طريقتان لحساب ميل فلك البروج
(من إخراج محمد بن الصباح)

للدكتور عبد المجيد نصير
(عضو المجمع)

مقدمة :

فلك البروج هو الدائرة العظمى على القبة السماوية ، التي تمثل فلك الشمس في سنة كاملة . وهي تتقاطع مع خط الاستواء السماوي في نقطتين، هما نقطة الاعتدال الربيعي (نقطة الشرق) ونقطة الاعتدال الخريفي . ويكون فلك الشمس اليومي ، يوم الاعتدال الربيعي ، هو على وجه التقريب ، خط الاستواء السماوي . وكذلك الامر في يوم الاعتدال الخريفي ؛ وهما يومان يتساوى فيهما الليل والنهار . وبعد انقضاء يوم الاعتدال الربيعي ، تتقدم الشمس ببطء شمالا على فلك البروج ، ويكون مدارها لأي يوم من هاتيك الايام دائرة صغرى موازية لدائرة خط الاستواء السماوي . وتقطع هذه الدائرة الصغرى الافق في نقطة تبعد قليلا أو كثيرا عن نقطة المشرق . ومقدار القوس الافقي بين نقطة المشرق ونقطة تقاطع الدائرة الصغرى مع الافق تسمى ساعة المشرق ، ونرمز لها بالرمز θ .

والقوس θ يعتمد على خـط الطول الشمسي λ ، الذي يحدد موضع الشمس بالنسبة الـى فلك البروج ، وعلـى ϕ التي تقيس خـط العرض على الارض بالنسبة الى من يرصد الحركة . اما الفرق بين دائرتي خـط الاستواء وفلك البروج فرمزه ε ويسمى ميل فلـك البروج . وهذا المقال يهتـم بمقياس مقدار ε اعتمادا على طريقتيـن منقولتين عن فلكي اسلامي اسمه محمد بن الصبـاح .

ومحمـد بن الصباح هو احد اخوة ثلاثة هـم محمد وابرهيـم والحسن ، اهتموا بالهندسة والفلك ، وكانـوا معاصرين لبني موسـى المشهورين ، في ايـام الخليفة المأمون ، كما يذكر فؤاد سيزكين [١] ص ٢٥٢ ، ٢٥٣ . وذكرهم ابن النديـم والقفطي . ومن مؤلفات محمـد ابن الصباح : « رسالة في العمـل بساعة المبسوطة » و « رسالة فـي امتحـان موضع الشمس وميلها وساعة مشرقها وكمية مسارها » ؛ وينقل ابو نصر بن عراق مقتطفات من هـذه الرسالة ، ويعلق عليها فـي مخطوطته « رسالة في امتحـان الشمس » ، المنشورة ضمن مجموعـة « رسائل ابي نصر الـى البيروني » ، الصادرة عن هيئـة النشر الشرقية العثمانية بحيدرآباد بالهنـد . ولمحمد بن الصباح رسائل وكتب اخـرى بالاشتراك مع اخوتـه .

والذي نقدمه هنا هو نقـل عن كتاب البيروني « تحديد نهايـات الاماكن لتصحيح مسافات المساكن » المنشور في القاهرة سنة ١٩٦٢ [٢] . ويذكر فيه ، ابتداء من ص ١٤٦ ، (ص ١٤٩ بالمخطوطة) الى ص ١٥٥ (ص ١٦٠ بالمخطوطـة) طريقتين لاستخراج سعـة المشرق الكلـي ، ينسبهما البيروني الى محمد بن الصباح ، نقلا عن استاذه ابـن العراق . ونحـن نقدمهما محققين .

