1001 فكرة عن

الأعداد - الهندسة - الجبر - علم الإحصاء

حقوق الطبعة الإنجليزية

English Edition Copyrights

MATH 1001
Quercus
Carmelite House
50 Victoria Embankment, London EC4Y 0DZ
First published in 2010

حقوق الطبعة العربية

عنوان الكتاب: 1001 فكرة عن
الأعداد - الهندسة - الجبر - علم الإحصاء
تأليف: Richard Elwes

ترجمة: شريف السيد عبدالله، محمد فؤاد، وائل خضير

مراجعة: سيد علي إبراهيم

الطبعة الأولى

سنة النشر: 2017

الناشر: المجموعة العربية للتدريب والنشر
8 أ شارع أحمد فخري - مدينة نصر - القاهرة - مصر

تليفون: (00202) 23490242
فاكس: (00202) 23490419
الموقع الإلكتروني www.arabgroup.net.eg
E-mail: info@arabgroup.net.eg
E-mail: elarabgroup@yahoo.com

إيلوز، ريتشارد
1001 فكرة عن – الأعداد – الهندسة – الجبر – علم الإحصاء
تأليف: ريتشارد إيلوز، ترجمة: شريف السيد عبدالله، محمد فؤاد، وائل خضير – مراجعة: سيد علي إبراهيم – القاهرة: المجموعة العربية للتدريب والنشر، 2017
– ط1
400 ص : 24x17 سم.
الترقيم الدولي: 978-977-722-113-9
1- الرياضيات
أ- عبدالله، شريف السيد (مترجم مشارك)
ب- فؤاد، محمد (مترجم – مشارك)
ج- خضير، وائل (مترجم مشارك)
د- إبراهيم ، سيدعلي (مراجع)
ديوي: 510
رقم الإيداع : 2017/22741

منحة الترجمة
Translation Grant
صندوق منحة الشارقة للترجمة
Shariah Translation Grant Fund

1001 فكرة عن

الأعداد - الهندسة - الجبر - علم الإحصاء

تأليف

Richard Elwes

ترجمة

شريف السيد عبدالله　　محمد فؤاد　　وائل خضير

مراجعة

سيد على إبراهيم

خبير مناهج الرياضيات بمركز تطوير المناهج

الناشر

المجموعة العربية للتدريب والنشر

2018

المحتويات

مُقَدِّمَة

أول عالم رياضيات معروف لنا اسمه أحمس (Ahmes)، الكاتب المصري الذي نسخ ودرس حوالي عام 1650 قبل الميلاد قائمة من المسائل الرياضية المعقدة أطلق عليها "الكتابات القديمة" (ancient writings)، وتُعرف نصوص أحمس اليوم باسم بردية ريند (Rhind papyrus). عن طريق اللوحات الحجرية التي عرفنا من خلالها أن علماء مصر القديمة، وعلماء بابل كانوا يدونون الأرقام بطريقة متطورة، ولا يتحلون بروح التحدي للمسائل الصعبة في الجبر، والهندسة، ونظرية الأعداد.

إذاً علم الرياضيات دراسة قديمة قدم الحضارة، لكنها تمثل عصرية العالم اليوم. وقد شهدنا تقدما علميا وتكنولوجيا بعد مرور آلاف السنين على عمل أحمس حيث لم يكن بوسع أحمس حتى أن يحلم به. إن مركز هذا التقدم هو مسيرة علم الرياضيات الذي ساهم في تقديم اللغة الأساسية المستخدمة في جميع السياقات العلمية، وأكثر هذه الإسهامات أهمية كان في ميدان علم الفيزياء، وقد وجهت رؤية جاليلو الثورية في مطلع القرن السابع عشر، التي قالت أن الكون يخضع لوصف رياضي بحت لفت الأنظار نحو نظريات ميكانيكا (الكم، والنسبية) التي غيرت العالم.

إن الاعتماد على علم الرياضيات ليس حكرا على علم الفيزياء؛ بل إن العلوم الاجتماعية أيضاً تعتمد على أساليب الاحتمال والإحصاء، من أجل التحقق من النظريات، وكذلك عالم الأعمال والحكومات. أما في الآونة الأخيرة، وبظهور تكنولوجيا المعلومات أصبح علم الرياضيات متورطا في علاقة وطيدة مع علوم الكمبيوتر، وكان لذلك أيضاً أعمق التأثير على العالم.

إن اتساع دائرة تأثير علم الرياضيات أدى ذلك إلى أن بداية نمو علم الرياضيات نفسه

بمعدل مذهل. وقد وصف إيريك تمبل بل (Eric Temple Bell) أعظم علماء الرياضيات، هنري بوانكاريه (Henri Poincaré)، بأنه آخر المساندين للعالمية (universalist)، ويقصد أنه آخر شخص متقن إتقان كامل لكل الأنظمة الرياضية الموجودة خلال عصره، وقد مات عام 1912م، ففي عصرنا الحالي ليس بإمكان أحد أن يدعى إتقانه لعلم الطوبولوچيا كاملا ناهيك عن الهندسة، أو المنطق وكلها مجرد فتات من علم الرياضيات الكلي.

لقد عاش هندى بوانكاريه فترة تمرد في تاريخ الرياضيات؛ حيث نبذت الأفكار القديمة، وغرست بذور لأفكار جديدة ازدهرت خلال القرن العشرين، وكان نتاج ذلك أن أصبح عالم الرياضيات الذي نعرفه نحن الآن غنيا ومعقدا بشكل لم يكن أعظم الحالمين في الماضي أن يتخيله. إن الهدف وراء هذا الكتاب هو تقديم نظرة شاملة عن عالم الرياضيات وكيف أصبح.

كان من الممكن أن نحاول رسم خريطة منخفضة الدقة للمشهد الرياضي برمته إلا أن ذلك لن يكون مفيدا ولا ممتعا؛ لذلك فضلنا أن نقدم نحو 1001 بطاقة بريدية قصيرة من كل معلم مميز من معلمي الرياضيات، إلا إنها - على قصرها- تعطي انطباعا عن الصورة الأكبر لعلم الرياضيات.

بالنظرة الشاملة للأشياء نجد أن الرقم 1001 صغير جدا (انظر مبرهنة الحسابيات اللامعقولة). وكانت الصعوبة التي واجهتني هي اختيار الأشياء المميزة حقا: البراهين عظيمة بالفعل، والمسائل البارزة التي لازالت مفتوحة، والأفكار الرئيسة، كما أنني فكرت كمؤلف لهذا الكتاب في تقديم المفاجآت والمراوغات التي جعلت المادة مذهلة حقا.

كيف تستخدم هذا الكتاب:

الطريقة التي عليك بها قراءة (علم الرياضيات 1001) تتوقف على هدفك من قراءته. إذا كنت مهتما بالأعداد الأولية، اقرأ هذا الفصل، وإذا كنت ترغب في شرح سريع لفرضية "ريمان" يمكنك التوجه مباشرة إلى ذلك الفصل إلا أن "الشرح السريع" لفرضية "ريمان" من المستحيلات، فستحتاج إلى العودة إلى الوراء قليلا وقراءة القليل من المداخل التي تسبقه، حيث تجد فيها المتطلبات الأولية لفهم ذلك. وبدلا من ذلك يمكنك الغوص في

الموضوعات تارة، والخروج منها تارة أخرى، كما يمكنك تتبع الإسناد الترافقي للمداخل المختلفة في الكتاب فقد تجد موضوعا جديدا.

إلى من يوجه هذا الكتاب؟

لأي شخص لديه فضول حول علم الرياضيات، بدءا من المبتدئين وحتى الطلاب المستنيرين، وكذلك الأشخاص المتحمسين للموضوع، ومهما كان مستوى معرفة القارئ فأنا متأكد من أنه سيجد مادة علمية في هذا الكتاب تنيره وتجذبه. لكن - بلاشك- بعض أجزاء الكتاب تغطي موضوعات بالغة التعقيد؛ فهذه هي طبيعة المادة، والتحرج من وضع هذه الموضوعات يحيد بنا عن الهدف، إلا أن الكتاب منظم بحيث تسبق المفاهيم الأساسية وما يتعلق بها تلك المفاهيم المعقدة مما يقيِّم أساس الفهم.

لقد كانت مهمتي في الكتابة هي التطرق إلى جميع الأفكار: من الأفكار الأساسية، وحتى الأفكار المجردة، بأبسط وأكثر الطرق تركيزا قدر المستطاع، وقد بذلت قصارى جهدي، ولا شك في أنني استمتعت بهذا التحدي، وكل ما في وسعي الآن هو أن أتمنى أن تستمتعوا به أنتم أيضاً.

ريتشارد أوكورا إلويس
Richard Okura Elwes

الأعداد

ما هي الرياضيات؟ إن علم الأعداد هو التخمين الأول لكثير من الناس، وهذا ليس خطأ، ومع ذلك تطورت نظرتنا للأعداد مع مرور الوقت. اليوم هناك العديد من أنظمة العد المختلفة التي جديدة بالاهتمام. ولكل منها خصائص، وأسرار الخاصة بها. وهذا الموضوع ما يسمى بنظرية الأعداد. الأعداد الطبيعية التي تضم ..... ,5 ,4 ,3 ,2 ,1 ,0.

أول شيء يجب القيام به مع هذه الأعداد هو إجراء العمليات الحسابية بينها من خلال الجمع والطرح والضرب والقسمة. هناك عدة طرق لمعرفة حساب النتائج. التي تعتمد على النظام العشري، والقيمة المكانية على مستوى

أعمق، مثل أسئلة حول الأعداد الطبيعية التي تندرج إلى فئتين رئيستين. الأولى تتعلق بالأعداد الأولية. الذرات التي يتم بنائها كل الآخرين حتى اليوم. ويحيى دراسة أسرارها وتشمل الأسئلة المفتوحة الكبرى في مشاكل Landau's وافتراضية Riemann

أما الفئة الثانية، فهي نظرية الأعداد معادلة Diophantine. وهي ترمز للعلاقات بين الأعداد الصحيحة. حدسية Catalan (في نظرية Mihaileseus)، على سبيل المثال يقول أن 8، 9 فقط عددين موجبين، وسوف تجد من أي وقت مضى أن كلاً من العددين يجلسا بجانب بعضها البعض.

الأساسيات THE BASICS

الجمع (الإضافة) Addition

اليوم ومنذ آلاف السنين، نستخدم الأرقام كمبدأ أساسي للعدد، ويتضمن العد الإضافة (الجمع)؛ فعند إدراج عنصر (بند) جديد في مجموعتك أنت تحتاج لإضافة واحد إلى مجموعك، بالإضافة إلى ذلك والأكثر عمومية تمتد هذه ماذا يحدث إذا قمت بإضافة ثلاثة عناصر (بنود) لمجموعة من خمسة؟ هناك طرق فعاله لإضافة أعداد كبيرة تتطلب تطوير العددية (الحسابية) (انظر إلى الجمع بإعادة التسمية) فعلماء الرياضيات لديها العديد من المصطلحات للجمع: الجمع هو: المجموع عند إضافة كل شيء معا. ويتم إضافة المزيد والمزيد من الأعداد معا، وهو ما يسمى بالمتسلسلة اليوم، من الجانب الآخر فعملية الجمع (الإضافة) تتجاوز أعداد واضحة إلى موضوعات أكثر حيوية مثل كثيرات الحدود والعوامل.

الطرح Subtraction

المنظور الرياضي للطرح قد يبدو غريبا من أول وهلة منذ فجر الأرقام السالبة. كل عدد مثل 1 لديه المقابل له أو المعكوس الجمعي (-10) ويصرف هذا عند إضافة الاثنين معا (العدد ومعكوسه) يلغي كل منهما الآخر، ليكون الناتج صفر. ومن ثم عملية الطرح من خطوتين.

فمثلاً لحساب 20-9 لأول مرة فإننا نستبدل 9 مع المعكوس الجمعي لها (-9) وبالتالي إضافة العدد 20 ، (-9) حتى تكون 20 – 9 هي اختصار لـ 20 + (90) وهذا الأمر يكون في الغالب مزعجاً للأطفال، لماذا الترتيب في الجمع (الإضافة) غير ضروري مثل (3+7=7+3) لكن في الطرح الترتيب ضروري $(3 - 7 \neq 7 - 3)$ ؟

عندما نفهم أن الإضافة أمر لا يهم بعد في كل الأحوال 3+ (-7) = (-7) +3 .

إذاً كيف يمكنك طرح الأرقام السالبة مثل -7- (-4)؟ تطبق نفس القواعد، لأول مرة نستبدل (-4) مع معكوسها الجمعي 4 ثم قم بإضافة -7 +4=-3.

الضرب Multiplication

الضرب هو على هيئة الجمع المتكرر، فمثلاً إذا كان كل في أسرة ما معه اثنين من الخرز وهناك أربعة أشخاص في هذه الأسرة. كم عدد الخرز هناك تماما؟ الإجابة 2+2+2+2 أو 2×4 بصورة مختصرة ومن هذا التعريف، فإنه من الواضح أن (ن×م) بالطبع يساوي (م×ن) وهذا حقيقي كما يمكن أن يرى في مجموعة مستطيلة من (m) الأعمدة و (n) الصفوف.

إذا كنت تعد هذه كصفوف (n) وأعمدة (m) من الخرز لكل منهما تحصل على مجموعة. (nxm) ولكن هذا هو (mxn) عندما تنظر إليها على أنها كصفوف m وأعمدة n . فإن ذلك المجموع لا يمكن أن يعتمد على طريقة العد لدينا، وهذه يجب أن يكون مساوى لمصطلح الضرب، والكلمة الانجليزية "of" أو "من" على سبيل المثال.

3 مجموعات من، 7 يكون الناتج 21 هذا لا يزال صالحا للكسور، مثل النصف من ستة هو ثلاثة وتكتب $\frac{1}{2} \times 6 = 3$.

والشائع أن نخلط بين من يعني القسمة هنا الرمز الأكثر شيوعا للضرب هو " × " على الرغم أن علماء الرياضيات وغالب ما يفضل ". " أو حتى أي شيء على الإطلاق 3. س تعني 3 س يعني 3×س لضرب الكثير من الأرقام عندما نستخدم الضرب (لاحظ ناتج الضرب والجمع).

بما أن 3×5=15، ونحن نقول أن 3 هو عامل عوامل العدد 15، و 15 من مضاعفات العدد 3. العوامل الأولية للعد هي البناء الأساسي للعدد، وهو ما أكدته النظرية الأساسية في الحساب.

المجموع وحاصل الضرب Sums and products

افترض أنك تريد إيجاد مجموع الأرقام من 1 إلى 100 فإن كتابة قائمة الأعداد الصحيحة سوف تستغرق الكثير من الوقت والورق، لذلك ابتكر علماء الرياضيات الاختزال واستخدموا الرمز اليوناني سيجما لإيجاد ناتج الجمع.

$$\sum_{j=1}^{100} ز$$

الأرقام على أعلى وأسفل سيجما توضح المدى ز يبدأ في 1 ويأخذ كل قيمة تباعا حتى بعد الصيغة سيجما فإننا نقوم بالجمع.

بما أن في هذه الحالة نحن تجمع أرقام واضحة فقط، وبالتالي إذا أردنا جمع أول 100 مربع كامل فإننا نكتب

$$\sum_{j=1}^{100} ز = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots\cdots\cdots + 100^2$$

إذا كنا نريد أن نضاعف بدلا من الجمع ونستخدم الرمز اليوناني "بي" "Pi" وذلك لإيجاد حاصل الضرب

$$\prod_{j=1}^{100} ز = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots\ldots.. \times 100$$

(هذا يعرف أيضاً باسم 100! (مضروب 100))

القوى (الأسس) Powers

مثلما الضرب هو تكرار الجمع (3×4=3+3+3+3) لذلك الأسس أو القوى يكون الضرب المتكرر $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$ حيث 3 هي القاعدة أو الأساس 4 هي القوة أو الأس بعض القوى لها أسماء خاصة بها مثل: مرفوع للقوة 2 تسمى تربيع، لأن لمربع طول ضلعه × سم فإن مساحته X^2 سم^2 (على سبيل المثال 16 تربيع لـ4)

وبالمثل مرفوع للقوة 3 تسمى تكعيب يمكننا أن نفهم X^n بمعنى $1 \times X \times X \times X \times \ldots$. $\times\ X\ n$ من المرات، وهذا يوحى لنا أن $x^0 = 1 , x^1 = x$ وهذا الاصطلاح مقيد بدلا من النظريات العمية، والطلاب في كثير من الأحيان معارضون لذلك ويتصدون إلى أن x^0 ينبغي أن تساوي صفرا .

قوانين القـوى The laws of powers

ماذا يحدث عندما تضرب القوى معا؟ إذا كان لدينا مفكوك $2^3 \times 2^4$ فإنه يصبح $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^7$ نلاحظ أن 7=3+4

وهذا المثال يوضح أول قانون للقوى

$$x^a \times x^b \times = x^{a+b}$$

بالنسبة للقانون الثاني للقوى نفرض أن $(5^2)^3 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^6$

الملاحظة المهمة أن 6=3×2 بشكل عام

$$(x^a)^b = x^{a \times b}$$

ويمكن أن تمتد الأسس (الضرب) للأسس السالبة ويمكن دراستها في بعض الدروس مثل الأعداد المركبة وقد تعتمد على الدالة الأسية.

القـوى السـالبة Negative powers

لإعطاء معنى للقوى السالبة مثل 10^{-2} فمن المنطقي أولا. أن ننظر إلى نمط القوى الموجبة، ثم نحاول تمديد القاعدة للحصول على أكبر قوة موجبة للعدد 10 وهي الحفاظ على الضرب في 10 فمثلا:

نبدأ بـ $10^1 = 10$ ثم الضرب في 10 مرة أخرى

فإننا نحصل $10^2 = 10 \times 10 = 100$ وبالضرب في 10 فإننا

نحصل على $10^3 = 10 \times 10 \times 10$ وهكذا

نحن نستطيع أن نغير هذه القاعدة رأسا على عقب إذا بدأنا مع $10^6 = 1000\,000$ ثم العد التنازلي للقوى للحصول على القوى الأقل كالآتي نقسم على 10 وهو $= 1000\,000$ $10^5 = 10^6 \div 10 = 100000 \div 10$ ثم نحصل على 10^4 عندما نقسم على 10 مرة أخرى وهكذا نعود إلى $10^1 = 10$ ولكن لا يوجد سبب للتوقف هنا. ولكي نصل إلى القوى الأقل $10^{\text{صفر}}$ تقسم مرة أخرى على 10 لذلك $1^{\text{صفر}} = 10^1 \div 10 = 1$ولو

استمرنا في القسمة فإننا نحصل على القوى السالبة

$$\frac{1}{10} = 10 \div 1 \quad = 10 \div 10^{\text{صفر}} = 10^{1-}$$

$$\frac{1}{1-} = 10 \div \frac{1}{10} \quad = 10 \div 10^{1-} = 10^{2-}$$

ويكون النمط كالآتي .... $10^{-n} = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10^{n}}$ (8 من المرات)

القوى السالبة لـ x تعرف بأنها المعكوس الضربي القوى الموجبة لـ x حيث = (x^{-n}) $(x^{-1})^{n}$

الجذور Roots

ما العدد الذي مربعه 16 ؟ بالطبع الإجابة 4. وبطريقة أخرى 4 4 هو الجذر التربيعي للعدد 16 بنفس الطريقة 3^{3} تساوي للعدد 27 لذلك العدد 3 هو الجذر التكعيبي للعدد 27. بالمثل $2^{5} = 32$ لذلك 2 هو الجذر الخامس للعدد 32 ويرمز للجذر $\sqrt{\ }$. لذلك $2 = \sqrt{32}°$، $3 = \sqrt[3]{27}$. بالنسبة للجذر التربيعي للعدد 2 ، $\sqrt{16}$=4. وممكن كتابة الجذور على هيئة قوى كسرية.

القوى الكسرية Fractional powers

ما معنى القوى الكسرية؟ إذا كان 3^{4} تعني أن 3 ضربت في نفسها 4 مرات لذلك $3^{\frac{1}{2}}$ تعني أن تكون 3 ضربت في نفسها $\frac{1}{2}$ مرة والتي لا تبدو صغيرة جدا، كما تبدو القوى السالبة مفهومة من خلال الدمج مع المعكوس (القوى الموجبة) والقوى الكسرية يمكن أن يكون لها معنى عندما تفسر على أنها جذور، فمثلا: $32^{\frac{1}{5}}$ له قيمة ما بالتالي يجب أن يحقق القانون الثاني للقوى

$$(x^{a})^{b} = x^{axb}$$

خاصة $\left(32^{5\frac{1}{5}}\right) = 32^{5\times\frac{1}{5}} = 32^{1} = 32$ وبالتالي $32^{\frac{1}{5}}$ هو العدد الذي إذا رفع إلى القوى الخامسة، فإن الناتج يكون 32 وهذا يجب أن يعني أن $32^{\frac{1}{5}} = \sqrt[0]{32} = 2$ بالمثل نحن نستطيع أن نكتب $27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$ وأيضا $16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$ وبصفة عامة $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$

ما معنى أن نعطي التعبير مثل $32^{\frac{4}{5}}$ ؟

القانون الثاني للقوى يساعدنا مرة أخرى حيث أن: $\left(32^{\frac{1}{5}}\right)^4 = 2^4 = 16$ بالمثل $27^{\frac{4}{3}} = 3^4 = 81$، وبصفة عامة $x^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{x})^m$

اللوغريتمات Logarithms

وهي مثل الطرح بالنسبة للجمع، والضرب بالنسبة للقسمة، كذلك اللوغاريتمات بالنسبة للقوى (الأسس) $2^3 = 8$ يمكن إعادة صياغتها مثل $_2$لو$^8 = 3$ واضح أن لوغاريتم 8 للأساس 2 يساوي 3. لتقييم $_3$لو81 فإننا نحتاج $3^{??} = 81$ بالطبع الإجابة تكون 4.

يمكن إيجاد اللوغاريتمات لأي عدد موجب لا يساوي الواحد، ولكن هناك قاعدتين شائعتين بشكل خاص، لأن القوى 10 مناسبة لتمثيل الأعداد الضخمة، واللوغاريتم الذي أساسه 10 هو مفيد جدا لقياس ترتيب ضخامة العدد $_{10}$لو n هو تقريبا عدد الأرقام في التمثيل العشري N ويطلق على اللوغاريتم الذي أساسه e باللوغاريتم الطبيعي وهي الأكثر شيوعا في الرياضيات البحتة.

قوانين اللوغاريتمات The laws of logarithms

القانون الأول للقوى ينص على أن $x^a \times x^b = x^{a+b}$ القانون الأول للوغاريتمات المناظر له ينص على

$$\text{Log}(cd)=\log c+\text{Log } d$$

(يجب أن تكون جميع اللوغاريتمات لها نفس الأساس) وللتحقق من ذلك نفرض أن $C = x^a\ , d = x^b$ ، من القانون الأول للقوى بأخذ اللوغاريتم بأننا نحصل على

$$a = \text{Log}_x\, c\,,\quad b = \text{Log}_x d \quad \rightarrow (1)$$

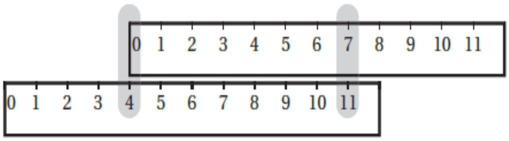
بما أن اللوغاريتمات لها نفس الأساس $cd = x^{a+b}$

لذلك a+b=Log cd بالتعويض من [1]

القانون الثاني للوغاريتمات يناظر القانون الثاني للقوى لأي c و d

$$\text{Log } c^d = d \text{ Log } C$$

قاعدة الشرائح المتحركة Slide rules



في البداية قاعدة الشرائح المتحركة يمكن أن تستخدم في الجمع كالآتي: نأخذ مسطرتين بالسنتميتر ووضعها جنبا إلى جنب إذا كانت ترغب في حساب 4+7 حرك المسطرة العليا كي تكون بدايتها عند 4 في المسطرة السفلي حدد الرقم 7 على المسطرة العليا، ثم قراءة القيمة المناظرة لها في المسطرة السفلية، مع تعديل طفيف تنتج هذه الفكرة البسيطة قاعدة الشرائح للوغاريتمات وكذلك يمكن استخدمها للضرب بدلا من الجمع.

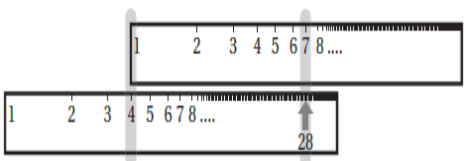
قاعدة الشرائح اللوغارتمية Logarithmic slide rules

قبل اختراع الآلة الحاسبة كانت عملية ضرب الأعداد الكبيرة تستغرق وقتاً ومجهوداً كبيراً وتكون أيضاً عرضه للخطأ. إن قاعدة الشرائح اللوغارتمي، هو الجهاز الذي يستخدم لإيجاد اللوغارتمات بطريقة سهلة وسريعة والعنصر الحاسم والأساسي هو القانون الأول للوغارتمات

$$\text{Log (cd)} = \text{Log c} + \text{Log d}$$

وهذا ينص على اللوغارتم يحول الضرب إلى جمع إذا كان ضرب عددين هو cd فإن Log cd يكون Log c + Log d

قاعدة الشرائح اللوغارتمية تعمل بالشكل الاعتيادي مع فارق واحد مهم بدلا من استخدام المسطرة القياسية والتي فيها 4 تشير إلى 4 سم ثم وضع 4 والتي تشير إلى لوغارتم 4 سم في النهاية (نتيجة واحدة هو أن الحاكم اللوغارتمي يبدأ من 1 بدلا من



صفر لأن لوغارتم 1 = صفر) وفي أعقاب نفس الإجراء لقاعدة الشرائح العادية فإننا نصل إلى النقطة Log 4+ Log 7 على طول المسطرة السفلي وتشير إلى 28.

قاعدة الشرائح اللوغارتمية ممكن أن تعمل على أي قاعدة، ولكن تم تصميمها لأول مرة باستخدام اللوغارتمات بواسطة William oughtred في عام 1620.

علم الحساب ARITHMETIC

الجمع بإعادة التسمية Addition by hand

الاستفادة من وجود نظام جيد للأعداد والذي يتيح اختصارات للحساب لكي تجمع 765 و 123، يمكننا أن نفعل ما هو أفضل بكثير مما ابتدأ 765 ولو من جانب واحد 123 مرة، والفكرة الأساسية هي بسيطة بما فيه الكتابة وهي كتابه العددين رأسيا (أحدهما فوق الأخر) مع الحفاظ على القيمة المكانية للأرقام ثم جمع كل عمود كالآتي:

$$\begin{array}{r} 765 \\ \underline{123 +} \\ 888 \end{array}$$

الصعوبة عندما يكون مجموع الرقمين في العمود الواحد أكثر من 9 لنفرض إننا نريد جمع 56 ، 37. وإنما نبدأ من اليمين من خانة الآحاد في هذه المرة 13=6+7.

والعدد الذي في خانة الآحاد بالتأكيد هيكون 3 وتكتب الإجابة في خانة الآحاد، ويكون لدينا 10، الخطوة الثانية نضيف ما يصل إلى عشرة إلى عمود العشرات، على أي حال نحن نحتاج إلى إضافة واحد إلى عمود العشرات قبل الجمع

$$\begin{array}{r} 56 \\ \underline{37 +} \\ 93 \end{array}$$

هذه الطريقة يمكن تعميمها بسهولة الجمع ما يزيد عن رقمين

$$\begin{array}{r} 339 \\ 389 \\ \underline{+273} \\ 1001 \end{array}$$

الطرح بإعادة التسمية Subtraction by hand

كما هو الحال مع الجمع والفكرة الأساسية للطرح هي محاذاة الأعداد في الأعمدة وطرح عمود ثم الأخر ابتدأ من خانة الآحاد

$$\begin{array}{r} 96 \\ \underline{34\ -} \\ 62 \end{array}$$

في هذه الحالة. نحن قد نواجه مشكلة لكي نأخذ عددا كبير من عدد صغير

$$\begin{array}{r} 73 \\ \underline{58\ -} \\ ??? \end{array}$$

نلاحظ أننا بحاجة إلى أخذ 8 من 3 ونحن لا نستطيع عمل ذلك إلا عن طريق الأعداد السالبة، ومن الأفضل تجنبها باستخدام أسلوب آخر وهو تقسيم العدد 73 إلى 7 عشرات و3 آحاد بدلا من ذلك سوف نكتب بأنه 6 عشرات و 13 آحاد كالآتي:

عشرات	آحاد
6 5	13 8-

الآن يمكننا إجراء عملية الطرح كما سبق ونكتب هذه الطريقة بالشكل

$$\begin{array}{cc} 6 & 13 \\ 7 & 3 \\ 5 & 8- \\ \hline 1 & 5 \end{array}$$

عملية أخذ 1 (الاستلاف) من العمود الآخر قد تتكرر عدة مرات في عملية حسابية واحدة.

الضرب بإعادة التسمية (طريقة الجدول) Multiplication by hand, table method

لو أننا نعرف جدول الضرب بالتالي ضرب عدد مكون من رقم مع عدد آخر مكون من رقم واحد يكون بسيط. مرة واحدة يمكننا فعل هذا. النظام العشري يجعل من السهل إلى حد ما مضاعفة أعداد كبيرة مثلا لحساب 53×7 كالعادة يمكننا تقييم 53 إلى 5 عشرات

و 3 آحاد. المفتاح الحقيقي هو أن نستطيع من ضرب كل جزء على حدة كالآتي (50+3) ×7= (7×50) + (7×3). بعض الناس يستخدموا طريقة الشبكة:

	7
50 3	350 21

لأنها الحساب أننا نضيف (نجمع) كل شيء في الجزء الداخلي من الجدول

371=21+350

وهذه الطريقة تستخدم لأعداد أكبر مثل 123×45:

	40	5
100 20 3	4000 800 120	500 100 15

ولإنهاء الحساب فإننا نجمع 4000+800+120+500+100+15=5535

الضرب بالتقييم طريقة العمود Multiplication by hand, column method

طريقة بديلة لجدول الضرب إجراء الضرب. هي عمود بواسطة عمود بالإضافة أول بأول بدلا من النهاية

$$\begin{array}{r} \underline{13} \\ \underline{5\times} \end{array}$$

نبدأ بضرب عمود الآحاد فإننا نحصل على 15 ونكتب الإجابة في خانة الآحاد 5 وإضافة واحد في خانة العشرات بعد إجراء عملية الضرب في عمود العشرات فإننا نضيف ذلك كالآتي

$$\begin{array}{r} 13 \\ 5\times \\ \hline 65 \end{array}$$

لضرب 13×45 نضرب 40×5 ونضيف الناتج الذي نحصل عليه. نكتب الناتجيين كل منها الآخر ونجمع

$$\begin{array}{r} 13 \\ \underline{45\times} \\ 65 \\ \underline{520+} \\ 585 \end{array}$$

القسمة القصيرة Short division

القسمة القصيرة هي طريقة لتقسيم عدد كبير (المقسوم) من قبل عدد مكون من رقم واحد (المقسوم عليه). الفكرة الأساسية هي أن تأخذ الرقم المقسوم ابتداء من اليسار. وفوق كل رقم نكتب عدد مرات المقسوم الملائم لها:

$$\begin{array}{r} 132 \\ 3\overline{)396} \end{array}$$

وتأتي هذه المضاعفات عندما لا يناسب المقسوم عليه تماما فى احدى الأرقام، ولكن يترك باقي .ففي المثال التالي، 3 تقسم 7 فتعطى 2 والباقى هو 1. فنضع 2 فوق 7 كما سبق ، ويتم وضع 1 فوق العدد التالى ونضع قبله 8، حيث يتم اعتباره 18

$$\begin{array}{r} 026 \\ 3\overline{)7^{1}8} \end{array}$$

وكثيرا ما سيتعين علينا القيام بذلك أكثر من مرة

$$\begin{array}{r} 0\ 3\ 2 \\ 9\overline{)2^{2}8^{1}8} \end{array}$$

ويمكن استخدام القسمة القصيرة مع أعداد مكونة من رقمين مثل 12 أيضاً (بمجرد معرفتك عدد مرات الضرب). في هذا المثال، 12 لا يمكن أن تقسم 9، حيث أن الـ 9 أقل من المقسوم عليه

$$\begin{array}{r} 076 \\ 12\overline{)9^{9}1^{7}2} \end{array}$$

القسمة المطولة Long division

القسمة المطولة هى أساسا نفس عملية القسمة القصيرة. ولكن تصبح عملية القسمة أكبر، حيث يتعين معرفة المزيد من الارقام ، كما سنجد أن حساب الباقي أصبح أكثر طولا. وهى أفضل من القسمة المبعثرة بحمل الباقي، حيث أنها مكتوبة بطريقة طولية . فبدلا من كتابتهم هكذا

$$\begin{array}{r|l} & 0\ 4\ 7 \\ \hline 18 & 8^{8}4^{12}6 \end{array}$$

نقوم بكتابتهم بطريقة طولية هكذا

$$\begin{array}{r|l} & 047 \\ \hline 18 & 846 \\ & \underline{-72\downarrow} \\ & \ \ 126 \end{array}$$

وفى المثال السابق سنجد أن 18 لاتقسم الرقم 8 الموجود فى خانة المئات ، ولكن العدد84 يمكن أن يقسم على 18 فتعطينا 4 حيث 4×18=72 ، ولكن 5×18= 90 فنكتب 4 فى الأعلى ونكتب 72 أسفل العدد 84 ثم نطرح لنحصل على الباقى فيكون 12 إذا كنا نستخدم القسمة القصيرة سيكون علينا وضع هذا الرقم أعلى الخانة التالية، ولكن الخطوة التالية فى القسمة المطولة هى اسقاط الرقم التالى من 846 أي (6) فنحصل على العدد 126 وبقسمته على 18 سنجد الناتج 7 وبذلك نكتب 7 فى الجزء العلوى ونكتب الناتج 126 فى الأسفل وبالطرح نجد أن الناتج صفر وبذلك نكون قد انتهينا.

قابلية القسمة Divisibility tests

كيف يمكنك أن تقول أن عدداً صحيحاً واحداً قابلاً للقسمة على آخر؟ بشكل عام لا يوجد أي أسلوب سهل. ولكن هناك حيل مختلفة للأرقام الصغيرة التي تستغل المراوغات في النظام العشري، وعندنا الأسلوب العادي لكتابة الأرقام. وبعضها من السهل جدا أن نفعله دون تفكير:

- أي عدد يقسم على 2 إذا كان احاده 0، 2،4،6 ،8
- أي عدد يقسم على 5 إذا كان احاده 0 أو5
- أى عدد يقسم على 10 إذا كان احاده 0

وهذا الشئ الوحيد الذى يمتد بسهولة إلى اختبارات قابلية القسمة لـ 100، 1000، وهكذا.

قابلية القسمة على 3، 9 Divisibility by 3 and 9

العدد الصحيح يقبل القسمة على 3 إذا ما كان مجموع الأرقام المكونة للعدد من مضاعفات3. لذلك 123 قابلة للقسمة على 3 لأن 1+2+3=6 ، 6 من مضاعفات3 . ولكن235 لا تقبل القسمة على3 حيث 2+3+5=10 و10 ليست من مضاعفات 3.

وهذه الخدعة تعمل لأن الاعداد تكتب كـ xyz حيث يمكن كتابته على صورة 100X + 10Y+Z وهذا يساوي 99 x + 9 y + x + y + z . والآن البديهى أن 9y+99x بالتأكيد تقبل القسمة على3. وبذلك فيكون العدد الصحيح يقبل القسمة على3، إذاً، وإذا فقط كان x + y + z يقبل القسمة على3. ويبين هذا الدليل أيضاً أن هذه الخدعة تعمل مع الرقم 9. لذلك 972 تقبل القسمة على 9، حيث 9 + 7+ 2 = 18 وهى من مضاعفات9. ولكن 1001 لا تقبل القسمة على 9 حيث 1 + 0 + 0 + 1 = 2 وهى ليست من مضاعفات الرقم 9.

قابلية القسمة على 6 Divisibility by 6

إن قابلية القسمة على 6 هو تكافؤ بسيط لتطبيق القابلية لكل من 2 ، 3 فالعدد الصحيح يقبل القسمة على 6 إذا وإذا فقط كان العدد زوجيا ومجموع أرقامه من مضاعفات الـ 3. لذلك 431 ليست قابلة للقسمة على 6 لأن العدد ليس زوجيا، أيضاً العدد 430 لا بقبل القسمةعلى 6 لأن مجموع أرقامه 7 ليس من مضاعفات3. لكن العدد 432 يقبل القسمة على 6 لانه عددا زوجيا ومجموع أرقامه من مضاعفات 3 (لاحظ أنه لا يلزم أن يكون مجموع أرقام العدد من مضاعفات الـ 6).

القسمة على 2، 4 Divisibility by 2 and 4

يمكن أن نقول ما إذا كان العدد قابلا للقسمة على 2 بمجرد النظر الى آحاده. وهذا يعمل بسبب أن كتابة العدد كـ 'xyz' على صورة 100x+10y +z والآن من البديهى أن 100x+10y دائما يقبلون القسمة على2. لذلك فان الجواب يعتمد فقط على z.

وبالمثل، يمكننا أن نقول ما إذا كان عدد يقبل القسمة على 4 فقط بمجرد النظر في آخر رقمين. لو انها تشكل عددا يقبل القسمة على 4، فيكون العدد الصحيح يقبل القسمة على4. لذلك 1924 قابلا للقسمةعلى 4، لأن 24 تقبل القسمة على 4.ومن ناحية أخرى 846لا تقبل القسمة على4 ، لأنه46 لاتقبل القسمة على 4. مرة أخرى، 'wxyz' يمكن كتباتها على الصورة 1000w+100x+10y+z ومن البديهى أن 1000w+100x دائما يقبلون القسمة على 4، لذلك فلكى يكون العدد ككل قابلا للقسمة على 4 فإن ذلك يعتمد فقط على قابلية 10y+z

قابلية القسمة على 8 Divisibility by 8

إن قابلية القسمة على4 تمتد بسهولة إلى 8، 16، 32 وهكذا. وبالنظر في الأرقام الثلاثة الأخيرة من عدد ما يكفي لتحديد القسمة على8. لذا 7448 يقبل القسمة على 8، حيث أن 448 تقبل القسمة على 8.

ومن المسلم به أن قابلية القسمة هذه تعتمد على معرفة جدول ضرب 8 إلى 1000، ولذلك لا يزال من المفيد عند تحليل أعداد كبيرة جدا لأرقام أصغر، وقد يكون من العملي بقدر أكبر القسمة على 2 ومن ثم تطبيق قابلية القسمة على4.

وبالمثل يتم تحديد الأرقام الأربعة الأخيرة لاختبار قابلية القسمة على 16، وهكذا.

القسمة على 7 Divisibility by 7

تعتبر دراسة قابلية القسمة على 7 من أصعب حيل الأرقام إلى 10 فلمعرفة قابلية قسمة عددا ما على 7 نتبع الخطوات التالية : نأخذ الرقم الموجود بالآحاد ثم نضاعفه، ثم نطرح الناتج من باقى العدد الأصلى، فإذا كان الناتج من مضاعفات 7 كان العدد الأصلى

قابلا للقسمة على 7، كمثال سنبدأ 224 نأخذ الرقم 4 ونضاعفه فنحصل على 8 ثم نطرحها من 22 فينتج 14 وهى من مضاعفات الـ7 لذلك 224 تقبل القسمة على7.

ولأعداد أكبر، قد نحتاج إلى تطبيق هذه الحيلة أكثر من مرة. كمثال سنبدأ بـ 3028 سنأخذ 8 ونضاعفها فنحصل على 16. ثم نطرحها من 302 فنحصل على 286، ثم ونكرر الخطوات فنأخذ 6 ونضاعفها فنحصل على 12 ثم نطرحها من 28 فنحصل على 16. وهذا ليس قابلا للقسمةعلى7 لذلك فالعدد 3028 ليس قابلا للقسمة على 7. وذلك يعمل لأن كل عدد يمكن كتابته كـ 10x+y، حيث y هو الرقم الأخير (وذلك بين 0 ، 9)، و x هوالناتج بعد فصل y. ففى المثال 224، 22 = x، و 4 =y بعد ذلك 10x+y يقبل القسمة على 7 إذا وإذا كان فقط 20x+2y تقبل القسمة على 7. (الضرب فى 2 لا يقبل القسمة على 7) لذلك فالآن سنكتبها على الصورة20x+2y= 21x –x+2y. فمن البديهى أن 21x يقبل القسمة دائما على 7، لذلك فإن قابلية قسمة العدد الأصلي على 7 تعتمد على – x + 2y ، أو مكافئه السلبي x-2y.

القسمة على 11 Divisibility by 11

تعتبر قابلية القسمة على 11 ذو طابع خاص .حيث انها تعمل من خلال اتخاذ مجموعة متناوبة من الأرقام: بإضافة الأولى، وطرح الثانية، وإضافة الثالثة، وهكذا. فإذا كان الناتج يقبل القسمة على11 ، فيكون العدد الأصلي يقبل القسمة على 11. ولدقة أكثر ، نأخذ خمسة أعداد كـ 'vwxyz' على سبيل مثال، وهذا يقسم على 11 إذاً، إذا فقط كان v-w+x-y+z يقبل القسمة على 11. (إذا كان v-w+x-y+z=0 فذلك يصنف كعدد يقبل القسمة على 11) لذلك،لاختبار العدد 5893، نقوم بالحساب التالى 5-8+9-3=3 لذلك العدد لايقبل القسمة على 11.

ويعمل هذا لأن الأرقام التالية هي كلها تقبل القسمة على11: 99, 9999, 999999 وهكذا. من ناحية اخرى 9, 999, 99999... إلخ لاتقبل القسمة على 11، ولكن 11, 1001, 100001 ... إلخ. تكتب 'vwxyz' كـ 10000v + 1000w + 100x + 10y + z, وهذا يساوي 9999v+1001w+99x+11y+v-w+x-y+z .

تلاحظ فى الأعلى أن 9999v+1001w+99x+11y ستكون دائما قابلة القسمة على11. لذلك لمعرفة هل العدد الصحيح يقبل القسمة على 11 ام لا، فذلك يعتمد على x-w+x-y+z .

هذا النظام يزيد الأعداد الصحيحة، وله فوائد رياضية، ففي نظام الأعداد الصحيحة لا تكون عملية القسمة ممكنة دائما؛ حيث يمكنك قسمة 8 على 2 لكن لا يمكنك قسمتها على 3. أما الأعداد النسبية فهي تكون نظاما يطلق عليه المجال (field) وفيه يمكن قسمة أي أرقام بالإضافة إلى جمعها وطرحها وضربها، والاستثناء الوحيد هو الصفر فلا يمكنك أن تقسم عليه (انظر القسمة على صفر).

قابلية القسمة على الأعداد الأولية الأخرى Divisibility by other primes

أفضل طريقة لقسمة الأعداد المركبة هي اختبار كل مكون أولي على حدة، وكل الأعداد الأولية الأخرى يمكن اختبارها بطريقة مشابهة لاختبار العد 7، وهي تتضمن أخذ الخانة الأخيرة، وضربها في ثابت مناسب ثم إضافة أو طرح الناتج من الرقم الأساسي بعد أن حذفت خانته الأخيرة.

- لاختبار قابلية القسمة على 13، خذ الخانة الأخيرة واضربها في 4 وأضف الناتج إلى الرقم المختصر، أي لاختبار قابلية العدد 197 للقسمة على 13 خذ الرقم 7 واضربه في 4 وأضف الناتج إلى 19 ليكون الناتج 47، ولأن هذا العدد لا يقبل القسمة على 13 فإن 197 لا يقبل القسمة على 13 أيضاً.
- لاختبار قابلية القسمة على 17، خذ الخانة الأخيرة واضربها في 5 واطرح الناتج من الرقم بعد حذف الخانة الأخيرة، على سبيل المثال نبدأ بالعدد 272، خذ الرقم 2 واضربه في 5 ليكون الناتج 10 ثم اطرح هذا الناتج من 27 لتحصل على 17 الذي يقبل القسمة على 17 وبالتالي فإن 272 يقبل القسمة أيضاً.
- لاختبار قابلية القسمة على 19، خذ الخانة الأخيرة واضربها في 2 وأضف الناتج إلى الرقم بعد حذف خانته الأخيرة.

يمكن استخدام اختبارات كهذه للأعداد الأولية الأكبر من تلك الأعداد أيضاً.

الفرق بين مربعين Difference of two squares

أحد أسهل الخصائص الجبرية وأكثرها فائدة خاصية الفرق بين مربعين، وهي تقول أن لأي عددين a و b ($a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$) ولا يحتاج إثبات ذلك إلى أكثر من فك القوسين:

$$(a + b)(a - b) = a^2 + ab - ab - b^2$$

وهذا بالمثل ينطبق على أي اتحاد من الأرقام أو المتغيرات الجبرية مثل $15^2-3^2=(15+3)(15-3)$ و $x^2-16=(x-4)(x-4)$ لأن ($16=4^2$). ومن الاستخدامات العديدة لهذه الخاصية استخدامها كوسيلة لتسريع الحساب العقلي.

العمليات الحسابية باستخدام المربعات Arithmetic using squares

من أوائل المهام التي تولى إلى الأشخاص الذين يتدربون على القيام بالعمليات الحسابية بسرعة هي تذكر الأرقام المربعة الاثنين وثلاثين الأولى، فبالإضافة إلى كونها مفيدة في حد ذاتها فإنه يمكن استخدامها أيضاً لضرب أزواج أخرى من الأرقام، والحيلة هنا هي استغلال الفرق بين مربعين.

إذا كان العددان كلاهما زوجيا أو كلاهما فرديًا فسيكون مباشرة هناك عدد واقع بينهما، على سبيل المثال، إذا أردنا ضرب 14×18 نلاحظ أن العدد 16 يقع بينهما، لذلك يمكننا أن نعيد كتابة المسألة في الشكل $(16+2)\times(16-2)$ وهو الفرق بين مربعين هما: 16^2-2^2 وبما أننا نتذكر أن $16^2=256$ فستكون الإجابة 252.

أما إذا كان العددان ليس كلاهما زوجيا أو فرديا فيمكن أن نقوم بالحل على خطوتين، على سبيل المثال لحساب 15×18 فإننا نجزأها إلى $14\times18+18$ وسبق أن حسبنا بالأعلى $14\times18=252$ وبالتالي $15\times18=252+18=270$.

