعل عندما وضع بعض العلماء بديهيات هندسية مختلفة عن بديهيات (إقليدس) فأدى ذلك إلى نشأة أنواع جديدة من الهندسة. ومؤدى ذلك أنه من الممكن مد نقطة ما عدة خطوط موازية لخط معين. واستنبطوا من ذلك سلسة من النظريات التى لا تحتوى على أى تناقض. وبذلك نشأت هندسة ليست أقل من هندسة إقليدس.

ثانيا: الأوليات خاصة بشكل التفكير لا بمادته، وهى تستخدم قواعد منطقية ضرورية يجب إتبعاها فى الاستنتاج الرياضى. أما البديهيات فإنها تستخدم مقدمات لاستنباط النتائج التى تترتب عليها. وهى أقل عموماً من الأوليات. ولكن ليس معنى ذلك أنها حالات جزئية أو فردية، بل هى مبادئ قائمة بذاتها. ودليل ذلك أن لكل فرع من فروع الرياضة بديهياتة الخاصة به.

طبيعة البديهيات.

اختلف المفكرون فى تفسير نشأة البديهيات.

أ- ذهب أنصار المذهب العقلى ومنهم (كانط) إلى أنها قواعد عقلية عامة، وأنها كالأوليات تماماً أى أنها حقائق ضرورية لا يستطيع العقل إنكارها دون الوقوع فى التناقض.

ب- أما أصحاب المذهب التجريبى فرأوا أنها ليست سابقة للملاحظة والتجربة، بل ترجع إلى أصل حسى، أى أن العقل يجردها من الأمور الخارجية.

ج- يرى فريق آخر يمثله (هنرى بوانكاريه) أن البديهات أقرب الأشياء شبهاً بالتعريفات الرياضية، بمعنى أنها تمثل بعض الفروض التى يسلم الرياضى بصدقها، ويتخذها أساساً لاستنباط النتائج التى تترتب عليها.

ولكن البديهيات ليست حقائق عقلية فطرية وضرورية كما يقول العقليون، ذلك لأن تاريخ العلوم الرياضية يدل على فساد هذا الرأى. فقد نشأت كما رأينا هندسات أخرى – عل أساس بديهيات غير التى حددها إقليدس.

كذلك ليست البديهيات مجرد نتيجة الملاحظة و التجربة، إذ لا يمكن استخدام هاتين الوسيلتين فى البرهنة على صحتها كما أنه لا يمكن استخدام العقل فى تحقيق هذا الغرض نفسه.

فإذاً تكون البديهيات نوعاً من القضايا أو الفروض التى يضعها العقل ليستنبط منها النتائج. وإذا أصبحت أو ظهرت هذه النتائج ضرورية. فالسبب فى ذلك يرجع إلى أن العقل ينتهى إليها و قد التزم بالقواعد و القضايا التى سلم بصدقها فى أول الأمر.

وقد ذهب (هنرى بوانكاريه) إلى أن القضايا الأساسية لأى هندسة و يقصد بها (البديهيات) لا المبادىء، ليست إلا مجرد تعريفات متنكرة فى ثوب القضايا المسلم بصدقها. وهى أمور يتفق عليها قبل البدء فى الاستدلال. ولذا من الخطأ أن نتسأل عما إذا كانت صادقة أم كاذبة. وبناء على ذلك فكل المحاولات التى بذلت للبرهنة على هندسة (إقليدس) كانت غير مجدية لأنها ليست إلا مجرد تعريفات و ضعها صاحب هذه الهندسة وطلب من غيره التسليم بصدقها.ومن الممكن لعلماء الهندسة اصطلاح تعريفات غيرها مما يؤدى إلى نشأة أنواع أخرى من الهندسة.

ثالثا- التعريفات:

تطلق على القضايا التى يضعها للموضوعات الرياضية المختلفة فمن الطبيعى أن تكون التعريفات التى تعبر عن هذا الموضوعات مجرد تعريفات اسمية.

ويترتب على ذلك أنها نسبية إذ يمكن إستبدالها بغيرها. وليست التعريفات الرياضية ضرورية وعامة كما هو الحال فى الأوليات أو المبادئ. ويرجع ذلك إلى أنها من صنع العقل ولذا فإنها تتوقف على إرادتنا وعلى ما نتفق عليه.

ولم تكن نسبية التعريفات الرياضية تجعلها قابلة للتحوير والتبديل وإلا لأصبحت عقبة فى سبيل التفكير بدلاً من أن تكون عنوناً له فى الكشف عن العلاقات الرياضية. وفى النهاية يمكن القول بأن التعريفات الرياضية أمور يتفق الناس عليها وأنها توضع فى أول كل بحث رياضى ويتخذها وسيلة إلى الكشف عن العلاقات التى توجد بين أجزاء الكم سواء أكان متصلاً أم منفصلاً. ومما يدل على نسبيتها أن الرياضى يحتاج دائماً إلى تعريف كل خاصة رياضية جديدة يكشف عنها.

طرق التفكير الرياضى (أو البرهان فى العلوم الرياضية).

لاشك أن البرهان أو الاستنباط الرياضى هو عملية ربط القضايا بالبديهيات والتعريفات والأوليات. وهى تقوم على عدة طرق هى: (التحليل - التركيب - التنفيذ).

أولا- التحليل:

هذه العملية، تفترض وجود حل قائم لمسألة ما، وكما يقول (ديكارت) إننا ننظر إلى المعلوم والمجهول نظرة متساوية فى هذه الحالة. ونربط بين قضية أو نظرية مبرهنة، ونظرية أخرى غير مبرهنة، ومعنى ذلك أننا ننتقل من قضية ما إلى الشروط التى تخضع لها.

ثانيا- طريقة التنفيذ أو التحليل غير المباشر:

يلجأ إليها الرياضى فى حالة عجزه عن البرهنة على صدق قضية رياضية

بطريقة تحليلية مباشرة. فالاستدلال فيها يكون عن طريق قياس الخلف أى بافتراض القضية المناقضة، واستخلاص نتائج مناقضة للنتائج المطلوب إثباتها. فإذا كانت النتائج الأولى هى الصحيحة كانت القضية الأولى بالتالى هى الصحيحة. أما إذا كانت نتائج القضية المناقضة هى الصحيحة فتكون بالتالى هى الصحيحة.

ثالثا- طريقة التركيب:

هذه الطريقة مألوفة فى البراهين الرياضية وهى عكس اتجاه التحليل. فيقوم المرء فيها بترتيب فروع المسألة والتأكيد بينها على نحو يستطيع الوصول معه إلى الغرض المقصود. فيبدأ الرياضى ببعض القضايا المعروفة أى التى سبق له التسليم بها (كالتعريفات والبديهيات أو التى برهن على صدقها) ثم يصعد إلى قضية أخرى حتى ينتهى إلى إثبات المطلوب.

وتستخدم هذه الطريقة فى كل من الحساب والجبر والهندسة وفى النهاية العلم الرياضى يؤلف نسقاً استنباطيا متكاملاً، تكون النتائج صادقة فى إطار هذا النسق. ومن هنا كان يقين الرياضيات يقيناً عقلياً، مجرداً ونظرياً. لأنه لا يصدر إلا عن البداهة العقلية فقط.