مبـــادىء فلكيـــة :

في الشكل الاول نقدم بعض المبادىء الفلكية اللازمة . وتبين س موضع الشمس في اليوم ذي اطول نهـــار ، اي تقاطع مـــدار السرطان مع فلك البروج . يكون مـــدار الشمس في ذلك اليوم دائرة صغرى يقع القطـــب الشمالي في موضع قطبهـــا . وهذه الدائرة مماسة ايضا لدائرة السرطان . وتقاطع تلك الدائرة مع الافـــق هو النقطة المسماة $\theta_{ع}$ (θ العظمى) وتمثل اعظـــم قيمة لساعة المشرق . فاذا رسمنا دائرة صغرى اخـــرى تمـــر بالنقطة $\theta_{ع}$ ، وقطبها هو النقطة ش ، فانهـــا تمثل دائرة ساعة المشرق . والآن نسقط دائرة فلـــك البروج على دائرة ساعـــة المشرق . افرض نقطة مـــا ، $\lambda_{م}$ ، على فلك البروج . اسقط $\lambda_{م}$ على الافـــق لتحصل على $\theta_{م}$ برسم دائرة صغرى توازي خـــط الاستواء . ثـــم اسقط $\theta_{م}$ على دائـــرة ساعة المشرق حسب دائـــرة صغرى توازي العمود الرئيسي ش ز ، لتحصل على النقطـــة هـ

وبهـــذا الاسلوب فان صورة نقطة الاعتدال الربيعي ع تصير ع′ ، ونحصل على ان درجات القوس ع′م تساوي درجات القوس ع $\lambda_{م}$ ، وهكذا لجميع النقـــاط على فلك البروج . ومعنى هذا ان حركة الشمس على فلك البروج يمكـــن ان يمثلها حركة على دائـــرة ساعـــة المشرق وبالسرعة نفسها . وهذا المبـــدأ الرياضي كان واضحا لمحمـــد بن الصباح لانه استعمله في طريقته ، ولـــو انـــه لم يبرهن عليه . للبرهان انظـــر المرجـــع [٣] .

طريقة محمد بن الصباح :

يذكر البيروني ان محمدا بن الصباح عنده طريق من الحساب لاستخراج سعة المشرق الكلي من رصد سعة ثلاثة مشارق ، على نهاية مدتين متتاليتين ، قد أرسله في مقالته مجردا من غير برهان، وهو حسن ، وإن بنى أمره على تساهل . ويذكر البيروني حسابه ، ويستعمل أرصادا فلكية للتدليل عليه ؛ وفيما يلي نقدم البنية الجبرية الرمزية لما يذكره البيروني .

ورغم ما ذكره أعلاه عن اسقاط فلك البروج على دائرة ساعة المشرق ، فان البيروني لا يقيس الزوايا على دائرة فلك المشرق لصعوبة ذلك ، بل يقوم بالقياس على دائرة اخرى اسمها دائرة الميل ؛ فاذا أدير الافق حتى يصبح دائرة خط الزوال ومعامدا لخط الاستواء ، فان دائرة ساعة المشرق تصغر حتى تنطبق على دائرة الميل ذات نصف قطر يساوي جا ع . وعلى هذا فان القياسات على الميل هم للمسارات λ هي القياسات نفسها على دائرة ساعة المشرق من نقطة تقع على خط استواء الارض ، انظر الشكل (٢) .

وهنا ننبه الى ان العلاقات المثلثية التي استخدمها الرياضيون المسلمون والتي نقدمها فيما يتلو ، ونميزها بكتابتها ببنط غليظ ، مختلفة قليلا عن العلاقات المثلثية المستخدمة اليوم ، والعلاقة بينها هي جا أ = ل حا أ ، حيث

ل هو نصف قطر دائرة التعريف ، ونفرضه = ٦٠ في هذا المقال ، لان ٦٠ هي اساس النظام الستيني . والقياسات المذكورة هي بالنظام السيتني ،حيث الفاصلة المنقوطة (؛) تقوم مقام الفاصلة العشرية . مثلا :

٤١؛٥٥ ؛٦ (ستيني) = ٥٥ + ٤١ × ٦٠ + ٦ × ٦٠ × ٦٠ = ٢٤١١٥ (عشري) شا

وكما نعلم ،فان النظام الستيني يحوى درجات ،دقائق ،وثواني ،وهكذا .

والشكل (٣) منقول عن البيروني (ص ١٤٩) . فالدائرة الكبرى هي فلك البروج ونصف قطرها ر ،والدائرة الصغرى هي دائرة الميل ونصف قطرها ر' = جا ε ، حيث ε زاوية ميل فلك البروج .