طرح العدد تسعة Casting out nines

يعتبر طرح العدد تسعة وسيلة مفيدة للكشف عن الأخطاء الحسابية، والفكرة الأساسية هي جمع خانات العدد ثم طرح العدد 9 كلما أمكن وذلك لعدة مرات حتى نحصل على

رقم من 0 إلى 8، وبالتالي إذا بدأنا بـ 16.987 فإننا نجمع 6+1 لنحصل على 7، ويمكن إهمال ال 9 التالية ثم إضافة 8 ليصبح الناتج 15 ثم نطرح 9 لنحصل على 6 ونجمع 7 لنحصل على 13 ثم نطرح 9 فيكون الناتج 4، ويمكن أن نكتب 4=(N(16,987.

الهدف من ذلك هو أننا إذا حسبنا 16,987+41,245 على أنها 58,242 فيمكننا المراجعة عليها كالتالي: 4=(N(16,987، و 7=(N(41,245 وبجمعهما معا وطرح 9 مجددا نحصل على قيمة N للمسألة 4+7-9=2. في حين أن إجابتنا تعطي 3=(N(58,242 وبما أنهما ليستا متطابقتين نعرف أننا قد أخطأنا، والإجابة الصحيحة هي 58,232.

ويمكن استخدام الحيلة نفسها في الطرح والضرب وقسمة الأعداد الصحيحة، على سبيل المثال، إذا حسبنا 637×845 على أنها 538,265 فإننا نحسب 8=(N(845 و 7=(N(637 وضربهما معا يعطي 56 وبتكرار العملية نحصل على نتيجة للطرف الأيسر تساوي 2=9-6+5=(N(56 وبما أن 2=(N(538,265 أيضاً فإن الطرفين منطبقان وبذلك يكون الاختبار قد نجح. إن هذه الوسيلة تصل إلى التأكد من الإجابة في الحساب من النمط 9.

وهي مفيدة في اكتشاف الأخطاء إلا أنها تعطي أعداداً سالبة مزيفة (على سبيل المثال، لا يمكنها اكتشاف تبديل خانة مكان أخرى في الإجابة).

حساب تراتينبرغ Trachtenberg arithmetic

كان جاكو تراتينبرغ عالم رياضيات ومهندسًا روسي الجنسية هرب إلى ألمانيا عقب ثورة 1917، وهو يهودي ومن دعاة السلم الواضحين، ألقي القبض عليه وسجن في معسكر اعتقال بعد ظهور النازية، وأثناء فتره حبسه التي دامت سبع سنوات وضع نظامًا جديدًا لإجراء الحساب العقلي مع التركيز على السرعة، وهذه الأساليب تشكل أساس الحساب السريع، ومن أمثلة ذلك طريقة تراتيتنبرغ للضرب في 11.

في عام 1944 تهرب تراتينبرغ بمساعدة زوجته من حكم بالإعدام، وفر هاربًا إلى سويسرا وهناك أسس المعهد الرياضي في (زيورخ) وعلم أساليبه لأجيال من الطلاب.

طريقة تراتينبرغ للضرب في 11 Trachtenberg multiplication by 11

من أمثلة حساب تراتينبرغ ضرب الأعداد الكبيرة مثل 726,154 في 11. نأخذ خانات العدد 762,154 من اليمين إلى اليسار، ونبدأ بإنزال الخانة الأولى: 4 ثم نجمع أول خانتين 4+5 لنحصل على 9، حتى الآن لدينا 94، وبعد ذلك نجمع الخانتين الثالثة والرابعة 5+1 لنحصل على 6 فنصل إلى 694، ونستمر في جمع الخانات مثنى مثنى إلى أن نصل إلى 2+ 7 ونحصل على 9 فنصل إلى 987,694، والخطوة الأخيرة هي نقل الرقم الأخير 7 وإنزاله وبذلك تصبح الإجابة 7,987,694.

العامل المعقد الوحيد هو عندما يكون مجموع خانتين مساويًا 10 فأكثر، فعلى سبيل المثال لضرب 78×11 نكتب أولا 7، والآن مجموع 7، و8 يساوي 15، لذلك نكتب 5 ونحتفظ بـ 1 للخطوة القادمة،إلى ذلك يكون لدينا 57 والخطوة الأخير تكون عادة كتابة الخانة الأخيرة وهي 8 لكن هذه المرة لابد من إضافة الرقم الذي احتفظنا به من الخطوة السابقة وهو 1 وبذلك تصبح الإجابة النهائية 957.

من الممكن تلخيص هذه الطريقة: "أضف كل خانة إلى الخانة المجاورة." حيث الخانة المجاورة تعني الخانة التي على يمينها. مع القليل من التمرن على هذه الطريقة سيصبح الضرب في 11 عفويا إلى حد كبير. وقد اخترع جاكو تراتينبرغ طرقًا مشابهة لهذه الطريقة للضرب في جميع الأرقام من 1 إلى 12، على سبيل المثال، القاعدة المناظرة للضرب في 12 هي: اضرب كل خانة في 2 ثم أضف الناتج إلى الخانة المجاورة.

أنظمة الأعداد NUMBER SYSTEMS

أنظمة الأعداد Number systems

أقدم أنظمة الأعداد هو النظام الذي استخدمه البشر لعد الأشياء لآلاف السنين: نظام الأعداد الطبيعية ط الذي يتكون من ....,5 ,4 ,3 ,2 ,1 ,0 ومع تقدم الحضارات ظهرت حاجة ملحة إلى أنظمة أرقام أكثر تعقيدًا، فلحساب الأرباح والديون نحتاج إلى تضمين الأعداد السالبة، والذي نتج عنه مجموعة الأعداد الصحيحة (ص).

ليس كل شيء قابلا للقياس باستخدام الأعداد الصحيحة، فمثالان مثل نصف يوم وثلثي متر يظهران الحاجة إلى نظام يتوسع إلى ماهو أشمل من الأعداد الصحيحة، وفي الوقت الحاضر يعرف النظام الذي يجمع بين الكسور والأعداد الصحيحة باسم نظام الأعداد النسبية (ن) وقد اكتشف الفيثاغورثيون أن الأعداد النسبية ليست كافية لقياس جميع الأطوال، وبملء الفجوة بين الأعداد النسبية توصلنا إلى مجموعة الأعداد الحقيقية (ح)، وفي القرن السادس عشر أدرك علماء الجبر الإيطاليون أثناء عملهم على حل المعادلات أن هذه المجموعة لا تزال غير كافية. أما نظام الأعداد الذي ينتج من إدخال الجذر التربيعي للعدد −1 يطلق عليه نظام الأعداد المركبة (C).

أنظمة الرياضيات Mathematical disciplines

يمكن دراسة كل نظام أعداد على حدة وبحثه بمصطلحاته الخاصة، وقد توصل علماء الرياضيات إلى أشكال كل منها وخواصها. تبدو مجموعتا الأعداد الطبيعية والنسبية مباشرتين للوهلة الأولى لكنهما شديدتا التحفظ وتمثلان صعوبة شاقة عند العمل عليهما، وهذا هو عالم نظرية الأعداد، وفي الناحية المقابلة، تسبب مجموعة الأعداد المركبة حيرة لمن ينظر إليها من بعد ولكنها تكافيء الأشخاص الذين يمتلكون الشجاعة الكافية لمعرفتها ببساطتها وقوتها المذهلتين، وقد كان تحليل الأعداد المركبة أحد انتصارات علم الرياضيات في القرن التاسع عشر.

وفي المنتصف توجد مجموعة الأعداد الحقيقية والتي تمثل المجال المناسب لفهم الأطوال وهو الأمر الذي أدركه قدماء اليونان لأول مرة ، وقد بني الكثير من علم الهندسة والطبولوجيا من الأعداد الحقيقية (ح).

الأعداد الطبيعية Natural numbers

في كهف وسط سلسلة جبال الليبومبو في (سوازيلاند) عثر علماء الآثار في السبعينيات على عظام ساق البابون محفور عليها 29 علامة لقد استخدمت كعصا للحساب والرقم 29 يشير إلى التقويم القمري، وبذلك تصبح عظمة الليبومبو التي ترجع إلى عام 35000

قبل الميلاد هي أقدم قطعة رياضية نملكها، وهي توضح نظام الأعداد الأول الذي استخدمه الإنسان في العد لآلاف السنين: إنها الأعداد الطبيعية

0, 1, 2, 3, 4, 5,….

يعرف نظام الأعداد الطبيعية بـ (ط)، ومن الناحية النظرية، السمة المحددة لـ (ط) هي الاستنتاج الرياضي، وهو يقول أن تقريبًا عند البدء بصفر وإضافة 1 بشكل متكرر فإننا في النهاية نكون قد وصلنا لكل الأرقام، وفي الحقيقة هناك خلاف بين علماء الرياضيات حول ما إذا كانت ط تتكون من 0, 1, 2, 3, 4, 5,…. أم 0, 1, 2, 3, 4, 5,….، ونقطة الخلاف هي كون العدد صفر عددًا طبيعيا أم لا.

ما قبل العدد صفر The prehistory of zero

ذلك الرقم الذي نسميه صفرًا استغرق عدة سنوات حتى أصبح مقبولًا كرقم قائم بذاته، لقد تطلب التفكير في الصفر الذي يمثل لا شيء في صورة شيء ما قفزة تخيل، وكان المحرك وراء وجود الصفر ظهور تعبير القيمة المكانية. بالطبع يوجد عدد غير منته من الأرقام لكننا لا نريد اختراع المزيد من الرموز دائما لوصفها، في الوقت الحاضر نستخدم الرموز من 1 إلى 9 فقط بالإضافة إلى الصفر لوصف أي رقم من خلال جعل موضع الرقم ناقلا لمعلومة ما تماما مثلما ينقل الرمز معلومة ، وبذلك فإن ال 5 في العدد 512 تعني خمسمائة، بينما في العدد 54 تعني خمسين "خمس عشرات".

هذا نظام بارع لكن ما الذي يحدث إذا لم يكن لدينا عشرات، كما في العدد مائتين وثلاثة؟ ببساطة، ترك البابليون القدماء فراغات، بالتالي ربما يكونوا قد كتبوا (3 2) (بالطبع لم يستخدموا الأرقام العربية أو الأساس 10 لكن هذا مثال لتوضيح الفكرة فحسب)، والمشكلة واضحة حيث سيكون من الممكن الخلط بينها وبين 23 وبحلول القرن الثالث قبل الميلاد تحايل البابليون بالاشتراك مع حضارات أخرى عن طريق استخدام رمز لحفظ المكان يشير إلى العمود فارغ. لقد كان لدى قدماء الصينيين الصفر كمبدأ رياضي وفي الحقيقة العدد السالب أيضاً لكن تعبيرهم البدائي أصبح متخلفًا أمام هذا الفهم الأعمق.

صفر براهماجوبتا Brahmagupta's zero

كانت الهند هي المكان الذي اجتمع فيه التدوين البابلي، والمفهوم الصيني للرقم صفر في نهاية المطاف ليظهر الصفر كرقم مستقل وفي عام 628 بعد الميلاد، عرفه براهماجوبتا تعريفًا رسميا على أنه:

ناتج طرح أي عدد من نفسه

قد تبدو رؤيته الحسابية واضحة في الوقت الحاضر إلا أنها مثلت طفرة في تاريخ الفكر البشري: "عند إضافة الصفر إلى عدد ما أو طرحه فإن العدد يبقى كما هو دون تغيير، وعند ضرب عدد ما في صفر فإن الناتج صفر."

وقد مهد عمل براهماجوبتا النظرية الأساسية للأعداد السالبة إلا أن ذلك استغرق وقتا طويلا حتى يكتسب قبولا واسعا.

انتماء الصفر لمجموعة الأعداد الطبيعية The naturalness of 0

في تاريخ الرياضيات العديد من الخلافات الملحوظة مثل غوتفريد لايبنيز وإسحاق نيوتن الذين تجادلا بشدة حول علم حساب التفاضل والتكامل ومن أكثر الخلافات الدائمة وأقلها إثارة و أقلها في احتمالية الحل هو الخلاف حول ما إذا كان الصفر يجب أن يصنف عددا طبيعيا أم لا. لم يكن الشخص الذي قام بحفر العلامات على عظمة الليبومبو ليفكر في ذلك؛ إن علماء الرياضيات الحديثة منقسمون. هذا الكتاب يتبنى بشكل عام فلسفة تشبه المذهب البوذي وهي أن الصفر مثال للأعداد الطبيعية لكن في بعض الحالات يؤدي ذلك إلى ظهور مشكلة أن الصفر هو العدد الطبيعي الأول و 1 هو العدد الثاني و 2 هو العدد الثالث وهكذا، وبالتالي فإن عند التعامل مع المتتاليات على سبيل المثال فإنه من الأنسب استبعاد الصفر.

الربح والدين Profi t and debt

إذا كانت الأرقام تستخدم بشكل أساسي في العد، إذًا ماذا تعني الأرقام السالبة ؟ كيف يمكن أن يكون لديك 3- من التفاحات؟ الأصل المرجح للأعداد السالبة هو

التجارة حيث تمثل الأرقام الموجبة الربح بينما تمثل الأرقام السالبة الدين. لقد مثل علماء الرياضيات الصينيين القدامى الأعداد بأعود للعد واستخدموا الأعواد الحمراء والسوداء للتمييز بين الأعداد الموجبة والسالبة على الترتيب. (وقد عكست هذه الألوان في العالم الغربي وأصبحت العبارتان (in the black)و (in the red) تعنيان (دائن) و (مدين) على الترتيب).

الأعداد السالبة Negative numbers

على الرغم من الأصل القديم للأعداد السالبة إلا أنها اعتبرت لفترة طويلة محلا للشك حتى بدايات القرن التاسع عشر، فقد نظر إليها الكثير من الناس على أنها اختصار لشيء آخر (كمية موجبة من الديون بدلا من كمية سالبة من الأرباح) بدلا من اعتبارها أرقام قائمة بذاتها وقد قنع العديد من علماء الرياضيات بتوظيفها كأدوات في الحساب لكن إذا كانت النتيجة النهائية سالبة فإنها غالبا تهمل وتعتبر غير صحيحة. (ظلت الأعداد المركبة أيضاً في حالة مماثلة من عدم التحديد لعدة اعوام) إلا أن هذا الأمر تحدد في 628 حين كتب عالم الرياضيات الهندي راهماجوبتا أطروحته عن الحساب المشترك للأعداد الموجبة والأعداد الصحيحة السالبة والصفر والذي نسميه الآن نظام الأعداد الصحيحة.

الأعداد الصحيحة Integers

الأعداد الصحيحة هي جميع الأعداد الصحيحة الموجبة والسالبة والصفر، ويعرف هذا النظام (Z) التي ترمز إلى كلمة (Zahlen) والتي تعني (الأعداد) باللغة الألمانية. إن ما يميز مجموعة الأعداد (Z) هو أن الكميات مثل درجة الحرارة التي تقع على جانبي الصفر يمكن قياسها وبالمثل يمكن قياس الأرباح والديون على مقياس واحد.

ومن وجهة نظر علم الرياضيات فإن المجموعة (Z) أفضل من النظام الأصغر للأعداد الطبيعية ط. ويمكن أن تجمع الأعداد الطبيعية دون أن يخرج نطاق الناتج عن مجموعة الأعداد الطبيعية إلا أنها لا يمكن طرحها دائما ، فإذا أردت حل 3-2 فستخرج عن نطاق نظام الأعداد الطبيعية أما في نظام الأعداد الصحيحة فيمكن طرح أي رقمين (b-a).

وهذا أيضاً يسمح بحل معادلات أكثر ، فعلى سبيل المثال 2=3+x معادلة مكونة فقط من أعداد طبيعية لكن ليس لها حل في هذا النظام أما في نظام الأعداد الصحيحة فلها حل، وفي الواقع يمكن الآن حل أي معادلة (x+a=b) دون الخروج عن مجموعة الأعداد الصحيحة (Z).

الأعداد النسبية Rational numbers

أي عدد يمكن التعبير عنه في صورة كسر مكون من أرقام صحيحة يسمى عدد نسبي (بمعنى أنها نسب وليس المقصود أنها منطقية أو عقلانية)، ومن أمثلة ذلك 2 (لأنها تساوي 2/1) و 8/17 و 3/4-. والسبب وراء ابتكار هذه الكسور واضح؛ حيث تتضح فوائدها في قياس الزمن، أو المسافات أو الموارد وكذلك الكميات مثل: نصف شهر، أو ثلث ميل، أو ثلاثة أرباع جالونا. يشير علماء الرياضيات إلى النظام الذي يضم جميع الأعداد النسبية بالرمز Q (يرمز إلى كلمة خارج القسمة في اللغة الإنجليزية quotient).

هذا النظام يزيد نظام الأعداد الصحيحة كما يجلب فوائد رياضية. ففي نظام الأعداد الصحيحة لا تكون عملية القسمة ممكنة دائما؛ حيث يمكنك قسمة 8 على 2 لكن لا يمكنك قسمتها على 3. أما الأعداد النسبية فهي تكون نظاما يطلق عليه المجال (field). وفيه يمكن قسمة أي أرقام، بالإضافة إلى جمعها وطرحها وضربها، والاستثناء الوحيد هو الصفر فلا يمكنك أن تقسم عليه) انظر القسمة على صفر.

الأعداد الحقيقية Real numbers

المسافة بين الأعداد الصحيحة ثابتة؛ حيث أن المسافة بين أي عدد صحيح والعدد التالي له تساوي الوحدة، لكن ذلك لم يعد صحيحا للأعداد النسبية؛ حيث أنها يمكنها قياس مسافات أصغر. إذا بدأنا بالعدد 1 فلن يكون هناك ما يطلق عليه العدد النسبي "التالي". هناك $1+\frac{1}{10}, 1+\frac{1}{3}, 1+\frac{1}{2}$ و $1+\frac{1}{20,000}$ وأعداد نسبية قريبة من الواحد كيفما تشاء، وبالتالي سيبدو غريبا أن تصر أن مع ذلك هناك فجوات بين الأعداد النسبية، لكن ذلك صحيح كما يظهر من عدم نسبية العدد $\sqrt{2}$.

عند رسم المنحنى البياني للمعادلة ($y = x^2 \ \ 2$) ستجد أن المنحنى عند المواضع التي يجب أن يقطع فيها محور (x) يدخل إلى فجوة في الأعداد النسبية.

ملء هذه الفجوة إجراء تكنيكي ينتج عنه نظام الأعداد الحقيقية (R) ، والذي يعرف أيضاً بخط الأعداد الحقيقية (real line)، ويمكن تصوره على أنه كل النقط الواقعة على خط غير منته أصبح كاملا الآن، مما يعني أنه ليس به فجوات.

هناك طريقة أخرى لتصور نظام الأعداد الحقيقية على أنها مجموعة جميع المفكوكات العشرية الممكنة. ابدأ بعدد صحيح وليكن ‎-14، ثم ضع علامة عشرية متبوعة بأي عدد غير منته من الخانات: (‎−14.6936027480.) لكن كن حذرا، لأن بعض الأعداد مثل (0.99999999.) لها أكثر من مفكوك عشري واحد.

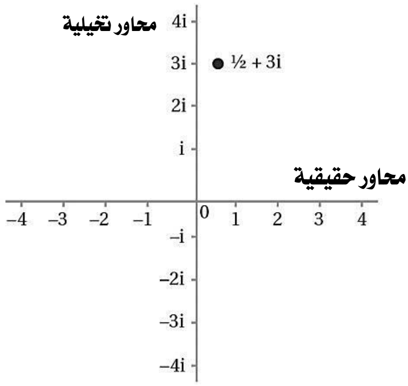
الأعداد التخيلية Imaginary numbers

في القرن السادس عشر في إيطاليا انصب اهتمام المجتمع الرياضي على حل المعادلات التكعيبية، ومعادلات الدرجة الرابعة، وكان العائق أمام ذلك أن بعض المعادلات البسيطة مثل ($x^2=1$)، ليس لها أي حل في نظام الأعداد الحقيقية، وقد نتج ذلك عن قواعد ضرب الأعداد السالبة، حيث لا يوجد عدد حقيقي يعطي عند تربيعه عددا سالبا. اكتشف علماء الجبر الإيطاليون أنهم إذا تخيلوا حلا لهذه المعادلة بكل بساطة، وأطلقوا عليه (i)، فسيتمكنوا من استخدام هذا الحل في حساباتهم وقد ينتج عنه نتائج دقيقة وحقيقية لحل معادلات أخرى.

مضاعفات (i) بأعداد حقيقية مثل: ($-\frac{1}{2}i, \pi i, 3i$) تسمي أعدادا تخيلية، مصطلح الأعداد "التخيلية" بالتضاد مع الأعداد "الحقيقية" مصطلح مضلل ويؤسف له إذا فهمت تسميته من الناحية التاريخية.

نظام الأعداد المركبة، الذي وضعه رفايل بومبيلي (Rafael Bombelli) عام 1572 على أساس قوي، هو موطن الأعداد التخيلية، وفي حقيقة الأمر نعلم أن نظام الأعداد المركبة يمكن بناؤه من الأعداد الحقيقية بطريقة مباشرة وصريحة ، والحقيقة أن (i) ليس عددا تخيليا يفوق (π) أو (-3) في شيء إلا إنه لسوء الحظ علقت به هذه التسمية.

الأعداد المركبة Complex numbers



يتكون نظام الأعداد المركبة (C) رسميا من إضافة الأعداد التخيلية إلى الأعداد الحقيقية، وفي حقيقة الأمر العدد المركب ليس إلا عدد حقيقي مثل ($\frac{1}{2}$) مضاف إلى عدد تخيلي مثل (3i) فيصبح ($\frac{1}{2}$ 3i+) عددا مركبا، وهذه الأعداد المركبة يمكن جمعها، وطرحها، وضربها، وقسمتها وفقا لقواعد الحساب المركب.

مخطط أرجاند (The Argand diagram)، هو الطريقة القياسية لتمثيل العدد المركب في المستوى ثنائي الأبعاد بالتالي تبدو الأعداد المركبة مثل الإحداثيات الديكارتية المألوفة، حيث يكون المحور الحقيقي أفقيا، ويكون المحور التخيلي رأسيا، والمستوى المركب يمثل إطارا رائعا للهندسة، حيث تنسجم فيه الأفكار الهندسة والجبرية انسجاماً تاماً.

تشكل الأعداد المركبة نقطة نهاية تطور مفهوم العدد، فالمبرهنة الأساسية في الجبر تقول أنها توفر كل ما يمكن أن يكون مطلوبا بالنسبة لحلول المعادلات كثيرة الحدود.

الرباعيات Quaternions

في لحظات حاسمة في التاريخ، أعاد علماء الرياضيات النظر في ماهية العدد، ومن اللحظات الفارقة: اكتشاف الصفر، والأعداد السالبة والنسبية، وتشكل الأعداد المركبة نقطة توقف طبيعية لهذه الامتداد، حيث تقول المبرهنة الأساسية في الجبر أن كل المعادلات التي نود حلها يوجد لها حلول في الأعداد المركبة، فبإمكاننا تمديد الأعداد المركبة إلى نظام أكبر.

تتكون الأعداد المركبة من أزواج من الأعداد الحقيقية (a, b) بالإضافة إلى مكون جديد هو (i) الجذر التربيعي للعدد (-1). أي عدد مركب يمكن كتابته على الصورة (a + ib). وعام 1843 اكتشف السيد ويليام هاملتون (Sir William Hamilton) نظاما

قائما على رباعيات (quadruples) من الأعداد الحقيقية (a, b, c, d) مصحوبة بثلاثة مكونات جديدة هي (i)، و(j)، و(k)، وكل رباعي يمكن كتابته على الصورة ($a + ib + jc + kd$.)، والقاعدة الأساسية للرباعيات هي ($i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$). كان هاملتون متحمسا جدا لاكتشافه إلى درجة حدت به إلى حفر هذه المعادلة على كوبري بروم في دبلين. (لازالت هناك لوحة تحيي ذكرى ذلك في هذا المكان).

هناك ثمن يجب أن يدفع نظير هذا التوسع، فعملية الضرب الآن لم تعد إبدالية، فليس صحيحا دائما أن ($A \times B = B \times A$)، بالتالي فإن الرباعيات تكنيكيا لا تكون مجالا. أصبحت الرباعيا بعد اكتشافها موضوعا رئيسيا في علم الرياضيات. وعلى الرغم من أن شهرتها ضعفت بعد ذلك، إلا أنها لا تزال مستخدمة إلى الآن فهي تستوعب بدقة سلوك الدورانات في الأفضية ثلاثية ورباعية الأبعاد.

الثمانيات Octonions

عندما اكتشف السيد ويليام هاملتون نظام الرباعيات، كتب إلى صديقه جون جرافز (John Graves) يشرح له إنجازه، فرد عليه جرافز قائلا: "إذا كان في إمكانك استخدام الكيمياء لتركيب ثلاثة أرطال من الذهب، لم تتوقف عند هذا الحد؟"

وإيفاء من جرافز بكلمته توصل إلى نظام أكبر يُعرف الآن باسم الثمانيات، وهو يتكون من ثمانيات من الأعداد الصحيحة ($a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7$) مصحوبة بسبعة مكونات جديدة ($i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6,i_7$) جميعها تربيع للعدد -1، بالتالي يكون الثماني العام على الشكل: ($a_0 + i_1a_1 + i_2a_2 + i_3a_3+ i_4a_4 + i_5a_5+ i_6a_6+ i_7a_7$).

مبرهنة هورفيتز Hurwitz's theorem

خرج علينا هامليتون بالرباعيات، وجرافز بالثمانيات، إلى أي مدى يمكن أن يمضي هذا التعميم قدما؟ أثبت أدولف هورفيتز (Adolf Hurwitz) عام 1898م أن ما تم التوصل إليه هو أقصى ما يمكن، وأن الأعداد الحقيقية، والمركبة، والرباعيات، والثمانيات هم الأربعة أنظمة الوحيدة التي يطلق عليها جبر التقسيم المنظم: وهي بنية تضم الأعداد

الحقيقية التي تسمح بإجراء عمليتي الضرب والقسمة، بطريقة معقولة هندسيا.وقد وصف عالم الفيزياء الرياضية جون بيز (John Baez) هذه العائلة عام 2002:

> الأعداد الحقيقية هي معيل الأسرة الذي يمكن الاعتماد عليه، وهي المجال المكتمل المنظم الذي نعتمد عليه جميعا، أما الأعداد المركبة فهي أكثر بهرجة قليلا، إلا أنها تمثل الأخ الأصغر الذي تكن له الأسرة الاحترام: ليست مرتبة ولكنها مكتملة جبريا، والرباعيات هي ابن العم المنبوذ في التجمعات العائلية؛ لأن عمليات الضرب فيها غير إبدالية، لكن الثمانيات هي العم المجنون العجوز الذي لا يسمح له أحد بالخروج من العلية: فالعمليات فيها لا تتميز بخاصية التجميع (Non-associative).

لا تتميز بخاصية التجميع: تعني أنك إذا قمت بضرب ثلاثة ثمانيات (A), (B), (C). قد تجد أن (A×(B×C)≠(A×b)×C)، وهذا هو انتهاك لأحد أهم القوانين الجبرية الأساسية، وعلى الرغم من جنون الرباعيات والثمانيات فهي مفيدة في تفسير شواذ رياضية أخرى، مثل مجموعات لأي الاستثنائية.

الأعداد النسبية RATIONAL NUMBERS

المقلوبات Reciprocals

تعرف باسم المعكوسات الضربية. المقلوب هو العدد الذي تحتاج الضرب فيه ليكون حاصل الضرب 1، بالتالي مقلوب العدد 2 هو ($\frac{1}{2}$)، والعكس صحيح. يسهل الحصول على مقلوب الكسر: فقط اقلب الكسر، بالتالي مقلوب ($\frac{5}{7}$) هو ($\frac{7}{5}$).

يرمز لمقلوب (X) بالرمز ($\frac{I}{X}$) أو (x^{-1}) على الرغم أن بالنسبة لعلماء الرياضيات (إذا لم يكونوا مؤرخين)، فالقلب (Reciprocation) فكرة أساسية تتخطى مجرد القسمة أو أخذ القوى السالبة، فهو أيضاً بمثابة مرآة بين الأعداد الكبيرة والصغيرة، فمثلا مقلوب 1 مليون هو واحد من المليون والعكس صحيح. وهناك رقم واحد ينفرد بأن ليس له مقلوب؛ حيث لا توجد قيمة لـ (X) تحقق ($x \times 0 = 1$)، لذلك فإن (الصفر) ليس له مقلوب.

القسمة Division

تحدد القسمة عدد المرات التي يسع بها رقم رقما آخر، لذلك ($15 \div 3 = 5$) لأن العدد 15 يتسع للعدد 3 خمس مرات تماما: $15 = 3 \times 5$. وهذا ينطبق أيضاً على الكسور، وبالتالي ($\frac{1}{4} \div \frac{1}{2} = 2$) لأن ($\frac{1}{2}$) تتسع $\frac{1}{4}$ مرتين تماما.

وهناك نظرة بديلة لعملية القسمة وهي رؤيتها باعتبارها العملية الأساسية للقلب (Reciprocation) (بالطبع الإشارة باستخدام المقلوب هي المرجحة أكثر من قول خارج قسمة 1 على 4).

ويمكن أن نفهم ($m \div n$) باعتبارأن (m) مضروبة في مقلوب (n) بمعنى أن ($m \times \frac{1}{n}$)، وبالتالي ($15 \div 3 = 15 \times \frac{1}{3} = 5$)، و($\frac{1}{2} \div \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times 4 = 2$) وهذا يمتد بسهولة إلى كسور أكثر عمومية ، وبالتالي ($\frac{2}{5} \div \frac{3}{4} = \frac{2}{5} \times \frac{4}{3} = \frac{8}{15}$) .

الكسور المكافئة Equivalent fractions

في عالم الأعداد الصحيحة هناك طريقة واحدة للتعبير عن أي رقم: 7 هي 7، ولا يمكنك كتابتها بأي طريقة أخرى (قد يعترض جيمس بوند على ذلك قائلا أنها يمكن أن تسبق بأصفار 00007، لكن ذلك لا يمثل أي غموض حقيقي). عندما ندخل إلى عالم الأعداد النسبية الذي يمكن أن نطلق عليه عالم الكسور يحدث شيء غير ملائم، فهناك العديد من الطرق التي تعبر بصدق عن نفس الرقم، فعلى سبيل المثال ($\frac{2}{3}$) تمثل نفس الرقم الذي تمثله ($\frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{14}{21}$) وحشد آخر من الكسور التي لا تبدو مباشرة أنها الكسور نفسها، وهذا هو ما يسمى بالكسور المكافئة. وإذا بدأت برقم ما ثم قمت بضربه في 2 ثم قسمت الناتج على 2 فمن المتوقع أن تعود إلى القيمة التي بدأت بها، وهذا يؤدي إلى قاعدة الكسور المكافئة: فإذا قمت بضرب البسط في أي عدد لا يساوي الصفر وقمت بضرب المقام في نفس العدد فستحصل على كسر مكافئ، وبالتالي: ($\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$) لأن ($\frac{4}{6} = \frac{2\times2}{3\times2}$).

وبالنظر إلى عكس ذلك؛ إذا كان كل من البسط والمقام يقبل القسمة على عدد ما، فيمكنك دائما تبسيطهما معا للحصول على كسر مكافئ: ($\frac{12}{15}$) يمكن تبسيطه لأن كل من

(12)، (15) قابل للقسمة على 3، وهذا يسمى التبسيط (simplifying) وينتج عنه الكسر المكافئ ($\frac{4}{5}$). في معظم الاستخدامات، يكون أفضل (أبسط) تمثيل للكسر عندما تكون جميع التبسيطات الممكنة قد أجريت، بحيث لا يكون هناك عوامل مشتركة بين البسط والمقام بعد ذلك (أي يكونوا في أبسط صورة (coprime))، وإحدى نتائج المبرهنة الأساسية في الحساب أن هذه التمثيل دائما موجود وهو تمثيل منفرد.

ضرب الكسور Multiplying fractions

القاعدة الأساسية لضرب الكسور بسيطة: اضرب البسط، واضرب المقام، وبالتالي ($\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{2\times4}{3\times5} = \frac{8}{15}$.)، وهناك طريقة مختصرة هي أن تقوم بكل الاختصارات الممكنة قبل البدء في الضرب بدل من القيام بذلك بعد الضرب، أي أن بدلا من أن تحسب ($\frac{21}{8} \times \frac{2}{15} = \frac{42}{120}$) ثم تقوم بالتبسيط تلاحظ أن كل من البسط والمقام قابل للقسمة على 2 و3، وبالاختصار تحصل على ($\frac{1}{5} \times \frac{7}{4} = \frac{7}{20}$).

جمع الكسور Adding fractions

من أكثر الأخطاء الشائعة التي يرتكبها التلاميذ هي اعتقاد أن ($\frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{3}{7}$). المنطق المستخدم واضح، لكن بتجربة فكرية صغيرة سيتلاشي ذلك: ف($\frac{1}{2}$) الكعكة بالإضافة إلى ($\frac{1}{4}$) الكعكة بوضوح يعطينا ($\frac{3}{4}$) الكعكة وليس ($\frac{2}{6}$) منها.

بعض الكسور يسهل جمعها: الكسور التي لها الرقم نفسه في المقام أي لها مقام موحد؛ حيث من البديهي جدا القول أن ($\frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$). لجمع كسرين آخرين علينا أولا أن نجد كسرين مكافئين لهما مقاما موحدا، وعندما يكون أحد المقامين من مضاعفات الآخر يكون الأمر مباشرا، فمثلا لحساب ($\frac{3}{7} + \frac{5}{14}$) نقوم أولا بتحويل ($\frac{3}{7}$) إلى كسر مقامه 14 تحديدا ($\frac{6}{14}$)، فيصبح بإمكاننا الجمع ($\frac{6}{14} + \frac{5}{14} = \frac{11}{14}$).

عندما نواجه ($\frac{3}{4} + \frac{1}{6}$) فسنحتاج إلى إيجاد مضاعف مشترك للمقامين ؛ أي رقم يقبل القسمة على 4 و 6 معا، وإحدى طرق الحصول عليه تكون عن طريق ضرب المقامين ($4 \times 6 = 24$)، فهذا يؤدي المطلوب تأدية تامة، لكن إذا استخدمنا المضاعف المشترك

الأصغر (12) سوف نقلل من عدد الاختصارات المطلوبة لاحقا. الآن نحول الكسرين إلى كسرين مقامهما 12 ثم نجمع ($\frac{3}{4}+\frac{1}{6}=\frac{9}{12}+\frac{2}{12}=\frac{11}{12}$).

الكسور العشرية الدائرة Recurring decimals

الكسور العشرية الدائرة هي امتدادات عشرية تتكرر للأبد دون توقف، على سبيل المثال ($\frac{1}{12}=0.083333333...$) يكتب كما جرت العادة على الصورة (0.083)، وبعض الكسور لها نمط تكراري أطول مثل ($\frac{2}{7}=0.285714285714285714$) الذي يكتب ($\overline{0.285714}$) أو (0.285714). ويمكن كتابة الكسور العشرية دائما على صورة كسور دقيقة، وبالتالي فهي تمثل أعدادا نسبية.

الأعداد غير النسبية مثل ($\sqrt{2}$) لها امتدادات عشرية تمتد إلى الأبد دون تكرار؛ لذلك فهي ليست كسورا عشرية دائرة. بعض الأعداد لها تمثيلات منتهية ومتكررة على حد سواء، الرقم 1 هو أحد أمثلة هذه الأعداد.

$$0.\overset{0}{9}=1$$

حقيقة أن الكسر الدائر (0.9)(أي...0.99999999) يساوي 1 هي واحدة من أكثر الحقائق التي تلقى مقاومة في الرياضيات الابتدائية، فالطلاب يصرون دائما على إن الرقمين متجاوران وليسا الرقم نفسه، أو يقولون أنه لابد أن يحدث شيء ما بعد كل هذا العدد الكبير من الرقم 9 المتكرر. وإليكم ثلاثة براهين مختلفة تثبت أن العددين متساويان (بالتأكيد برهان واحد من هذه البراهين كاف)

1- بالتحويل من الكسر إلى الكسر العشري ($\frac{1}{3}=0.3$) أي(...0.333333)، وضرب الطرفين في 3 نحصل على (1=0.9)

2- (1-0.9=0.0) ومن الواضح أن (0=0.0) بمعنى آخر المسافة بين (1)، و(0.9) تساوي صفر، أي أنهما لابد أن يكونا الرقم نفسه.

3- لنفرض أن ($x = 0.9$)،وبالضرب في 10 نحصل على ($10x = 9.9$). طرح المعادلة الأولى من المعادلة الثانية ينتج عنه ($9x = 9$)، وبالتالي ($x = 1$).

البرهان الأخير هو صيغة تحويل أي كسر دائر إلى كسر اعتيادي. لنفرض أن ($x = 0.4$) وبالضرب في 10 نحصل على ($10x = 4.4$) وبطرح المعادلة الأولى من المعادلة الثانية ينتج أن ($9x = 4$)، وبالتالي ($x = \frac{4}{9}$) .

الأعداد غير النسبية Irrational numbers

العدد النسبي في الرياضيات هو وصف لكسر اعتيادي، أما الأعداد مثل (π)، و($\sqrt{2}$)، و (e) التي لا يمكن وضعها على صورة كسر اعتيادي تسمى غير نسبية (لمرة أخرى نقول أن هذه التسمية ليس لها علاقة باللامنطقية أو الغباء)[(1)].

أولت الطائفة الفيثاغورثية في اليونان القديمة اهتماما غامضة بالأعداد الصحيحة، واعتقدت أن جميع الأعداد نسبية، وطبقا لما جاء في الأسطورة، ثم غراقهيپاسس Hippasus من ميتاپونتم Metapontum عندما أثبت لأول مرة أن العدد ($\sqrt{2}$) غير نسبي، حيث اعتبر هذه الاكتشاف بدعة.

عدم نسبية العدد $\sqrt{2}$ The irrationality of $\sqrt{2}$

الحقيقة القائلة أن العدد $\sqrt{2}$ غير نسبي هي مثال شهير على البرهان بالتناقض. كون العدد $\sqrt{2}$ غير نسبي يعني أنه لا يمكن وضعه على صورة كسر اعتيادي دقيق، بالتالي يبدأ البرهان بافتراض أن $\sqrt{2}$ يمكن كتابته على صورة كسر اعتيادي وليكن ($\sqrt{2} = \frac{a}{b}$). الهدف الآن هو إيجاد تناقض من هذا الفرض.

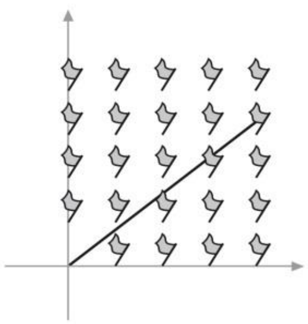
إذا كان (a)، (b) بينهما عوامل مشتركة فيمكن تبسيط الكسر: سنفرض أننا قمنا بذلك، وبالتالي لا توجد عوامل مشتركة بين (a)، و(b). الآن، تعريف $\sqrt{2}$ يعني أنك إذا

---

(1) ملاحظة: يؤكد الكاتب على ذلك لأن الترجمة الحرفية لـ (irrational numbers) هي الأرقام اللامنطقية، أو الأرقام الغبية وبالطبع هذا لا يمت إلى التسمية بصلة، والسبب في تسميتها irrational يرجع إلى عدم قابليتها للتمثيل على صورة كسر اعتيادي وهي بذلك عكس الأرقام النسبية (rational) فجاءت التسمية بإضافة السابقة (Ir) وهذا هو سبب الخلط.

قمت بضربه في نفسه سيكون الناتج 2، وبالتالي ($\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = 2$) أي أن ($\frac{a^2}{b^2} = 2$)، إذا ($a^2 = 2b^2$) وبالتالي ($a^2$) عدد زوجي. الآن يجب أن تكون (a) عددا زوجيا لأن مربع أي عدد فردي يكون فرديا، بالتالي (a) هي أحد مضاعفات العدد 2، وليكن ($a = 2c$)، إذا ($(2c)^2 = 2b^2$) و($4c^2 = 2b^2$)، لكن ($b^2 = 2c^2$) و بالتالي (b^2) عدد زوجي، وبالتالي (b) عدد زوجي أي يقبل القسمة على 2، لكننا افترضنا أنه لا يوجد عوامل مشتركة بين (a)، و(b) ، والآن أثبتنا أن كليهما يقبل القسمة على 2 وهو التناقض المطلوب. هذا البرهان الذي غالبا يعزى إلى هيپاسس Hippasus من ميتاپونتم Metapontum حوالي عام 500 ق م يمكن تطويعه لإثبات أن الجذر التربيعي لأي عدد أولي (في الحقيقة أي عدد صحيح غير مربع كامل) يكون غير نسبي.

مسألة الشعاع The problem of the ray

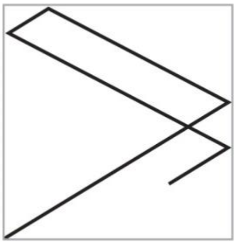


نعمل على مستوى مزود بإحداثيات ديكارتية، وقمنا بوضع علم عند كل النقط التي إحداثياتها أعداد صحيحة (1,1)، و(2,5)، و(-4,7) وهكذا. الآن لنتخيل أننا أطلقنا شعاع ليزر من نقطة الأصل عبر المستوى، هل يصطدم الشعاع بسارية العلم أم لا ؟

تتوقف الإجابة على الميل (m) للخط المستقيم الذي سيتبعه الشعاع. معادلة هذا الخط هي: ($y = mx$)، فإذا صدم الشعاع العمود عند (p, q) فبالتالي لابد أن ($q = mp$) وتكون ($m = \frac{q}{p}$)، وبما أن (q) و (p) أعداد صحيحة فهذا يعني أن (m) عدد نسبي، وبالتالي فإن الإجابة هي أن إذا كانت (m) نسبية فإن الشعاع سوف يصطدم بالسارية، وإلا فلن يصطدم.

مسألة الشعاع المنعكس The problem of the reflected ray

درس كل من كونيج (König) وسزكس (Szücs) تطويعا مثيرا لمسألة الشعاع. بدلا من السواري، تخيلا مربعا حوائطه الداخلية عبارة عن مرايا، ويطلق شعاع الليزر من أحد



الأركان إلى هذا الصندوق ذي المرايا، ما نوع المسار الذي سيسلكه هذا الشعاع؟ (نفرض أن الشعاع يرتد في الاتجاه الذي سقط منه إذا صدم أحد أركان الصندوق).

تعتمد الإجابة أيضاً على الميل (m): إذا كان نسبيا فسوف يبدأ الشعاع بعد بعض الوقت في تتبع أثر المسار السابق، وسوف يعيد نفس الحلقة مرارا وتكرارا، ومن ناحية أخرى إذا كانت (m) غير نسبية، فلن يكرر الشعاع نفسه أبدا. الخط الناتج سيكون كثيفا داخل الصندوق، وهذا لا يعني أنه حرفيا سوف يمر بجميع النقط داخله (لهذا فهو لا يعتبر منحنى مالئ للفضاء تماما)، لكنك إذا اخترت أي نقطة داخل الصندوق وحددت مسافة ما ، حتى ولو كانت ضئيلة جدا، فبالتالي سيمر الشعاع في النهاية خلال المسافة من النقطة التي اخترتها.

العوامل والمضاعفات FACTORS AND MULTIPLES

ضرب الأعداد السالبة Multiplying negative numbers

بفرض أن "آنا" تدفع "لبوب" ثلاثة دولارات يوميا وأنها تفعل ذلك منذ فترة، بالتالي يتغير رصيد "بوب" يوميا بمقدار +3، وكذلك رصيد "آنا" لكن بمقدار-3، وخلال يومين من الآن سيصبح رصيد "بوب" +6 مقارنة برصيده اليوم؛ ويفسر ذلك بـ ($2 \times 3 = 6$)، ومن ناحية أخرى فإن خلال مدة -2 يوم من الآن (أي منذ يومين) كان رصيد "بوب" أقل بمقدار 6 دولارات، وهو ما يساوي -6 بالنسبة لليوم، وبكتابة ذلك في جدول نحصل على:

2×3=6
1×3=3
0×3=0
-1×3=-3
-2×3=-6

يبين الصف الأوسط أننا نقارن رصيد "بوب" بمستوى اليوم. بعد صفر من الأيام سيكون بالتأكيد تغير بمقدار صفر من الدولارات).

الآن نأخذ في الاعتبار أموال "آنا" التي تتغير بمقدار -3 يوميا، بالتالي خلال مدة +2 يوما (بعد يومين)، سيكون -6 (أقل 6 دولارات)مقارنة بمستوى اليوم، ويفسر ذلك بـ (2×-3=-6)، ماذا عن -2 يوما من الآن ؟ كان لدى "آنا" 6 دولارات أي مستوى نسبي مقداره +6، وبكتابة ذلك في جدول نحصل على جدول الضرب لـ -3.

2×-3=-6
1×-3=-3
0×-3= 0
-1×-3= 3
-2×-3= 6

وهناك طريقة أخرى للتفكير في ذلك وهي أن ضرب عدد ما في عدد سالب يغير إشارته دائما بين +/ -، أما الضرب في عدد موجب يترك الإشارة كما هي دون تغيير، بالتالي إذا بدأنا بـ 3 وقمنا بضربها في -2 ستتغير إشاراتها : +3 ستصبح -6، لكن هذا ينطبق على الأعداد السالبة أيضاً: فإذا بدأنا بـ -3 وقمنا بضربها في -2 ستتغير إشارتها: -3 ستصبح +6.

القسمة على صفر Division by 0

ربما تكون القسمة على صفر هي أكثر الأخطاء الرياضية شيوعا بين الأخطاء جميعا، حتى الباحثين المحنكين يمكنهم روي قصص مروعة عن إيجاد القسمة على صفر كامنة في براهينهم. هناك سبب مقنع يفسر لماذا تكون القسمة على صفر ممنوعة، وهو يأتي مباشرة من المعنى يقسم divide. إننا نكتب (4 = 2 ÷ 18) لأن 4 هو العدد الذي عند ضربه في 2 يكون الناتج 8 لذلك فإننا لحساب القيمة (0 ÷ 8) نحتاج إلى إيجاد عدد حين نضربه في صفر يكون الناتج 8 ومن الواضح أنه لا وجود لعدد كهذا.، ومن ناحية أخرى فإنه عند حساب (0 ÷ 0) نحتاج إلى إيجاد رقم عند ضربه في صفر يكون الناتج صفرا، لكن جميع الأرقام تحقق ذلك !

حساب التفاضل يتناول بالدراسة الكسور التي على الصورة ($\frac{x}{y}$) عندما تقترب (x) و (y) أكثر وأكثر من الصفر. واعتمادا على العلاقة الدقيقة بين (x) و(y) يمكن لهذا الكسر أن يقترب من أي رقم محدد، أو يذهب إلى ما لا نهاية، أو يترنح ظاهريا بشكل عشوائي.