افرض أ = λ ،وهو خط طول الشمس في وقت ما ،فان ميل λ هو أص ،وجيب أص يساوي س ومن المثلثات المتشابهه فان

$$\frac{\text{جا } \lambda}{ر} = \frac{\text{جا } \delta}{ر'} = \frac{\text{جا } \delta}{\text{جا } \varepsilon}$$

ولأى رصدين ى ، ك بحيث ان ط ى = ى ط = ى ك فان س م = م ل . هذا مع افترا انتظام حركة الشمس . وهو من التساهل الذى يذكره البيروني .

ولاشتقاق الطريقة الاولى لابن الصباح ،فاننا نفرض دائرة الميل، الشكل(٤ وافرض الاقواس أب ، أجـ ، أدـ تمثل قياسات الرصد الثلاثة δ_1 ، δ_2 ، δ_3 على الترتي فان ب ج = ج د (الافتراض انتظام حركة الشمس ،ولان القياسات تؤخذ بين اوقا متساوية في فصل واحد) .

فان الاقواس د ز = د هـ = ٢ ب ج + ٢ أب = ٢ أ جـ .

لذلك ب هـ = ٢ جا δ_1 = $م_1$

د ز = ٢ جا δ_2 = $م_2$

ب ز = ٢ جا δ_3 = $م_3$

ويسمى البيروني م ز = د ب = و بالوتر المستخرج

د م = د ز – م ز = هـ د – ب د = هـ ب = $م_1$

وكذلك هـ ز = ب ز + ب هـ = $\frac{م_1^2 + م_3^2}{2}$ ، حيث اعتبرنا هـ ب ز خطا

وبتطبيق نظرية بطليموس على ب ز م د فان

$$م_2^2 = م_3 م_1 + و^2$$

$$ع^2 = م_2^2 - \frac{(م_1^2 + م_3^2)^2}{2}$$

ومنها و = ($م_2^2 - م_3 م_1$)$^{\frac{1}{2}}$ ، ع = $\frac{1}{2}\left[م_2^2 - (م_1^2 + م_3^2) \right]^{\frac{1}{2}}$

ومن تشابه المثلثين د هـ ب ، د ز ط فان

$$\frac{د هـ}{د ز} = \frac{د ب}{د ط} \text{ ، اى ان } \frac{ع}{م_2^2} = \frac{و}{2 ر} = \frac{و}{2 جا \frac{ه}{2}}$$

لذلك جا $\frac{ه}{2}$ = $\frac{و \cdot 2م}{ع 2}$

او ، = معكوس جا $\frac{و \cdot م_2}{ع 2}$

الرصد الفلكي

تتطلب هذه الطريقة ثلاثة ارصاد على فترات متساوية وفي الربع ذاته . ولذلك فان البيروني قام بالقياسات في مرصده بخوارزم (الآن تحت الحكم السوفيتي) ، حيث درجة العرض $\phi = 41^\circ 47'$.

وقاس الزوايا $\delta_م$ عند ساعة الزوال على فترات متساوية مدة كل منها ثلاثون يوما . والقياس الاول يوم الجمعه بتاريخ ٢ مرداد سنة ٣٨٥ (بعد يزدجرد الموافق ٣ صفر سنة ٧٠٤ للهجرة والموافق ١١ تموز سنة ١٠١٦ م والقياسات هي

$\delta_1 = 28^\circ 21'$ ، $\delta_2 = 14^\circ 0'$ ، $\delta_3 = 12^\circ 30'$

على ان البيروني يبدل δ_1 ، δ_3 ليحفظ ترتيب الزوايا .

الحسابات

هناك بعض الاخطاء في الحسابات التي يذكرها البيروني في كتابه . وهو الارقام اما بالحروف على طريقة حساب الجمل ، او بالنظام العشري . الحسابات كما يذكرها البيروني ،ونضع بين حاصرتين < > الص يجب . ونرجح ان البيروني لم يخطىء . بل ان الخطأ قد جاء ربما من الذين حسبوا او كتبوا .

$م_1$ = ١٥ ، ٤١ ؛ ٦ والصحيح < ٤٧٥٥ ، ٦ >

$م_2$ = ٥٠ ، ١٠ ؛ ٢٩

$م_3$ = ٥٥ ، ٥٤٠ ؛ ٤٣

$\frac{م_1^4 + م_3^4}{2}$ = ٢٥ ، ١٨٠ ؛ ٢٥

وحسب النظام العشري فان $م_1$ = ٢٤٠٧٥ ثواني < ٢٤١١٥ >

$م_2$ = ١٠٤٥١٠ ثواني

$م_3$ = ١٥٨٠٩٥ ثواني

$\frac{م_1^4 + م_3^4}{2}$ = ٩١١٠٥ ثواني

$م_1^3 \cdot م_3$ = ٣٨١٢٤٦٠٩ روابع

$م_2^2$ = ١٠٩٤٠٣٤٠١٠٠ روابع

$م_2^1 - م_1^4 \cdot م_3^4$ = ٧١٣٧٨٧٩١٧٥ . < ٧١٠٩٨٧٩١٧٥ > روابع

و = ٨٤٤٢٧ < ٨٤٣٢٠ > ثواني

$م^2 - \frac{(م_1^4 + م_3^4)^2}{2}$ = ٢٦٤٠٢١٩٠٧٥ < ٢٦٢٢٢١٩٠٧٥ > روابع

ع = ٥١٣٨٣ < ٥١٢٠٨ > ثواني

ر = ٨٥٨٦٠ ثواني < ٨٦٨٦٠ > ثواني

ج = ٠ ، ٢٥ ، ٢٣° < ٣٣ ، ٢٨ ، ٢٣° >

تعليق

يعلل البيروني عدم دقة الجواب الى سببين :-

(١) افتراض انتظام حركة الشمس . وقد احتجناه من فرضنا ب ج = ج د . وهذا غير صحيح .

(٢) عدد الخطوات اللازمه لإستخراج الجواب كبير نسبيا ، مما يؤدى الى اغلاط في الحساب والتقدير . خصوصا من حساب الجذور والجيوب .

ونلاحظ ان البيروني ،رغم معرفته بالتساهل الموجود في هذه الطريقة لاعتمادها على فرض غير صحيح،فانه آثر ان يبرهن على عدم دقتها بالرصد والمثل العددى . وهذا مثل آخر على الدقة التي كان يتوخاها العالم المسلم ،وعلى حبه للتجربه ،وتحمله المشاق في سبيل ذلك .

الطريقه الثانيه

وللتغلب على مزالق الطريقة الاولى ، فإن البيروني يقدم لنا طريقا آخر ، وان كان لايجزم بصحة نسبته الى محمد بن الصباح لفساد في النسخه من مقالة ابن الصباح التي كانت وقعت بين يدى البيروني."فاستخرج ابو نصر بن عراق طريقا اما ان يطابق صحيح ذاك ،واما ان يكون طريقا ثالثا" . وهذا الطريق يحتاج الى رصدين للشمس وهي في ربع واحد . ولاشتقاق المعادلة الخاصة فان الخطوات المتبعة هي فيما يلي . انظر الشكل (٥) .

ارسم دائرة تمثل سعة المشرق ونصف قطرها يساوى جا ج ،ومركزها ع . افرض القوس أ ب سعة المشرق الاول - اى مقدار الرصد الاول - وخذ على المحيط القوس ب هـ ضعف القوس أ ب . وافرض القوس ب ج سعة المشرق الثاني - اى مقدار الرصد الثاني - وعين ز بحيث ان القوس ب ز ضعف القوس ب ج . نصف القوس

هـ ب ز في د . ونزل د ح عمودًا على الوتر ب ز .