إثبات أن 1=2 A proof that 1=2

نفرض أن ($a = b$) وبضرب الطرفين في (b) نحصل على ($ab = b^2$)، وطرح (a^2) من كلا الطرفين يعطي ($ab - a^2 = b^2 - a^2$)، وبتحليل كل جزء نحصل على ($a(b - a) = (b + a)(b - a)$)، وبحذف ($b - a$) من الطرفين يتضح أن ($a = b + a$) لكن ($a = b$)، لذلك ينص هذا على أن ($a = 2a$) وبالتالي ($1=2$). يصبح علم الجبر هنا غامضا غموضا بحتا، ويصبح هناك العديد من الاختلافات الممكنة (كلما بدت أكثر تطورا كأن أفضل)

الحجة الأساسية هي أن ($0 \times 1 = 0 \times 2$) (وهي صحيحة ولا شك)، وبالتالي ($1=2$). الخطوة الخاطئة في البرهان هي حذف ($b - a$) من الطرفين والتي تؤول إلى قسمة على صفر مختفية.

المبرهنة الأسسية في الحساب The fundamental theorem of arithmetic

عرفت خاصية مهمة للأعداد الأولية في مسألة 7.30 في كتاب العناصر لإقليدس: إذا كان هناك عدد ($a \times b$) يقبل القسمة على عدد أولي (p) فلابد أن يكون (a)، أو (b) يقبل القسمة على هذا العدد الأولي وهذا ليس صحيحا بالنسبة للأعداد المؤلفة (غير الأولية) (composite numbers) مثل 10 حيث أن (4×5) يقبل القسمة على 10 لكن 5 أو 4 لا تقبلان القسمة عليها.

ونتيجة لذلك، وهو ما كان معروفا لقدماء اليونان أيضاً،هي المبرهنة الأساسية في الحساب والتي تنص على أمرين:

1- جميع الأعداد الصحيحة الموجبة يمكن كتابتها على هيئة عوامل أولية

2- هذه الكتابة تكون بطريقة وحيدة.

بالتالي يمكن تفكيك العدد (308) إلى ($2 \times 2 \times 7 \times 11$)، والطريقة الأخرى الوحيدة لكتابة هذا العدد كمضاعفات أولية هي إعادة ترتيب ذلك مثل ($\times 7 \times 2 \times 11$ 2)، وبالتالي فإننا -وبدون تحقق- على علم بأن ($13 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \neq 308$).

وكما يشير الاسم، فهذه الحقيقة هي الأساس الذي يبنى عليه علم الرياضيات كله. وذلك يخص الأعداد الصحيحة فقط أما في الأعداد النسبية لا يتحقق شيء كهذا لأن هناك طرق عديدة مختلفة لتقسيم عدد ما، على سبيل المثال: ($2 = \frac{4}{3} \times \frac{3}{2}$ and $2 = \frac{7}{8} \times \frac{16}{7}$).

العامل المشترك الأعلى highest common factor

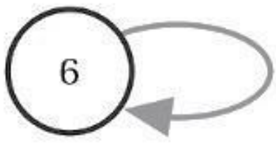
العامل المشترك الأعلى (highest common factor) أو القاسم المشترك الأكبر (greatest common divisor) لعددين طبيعيين هو أكبر رقم يقبلان القسمة عليه معا، على سبيل المثال: العامل المشترك الأعلى لـ 18، 24 هو 6: ليس هناك عدد أكبر يقبلان القسمة عليه.

يمكن إيجاد (ع.م.أ) لعددين عن طريق تفكيكهما إلى أعداد أولية، وضرب جميع عامليهما الأولية المشتركة (بما فيها العوامل المكررة)، على سبيل المثال: 60=2×2×3×5 و 84=2×2×3×7. لذلك يكون (ع.م.أ) للعددين 60، و84 هو 2×2×3=12، وتمتد نفس الطريقة لحساب العامل المشترك الأعلى لأكثر من عددين. الأعداد مثل 8، 9 التي يكون العامل المشترك الأعلى لها 1 تسمى أعدادا أولية فيما بينها (co-prime).

المضاعف المشترك الأصغر Lowest common multiple

المضاعف المشترك الأصغر لأي عددين هو أصغر رقم يقبل القسمة عليهما، معا، لذلك يكون المضاعف المشترك الأصغر لـ 4، 6 هو 12؛ لأنه أصغر رقم يظهر في جدولي ضرب العدد 4، و 6 معا ويمكن إيجاد (م.م.أ) لعددين عن طريق ضربيهما ثم القسمة على عاملهما المشترك الأعلى، لذلك يكون (م.م.أ) للعددين 60، 84 هو ($420 = \frac{60 \times 84}{12}$).

الأعداد المثالية Perfect numbers



يقال لعدد صحيح أنه مثالي إذا كان مجموع عوامله (بما فيها العدد 1، لكن باستثناء العدد نفسه) يساوي العدد نفسه.

أول عدد مثالي هو العدد 6: عوامله 1، و 2، و3، ثم يليه العدد 28 الذي عوامله 1 و 2 و 4 و 7 و 14، وقد أثارت الأعداد المثالية الفضول منذ قام الفيثاغورثيون بإلحاق أهمية غامضة بهذا التوازن ما بين مكونات الجمع والضرب، ولازالت الأعداد المثالية تجذب انتباه علماء الرياضيات إلى الآن وتنقسم دراستها إلى جزأين: الأعداد المثالية الزوجية، والأعداد المثالية الفردية.

الأعداد المثالية الزوجية Even perfect numbers

أثبتت أول نتيجة مهمة على الأعداد المثالية حوالي عام 300 ق م في كتاب العناصر لإقليدس؛ حيث أثبتت المسألة 9.36 أنه إذا كان $(2^k - 1)$ عددا أوليا فإن $\frac{(2^k-1)(2^k)}{2}$ يكون عددا مثاليا. وبعد قرون أعيد النظر في هذه النتيجة بمجرد ظهور الأعداد الأولية التي على الصورة $(2^k - 1)$ والتي عرفت باسم أعداد "ميرسين" الأولية (Mersenne prlmes.)، وبالتالي لإعادة صياغة نتيجة إقليدس، إذا كان (M) هو أحد أعداد "ميرسين" الأولية، بالتالي $\frac{M(M+1)}{2}$ يكون عددا مثاليا زوجيا، وعكس نظرية إقليدس صحيح أيضاً كما لاحظ عالم القرن العاشر ابن الهيثم؛ فإذا كان العدد الزوجي مثاليا فلابد أن يكون على الصيغة $\frac{M(M+1)}{2}$ حيث (M) أحد أعداد "ميرسين" الأولية، وعلى سبيل المثال $\frac{3\times4}{2} = 6$ و $\frac{7\times8}{2} = 28$ إلا أن ابن الهيثم لم يتمكن من إثبات ذلك إثباتًا تامًا، وظل الأمر كذلك حتى مجيء ليونارد أويلر (Leonhard Euler) بعد حوالي 800 عام.

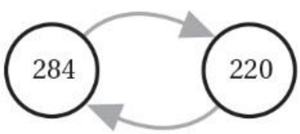
هذه النتيجة – تعرف أحيانا باسم مبرهنة إقليدس – أويلر (Euclid-Euler theorem)– تبرهن على التقابل الأحادي (one-to-one correspondence) بين الأعداد المثالية الزوجية وأعداد ميرسن الأولية، بالتالي فإن اكتشاف أعداد "ميرسين" أولية جديدة يعطي مباشرة أعداد مثالية زوجية جديدة، وبالمثل تنتقل الأسئلة حول أحدهما إلى أسئلة حول الطرف الآخر، وينطبق ذلك بصفة خاصة على السؤال الأهم في هذا الصدد: وهو إذا ما كانت قائمة الأعداد المثالية الزوجية منتهية أم لا.

الأعداد المثالية الفردية Odd perfect numbers

لم يعثر أحد بعد على عدد مثالي فردي بل إن معظم الخبراء هذه الأيام يشكون في وجوده، لكن لم يستطع أحد منهم أيضاً إثبات أن هذا المخلوق ليس له وجود، وفي أي حال من الأحوال لا تشكل احتمالية عدم وجوده أي عقبة أمام علماء الرياضيات في دراسة هذه الأعداد بعمق. يأمل علماء الرياضيات في تحديد الأماكن التي يمكن أن يتواجد فيها، أو في جمع الذخيرة اللازمة من أجل البرهان بالتناقض كحل نهائي.

في القرن التاسع عشر قام جيمس سيلفستر بتحديد العديد من الشروط التي يجب أن يحققها العدد المثالي الفردي، واعتقد أن هذا الرقم يحتاج إلى معجزة ليصبح موجودا، وفي عام 1991 استخدم كل من برنت،وكوهين وتيريلي جهاز كمبيوتر لاستبعاد وجود أي عدد مثالي فردي طوله أقل من 300 خانة.

الأعداد الصديقة Amicable pairs



معظم الأرقام ليست مثالية، وعندما تقوم بجمع عواملها فإما إنك تنتهي من هذا الجمع 0 (في حالة العدد الناقص)، أو أنك تتخطى الحد (في الأعداد الزائدة)، لكن أحيانا توازن الأعداد الناقصة والزائدة بعضها بعضا، على سبيل المثال العدد (220) عدد زائد (abundant)؛ حيث إن عوامله: (1,2,4,5,10,11,20,22,44,55,110) ومجموعها يساوي 284. أما عوامل العدد (284) هي (1,2,4,71 142) ومجموعها لا يساوي (248) بل (220).

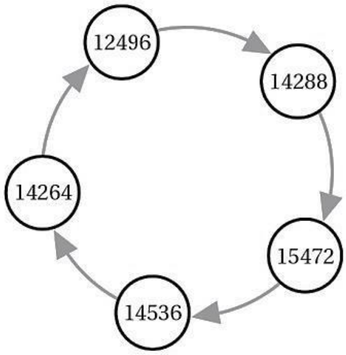
لقد أذهلت الأعداد الصديقة علماء الرياضيات الكلاسيكيين، وكذلك علماء العالم الإسلامي، وفي القرن العاشر اكتشف ثابت ابن قرة قاعدة للحصول على أعداد صديقة، وقد طور أويلر هذه القاعدة فيما بعد.

في وقت كتابة هذا الكتاب، عدد الأعداد الصديقة الموجودة (11,994,387) مختلف، وعدد خانات أكبرها يساوي (24,073)، وكما كان الحال في الأعداد المثالية يبقى التساؤل

حول ما إذا كان هناك حقا عددا لا نهائيا. كل زوج معروف يتكون من إما رقمين زوجيين أو فرديين، ولكن لم يثبت أبدا أن هذا لابد أن يتحقق دائما.

الأعداد الأنيسة Sociable numbers

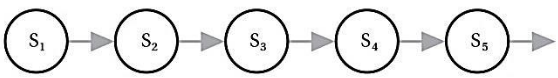
العددان الصديقان هما زوج من الأعداد تأخذك عملية جمع عوامل أي منهما إلى الآخر، لكن يمكن أن تكون هناك دورات أكبر: جمع عوامل العدد (12,496) يعطي (14,288)، ثم نحصل بعد ذلك على (15,472) ثم (14,536) و (14,264)، قبل الرجوع مجددا إلى (12,496)، لذلك يقال أن تلك تمثل دورة طولها 5. وتعرف الأرقام التي تحقق ذلك باسم الأعداد الأنيسة في زمن كتابة هذا الكتاب، أطول دورة معروفة من الأعداد الأنيسة طولها 28، وهي



14316, 19116, 31704, 47616, 83328, 177792, 295488, 629072, 589786, 294896, 358336, 418904, 366556, 274924, 275444, 243760, 376736, 381028, 285778, 152990, 122410, 97946, 48976, 45946, 22976, 22744, 19916, 17716.

المتتاليات التجزيئية Aliquot sequences

ابدأ بأي رقم وليكن (S_1)، وقم بجمع كل عوامله الصحيحة لتحصل على رقم جديد (S_2).



إذا كان $(S_1 = S_2)$ يكون الرقم مثاليا، وإلا فكرر العملية؛ اجمع كل العوامل الصحيحة لـ (S_2) لتحصل على رقم جديد(S_3). إذا كان $(S_1 = S_3)$ فإن (S_1)، (S_2) تشكلان زوجا من الأعداد الصديقة، وإلا فيمكننا أن نستمر في تكرار ذلك للحصول على (S_4, S_5, S_6)، ويطلق على ذلك اسم متتالية تجزيئية (Aliquot كلمة يونانية تعني متعدد). المتتالية الجزئية للعدد 95 هي (95,25,6,6,6,...).

وقد وصلت المتتالية إلى رقم مثالي بقيت عليه، وبالمثل إذا وصلت أي متتالية تجزيئية

إلى أحد رقمي زوج من الأعداد الصديقة، أو أي رقم أنيس فبالتالي سوف تبقى في دائرة مفرغة دائما، والبديل لذلك هو أن تصل المتتالية إلى رقم أولي وهو ما يؤدي إلى انتهائها، فالمتتالية التي تبدأ بـ 49 على سبيل المثال يكون الرقم التالي 8 ثم 7 لكن الرقم الذي يلي ذلك لابد أن يكون 1 (لأن 7 ليس لها عوامل أخرى)، ثم صفر.

عام 1888 وضع "أوجين كاتالان" فرضية تقول أن: جميع المتتاليات التجزيئية تنتهي بإحدى الطرق السابقة إلا أن بعض الأعداد تثير الشكوك حول هذه الحدسية: 276 هو أول تلك الأرقام العديدة مجهولة المصير، حيث أن متتاليته وصلت إلى حوالي 2000 حد حتى الآن ولازالت في نمو، وبعد 1500 حد تفوق عدد الخانات ال 150 خانة.

الاستقراء INDUCTION

البرهان بالاستقراء Proof by induction

كيف يمكنك إثبات العديد من الأشياء غير المنتهية في مرة واحدة؟ إحدى الطرق القيمة هي الاستقراء الرياضي الذي يستخدم في إثبات النتائج بما فيها الأعداد الطبيعية. لنفرض أنني أريد إثبات أن جميع الأرقام الطبيعية تحقق خاصية ما ولتكن (X) يقوم الاستقراء بمهاجمة الأعداد الحقيقية بالترتيب، وتكون الحالة الأساسية في الحجة هي إثبات أن العدد صفر يحمل الخاصية ، ثم تأتي الخطوة الاستقرائية التي تثبت أن إذا كان o, ..., k جميعها أعدادا تحمل الخاصية (X) فمن المؤكد أن تحملها **k + 1** أيضاً. إذا أمكن إثبات ذلك، بالتالي لن يكون هناك أبدا ما يسمى العدد الأول الذي لا يحمل الخاصية (X) ، وبالتالي سيكون من المستحيل وجود أي رقم لا يحمل الخاصية (X) ، إذا جميع الأرقام تحمل الخاصية (X).

يشبه الاستقراء تأثير الدومينو الرياضي: فالحالة الأساسية تدفع قطعة الدومينو الأولى، ثم تقوم الخطوة الاستقرائية بإثبات أن من المؤكد أن تتسبب القطعة الأولى في إسقاط الثانية، والثانية تسقط الثالثة، وهكذا حتى تسقط جميع القطع ولا تبقى قطعة واحدة واقفة. والاستقراء هو صفة محددة للأعداد الطبيعية: فلا يمكن تطبيقه مباشرة على

الأعداد الحقيقية على سبيل المثال، إضافة الأعداد من 1 إلى 100 مثال على الاستقراء المستخدم، لكن من المآخذ التي أخذت عليه: مفارقة الرجل الأصلع، وإثبات أن جميع الأعداد مثيرة للاهتمام.

العدد 1729 عدد مثير للاهتمام 1729 is interesting

$$1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$$

عندما زار ج . هـ. هاردي (G.H.Hardy) عالم الرياضيات النابغة فيرتوسو سيرنفاسا رامانجان (virtuoso Srinivasa Ramanujan) استقل سيارة أجرة تحمل الرقم 1729، وقد أبدى ملاحظته لصديقه أن هذا الرقم يبدو رقما مملا إلى حد ما ، فأجاب رامنجان بأنه ليس كذلك، وقال: "إنه رقم مثير للاهتمام جدا، فهو أصغر رقم يمكن تمثيله كمجموع مكعبين بطريقتين مختلفتين". ربما كان شخص ذو مستوى تفكير أقل من رامنجان ليجادل حول كون جميع الأرقام المثيرة للاهتمام، وهي حقيقة يوجد لها برهان بالاستقراء.

برهان أن جميع الأعداد مثيرة للاهتمام

A proof that every number is interesting

الحالة الأساسية هي الصفر: وهو -مما لاشك- فيه أكثر الأرقام إثارة للاهتمام على الإطلاق، أما الخطوة الاستقرائية فتفترض أن الأرقام (.,1,2, ... ,k) جميعها أرقام مثيرة للاهتمام والرقم التالي الذي يجب أن يكون إما مثيرا للاهتمام أو لا هو $k + 1$ ، فإذا لم يكن كذلك فسيكون هو أول عدد غير مثير للاهتمام، لكن هذا سيجعل له اهتماما خاصا: وهذا تناقض، لذلك لابد أن يكون مثيرا للاهتمام، وبذلك تكتمل الخطوة الاستقرائية، وبذلك أثبتنا باستخدام الاستقراء أن جميع الأعداد مثيرة للاهتمام.

هذا - بلا شك- لا يعدو كونه محاكاة ساخرة لبرهان، وليس شيئا حقيقيا، فمدى إثارة عدد ما للاهتمام ليست خاصية محددة بدقة، ولنكون أكثر تحديدا هي خاصية تعتمد على تقدير ذاتي غير ثابت، ففي الواقع هناك بعض الأرقام التي تكون مثيرة أكثر من غيرها (ويعتمد ذلك على الشخص الذي تسأله)، وهذا البرهان يتطلب حسما مصطنعا يجعل جميع الأعداد إما مثيرة للاهتمام تماما أو لا .

جمع الأعداد من 1 إلى 100 Adding up 1 to 100

في إحدى الحجرات الدراسية في ألمانيا في القرن ال 18، أسند مدرس المرحلة الابتدائية هير بوتنر(Herr Büttner) إلى تلاميذه في الصف مهمة جمع الأعداد من 1 إلى 100 أملا في أن يكون الدرس لطيفا وهادئا إلا أنه فوجئ بأحد التلاميذ يرفع يده خلال ثوان ويجيب: 5050. عندما كبر هذا التلميذ أصبح شخصية بارزة في مجال الرياضيات، إنه كارل فريدريك جاوس (Carl Friedrich Gauss). لابد أن يكون جاوس الصغير قد توصل إلى صيغة جمع أعداد متتالية: ($1 + 2 + \cdots + n = \frac{n\times(n+1)}{2}$)، إذا كانت ($n = 3$) نجمع الأعداد الثلاثة الأولى (1+2+3=6)، وتعطى الإجابة نفسها باستخدام ($\frac{3\times(3+1)^2}{2}$)، وأدرك جاوس أن كل ما عليه فعله هو التعويض عن ($n = 100$) في هذه الصيغة للحصول على الإجابة ($\frac{100\times(100+1)}{2}$).

وهناك طريقة هندسية لرؤية ذلك عن طريق معرفة الرقم المثلثي الذي ترتيبه (n)، كما يمكن أيضاً إثبات ذلك إثباتا أكثر حسما باستخدام الاستقراء.

جمع الأعداد من 1 إلى (n)، برهان بالاستقراء

Adding 1 up to n, proof by induction

سنثبت بالاستقراء أن ($1 + 2 + \cdots + n = \frac{n\times(n+1)}{2}$)، وتتضمن الحالة الأساسية الجمع حتى الرقم الذي ترتيبه صفر، من الواضح أن الناتج صفر. الطرف الأيمن يساوي ($\frac{0\times(0+1)}{2}$)، لذلك فإن الصيغة صحيحة عند ($n = 0$).

الآن تأتي الخطوة الاستقرائية: نفرض أن هذه الصيغة صحيحة لإحدى قيم (n) ولتكن (k)، وبالتالي ($1 + 2 + \cdots + k = \frac{k\times(k+1)}{2}$). نريد استنتاج أن نفس الشيء صحيح لقيمة (n) التالية وهي ($n = k + 1$) وهذا يتبع ($1 + 2 + \cdots + k + (k + 1) = \frac{k\times(k+1)}{2} + (k + 1)$)، وبالقليل من خفة اليد الجبرية يظهر الطرف الأيمن على الصورة ($\frac{(k+1)\times(k+2)}{2}$) وهي الصيغة الصحيحة عندما ($n = k + 1$).

جمع أول مائة عدد مربع Adding the first hundred squares

يمكن كتابة صيغة جمع الأعداد من 1 إلى (n) بطريقة أنيقة باستخدام رمز المحصلة

$$\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$$

وهناك صيغة مشابهة من أجل حساب مجموع أول (n) عدد مربع ويمكن إثباتها أيضاً بالاستقراء

$$\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

لذلك إذا أردنا حساب $(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 100^2)$ فكل ما علينا فعله هو وضع $(n = 100)$ في هذه الصيغة: $\frac{100\times101\times201}{6}$ وتساوي 338,350.

وجمع المكعبات لدينا الصيغة

$$\sum_{j=1}^{n} j^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

(لاحظ أن هذه الصيغة هي تربيع الصيغة الأولى) لقوى أعلى نحصل على :

$$\sum_{j=1}^{n} j^4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$$

$$\sum_{j=1}^{n} j^5 = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2$$

$$\sum_{j=1}^{n} j^6 = \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^3 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n$$

الحصول على صيغة عامة للقوى الأعلى يتطلب جهدا أكبر، ويتضمن أعداد بيرنولي: متتالية لها أهمية في نظرية الأعداد.

تمثيل الأعداد REPRESENTATIONS OF NUMBERS

القيمة المكانية والتمثيل العشري Place value and decimal notation

العد من 1 إلى 9 أمر سهل، فكل ما نحتاجه هو فقط تذكر الرموز الصحيحة، لكن هناك شيء غريب يحدث عندما نصل إلى 10، فبدلا من استخدام رموز جديدة نبدأ في إعادة استخدام القديمة، وهذا النظام نظام متطور خادع استغرق قرونا عديدة ليتطور، وكانت لحظته الحاسمة هي ظهور رمز للعدد صفر.

فيما يسمى تمثيل القيمة المكانية، لا يمثل الرمز (3) العدد (3) فقط بل قد يمثل (30)، أو (300)، أو (0.3)، فمكان الرمز يحمل معنى لا يقل عن ذلك الذي يحمله الرمز نفسه. تمثل الأعداد الصحيحة على هيئة خانات مرتبة في أعمدة، على اليمين توجد الآحاد، وكل خطوة ناحية اليسار تزيد من قوى الرقم 10. في جدول القيمة المكانية يوضح الرقم 1001 كما يلي:

Thousands	Hundreds	Tens	Units
1	0	0	1

وهذا يسمى النظام العشري؛ لأن أساسه هو الرقم 10، واختيار أساسات أخرى ممكن تماما.

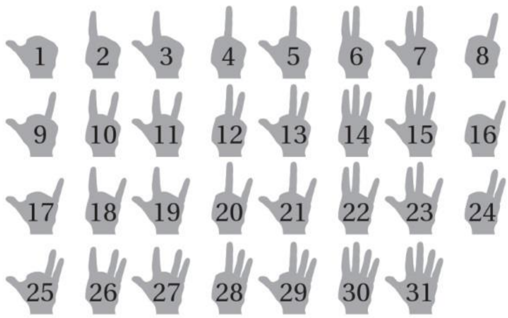
الأساسات Bases

حقيقة أن الرقم 10 هو أساس نظام العد الذي نستخدمه، يرجع جزئيا بالتأكيد إلى التطور الذي منحنا 10 أصابع بدلا من 8 أو 12، أما من وجهة نظر علم الرياضيات، فهو اختيار مفتوح؛ حيث يمكنك تكوين نظام عد أساسه أي رقم، ويكافئ جودة النظام العشري، وفي الحقيقة نجد أن النظام الثنائي – النظام الذي أساسه 2– له مميزات عديدة على الأقل في عصر الكمبيوتر. ويجب التأكيد أن هذا البحث يهتم فقط بطريقة تمثيل الأرقام باستخدام الرموز سواء أكان ذلك مكتوبا على صورة (11) في التمثيل العشري، أم (1011) في التمثيل الثنائي، أم (B) في التمثيل الستعشري أم (10) في التمثيل الأحد عشري، فالهدف موحد في جميع الأنظمة، ولا يصيبه تأثير بسبب هذه التغيرات أكثر مما يصيب الإنسان عند تبديل قبعته.

معظم تعاملنا هذه الأيام يكون مع النظام العشري، لكن ليس كلية، فمعرفة الوقت ليست عشرية: الدقيقة 60 ثانية، والساعة 60 دقيقة، وهذا أحد آثار الحضارة البابلية التي استخدم علماء الرياضيات فيها ، والبيروقراطيون(موظفو الحكومة) نظام أساسه 60. كذلك قسم الصينيون القدماء اليوم إلى 100 (ke) (حوالي ربع ساعة). حتى اعتماد النظام الغربي في القرن ال 17. ظلت خطط تبديل النظام العشري بنظام الساعات والدقائق بين جيئة وذهاب عدة مرات منذ ذلك الحين، ولم تلق إلا نجاحا عابرا كما حدث خلال الثورة الفرنسية.

النظام الثنائي Binary

ثنائي يعنى (أساسه 2)، وبالتالي إذا بدأنا العد من اليمين فإن القيم المكانية تمثل الآحاد، ثم اثنينات، وأربعات، وثمانيات، وستة عشر، إلخ (قوى للأساس 2)، ولتحويل عدد عشري إلى ثنائي نقوم بتفكيكه إلى أجزاء مثل ((1×1)+(1×4)+(1×8)+(1×32)45) فيعطي العدد الثنائي (101101). وبعمل العكس، يكون تحويل الرقم الثنائي إلى عشري كما يلي: العدد (11001) فيه 1 في خانة الآحاد، و 0 في خانة الاثنينات، و 0 في خانة الأربعات، و 1 في خانة الثمانيات، و 1 في خانة الستعشرات، لذلك فهو يمثل في النظام العشري (25=16+8+1).



النظام الثنائي هو أكثر الأنظمة ملائمة للكمبيوتر حيث يمكن تخزين 0 و 1 عن طريق إعدادات التشغيل والإيقاف لمكون أساسي ما. يطلق على الخانات الثنائية اسم بتات (bits)، 8 بتات تساوي 1 بايت وهي وحدة قياس ذاكرة الكمبيوتر، والطريقة التي يمكن لسلاسل البتات أن تحمل بها البيانات هي الموضوع الذي تتناوله بالدراسة نظرية المعلومات.

أول من تصور نظام الأعداد الثنائي- شأنه كشأن الكثير من موضوعات الرياضيات الحديثة- هو جوتفريد ليبنيز (Gottfried Leibniz) في القرن ال17.

النظام الثنائي ليس مفيدا في الكمبيوتر فحسب بل إنه يمكنك من استخدام أصابعك في العد حتى 31 على يد واحدة أو حتى 1023 على كلتا يديك.

النظام الستعشري Hexadecimals

قد يكون التمثيل الثنائي هو أسهل تمثيل عددي بالنسبة للكمبيوتر لكن بالنسبة للعين البشرية يصعب قراءة سلسلة طويلة من الصفر والواحد، لذلك في الغالب نتعامل مع النظام العشري بدلا منه لكن من عيوبه أنه ليس سهل التحويل إلى النظام الثنائي، ولهذا السبب يفضل بعض علماء الكمبيوتر العمل بالنظام الستعشري (الأساس 16)، والذي فيه يكون للخانات من صفر إلى 9 معانيها العادية، أما الخانات (A, B, C, D, E, F) فترمز إلى (10,11,12,13,14,15) على الترتيب. ويكتب العدد العشري (441) في النظام الستعشري على الصورة (1B9). التحويل بين النظام الثنائي والستعشري أسهل كثيرا من التحويل بين الثنائي والعشري، حيث نقوم فقط بتقسيم العدد الثنائي إلى مجموعات من أربع خانات، ثم نحول كل مجموعة منها بالترتيب، وبالتالي تقسم (1111001011) إلى مجموعات (1011 1100 11(00)) وتحويلها الستعشري هو 3CB.

الصورة القياسية Standard form

بفضل النظام العشري فإن للعدد 10 العديد من الخواص المفيدة التي ينفرد بها عن غيره. الضرب في 10 أو القسمة على 10 يكافئ تحريك الخانة مكان واحد يسارا أو يمينا بالنسبة للعلامة العشرية. على سبيل المثال ($4.7 = 10 \div 47$) و ($8.9 = 10 \times 0.89$).

وباستغلال ذلك يمكن التعبير عن أي عدد باستخدام رقم يقع بين 1 و 10 مضروبا أو مقسوما على عدد معين من العشرات والتي يمكن كتابتها على صورة قوى موجبة أو سالبة للأساس 10، ويسمى ذلك بالصورة القياسية، على سبيل المثال ($10^6 \times 3.14$)، ($10^{-5} \times 2.71$) كلاهما مكتوبان على الصورة القياسية. لتحويل رقم عادي مثل (14,100) إلى الصورة القياسية، أولا نحرك العلامة العشرية بحيث يصبح الرقم واقعا بين 1و 10، وهو ما يعطي (1.41) في هذه الحالة، ثم نحتاج إلى الضرب في 10 أربع مرات لتعود القيمة إلى

(14,100)، لذلك في الصورة القياسية تتحول (14,100) إلى (1.41×10^4). وكذلك في الأرقام الصغيرة مثل (0.00173) نتبع نفس الخطوات. أولا نحرك العلامة (إلى اليمين هذه المرة) ليصبح العدد (1.73) ، وهذه المرة لتعود القيمة إلى القيمة الأصلية نحتاج إلى القسمة على 10 ثلاثة مرات ، بالتالي نحصل على قوى سالبة. 1.73×10^{-3} .

الصورة القياسية مفيدة لأنها تسمح بقياس حجم الرقم سريعا (عن طريق قوى للأساس 10)، كما أنها تنسجم بكفاءة مع النظام المتري.

الأعداد الصماء Surds

لا يمكن كتابة العدد ($\sqrt{2}$) على صورة كسر مضبوط لأنه عدد نسبي، والأسوأ من ذلك أنه لا يمكن كتابته على صورة كسر عشري منته أو كسر دائر؛ لأن امتداده العشري يستمر للأبد ولا يكرر نفسه أبدا. في الحقيقة أفضل طريقة لكتابة ($\sqrt{2}$) بالضبط هي كتابته كما هو، لذلك عندما يظهر في ناتج عملية حسابية يكون هناك مبرر قوي للاحتفاظ به في صورته حفاظا على الدقة ، على سبيل المثال ($3 + \sqrt{2}$) ، ومثل هذه التعبيرات يطلق عليها أعداد صماء (جاءت هذه الكلمة من الكلمة اللاتينية (surdus) والتي تعني (لا صوت له) عاكسة مأخذ الخوارزمي على الأعداد غير النسبية، وهي المقابلة للأعداد النسبية المسموعة).

ما ينطبق على ($\sqrt{2}$) ينطبق أيضاً على الجذر التربيعيى لأي عدد طبيعي ليس مربعا كاملا. وعلى الرغم من أن الاحتفاظ بهذه التعبيرات صماء كما هي له معنى أفضل من تقريبها باستخدام الكسور العشرية أو الاعتيادية إلا أننا غالبا نرغب في تبسيطها قدر المستطاع. المكون الرياضي الرئيسي في التعامل مع الأعداد الصماء هو الملاحظة التي تقول أن ($\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$)، وبصفة خاصة ($\sqrt{a^2} = a$)، لذلك يمكننا تبسيط ($\sqrt{12}$) إلى ($\sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$) بدلا من كتابتها على صورتها.

تخليص المقام من الجذور Rationalizing the denominator

إذا كان لدينا التعبير ($\frac{2}{1-\sqrt{3}}$) فغالبا سنرغب في تبسيطه إلى صورة تظهر فيها الجذور

التربيعية في البسط فقط، ولتحقيق ذلك يمكننا دائما ضرب البسط والمقام في نفس الشيء بحيث لا تتغير قيمة الكسر، والخدعة هنا تكون في اختيار المضاعف المناسب. في المثال السابق نختار $(1-\sqrt{3})$ لنرى كيف يحدث ذلك

$$\frac{2}{1+\sqrt{3}}=\frac{2\times(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})\times(1-\sqrt{3})}=\frac{2-2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}-\sqrt{3}-\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{2-2\sqrt{3}}{1-3}=\frac{2-2\sqrt{3}}{-2}$$
$$=\sqrt{3}-1$$

وبصفة عامة: إذا كان $(\mathbf{a}+\sqrt{\mathbf{b}})$ هو مقام كسر ما فيمكن تخليصه من الجذور عن طريق الضرب بسطا ومقاما في $(\mathbf{a}-\sqrt{\mathbf{b}})$، وهذا سيحول المقام إلى عدد صحيح $(\mathbf{a^2}-\mathbf{b}^2)$ (انظر الفرق بين مربعين).

الأعداد الكبيرة Large numbers

الأرقام الكبيرة سحرت عقول البشر سحرا شديدا البشر ذوي ميول معينة. علماء الرياضيات المنتمين للمذهب الجايني في الهند القديمة أولوا أهمية روحية عميقة للأعداد الكبيرة، ووضعوا تعريفا لما يسمى (rajju)[1] على أنها المسافة التي يقطعها إله ما في ستة أشهر.(الإله-في عقيدتهم- يقطع مسافة قدرها مليون كيلو مترا في لمح البصر). وبناء على ذلك تخيلوا صندوقا مكعبا أطوال جوانبه 1 rajju، ومملوء بالصوف، وعرفوا ما يسمى (palya) على أنه الزمن المستغرق لتفريغ هذا الصندوق عن طريق إزالة جديلة واحدة كل قرن، كما أنهم طوروا نظرية لفئات مختلفة من اللانهاية ، وبذلك توقعوا نظرية المجموعات لكانتور قبلها بأكثر من ألفي عام.

عداد الرمل لأرشميدس Archimedes' Sand Reckoner

وضع أرشميدس في كتابه عداد الرمل حوالي عام 250 ق م تقديرا لعدد حبات الرمل اللازمة لملء الكون، وجاء حله أنه ليس أكثر من (10^{63}) حبة رمل. ليس لهذا الرقم أهمية كبيرة إلا أن علم الكونيات الشمسي الذي كان معروفا في عصر أرشميدش والذي كان

(1) معناها في اللغة الهندية حبل أو سلك.

للنجوم فيه مسافات محددة من الشمس شوه هذا العدد. مع ذلك وضح هذا الكتاب اختلاف مفاهيمي مهم:بين الأعداد الطبيعية الكبيرة جدا ومالا نهاية.

لم يكن كتاب عداد الرمل محض تسلية، فقد كان أرشميدس يصحح خطأ مفهومي شائع في عصره: وهو أنه لا يوجد عدد يمكنه قياس شيء هائل، وأن الرمل كمية أساسية غير منتهية، ولعمل ذلك، قام باختراع نظام كامل لتمثيل الأعداد الكبيرة، ووصل إلى "عشرات الآلاف من عشرات الآلاف من الفترات المكونة من عشرات الآلاف من عشرات الآلاف من الأرقام التي تتكون من عشرات الآلاف من عشرات الآلاف من الوحدات" (a myriad myriad units of a myriad myriad numbers of the myriad myriadth period) وهو ما يمكن كتابته على الصورة $10^{8\times10^{16}}$. التمثيل الحديث مثل الأبراج الطويلة من الأسس يمكنها تمثيل أرقام أكبر من ذلك.

أبراج الأسس Towers of exponentials

كيف يمكن وصف الأرقام الكبيرة أفضل وصف باستخدام الرياضيات الحديثة؟ يمكن أن نبدأ بمحاولة كتابتهم عن طريق تمثيل القيمة المكانية العشرية، وباتباع ذلك يكتب الجوجول (Googol) على الصورة:

(10, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000,
000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000,
000, 000, 000, 000,)

من الأسهل أن نقرأه (1 متبوع بمائة صفر، أو (10^{100})، وهذا يبين أن الرفع إلى قوة طريقة رائعة لاستيعاب الأرقام الكبيرة (صاغ ميلتون سيروتا البالغ من العمر 9 سنوات عام 1938 مصطلح (Googol)). الرفع إلى قوى هو كل ما نحتاجه في معظم الاستخدامات، فعدد الذرات في الكون يساوي (10^{80})، وعدد ألعاب الشطرنج الممكنة يقدر بـ (10^{123})، لكن يمكننا دائما صياغة أعداد أكبر، فمثلا العدد جوجولبليكس (googolplex) هو 1 متبوع بعدد جوجول من الأصفار، والتمثيل الأسي يكون

$$\left(10^{\substack{10,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,\\000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,}}\right)$$

ومن الأفضل كتابته على الصورة ($10^{10^{10^2}}$) أو($10^{10^{100}}$) (اختار عالم الرياضيات إدوارد كاسنر عم ميلتون سيروتا مصطلح جوجولبليكس)، وهذا يوضح كيفية توسيع النظام عن طريق تكوين أبراج أطول من الأسس مثل ($10^{10^{10^{10^{10^{10}}}}}$). أما للحصول على أرقام أكبر من تلك الأبراج نحتاج ما يسمى تمثيل أسهم كانوث.

أسهم كانوث Knuth's arrows

يحتل دونالد كانوث مكانا في قلب كل عالم رياضيات؛ حيث أنه مسئول بدرجة كبيرة عما تبدو عليه الرياضيات الحديثة في صفحات الكتب والجرائد التي لا تعد ولا تحصى، فهو مخترع برمجة المنضدات تيكس (the typesetting programming TeX). عام 1976 اخترع كانوث تمثيلا ذا كفاءة عالية لكتابة الأعداد الكبيرة جدا، وهو قائم على التكرار. فلنبدأ بعملية الضرب التي هي في الأساس عملية جمع متكرر: ($4 \times 3 = 4 + 4 + 4$) ثم الرفع إلى قوى، وهو عملية ضرب متكرر:($4^3 = 4 \times 4 \times 4$). الرفع إلى قوة هو السهم الأول، بالتالي فإن ($4 \uparrow 3$) تعني($4^3 = 64$)، أما السهم الثاني فهو تكرار السهم الأول:($4\uparrow\uparrow 3 = 4\uparrow 4\uparrow 4$)، وذلك يعني ($4^{4^4}$)، وهذا أكبر كثيرا من الجوجول، أما ($4\uparrow\uparrow 4$) التي هي ($4^{4^{4^4}}$) فيعتبر الجوجلبليكس قزما بالنسبة إليها.

وبالمثل، السهم الثالث هو تكرار السهم الثاني: ($4\uparrow\uparrow\uparrow 3 = 4\uparrow\uparrow 4\uparrow\uparrow 4$) وهي ($4^{4^{\cdot^{\cdot^{4}}}}$) حيث يصبح البرج أعلى بمقدار (4^{4^4}) من الطوابق، وهذا العدد كبير بشكل مذهل يستحيل التعبير عنه بأي طريقة أخرى، يمكننا الاستمرار على نفس المنوال، حيث يكون السهم الرابع هو تكرار السهم الرابع وهكذا ، لكن المشكلة الأخرى التي ستواجهنا هي أن عدد الأسهم قد يزيد زيادة لا يمكن التحكم فيها، ولمقاومة ذلك يمكننا كتابة ($4\{n\}3$) كاختصار لـ ($4 \uparrow\uparrow\uparrow \cdots \uparrow 3$) حيث (n) عدد الأسهم. وللتعبير عن أرقام أكبر من ذلك أيضاً نحتاج إلى تمثيل أقوى مثل معاملات باورز.

معاملات باورز Bowers' operators

كرس الرياضي الهاوي من ولاية تكساس جوناثان باورز قدرا كبيرا من وقته لإيجاد

وتسمية الأرقام الأكبر. في وقت الكتابة، أكبر عدد توصل إليه عدد عملاق أسماه (meameamealokkapoowa oompa). كانت فكرة باورز الأساسية عبارة عن عملية تتخطى أسهم كانوث، فكان عامله الأول ({{1}}) معرفا كالتالي:

$$m\{\{1\}\}2 = m\{m\}m$$
$$m\{\{1\}\}3 = m\{m\{m\}m\}m$$
$$m\{\{1\}\}4 = m\{m\{m\{m\}m\}m\}m$$

وهكذا. وكان هذا كافيا لتحديد أحد أكبر الثوابت الرياضية ألا وهو عدد جراهام، لكن يمكننا أيضاً الاستمرار وتعريف معامل آخر ({{2}}) ويعرف بما يلي:

$$m\{\{2\}\}2 = m\{\{1\}\}m$$
$$m\{\{2\}\}3 = m\{\{1\}\}(m\{\{2\}\}2)$$
$$m\{\{2\}\}4 = m\{\{1\}\}(m\{\{2\}\}3)$$

وهكذا حتى المعامل الثالث والرابع({{4}},{{3}})، إلخ، حيث يمكن تعريف جميع المعاملات بالتناظر مع ذلك.

ونبدأ المستوى التالي بـ ({{{1}}}) الذي يسلك بالنسبة لـ ({{.}}) مسلك ({{.}}) بالنسبة لـ ({.}) وهكذا، ويمكن تسريع ذلك عن طريق استخدام دالة جديدة تحسب عدد الأقواس: فنكتب (ا lm, n, p, q) ونعني بها (m{{...{p}...}n) حيث يوجد عدد (q) من مجموعات الأقواس، وبالطبع لا يقف باورز عند هذا الحد حيث يستمر هذا الخط من التفكير وصولا إلى ارتفاعات جامحة إلا أن هناك بعض الأرقام التي ستظل صعبة المنال مثل (شجرة فريدمان).

عدد جراهام Graham's number

يشهد غالبا لعدد جراهام بأنه أكبر رقم تم استخدامه عمليا، أما العدد الذي احتل هذه المكانة قبل عدد جراهام كان عدد سكيو (Skewe's number)، عدد ضئيل يساوي $10^{10^{10^{14}}}$.! (تحديد ما إذا كان عدد جراهام لا يزال هو حامل التاج أم لا يتوقف على إذا ماكنت تصنف الأعداد مثل تري (3) على أنها أعداد مفيدة أم لا). عدد سكيو يمكن كتابته بسهولة على شكل برج قصير من القوى إلا أن عدد جراهام يستحيل توصيفه دون الحاجة

إلى بعض الآليات العملاقة مثل معاملات باورز التي يقع فيها عدد جراهام ما بين (3{{1}}63) و (3{{1}}64).

لإعطاء فكرة عن مقدار هذا العدد سنبدأ بـ (3^{3^3}) الذي يساوي (7,625,597,484,987) ثم نبني برجا آخر من العدد 3 أطول بمقدار (3^{3^3})، ونطلق عليه العدد (A_1) (وهو بالفعل عدد كبير بطريقة يصعب تخيلها)، ثم نبني العدد (A_2) على صورة برج من العدد 3 بطوابق عددها (A_1) ، والعدد(A_3) على صورة برج من العدد 3 بطوابق عددها(A_2)، ونستمر في تكرار ذلك حتى نصل إلى (A_{A_1})، ويسمي هذا العدد (B_1) (ويمثل باستخدام أسهم كانوث على الصورة ($3 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3$))، ثم نكون العدد ($B_2$) على الصورة ($3 \uparrow \cdots \uparrow\uparrow 3$) بحيث يحتوى على أسهم عددها (B_1)، وهو ما يمكن كتابته باختصار على الصورة ($B_2 = 3\{B_1\}3$)، ثم ($B_3 = 3\{B_2\}3, B_4 = 3\{B_3\}3$) وهكذا . يقع عدد جراهام بين (B_{63})و (B_{64}) . وقد استخدمه رونالد جراهام عام 1977، حيث كان هو الحد العلوي لمسألة في نظرية رامزي كان حلها الحدسي الصحيح 12.

متتالية الشجرة لفريدمان Friedman's TREE sequence

في الثمانينات، اكتشف عالم المنطق هارفري فريدمان متتالية متزايدة تزايدا سريعا، وأطلق عليها اسم الشجرة "تري" (TREE) اشتقاقا من مسألة في نظرية رامزي. للوهلة الأولى لا تبدو المسألة صعبة للغاية وتبدأ المتتالية بداية حميدة بـ: TREE(1)=1,TREE(2)=3. لكن عند الوصول إلى ((TREE(3)) نصطدم بحائط ! حتى معاملات باورز تقف عاجزة أمام العدد ((TREE(3))، وأدرك فريدمان أن أي محاولة لتوصيف هذا العدد باستخدام لغة الرياضيات العادية لابد أن يتضمن رموزا كثيرة لدرجة يصعب فهمها (على سبيل المثال: أكبر من عدد جراهام) فهو بشكل أساسي لا يمكن توصيفه؛ حيث يمكنك كتابة معاملات باورز بمستويات أعلى وأعلى حتى نهاية الكون دون أدنى تأثير على هذا الرقم.

متتالية الشجرة لفريدمان تتزايد بسرعة كبيرة تعجز الرياضيات العادية (المستخدمة في حسابيات بيانو) عن مواكبتها مما يجعل ذلك أحد الأمثلة الدامغة الراسخة على مبرهنات عدم الاكتمال لجوديل (Gödelian incompleteness).

الكسور المستمرة Continued fractions

الكسر المستمر يكون على الصورة

$$a + \cfrac{b}{c + \cfrac{d}{e + \cfrac{f}{g + \cdots}}}$$

ويمكن كتابته باختصار على الصورة ($\mathbf{a + \frac{b}{c+}\frac{d}{e+}\frac{f}{g+}}$)

في الغالب تكون (... a, b, c, d, e, f, g) أعدادا صحيحة. تحديد إذا ما كان التتابع (... a, b, c, d) ينتج عنه كسر مستمر يتقارب إلى قيمة ثابتة معينة أم يتباعد إلى مالا نهاية مسألة صعبة إلا أن هناك وفرة من الأمثلة المعروفة على كسور متقاربة، وأبسط كسر مستمر غير منته هو الكسر المعبر عن المقطع الذهبي:

$$\emptyset = 1 + \frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\ldots$$

وأيضا من الأمثلة الرائعة على ذلك الجذر التربيعي للعدد 2

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\ldots$$

وقد أثبت ليونارد أويلر أنه إذا كان هناك كسر مستمر يستمر إلى الأبد ويتقارب، فمن المؤكد أنه يمثل عددا غير نسبياً، ثم استنتج لأول مرة أن العدد (e) غير نسبي عن طريق إثبات أنه يساوي 1

$$e = 2 + \frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{4+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{6+}\ldots$$

وكل هذه الكسور كسور مستمرة بسيطة لأن بسطها (الصفوف العلوية) جميعا يساوي 1.

الكسور المستمرة غير البسيطة Non-simple continued fractions

العدد (e) على صورة كسر مستمر غير بسيط تكون

$$\left(e = 2 + \frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{2}{3+}\frac{3}{4+}\frac{4}{5+}\frac{5}{6+}\ldots\right)$$

كما أن السيد وليام برونكر اكتشف واحدا من أوائل الكسور المستمرة في بدايات القرن ال17، وهو

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1^2}{2+}\frac{3^2}{2+}\frac{5^2}{2+}\frac{7^2}{2+}\ldots$$

والذي يمكن معالجته للحصول على كسر مستمر لـ (π) إلا أن كسر (π) المستمر البسيط لازال غامضا. فكسور رامانجن المستمرة ليست بسيطة فحسب بل إنها لا تتكون من أعداد صحيحة.

كسور راما نجن المستمرة Ramanujan's continued fractions

كان عالم الرياضيات الهندي فيرتوسو سيرنفاسا رامانجان (virtuoso Srinivasa Ramanujan) أكثر تمكنا من الكسور المستمرة من أي عالم رياضيات آخر في العالم ، طبقا لما قاله صديقه ومستشاره جيه إتش هاردي (G.H.Hardy). وقد اكتشف رامنجان العديد من الصيغ الرائعة التي تتضمن كسورا مستمرة اكتشف معظمها مكتوبا بدون ترتيب في دفاتر بعد موته. لم يقدم رامنجان براهين لهذه الصيغ، بالإضافة إلى أنه أيضاً لم يترك أي ملاحظات تشرح كيف قام بهذه المفاخر الأكروباتية العقلية المدهشة. وألقي على عاتق علماء الرياضيات اللاحقين لرامنجان مهمة التحقق من هذه الصيغ، ولا زالت شفرة بعض تدويناته الخاصة جدا غير مفكوكة إلى الآن.

ومن أمثلة عمله على الكسور المستمرة : كسر احتوى على المقطع الذهبي (Ø)

$$\frac{1}{1+}\frac{e^{-2\pi\sqrt{5}}}{1+}\frac{e^{-4\pi\sqrt{5}}}{1+}\frac{e^{-6\pi\sqrt{5}}}{1+}\ldots = e^{\frac{2\pi}{\sqrt{5}}}\left(\frac{\sqrt{5}}{1+(5^{\frac{3}{4}}(\emptyset-1)^{\frac{5}{2}}-1)^{\frac{1}{5}}} - \emptyset\right)$$

(القيمة العددية لهذا الكسر تساوي حوالي (0.999999) وقد يكون ذلك هو سبب اعتبار رامنجان أنه كسر مثير للاهتمام.). إن هذا حالة خاصة من كسر روجرز رامنجان (Rogers–Ramanujan fraction) المشهور. وقد اكتشفه ليونارد روجرز بمفرده، حيث كان نظاما مبتكرا لحساب قيمة

$\frac{1}{1+}\frac{q}{1+}\frac{q^2}{1+}\frac{q^3}{1+}\ldots$ لقيم مختلفة من (q)

تكوين الكسور المستمرة Forming continued fractions

لنفرض أننا نريد تحويل أي كسر اعتيادي $(\frac{43}{30})$ إلى كسر مستمر بسيط، فسيكون هناك خطوتان أساسيتان: أولا نفصل الجزء الصحيح عن الجزء الكسري؛ أي تجزئة $(\frac{43}{30})$ إلى $(1 + \frac{13}{30})$ ثم نقلب الجزء الكسري رأسا على عقب، ونضعه في مقام كسر بسطه 1 فيصبح الكسر $(1 + \frac{1}{(\frac{30}{13})})$. يمكننا الآن تكرار ذلك مع $(\frac{30}{13})$. أولا نفصل الجزء الصحيح $(2 + \frac{4}{13})$ ثم نقلب الجزء الكسري رأسا على عقب $(2 + \frac{1}{(\frac{13}{4})})$، وإضافة ذلك إلى الخطوة السابقة يقودنا إلى:

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{(\frac{13}{4})}}$$

وبفصل الجزء الصحيح للكسر $(\frac{13}{4})$ ينتج الشكل النهائي:

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4}}}$$

انتهت العملية بعد عدد منته من الخطوات لأننا بدأنا بعدد نسبي، أما بالنسبة للأعداد غير النسبية فتنتج هذه العملية كسرا مستمرا طويلا غير منته. الكسر السابق هو كسر مستمر بسيط لأن كل مكوناته أعداد صحيحة، والبسط يساوي 1. يمكن التعبير عن أي عدد حقيقي بكسر مستمر بسيط، ويتم ذلك بطريقة وحيدة.

الكسر المستمر البسيط للعدد ط π's simple continued fraction

يكون الكسر المستمر البسيط على الصورة

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cdots}}}$$

ويمكننا كتابة المتسلسلة الناتجة على الصورة (a, b, c, d, ...).

هناك سؤال محير بخصوص الكسر المستمر البسيط للعدد ط ، حيث تبدأ المتسلسلة بـ

(3,7,15,1,292,1,1,1,2,1,3,1,14,2,1,1,2,2,2,2,84,2,...). ووصل إيريك ويستن عام 2003 إلى الحد الذي ترتيبه 100 مليون ، إلا أن النمط المتبع فيها لازال غامضا، وعن طريق اقتطاع المتتالية بعد خطوات قليلة نحصل على تقريب كسري مقبول للعدد (ط): $(3, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{1033993}{33102},)$ إلخ.

ثابت كينتشن Khinchin's constant

إليكم طريقة لتوليد عدد جديد (k) من أي عدد حقيقي (x)

1- يمكن التعبير عن (x) بكسر مستمر بسيط بطريقة وحيدة، بالتالي، كما حدث في ط، نحصل على متتالية (a,b,c,d,e,f,...) تشتمل على (x).

2- ثم يكون بإمكاننا كتابة المتتالية $(\sqrt{ab}, \sqrt[3]{abc}, \sqrt[4]{abcd}, \sqrt[5]{abcde}, \dots)$.

3- ستتقارب المتتالية أكثر فأكثر من قيمة ثابتة هي العدد (k) وهو المتوسط الهندسي للمتتالية (a, b, c, d, e, f, ...).

قد تبدو هذه العملية ملتفة إلا أن الأمر منتظر وراء ذلك حقا مدهش:جميع قيم (x) تقريبا تعطي نفس القيمة لـ (k)، وهذا الرقم المذهل يساوي تقريبا (2.685452...) ويعرف باسم ثابت كينتشن نسبة إلى مكتشفه ألكساندر كينتشن عام 1936م.

ليس صحيحا أن جميع قيم (x) بالمعنى الحرفي تعطي نفس القيمة، فالأعداد النسبية وكذلك العدد (ط) لا يعطون (k) إلا أن الأعداد التي تخفي وراءها ثابت كينتشن أكثر كثيرا من تلك الاستثناءات، فإذا اخترنا عددا حقيقا عشوائيا فسيكون احتمال أن هذا العدد يخضع لـ (k) 100٪ تماما، أما الأمر المدهش تماما هو أنه حتى الآن لم يتمكن أحد من إثبات أن أي قيمة منفردة لـ (x) تعطي القيمة (k)، ويبدو العدد ط أنه يعطي القيمة (k) (كما تفعل القيمة (k) نفسها) إلا أن ليس هناك براهين كاملة بعد. العدد (k) نفسه عدد غامض وليس معروفا حتى إذا كان غير نسبي أم لا .

الأعداد المتسامية TRANSCENDENTAL NUMBERS

الأعداد المتسامية Transcendental numbers

العدد غير النسبي هو العدد الذي لا يمكن كتابته على صورة كسر من أعداد صحيحة، والعدد ($\sqrt{2}$) مثال على ذلك إلا أن هناك ما يشعرنا أنه ليس بعيدا جدا عن الأعداد الصحيحة؛ فهناك مسار سريع يمكن أن يسلكه للعودة من كونه ($\sqrt{2}$) فقط عن طريق خطوة ضرب واحدة:($\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$) وهو عدد صحيح.

أما الأعداد المتسامية مثل (π) ليست كذلك؛ فحاصل الضرب ($\pi \times \pi$) لا يساوي عددا صحيحا، وكذلك (($3\pi \times \pi \times \pi$)) و $1001\,\pi^5 + 64\pi$ ليست أعدادا صحيحة أيضاً، في الواقع ليس هناك مسار يسلكه العدد المتسامي ليصبح عددا صحيحا باستخدام الجمع أو الطرح أو الضرب أو القسمة. التعريف العلمي هو أن : العدد (a) يقال له عدد متسامي إذا لم يكن هناك كثيرة حدود مكونة من أرقام صحيحة تعطي عددا صحيحا عند التعويض فيها بالعدد (a). جميع الأعداد المتسامية غير نسبية إلا أن العديد من الأرقام غير النسبية مثل ($\sqrt{2}$) وجميع الجذور وقوى الأعداد النسبية غير متسامية. يطلق على الأعداد غير المتسامية أعداد جبرية.

تسامي العدد π، e The Transcendence of π and e

اكتشف جوزيف ليوفل عام 1844 الأعداد المتسامية الأولى، وكان عدده الأشهر هو العدد (0.110001000000000000000001000) الذي يظهر فيه الرقم 1 في الخانة الأولى والثانية، والسادسة، والرابعة والعشرين وهكذا في متتالية من المضاريب (factorials). كان ظهور الأعداد المتسامية بالتأكيد صادما. وعلى الرغم من أن أعداد ليوفيل مثلت فضولا بدا عليه الاصطناع أكثر من أي موضوع مهم آخر إلا أن أهمية تلك الأعداد ترسخت في علم الرياضيات عام 1873 عندما أثبت شارلز هيرميت أن (e) عدد متسامي، وعام 1882 أضاف فيرديناند فون ليندمان العدد (π) إلى قائمة الأعداد المتسامية، وكان هذا كافيا لحل مسألة تربيع الدائرة القديمة، بذلك ترسخت أهمية الأعداد المتسامية إلا أن أحدا لم يتوقع توصل جورج كانتور لعدد هذه الأعداد.

مبدأ عدم قابلية الأعداد السامية للعد لكانتور

Cantor's uncountability of transcendental numbers

أطاحت نظرية المجموعات لجورج كانتور بالتمثيل القديم لمالانهاية على أنها كيان واحد. وبينت براهينه المتضادة على عدم قابلية الأعداد الحقيقية للعد، وقابلية الأعداد النسبية للعد أن الأعداد غير النسبية تفوق أبناء عمومتها : الأعداد النسبية عددا بشكل غير منته. وذهب كانتور إلى ما هو أبعد من ذلك فالأعداد الجبرية تحتوي على أعداد نسبية إلا أنها أيضاً تحتوي على العديد من الأعداد غير النسبية الأكثر شيوعا مثل ($\sqrt{2}$). أثبتت كانتور أن الأعداد الجبرية أيضاً قابلة للعد شأنها شأن الأعداد النسبية، ولهذا الأمر نتيجة مذهلة: فعلى الرغم من شذوذ وغرابة الأعداد المتسامية إلا أنها هي السائدة؛ حيث أن تقريبا جميع الأعداد الحقيقية أعداد متسامية، أما الأعداد المألوفة التي نستخدمها بكثرة مثل الأعداد الصحيحة والنسبية والجبرية فهي مجرد قطعة فضة صغيرة في فضاء الأعداد المتسامية الفسيح.

نظرية الأعداد المتسامية Transcendental number theory

لقد أثبت جورج كانتور أن تقريبا جميع الأعداد الحقيقية متسامية، ومن العجب العجاب أنه يصعب العثور على أمثلة محددة، وظلت أعداد ليوفيل، و العدد e و (ط) لبعض الوقت هي الأمثلة الوحيدة المعروفة. تناولت المسألة السابعة لهيلبرت عام 1900 لأول مرة الصعوبة الأساسية: الطريقة التي تتفاعل بها الأعداد المتسامية مع الرفع إلى قوى (exponentiation).

قدمت مبرهنة جيلفوند–شنايدر(، the Gelfond–Schneider theorem) عام 1834 الإجابة بتقديم القاعدة المحكمة الأولى للتسامي: يقال أنه إذا كان (a) عددا جبريا (ليس 0 ولا 1)، و كان (b) عددا جبريا غير نسبي فسيكون (a^b) دائما عددا متساميا، بالتالي فإن العددين ($\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$)، و ($3^{\sqrt{7}}$) على سبيل المثال متساميان.وخلال القرن العشرين تم البناء على هذه النتيجة ولا سيما في النتائج مثل مبرهنة الأسس الستة (the six exponentials theorem)، والعمل الرائد لآلان بيكر(Alan Baker) في الستينيات الذي حصل من أجله على ميدالية فيلدز.

كان عمل آلان حول جمع الأعداد على الصورة ($b \ln a$)، وقد أدت نتائجه إلى توسيع مبرهنة جيلفوند-شنايدر إلى حواصل ضرب أعداد على الصورة (a^b) (حيث (a)، و (b) كلاهما عدد جبري، و(a) لا تساوي 0 أو 1، و(b) غير نسبي)

وقد أضاف ذلك إلى رصيد الأمثلة المعروفة للأعداد المتسامية إضافة هائلة عن طريق تضمين أعداد مثل ($2^{\sqrt{3}} \times 5^{\sqrt{7}} \times \sqrt{10}^{\sqrt{11}}$) إلا أن ظاهرة التسامي لا زالت صعبة التحديد للغاية، فإلى اليوم لازالت حالة العديد من الأعداد بما فيها (e^e)، ($e + \pi$) مجهولة. ومعظم تلك الأسئلة غير المحلولة تأتي من حدسية سكانويل (Schanuel's conjecture).

مبرهنة الأسس الستة Six exponentials theorem

أثبت كل من سيجل (Siegel)، وشنايدر (Schneider)، و لانج (Lang)، وراماشاندرا (Ramachandra) مبرهنة الأسس الستة التي تهاجم المسألة الأساسية في نظرية الأعداد المتسامية وهي: عدد مرات الرفع إلى قوى اللازمة ليكون الناتج عددا متساميا.

وهي تنص على أنه إذا كان (a)، (b) أعدادا مركبة ، وكذلك ((x)، (y)، (z) أعدادا مركبة أيضاً فإن على الأقل أحد هذه الأرقام (e^{ax})، (e^{bx})، (e^{ay})، (e^{by})، (e^{az})، (e^{bz}) يكون متساميا، أما الشروط فهي أن (a)، (b) لابد أن يكونا مستقلين خطيا بمعنى أن أحدهما ليس مضاعفا للآخر بعدد نسبي (بالتالي ($a \neq \frac{3}{4}b$) مثلا)، بالمثل يجب ألا تكون أي من (x)، أو(y)،أو (z) يمكن الحصول عليها بضرب الأخرتين في عدد نسبي والجمع (بالتالي ($x \neq \frac{1}{3}y + \frac{2}{5}z$) مثلا).

هذه المسألة مفتوحة، وتعرف باسم حدسية الأسس الأربعة سواء الشيء نفسه يتحقق عند حذف (z) أم لا ينتج من حدسية سكانويل.

حدسية سكانويل Schanuel's conjecture

كانت المشكلة الحرجة منذ بداية نظرية الأعداد المتسامية هي كيفية تصرف الأعداد المتسامية عند رفعها إلى قوى. عام 1960م وضع ستيفن سكانويل (Stephen Schanuel) حدسية شاملة قد تغير فهمنا تماما للظاهرة فقط إذا تم إثباتها . في الحقيقة تندرج حدسية

سكانويل تقريبا تحت كل المبرهنات المعروفة حول الأعداد المتسامية، وفي نفس الوقت تحل مئات الأسئلة المفتوحة بما فيها حدسية الأسس الأربعة، وتسامي (e^e)، و($e + \pi$).

حدسية سكانويل مصاغة باللغة التقنية لنظرية جالو(Galois theory)، وتقول في مضمونها أنه لا يوجد مفاجآت غير سارة مخبأة: فالتسامي والرفع إلى قوى يتفاعلان معا بطريقة بسيطة كما يؤمل تماما. فطبقا لمنظر الأعداد دايفيد ماسر (David Masser) فإن حدسية سكانويل "ينظر إليها بشكل عام على أنها يستحيل إثباتها " إلا أن في عام 2004 طبق بوريس زيلبر (Boris Zilber) أساليب من نظرية النموذج (model theory) ليقدم دليلا قويا غير مباشر على أن حدسية سكانويل يجب أن تكون صحيحة، ولازال النظر في إذا ما كان يمكن اعتبار هذه الرؤية برهانا على تلك الحدسية الخطيرة أم لا قائما.

الإنشاءات باستخدام المسطرة والفرجار
RULER AND COMPASS CONSTRUCTIONS

الإنشاءات باستخدام المسطرة والفرجار Ruler and compass constructions

عالم الهندسة مملوء بالأجسام والأشكال العجيبة، وغالبا ما ننظر إلى تلك الأشياء من وجهة نظر نظرية بحتة، لكن كيف يمكننا إنشاء هذه الأجسام والأشكال بالفعل؟ لنأخذ هذا السؤال إلى حدوده الصحيحة، أي هذه الأشكال يمكن إنشاؤه باستخدام أبسط الأدوات: المسطرة لرسم الخطوط، والفرجار لرسم الدائرة؟ لقد افتتن علماء الرياضيات اليونانيين القدماء بهذا السؤال.

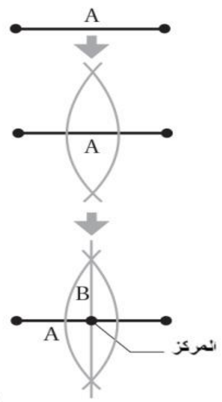
يطلق أحيانا على هذه العملية اسم الإنشاءات باستخدام الحافة المستقيمة والفرجار لتوضيح أن المسطرة هنا لا تستخدم في القياس بل هي فقط أداة لرسم خطوط مستقيمة، وبالمثل، يضبط الفرجار بحيث تكون فتحته مساوية لطول أي خط تم إنشاؤه بالفعل (أو أي طول عشوائي).

بالتمكن من بعض الأمثلة المحددة مثل (إنشاء سباعي عشر جاوس Gauss’ heptadecagon) بدأت بعض المبادئ الجبرية المستخدمة في الوضوح. فأعمال بيير وانتزيل

(Pierre Wantzel) في القرن التاسع عشر وكذلك تطوير الأعداد القابلة للإنشاء هي ما أدت إلى محو هذا السؤال تماما من فرع الهندسة، ووضعه في مملكة نظرية الأعداد الجبرية.

تنصيف الخط المستقيم Bisecting a line

لدينا نقطتان مرسومتان على ورقة: التحدي هو إيجاد النقطة التي تقع في منتصف المسافة بينهما تماما باستخدام مسطرة وفرجار فقط. الحل كما ورد في مسألة 1.10 في كتاب العناصر لإقليدس هو ما يلي:



1- صل النقطتين بخط مستقيم (A)

2- افتح الفرجار بحيث تكون فتحته أكبر من نصف المسافة بين النقطتين. ضع سن الفرجار على احدي النقطتين ثم ارسم قوسا يقطع الخط، وكرر ذلك عند النقطة الثانية.

3- لابد أن يتقاطع القوسان في موضعين (طالما قمت برسمهما بطول مناسب). صل الموضعين بخط مستقيم (B)

4- الموضع الذي يتقاطع فيه الخطان (A)، و(B) هو نقطة المنتصف التي نبحث عنها.

في حقيقة الأمر، هذا الإنشاء يقدم ما هو أكثر قليلا من مجرد إيجاد نقطة المنصف: الخط (B) هو المنصف العمودي للخط (A).

إنشاء الخطوط المتوازية Constructing parallel lines

من البديهيات الأساسية في الهندسة الإقليدية مسلمة التوازي التي تقول أن لأي خط (L)، وأي نقطة (A) لا تنتمي إليه هناك خط آخر يمر بـ (A) موازيا للخط (L). هل يمكن إنشاء ذلك بالمسطرة والفرجار؟

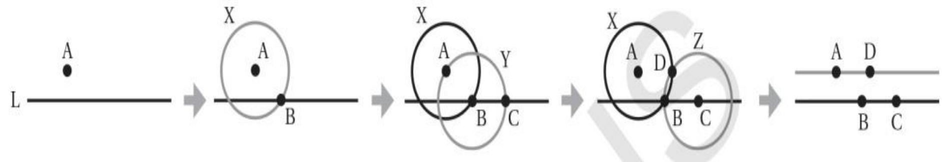
مسألة 1.31 في كتاب العناصر لإقليدس تقول إن ذلك ممكن. أولا افتح الفرجار فتحة أكبر من المسافة بين النقطة (A)، والخط (L) وابق على فتحة الفرجار هذه حتى نهاية الإنشاء.

1- ارسم دائرة (X) مركزها (A) تقطع الخط (L) في موضعين؛ اختر أحدهما وارمز له بـ (B)

2- ارسم دائرة أخرى (Y) مركزها (B) ستقطع الخط (L) في موضعين أيضاً؛ اختر أحدهما وارمز له بـ (C).

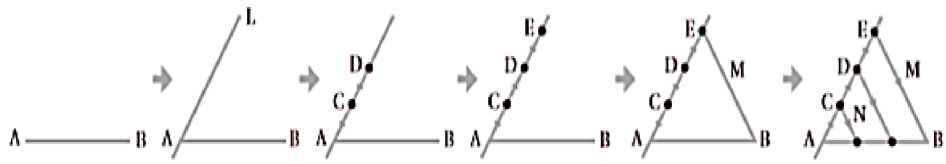
3- ارسم دائرة ثالثة (Z) مركزها (C) ستقطع الدائرة (X) في (B) وفي نقطة ثانية نرمز لها بـ (D).

4- الخط (AD) موازي للخط (L) كما نريد.



تثليث الخط المستقيم Trisecting a line

بما أنه يمكن تنصيف الخط المستقيم باستخدام المسطرة والفرجار فقط، بالتالي يمكن أيضاً تقسيمه إلى أربعة، أو ثمانية أجزاء، أو ست عشرة جزءا متساويا فقط بتكرار ما قمنا به في عملية التنصيف، لكن هل يمكن تقسيم الخط إلى ثلاثة أجزاء متساوية؟ وضح إقليدس في مسألة 6.9 في كتاب العناصر أن ذلك ممكن:



1- لتجزئة الخط (AB) إلى ثلاثة أجزاء، ارسم أولا خطا أخر (L) يمر بـ (A).

2- اختر أي نقطة (C) تنتمي للخط (L) ثم استخدم الفرجار لتحديد نقطة أخرى (D) على الخط (L) بحيث تكون المسافة من (A) إلى (C) هي نفسها المسافة من (C) إلى (D).

3- كرر ذلك لإيجاد نقطة ثالثة (E) تنتمي للخط (L) بحيث تكون المسافة من (A) إلى (C) هي نفسها من (D) إلى (E) بحيث تكون (C) في ثلث المسافة من (A) إلى (E).

4- الآن صل (E) بـ (B) بخط جديد (M).

5- ارسم خطا (N) يمر بـ (C) موازيا لـ (M).

6- النقطة التي يقطع فيها الخط (N) (AB) تقع في ثلث المسافة من (A) إلى (B).

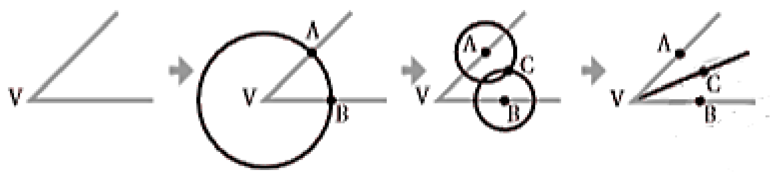
الخطوة 5 تتطلب استخدام إنشاء الخطوط المتوازية.

الخطوط ذات الأطوال النسبية Lines of rational length

يمكن تعميم طريقة تثليث الخط المستقيم للسماح بتجزئة الخط إلى أي عدد تريده من الأجزاء. إذا بدأنا بخط طوله الوحدة يمكننا إنشاء خط طوله $(\frac{x}{y})$ حيث $(\frac{x}{y})$ عدد نسبي. أولا قم بتجزئة الخط إلى عدد (Y) من الأجزاء المتساوية. ثم ضع عدد(x) بحيث تكون نهاياتها متصلة ببعضها البعض (عن طريق قياس أجزاء الخط الطويل باستخدام الفرجار). وهذا يبين أن جميع الأعداد النسبية قابلة للإنشاء. بعض- لكن ليس كلها- الأعداد غير النسبية قابلة للإنشاء أيضاً، لأن الجذر التربيعي عملية قابلة للإنشاء أيضاً.

تنصيف الزاوية Bisecting an angle

لدينا ورقة تحتوي على خطين متلاقيين يصنعان زاوية: التحدي هو تقسيم هذه الزاوية إلى نصفين باستخدام المسطرة والفرجار فقط. الحل الذي جاء في مسألة 1.9 في كتاب العناصر لإقليدس كالآتي:



1- ضع الفرجار عند رأس الزاوية (V)، وافتحه فتحة لها أي طول. ارسم قوسا يقطع ضلعي الزاوية في نقطتين (A)، و(B).

2- بعد التأكد من أن فتحة الفرجار كبيرة، ضع الفرجار عند (A) وارسم دائرة.

3- ابق الفرجار على نفس الفتحة وارسم دائرة أخرى مركزها (B).

4- لابد أن تتلاقى الدائرتان وليكن في (C).

5- صل بين (V)و(C) بخط مستقيم: هذا هو منصف الزاوية.

تثليث الزاوية Trisecting an angle

خطوات تنصيف الزاوية ليست معقدة بصورة خاصة، والسؤال الأصعب كلية هو ما إذا كانت زاوية عامة ما يمكن تثليثها: أي تقسيمها إلى ثلاثة زوايا متساوية. استطاع أرشميدس من بين آخرين أن يحل هذه المسألة، واكتشف كيف يمكن عمل ذلك باستخدام أداة إضافية مكنته من الرسم ألا وهي حلزون أرشميدس، فلم يستطع هو أو غيره تنفيذ هذا الأمر بدقة باستخدام المسطرة والفرجار فقط، إلا أن هناك وسائل تقريبية اكتشفت إحداها أن ترسم وترا يمر بالزاوية ثم تقوم بتثليث هذا الوتر.

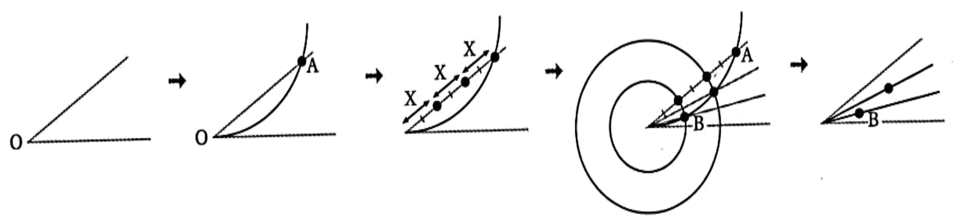
ظل هذا اللغز قائما حتى عام 1836 عندما أثبته بيير وانتزل أخيرا. بصفة عامة لا يمكن جبريا تثليث الزاوية باستخدام المسطرة والفرجار فقط. إلا أن بعض الزوايا الخاصة مثل الزاوية القائمة يمكن تثليثها جبريا.

تثليث الزاوية باستخدام المسطرة والفرجار وحلزون أرشميدس

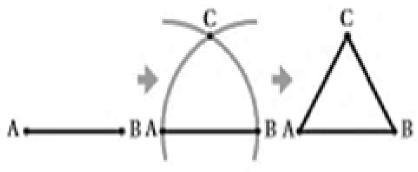
Trisecting an angle using a ruler, compass, and Archimedean spiral

لنفرض أن زاوية ما رأسها المركز (O) وضلعيها خطان أحدهما أفقي والآخر مائل. ارسم حلزونا مركزه (O). عند نقطة ما ولتكن (A) سيقطع المنحنى الخط المائل.

من التعريف: لجميع النقط الواقعة على الحلزون تكون المسافة بين النقطة والمركز تساوي قياس الزاوية المرسومة لأن ($\mathbf{r = 0}$). عند هذه المرحلة يكون تثليث الزاوية مكافئا لتثليث المسافة بين (A)، و(O) ، وبالطبع هذه مسألة يمكن حلها ، ولنقل أن المسافة الناتجة (X). نفتح الفرجار فتحة مساوية لـ (X)، ونستخدم ذلك لإيجاد نقطة على الحلزون تقع على بعد (X) من المركز ، وهذا هو حل المسألة الأصلية.



إنشاء مثلث متساوي الأضلاع Constructing an equilateral triangle



تبين أول مسألة في كتاب إقليدس؛ المسألة 1.1 أن المثلث المتساوي الأضلاع يمكن إنشاؤه باستخدام المسطرة والفرجار. نفرض أن لدينا قطعة من خط مستقيم (وليكن طرفيها (A)، و(B). التحدي هو أن نجد نقطة أخرى (C) بحيث يكون (ABC) مثلثا متساوي الأضلاع. حل إقليدس كما يلي:

1- افتح الفرجار فتحة مساوية للمسافة بين (A)، و(B)، ثم ارسم قوسا مركزه (A)، ويمر بالنقطة (B).

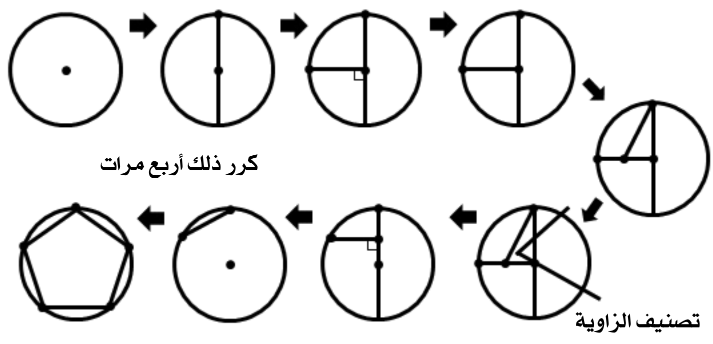
2- بنفس فتحة الفرجار ارسم قوسا مركزه (B)، ويمر بالنقطة (A).

3- لابد أن يتلاقى القوسان في نقطة: هي النقطة (C).

إنشاء المربعات، والمضلعات الخماسية Constructing squares and pentagons

المثلث متساوي الأضلاع هو أول مضلع منتظم،وهو قابل للإنشاء، يليه المربع، وقد بينت مسألة 1.46 في كتاب العناصر لإقليدس أن المربع قابل للإنشاء أيضاً، ويتوقف ذلك على إمكانية رسم زاوية قائمة عند نقطة (A) على خط ما (L)، وهذا ممكن عن طريق أخذ نقطتين (B)، و(C) على مسافة متساوية على جانبي النقطة (A) وبالتالي تكون منصفة للقطعة (BC).

يحتوي كتاب العناصر أيضاً على شرح كيفية إنشاء مضلع خماسي منتظم (انظر الشكل)، وكذلك إنشاء مضلع سداسي، وخماسي عشر (15 ضلع).



سباعي عشر جاوس Gauss’ heptadecagon

يمكن تمديد طريقة إقليدس لإنشاء المضلعات المنتظمة لتشمل المضلعات الأخرى، وقد تمكن علماء الرياضيات كلية من إنشاء مضلع منتظم عدد أضلاعه (n) حيث (n) إحدى القيم الآتية (3,4,5,6,8,10,12,15,16,20,24,30,32,40,48,60,64,...)... وبقي الوضع كما هو عليه دون تغيير لمدة ألفي عام. وقد كان ذلك غير مرضيا أبدا: ألا يمكن إنشاء مضلعات عدد أضلاعها 7، أو 9، أو 11؟ و إذا كان ذلك غير ممكن فماذا تعني تلك المتتالية؟ أم أن هناك طرقا مناسبة لذلك لكن غير مكتشفة بعد؟

عام 1796م، أدهش كارل فريدريك جاوس (Carl Friedrich Gauss) عقول المجتمع الرياضي بإعلانه أنه تمكن من إنشاء مضلع سباعي عشري منتظم (17 ضلعا). وجاء شرح ذلك في تحليله للمضلعات القابلة للإنشاء خلال الأعداد الأولية لفيرما (Fermat primes). كان جاوس سعيدا باكتشافه إلى درجة جعلته يطلب نحت هذا الشكل على شاهد قبره إلا أن النحات رفض ذلك مبينا أنه سوف يبدو على شكل دائرة. وقد مثل هذا الشكل المحبب إلى قلب جاوس في تمثال تكريما له في مسقط رأسه: مدينة براونشفايغ بألمانيا.

المضلعات القابلة للإنشاء Constructible polygons

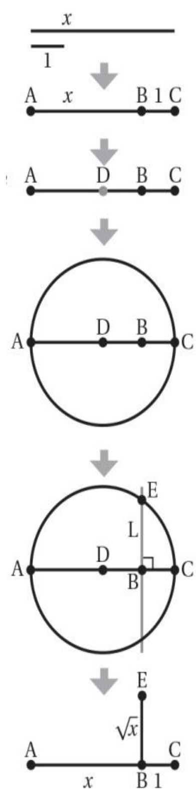
جعل إنشاء جاوس للمضلع السباعي عشر متتالية المضلعات القابلة للإنشاء أكثر غموضا: (3,4,5,6,8,10,12,15,16,17,20,24,30,32,40,48,60,64,...)..... إلا أنه في الحقيقة لم يتوقف عند حقيقة أن المضلع ذا السبع عشرة ضلعا قابل للإنشاء، بل بين أنه إذا كان العدد (n) له صورة معينة فإن المضلع الذي عدد أضلاعه (n) يكون قابلا للإنشاء، وهذه الصورة تعتمد على التفكيك الأولي (prime factorization) للعدد (n).

فإذا كانت (n) إحدى قوى العدد 2 فسيكون المضلع الذي عدد أضلاعه (n) قابلا للإنشاء، وإن لم يكن الأمر كذلك، فلابد لكي تكون (n) قابلة للإنشاء أن تكون الأعداد الأولية الوحيدة التي تظهر في تفكيك (n) هي أعداد فيرما الأولية: تلك الأعداد على الصورة $(2^{2^m}+1)$ مثل $(3(=2^{2^0}+1))$ و $(15(=2^{2^1}+1))$ وبالطبع $(17(=2^{2^2}+1))$.

والأكثر من ذلك أن هذه الأعداد الأولية لفيرما تظهر مرة واحدة فقط في مفكوك (n). بالتالي يكون معيار جاوس لتحديد قابلية الإنشاء هو أن $(n = 2^k \times p \times q \ldots \times s)$ حيث (k) أي رقم طبيعي، و $(p, q, \ldots, s)$ أعداد فيرما أولية مختلفة.

وقد افترض جاوس أن هذا الشرط ضروري أيضاً: فالمضلع الذي عدد أضلاعه (n) يكون قابلا للإنشاء فقط إذا تحقق هذا الشرط. وقد أثبت بيير وانتزل ذلك عام 1836. ويتوقف إيجاد المزيد من المضلعات القابلة للإنشاء فقط على ما إذا كان هناك المزيد من أعداد فيرما الأولية أم لا.

إنشاء الجذر التربيعي Constructing a square root



بين إقليدس في 2.14 من كتاب العناصر كيفية إنشاء جذر تربيعي باستخدام المسطرة، والفرجار فقط. لنفرض أن لدينا طولين هما (**I**)، و(**x**) (سوف نفرض أن $(\mathbf{x} > \mathbf{1})$ للتسهيل، لكن هذه الطريقة يمكن تطبيقها بسهولة إذا كانت $(\mathbf{1} > \mathbf{x})$. التحدي هو إنشاء خط جديد طوله $(\sqrt{\mathbf{x}})$.

1- أولا ضع الطولين جنبا إلى جنب من نهايتيهما بحيث تحصل على خط (AC) طوله $(\mathbf{x} + \mathbf{1})$، ويمكن تنفيذ ذلك باستخدام الفرجار. حدد النقطة (B) حيث تتلاقى القطعتان.

2- نصف (AC) لتحصل على نقطة (D).

3- افتح الفرجار فتحة مساوية لطول (AD) وارسم دائرة مركزها (D).

4- بعد ذلك ارسم خطا مستقيما (L) يمر بالنقطة (B) عمودياً على (AC).

5- حدد نقطة (E) يقطع فيها الخط (L) الدائرة.

6- الخط (EB) طوله يساوي $(\sqrt{\mathbf{x}})$.

السبب وراء نجاح ذلك هو أن (DE) يساوي (DC) في الطول ويساويان تحديدا نصف (AC) ($\frac{x+1}{2}$)، وأيضا طول (DB) = ($\frac{x+1}{2} - 1 = \frac{x-1}{2}$)، وبالتالي عند تطبيق مبرهنة فيثاغورث على المثلث (DBE) نجد أنه إذا كان طول الضلع (EB) يساوي (y) فإن ($y^2 + (\frac{x-1}{2})^2$)، وبالقليل من الجبر تكتمل الحجة.

تربيع الدائرة Squaring the circle

التحدي كالآتي: لدينا دائرة، والمطلوب هو إنشاء مربع له نفس المساحة باستخدام المسطرة والفرجار فقط. لقد حيرت هذه المسألة- التي تعرف أيضاً باسم (the quadrature of the circle)- عقول علماء الرياضيات منذ عصور اليونانيين القدماء، وهي وثيقة الارتباط بمسألة أكثر قدما هي: قيمة العدد ط.

لنفرض أن نصف قطر الدائرة يساوي الوحدة، بالتالي فإن مساحتها تساوي ($\boldsymbol{\pi \times 1^2 = \pi}$)، بالتالي لابد أن تكون أضلاع المربع الذي نريده مساوية ($\sqrt{\boldsymbol{\pi}}$)، وبمجرد أن يكون لدينا خط بهذا الطول فسيصبح إنشاء المربع مباشرا، أي أن عُقدة المسألة تكمن في إنشاء هذا الطول.

بما أن الجذور التربيعية قابلة للإنشاء فيكفي إنشاء خط طوله ($\boldsymbol{\pi}$)، بالتالي يكون مفتاح حل المسألة هو ما إذا كانت ($\boldsymbol{\pi}$) قابلة للإنشاء أم لا. عام 1836 وضح "بيير وانتزل" أنه إذا كان ($\boldsymbol{\pi}$) عددا متساميا فإنه يكون غير قابل للإنشاء. أما الجزء النهائي من هذه الأحجية جاء عام 1882 عندما تضمنت مبرهنة ليندمان – ويرستراس (the Lindemann–Weierstrass theorem) أن ($\boldsymbol{\pi}$) حقا عدد متسامي، وبالتالي يكون تربيع الدائرة مستحيلا.

تربيع الدائرة التقريبي لراما نجن Ramanujan's approximate circle-squaring

وجد سيرنفانا 1914 طريقة تقريبية دقيقة جدا لتربيع الدائرة، فعلى الرغم من أن ($\boldsymbol{\pi}$) غير قابل للإنشاء إلا أنه وجد تقريبا عجيبا له قابلا للإنشاء، وهو تحديدا $\left(\sqrt[4]{\frac{\mathbf{2143}}{\mathbf{22}}}\right)$ ، ودقته تصل إلى 8 خانات عشرية. العدد ($\frac{\mathbf{2143}}{\mathbf{22}}$) قابل للإنشاء كطول نسبي، ثم تطبق خطوات

إنشاء الجذر التربيعي مرتين للحصول على $\left(\sqrt{\frac{2143}{22}}\right)$ ثم $\left(\sqrt[4]{\frac{2143}{22}}\right)$. إذا كان طول الدائرة الأصلية مترا واحدا سوف تكون أضلاع المربع الناتج دقيقة إلى أقرب نانومتر.

مضاعفة المكعب Doubling the cube

حوالي عام 430 ق.م عانت آثينا من مرض الطاعون الفتاك، فاستشار الآثينيون عرافة أبولو على جزيرة دي لوس. أخبرتهم العرافة أن للقضاء على الطاعون عليهم إنشاء مذبح جديد للكنيسة حجمه ضعف الحجم الحالي. وعندما استشاروا أفلاطون كان رده أن العرافة تنوي فضح عدم اهتمام الإغريق بعلم الهندسة، هذه هي رواية أصل مسألة مضاعفة المكعب، ومهما كانت هذه الرواية حقيقية أم لا، فإن هذه المسألة حقا شغلت عقول علماء الرياضيات القدامى، وهي في الأساس مسألة إنشاء باستخدام المسطرة والفرجار (و إن كانت في الأبعاد الثلاثية): لدينا مكعب والتحدي هو إنشاء مكعب جديد حجمه ضعف المكعب الأصلي.

لنفرض أن طول حرف المكعب الأصلي مترا واحدا، وبالتالي يكون حجمه مترا مكعبا ويكون حجم المكعب المطلوب مترين مكعبين، مما يعني أن طول حرفه يساوي ($\sqrt[3]{\mathbf{2}}$)، وإنشاء هذا الطول هو لب المسألة. تمكن (Menaechmus) صديق أفلاطون من حل المسألة باستخدام المزيد من الأدوات أكثر من المسطرة والفرجار البسيطين: أدرك في الأساس أن القطعين المكافئين ($\mathbf{y^2 = 2x}$)، و($\mathbf{y = x^2}$) يتقاطعان في نقطة إحداثي (X) لها يساوي (وهي رؤية مذهلة حيث إن الإحداثيات الديكارتية لم تكتشف إلا بعد آلاف السنين من ذلك). في النهاية عام 1836 أثبت بيير وانتزل -الذي بين أن ($\sqrt[3]{\mathbf{2}}$) عدد غير قابل للإنشاء-أن المسالة مستحيلة.

الأعداد القابلة للإنشاء Constructible numbers

تختصر العديد من مسائل إنشاءات المسطرة والفرجار إلى التالي: إذا كان لدينا خط طوله الوحدة، وعدد (r)، فهل من الممكن إنشاء خط طوله (r)؟ إذا كان ذلك ممكنا نقل أن العدد (r) عدد قابل للإنشاء، ومن الواضح أن الأعداد الصحيحة مثل 4 قابلة للإنشاء:

ارسم خطا طويلا ثم استخدم الفرجار لتحديد طول أربع قطع مستقيمة متتالية طول كل منها الوحدة.

الأعداد على الصورة ($\frac{m}{n}$) قابلة للإنشاء أيضاً: يمكن بسهولة تمديد طريقة تثليث الخط المستقيم للحصول على خط طوله عدد نسبي.

حتى الآن يتضح أن جميع الأعداد النسبية قابلة للإنشاء إلا أنها ليست هي فقط، فالجذور التربيعية أيضاً قابلة للإنشاء. وقد أثبت بيير واتنزل أن ذلك هو أقصى ما في وسعنا عمله: فالأعداد القابلة للإنشاء هي فقط الأعداد التي نحصل عليها عن طريق جمع الأعداد النسبية وطرحها وضربها وقسمتها، وإيجاد جذورها التربيعية، ويشير ذلك إلى أن الأعداد القابلة للإنشاء تكون مجالا (field).

بصفة خاصة، جميع الأعداد القابلة للإنشاء أعداد جبرية، مما يعني أنه ليس هناك عددا متساميا مثل (π) قابل للإنشاء، لكن ليست جميع الأعداد الجبرية قابلة للإنشاء: فمثلا ($\sqrt[3]{2}$) ليس قابلا للإنشاء على الرغم من أن ($\sqrt[4]{2}$) قابلا للإنشاء لأنه يساوي ($\sqrt{\sqrt{2}}$). هذه الرؤية قدمت لوانتزل حل العديد من المسائل البارزة لآلاف السنين: تثليث الزاوية، ومضاعفة المكعب، كما أنه أكمل عمل جاوس على المضلعات القابلة للإنشاء وحقق تقدما واسعا في مسألة تربيع الدائرة.

المعادلات الديفونتية DIOPHANTINE EQUATIONS

نظرية الأعداد Numbers theory

قد يبدو مصطلح (Numbers theory) وصفا جيدا لعلم الرياضيات بأكمله إلا أن هذا الموضوع يركز على نظام الأعداد الصحيحة العادية أكثر من نظام الأعداد الحقيقية أو المركبة المخلخلين، فالأعداد الصحيحة هي أقدم البني الرياضية وأكثرها جوهرية إلا أن أعمق الأسئلة الرياضية تكمن تحت سطح هذه الأعداد بما فيها فرضية ريمان (Riemann hypothesis) ومبرهنة فيرما الأخيرة (Fermat's last theorem).

لقد كان البابليون القدماء شغوفين بنظرية الأعداد كما يتضح من الألواح مثل لوح بليمبتون 322(Plimpton 322) التي يرجع تاريخها إلى حوالي عام 1800 ق.م. وقد شهد العصر الكلاسيكي تطورات مهمة من خلال أريثماتيكا (مجموعة من 13 كتاب للعالم ديوفانتوس بالإسكندرية) حوالي عام 250م. أما نظرية الأعداد الحديثة فقد كانت بواكيرها في أعمال القاضي الفرنسي بيير دي فيرما في القرن السابع عشر.

نظرية الأعداد الجبرية والتحليلية Algebraic and analytic numbers theory

الاهتمامان الرئيسيان لنظرية الأعداد المعاصرة هما سلوك الأعداد الأولية، ودراسة المعادلات الديفونتية: وهي الصيغ التي تصف العلاقات بين الأعداد الصحيحة. وهذان الموضوعان يتوافقان تقريبا مع الفرعيين الرئيسيين للموضوع: نظرية الأعداد الجبرية، ونظرية الأعداد التحليلية.

أما أدوات الموضوعين فهي مختلفة حيث أن المنهج الجبري يدرس الأعداد من خلال العناصر مثل المجموعات والمنحنيات الإهليلجية بينما نظرية الأعداد التحليلية تستخدم وسائل من الأعداد المركبة مثل الدالة اللامية (L-functions). ويقدم برنامج لانجلاند (Langland's program) إشارة محيرة إلى أن هذين الموضوعين العظيمين هما وجهتا نظر مختلفة لنفس العناصر الكامنة.

الحساب النمطي Modular arithmetic

الحساب النمطي هو حساب البواقي. نقول 11 مطابقة لـ 1 (بمقياس) 5 وتكتب ((11=1(mod5)، وتعني أن باقي العدد 11 عند قسمته على العدد 5 يساوي 1 لأن ($11 = 2 \times 5 + 1$). وكل ما يهم هنا هو الباقي 1 ليس عدد مرات تكرار العدد 5 في العدد 11 (وهو 2 في هذه الحالة). بالمثل يمكن أن نكتب ((6+6=0(mod4) (مقياس 4)، أو (($8 \times 3 = 2(\text{mod}11)$) (مقياس 11).