فإذا ب هـ = ٢ جا $\frac{\theta_1}{2}$ = $م_1$

ب ز = ٢ جا $\frac{\theta_1}{2}$ = $م_2$

فإن ز ح = $\frac{م_1 + م_2}{2}$

وكذلك د ح = أ ب = ب ح = ب د

و = د ب = $\frac{م_1 - م_2}{2}$ = الوتر المستخرج

نصف الزاويه د ع ب بالمنصف ع ف . فإن الزاويه المركزية د ع ف تساوى الزاويه المحيطية ب ز د وهي الزوايه $\frac{\theta}{2}$. ويتمم ع د ف = تمام الزاوية

د ع ف = $90^\circ - \frac{\theta}{2}$

ولذلك فإن

$$\frac{\text{زد}}{\text{ز ح}} = \frac{\text{جا } 90}{\text{جا}(90 - \frac{\theta}{2})} = \frac{\text{ل}}{\text{جتا } \frac{\theta}{2}}$$

لذلك س = ز د = $\frac{\text{ل} \left(\frac{م_1 + م_2}{2} \right)}{\text{جتا } \frac{\theta}{2}}$

وفى المثلث ب د ز ، فإن

و^2 = ب د^2 = ب ز^2 + ز د^2 − ٢ ب ز . د ز جتا $\frac{\theta}{2}$

= ر د^2 + $م_2^2$ − ٢ م . ($\frac{م_1 + م_2}{2}$)

= س^2 − $م_1$. $م_2$

$$\frac{و}{٢} = \frac{\sqrt{س^{٢} - ٢\ م_{١}\ م_{٢}}}{٢}$$

ومن المثلث ع ف د فان

$$ع\ د = جا\ \frac{\frac{ل \cdot و}{٢}}{\frac{جا\ ٥\lambda}{٢}}$$

اى ان $\Leftarrow$ = معكوس جا $\frac{ل}{\frac{جا^{2}\ ٥\lambda}{٢}}$

الرصد الفلكي والحساب

يذكر البيروني رصدين متتاليين بينهما ثلاثون يوما ،كما في الطريقة الاولى

$\delta_{١} = ١٢ ؛ ٥٣°$ $\qquad$ $م_{١} = ٤١٠\ ٥٥ ؛ ٦$

$\delta_{٢} = ٠ ؛ ١٤$ $\qquad$ $م_{٢} = ١٠\ ٥٠ ؛ ٢٩٠$

$\frac{م_{١}^{٢} + م_{٢}^{٢}}{٢} = ٣٢\ ٥١٠\ ؛١٧ \langle ٥٣\ ٥١٠\ ؛١٧ \rangle = \langle ٦٤٢٩٢ \rangle$ شواني

(الخطأ في معدل $م_{١}$ ، $م_{٢}$. والارقام مكتوبة بالاحرف ، مما يدل على انها خطأ اصلا ،وليست خطأ كتابيا لكن القيمة الصحيحة هي المستعملة بعد ذلك).

ومن زيج حبش ، يستخرج البيروني

$٥\lambda = ٢٩ ؛ ١٧°$

لذلك متمم ٥λ = $ه$ = $١٩٠٥٧ ؛ ٥٢° \langle ٤٢\ ٥٧٠\ ١٩٠ ؛ ٥٢° \rangle$.

(وليس لهذا الخطأ أثر فيما بعد لأنه لايستعمله).

$$\frac{\lambda\Delta}{2} = ٣٠ ، ٣٨ ؛ ١٤^\circ$$

$$\underline{جا} \frac{\lambda\Delta}{2} = ٥٩ ، ٩٠ ؛ ١٥ = ٥٤٥٩٩ \text{ ثواني}$$

$$٩٠^\circ - \frac{\lambda\Delta}{2} = ٣٠ ، ٢١ ؛ ٧٥^\circ$$

$$\text{حا} (٩٠^\circ - \frac{\lambda\Delta}{2}) = \underline{جتا} \frac{\lambda\Delta}{2} = ٣٠ ، ٠ ؛ ٨٥ = ٢٠٨٩٨٠ \text{ ثواني}$$

$$ل = ٦٠$$

$$س = \frac{٦٠ \times ٦٤٢٩٢}{٢٠٨٩٨٠} = ٥٥ ، ٢٥٠ ؛ ١٨ < ٣٢ ، ٢٧٠ ؛ ١٨ >$$

(والخطأ هنا في القسمة ،ويؤثر في الجواب الاخير).

$$س = ٦٦٣٥٥ < ٦٦٤٥٢ > \text{ ثواني}$$

$$٢ س = ٤٤٠٢٩٨٦٠٢٥ < ٤٤١٥٨٦٨٣٠٤ > \text{ روابع}$$

$$م_{١} م_{٢} . ٢ = ٢٥٢٠٢٥٨٦٥٠ \text{ روابع}$$

$$٣ س - م_{١} م_{٢} . ٢ = ١٨٨٢٧٢٧٣٧٥ < ١٨٩٥٦٠٩٦٥٤ > \text{ روابع}$$

$$و = ٤٣٣٩٠ < ٤٣٥٧٢ > \text{ثواني}$$

$$\frac{و}{٢} = ٢١٦٩٥ < ٢١٧٨٦ > \text{ثواني}$$

$$\underline{جا} \Leftarrow = ٨٥٨٢٨ < ٨٥٨٣٢ > \text{ ثواني}$$

$$= ٢٨ ، ٥٠٠ ؛ ٢٣ < ٣٢ ، ٥٠٠ ؛ ٢٣ >$$

وعليه فان $\Leftarrow = ٢٤٠٤٦ ؛ ٢٣^\circ < ٤ ، ٢٤٠ ؛ ٢٣^\circ >$

ولانعرف القيمة الصحيحة للزواية $\Leftarrow$ في ذلك الوقت لكي نقارن بين النتائج .

عرفان (يشكر المؤلف استاذه ادوارد كندى اذ قرأ المسودة وعلق عليها على اخطائها).

المصادر

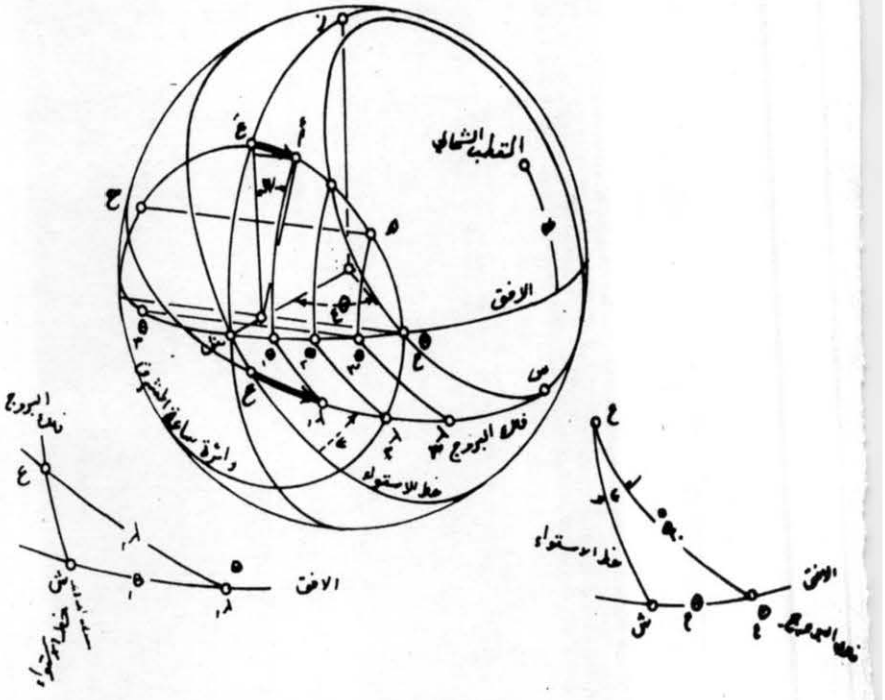
(١) Sezkin , Fuat , Geschichte Des Arabischen Schriftums, Band V , Leiden , 1974.

(٢) البيروني ، ابو الريحان ، " تحديد نهايات الاماكن في تصحيح مسافات المساكن " طبع القاهره ١٩٦٢ .