الحساب النمطي واسع الانتشار ليس فقط في علم الرياضيات بل في الحياة اليومية. فنظام ال 12 ساعة يعتمد على قدرتنا على عمل حسابات نمطية بمقياس 12، وإذا قمت

بحساب أي أيام الأسبوع سيكون بعد تسعة أيام من اليوم تكون قد قمت بعملية حسابية مقياسها 7، والحساب النمطي مفيد في نظرية الأعداد لأنه يزود بالمعلومات عن الأرقام التي قيمها المضبوطة مجهولة عن طريق النتائج الفعالة مثل مبرهنة فيرما الصغرى (Fermat's little theorem)، وقانون التبادل التربيعي لجاوس (Gauss' quadratic reciprocity law).

مبرهنة الباقي الصينية Chinese remainder theorem

في وقت ما بين القرنين الثالث والخامس بعد الميلاد كتب عالم الرياضيات الصيني سان زي (Sun Zi): "لنفرض أننا لدينا عدد غير معروف من العناصر، عند عدها ثلاثة ثلاثة يتبقى اثنان، وعند عدها خمسة خمسة يتبقى ثلاثة، وعند عدها سبعة سبعة يتبقى اثنان، كم عدد هذه العناصر؟" من وجهة النظر الحديثة، هذه المسألة تنتمي للحساب النمطي: وما نحتاجه هو عدد (n) حيث ($n = 2$) (مقياس 3)، و($n = 3$) (مقياس 5)، و($n = 2$)(مقياس 7).

تنص مبرهنة الباقي الصينية على أن هذا النوع من المسائل له حل دائما، وأبسط الحالات تتضمن فقط متطابقين: إذا كانت (a)، (b)، (r)، (s) أي أعداد فسيكون هناك دائما عدد (n) حيث ($n = a$ مقياس (r))، و ($n = b$ (مقياس(s))، والشرط هو أن (r)، و(s) لابد أن يكونا عددين أوليين فيما بينهما (أي ليس بينهما عوامل مشتركة (coprime))، وهذا يمتد مباشرة إلى حل أي عدد من المتطابقات (بشرط أن المقاييس جميعها أولية فيما بينها). الحل (n) ليس وحيدا تماما: 23 و 128 كلاهما حل لمسألة سان زي الأصلية. وبصفة عامة سيكون هناك حلا واحدا بالضبط يكون على الأكثر حاصل ضرب جميع المقاييس وهو في هذه الحالة (($7 \times 5 \times 3$)105).

مبرهنة فيرما الصغرى Fermat's little theorem

مبرهنة فيرما الصغرى هي حجر الزاوية لنظرية الأعداد الابتدائية وهي تأتي من ملاحظة أن ($15 - 15^2$) قابلة للقسمة على 2، و ($101 - 101^7$) قابلة للقسمة على 7.

عام 1640 كتب بيير دي فيرما إلى بيرنارد فرينكل دي بيسي نص نظريته الصغيرة: إذا كان (p) عددا أوليا، و (n) عدد صحيح، بالتالي $(n^p - n)$ لابد أن يكون قابلا للقسمة على $(n^p - n)$، وبكتابة ذلك باستخدام الحساب النمطي نحصل على

$$n^p - n = 0(\text{mod } p) \text{or } n^p = n(\text{mod } p)$$

إذا كانت (n) نفسها لا تقبل القسمة على (p) سيكون ذلك مكافئا لـ

$$(n^{p-1} = 1(\text{mod } p))$$

وأضاف فيرما ملاحظته المميزة "كنت سأرسل لك البرهان إلا إنني خشيت أن يكون طويلا جدا".

والبراهين المعروفة الأولى لهذه المبرهنة كانت لجوتفيرد ليبنيز في عمله غير المنشور حوالي عام 1683، وليونارد أويلر عام 1736.

قانون التبادل التربيعي Quadratic reciprocity law

أحب عالم الرياضيات الألماني العظيم كارل فريدريك جاوس هذه النتيجة، وأطلق عليها اسم المبرهنة الذهبية. وقد وضع ليونارد أويلر نص هذه النظرية عام 1783، ونشر جاوس أول برهان كامل لها عام 1796.

لأي عددين أوليين فرديين (p)، و(q) يصف هذا القانون تماثلا رائعا بين سؤالين: ما إذا كانت (p) مربع بمقياس(q) ، وما إذا كانت (q) مربع بمقياس (p).

يؤكد القانون أن هذين السؤالين لهما نفس الإجابة إلا عندما $(p = q = 3(\text{mod}4))$ (مقياس 4) حيث يكون لهما إجابتين متضادتين. خذ العددين 5، و 11 على سبيل المثال. أولا $(11 = 1(\text{mod}5)$ (مقياس 5)، والعدد 1 هو عدد مربع، لذلك فإن المبرهنة تتنبأ أن أيضاً 5 مقياس 11 لابد أن تكون عددا مربعا أيضاً.

هذا لا يتضح مباشرة، لكن بنظرة أكثر تعمقا نجد أن $(4^2 = 16 = 5(\text{mod}11))$.

يشكل قانون التبادل التربيعي، جنبا إلى جنب مع مبرهنة فيثاغورث، أحد أكثر

النتائج المبرهنة بكثرة في علم الرياضيات، فقد وضع له جاوس وحده ثمانية براهين في حياته، ويوجد الآن أكثر من مائتي برهان تستخدم مجموعة متنوعة من الأساليب.

أريثماتيكا لديوفانتوس Diophantus' Arithmetica

عاش ديوفانتوس في الإسكندرية حوالي عام 250 م وعرف بأبي الجبر، فعلى الرغم من أن البابليين القدماء كانوا قد بدأوا البحث عن الحلول الصحيحة للمعادلات التربيعية إلا أن كتاب أريثماتيكا المكون من 13 مجلدا لديوفانتوس والذي سميت المعادلات الديفونتية تكريما له بدئ بجدية ، وكان بمثابة حجر الزاوية في تاريخ نظرية الأعداد، لكن يعتقد أنه فقد عند تدمير المكتبة العظيمة بالإسكندرية. إلا أنه في عام 1464 عادت ستة كتب منها إلى الظهور مجددا، وانصب عليها تركيز بالغا من علماء الرياضيات الأوربيين ولا سيما بيير دي فيرما.

المعادلات الديفونتية Diophantine equations

المعادلة الديفونتية هي كثيرة حدود شأنها كشأن أي كثيرة حدود أخرى، لكن الفرق أننا هنا مهتمون فقط بالأعداد الصحيحة ، فلا يمكن ظهور إلا الأعداد الصحيحة في كثيرة الحدود (على الرغم أن السماح بظهور الكسور لا يشكل فرقا). الأهم أننا لسنا مهتمين إلا بالحلول الصحيحة للمعادلة.

بالتالي، بدلا من تحليل الأعداد الحقيقية أو المركبة (x)، (y)، (z) التي تحقق ($x^3 + y^3 = z^3$)، نسأل ما إذا كانت هناك أي أعداد صحيحة تحققها (في هذه الحالة، الإجابة لا كما ينتج من أشهر المسائل الديفونتية وهي مبرهنة فيرما الأخيرة). السبب وراء هذا الاهتمام المستمر هو أن كثيرات الحدود هي الطريقة الصحيحة للتعبير عن العلاقات الممكنة (أو غير الممكنة) بين الأعداد الصحيحة، على سبيل المثال: تقول حدسية كاتالان (Catalan's conjecture) أن العددين 8 ، 9 هما العددان الصحيحان الوحيدان المتجاوران اللذان يمكن كتابتهما على صورة قوى أعداد صحيحة.

الكسور المصرية Egyptian fractions

كسر الوحدة هو الكسر الذي بسطه 1 مثل ($\frac{1}{2}$) ، أو($\frac{1}{3}$) ، و($\frac{1}{4}$) (لكن ليس ($\frac{3}{4}$)، وبالتأكيد يمكن كتابة أي عدد نسبي على صورة كسور وحدة مجموعة معا: على سبيل المثال ($\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$). أما السؤال الأكثر إثارة فهو عن الأعداد النسبية التي يمكن كتابتها على شكل كسور وحدة مجموعة معا على أن تكون هذه الكسور مختلفة.

على سبيل المثال ($\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$) تمثيل للكسر ($\frac{3}{4}$) على صورة كسر مصري، وأطلقت عليه هذه التسمية؛ لأن هذه المسألة شغلت عقول علماء الرياضيات في مصر القديمة، وتشتمل بردية ريند (The Rhind papyrus) التي يرجع تاريخها إلى عام 1650 ق.م على قائمة من الكسور على الصورة ($\frac{2}{n}$) مكتوبة على صورة كسور مصرية.

عام 1202 كتب ليوناردوپيزا (Leonardo of Pisa) (المعروف بفيبوناتشي) كتابه (Liber Abaci) الذي أثبت فيه أن جميع الكسور يمكن تقسيمها بهذه الطريقة، وقدم خوارزمية لإيجاد هذه الصورة، لكن ذلك لم يحل الموضوع حلا كاملا: لازالت الأسئلة قائمة حول عدد كسور الوحدة اللازمة لتمثيل عدد ما، ونجد ذلك متضمنا في حدسية إردوس–شتراوس (Erdo˝s-Straus conjecture).

حدسية إردوس-شتراوس Erdo˝s-Straus conjecture

أي كسر معلوم على الصورة ($\frac{4}{n}$) (حيث (n) تساوي على الأقل 2) يمكن كتابته على صورة مجموع ثلاثة كسور وحدة (أي كسور بسطها 1). بالتالي لكل (n) تحقق ما سبق هناك ثلاثة أعداد صحيحة : (x)،و(y)،و(z) حيث ($\frac{1}{z}+\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=\frac{4}{n}$)، على سبيل المثال عند (n = 5) سيكون الحل $\frac{1}{10}+\frac{1}{5}+\frac{1}{2}=\frac{4}{5}$. لقد قاوم إدعاء بول إردوس، وإرنست شتراوس عام 1948 بأن ذلك صحيحا دائما.

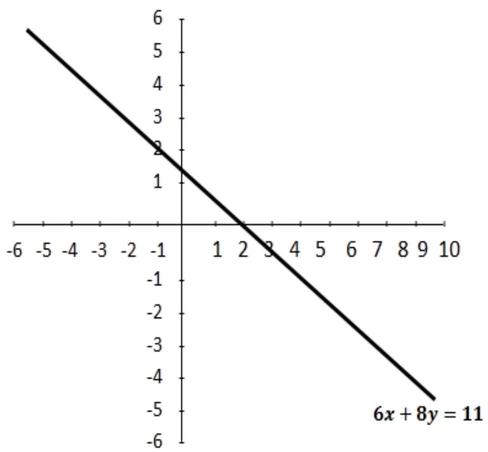
نظرية بوزو المصغرة Bézout's lemma

العامل المشترك الأعلى (المقام المشترك الأعلى) للعدين 36، و60 يساوي 12. تقول نظرية بوزو المصغرة التي أخذت تسميتها من إيتيين بوزو(Étienne Bézout) أن هناك

عددين صحيحين (x)، و(y) بحيث ($36x + 60y = 12$)، وبنظرة أعمق. نجد أن أحد الحلول هو ($x = 2$ and $y = -1$) لكن سيكون هناك عدد لا نهائي من الحلول الأخرى أيضاً مثل ($x = 7$ and $y = 4$). يمكن إعادة صياغة ذلك كعبارة حول المعادلات الديفونتية: إذا كان (d) هو العامل المشترك الأعلى للعددين (a)، و(b) فإن نظرية بوزو تضمن أن المعادلة ($ax + by = d$) لها عدد لا نهائي من الحلول الصحيحة (integers)، وهذه النظرية هي مفتاح فهم جميع المعادلات الخطية الديفونتية.

المعادلات الخطية الديفونتية Linear Diophantine equations

أبسط المعادلات الديفونتية هي المعادلات التي تحتوي على (x)، و(y) البسيطة (ليس فيها (x^2) أو (xy) أو قوى أعلى): أي المعادلات الخطية مثل ($6x + 8y = 11$)، فأي معادلة كهذه تحدد خطا مستقيما في المستوى، وبالتالي يكون السؤال عما إذا كان لهذه المعادلة حلول صحيحة مكافئا للبحث عن النقط الواقعة على هذا الخط ولها إحداثيات صحيحة..



تتناول نظرية بوزو أهم حالة: فهي تقول أن ($ax + by = d$) لها حل عندما يكون العدد (d) هو العامل المشترك الأعلى (المقام المشترك الأعلى) للعددين (a)، و(b) (وفي هذه الحالة يكون للمعادلة عدد لا نهائي من الحلول). في الحقيقة، المعادلة ($ax + by = d$) لها حلول فقط عندما يكون (d) أحد مضاعفات المضاعف المشترك الأصغر للعددين (a)، و(b)، بالتالي ليس للمعادلة ($6x + 8y = 11$) حلولا صحيحة لأن المضاعف المشترك الأصغر للعددين 6، 8 هو 2، و11 ليست من مضاعفات 2.

إذا كان للمعادلة الخطية أي حلول صحيحة، فسيكون عدد هذه الحلول لا نهائيا.

وهذه النتيجة تنطبق على المعادلات التي لها عدد أكثر من المتغيرات مثل ($3x + 4y + 5z = 8$)؛ حيث إن العامل المشترك الأعلى للأعداد 3، 4، 5 هو 1، وبما أن 8 هي أحد مضاعفات العدد 1، إذا يكون للمعادلة عدد لا نهائي من الحلول.

ماشية أرشميدس Archimedes' cattle

حوالي عام 250 ق.م أرسل أرشميدس خطابا لصديقه إيراتوستينس (Eratosthenes) يحتوي على تحدي لعلماء رياضيات الإسكندرية، وكان هذا التحدي حول "ماشية الشمس" الصقلية ، وهو قطيع يتكون من بقرات وثيران ذوي ألوان مختلفة. سوف نرمز لعدد الثيران البيضاء بالرمز(W)، وعدد البقرات البيضاء بالرمز (w)، ووبالمثل نرمز لعدد الثيران السوداء بالرمز (X)، وعدد البقرات السوداء بالرمز (x)، والرمزين (Y)، و(y) للماشية المنقطة، والرمزين (Z)،و (z) للون البني.

وصف أرشميدس القطيع خلال نظام من المعادلات الديفونتية الخطية:

$$W = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)X + Z \qquad X = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)Y + Z \qquad Y = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)W + Z$$

$$w = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)(X + x) \qquad x = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)(Y + y) \qquad y = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)(Z + z)$$

$$z = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)(W + w)$$

كان التحدي هو إيجاد بنية القطيع. لا نعرف كيف تعامل الإسكندرانيون مع ذلك، فالحل الأول المعروف هو الحل الذي جاء به علماء الرياضيات الأوربيين الذين أعادوا اكتشافه في القرن الثامن عشر:

$$w = 10{,}366{,}482,\quad X = 7{,}460{,}514,\quad Y = 7{,}358{,}060,$$
$$Z = 4{,}149{,}387,\quad w = 7{,}206{,}360,\quad x = 4{,}893{,}246,$$
$$y = 3{,}515{,}820,\quad z = 5{,}439{,}213,$$

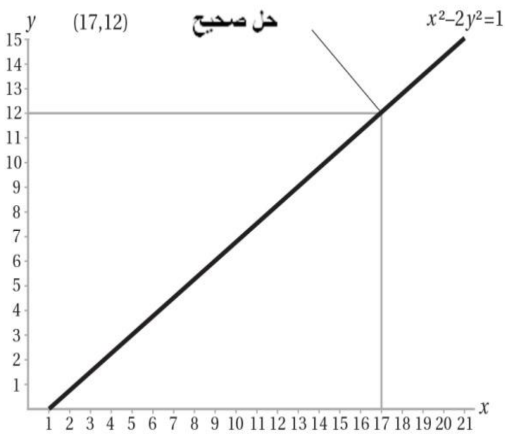
أي أن عدد رؤوس الماشية الكلي يساوي 50,389,082 .

إلا أن أرشميدس نوه على أن أي شخص يقوم بحل هذه المسألة "لن يقال أنه غير ماهر أو جاهل بالأعداد، ولا يجب أيضاً أن يعد من الحكماء"؛ حيث أن الحكمة التامة تتحقق بحل هذه المسألة في وجود شرطين إضافيين: أولهما أن يكون ($W + X$) عددا مربعا، وثانيهما

أن يكون $(Y + Z)$ عددا مثلثا.مافعله أرشميدس أزال المسألة من مجال المعادلات الخطية وجعلها أصعب بصورة ملحوظة. عام 1880 وصف إيه آمثور (A. Amtho)حلا قائما على اختزال المسألة إلى معادلة بل(Pell equation) $(a^2 + 4729494b^2 = 1)$. ومع بداية عصر الكمبيوتر تجسد الحل في صورة إجابة ذات (206,545) خانة:عدد ماشية أكبر من عدد الذرات الموجودة في الكون كله بشكل لا يقارن.

معادلات بل Pell equation

أسهل معادلات ديفونتية يمكن التعامل معها هي المعادلات الخطية، حيث يكون هناك خطوات مباشرة لتحديد ما إذا كان هناك أي حلول صحيحة أم لا، لكن الصورة تصبح أكثر ضبابية عند وجود المربعات كما يظهر في الحالة غير المعروفة لمتوازيات المستطيلات التامة.

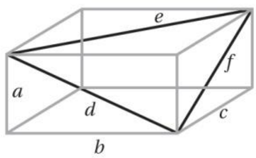


حوالي عام 800 ق.م قدم العالم الهندي بودهيانا (Baudhayana) العدد $(\frac{577}{408})$ على أنه تقريب للعدد $(\sqrt{2})$، ومن المحتمل أنه توصل إلى ذلك عن طريق دراسة المعادلة $(x^2 - 2y^{2=1})$ التي أحد حلولها $x = 277 \text{ and } y = 408$ (بالإضافة إلى $x = 17 , y = 12$). المعادلة $(x^2 - 2y^2 = 1)$ هي أول مثال على معادلات بيل ، ومن الأمثلة أيضاً المعادلة $(x^2 - 3y^2 = 1)$، وبصفة عامة $(x^2 - ny^2 = 1)$ حيث (n) عدد طبيعي غير مربع (في الحقيقة هذه المعادلات لا علاقة لها بجون بيل إلا أن ليونارد أويلر اختلط عليه الأمر بينه وبين ويليام برونكر (William Brouncker) إلا أن التسمية بقيت عالقة).

خضعت معادلات بيل للدراسة كثيرا فيما مضى في الهند ولا سيما دراسة براهماجوبتا (Brahmagupta) لها عام 628 م.

طريقة (chakravala) التي تعزى إلى باساكرا الثاني (Bhaskara II) في القرن الثاني عشر هي خطوات لحل معادلات بل باستخدام الكسور المستمرة، وقد سخرت بشكل مذهل لحل الحالة الغريبة ($x^2 - 61y^2 = 1$) لإيجاد القيم الصغرى للحل $x = 1,766,319,049$ و ($y = 266,153,980$). وقال هيرمان هانكل (Hermann Hankel) على طريقة (chakravala) "أفضل ما تم تحقيقه في نظرية الأعداد قبل لاجرانج". وكان جوزيف لويس لاجرانج (Joseph Louis Lagrange) هو أول من قدم برهانا دقيقا على أن ($x^2 - ny^2 = 1$) لابد أن يكون لها عدد لا نهائي من الحلول الصحيحة لأي عدد (n) غير مربع.

قوالب طوب أويلر Euler bricks



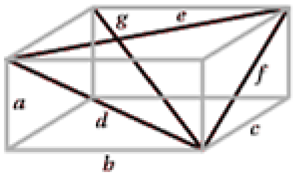
تمكننا ثلاثيات فيثاغورث (Pythagorean triples) من إنشاء مستطيل جميع أضلاعه وأقطاره أعداد صحيحة، على سبيل المثال المستطيل الذي أطوال أضلاعه 3 و 4 سيكون طول قطريه 5 (طبقا لمبرهنة فيثاغورث)، وقالب طوب أويلر يعمم ذلك إلى الأبعاد الثلاثة: وهو عبارة عن متوازي مستطيلات (انظر المجسمات ثلاثية الأبعاد غير المنتظمة) جميع حروفه أعداد صحيحة، وكذلك أقطار كل وجه. أصغر قالب طوب لأويلر أطوال حروفه تساوي 44، و 117، و 240 وحدة، واكتشفه بول هاك عام 1719. عام 1740 اكتشف عالم الرياضيات الكفيف نيكولاس ساندرسون طريقة لتوليد عدد لا نهائي من قوالب طوب أويلر. وقد أضاف أويلر نفسه على هذه الطريقة لاحقا إلا أن حتى الآن لا توجد طريقة لمعرفة كل القوالب الممكنة.

يمكننا ترجمة الهندسة إلى جبر باستخدام مبرهنة فيثاغورث. قالب طوب أويلر الذي أضلاعه (a, b, c)، و أقطار أوجهه (a, e, f) لابد أن يحقق المعادلات الديفونتية الآتية:

$$b^2 + c^2 = e^2 \quad \text{and} \quad c^2 + a^2 = f^2 \qquad a^2 + b^2 = d^2$$

أكثر الموضوعات بحثا بعد قوالب طوب أويلر كانت متوازيات المستطيلات المثالية "صعبة المنال".

متوازيات المستطيلات المثالية Perfect cuboids



لقد افتتن علماء الرياضيات منذ القرن الثامن عشر بقوالب طوب أويلر: وهي متوازيات مستطيلات أطوال أحرفها وأقطار وجوهها جميعا أعداد صحيحة، والامتداد الطبيعي لذلك هو أن نرغب في أن يكون قطر متوازي المستطيلات أيضاً عددا صحيحا، وهذا يصف متوازي المستطيلات المثالي. المشكلة هي أن أحدا لم يعثر على أي متوازي مستطيلات مثالي أبدا ، ومسألة وجودها أم عدم وجودها مسألة مهمة لازالت مفتوحة.

وبدلالة المعادلات الديفونتية يكون كل ماهو مطلوب أن تحقق (a, b, c) (التي تمثل أحرف متوازي المستطيلات) ، و(d, e, f) (التي تمثل أقطار الأوجه) ، و(g) (التي تمثل قطر متوازي المستطيلات) المعادلات:

$$a^2 + b^2 = d^2 \quad b^2 + c^2 = e^2 \quad \text{and} \quad c^2 + a^2 = f^2$$

بالإضافة إلى

$$(a^2 + b^2 + c^2 = g^2)$$

لم يسبق أن عثر أحد على متوازي مستطيلات مثالي، لكن من المعروف أنه إذا عثر على أحدها فسيكون طول أحد أضلاعه على الأقل 9 مليار وحدة إلا أن في عام 2009 اكتشف كل من جورج سوير (Jorge Sawyer)، وكليفورد ريتر (Clifford Reiter) وجود متوازيات سطوح (parallelepipeds) مثالية (انظر المجسمات ثلاثية الأبعاد غير المنتظمة) أطوال حروف أصغرها هي 271، 106، 103، وأقطار أوجهها التي على شكل متوازي أضلاع هي 101، 183، 266، 312، 255، 323 وأقطاره 374، 300، 278، 272.

مجموع مربعين Sums of two squares

هناك سؤال رياضي قديم يقول: ما الأعداد الطبيعية التي يمكن كتابتها على صورة مجموع مربعين؟ وقد قدمت مبرهنة مربعي فيرما الإجابة عن هذا السؤال بالنسبة للأعداد الأولية: الأعداد التي يمكن كتابتها كذلك هي الأعداد على الصورة ($4m + 1$) (وأيضا $1^2 + 1^2 = 2$)، لكن ماذا عن الأعداد المؤلفة (غير الأولية)؟ لا يمكن ذلك بالنسبة للعددين 6، 14، ولكن العدد 45 يمكنه ذلك: ($6^2 + 3^2 = 45$)، وبالنسبة للأعداد الكبيرة مثل (6615) يحتاج إيجاد الإجابة إلى الكثير من التجريب.

تشير نتائج فيرما إلى أن الأعداد الأولية لها أهمية خاصة، وأن العقبة الرئيسة هي الأعداد الأولية على الصورة ($4m + 3$) (3,7,11,19,23,31) إلخ. الحل (الذي يمكن استنتاجه من مبرهنة فيرما) يقوم أولا بتفكيك العدد الصحيح (n) إلى أعداد أولية باستخدام المبرهنة الأساسية في الحساب، ثم تنص المبرهنة على أن (n) يمكن كتابتها على صورة مجموع مربعين إذا كان أي عدد أولي على الصيغة ($4m + 3$) يظهر في المفكوك عددا زوجيا من المرات ، بالتالي ($3 \times 2 = 6$) لا تحقق ذلك لأن 3 تظهر مرة واحدة (عدد فردي من المرات) ، لكن 45 ($5 \times 3^2 = 45$) يمكن أن تكتب على صورة مجموع مربعين؛ لأن 3 تظهر مرتين (عدد زوجي من المرات)، وبدون الحاجة إلى مزيد من التجريب أصبح في إمكاننا معرفة أن العدد (6615) تستحيل كتابته على صورة مجموع مربعين؛ لأن ($7^2 \times 5 \times 3^3 = 6615$) حيث يظهر العدد 3 ثلاثة مرات.

مبرهنة المربعات الأربعة للاجرانج Lagrange's four square theorem

ترجم كلود باشي (Claude Bachet) عام 1621 الكتب الستة التي بقيت من مجموعة كتب أريثماتيكا لديوفانتوس (التي يرجع تاريخها إلى حوالي عام 250م) من اليونانية القديمة إلى اللاتينية. وقد لعبت هذه المجلدات دورا مهما في تطور نظرية الأعداد الحديثة ولاسيما على يد بيير دي فيرما، كما أن باشي نفسه كان عالم رياضيات، وقد لاحظ أن بين طيات أعمال ديوفانتوس إدعاء بارزا: يقول أن جميع الأعداد الصحيحة يمكن كتابتها على صورة مجموع أربعة مربعات، على سبيل المثال ($0^2 + 1^2 + 1^2 + 3^2 = 11$)، ($1^2 + 6^2 + 8^2 + 30^2 = 1001$) .

وقد لاحظ فيرما نفس الشيء فيما بعد الذي عرف باسم حدسية باشي (Bachet's conjecture) إلا أن أول برهان منشور لجميع الأعداد الصحيحة كان على يد جوزيف لويس لاجرانج (Joseph-Louis Lagrange) عام 1770، ثم عممت هذه النظرية المهمة فيما بعد خلال مبرهنة العدد المضلعي لفيرما (Fermat's polygonal number theorem)، ومسألة ويرنج (Waring's problem).

مبرهنة المربعات الثلاثة للجاندر Legendre's three square theorem

نشر ليونارد أويلر البرهان الأول لمبرهنة مربعي فيرما عام 1749، وقد قدم إجابة للسؤال عن الأعداد التي يمكن كتابتها على صورة مجموع مربعين بشكل أساسي، وفي عام 1770 أثبت جوزيف لويس لاجرانج مبرهنته: مبرهنة المربعات الأربعة للاجرانج (Lagrange's four square theorem) مبينا أن جميع الأعداد الطبيعية يمكن كتابتها على صورة مجموع أربعة أعداد مربعة، واللغز الذي بقى هو: ما الأعداد التي يمكن كتابتها على صورة مجموع ثلاثة مربعات؟ هذا ممكن بالنسبة لمعظم الأعداد، أما أول الأعداد التي لا يمكن كتابتها كذلك هي (7,15,23,28,31,39,47,55,60,...).

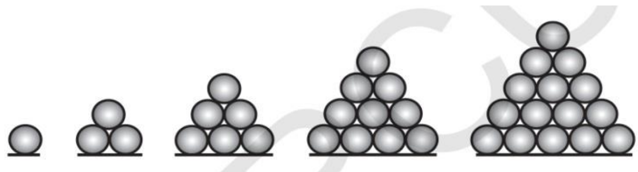
عام 1798 فكك آندريان ماري لاجندر هذه المتتالية، وهي تتكون من أعداد تقل عن مضاعفات الثمانية بمقدار 1: (7,15,23,31) بالإضافة إلى أنها مضروبة في 4 بشكل متكرر: (28,60,92,124,...) و (112,240,368,496,...) وهكذا.

باختصار، كانت النتيجة التي حصل عليها لاجندر هي أن جميع الأعداد يمكن كتابتها على صورة مجموع ثلاثة مربعات ماعدا الأعداد على الصورة ($4^n(8k-1)$).

الأعداد المثلثة Triangular numbers

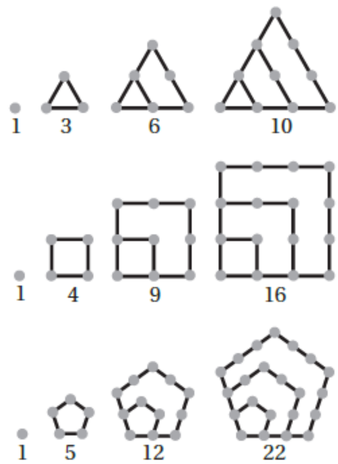
في الرياضات التي تستخدم العصا مثل لعبة البليياردو، وبول(Pool) تكون مجموعة الكرات في بداية اللعبة عبارة عن 15 كرة مرتبة على شكل مثلث متساوي الأضلاع، وليس وهما أن نتخيل أن الاختيار وقع على هذا الرقم لأنه عددا مثلثا: فالعددان 14، 16 لا يمكنهما تكوين مثلث متساوي الأضلاع. أصغر عدد مثلثي هو 1 ثم 3 ثم 6، وبالنظر

إلى مجموعات الكرات المناظرة لكل عدد نجد أن الصف الأول به كرة واحدة والصف الأول في العدد المثلثي الذي يليه يساوي 2 ثم 3 وهكذا، لذلك فإن الأعداد المثلثية هي الأعداد التي على الصورة (n+...+4+3+2+1) حيث (n) أي عدد.، وصيغة جمع الأعداد من 1 إلى (n) (انظر جمع الأعداد من 1 إلى 100) تعطي صيغة إيجاد العدد المثلث الذي ترتيبه ($\frac{n(n+1)}{2}$).



وهي صيغة لمعامل ذات الحدين $\binom{n}{2}$، وبذلك تعطي الأعداد المثلثة حل مسألة المصافحة: كم عدد المصافحات الحادثة عندما يصافح عدد (n) من الأشخاص بعضهم البعض جميعا؟ كما أن الأعداد المثلثة هي أول الأعداد المضلعة.

الأعداد المضلعة Polygonal numbers



الأعداد المثلثة هي تلك الأعداد التي تعد عدد الكرات التي يمكن ترتيبها على شكل مثلث متساوي الأضلاع. الأعداد التربيعية هي الأعداد المناظرة للمربعات، هل يمكن تطبيق ذلك على المضلعات الخماسية المنتظمة أو المضلعات الأخرى؟ الإجابة هي أن ذلك ممكن إلا أن الحذر مطلوب لأن طريقة ترتيب الكرات في مجموعات خماسية لا يكون واضحا مباشرة.

اتفق على أن يكون العدد الخماسي الأول هو 1، والثاني هو 5 وتأتي الأعداد التالية لذلك عن طريق اختيار أحد الأركان وإضافة كرة واحدة إلى كل ضلع من ضلعيه ثم إكمال الشكل الخماسي (بحيث يحيط بجميع الكرات السابقة) انظر الشكل. وهذا يعطي العدد الخماسي التالي: (12,22,35,51) وهكذا.

وتطبق نفس الخطوات مع الأعداد السداسية (أولها: 1,6,15,28,45,66 ، وكذلك الأعداد السباعية وأي مضلع عدد أضلاعه (n) حيث (n) أي عدد.

صيغة العدد المثلثي الذي ترتيبه (m) هي $(\frac{m(m+1)}{2})$ أو يمكن وضعها على صورة أخرى $(\frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}m)$ ، وصيغة العدد المربع الذي ترتيبه (m) تساوي بالطبع (m^2) ، وصيغة العدد الخماسي للعدد الذي ترتيبه (m) هي $(\frac{3}{2}m^2 - \frac{1}{2}m)$، والنمط العام قد يكون أصبح واضحا الآن: صيغة العدد المضلع الذي عدد أضلاعه (n) وترتيبه (m) هي $(\frac{n}{2}-1)m^2 - (\frac{n}{2}-2)m$. وقد أثبتت مبرهنة العدد المضلعي لفيرما (Fermat's polygonal number theorem) حقيقة أن لهذه الأعداد أهمية حقيقية نظرية.

مبرهنة العدد المضلعي لفيرما Fermat's polygonal number theorem

أثبت كارل فريدريك جاوس أن جميع الأعداد يمكن كتابتها على صورة مجموع ثلاثة أعداد مثلثة، وكرر جاوس ما جاء به أرشميدس فكتب:

$$\text{EYPHKA num} = \Delta + \Delta + \Delta$$

عام 1770 كان لاجرانج قد أثبت مبرهنة المربعات الأربعة: التي تقول أن جميع الأعداد يمكن كتابتها على صورة مجموع أربع أعداد مربعة (أو كما كان جاوس سيضعها $(wm = \square + \square + \square + \square)$.

هاتان النتيجتان معا شكلتا أول حالتين من مبرهنة العدد المضلعي لفيرما، أما الحالة التالية فهي تلك التي تقول أنه من الممكن التعبير عن جميع الأعداد على صورة مجموع أعداد خماسية، وبصفة عامة تؤكد المبرهنة على إمكانية الحصول على جميع الأعداد عن طريق تمثيلها على صورة مجموع (n) من أعداد مضلعة عدده أضلاعها (n). وزعم بيير دي فيرما أن لديه برهان على ذلك إلا إنه كعادته لم يخبر به أحدا، وجاء أول برهان مكتمل على يد أوجستين لويس كوشي عام 1813م.

مبرهنة فيرما الأخيرة Fermat's last theorem

الأعداد 3، 4، 5 من ثلاثيات فيثاغورث؛ لأن $(5^2 = 4^2 + 3^2)$. وتساوي 25=16+9

حوالي عام 300 ق.م أدرك إقليدس أنه لابد من وجود عدد لانهائي من الثلاثيات المكونة من أعداد صحيحة والتي تحقق المعادلة ($x^2 + y^2 = z^2$)، وفي عام 1637م وضع بيير دي فيرما تصورا لما يحدث عند استبدال أعداد ذات قوى أعلى بهذه الأعداد المربعة، وكتب في طبعته من كتاب أريثماتيكا لديوفنتوس: "من المستحيل أن نجزأ عددا مكعبا إلى مجموع مكعبين، أو عددا مرفوعا إلى القوة 4 إلى مجموع عددين مرفوعين إلى القوة 4 أو أن نجزأ أي عدد مرفوع إلى أي قوة أعلى من القوة 2 إلى عددين مرفوعين إلى نفس القوة"؛ فقد زعم فيرما أن لأي قيمة (n) أكبر من 2 لن يكون ممكنا أبدا إيجاد أعداد صحيحة (x)، (y)، (z) تحقق المعادلة ($x^n + y^n = z^n$)، ثم أكمل كلامه-المشكوك فيه- قائلا: "لقد اكتشفت برهانا رائعا حقا على ذلك إلا أن هذا الهامش أضيق من أن يحتويه".

مبرهنة وايلز Wiles' theorem

عرف إدعاء فيرما الأخير باسم المبرهنة الأخيرة ليس لأنه آخر ما كتب بل لأنه آخر ما تم إثباته، فعلى الرغم من ادعائه إلا أن معظم الخبراء اليوم لا يصدقون احتمال أن فيرما كان لديه حقا برهان كامل (على الرغم من أنه أثبت الحالة الخاصة التي فيها ($n = 4$)، ولم يستطع هو أو غيره إيجاد مثالا مضادا.

كان من الممكن- تحقيقا لمزيد من الدقة- أن يطلق عليه حدسية فيرما ويبقى هذا الإدعاء مفتوحا على مر القرون لولا اهتمامات العديد من عظماء المفكرين الرياضيين؛ حيث أكمل آندرو وايلز عام 1995 وتلميذه الباحث السابق ريتشارد تايلور برهانا رسخ مبرهنة فيرما الأخيرة باعتبارها نتيجة لمبرهنة النمطية (modularity theorem) للمنحنيات الإهليلجية.

حدسية بيل Beal's conjecture

آندرو بيل، رجل الأعمال المقيم بتكساس الذي اشتهر بالمليارديرالعصامي، كما اشتهر أيضاً بلعب القمار بأعلى المخاطرات كان أيضاً باحثا هاو متحمس في نظرية الأعداد، وقد درس عام 1993 مبرهنة فيرما الأخيرة التي تقول أن المعادلة ($x^n + y^{n=}z^n$) ليس لها حلول صحيحة عندما تكون ($n > 2$). كانت فكرة بيل هي تغيير الصيغة عن طريق السماح

للأسس بأن تأخذ قيما مختلفة: بالتالي، بدلا من ($x^n + y^n = z^n$) وضع هو في الاعتبار ($x^r + y^s = z^t$) حيث يسمح لـ (r)، (s)، (t) بأن تكون أعدادا مختلفة (لكن يجب أن تكون جميعها أكبر من 2). وقد درس فيجو بران حالات مشابهة في بداية القرن العشرين.

الصيغة الجديدة لها حلول: على سبيل المثال ($3^5 = 6^3 + 3^3$)، ($98^3 = 7^7 + 7^6$) إلا أن بيل لاحظ أن في كل الحلول التي وجدها تكون الأساسات (x)، (y)، (z) بينها عامل مشترك (3 في المثال الأول، و 7 في المثال الثاني)، وتقول حدسية بيل أن هذا صحيح دائما. عام 1997 أعلن المجتمع الرياضي الأمريكي أن بيل يعرض جائزة قدرها 50 ألف دولار -التي أصبحت الآن 100 ألف دولار- لمن يقدم برهانا على حدسيته أو مثالا مضادا.

حدسية كاتالان (مبرهنة ميهاليسكو)

Catalan's conjecture(Mihăilescu's theorem)

العددان 8، و9 يمثلان جوارا غريبا؛ فكلاهما قوى لأعداد صحيحة ($3^2 = 8$) و ($3^2 = 9$). أدرك عالم الرياضيات البلجيكي أوجين كاتالان أنه لا يوجد أي أمثلة أخرى لقوى متتابعة من بين الأعداد الصحيحة جميعها (ماعدا 0، 1). كانت حدسية كاتالان عام 1844 أن ذلك هو بالفعل الظهور الوحيد، لكنه كتب أنه لم يستطع بعد إثبات ذلك إثباتا كاملا. وفي حقيقة الأمر فإن هذه المسألة قد سبقته: حيث أن في عام 1320 كان الحبر والعالم ليفي بن جيرسون قد أثبت أنه لا وجود لأمثلة أخرى لقوة 2 بجوار قوة 3. ظلت الحدسية الكاملة مفتوحة حتى عام 2002 عندما قدم بريدا ميهاليسكو (Preda Mihăilescu) البرهان الذي سعى إليه طويلا. بشكل أكثر رسمية، يقول النص أن الحل الوحيد للمعادلة الديفونتية ($x^a - y^b = 1$) (حيث (a)، (b) كلاهما أكبر من 1) هي ($x = 3 ,\ y = 2$)، ($a = 2 , b = 3$).

مسألة ويرنج Waring's problem

نعلم من خلال مبرهنة المربعات الأربعة للاجرانج أن جميع الأعداد الصحيحة الموجبة يمكن كتابتها على صورة مجموع أربعة أعداد مربعة، فماذا عن كتابة الأعداد على صورة

مجموع قوى أعلى؟ عام 1909 بين آرثر ويرفرتش أن جميع الأعداد يمكن كتابتها على صورة مجموع تسعة مكعبات. وعام 1986م بين كل من بالاسابرامانين (Balasubramanian)، و ديشولرز(Deshouillers)، و دريس (Dress) أن مجموع 19 عدد مرفوع إلى القوة 4 كاف لذلك أيضاً.

كان إدوارد ويرنج قد وضع حدسية بهذه النتائج عام 1770، وقد أضاف إلى ذلك إشارته إلى أن هذه المسألة لا بد أن يكون لها حل لجميع القوى الموجبة، بمعنى أن لأي عدد صحيح (n) لابد أن يكون هناك عدد آخر (g) بحيث يمكن كتابة أي عدد على صورة مجموع أعداد عددها (g) مرفوعة إلى القوة (n)

وقد أثبت ديفيد هيلبرت هذه النتيجة المهمة عام 1909 وهي معروفة باسم مبرهنة هيلبرت–ويرنج. الأعداد القليلة الأولى من هذه المتتالية هي:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g	1	4	9	19	37	73	143	279	548	1079

لازالت طبيعة هذه المتتالية والمتتاليات المتعلقة بها موضوعا بحثيا نشطا.

حدسية abc The abc conjecture

لحساب أساس العدد نقوم أولا بتفكيكه إلى عوامله الأولية ثم نوجد حاصل ضرب العوامل الأولية المختلفة متجاهلين أي تكرار، وبالتالي ($300 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5$) وأساسها ((300) Rad) يساوي $30 = 5 \times 3 \times 2$، وبالمثل ($16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$) $2=(16)$ (يسمى الأساس أيضاً بجزء (x) الخالي من المربعات لأنه أكبر عامل من عوامل (x) لا يقبل القسمة على عدد مربع. لاحظ أن المصطلح radical يستخدم بشكل منفصل للإشارة إلى الجذور مثل الجذر التربيعي).

عام 1985 وضع كل من جوزيف أويسترليه، وديفيد ماسر حدسية تعميم مبرهنة فيرما الأخيرة، وحدسية كاتالان (مبرهنة ميهاليسكو) والعديد من المسائل العظيمة النظرية المتعلقة بالأعداد، وأطلق عليها دوريان جولدفيلد "أهم المسائل غير المحلولة في التحليل الديفونتي". وتهتم هذه الحدسية بالحالات التي يكون فيها ثلاثة أعداد (a)، (b)، (c)

أولية فيما بينها وتحقق المعادلة ($a + b = c$). تقارن الحدسية بين (c)، وأساس ($Rad(a \times b \times c)(a \times b \times c)$. في معظم الحالات تكون (($c < Rad(a \times b \times c)$)، على سبيل المثال، إذا كانت ($a=3$, $b=4$, $c=7$) بالتالي ($Rad(3 \times 4 \times 7) = 42$) وهي أكبر من 7، لكن أحيانا لا يحدث ذلك، فمثلا عندما ($a = 1$, $b = 8$, $c = 9$)، بالتالي يكون ($Rad(1 \times 8 \times 9) = 6$) وهو أصغر من 9. وقد أثبت ماسر أن هناك عدد لا نهائي من هذه الاستثناءات التي تكون فيها ($c > Rad(a \times b \times c)$). تقول حدسية abc أن تلك الحالات ليست إلا انتهاكا للقاعدة: وأن تعديل بسيط يؤدي إلى الخلاص من معظم تلك الحالات. لأي عدد (d) أكبر من 1 حتى وإن كان ($d=1.0000000001$) تقريبا تختفي جميع الاستثناءات تاركة فقط عدد منته من الثلاثيات حيث ($c > Rad(a \times b \times c)^d$).

الأعداد الأولية PRIME NUMBERS

الأعداد الأولية Prime numbers

يعتبر تعريف العدد الأولي أحد أكثر التعريفات العمية والقديمة الموجودة: هو عدد صحيح لا يمكن تقسيمه إلى أعداد صحيحة أصغر. الأمثلة الأولى هي 2، 3، 5، 7، ومن ناحية أخرى نجد أن العدد 4 ليس أوليا؛ لأنه يساوي (2×2).

ظل العدد 1 مصنفا ضمن الأعداد الأولية حتى بدايات القرن العشرين، لكنه لم يعد كذلك، فاليوم نقول أن العدد الأولي لابد أن يكون له عاملان تماما: نفسه، والواحد، أما الأعداد غير الأولية (ماعدا 1) فتسمى الأعداد المؤلفة (composite). وتخبرنا المبرهنة الأساسية في الحساب أن الأعداد الأولية عند علماء الرياضيات بمثابة الذرات عند علماء الكيمياء: فهي الوحدة البنائية الأساسية التي تبنى منها جميع الأعداد الطبيعية الأخرى. وعلى بساطة تعريف الأعداد الأولية إلا أنها لازالت تشكل غموضا. ومن المسائل الكبرى المفتوحة في هذا الصدد: مسائل لانداو (Landau's problems)، وفرضية ريمان (Riemann hypothesis). ليس هناك صيغة بسيطة لتوليد أعداد أولية، ولا طريقة مباشرة لتحديد ما إذا كان عدد كبيراً أولياً أم لا؛ لا زال اختبار أولية الأعداد مجالا مهماً للبحث.

برهان لانهائية الأعداد الأولية لإقليدس Euclid's proof of the infinity of primes

تبدأ قائمة الأعداد الأولية بـ (2,3,5,7,11,13,17,...)، لكن أين تنتهي؟ في الحقيقة، هي مستمرة إلى الأبد، تلك هي الحقيقة التي عرضها إقليدس في مسألة 9.20 في كتاب العناصر، وكانت طريقته في ذلك تقليدية عن طريق البرهان بالتناقض: حيث بدأ بتخيل أن ما يريد إثباته خاطئ وأن هناك عدد ما يمكن وصفه بأنه أكبر عدد أولي، وليكن (P)، واستنادا لهذا الفرض يكون لديه قائمة بجميع الأعداد الأولية (2,3,5,7,...,P)، ثم أنشأ إقليدس عددا جديدا (Q مثلا) عن طريق ضرب جميع الأعداد الأولية وإضافة 1، وبالتالي:

$$Q = (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \ldots \times P) + 1$$

الآن، لا يقبل العدد (Q) القسمة على 2؛ لأن الباقي سيساوي 1، وبالمثل كل من (3,5,7,...,P)، وبالتالي ليس هناك أي عدد أولي يمكن لـ (Q) أن يقبل القسمة عليه، و (Q) نفسه ليس ضروريا أن يكون عددا أوليا (على الرغم من أنه يمكن أن يكون أوليا). بطريقة أخرى، طبقا للمبرهنة الأساسية في الحساب يجب أن يكون للعدد (Q) على الأقل عامل أولي واحد(R)، وهذا العامل لابد أن نكون قد أغفلناه في قائمتنا وبالتالي هو أكبر من (P)، وبذلك يكون الفرض الذي بدأ به إقليدس أن (P) هو أكبر عدد أولي تسبب في إيجاد عدد أولي أكبر (R)، وبما أن هذا تناقض فلابد أن يكون الفرض الأصلي خاطئا: أي أنه ليس هناك ما يسمى أكبر عدد أولي.