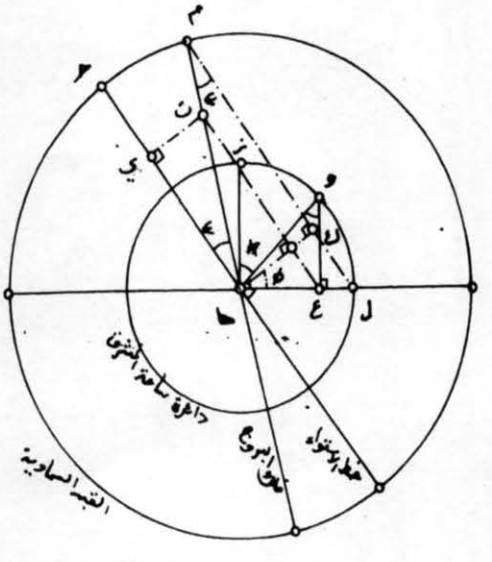
(٣) Kennedy, E.S. and Sharkas , H., " Two Medieval Methods for Determining the obliquity of the Ecliptic", The Mathehmatics Teacher , Vol. LV No 4 , April 1962

(٤) Colliers Encyclopedia , Vol. 5 P604 , Macmillan Educational Corporation , New York.

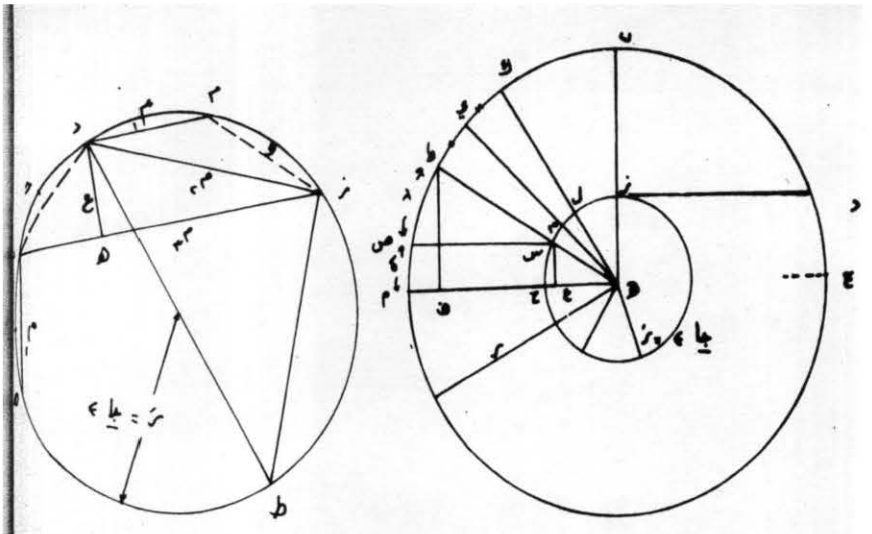
(٥) القفطي ، جمال الدين ابو الحسن علي بن القاضي الاشرف يوسف ، " اخبار العلماء في اخبار الحكماء " دار الآثار للطباعة والنشر والتوزيع، بيروت .



الشكل (١)

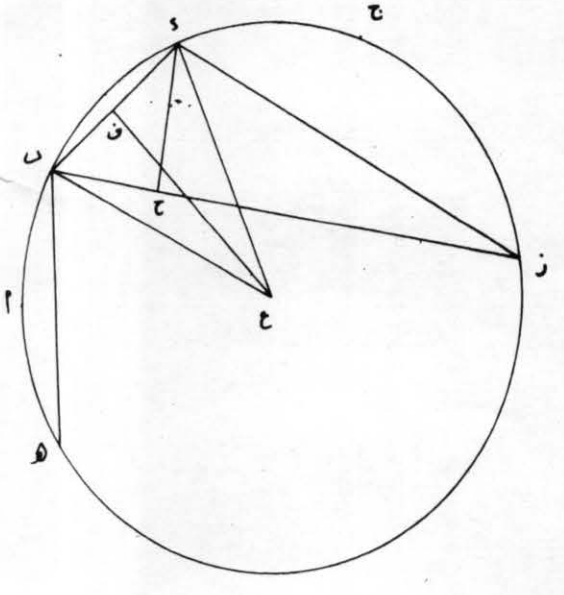


الشكل (٢)



الشكل (٣)

الشكل (٤)



الشكل (٥)