غربال إراتوستينس The sieve of Eratosthenes

اشتهر إراتوستينس الذي يرجع تاريخه إلى حوالي عام 250 ق.م بحساباته المميزة الدقيقة لمحيط الأرض بالإضافة إلى اشتهاره بـ "غرباله" المستخدم لتوليد قوائم من الأعداد الأولية. الخطوات مباشرة: اكتب جميع الأعداد الطبيعية حتى عدد معين من اختيارنا (100 مثلا كما بالشكل)، ونقوم أولا بحذف العدد 1 (الذي لم يعد الآن مصنفا ضمن الأعداد الأولية إلا أن إراتوستينس قد يكون اعتقد أنه أحدها)، وبذلك يصبح العدد الأول في القائمة هو العدد 2 وهو عدد أولي فنحوطه بدائرة. بعد ذلك نقوم بحذف جميع مضاعفات العدد 2

(....,4,6,8,10) ، ثم نكرر ما قمنا به: الآن أول عدد في القائمة هو العدد 3 والذي نحدد أنه عدد أولي قبل حذف جميع مضاعفاته (. ...,6,9,12)، وفي كل مرحلة يكون أول عدد في القائمة أوليا، ونحذف جميع مضاعفاته، وبذلك نحصل على العدد الأولي التالي له. أسلوب غربلة الأعداد الطبيعية هذا الذي تطور كثيرا منذ عصر إراتوستينس يلعب دورا عظيما في نظرية الأعداد الحديثة ويشكل أساس برهان مبرهنات تشين من الأولى حتى الثالثة (Chen's Theorems 1-3).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	9	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	15	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
21	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	27	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	33	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	39	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	45	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
51	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	57	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	63	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	69	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	75	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
81	~~82~~	83	~~84~~	85	~~86~~	87	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	93	~~94~~	95	~~96~~	97	~~98~~	99	~~100~~

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	69	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

حدسية جولدباخ Goldbach's conjecture

نشأت هذه الحدسية عام 1742 من توافق بين كريستيان جولدباخ وليونارد أويلر، وتؤكد على أن جميع الأعداد الزوجية بدءا من 4 فما فوق هي عبارة عن مجموع عددين أوليين، وبالتالي7+5=12 ,5+5=10 ,3+5=8 ,3+3=6 ,2+2=4)، وهكذا ، وعلى الرغم من فحص توماس أوليفيرا عام 2008 لذلك عن طريق استخدام الكمبيوتر للأعداد الزوجية حتى (10^{18}) إلا إن ليس هناك برهان كامل معروف مما يجعل هذه المسألة واحدة من أعظم المسائل المفتوحة في نظرية الأعداد، وأفضل تقدم في هذا الصدد حققته مبرهنة تشين الأولى (Chen's Theorem 1).

وهناك تعبير آخر مرتبط بهذه الحدسية ألا وهو حدسية جولدباخ الضعيفة التي تقول أن جميع الأعداد الفردية بدءا من 9 فما فوق هي عبارة عن مجموع ثلاثة أعداد أولية . وفي عام 1937 وجد إيفان فينوجرادوف عددا كبيرا (N) وأثبت أن الحدسية صحيحة لجميع القيم الفردية الأكبر من (N)، وبالتالي فإنه نظريا يبقى فقط عدد كبير منته من الأعداد

يجب فحصه لإثبات هذه النتيجة إلا أن هذه البداية لازالت ضخمة جدا (حوالي 10^{43000}) لدرجة تجعل من حدسية جولدباخ الضعيفة مسألة مفتوحة إلى اليوم.

مسائل لانداو وحدسية n^2+1 Landau's problems and the n^2+1 conjectur

سلط إدموند لانداو أربع مسائل حول الأعداد الأولية في مؤتمر دولي بكامبردج عام 1912، وصفها بأنها "لا يمكن مهاجمتها بالوضع الذي عليه العلم الآن" والتي ستظل مفتوحة إلى ما يقارب 100 عام قادمة:

1- حدسية جولدباخ
2- حدسية العددين الأولين التوأم.
3- حدسية لجاندر
4- حدسية $n^2 + 1$

تدرس الحدسية الأخيرة الأعداد الأولية التي تزيد بمقدار الواحد عن عدد مربع، على سبيل المثال ($5 = 2^2 + 1$)، ($17 = 4^2 + 1$) والحدسية تقول أنه لابد أن يكون هناك عدد كبير لا نهائي من الأعداد الأولية التي تشبه ذلك.. ومن المعروف، كنتيجة لمبرهنة مربعي فيرما، أنه يوجد عدد كبير لا نهائي من الأعداد الأولية على الصورة ($n^2 + m^2$) ، وكما هو الحال في مبرهنات تشن، تأتي النتائج الواعدة إلى الآن من إرخاء معايير الأعداد الأولية إلى أعداد شبه أولية: وهي الأعداد التي تكون تماما حاصل ضرب عددين أولين ($9 = 3 \times 3$ or $15 = 3 \times 5$). عام 1978 أثبت هينريك إيوانيك أن هناك عدد كبير لا نهائي من الأعداد الأولية على الصورة ($n^2 + 1$)، ونجد إجابة بالإيجاب على حدسية n^2+1 ضمنا في فرضية إتش (Hypothesis H).

مبرهنة مربعي فيرما Fermat's two square theorem

جميع الأعداد الأولية باستثناء 2 هي أعداد فردية، وبالتالي عند قسمة كل عدد أولي فردي على 4 لابد أن يكون الباقي إما 1 أو 3، وهذا من شأنه تقسيم الأعداد الأولية الفردية إلى عائلتين، وفي القرن السابع عشر لاحظ بيير دي فيرما فرقا مذهلا بين هاتين

العائلتين، فالأعداد على الصورة $(4n + 1)$ يمكن كتابتها جميعا على صورة مجموع مربعين مثل $(5 = 2^2 + 1^2)$ و$(13 = 3^2 + 2^2)$ ، الأكثر من هذا أن ذلك يحدث بطريقة وحيدة، لكن ليس من بين الأعداد الأولية على الصورة $(4n+3)$ مثل (7، 11) ما يمكن التعبير عنه بالطريقة السابقة.

يعرف ذلك أيضاً باسم مبرهنة فيرما كريسماس؛ لأنها كتبت للمرة الأولى في خطاب إلى "مارين ميرسين" في الخامس والعشرين من ديسمبر عام 1640، وكعادة فيرما، أعطى فقط أقل القليل من الحجة على أن ما قاله صحيح. أما أول من نشر برهانا على ذلك هو ليونارد أويلر عام 1749. وهذا يرتبط ارتباطا وثيقا بمبرهنة التبادل التربيعي وكما لاحظ جيه إتش هاردي "إن من العدل تصنيفها على أنها واحدة من أنقح المبرهنات في الحساب".

وترتب على ذلك أن إذا كان هناك عددا يمكن كتابته على صورة مجموع مربعين بطريقتين مختلفتين مثل $(50=7^2+1^2=5^2+5^2)$ فإنه لا يمكن أن يكون أوليا.

وقد امتدت نتيجة فيرما لتصبح تحليلا كاملا عن أي الأعداد يمكن كتابته على صورة مجموع مربعين.

فجوات الأعداد الأولية Prime gaps

يمكن لدراسة الأعداد الأولية أن تنقلب رأسا على عقب إذا نظرنا إلى الفجوات بينها بدلا من دراستها هي: أي الفرق بين عددين أوليين متتاليين. إذن أول فجوة أولية هي تلك الواقعة بين العددين 2 و3 وهي بالتحديد 1، ثم الفجوة بين العددين 3 و 5، ونجد أنها 2، وهكذا. هل يمكن لفجوات الأعداد الأولية أن تصبح كبيرة اعتباطيا؟ يتضح أن ذلك ممكن؛ بذلك يكون شأنها شأن الأعداد الأولية فهي لا نهائية، لكن مكان ظهور الفجوة الكبرى الأولى، وعلاقة حجمها المحتمل بالعددين الأولين الذين يقعان على جانبها يبقى موضوعا محل بحث. تعد حدسيتي العددين الأوليين التوأم (The twin primes)، دوبوليجناك (de Polignac's conjectures) من أكثر المسائل الصامدة التي بقيت مفتوحة لفترة طويلة حول فجوات الأعداد الأولية. تتضمن مسلمة برتراند (Bertrand's postulate) أن العدد الأولي لا يمكن أن تتبعه فجوة أكبر منه، وحدسية آندريكا-في حال تم إثباتها- سوف تؤدي إلى تدعيم هذه النتيجة تدعيما ملحوظا.

مسلمة برتراند Bertrand's postulate

ما المسافة الممكنة بين عددين أوليين متتاليين؟ كان هذا هو السؤال الذي جال بخاطر جوزيف برتراند عام 1845م عندما وضع مسلمة تقول أن بين أي عدد طبيعي (n)، وضعفه (2n) لابد أن تجد على الأقل عددا أوليا واحدا. وبصياغة ذلك، لأي عدد (n) (أكبر من 1) هناك عددا أوليا (P) بحيث ($n < p < 2n$). بعد خمس سنوات من ذلك الوقت أثبت بافنوتي تشيبيشيف هذه المسلمة، ثم جاءت إعادة إثبات هذه المسلمة على يد بول إيردوس والتي خلدت في بيت شعر قاله ناثان فاين: "قالها تشيبيشيف وها أنا ذا أعيدها؛ لابد أن يوجد عدد أولي بين العدد وضعفه".

حدسية آندريكا Andrica's conjecture

عام 1986 صاغ عالم الرياضيات الروماني آندريكا دورين ما وصفه بأنه "مسألة بالغة الصعوبة في نظرية الأعداد". إنها تدرس الفرق بين الجذور التربيعية للأعداد الأولية المتتالية. وكانت حدسيته هي أن هذا الفرق أقل من 1 دائما. بصفة أكثر رسمية، إذا كان (P)، و(q) عددين أوليين متتابعين فإن $\sqrt{q} - \sqrt{p} < 1$.

إذا كان ذلك صحيحا، فتربيع الطرفين سيحول هذه المتباينة إلى قاعدة تخص فجوات الأعداد الأولية العادية: إذا كان (P) عددا أوليا إذن تكون الفجوة التالية لـ (P) أصغر من ($2\sqrt{p} + 1$). وهذا يمكن أن يكون تضييقا مهما لمسلمة برتراند. وعلى الرغم من عدم وجود برهان على حدسية آندريكا إلا أن الدلائل التجريبية تشير إلى أنها على الأرجح صحيحة.

حدسية لاجندر Legendre's conjecture

كان - ماري لاجندر نشطا في العديد من مجالات علم الرياضيات، وقد أدى عمله على نظرية الأعداد إلى صراع مع جاوس الذي اتهمه لاجندر بالتبجح المفرط وذلك لفرضه اكتشاف قانون التبادل التربيعي بدون تقديم دليل. ثم جاء عمل لاجندر في الهندسة

مشوبا بمحاولاته إثبات مسلمة التوازي لإقليدس، وكانت هذه المحاولات محكوما عليها بالفشل.

وقد قاده بحثه حول الأعداد الأولية إلى أن يضع حدسية تقول أن بين أي عددين مربعين سيكون هناك دائما أعداد أولية.، بمعنى أن لأي عدد طبيعي (n) هناك عدد أولي (P) حيث $(n^2 < p < (n+1)^2)$. تشبه بنية هذه الحدسية مسلمة برتراند إلا أن مسلمة برتراند استسلمت للإبداع الرياضي بينما ظلت حدسية لاجندر مقاومة بعناد. والتقدم الواعد بالنسبة لحدسية لاجندر حتى اليوم هو مبرهنة تشن الثالثة.

حدسية العددين الأوليين التوأم Twin prime conjecture

أزواج الأعداد الأولية التي تكون عبارة عن عددين الفرق بينهما 2 مثل (5)، و(7) أو (17) و (19) تعرف بالأعداد الأولية التوائم. وعلى الرغم من أن لا نهائية الأعداد الأولية معروفة منذ عصر إقليدس إلا أن كون عدد الأعداد الأولية التوائم نهائي أم لا مازال مسألة مفتوحة.

في وقت الكتابة هذه، أكبر عددين أوليين توأم هما العددان على جانبي العدد ($2,003,663,613 \times 2^{195,000}$) اكتشفه إيريك فوتير عام 2007 كجزء من مشروع برايم جريد (Primegrid)(1)، والبحث عن العددين الأولين التؤام عبر الإنترنت (the internet Twin Prime Search). عممت كل من حدسيتي دو بوليجناك (de Polignac's conjecture) وهاردي ليتلوود الأولى (The first Hardy–Littlewood conjecture) هذه الحدسية، وكانت أول محاولة من بين محاولات عديدة لتحليل الكوكبات المختلفة الموجودة بين الأعداد الأولية.

حدسية دو بوليجناك de Polignac's conjecture

اقترحها ألفونس دو بوليجناك عام 1849م، وهي تؤكد على أن كل عدد زوجي يظهر

(1) أحد مشروعات الرياضيات الموزعة التي تدرس الأعداد الأولية.

كفجوة بين عددين أوليين متتابعين، بشكل لا نهائي في كثير من الأحيان، إذن يجب أن يكون هناك عدداً كبيراً لا نهائي من أزواج الأعداد الأولية المتتابعة والتي تبعد عن بعضها بمقدار 4، و 6 وهكذا، وهذا يعمم حدسية العددين الأولين التوأم التي توافق الحالة الخاصة التي يكون فيهم حجم الفجوة 2 وهي حالة خاصة من حدسية هاردي ليتلوود الأولى (The first Hardy–Littlewood conjecture). لازالت حدسية دو بوليجناك مفتوحة إلا أن مبرهنة تشن الثانية خطت خطوة مهمة نحو إثباتها.

مبرهنة تشن الأولى Chen's theorem 1

أثبت تشن جينجران بين عامي 1966 و 1975 ثلاث مبرهنات سجلت تقدما عظيما نحو العديد من المسائل البارزة المفتوحة حول الأعداد الأولية. جاءت فكرة العدد شبه الأولي في قلب عمل تشن: وهو عبارة عن حاصل ضرب عددين أوليين مثل ($2 \times 2 = 4$) أو $3 \times 2 = 6$. أخذت مبرهنة تشن الأولى اتجاه حدسية جولدباخ، وهي تقول أن بعد بداية معينة (عتبة) يمكن كتابة أي عدد زوجي على صورة إما مجموع عددين أوليين (كما قال جولدباخ) أو مجموع عدد أولي وشبه أولي.

مبرهنة تشن الثانية Chen's theorem 2

أخذت مبرهنة تشن الثانية خطوة نحو حدسية دو بوليجناك، وهي تنص على أن أي عدد زوجي يظهر كثيرا بشكل لا نهائي كفرق بين عددين أوليين(وهذا يأتي من حدسية دو بوليجناك) أو كفرق بين عددين أحدهما أولي والآخر شبه أولي.

نتيجة لمبرهنة تشن الثانية هي أن يكون هناك عدد لا نهائي من الأعداد الأولية (p) حيث ($p + 2$) إما عدد أولي (كما تنص حدسية العددين الأوليين التوأم) أو عدد شبه أولي.

مبرهنة تشن الثالثة Chen's theorem 3

عام 1975 أثبت تشن مبرهنة استهدفت حدسية لاجندر. تقول مبرهنة تشن الثالثة أن بين أي عددين مربعين يوجد إما عدد أولي أو شبه أولي.

كوكبات الأعداد الأولية Constellations of primes

تدرس حدسيتي العددين التوأم، ودو بوليجناك أزواجا من الأعداد الأولية تقع على مسافة معينة من بعضها البعض، لكن ماذا عن الأنماط الأطول: ثلاثيات ورباعيات الأعداد الأولية الموجودة في عينة معينة؟ ينبغي توخي الحذر؛ لأن ليس جميع الترتيبات المحتملة من الأعداد الأولية تكون ممكنة، فعلى سبيل المثال، لماذا تبحث حدسية العددين التوأم في أزواج الأعداد الأولية على الصورة (n)، و(n + 2) بدلا من (n)، (n + 1)؟ الإجابة هي أن أحد العددين (n) أو(n + 1) لابد أن يكون دائما قابلا للقسمة على 2، وبالتالي لا يمكن أن يكونا أولين معا (الاستثناء الوحيد هو الزوج 2 و 3).

تحدث نفس الظاهرة في الأنماط الأطول، فلا طائل من البحث عن ثلاثيات الأعداد الأولية التي على الصورة (n)، (n + 1)، (n + 4): لأن أحدها سيكون دائما قابلا للقسمة على 3، وبالتالي لن يكون أوليا (ماعدا الثلاثي 3، 5، 7). هذه الأنماط المحظورة يمكن وصفها بصورة منظمة باستخدام الحساب النمطي.

الأنماط الباقية المسموح بها مثل: (u)، (n + 2)، (n + 6) تعرف باسم الكوكبات. الكوكبات الخطية مثل هذه هي موضوع حدسية هاردي -ليتلوود الأولى، أما الكوكبات الأكثر تعميما مثل ($n^2 + 1$)، ($2n^2 - 1$)، ($n^3 + 3$) هي موضوع فرضية إتش (Hypothesis H).

حدسية هاردي- ليتلوود الأولى The first Hardy–Littlewood conjecture

عام 1923 عالج هاردي و ليتلوود مسألة كوكبات الأعداد الأولية الأطول. تماما مثلما تعطي مبرهنة العدد الأولي قاعدة لمتوسط عدد الأعداد الأولية المنفردة في مدى معين كانت فكرتهم هي التنبؤ بعدد مرات ظهور كوكبة معينة في المتوسط.، وقد حسبا تقديرا دقيقا، وسيترتب على ذلك-إن كان صحيحا- أن تظهر جميع الكوكبات الخطية المسموحة بين الأعداد الأولية كثيرا بشكل لا نهائي، وبالتالي، بما أن (n)، (n + 2)، (n + 6) ليست محظورة، إذن يجب أن يكون هناك عدد لا نهائي من ثلاثيات الأعداد الأولية على هذه الصيغة (بدءا من (11,13,17) ثم (17,19,23)، و(41,43,47)).إذا أثبتت هذه الحدسية

فستصبح تعميما واسعا لكل من مبرهنة دركليه (Dirichlet's theorem)، ومبرهنة جرين-تاو (the Green–Tao theorem)، وستعمم فرضية إتش هذه الحدسية أكثر.

فرضية إتش Hypothesis H

كانت الرحلة من حدسية العددين الأوليين التوأم (التي لازالت غير مثبتة!) إلى حدسية هاردي-ليتلوود رحلة طويلة على طريق التعميم، لكن في عام 1959 اقترح كل من آندريه شانزل (Andrzej Schinzel)، و واكلو سيربنيسكي(Wacław Sierpiński) خطوة أخرى. حدسية هاردي-ليتلوود الأولى تهتم فقط بكوكبات الأعداد الأولية التي نحصل عليها بالجمع مثل (n)، (n + 2)، (n + 6). وكل شكل من هذه الأشكال يحتاج إلى (n) مناسبة ثم إضافة أعداد ثابتة محددة إليها ، وهذا لا يشمل حدسية n2+1 حيث فيها يكون الشرط المتعلق بالعدد الأولي محتويا على عملية ضرب، وللحصول على حدسية واحدة تتسع للإثنين احتاجا إلى لغة كثيرات الحدود، وكانت الفكرة أن أي مجموعة مناسبة مثل ($n^2 + 1$)، ($2n^2 - 1$)، ($n^3 + 3$) لابد أن تكون نواتجها أعداد أولية في الوقت نفسه لعدد لا نهائي من قيم (n). وهنا نضع في اعتبارنا كثيرات الحدود غير القابلة للتحليل إلى رتب أقل (irreducible) فقط والتي لا يمكن فصلها (على سبيل المثال ($\mathbf{n^2}$) يمكن تحليلها إلى ($\mathbf{n \times n}$)، وبالتالي لا يمكن أن تعطي نتيجة أولية) وقد قدما- تقليدا لمبرهنة الأعداد الأولية- تقديرا مفصلا لعدد المرات التي يتوقعا أن يكون نظامهما أوليا في الوقت ذاته.

مبرهنة دركليه Dirichlet's theorem

لا شك في أن الأعداد الأولية تشكل أكثر المتواليات غموضا من بين جميع الأعداد الطبيعية: (2,3,5,7,11,13,...)، والأكثر منها ضعفا هي المتواليات الحسابية: ابدأ بعدد طبيعي (3 على سبيل المثال) ثم اجمع عددا آخر وليكن 2 بشكل متكرر لتحصل على المتوالية (3,5,7,9,11,13,...). ولازال فهم العلاقة بين هذه المتواليات البسيطة، ومتواليات الأعداد الأولية الأكثر دهاء مجالا مستمرا للبحث.

والسؤال الأساسي الذي يجب أن يسأل: هل المتوالية السابقة تضم عدد لا نهائي من الأعداد الأولية؟

ليس بإمكان كل المتواليات الحسابية أن تضم أعدادا أولية: فالمتوالية التي تبدأ ب4 وفرقها العام 6 تكون (4,10,16,22,....) وبالتالي لا يمكنها أن تصل إلى عدد أولي: فكل حدودها أعداد زوجية وبالتالي تقبل القسمة على 2. وحتى نتمكن من أن نأمل في وجود عدد لا نهائي من الأعداد الأولية فلابد أن يكون الحد الأول من المتوالية وكذلك الفرق العام عددين أوليين فيما بينهما (أي عاملهما المشترك الأعلى يساوي 1)، وبالتالي فإن هذه المتوالية تفشل في تحقيق ذلك؛ لأن هناك عامل مشترك بين 4، 6 هو العدد 2.

عام 1837 أثبت يوهان دركليه نتيجته الأشهر والأكثر إثارة للدهشة على المستوى العلمى: لقد بين أن هذه هي حقا العقبة الوحيدة. فكل متوالية حسابية تحتوي على عدد لانهائي من الأعداد الأولية طالما كان الحد الأول والفرق العام عددين أوليين فيما بينهما؛ أي أن إذا كان (a)، و(b) عددين أوليين فيما بينهما، إذن هناك عدد لا نهائي من الأعداد الأولية على الصورة (a + bn). كان برهان دركليه هو أول من استخدم الدالة اللامية (L-functions)، ولذلك تعتبر في أغلب الأحيان أنها معلم على طريق بداية نظرية الأعداد التحليلية.

مبرهنة جرين ـ تاو Green–Tao theorem

أظهرت مبرهنة دركليه أن معظم المتواليات الحسابية تحتوي على عدد لا نهائي من الأعداد الأولية. عكس هذا السؤال يقودنا إلى البحث عن متواليات حسابية متضمنة في الأعداد الأولية، على سبيل المثال (3,5,7) هي متوالية حسابية من الأعداد الأولية وطولها 3 (وفرقها العام 2)، وأيضا (41,47,53,59) كذلك وطولها 4 (وفرقها العام 6).

هناك حدسية قديمة جذورها مفقودة في تاريخ الرياضيات إلا أن من المرجح أن تاريخها يرجع إلى عام 1770م تقول أن هناك متوالية حسابية من الأعداد الأولية بأي طول تحدده. في وقت الكتابة، أطول متوالية حسابية لأعداد أولية وجدها بينوت بيرشون (Benoãt Perichon) كجزء من مشروع بريم جرايد، وطولها 26 وتبدأ بالعدد (43142746595714191)

وفرقها العام (5283234035979900). كان التقدم المحرز على طريق إيجاد حدسية معممة بطيئا خلال القرن العشرين إلا إنها برهنت عام 2004 على يد تيرينس تاو، وبن جرين وساهمت في حصول تاو على ميدالية فيلدز عام 2006. ويمكن تعميم هذه الحدسية باستخدام حدسية هاردي- ليتلوود الأولى وفرضية إتش.

أعداد فيرما الأولية Fermat primes

كان بيير دي فيرما مهتما بالأعداد الأولية من نوع بسيط محدد، وهي تلك التي تفوق قوى العدد 2 بمقدار 1: $(2^n + 1)$ على سبيل المثال $(3 = 2^1 + 1)$، $(17 = 2^4 + 1)$. لكن ليس كل عدد على هذه الصورة يكون أوليا على سبيل المثال $9 = 1 + 2^3$، وكذلك ليس كل عدد أولي يمكن أن يكتب على هذه الصورة (7 لا يمكن كتابتها على هذه الصورة)، وقد لاحظ فيرما أن جميع الحالات التي تكون فيها الأعداد على الصورة $(2^n + 1)$ أولية، تكون (n) نفسها قوة للعدد 2 لذلك بدأ دراسة الأعداد على الصورة (2^{2^n+1}) والتي يطلق عليها الآن أعداد فيرما، وقد وضع فيرما حدسية تقول إن كل الأعداد على هذه الصورة أولية. تتزايد قيم هذه الأعداد بسرعة لذلك كان من الصعب اختبار هذه الحدسية لقيم كثيرة إلا أن عام 1953 بين جيه إل سلفريدج (J.L.Selfridge) أن العدد (2^{2^n+1}) ليس أوليا، وبذلك دحض حدسية فيرما، وفي الحقيقة في معظم قيم فيرما لم تكن أولية، وحتى يومنا هذا غير معروف لدينا سوى خمسة أعداد من أعداد فيرما الأولية وهي: $(3,5,17,257(= 2^{2^3+1}),65537(=2^{2^4+1})$ وبعد ذلك يتوقف التتابع عن توليد أعداد أولية ($2^{2^3+1=4,294,967,297=641\times 6,700,417}$ على سبيل المثال) ويبقى وجود أعداد أولية أخرى لفيرما من عدمه مسألة مفتوحة . أحد النتائج المترتبة على ذلك تخص نظرية المضلعات القابلة للإنشاء.

أعداد مرسين الأولية Mersenne primes

أعداد مرسين هي تلك الأعداد التي تقل بمقدار 1 عن أحد قوى العدد 2: أي أنها على الصورة $(2^n - 1)$. وليست جميع الأعداد على هذه الصورة أولية، على سبيل المثال $(15 = 2^4 - 1)$، وكذلك ليست جميع الأعداد الأولية تنتمي إلى أعداد مرسين (5، 11

ليست من أعداد مرسين) أما الأعداد مثل $(1 - 2^2 = 3)$، $(1 - 2^3 = 7)$ فهي تشكل فئة أعداد مرسين المهمة والتي سميت بهذا الاسم نسبة إلى الراهب الفرنسي مارين مرسين الذي بدأ في وضع قائمة بها في عام 1644.

كما هو الحال، نجد أن $(1 - 2^n)$ يمكن أن تكون أولية فقط إذا كانت (n) نفسها أولية إلا أن هذا أيضاً لا يضمن أولية هذه الصيغة، وعلى سبيل المثال $(= 2047 = 1 - 2^{11}$ $89 \times 23)$ لكن هذا يمثل أفضل نقطة بداية في البحث القائم عن أعداد أولية كبيرة. حتى وقت الكتابة هناك 47 عدد معروف من أعداد مرسين الأولية، ولازال السؤال مفتوحا حول ما إذا كان هناك عدد لا نهائي منها أم لا.

دراسة أعداد مرسين لها اتصال وثيق بدراسة الأعداد المثالية؛ لأن الأعداد المثالية الزوجية تكون على الصورة $(\frac{M\times(M+1)}{2})$ حيث (M) أحد أعداد مرسين الأولية، وأول مثاليين هما $(\frac{3\times4)}{2} = 6)$، و $(\frac{7\times8}{2} = 28)$

الأعداد الأولية الكبيرة Large primes

كون الأعداد الأولية لا نهائية أصبح أمرا معروفا منذ عصر إقليدس الذي أثبت بما لا يدع مجالا للشك أنه لا وجود لما يسمى أكبر عدد أولي، ومع ذلك ترجع الرغبة في تحديد أعداد أولية أكبر إلى مئات السنين. أكبر أعداد أولية معروفة هي أعداد مرسين الأولية مع وجود بعض الاستثناءات. في عام 1588 بين بيترو كاتالدي أن عدد مرسين $(2^{19} - 1 = 524{,}287)$ هو عدد أولي، وتوقف التسجيل مائتي عام، وفي القرن ال 20 تسارعت خطوات البحث ليس فقط من خلال التقنيات المحسنة لاختبار أولية الأعداد مثل اكتشاف اختبار لوكاس – ليهمر (Lucas-Lehmer test) بل أيضاً من خلال القوة المطلقة للكمبيوتر، فمنذ عام 1951 أصبح اصطياد أعداد أولية أكبر يعتمد على أجهزة كمبيوتر أعلى سرعة من ذي قبل، ومنذ عام 1996 أصبح خاضعا للبحث العظيم عن أعداد مرسين الأولية باستخدام الإنترنت the Great Internet Mersenne Prime Search (GIMPS)، الذي يستخدم الوقت غير النشط على أجهزة كمبيوتر آلاف المتطوعين حول العالم. أكبر عدد أولي معروف إلى وقت الكتابة هو عدد مرسين الذي

اكتشف عام 2008 من خلال (GIMPS) (اكتشفه كل من سميث، ووالتمان، وكيروسكي، وزملاء لهم) وهو $(2^{43,112,609} - 1)$. وعند كتابته كاملا يبلغ عدد خاناته (12,978,189) خانة.

اختبار أولية الأعداد The primality testing

أبسط وسيلة لمعرفة ما إذا كان عدد ما أوليا أم لا هي فقط تجريب قسمته على جميع الأعداد الأصغر منه. (في الحقيقة يكفي فقط تجريب الأعداد الأصغر منه حتى العدد الذي قيمته ($\sqrt{n}$)، إلا أن بالنسبة للأعداد الكبيرة حقا يصبح هذا بطيئا بشكل غير عملي: اختبار عدد طوله 100 خانة قد يستغرق أكثر من عمر الكون.

غربال إراتوستينس (The sieve of Eratosthenes) هو أقدم الطرق المعروفة لتوليد قوائم من الأعداد الأولية ، ولا يزال مستخدما إلى اليوم. أما اختبارات الأولية الأخرى مثل اختبار فيرما لأولية الأعداد (Fermat's primality test)، واختبار ميلر-رابن اختبارات احتمالية: تجتازهم الأعداد الأولية الحقيقية إلا أن الأعداد التي تجتاز هذه الاختبارات هي فقط "أعداد أولية محتملة" (لمزيد من الدقة يمكن إطلاق مصطلح اختبارات الأعداد المؤلفة (compositeness) على هذه الاختبارات). جميع الاختبارات الحديثة لابد أن تؤسس في الحساب النمطي من أجل الحصول على الأعداد المتضمنة حتى حجم معقول. أما حاليا فيعتمد البحث عن أعداد أولية كبيرة على اختبار لوكاس-ليهمر غير الاحتمالي. عام 2002 أظهر (اختبار أ.ك.أس لأولية عدد ما) لأول مرة أن اختبار أولية الأعداد العامة يمكن أن يتم بكفاءة نسبيا.

اختبار فيرما لأولية الأعداد Fermat's primality test

كانت الفرضية الصينية وسيلة خاطئة لتحديد الأعداد الأولية، فقد قالت أن العدد (q) يكون أوليا إذا وإذا فقط كان العدد $(2^4 - 2)$ يقبل القسمة عليه. لا عجب في أن الناس قد صدقوا ذلك: فالعدد $(2^3 - 2(= 6))$ يقبل القسمة على 3، والعدد $(2^4 - 2(= 14))$ لا يقبل القسمة على 4، والعدد $(2^5 - 2(= 30))$ يقبل القسمة على 5 ويظل ذلك متحققا

لبعض الوقت، وأول مثال مضاد هو العدد غير الأولي ($31 \times 11 = 341$) والذي لا يقبل العدد ($2^{341} - 2$) القسمة عليه.

على الرغم من أن هذه الحدسية كانت غير صحيحة إلا أنها احتوت على بذور اختبار أولية مبني على مبرهنة فيرما الصغرى، ونتيجة ذلك أنه إذا كانت (q) عددا أوليا محتملا، ووجدنا عددا ما ($n^q - n$) بحيث لا يقبل هذا العدد القسمة على (n) إذن لا يمكن أن يكون (q) أوليا. تتوافق الفرضية الصينية مع الحالة التي تكون فيها ($n = 2$): بالتالي فهي تمثل شرطا ضروريا ليكون العدد أوليا ولكنه ليس شرطا كافيا.

يجرب اختبار فيرما لأولية الأعداد عددا أوليا وهميا (q) الأساس (n). إذا لم يتحقق استنتاج المبرهنة (بالتالي ($n^4 - n$) لا يقبل القسمة على (q)) فسيتبع ذلك أن تكون (q) ليست عددا أوليا فعليا في النهاية، إلا أن هذا الاختبار ليس مثاليا حيث توجد أعداد شبه أولية قد تجتاز هذا الاختبار عند قيم معينة للأساس: 341 هو عدد شبه أولي للأساس 2، وأسوأ الحالات تحدث عندما يجتاز عدد غير أولي هذا الاختبار عند جميع قيم الأساس (n) حيث (n) و(q) عددان أوليان فيما بينهما. وتسمى تلك الأعداد باسم أعداد كارمايكل (Carmichael numbers) نسبة إلى مكتشفهم روبرت كارمايكل عام 1910، وأول هذه الأعداد هو العدد (561). وفي عام 1994 أثبت كل من ألفورد، وجرانفل، و بومرانس أن هناك عددا لا نهائيا من أعداد كارمايكل.

اختبار لوكاس ـ ليهمر Lucas-Lehmer test

يرجع تاريخ اختبار لوكاس–ليهمر إلى عام 1930، ولازال البحث العظيم عن أعداد مرسين الأولية باستخدام الإنترنت the Great Internet Mersenne Prime Search (GIMPS) يستخدمه إلى اليوم لاختبار أعداد مرسين الأولية. إذا كان (p) عددا أوليا كبيرا فإن السؤال الذي يجب إجابته هو ما إذا كان العدد الهائل ($2^p - 1$)وليكن (k) عددا أوليا أيضاً أم لا.

أساس هذا الاختبار هو متوالية لوكاس– ليهمر المعروفة بشكل متكرر: ($S_e = 4$)،

و $(S_{n+1} = S_{n^2} - 2)$. تقول مبرهنة ليهمر أن (k) يكون أوليا إذا، وإذا فقط كان العدد (S_{p-2}) يقبل القسمة عليه. وتكمن الصعوبة في أن متوالية لوكاس-ليهمر تتزايد كبيرا حقا: الحدود القليلة الأولى هي $S_n = 4, S_1 = 14, S_3 = 37{,}634\ S_4 =$ 1,416,317,954 وقبل (S_8) تكون المتوالية قد وصلت إلى عدد أكبر من عدد ذرات الكون مما يجعل أي حسابات أخرى بشكل مباشر مستحيلة. نحتاج إلى طريقة تستخدم الحساب النمطي تحسب فيها قيم (S_n) بمقياس (k): وهذه العملية هي التي تستغرق وقت الحوسبة.كله والخطوة الأخيرة هي حساب (S_{p-2}) بمقياس (k) فإذا كان الناتج صفرا، إذن (S_{p-2}) تقبل القسمة على (k) وبالتالي يكون العدد (k) أوليا.

دالة عد الأعداد الأولية The prime counting function

بالطبع هناك عدد لا نهائي من الأعداد الأولية، إذن ما معنى أن نقوم بعد الأعداد الأولية؟ ستجيب الدالة (π) عن هذا السؤال (يجب ألا تخلط مع العدد (π). لأي عدد طبيعي (n) تعرف $(\pi(n))$ على أنها عدد الأعداد الأولية حتى العدد (n) بما فيها (n) نفسه، بالتالي يكون $(\pi(7) = 4)$؛ لأن هناك أربعة أعداد أولية حتى 7 (تحديدا 2، 3، 5، 7)، وبالمثل $\pi(8) = 4, \pi(11) = 5, \pi(100) = 25, \pi(1000) = 168$ فهم هذه الدالة هو أحد الأهداف العظمى لنظرية الأعداد. بفحص هذه الدالة خلال مدى كبير (انظر الرسم في الأسفل) يصبح عدم التنبؤ بأولية الأعداد المنفردة أخف لتكشف عن الاتجاه العام.

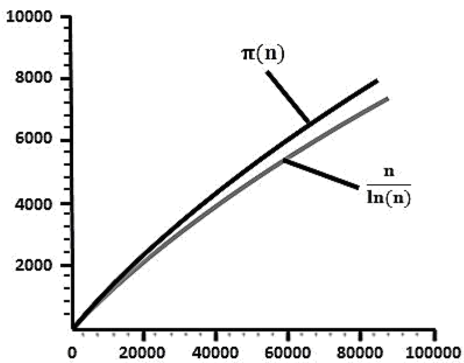
معدل النمو العام للدالة (n) يوصف في مبرهنة العدد الأولي بمعلومات أدق قادمة من فرضية ريمان (في حالة كونها صحيحة).

حدسية هاردي- ليتلوود الثانية The second Hardy–Littlewood conjecture

كانت الشراكة بين جي إتش هاردي، و جيه إي ليتلوود واحدة من أهم الأعمال التعاونية في مجال علم الرياضيات. كانت حدسيتهما التي وضعاها عام 1923 تقول أن دالة عد الأعداد الأولية قابلة لتجزئة الجمع (subadditive): أي أنه لأي عددين (x) و(y)

يكون $\pi(x + y) \leq \pi(x) + \pi(y)$. يترتب على ذلك أنه لن يكون هناك أي مجموعة من أعداد متتالية عددها (n) بإمكانها أن تحتوي على أعداد أولية أكبر من الأعداد (n) الأولى. وقد أثبت إيان ريتشارد عام 1974 - في تطور مدهش- أن حدسيتي هاردي-ليتلوود الأولى والثانية ليستا كاملتين، واستنتج أن الحدسية الثانية من المحتمل أن تكون خاطئة.

المبرهنة الأولى للعدد الأولى The prime number theorem 1



أبدى كارل فريدريك جاوس في الرابعة عشرة من عمره ملاحظة بارزو حول دالة عد الأعداد الأولية؛ حيث لاحظ أن النسبة $(n:\pi(n))$ كانت تساوي تقريبا اللوغاريتم الطبيعي للعدد (n) وهو (ln n). هذا يعني أنك إذا اخترت رقما بين 1و (n) بشكل عشوائي فسيكون احتمال أن يكون العدد أوليا يساوي تقريبا $\frac{1}{\ln n}$، وبالتالي يكون عدد الأعداد الأولية الواقعة بين 1، وn هو $\frac{n}{\ln n}$، وقد وضع جاوس الصغير حدسية يقول فيها أنه حتى عند قيم كبيرة (n) سيظل ذلك صحيحا بمعني أن الدالتين $(\pi(n))$ و $(\frac{n}{\ln n})$ لابد أن تبقيا متساويتين تقاربيا، ويكتب ذلك على الصورة $(\pi(n) \sim \frac{n}{\ln n})$. ولمزيد من الدقة، نقول أن ذلك يعني أن بزيادة (n) ستقترب خارج قسمة أحداهما على الأخرى إلى 1.

المبرهنة الثانية للعدد الأولى The prime number theorem 2

قام جاوس فيما بعد بتنقيح تقديره لعدد الأعداد الأولية من $(\frac{n}{\ln n})$ إلى دالة تكاملية لوغاريتمية أدق (Lin). علميا $(\mathrm{Lin} = \int_2^n \frac{dx}{\ln(x)})$. واعتقد جاوس مرة أخري-لكنه لم يبرهن على ذلك- أن $(\pi(n) \sim \mathrm{Lin})$. وهذا التأكيد هو مبرهنة العدد الأولي وهي أيضاً تتضمن النتيجة الأضعف التي تقول أن $(\pi(n) \sim \frac{n}{\ln n})$.

عام 1896 أثبت كل من جاكس هادمارد(Jacques Hadamard) وتشارلز دو لا فاليه بوسي(Charles de la Vallée Poussin)- كل على حدة عن طريق دراسة دالة زيتا ريمان- مبرهنة العدد الأولي التي تصف النمط العام - وليست القيم الفعلية - لـ ($\pi(n)$)، كما أنها تتنبأ بأن عدد الأعداد الأولية حتى العدد (10,000,000,000) يجب أن يكون تقريبا (455,055,614). في الحقيقة هناك فعليا (455,052,511) ، أي أن نسبة الخطأ تساوي (0.0007%). وإذا أثبتت صحة فرضية ريمان فسوف تملأ تفاصيل هذه الأخطاء، وبالتالي ستحول مبرهنة العدد الأولي إلى وسيلة لوصف ($\pi(n)$) على أفضل مستوى ممكن من الدقة.

دالة ريمان زيتا The Riemann zeta function

لم ينشر بيرنارد ريمان سوى مقالة واحدة عن نظرية الأعداد: "عن عدد الأعداد الأولية الأقل من كمية معطاة" وكانت في عام 1859، لكنها حملت بين طياتها إدعاء قويا بأنها الأكثر تأثيرا من بين ما تم كتابته ، وقد تناولت المقالة دالة معينة عرفت بمتسلسلة القوة (power series)

$$\zeta(s) = \sum_{n=1} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \cdots$$

لم تكن هذه الدالة جديدة: فقد تصورها ليونارد أويلر عام 1737 وأدرك علاقتها بالأعداد الأولية عن طريق إلقاء الضوء على الطرق المختلفة لكتابتها ، وهي معروفة الآن باسم صيغة حاصل الضرب لأويلر

$$\zeta(s) = \prod_{p\ \text{prime}} \frac{p^s}{p^s - 1} = \frac{2^s}{2^s - 1} \times \frac{3^s}{3^s - 1} \times \frac{5^s}{5^s - 1} \times \frac{7^s}{7^s - 1} \times \ldots$$

حيث، تتم عملية الضرب على الأعداد الأولية (P) بينما عملية الجمع تتم على جميع الأعداد الطبيعية (n).

كانت رؤية ريمان الأولى هي أن دالة زيتا أعطت معنى للدوال المركبة: حيث يمكنه إدخال قيم مركبة لـ (s) والحصول على قيم مركبة لـ ($\zeta(s)$). وفي الحقيقة، الصيغة

المذكورة في الأعلى صالحة في نصف المستوى المركب فقط (فهي تتقارب فقط عندما يكون الجزء الحقيقي لـ (s) أكبر من الواحد)، وكان عمله الفذ التالي هو إيجاد صيغة ثالثة لـ (ζ) متحققة في جميع الأماكن (ماعدا عند النقطة ($s = 1$) والتي تتطابق تماما مع نسخ أويلر).

الحصول على قيم صريحة من دالة زيتا أمر صعب للغاية: دراسة التمثيل الجديد لريمان بين أن ($\zeta(0) = -\frac{1}{2}$)، وأن (($\zeta(2n)$) عدد متسامي لجميع القيم الموجبة لـ (n)، ولم يتمكن روجر آبيري من إثبات أن(($\zeta(3)$) عدد غير نسبي قبل حتى عام 1978. أما طبيعة (($\zeta(s)$) بالنسبة للقيم الفردية الأخرى لـ (n) لازالت غامضة، وينصب تركيز فرضية ريمان الشهيرة حول سلوك دالة زيتا عند حد أبعد.

صيغة حاصل الضرب لأويلر Euler's product formula

تطبيق مبرهنة ذات الحدين المعممة على (($1-\frac{1}{2})^{-1}$) يعطي

$$(1-\frac{1}{2})^{-1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots$$

$$(1-\frac{1}{3})^{-1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots$$

وبالمثل

بضربهما معا نجد أن:

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{-1} \times \left(1-\frac{1}{3}\right)^{-1} & \\ &= 1\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots\right) + \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots\right) \\ &+ \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots\right) \\ &+ 1\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\cdots\right)\end{aligned}$$

بفك الأقواس وإعادة الترتيب، يصبح الطرف الأيمن:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\cdots$$

جميع الأعداد التي لها عوامل أولية 2 و 3 ستظهر في هذا التعبير الرياضي مرة واحدة بالضبط. بالمثل:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)^{-1}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)^{-1}\times\left(1-\frac{1}{5}\right)^{-1}$$
$$=1\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\cdots\right)$$

حتى تظهر جميع الأعداد الطبيعية في الطرف الأيمن من المعادلة ، لابد أن تظهر جميع الأعداد الأولية في طرفها الأيسر ، وهذا يدفعنا إلى أخذ حاصل الضرب اللانهائي

$$\prod_{\text{p prime}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}$$

والمشكلة هي أن المتسلسلة المناظرة $(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots)$ لا تتقارب: إنها تتزايد فقط، لكن إذا كانت $(s>1)$ بالتالي ستصبح المتسلسلة المعطاة بواسطة دالة زيتا ريمان $(\xi(s)1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{6^s}+\frac{1}{7^s})$ متقاربة، ونفس الحجة تشير إلى أن هذا لابد أن يساوي:

$$\prod_{\text{p prime}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

هذه هي الفكرة الأساسية وراء صيغة حاصل الضرب لأويلر التي هي بمثابة الإشارة الأولى إلى أن دالة زيتا ريمان مرتبطة ارتباطا وثيقا بالأعداد الأولية

$$\zeta(S)=\prod_{\text{p prime}}\left(\frac{P^S}{P^S-1}\right)$$

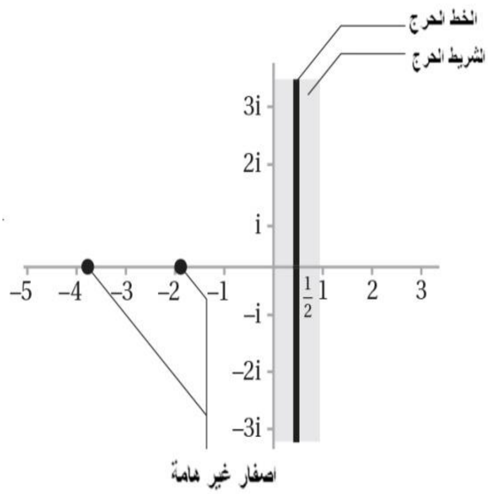
أو ما يكافئه:

$$\zeta(S)=\prod_{\text{p prime}}\left(1-\frac{1}{P^S}\right)^{-1}$$

فرضية ريمان The Riemann hypothesis

لو استيقظت بعد ثبات عميق دام ألف سنة لكان أول سؤال أسأله: "هل أثبتت فرضية ريمان؟" هذا هو ما قاله العالم ديفيد هيلبرت.

استطاع ريمان باستخدام دالة زيتا وبعض الرؤى المذهلة حول التحليل المركب الوصول إلى صيغة دقيقة لدالة عد الأعداد الأولية: يمكن القول بأنها الكأس المقدس لنظرية الأعداد إلا أن صيغته تعتمد على معرفة مكان تلاشي دالة زيتا : قيم (s) التي عندها $(\zeta(s) = 0)$. من السهل نسبيا التأكد من أن $\zeta(-2), \zeta(-4), \zeta(-6)$ جميعها تساوي صفرا : وتسمى جميعها أصفار بديهية (trivial zeroes) لكن هناك عدد لا نهائي أيضاً من الأصفار غير البديهية. أوضح ريمان أن جميع هذه الأصفار غير البديهية تقع على شريط حرج بين Re(s)= 0 and Re(s)=1 (انظر الرسم) وأنهم لابد أن يكونوا في وضع تماثل حول الخط الحرج $(\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2})$



فرضية ريمان هي الزعم بأن جميع الأصفار غير البديهية لدالة زيتا تقع على الخط الحرج. كتب ريمان أنه يعتقد أن هذا "محتمل جدا" لكن "تركت البحث حول ذلك مؤقتا بعد بعض المحاولات العابرة غير المجدية". وبعد 150 عاما، وبعد الجهود المركزة لمئات العقول العظيمة، لازال البرهان صعب المنال.

أصفار ريمان Riemann's zeroes

لقد تسببت مخطوطة ريمان في إثارة مباشرة للعالم الرياضي ولا زالت تلهم علماء الرياضيات الهاو منهم والمحترف منذ ذلك الحين. عام 1896 استطاع كل من هادامارد ودو لا فاليه بوسي كل على حدة من إثبات أنه لا يوجد أي صفر من أصفار ريمان على

حافة الشريط عند الخط (Re(s)=0) أو (Re(s)=1). وكانت إزالة هذا الشريط الفضي المتناهي في الصغر كافية لاستنتاج مبرهنة العدد الأولي.

عام 1914 أثبت ج.هـ. هاردي وجود عدد لا نهائي من الأصفار على الخط الحرج (على الرغم من أن هذا لا ينفي وجودهم عند نقط أخرى خارج الخط)، وفي عام 1974 أثبت نورمان ليفنسون أن على الأقل نسبة (34.74%) من الأصفار غير البديهية تقع على الخط الحرج وقد حسن بريان كونري هذه النسبة إلى (40.1%) عام 1989.

بالطبع تنطوي فرضية ريمان على أن النسبة الصحيحة هي 100٪ وحتى الآن تدعم الأدلة التجريبية ذلك. عام 2004 سخر زافير جوردون وباتريك ديمايكل قوة الحوسبة الموزعة للتحقق من أن أول 10 تريليون صفر غير بديهي تقع بالفعل على الخط الحرج.

الدوال اللامية L-functions

كان تعريف أويلر الأصلي لدالة زيتا:

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \cdots$$

لاحظ أن جميع الكسور بسطها 1. ويمكن تكوين دوال أخرى عن طريق استبدال أعداد مركبة (مختارة بعناية) بالقيمة 1، وهذه هي عائلة الدوال اللامية بالغة الأهمية، وهي دوال تسلك إلى حد ما سلوكا مشابها لدالة زيتا (بما فيها عنادها في إفشاء أسرارها). وتأتي كل منها مع نسختها الخاصة من صيغة حاصل الضرب لأويلر، ومع توسعها الخاص في الأعداد المركبة، وكذلك مع شكلها المختلف من فرضية ريمان، وهو ما يمكن جمعه معا فيما يسمى فرضية ريمان المعممة.

ظهرت الدوال اللامية لأول مرة في البرهان الأصلي لمبرهنة دركليه، ومنذ ذلك الحين احتلت مكانة رئيسة في موضوع نظرية الأعداد التحليلية على الرغم من الصعوبات العلمية الهائلة التي تفرضها. وتعد حدسيات ويل المحورية التي أثبتها بيير ديلين عام 1980 هي نظير فرضية ريمان للدوال المرتبطة إلى حد بعيد، ثم في عام 1994 استخدم آندرو وايلز الدوال اللامية لإثبات مبرهنة فيرما الأخيرة، وهناك عائلات أخرى من الدوال اللامية

تمسك بمقاليد كنوز كثيرة من كنوز العالم الرياضي بما فيها : حدسية بيرخ وسوينارتون – داير، و برنامج لانجلاند.

فرضية ريمان المعممة The generalized Riemann hypothesis

برهان فرضية ريمان هام جدا لأنه سيلقي الضوء على الأعداد الأولية، وبصفة خاصة، إذا كانت هذه الفرضية صحيحة سيكون من الممكن استيعاب سلوك دالة عد الأعداد الأولية بشكل أدق من ذلك الشكل الذي تقدمه مبرهنة الأعداد الأولية حتى الآن، لكن الآثار تذهب مذهبا أبعد من ذلك: دالة زيتا هي فقط الأولى من بين عائلة الدوال اللامية اللانهائية التي غزت نظرية الأعداد الحديثة، والتقنيات التي ساعدت على فهمها قد يكون لها آثار عميقة على باقي الدوال اللامية.

تقول فرضية ريمان المعممة أن الأصفار غير البديهية لجميع الدوال اللامية تقع على الخط الحرج $Re(s)=\frac{1}{2}$. وبصفة خاصة لم يتم إثبات أو دحض أي مثال على ذلك بعد.

الهندسة

يرجع تاريخ عديد من المبرهنات الهندسية التي تدرس في المدارس الآن إلى اليونان القديم، وفي الحقيقة معظم هذه المبرهنات موجودة في كتاب واحد: "عناصر إقليدس" (Euclid's Elements) الذي جمع فيه إقليدس (Euclid's) أبحاثه الخاصة، بالإضافة إلى المعرفة المكدسة التي امتلكها العالم القديم لدراسة تقاطع النقط، والخطوط المستقيمة والدوائر. كان هذا الكتاب قيما لأنه اتبع المنهج البدهي كما هو الحال بالنسبة للمبرهنات التي وردت فيه، إلا أنه في القرن التاسع عشر اكتشفت أشكال جديدة من الهندسة غير الإقليدية (non-Euclidean geometry) فلم تعد بدهيات إقليدس صالحة للتعبير عن تلك الأشكال.

منذ ذلك الحين، تشعبت الهندسة إلى عدة مسارات، يمكن توضيحها باستخدام أحد أبسط الأشكال الرياضية وهي: الدائرة ففي الهندسة التفاضلية نجد أن الدائرة هي نتاج التصاق عدة قطاعات منحنية انحناء

سلسا دقيقا. أما في الطوبولوچيا (topology) فمن المسموح للدائرة الخروج عن دائريتها والتحول إلى مربع. وبين الهندسة الإقليدية، والطوبولوچيا هناك الطوبولوچيا التفاضلية (differential topology) التي تتسع للدوائر المشوهة مثل: الأشكال البيضاوية، والمستطيلة الناعمة التي ليس بها أركان كأركان المربع. وتدرس نظرية العُقد (Knot theory) الطرق المختلفة لتضمين الدوائر الناعمة في الفضاء ثلاثي الأبعاد. أما الوصف الجبري للدائرة فهو يمثل وجهة نظر مختلفة من خلال المعادلة ($x^2+y^2=1$)؛ حيث إن الهندسة الجبرية (Algebraic geometry) هي دراسة الأجسام التي يتم توصيفها باستخدام كثيرات الحدود (polynomials) بهذه الطريقة. وهذا المنهج التجريدي يسمح بتطبيق الوسائل الهندسية في إطارات أبعد مما نستطيع رسمه على الورق.

الهندسة الإقليدية EUCLIDEAN GEOMETRY

عناصر إقليدس Euclid's Elements

يعد مجلد العناصر الذي يتكون من 13 كتابا ركنا بارزا من أركان الكتابات الرياضية؛ فمنذ عام 300 ق.م وهو مصنف على أنه أكثر الكتب نجاحا في كل الأوقات.

لم يضمن إقليدس أعماله الخاصة فقط، بل جمع أعمال العلماء المعاصرين والعلماء السابقين له في تحفة معرفية هائلة، وبقى هذا الكتاب في مكانة عالية حتى أنه بقى لمدة ألفي عام كتابا قياسيا حول العالم. أنتجت الطبعة الأولى منه عام 1482، ثم نشر ما يقرب من ألف نسخة متتالية، ولم يفق عدد طبعات هذا الكتاب إلا الكتاب المقدس.

طور إقليدس نظرية الإنشاءات بالمسطرة والفرجار (ruler and compass constructions)، لكن السبب الرئيسي في شهرة هذا الكتاب هو أعمال إقليدس الهندسية، فهي مشهورة ومحتف بها؛ بسبب المنهج الحديث الذي استخدمه إقليدس وكذلك الحقائق التي أثبتها. وكانت تلك هي المرة الأولى التي يكتب فيها عالم رياضيات بالتفصيل الفروض (أو المسلمات أو البديهيات) التي بدأ بها، ويستنتج النتائج بدقة مستخدما تلك البديهيات.

مسلمات إقليدس Euclid s postulates

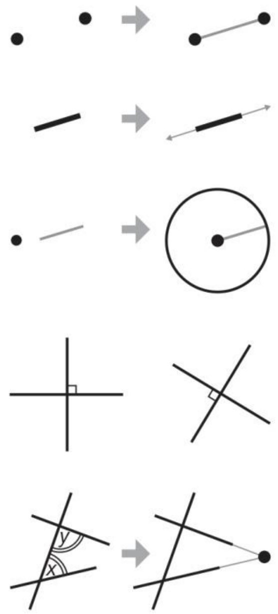
ظل الناس يدرسون النقط والخطوط لآلاف السنين قبل ظهور إقليدس، إلا أن هذا الموضوع (موضوع الهندسة المستوية) أصبح تحت يديه أول مجال في علم الرياضيات يتم فيه استخدام البديهيات، وقد بين إقليدس أن عمله استند إلى خمس فروض أساسية:

1- يمكن رسم قطعة مستقيمة بين أي نقطتين.

2- يمكن مد أي قطعة مستقيمة من طرفيها لا نهائيا.

3- يمكن أن نرسم دائرة طول نصف قطرها أي طول ومركزها أي نقطة.

4- أي زاويتين قائمتين متساويتان.



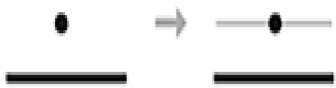
5- إذا قطع مستقيمين مستقيم ثالث وكانت الزوايا الداخلية لأحد الجانبين أقل من مجموع زاويتين قائمتين ($x + y < 180°$) فإن المستقيمين يتقاطعا إذا تم مدهما لا نهائيا.

يحتمل أن إقليدس لم يكن راضيا عن مسلمته الخامسة التي عرفت باسم مسلمة التوازي (Euclid s postulates) والتي وصفت بالإطناب، فقد استخدمت الثمانية وعشرون مثالا الأولى من كتابه المسلمات الأربعة الأولى فقط، لكن في المثال التاسع والعشرين على الخطوط المتوازية لم يكن لديه اختيار سوى الاعتماد على المسلمة الخامسة.

مسلمة التوازي Euclid s postulates

معظم الوقت خلال الألفين وثلاثمائة عام منذ ظهور كتاب العناصر لإقليدس، استخدم المصطلح الهندسة الإقليدية (Euclidean) بكثرة فلم يكن هناك أي نوع من الهندسات الأخرى، فلم يكن معروفا وقتها إلا الأنظمة الهندسية التي تتبع مسلمات إقليدس الخمسة. ومع ذلك، فإن معظم علماء الهندسة شاركوا وجهة نظر إقليدس في أن المسلمة الخامسة كانت إلى حد ما صعبة لأنها كما يتضح أقل المسلمات صوابا. تم التوصل إلى صياغات بديلة أسهل بما فيها تلك التي عرفت باسم مسلمة بلاي فير (playfair's axiom) (على الرغم من أن بلاي فير لم يكن أول من اكتشفها):

إذا كان لدينا خط مستقيم ونقطة لا تنتمي إليه فإنه يوجد على الأكثر خط ومستقيم واحد يمر بهذه النقطة موازيا للخط المستقيم.



"خطان متوازيان" يعني أنهما لا يتقاطعان أبدا إذا تم مدهم لا نهائيا. وقد سبق أن أوضح إقليدس (باستخدام المسلمات الأربعة الأولى فقط) أنه يوجد على الأقل خط واحد فقط كهذا (أي خط واحد يمر بنقطة لا تنتمي للمستقيم الأول) وهو ما يفسر العبارة الغريبة "على الأكثر خط مستقيم واحد".

استقلال مسلمة التوازي The independence of the parallel postulate

استمر علماء الرياضيات الأوروبيين والمسلمين في الجدال حول هذه المسلمة لقرون عديدة. هل من الممكن أن تكون مستنتجة من الأربع مسلمات الأولى؟ لقد كتبت العديد من البراهين الوهمية التي فضح أمرها فيما بعد، وكذلك اكتشفت العديد من الشروط المكافئة منطقيا لهذه المسلمة (بما فيها التأكيد على أن مجموع الزوايا الداخلية للمثلث دائما يساوي 180° درجة). ومؤخرا لاحظ سكوت برودي (Scott Brodie) أن مبرهنة فيثاغورث مكافئة منطقيا لمسلمة التوازي.

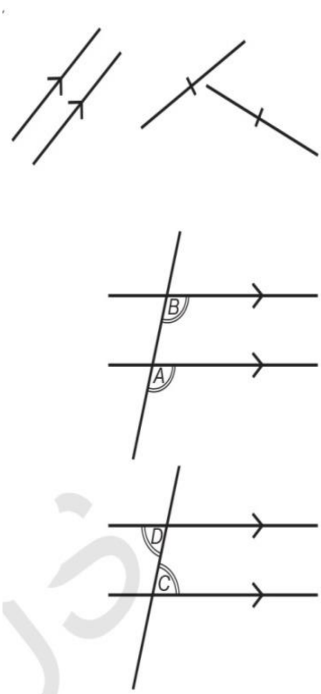
لم يكن حتى القرن التاسع عشر عندما اكتشف كارل فريدريك جاوس (Carl Friedrich Gauss)، ونيكولاي لوباكفيسكي (Nikolai Lobachevsky)، وجانوس بوليا (János Bolyai) نظام الهندسة الزائدية (hyperbolic geometry) الذي توافق مع الأربع مسلمات الأولى ولم يتوافق مع مسلمة التوازي، وبذلك اتضح أخيرا أن مسلمة التوزاي مستقلة عن المسلمات الأربعة الأولى (راجع استقلالية النتائج).

الزوايا Angles

الزاوية هي مقدار الاستدارة، لكن كيف يمكن تحديد ذلك؟ ربما تكون أسهل طريقة لذلك هي بدلالة اللفات، وبالتالي فإن لفة كاملة واحدة تعتبر 1، بينما الزاوية القائمة تعتبر $\frac{1}{4}$ لفة، وهذا ملائم لتوصيف الدورانات الكبيرة، وهذا ما يجعل وحدة قياس السرعة الدورانية باللفة/ ثانية. أما الاستدارات الأصغر يستخدم مقياس أكثر دقة. القياس المعتاد للزوايا يكون بالدرجة (degree) حيث تمثل ال 360 درجة لفة كاملة. وترجع جذور ذلك إلى السنة البابلية القديمة التي كان عدد أيامها 360 يوما.

ومن المعتاد أن تقسم الدرجة إلى °60 دقيقة قوسية، وكل دقيقة قوسية إلى °60 ثانية قوسية. هناك نظام آخر لكنه لم يعد يستخدم كثيرا هو النظام المئوي (the grad) الذي اخترع في فرنسا في محاولة لتضمين الزوايا ضمن النظام المتري. °100 درجة مئوية تمثل زاوية قائمة، مما يجعل اللفة الكاملة تساوي °400 درجة مئوية، وعلى الرغم من أن ذلك مثير للاهتمام من الناحية التاريخية إلا أن هذه الأنظمة اختيارية، ويفضل العلماء استخدام التقدير الدائري وهو نظام مبني على الدوائر؛ حيث تساوي اللفة الواحدة 2 ط بالتقدير الدائري.

الخطوط المتوازية Parallel lines



يقال لخطين مستقيمين أنهما متوازيان إذا كانا يقعان في نفس المستوى ولا يتقاطعا أبدا حتى إذا تم مدهم إلى ما لا نهاية في كلا الاتجاهين مثل خطي سكة حديد لا نهائي الطول. (شرط أن يقعا في مستوى واحد ضروري: ففي الأبعاد الثلاثية يمكن أن يكون الخطان متخالفين؛ أي أنهما ليسا متوازيين أو متقاطعين). وإذا أخذنا في الاعتبار مسلمة التوازي نجد أن من شروطها المكافئة أن المسافة العمودية بين الخطين تكون متساوية دائما مهما اختلف موضع القياس.

يتم تمثيل الخطوط المتوازية باستخدام أسهم متطابقة الشكل على الخطوط، بينما القطع المستقيمة متساوية الطول تمثل برسم شرطتين متطابقتين على كل قطعة.

هناك حقيقتان مهمتان بخصوص ما يحدث عندما يقطع خطين متوازيين مستقيم ثالث، وقد أثبتهما إقليدس في مسألة 1.29 في كتاب العناصر، وتعتمد نتيجته الأولى على مسلمة التوازي.

1- الزوايا المتناظرة متساوية: كما في الرسم، الزاويتان (A) و (B) زاويتان متناظرتان (يطلق عليهما أحيانا زوايا حرف F)؛ لأنها تشغل مواضع متناظرة على خطين متوازيين. الزوايا التناظرة في ذلك الوضع تكون متساوية دائما

2- الزوايا المتبادلة متساوية: الزاويتان (C) و (D) زاويتان متبادلتان (زوايا حرف z) وهما أيضاً متساويتان دائما.

الزوايا القائمة Right angles

مهما اختلفت طرق القياس التي تستخدمها في قياس الزاوية القائمة سواء (90°، أو ط/ 2 أو ربع لفة كاملة) تظل الزاوية القائمة عنصرا أساسيا في الهندسة الإقليدية. وربما يكون أبسط توصيف لها يكون برسم خط مستقيم والذي يصنع زاوية 180° أو ط على كلا الجانبين والتي تصبح بدورها 90° إذا قسمناها إلى زاويتين متساويتين. وتقول مسلمة إقليدس الرابعة أنه متى تقم بهذه الخطوات فإنك ستحصل على نفس النتيجة. يشار إلى الزاوية القائمة بخطين صغيرين يصنعان مربعا ركنيا صغيرا.

المفهوم المعاكس للتوازي هو التعامد: يقال أن خطين متعامدان إذا كانا يصنعان زاوية قائمة مع بعضهما البعض (في بعض الإطارات الأخرى مثل هندسة المتجهات يستخدم المصطلح (orthogonal) للدلالة على التعامد).

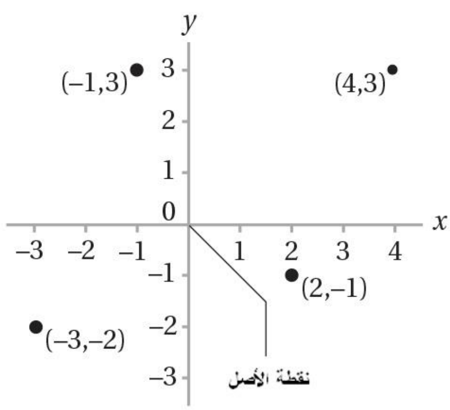
تقدم الزوايا القائمة أيضاً مفهوما للقياس. فقياس المسافة بين نقطتين في مستوى يكون واضحا أما قياس المسافة بين خطين (أو بين نقطة وخط، أو بين خط ومستوى) فيحتاج أن تكون هذه المسافة هي المسافة العمودية: أي طول القطعة المستقيمة الجديدة التي تقطعهما بزاوية قائمة.

الهندسة الديكارتية Cartesian geometry

اشتهر رينيه ديكارت (أو "كارتيسوس" عندما تكتب في اللغة اللاتينية) في الأساس بسبب اختراقه المعرفي الذي ظهر في جملته الشهير "أنا أفكر إذاً أنا موجود". في القرن السابع عشر كانت الحدود الفاصلة بين علم الفلسفة، والعلوم وعلم الرياضيات أقل بروزا مما هي

عليه الآن، وقد كتب ديكارتيه لأول مرة في عمله الشهير "مناقشة حول الوسيلة" (discourse on method) جملة: "أنا أفكر إذاً أنا موجود"، وفي عمل لاحق تحت عنوان "الهندسة" (La Geometrie) قدم ديكارتيه نظام الإحداثيات الذي كان له تأثيرا عميقا مماثلا على الفكر الحديث. لقد وصف ديكارت المستوى الإقليدي (سطح مستو ممتد ثنائي الأبعاد) عن طريق رسم خطين يصنعان مع بعضهما البعض داخل المستوى زاوية قائمة عند نقطة الأصل ويقسمان المستوى إلى أربعة أرباع. اصطلح على تسمية الخط الأفقي محور X، والخط الرأسي محور Y. ويتحدد موضع أي نقطة في المستوى بإحداثي X ، وY.

الإحداثيات الديكارتية Cartesian coordinates



في الهندسة الديكارتية تتحدد كل نقطة في المستوى بمعرفة الربع الذي تقع فيه وبُعدها عن كل محور، وهذا يشبه كثيرا قراءة خريطة؛ ويسمى الرقمان اللذان يحملان هذه المعلومة إحداثيات النقطة.

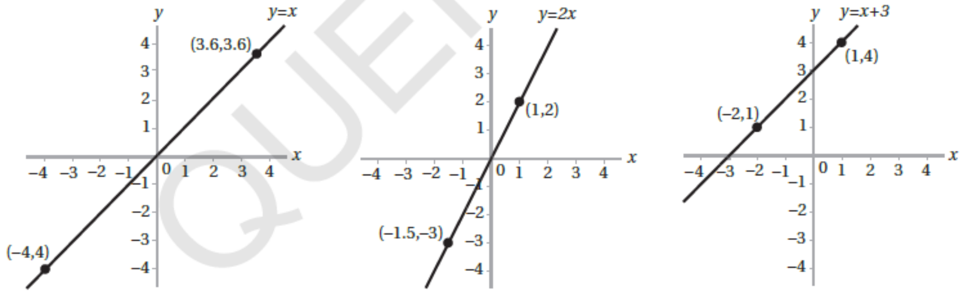
النقطة (4,3) تقع في الربع الأيمن العلوي (لأن كلا الرقمين موجب) وهي عبارة عن 4 وحدات لليمين على طول محور X و 3 وحدات إلى أعلى. (يستخدم بعض الناس جمل مساعدة على التذكر مثل: "بمحاذاة الممر صعودا على الدرج" ليتذكروا ترتيب إحداثيات X و Y، وبالمثل تقع (-2 ,-3) في الربع الأيسر السفلي، 3 وحدات لليسار ثم وحدتين إلى أسفل. أما نقطة الأصل فهي (0,0).

رسم الرسوم البيانية Plotting graphs

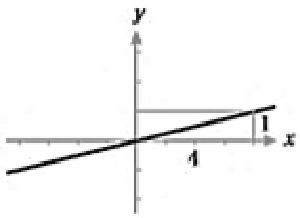
استخدام الأساليب الجبرية في الهندسة قديم قدم البابليين القدماء، لكن الإحداثيات الديكارتية فتحت الباب لوسائل أكثر تطورا في الهندسة؛ فباستخدام الإحداثيات الديكارتية

أصبحت النقاط أكثر تحديدا باستخدام الأرقام، و يمكن استخدام العلاقات بين تلك الأرقام في توصيف الأشكال الهندسة.

على سبيل المثال: يمكننا أن ننظر إلى كل النقط التي يكون إحداثييها X، Y متساويين: ((1,1) ,(0,0) ,(10- ,10-)) وهكذا، وبتوقيعها على المستوى نجد أن جميعها تقع على خط مستقيم واحد، وبالنظر إلى الأرقام يتضح أن نقطة ما (x, y) تقع على هذا الخط تماما إذا كان الإحداثي X مساويا للإحداثي Y؛ لذلك نقول أن معادلة هذا الخط هي X=Y.

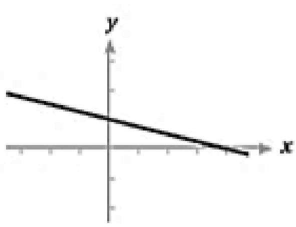


مثال آخر: النقط التي يكون الإحداثي الثاني ضعف الإحداثي الأول: ,(12-,6-) (1,2),(0,0) وهكذا ، وهي تقع أيضاً على خط مستقيم وفي هذه الحالة تكون معادلته y=2x، وبالمثل إذا بدأنا بالمعادلة (y = x+3) وبالتعويض عن قيم X بـ (صفر، -4، 8) نحصل على القيم (1-,4-)، (0,3)، (8,11) على الخط، وجميع هذه النقط إحداثي Y لها أكبر من إحداثي X بمقدار 3.



الميل (التدرجات) Gradients

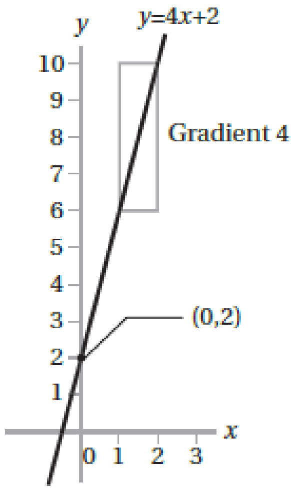
نجد هذه التدرجات مرسومة على العلامات الموضوعة على طريق ما لتشير إلى مقدار وعورة التل؛ حيث أن مقدار 25٪ يعني أنك كلما قطعت مترا واحدا أفقيا تكون قد صعدت بمقدار $\frac{1}{4}$ مترا، ويمكن قول ذلك بطريقة أخرى: في كل النطاقات تكون الزيادة في الارتفاع مقسومة على المسافة الأفقية المقطوعة يساوي دائما $\frac{1}{4}$ ، أما



إذا كنت هابطا من التل فقد تكون العلامة −25٪. بالطبع تكون للتلال الحقيقة بداية ونهاية ويكون الميل بينهما غير منتظم، أما في الخطوط المستقيمة في المستوى فالأمر مختلف. لحساب الميل لخط مستقيم، نختار أي نقطتين على الخط، ونقيس الزيادة الرأسية بينهما ونقسمها على المسافة التي تغطيها النقطتان أفقيا (إذا كان الخط من اليمين إلى اليسار مائلا لأسفل فسيكون الميل سالبا).

ميل المنحنيات الممهدة (smooth curves) غير ثابت بل متغير، فمن المنطقي أن تختار نقطة على المنحنى وتسأل ما هو ميل المماس للمنحنى عند تلك النقطة والذي يمكن حسابه باستخدام التفاضل.

معادلة الخط المستقيم The equation of a straight line



يتحدد الخط المستقيم في المستوى بمعلومتين: الأولى ميله، والثانية إحداثيات أي نقطة يمر بها الخط. ومن النقط الملائمة للاختيار نقطة التقاطع مع محور Y (الموضع الذي يقطع فيه الخط المحور الرأسي (محور Y)) وبما أن النقطة التي اخترناها تقع على المحور فسيكون إحداثيها الأول هو صفر وسنسميها النقطة (0,c).

إذا كان ميل الخط m فإن معادلته تكون $(y = mx + c)$ وبالتالي فإن الخط $(y = 4x + 2)$ يقطع محور الصادات في النقطة وميله 4.

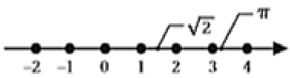
الخط الرأسي حالة استثنائية حيث أنه موازي لمحور Y فهو لا يتقاطع معه في أي نقطة، ويصبح حساب قيمة c ليس له معنى، وبالمثل يكون ميل هذا الخط غير معروف، لأنها لا تغطي أي مسافة أفقية (ويقول البعض أن هناك ميلا نهائيا) وعلى الرغم من ذلك فإن معادلات تلك الخطوط مباشرة؛ لأنها محددة بالإحداثي الأول الذي يظل ثابتا X=3.

الخط الأفقي ميله صفر وهو معرف بالإحداثي الثاني الذي يظل محددا y=4.

خط الأعداد الحقيقية The real line

يضع كتاب العناصر لإقليدس علم الهندسة للألفية القادمة، فأساسياته، والخطوط المستقيمة ، والمثلثات قائمة الزاوية، والدوائر لازالت مهمة كما كانت، ومع ذلك وبحلول القرن التاسع عشر أصبح علماء الرياضيات مهتمين بعدم اتخاذ الكثير من الأشياء على أنها من الأمور المسلم بها، فكتاب العناصر فتح المجال لبعض التعريفات: "1- النقطة هي ما لا يمكن تجزأته. 2- الخط هو طول ليس له عرض..... 4- الخط المستقيم هو خط يقع بالتساوي بين نقطه 5- السطح هو كل ماله طول وعرض".

لن يجد أي عالم رياضيات حديث أي مشكلة في فهم معاني إقليدس، وفي نفس الوقت، ما هو حقا الذي "لا يمكن

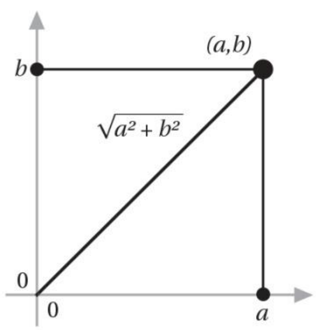


خط الأعداد الحقيقية

تجزأته"؟ فقد كان من المهم ترجمة ما قاله إقليدس إلى مصطلحات دقيقة تنتمي للرياضيات الحديثة. ويمكن تعميم هذه الأفكار عن طريق نظام الأعداد الحقيقية (R)، وهو يأتي على صورة هندسية: خط الأعداد الذي يعتبر هو الفضاء الإقليدي الأول من وجهة نظر المصطلحات الحديثة.

المستوى الإقليدي Euclidean plane

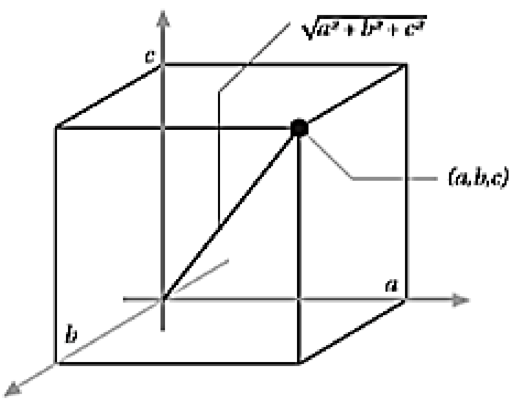
تعرف مجموعة الأعداد الحقيقية أيضاً باسم الخط الحقيقي، وهو يقدم نموذجا مثاليا لخط أحادي البعد، والنقط على هذا الخط هي ببساطة أرقام ، والمسافة بين نقطتين هي النقطة الأكبر مطروح منها النقطة الأصغر، لذلك يكون بعد النقطتين عن بعضهما إما موجب (مع وجود عدد لا نهائي من النقط بينهما)، وإما أن تكون



النقطتان هما نفس النقطة؛ أي ليستا متجاورتين حقا بل منطبقتين. وتكون النقط في ترتيب طبيعي يعطى بحجم هذه الأرقام. ويمكن توصيف المستوى عن طريق استبدال أزواج من الأعداد الحقيقية بالأرقام المنفردة، وهذا هو نظام الإحداثيات الديكارتية. ومن

الناحية الرسمية فإن تلك الأزواج ليست مجرد توصيف للاتجاهات المؤدية لنقطة بل هي النقط نفسها. وتعطى المسافة بين نقطة ما (a,b)، ونقطة الأصل من مبرهنة فيثاغورث ($\sqrt{a^2+b^2}$) ويمكن تمديد ذلك ليشمل حساب المسافة بين أي نقطتين). وتلك المجموعة التي تضم جميع أزواج الأعداد الحقيقية يرمز لها بالرمز (R^2) ويطلق عليه الفضاء الإقليدي ثنائي الأبعاد (Euclidean 2-space) أو ببساطة يطلق عليه المستوى، وتكرار هذه العملية يعطي أفضية ذات أبعاد أعلى (Higher dimensional spaces).

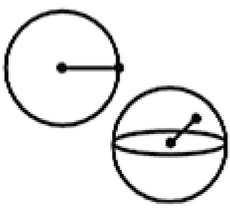
الأفضية ذات الأبعاد الأعلى Higher dimensional spaces



يمكننا تكرار الحيلة التي استخدمناها في الفضاء الإقليدي في الأبعاد الثلاثة حيث: الفضاء الإقليدي ثلاثي الأبعاد هو مجموعة النقط الثلاثية التي تمثل الأعداد الحقيقية (R^2)، والتي يمكن حساب بعدها عن نقطة الأصل (0,0,0,) بالعلاقة ($\sqrt{a^2+b^2+c^2}$). ولسنا بحاجة إلى التوقف هنا والإكتفاء بذلك ؛ فقد لا يكون بإمكاننا تصور فضاء رباعي الأبعاد لكن من الناحية الرياضية فإن الخطوات المؤدية للحصول عليه واضحة: الفضاء الإقليدي رباعي الأبعاد ($\mathrm{Euclidean}\ 4-\mathrm{space}(R^4)$) هو مجموعة النقط الرباعية التي تمثل الأعداد الحقيقية (a,b,c,d)، ويمكن الاستمرار في ذلك إلى أى بعد نريده، وبصفة عامة يكون الفضاء الإقليدي نوني البُعد $\mathrm{Euclidean}\ n-\mathrm{space}(R^n)$ هو مجموعة النقط النونية التي تمثل الأعداد الحقيقية $(a,b,\dots,z)$، والتي تبعد عن نقطة الأصل مسافة تعطى بالعلاقة ($\sqrt{a^2+b^2+\dots+z^2}$).

الكرات متعددة الأبعاد Multi-dimensional spheres

تعرف الدائرة في مستوى على أنها مجموعة النقاط التي تقع على بعد ثابت (يسمى نصف القطر) من نقطة معطاة تسمى المركز.، وللتبسيط نفرض نصف القطر طوله الوحدة، ومركز الدائرة هو نقطة الأصل بالتالي ينتج عن مبرهنة إقليدس صيغة للدائرة كمجموعة من النقط (x, y) حيث ($\sqrt{x^2 + y^2} = 1$)، وبالتالي ($x^y + y^2 = 1$)، وتطبيق نفس الفكرة في الأبعاد الثلاثة يعطي كرة: وهي مجموعة النقط (x, y, z) التي تبعد عن نقطة الأصل مسافة مقدارها الوحدة وبالتالي ($x^2 + y^2 + z^2 = 1$). وأصبح من الواضح كيف يمكننا التوسع في ذلك وصولًا إلى أبعاد أعلى: في الفضاء الإقليدي نوني الأبعاد تكون الكرة النونية عبارة عن مجموعة من النقط $(x, y, \ldots, z)$ التي تبعد عن نقطة الأصل مسافة مقدارها الوحدة، بمعنى أنها مجموعة النقط التي تحقق ($x^2 + y^2 + \cdots + z^2 = 1$).

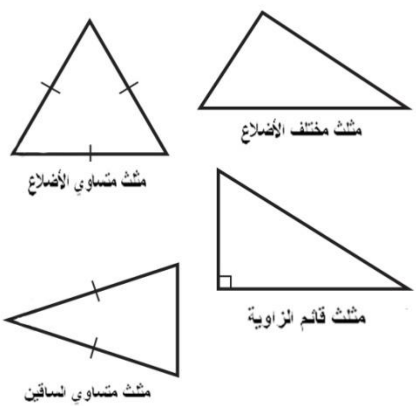


على الرغم من العجز البشري عن تخيل الأشكال في الأبعاد العليا، فإنه يمكن الوصول إلى هذه الأشكال بطريقة أخف إرهاقا عن طريق تعميم الأفضية الأكثر شيوعا.

المثلثات TRIANGLES

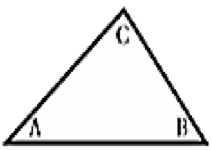
المثلثات Triangles

إن أفضل ما يصف عالم الشئون الإنسانية هو نظام الهندسة الإقليدية؛ حيث لا يوجد أشكال ثنائية الزوايا (biangles): وهي الأشكال المكونة من خطين مستقيمين فقط ، وبذلك يكون المثلث البسيط أحد الأشكال الابتدائية وبالتالي أكثرها أهمية. وتأتي المثلثات في أشكال عدة: أولها المضلع



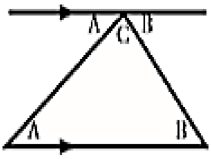
المنتظم وهو المثلث متساوي الأضلاع؛ أي الذي تكون أضلاعه الثلاثة لها نفس الطول، أما المثلث متساوي الساقين فهو المثلث الذي فيه ضلعان لهما نفس الطول، أما المثلث الذي جميع أضلاعه مختلفة الطول فيطلق عليه مثلث مختلف الأضلاع. ثم يأتي عماد الهندسة الإقليدية: المثلث قائم الزاوية والذي هو ببساطة المثلث الذي تكون إحدى زواياه قائمة، أما إذا أصبحت كل زواياه أقل من 90° فسيصبح مثلثا حاد الزوايا. أما إذا احتوى المثلث على زاوية منفرجة (وهي الزاوية التي قياسها أكبر من 90°) فنطلق عليه مثلث منفرج الزاوية.

زوايا المثلث Angles in a triangle



مجموع قياسات زوايا المثلث 180° درجة.

ذلك ما أثبته إقليدس في مسألة 1.32 من كتابه، وكانت هي أول نتيجة مهمة للهندسة المثلثية (triangular geometry). تتبع هذه المبرهنة مبرهنة الزوايا المتبادلة على خطين متوازيين. إذا بدأنا بمثلث ABC ورسمنا خطا يوازي AB ويقطع C، فستكون الزوايا الثلاثة عند C تقع على خط مستقيم وبالتالي تساوى 80°.



لكن الزاويتين الجديدتين عند C تساويان A، وB من مبرهنة الزوايا المتبادلة، ومن بين العديد من النتائج تشير هذه الحقيقة إلى أن جميع زوايا المثلث متساوي الأضلاع متساوية وتساوي 60° درجة.

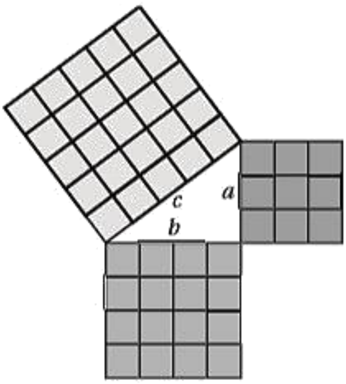
المثلثات قائمة الزاوية Right-angled triangles

المثلث قائم الزاوية هو المثلث الذي تكون إحدى زواياه قائمة، ويكون الوتر في المثلث القائم هو أطول ضلع: المقابل للزاوية القائمة.

المثلثات قائمة الزاوية موجودة في كل مكان حولنا: إنها العناصر الأساسية في الهندسة الإقليدية. وقد مضى أكثر من 3000 سنة منذ وصفت مبرهنة فيثاغورث لأول مرة العلاقة

بين الأضلاع الثلاثة للمثلث القائم. وفي نظام الإحداثيات الديكارتية يكون لكل نقطة (x, y) مثلثها القائم الخاص بها والذي يعطى بالنقط (0,0)، (x,0)، (x, y) لذا فإن مبرهنة فيثاغورث تقدم الوسيلة الأساسية لحساب المسافات في المستوى، كما أن المثلثات قائمة الزاوية بمثابة إطار لعلم حساب المثلثات (trigonometry).

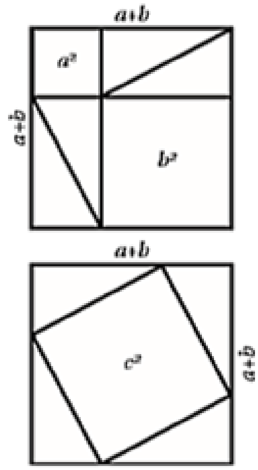
مبرهنة فيثاغورث Pythagoras' theorem



ربما كانت المبرهنة الأشهر على الإطلاق وهي أيضاً من بين أقدم المبرهنات. وعلى الرغم من أن هذه المبرهنة تعزى إلى فيثاغورث عالم الرياضيات اليوناني الغامض(حوالي 475-569 ق م) إلا أن هناك أدلة قوية على أن البابليين القدماء كانوا على معرفة بهذه النتيجة منذ أكثر من ألف عام قبل ذلك. وقد ضمنها إقليدس في مسألة 1.47 في كتابه.

وتتعلق المبرهنة بالمثلث قائم الزاوية، وهي تقول: أن مربع الوتر يساوي مجموع مربعي الضلعين الآخرين (a وb)، ويمكن تصور ذلك هندسيا عن طريق ربط مساحات المربعات المقامة على أضلاع المثلث، أو تصوره تصورا جبريا بحتا: ($a^2+b^2+c^2$).

إثبات مبرهنة فيثاغورث Proof of Pythagoras' theorem



تعد مبرهنة فيثاغورث أكثر مبرهنة مثبتة من بين المبرهنات الرياضية الأخرى، وفي كتاب إيليشا لوميس (Elisha Loomis) تحت عنوان "مسألة فيثاغورث" (the Pythagorean proposition) قامت بتجميع حوالي 367 برهانا.

هذا مثال على البرهان الهندسي الذي وضعه عالم الرياضيات الهندي باسكارا (Bha – skara) في القرن الثاني عشر. مربع أحد أضلاعه (a+b) يمكن تقسيمه بطريقتين

مختلفتين: إحداهما بتقسيمه إلى أربع نسخ من المثلث الذي أضلاعه a ,b ,c. بالإضافة إلى مربع مساحته (a^2) ومربع مساحته (b^2)، والأخرى بتقسيمه إلى أربع نسخ من المثلث ومربع مساحته (c^2)، وبما أن المساحة الكلية متساوية في الحالتين ، فمن المؤكد أن ($a^2+b^2+c^2$).

ثلاثيات فيثاغورث Pythagorean triples

أسهل أطوال يمكن التعامل معها (وخاصة قبل ظهور آلة الجيب) هي الأرقام الصحيحة، وبمجرد أن اتخذت المثلثات قائمة الزاوية موضعها باعتبارها حارسا للهندسة كان لزاما أن نجد بعضا من تلك المثلثات وأن تكون أطوالها ذات قيم صحيحة. لسوء الحظ فإن معظم تلك المثلثات ليس كذلك، فمثلا: إذا جعلت الضلعين الأقصر طولا مساويين الوحدة، فسنجد أن مبرهنة فيثاغورث تبين أن الوتر c لابد أن يحقق ($c^2=1^2+1^2=1+1=2$)، لذلك فإن ($c = \sqrt{2}$) وهو ليس فقط عددا غير صحيح (not a whole number) بل الأسوأ من ذلك أنه أيضاً عدد غير نسبي. ومن المثير للإزعاج أن ذلك يحدث عادة.

أما أول مثلث قائم الزاوية يمكن أن تكون لأضلاعه قيم صحيحة هو المثلث الذي أضلاعه 3، و 4، و 5، وهذا يحقق مبرهنة فيثاغورث ($3^2+4^2=9+16=25=5^2$)؛ لذلك يسمى ثلاثي فيثاغورث (Pythagorean triples)، وتعتبر مضاعفات هذا الثلاثي مثل: (6,8,10)، و (9,12,15) من ثلاثيات فيثاغورث أيضاً.

ويطلق على ثلاثيات فيثاغورث التي ليست مضاعفات لثلاثيات أصغر اسم ثلاثيات فيثاغورث البدائية مثل (9,40,41) ,(8,15,17) ,(7,24,25) ,(5,12,13).

وقد قدم إقليدس في مسألة 10.29 في كتابه صيغة عامة للحصول على تلك الثلاثيات، ويترتب على ذلك أن تصبح قائمة الثلاثيات البدائية ممتدة للأبد.

كان حل مسألة إيجاد ثلاثيات فيثاغورث نتيجة مبكرة في دراسة المعادلات الديفونتية، حيث تنص مبرهنة فيرما الأخيرة على أنه إذا تم تبديل أعداد ذات قوى أعلى ($n \geq 3$) بالمربعات فلن نجد أى قيمة صحيحة للمعادلة ($a^n + b^n = c^n$).

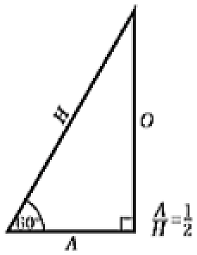
مساحة المثلث The area of a triangle

على مر السنين، اكتشفت الهندسات عددا لا بأس به من الصيغ التي تحسب مساحة المثلث، وأكثرها شيوعا هي (حاصل ضرب نصف طول القاعدة في الارتفاع $(\frac{1}{2}\times b\times h)$ حيث b هي طول أحد الحرفين ولتكن القاعدة، أما h فهي المسافة العمودية بين قاعدة المثلث والنقطة الثالثة في المثلث (وفي الحقيقة فإن هذه الصيغة تعتبر ثلاث صيغ في صيغة واحدة حيث أنها تعتمد على الحرف الذي ستستخدمه كقاعدة للمثلث). باستخدام القليل من علم حساب المثلثات تتحول الصيغة السابقة إلى ($\frac{1}{2}\times a\times b\times \sin C$) حيث C هي الزاوية المقابلة للضلع c. أما إذا كانت إحداثيات المثلث أعداد صحيحة فستكون أسهل طريقة هي استخدام مبرهنة بيك (Pick's Theorem).

بينما أكثر الطرق تطورا هي استخدام الصيغة (r×s) حيث r هو نصف القطر الدائرة المرسومة داخل المثلث (راجع مراكز المثلثات)، و S هو نصف المحيط ($s=\frac{a+b+c}{2}$)، كما أن نصف المحيط مستخدم أيضاً في صيغة هيرو (Heron's Formula) التي أنشأها هيرو السكندري (حوالي عام 50 بعد الميلاد)، وقد تكون أكثر الصيغ المذهلة لإيجاد مساحة المثلث هي ($\sqrt{s(s+a)(s-b)(s-c)}$) .

علم حساب المثلثات Trigonometry

في المثلث قائم الزاوية تمثل مبرهنة فيثاغورث العلاقة بين أطوال الأضلاع، في الوقت الذي تمثل فيه حقيقة أن مجموع زوايا المثلث الداخلة 180° درجة العلاقة بين زوايا المثلث: فإذا علمنا أن إحدى الزوايا تساوي 60 درجة فلابد أن تكون الزاوية الثالثة مساوية 30° درجة، مما يعني أن جميع المثلثات القائمة التي تحوي زاوية قياسها 60° درجة لها نفس الشكل الأساسي والاختلاف فقط يكون في مقاساتها (أطوال أضلاعها) (حيث تكون هذه المثلثات متشابهة من الناحية الهندسية)، فنشأ ما يسمى حساب المثلثات (Trigonometry) هذا المصطلح مكون من الكلمتين اليونانيتين (trigonon) وتعني مثلث، و(metron) وتعني قياس فاتحدتا معا وظهر حساب المثلثات الذي يدرس العلاقة بين أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا.



لنفرض أننا على علم بأن أحد زوايا مثلثنا القائم تساوي °60 درجة، ماهي أطوال الأضلاع الممكنة؟ بالتركيز على كلا الضلعين الواقعين على جانبي الزاوية °60: المجاور وهو الضلع (A) والوتر وهو الضلع (H). الأطوال الممكنة ($A = 1\text{cm}, H = 2\text{cm}$)، ($A = 5\text{km}, H = 10\text{Km}$)، ($A = 8\mu\text{m}, H = 16\mu\text{m}$)، وكلها حلول مختلفة لكن بينها شيء مشترك؛ حيث نلاحظ أن في كل حالة يكون طول الوتر ضعف طول المجاور.

معرفة أن إحدى زوايا المثلث القائم تساوي °60 درجة ليس كافيًا لمعرفة أطوال أضلاعه لكنه كاف لمعرفة قيمة النسبة ($\frac{A}{H}$) وهي تساوي 1/ 2 في المثال السابق، وبالتالي إذا علمنا أن A=4 فسنعلم مباشرة أن H=8. وإذا بدأنا بمثلث قائم به زاوية قياسها 45 درجة فسنجد ($\frac{A}{H} = \frac{1}{\sqrt{2}}$) أي حوالي (0.707). تسمى الدالة التي تأخذ قياس الزاوية ويكون ناتجها النسبة ($\frac{A}{H}$) بدالة جيب التمام (Cosine function) الجيب، وجيب التمام، وظل الزاوية Sine, cosine and tangent .

إذا كانت X زاوية في مثلث قائم الزاوية، فيمكننا تسمية أضلاع المثلث كما يلي: الوتر H (Hypotenuse)، والمقابل للزاوية O (Opposite the angle)، والمجاورA (Adjacent to the angle)، وعلى الرغم من أن H، و O و A يمكن أن تتغير قيمهم دون تغيير الزاوية X (عن طريق تكبير أو تصغيير المثلث) إلا أن هذه الأطوال تبقى دائمًا متناسبة، وبالتالي فإن قيم ($\frac{O}{H}$)، ($\frac{A}{H}$)، ($\frac{O}{A}$) ثابتة ، وتتحدد تمامًا عن طريق الزاوية X، وتحسب هذه النسب من دوال الجيب(sine)، وجيب التمام(cosine)، والظل(tangent) على الترتيب (واختصارها: جا(sin)، جتا(cos)، ظا(tan))، ($\sin x = \frac{O}{H}$) ($\cos x = \frac{A}{H}$) ($\tan x = \frac{O}{A}$). على سبيل المثال: في المثلث (3,4,5) (انظر ثلاثيات فيثاغورث)، إذا كانت الزاوية X تقابل الضلع الذي طوله 3، بالتالي يكون جاX= 5/3 ($\sin x = \frac{3}{5}$)، جتا X= 5/4 ($\cos x = \frac{4}{5}$)، وظا X =4/3 ($\tan x = \frac{3}{4}$).

حساب الدوال لزاوية معينة ولتكن 34.2 صعبة بالتأكيد، لكن هناك مفاتيح مخصصة لهذه المهمة في آلات الجيب، أما في الماضي فكانوا مضطرين إلى خوض غمار الجداول المثلثية أو إلى رسم المثلث بقيمه الحقيقية. لقد تخطت هذه الدوال المهمة أصولها الهندسية المتواضعة، فأصبحت في مظهرها الجديد كمتسلسلات قوى تلعب دورا محوريا في تحليل الأعداد المركبة وفي تحليل فورير (دراسة أشكال الموجات) من بين مجالات أخرى.

قاطع التمام، والقاطع، وظل التمام Cosecant, secant and cotangent

في تعريفنا للجيب وجيب التمام والظل قد تتساءل لماذا تم اختيار النسب($\frac{O}{A}$ و $\frac{A}{H}, \frac{O}{H}$) بدلًا من ($\frac{A}{O}$ و $\frac{H}{A}, \frac{H}{O}$). على أي حال فهذه النسب جميعها ثابتة لأي مثلث قائم يحتوي زاوية ما X وهناك تعريفات لدوال مثلثية أقل شيوعًا هي: قاطع التمام (Cosecant)، والقاطع(secant) وظل التمام (cotangent) (قتا، قا، ظتا).

وهي تأتي مباشرة من التعريفات $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x,} \sec x = \frac{1}{\cos x} = \cot x = \frac{1}{\tan x}$ لذلك فإن نقل المعلومات عن قاطع التمام، والقاطع، وظل التمام بدلالة الجيب وجيب التمام والظل (أو العكس) ليس عملًا شاقًا مطلقًا.

الخواص المثلثية Trigonometric identities

1- تربط الصيغة ($\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$) الثلاث دوال المثلثية الرئيسة، وهذا يأتي مباشرة من التعريف حيث أن ($\frac{O}{A}$) يساوي خارج قسمة ($\frac{O}{H}$) على ($\frac{A}{H}$).

2- إذا كانت X إحدى زوايا مثلث قائم الزاوية، وبتطبيق مبرهنة فيثاغورث على الوتر H والمقابل O و المجاور A نجد أن ($O^2 + A^2 = H^2$).

وبالقسمة على (H^2) نحصل على ($\frac{O^2}{H^2} + \frac{A^2}{H^2} = 1$) والتي تقول أن ($(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$).

3- والتي جرت العادة على كتابتها ($\sin^2 x + \cos^2 x = 1$) وتظهر هذه الصيغة عندما نكون بصدد استخدام sin وcos .

إذا كنا على علم بقيمة (sin x)، (sin y)، فما الذي نعرفه عن sin (x+y)؟ الخطأ

البديهي الذي يحدث هنا هو اعتقاد أن $\sin(x+y) = \sin x + \sin y$. الأمر هنا أكثر تعقيدا قليلا، لكن لا يزال هناك صيغ تتعامل مع ذلك:

$$(\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y)$$

وبالمثل

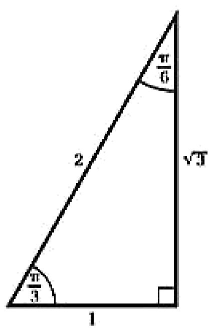
$$(\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y)$$

4- استخدام الصيغ السابقة في الحالة التي تكون فيها ($x = y$) يعطي ما يسمي بصيغ ضعف الزاوية

$$(\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x) \text{ و } (\sin 2x = 2\sin x \cos x)$$

ويمكن استنتاج ذلك من مبرهنة ديموافر(de Moivre's theorem).

القيم المثلثية Trigonometric values



1- في معظم الحالات يفضل حساب هذه الدوال باستخدام آلة حاسبة، لكن هناك بعض القيم تكون مناسبة للحساب البشري ولا سيما الزوايا: 0°، و 90°، و180°، وبتحويلها إلى القياس الدائري نحصل على :

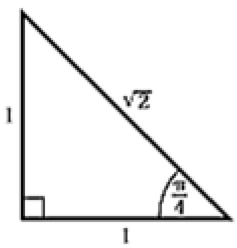
$$(\sin 0 = 0 \quad \sin\frac{\pi}{2} = 0 \quad \sin\pi = 0)$$

$$(\cos 0 = 1 \quad \cos\frac{\pi}{2} = 0 \quad \cos\pi = 1)$$

و

$$\tan 0 = \tan\pi = 0$$

وبالمثل ومن القيم المهمة أيضاً: الزاوية 30°، و 60°، و45°، وتحويلاتها الدائرية:



$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \qquad \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

2- في المثلث القائم الزاوية يكون الوتر دائمًا هو الضلع الأطول بالتالي $(H \geq O)$، $(h \geq A)$ وبما أن $(\sin x = \frac{O}{H})$، $(\cos x = \frac{A}{H})$ فلابد أن يكون $(\sin x \leq 1)$، و$(\cos x \leq 1)$.

يمكن توسيع ذلك قليلًا حيث أنه في بعض الحالات تكون لها قيم سالبة أيضاً لكنها تتراوح من 1 إلى -1 (وذلك إلى أن يُسمح باستخدام قيم مركبة لـ X).

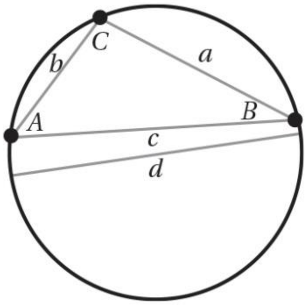
3- دالة الظل في الوقت نفسه يمكن أن يكون ناتجها أي قيمة، لكنها لا تقبل كل قيم X كمدخل: ليس هناك مثلث يحتوي على زاوتين قائمتين معًا (ليس هناك على أي حال أى مثلث إقليدي يحقق ذلك لكن انظر الهندسة الإهليلجية) وبالتالي لن يكون ناتج $(\tan\frac{\pi}{2})$ واضحًا. والأسوأ أنه كلما اقتربت X من 90° تصبح النسبة بين المقابل والمجاور أكبر: $(\tan(89°) = 57)$ ، $(\text{tna}(89.9° - 573)$، $(\tan(89.99999°))$ تساوي تقريبًا 6 مليون، وبالتالي لا توجد قيمة معقولة يمكن أن تخصص كقيمة لظل الزاوية 90° $(\tan(90°))$ أو $(\tan\frac{\pi}{2})$، وتبقى الدالة غير معرفة عند هذه النقطة.

قانون الجيوب The law of sines

تتضمن التعريفات السابقة: sin, cos, tan وكذلك مبرهنة فيثاغورث التعامل مع مثلثات قائمة الزاوية، لكن ما الذي يمكن فعله حيال المثلثات غير قائمة الزاوية؟ تقول قاعدة الجيب أو قانون الجيوب أنك إذا أخذت أحد أضلاع مثلث ما وقمت بقسمة طوله على جيب الزاوية المقابلة له فسوف تحصل دائما على نفس الإجابة (d) بغض النظر عن الضلع الذي اخترته. لنفرض مثلث أضلاعه (a)، (b)، (c) والزوايا المقابلة على الترتيب (A)، B (C) فستكون قاعدة الجيب كما يلي

$$\left(\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = d\right)$$

الرقم (rd) له تفسير هندسي بارع: إنه طول قطر الدائرة المحيطة بالمثلث (الدائرة الوحيدة التي تمر برؤوس أضلاع المثلث الثلاثة، انظر أيضاً مراكز المثلثات).



ترجع جذور قاعدة الجيب إلى نتيجتي 1.18، 1.19 في كتاب العناصر لإقليدس لكنها كتبت صراحة لأول مرة على يد عالم الرياضيات والفلك الفارسي الذي ظهر في القرن الثالث عشر (ناصر الدين الطوسي) (Nasir al-Din al-Tusi).

قانون جيوب التمام The law of cosines

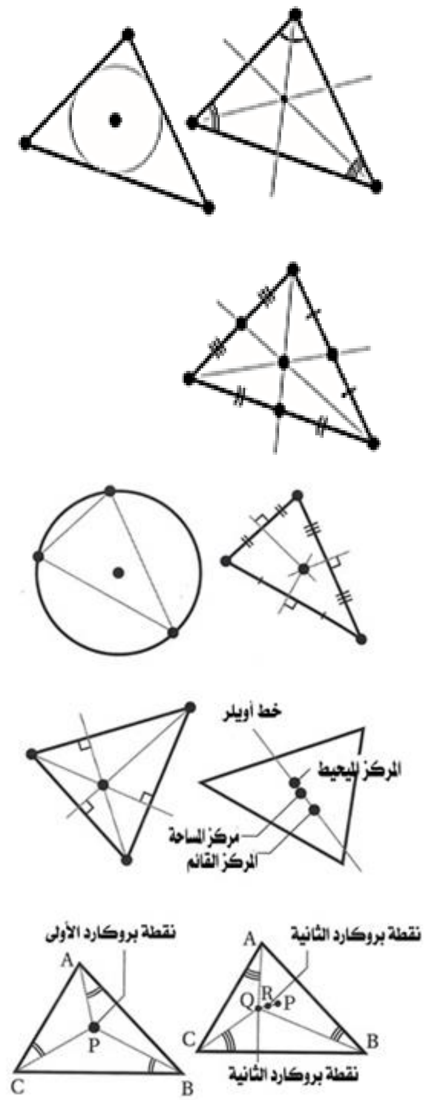
قانون جيوب التمام هو امتداد لمبرهنة فيثاغورث للمثلثات غير القائمة. على الرغم من أن الدوال مثلثية مثل دالة جيب التمام لم تكن قد ظهرت إلا فيما بعد إلا أنه تم إثبات نسخة هندسية من هذه النتيجة في مسألة 2.12، 2.13 في كتاب العناصر لإقليدس. ويعرف قانون جيوب التمام أيضاً بقاعدة جيب التمام، ويقول: إذا كانت أضلاع مثلث ما (a)، و(b) و(c) وكانت الزوايا المقابلة هي (A) و (B) و(C) على الترتيب بالتالي $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \text{ dos } A$.

وإذا حدث أن أصبح المثلث قائم الزاوية فإن هذه القاعدة ترجع إلى البيان الأصلي لمبرهنة فيثاغورث لأن ($\cos(90°) = 0$).

يمكن تقسيم أي مثلث إلى مثلثين قائمي الزاوية: تستنتج قاعدة جيب التمام من تجميع الحسابات المثلثية العادية لمثلث مقسم إلى مثلثين قائمين).

مراكز المثلثات Centres of triangles

مركز الدائرة أو مركز المستطيل له معنى واضح غير غامض، لكن أين يقع مركز المثلث؟ طبقا لموسوعة مراكز المثلثات التي يحتفظ بها عالم الرياضيات كلارك كيمبرلنج (Clark Kimberling) بجامعة إيفانسفيل فإنه يوجد 3587 إجابة مختلفة لهذا السؤال (وذلك حتى الوقت الذي تمت فيه الكتابة!)، والأسوأ من ذلك أن العدد المحتمل لدوال مركز المثلث لا نهائي، وإليك معظم التعريفات الشائعة:



1- داخل أي مثلث يمكن رسم دائرة وحيدة محوطة تمس أضلاع المثلث الثلاثة في نقطة، ويكون مركز المثلث هو مركز هذه الدائرة، وبالتالي تقع هذه النقطة على نفس البعد العمودي على كل ضلع. ومركز المثلث هو أيضاً نقطة تقاطع منصفات زوايا المثلث الثلاثة.

2- إذا قمت بتوصيل كل رأس من رؤوس المثلث بمنتصف الضلع المقابل لها ستتقاطع هذه الخطوط الثلاثة في مركز مساحة المثلث (centroid)، إذا قمت بتشكيل مثلث من صفيحة معدنية سيكون هو مركز الثقل (centre of gravity).

3- لأي مثلث يمكن رسم دائرة خارجة وحيدة تمر برؤوس المثلث الثلاثة فيكون المركز المحيطي (circumcentre) هو مركز الدائرة، وهي أيضاً نقطة تلاقي المنصفات العمودية على الأضلاع (لكنها لاتعتبر نقطة مركز دقيقة لأنها ستقع خارج المثلث إذا كان منفرج الزاوية).

4- إذا قمت بالتوصيل بين كل رأس من رؤوس المثلث والضلع المقابل له بحيث تكون الخطوط متعامدة على الأضلاع فستتلاقى الخطوط الثلاثة (أو الارتفاعات) في نقطة تسمى المركز القائم (Orthocentre) (بالنسبة للمثلث منفرج الزاوية سوف تحتاج إلى مد الأضلاع ويمكن أن تقع نقطة المركز خارج المثلث).

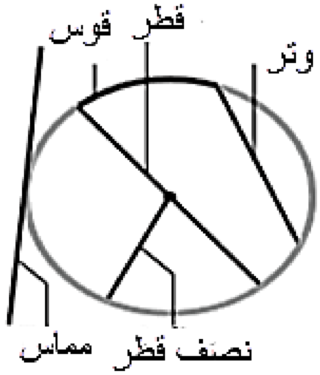
5- تعرف نقطة بروكارد الأولى (The first Brocard point) على أنها النقطة (P) بحيث تكون الزوايا (PAB)، (PBC)، (PCA) متساوية في القياس، وهي لا تعتبر نقطة مركز تماما. وهناك نقطة بروكارد الثانية (The second Brocard point) بحيث تكون الزوايا (QBA)، (QAC)، (QCB) متساوية في القياس. أما نقطة بروكارد الثالثة (the third Brocard point R) فتعرف على أنها النقطة التي تقع في منتصف المسافة بين النقطتين الأولى والثانية وهي إحدى مراكز المثلث.

خط أويلر The Euler line

جميع مراكز المثلث المختلفة السابق ذكرها لا تنطبق على بعضها إلا في المثلث المتساوي الأضلاع، لكن في عام 1765 أثبت العالم السويسري العظيم ليونارد أويلر(Leonhard Euler) أن كل من المركز القائم ، ومركز المساحة، والمركز المحيطي تقع دائما على خط مستقيم واحد يعرف الآن باسم خط أويلر(Euler line)، كما أوضح أيضاً أن المسافة بين المركز القائم ومركز المساحة ضعف المسافة بين مركز المساحة والمركز المحيطي.

الدوائر CIRCLES

الدوائر Circles



ارسم نقطة على الأرض ثم اطلب من عشرة أشخاص الوقوف على بعد متر واحد من تلك النقطة فسيظهر لك شكل تقريبي للدائرة. وهذا هو تعريف إقليدس للدائرة (قد يقل أو يزيد عن ذلك) وهو التعريف الذي ظل قائما بشكل أساسي دون تغيير إلى وقتنا الحالي. وتتحدد الدائرة بمعلومتين: نقطة (o) تكون مركزا لها، وطول (r) يمثل نصف قطرها، ثم تكون الدائرة رسميا هي مجموعة جميع النقط الواقعة في المستوى على بعد (r) عن المركز (نفس التعريف في الأبعاد الثلاثية يكون تعريف الكرة).

أما القرص فهو مجموعة النقط التي تبعد عن المركز مسافة أقصاها (r): بمعنى آخر هو عبارة عن دائرة مصمتة (filled-in circle). من الناحية العملية يكون هذا الفرق (الفرق بين تعريف الدائرة والقرص) مهملا كما حدث في مناقشة مساحة الدائرة (والتي تبدو في وجهة نظر عالم شديد التحذلق أن مساحتها صفر على الرغم من أن مساحة القرص المناظر لها تعطى من العلاقة (πr^2)).

تأتي الدائرة في مجموعة من المصطلحات المصاحبة لها مثل: محيط الدائرة (circumference) هو طول الحدود الخارجية للدائرة، والقوس(arc) وهو جزء من محيط الدائرة يقع بين نقطتين، ونصف القطر(radius) القطعة المستقيمة الواصلة بين مركز الدائرة وأي نقطة على محيطها، والوتر (chord) هو القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطة وأخرى على الدائرة، ويقسمها إلى قسمين، القطر(diameter) وهو الوتر المار بالمركز (وبالتالي يكون طوله ضعف طول نصف القطر)، والمماس (tangent) هو خط مستقيم خارج الدائرة يمسها في نقطة واحدة فقط.

النسبة التقريبية ط (π)

وتساوي تقريبا (,...3.14159265358979323846264338327950)، وتعرف النسبة ط على أنها النسبة بين محيط الدائرة إلى قطرها. وحوالي عام 1500ق م افترض واضعو بردية ريند الرياضية أن حقلا دائريا قطره تسع وحدات له نفس مساحة حقل مربع أطوال أضلاعه 8 وحدات. إذا كان ذلك صحيحا فستكون قيمة ط $\frac{256}{81}$ وفي الواقع فإن ط عدد غير نسبي مما يعني أنه من المستحيل أن تكون قيمته الدقيقة على صورة كسر اعتيادي أو كسر عشري دائر لذلك يمتد تمثيله في صورة كسر عشري إلى ما لا نهاية ودون تكرار. والأدهى من ذلك أنه عدد متساو مما يجعله خارج إطار مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة المألوفة. ربما تفسر هذه الحقيقة بالإضافة إلى تاريخه القديم وتعريفه الموجز سبب اختراق هذا الرقم لما هو أبعد من الدوائر الرياضية. فهذا الرقم الذي أصبح بطلا للعديد من الكتب يتألق أيضاً في العديد من الأفلام والأغاني، ويحتفل بيوم الرابع عشر من مارس باعتباره اليوم العالمي للنسبة التقريبية ط.

وأصبحت ط أيضاً موضع اختبار للعديد من مفاخر المحاولات البشرية. التسجيل الحالي لخانات ط المحسوبة حتى الآن يرجع إلى فريق من علماء الكمبيوتر تحت قيادة فابريك بيلارد (Fabrice Bellard) الذي اكتشف أول (2699999990000) حسب كمبيوتر مكتبي عادي في عام 2009.

ويحكي عالم الرياضيات چون كون واي (John Conway) عن نزهه الرومانسية مع زوجته حين كانا يقرآن خانات العدد ط بالتناوب بحيث يقول كل منهم 20 خانة وهكذا، وبذلك حفظ أول ألف خانة، وهو إلى حد ما أقصر من الرقم القياسي الحالي في موسوعة جينيس وهو (97,890) الذي حققه شاو لو(Chao Lu) عام 2005، ومع ذلك لازال التحقق مستمرا من محاولة أكيرا هارجوشي (Akira Haraguchi) عام 2006 في الوصول إلى 100000 خانة 1.

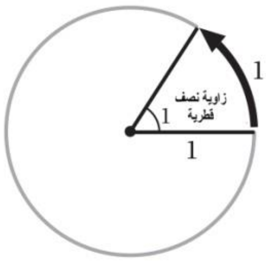
الصيغ الرياضية للدائرة Circle formulas

إن التعريف الأصلي للنسبة التقريبية ط على أنها النسبة بين محيط الدائرة وقطرها قديم قدم الأهرامات، وبالتالي فإن الصيغة الرياضية لحساب محيط الدائرة أثاره رياضية صحيحة: $c = \pi d$ تكافئ ($c = 2\pi r$) حيث (r) نصف قطر الدائرة.

و استنتج أرشميدس صيغة حساب مساحة قرص ((A)) صراحة لأول مرة حوالي عام 225 ق م وهي ($A = \pi r^2$). وهذا يعني أن المربع المرسوم على نصف قطر الدائرة يلاءم الدائرة بمقدار ط من المرات. في بعض الحالات في الإحداثيات الديكارتية تمثل دائرة الوحدة مقياسًا ذهبيًا؛ فمركزها هو نقطة الأصل، ونصف قطرها الوحدة، وبذلك تتكون من كل النقط (x, y) التي تبعد مسافة 1 عن (0,0) والذي يؤول إلى المعادلة ($x^2 + y^2 = 1$) (من نظرية فيثاغورث)، (في الأعداد المركبة يعبر عن ذلك بـ ($| z | = 1$)) وبشكل أعم: الدائرة التي مركزها (a, b) ونصف قطرها r يتم توصيفها باستخدام الصيغة ($(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$).

الزوايا النصف قطرية Radians

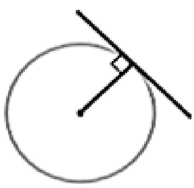
بما أن الزاوية هي مقدار الاستدارة إذا الشكل الهندسي الأوضح لدراسة ذلك هو الدائرة، فبدءا من نقطة على الدائرة يمكننا قياس مقدار الاستدارة خلال المسافة المناظرة حول الدائرة، وبما أن المحيط الكلي لدائرة الوحدة طوله 2ط فيكون هذا هو عدد الزوايا النصف قطرية التي تمثل لفة كاملة ، وبالتالي 1 د = $(\frac{1}{2\pi})$ وهو حوالي (15.9%) من اللفة الكاملة ، وهو ما يكافئ الزاوية التي لها قوس طوله الوحدة.

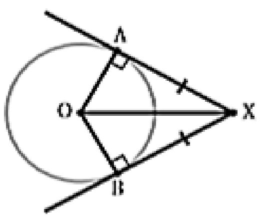


ومن مميزات هذه الطريقة أن حساب طول القوس أصبح مباشرًا، فإذا كان قوس ما له الزاوية ثيتا (θ) مقدرة بالتقدير الدائري حول دائرة نصف قطرها (r) فبالتالي يكون طول القوس rθ. وهذا هو أول مثال على انسجام الزوايا النصف قطرية مع الدوال الرياضية، كما أن حساب المثلثات بالمثل يكون أكثر انسجامًا وسلاسة عند التعامل مع القياسات الدائرية أكثر من غيرها.

مبرهنة المماسات المتساوية The equal tangent theorem

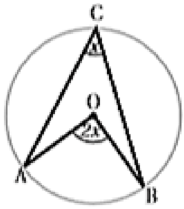
من الحقائق الأساسية حول الدوائر، والتي أثبتها إقليدس فسر مسألة 3.18 من كتابه هي أن المماس للدائرة من نقطة يكون عموديًا على نصف قطرها، وترتب على ذلك ظهور نظرية المماسات المتساوية: خذ أي نقطة خارج الدائرة ولتكن (X) وسيكون هناك مماسان بالضبط يمكن رسمهما بحيث يمران بـ (X). وتقول المبرهنة أن المسافة من (X) إلى الدائرة هي متساوية في المماسين، ولنرى ذلك سنسمي نقط تماس الدائرة : (A)، و(B)، والمركز (O) بالتالي فإن (OA)، (OB) نصفا قطر، وبالتالي لهما نفس الطول، وأيضًا (OA)، و(AX) متعامدان وكذلك (OB)، (BX) متعامدان أيضاً، وبالتالي لدينا مثلثان قائمان هما: (DAX)، (OBX) بحيث





(OX) هو الوتر المشترك، و(OA)، (OB) لهما نفس الطول، وبالتالي من مبرهنة فيثاغورث تكون (AX)، و(BX) متساويتين في الطول.

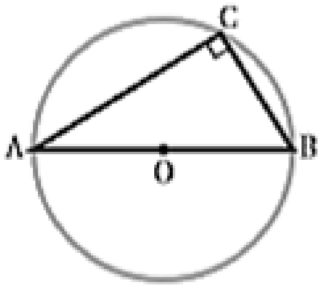
مبرهنة الزاوية المحيطية The inscribed angle theorem



قياس الزاوية المركزية يساوي ضعف قياس الزاوية المحيطية المرسومة على نفس القوس.

تتضمن هذه المبرهنة الأساسية التي جاءت في مسألة 3.20 من كتاب العناصر لإقليدس عديدا من النتائج الأخرى المفيدة، وبشكل رسمي تقول المبرهنة أنك إذا أخذت نقطتين (A)، (B) على محيط الدائرة ووصلت بين كل نقطة منهما وبين مركز الدائرة (O) فستكون الزاوية الناتجة مساوية لضعف الزاوية الناتجة عن التوصيل بين كل نقطة منهما ونقطة ثالثة تقع على محيط الدائرة (C) (يجب أن نكون حذرين قليلا؛ لأن هناك بالطبع زاويتان عند (O): زاوية كبيرة وزاوية أصغر، وتهتم المبرهنة دائما بتلك التي تكون مناظرة للزاوية عند (c) وليست الزاوية العكسية لها. وينتج عن هذه المبرهنة نتائج مهمة عدة منها مبرهنة طاليس (the theorem of Thales)، ومبرهنة الزوايا المشتركة في القوس(the theorem on angles in the same segment)، وخصائص الأشكال الرباعية الدائرية (cyclic quadrilaterals).

مبرهنة طاليس The theorem of Thales

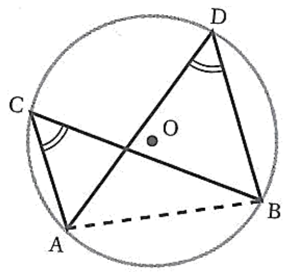


الزوايا المحيطية المرسومة في نصف دائرة تكون قائمة لتوضيح هذه النتيجة قليلا: إذا رسمت قطرا في الدائرة وقمت بالتوصيل بين كل نقطة من نهايتيه (A) و(B) وأى نقطة (C) على المحيط فستكون الزاوية الناتجة (ACB) دائما قائمة، ويتبع ذلك مبرهنة الزاوية المحيطية:

حيث أن (A) و(B) تصنعان زاوية 180° عند المركز، وبالتالي لابد أن يكون قياس الزاوية المحيطة المناظرة يساوي النصف؛ أي يساوي 90°. وقد ضمن إقليدس هذه النتيجة في

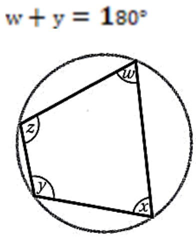
مسألة 3.31 في كتاب العناصر، لكن أثبتها لأول مرة "أبو الهندسة" الفيلسوف المتأثر بالبيئة المصرية طاليس الملطي (Thales of Miletus) حوالي 600 ق م.

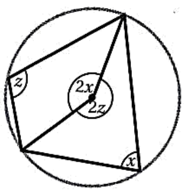
الزوايا المحيطية المشتركة في نفس القوس Angles in the same segment



إذا أخذت نقطتين على محيط الدائرة ووصلت بينهما بوتر، ستكون قد قسمت الدائرة إلى قطاعين. الزاوية المرسومة في قطاع هي تلك الزاوية التي تنشأ من توصيل كل من نهايتي الوتر(A) و(B) بنقطة ثالثة (C)على محيط الدائرة. وقد أثبت إقليدس في مسألة 3.21 في كتاب العناصر أن أي زاويتين مرسومتين في نفس القطاع متساويتان في القياس، لذلك، كما يتضح من الرسم الزاوية (ACB) تساوي الزاوية (ADB) في لقياس وفي الحقيقة تعتبر تلك نتيجة لمبرهنة الزوايا المحيطية؛ حيث أن كل من (ACB)، (ADB) لابد أن تكون نصف الزاوية المركزية AOB وبالتالي تكونا متساويتين في القياس.

الأشكال الرباعية الدائرية Cyclic quadrilaterals



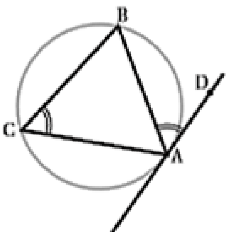


يمكن رسم أي مثلث محاط بدائرة، بمعنى أنك يمكنك أن ترسم دائرة بحيث تقع جميع رؤوس المثلث على محيطها، لكن هذا ليس صحيحا دائما بالنسبة للأشكال الرباعية (الأشكال المكونة من أربعة أضلاع) فمثلا لا يمكن رسم دائرة محيطة بمعين (إلا إذا كان هذا المعين مربعا). والأشكال الرباعية الدائرية هي تلك الأشكال التي يمكن رسم دائرة محيطة بها، وفي مسألة 3.22 أثبت إقليدس الخاصية المحددة لهذه الأشكال، وهي أن:

كل زاويتين متقابلتين مجموعهما 180°، وفي الحقيقة نجد أن هذه الخاصية عبارة عن نتيجتين في نتيجة واحدة؛ حيث تقول الأولى أن الأشكال الرباعية الدائرية بها تلك الخاصية وهي نتيجة لمبرهنة الزاوية المحيطية: قم بالتوصيل بين المركز ورأسين متقابلين من رؤوس

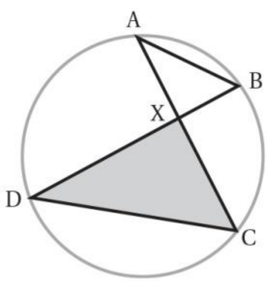
الشكل الرباعي الدائري،ومن الواضح أن مجموع الزاويتين المركزيتين يساوي $360°$ ($2x + 2z = 360°$)، وبالتالي يكون مجموع الزاويتين الباقيتين يساوي نصف ذلك: ($x + z = 180°$)، والجزء الثاني من المبرهنة يقول أن كل الأشكال الرباعية التي لها هذه الخاصية يمكن رسم دائرة محيطة لها (أي أنها أشكال رباعية دائرية).

مبرهنة القطاع المتبادل The alternate segment theorem



نفرض أن هناك ثلاث نقط (A)، (B)، (C) تقع على محيط دائرة، وهناك مماس للدائرة عند (A). خذ نقطة (D) على خط التماس الذي يقع في الجهة المقابلة للخط (AB) من (C) بين إقليدس في مسألة 3.32 من كتاب العناصر أن قياس الزاوية (ACB) يساوي قياس الزاوية (BAD) (الزاوية (ACB) هي الزاوية الناشئة عند (C) نتيجة توصيلها بـ (A)، و(B)) وتعرف هذه المبرهنة أيضاً باسم مبرهنة المماس والوتر. (the Tangent– Chord theorem) من الناحية النفسية، تقول هذه المبرهنة أن الزاوية (ACB) تساوي في القياس الزاوية المحصورة بين الوتر (AB) والقوس من(A) إلى (B) لكن الخطوط المنحنية والزوايا لا تتلاءم معا بشكل جيد؛ لذلك يستخدم المماس المستقيم بغرض الدقة.

مبرهنة الأوتار المتقاطعة Intersecting chords theorem

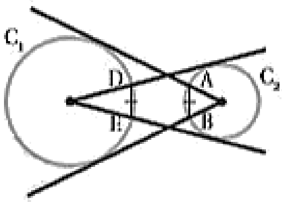


إذا كانت النقط (A)، (B)، (C)، (D) أربعة نقط تقع على دائرة وكانت (X) هي نقطة تقاطع (AC)، (BD) فإن المثلثين (ABX)، (DCX) يكونان متشابهين، وستظل هذه المبرهنة محققة حتى إذا كانت النقطة (X) موجودة خارج الدائرة.

مبرهنة كرة العين Eyeball theorem

لم يتوقف تحليل الدائرة عند إقليدس بل تم اكتشاف العديد من الحقائق الغريبة والرائعة منذ وضع إقليدس حجر الأساس في هذا الصدد، ومن أمثلة تلك الحقائق:

مبرهنة كرة العين. خذ دائرتين (C_1)، (C_2) (ليس شرطًا أن تكونا منطبقتين) ثم ارسم مماسين لـ(C_1) بحيث يلتقيان في مركز (C_2) ولنقل أنهما يقطعان الدائرة (C_2) في (A)، (B)، وبالمثل ارسم مماسين لـ (C_2) يتلاقيان في مركز (C_1) ويقطعانها في النقطتين (D)، (E)، وبالتالي ستكون المسافة من (A) إلى (B) (على امتداد الخط) هي نفس المسافة من (D) إلى (E).



المضلعات والمجسمات ثلاثية الأبعاد
POLYGONS AND POLYHEDRA

المضلعات Polygons

تندرج المثلثات، والأشكال الرباعية، والخماسية تحت فئة أوسع من المضلعات: وهي أشكال ثنائية الأبعاد محددة بخطوط مستقيمة تتلاقى فيما يسمى بالرؤوس (الأركان).

لقد ظلت المضلعات موضعا للدراسة منذ القدم، وأسهل المضلعات من حيث التحليل هي المضلعات المحدبة (الأشكال النجمية مثال على المضلعات غير المحدبة).

المضلع المنتظم أضلاعه كلها متساوية الطول، وزواياه كلها متساوية في القياس. من الأمثلة الأولى على المضلعات المنتظمة: المثلثات متساوية الأضلاع، والمربعات ثم يأتي بعد ذلك الخماسي المنتظم... وهكذا.

يمكن أن يوجد مضلع منتظم محدب له أي عدد من الأضلاع بدءا من ثلاثة أضلاع، وكلما زاد عدد الأضلاع أصبح المضلع أقرب إلى الدائرة. في عام 1796 أثبت كارل فريدريك جاوس (Carl Friedrich Gauss) عندما كان في التاسعة عشر من عمره أن ليس كل المضلعات المنتظمة يمكن رسمها باستخدام التشييدات الأولية البسيطة بالمسطرة والفرجار (ruler and compass constructions).

التحدب Convexity

يقال لشكل (X) أنه محدب إذا كان يمكنك التوصيل بين أي نقطتين داخله بخط مستقيم بحيث يقع الخط كاملا داخل الشكل؛ فالخماسي المنتظم محدب، أما النجمة فليست كذلك؛ لأن من الممكن إيجاد نقطتين يقع الخط الواصل بينهما خارج الشكل. ويمكن تطبيق نفس التعريف على الأبعاد الأعلى، وبالتالي فإن الكرة محدبة بينما شكل الموزة المنحنية ليس كذلك.

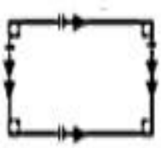
يعتبر التحدب معيار أساسي في تصنيف الأشكال الهندسية في الأبعاد المختلفة، وبصفة عامة فإن الأشكال المحدبة يسهل التعامل معها وتصنيفها على عكس الأشكال غير المحدبة التي تعتبر أكثر وعورة. يفترض عادة أن المضلعات المنتظمة محدبة إلا أن هناك أيضاً إمكانية لوجود مضلعات غير منتظمة على هيئة مضلعات نجمية مثل: النجمة الخماسية.

مجسمات أفلاطون (Platonic solids) محدبة لكن لها نظائر ذاتية التقاطع غير محدبة على هيئة مجسمات كيبلر– بوينسوت ثلاثية الأبعاد (Kepler–Poinsot polyhedra).

الأشكال الرباعية المحدبة Convex quadrilaterals

أبسط الأشكال الرباعية هو المربع؛ حيث ينشأ من أربعة أضلاع متساوية الطول، وأربع زوايا قائمة. الأشكال الرباعية: هي أشكال ثنائية الأبعاد تنشأ من أربعة أضلاع مستقيمة، ويعتبر المربع هو الرباعي المنتظم الوحيد. وبالتخلي عن بعض هذه الخصائص تظهر أنواع أخرى من الأشكال الرباعية:

- المستطيل (rectangle) يحتوي على أربع زوايا قائمة (وبالتالي يكون كل ضلعين متقابلين متساويين في الطول).



مستطيل

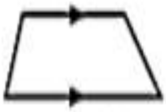
- المعين (rhombus): له أربع أضلاع متساوية، وكل ضلعين متقابلين متوازيين، وزواياه ليست قائمة. (إلا إذا أصبح المعين مربعا).

معين

- متوازي الأضلاع (parallelogram): يحتوي على زوجين من الأضلاع المتوازية (ولابد أن يكون كل زوج له نفس الطول).

متوازي أضلاع

- شبه المنحرف (trapezium أو trapezoi): له زوج واحد من الأضلاع المتوازية، ويندرج تحته: شبه المنحرف متساوي الساقين (isosceles trapezia) (حيث يكون الزوج المتبقي من الأضلاع متساوي الطول)، وشبه المنحرف القائم (right trapezia) (الذي يحتوي على زاويتين قائمتين).



شبه منحرف

الطائرة الورقية

- شكل الطائرة الورقية (Kite) أو (Deltoid): الذي فيه زوجان من الأضلاع متساوية الطول مثل متوازي الأضلاع لكن كل ضلعين متساويين متلاقيين في نقطة، بدلا من أن يكونا متقابلين.

إذا لم يكن بالشكل الرباعي أضلاع متساوية الطول، ولا أضلاع متوازية، ولا زوايا قائمة فإنه يحكم عليه بأنه رباعي غير منتظم؛ على سبيل المثال: معظم الأشكال الرباعية الدائرية غير منتظمة.

الأشكال الرباعية غير المحدبة Non-convex quadrilaterals

يمكن أن يتحقق تعريف شكل الطائرة الورقية بواسطة الأشكال المحدبة وغير المحدبة على حد سواء ، وغالبا ما يطلق اسم (chevron)(1) على شكل الطائرة الورقية غير المحدب، وهو أكثر الأشكال الرباعية المنعكسة (التي تحتوي على زاوية قياسها أكبر من 90°). تماثلا، ومن الأشكال التي تقع على حافة القبول

(1) شكل أشبه ما يكون بحرف الـ V.

الإنشاءات المكونة من أربعة خطوط مستقيمة حيث يتقاطع خطان معا: الأشكال الرباعية ذاتية التقاطع، وأكثر ما يشبهها شكل ربطة القوس (bow-tie).

المجسمات ثلاثية الأبعاد Polyhedra

لقد تغير تعريف المجسم بمرور الزمن، لكن التعريف الأساسي هو أنه سطح مكون من أوجه مستوية ثنائية الأبعاد تتلاقي في حواف مستقيمة ورؤوس يمكن أن نسميها أركانا. والمجسمات هي النظائر ثلاثية الأبعاد للمضلعات وتنقسم إلى مجسمات محدبة، ومجسمات غير محدبة وهي الأكثر تعقيدا.

قصة المجسم عبارة عن تتابعات من التصنيفات الرياضية المبنية على مفاهيم عن التماثل أكثر شمولا، وتبدأ القصة بأكثر المجسمات انتظاما على الإطلاق ألا وهي المجسمات الأفلاطونية (The Platonic solids)، ويلي ذلك مجسمات أرشميدس (the Archimedean solids) والمنشور (prisms)، والمنشور المضاد (antiprisms)[1] والتي تتميز بقدر عال من التماثل في أن جميع رؤوسها متطابقة، كما أن أوجهها عبارة عن مضلعات محدبة منتظمة، على عكس المجسمات الأفلاطونية التي قد تكون أوجهها مكونة من أشكال مختلفة.

ومن المجسمات الجذابة أيضاً مجسمات كاتالان (Catalan solids) التي يتكون منها حجر النرد المنتظم (لأن كل أوجهها متطابقة، ولكنها ليست مضلعات منتظمة)، ومجسمات جونسون: وهي تضم جميع المجسمات المحدبة التي أوجهها مضلعات منتظمة.

يمكن تصنيف المجسمات غير المحدبة أيضاً: وأكثرها تماثلا مجسمات كيبلر–بوينسوت المنتظمة (Kepler–Poinsot polyhedra)، ويطلق على المجسمات ذات الرؤوس المتطابقة اسم متساويات الزوايا (isogonal)[2].

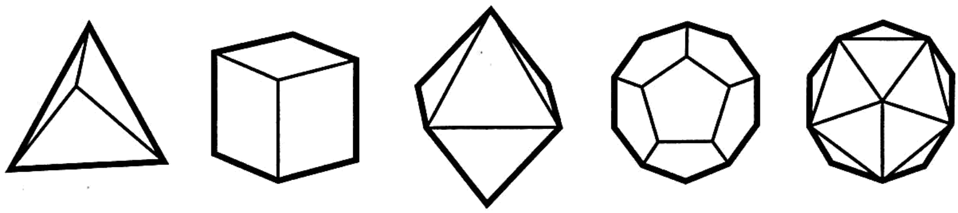
(1) نقيض المنشور هو شكل يتكون من نسختين متوازيتين من نفس المنشور.

(2) شكل هندسي زواياه متساوية.

المجسمات الأفلاطونية The Platonic solids

تضم المجسمات الأفلاطونية خمس مجسمات جميلة ومهمة:

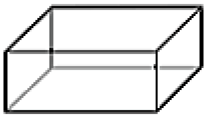
- رباعي الوجوه (tetrahedron): ويتكون من أربعة مثلثات متساوية الأضلاع.
- المكعب (سداسي الوجوه) (cube) الذي تتلاقى أوجهه المربعة الستة في زوايا قائمة.
- ثماني الوجوه (octahedron) الذي ينشأ من ثمان مثلثات متساوية الأضلاع.
- اثنا عشري الوجوه (dodecahedron) الذي يتكون من 12 وجها على شكل خماسي منتظم.
- عشريني الوجوه (icosahedron): فيه يلتقى 20 مثلثا متساوي الأضلاع عند كل رأس خمسة خمسة.



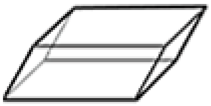
أولى الفيلسوف أفلاطون هذه الأشكال الخمسة عالية التماثل الاهتمام الأكبر، وحوالي عام 350 ق م كتب أن رباعي الوجوه، والمكعب، وثماني الوجوه، وعشريني الوجوه جميعها تتوافق مع العناصر الأربعة: النار، والتراب، والهواء والماء على الترتيب، كما اعتبر أن الإله استخدم المجسم الاثني عشري الوجوه لترتيب كوكبة الكون كله.

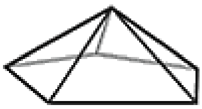
من الناحية الرياضية فهذه الأشكال محدبة ومنتظمة، حيث إن كل وجه عبارة عن مضلع منتظم مطابق للآخرين، وبالمثل لا يمكن التفرقة بين الحواف ، ولا الرؤوس. وقد قدم أفلاطون إثباتا في واحدة من أول مبرهنات العالم في التصنيف أن تلك الأشكال هي جميع المجسمات المحدبة المنتظمة؛ أي إنه لن يكون هناك مجسما سادسا يحمل تلك الصفات. وكرس آخر كتاب من سلسلة العناصر لإقليدس لدراسة هذه الأشكال.

المجسم ثلاثي الأبعاد غير المنتظم Irregular polyhedra



يمتلئ العالم بالمجسمات و (الجوامد) ومعظمها لا يتصف بقدر عال من التماثل الذي يرغب فيه علماء الرياضيات، فقالب البناء على سبيل المثال ليس مجسما أفلاطونيا.بل متوازي مستطيلات(cuboid) الذي تكون أوجهه ذات ثلاثة أشكال مستطيلة مختلفة، وهو حالة خاصة من متوازي السطوح (parallelpiped) وهو ينشأ من ثلاثة أزواج من متوازيات الأضلاع.



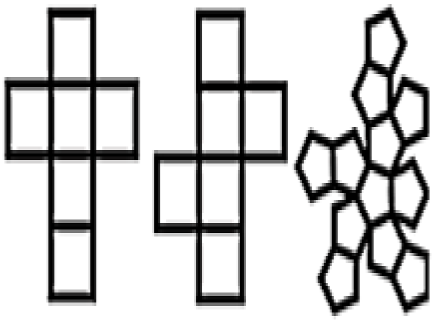


أما الأهرامات فهي عائلة أخرى مهمة من المجسمات غير المنتظمة : الأهرامات التي قاعدتها مربع أو خماسي، يمكن أن تكون جوانبها مثلثات متساوية الأضلاع (كما يمكن أن يكون الهرم الذي قاعدته مثلث أو رباعي سطوح. والأهم من ذلك كله أن جميع الأهرامات لابد أن تكون لها جوانب مثلثية غير منتظمة.

حالما نسمح بمجسمات ذات مضلعات غير منتظمة، فسنجد أكثرها تماثلا تلك التي تشكل أحجار نرد منتظمة بحيث تكون كل الأوجه متطابقة، وما أكثر من ذلك أنه ليس هناك حد للقائمة التي تضم المجسمات غير المنتظمة الممكنة. ومجسمات جونسون تقدم على الأقل معجما تاما للمجسمات ثلاثية الأبعاد المحدبة التي يمكن تشييدها من المضلعات المنتظمة، أما ملفات ستيوارت الحلقية (Stewart toroids) فتزود تلك القائمة بأشكال غير محدبة.

الشبكات Nets

كان الفنان الألماني ألبرخت دورر (Albrecht Dürer) عالم رياضيات أيضاً، وكان يولي اهتماما خاصا بالمجسمات، وفي عمله تعليمات القياس (Instruction on Measurement) عام 1538 قدم وسيلة لا تقدر بثمن لفهم المجسمات. الشبكة (net) هي عبارة عن ترتيب مستو من المضلعات بعضها موصول ببعض من خلال الحواف، وعند طيها ولصقها يمكنك الحصول على نموذك من المجسم.



جميع المجسمات يمكن توصيفها بشبكة، وفي الواقع نجد أن المكعب له 11 شبكة مختلفة. لقد حدا ولع دورر بالمجسمات به إلى إعادة اكتشاف إثنين من مجسمات أرشميدس (the truncated cuboctahedron)، والمكعب الأفطس (snub cube) وإلى أن يصمم شكلا بنفسه: هو ثماني الوجوه السوداوي (melancholy octahedron).

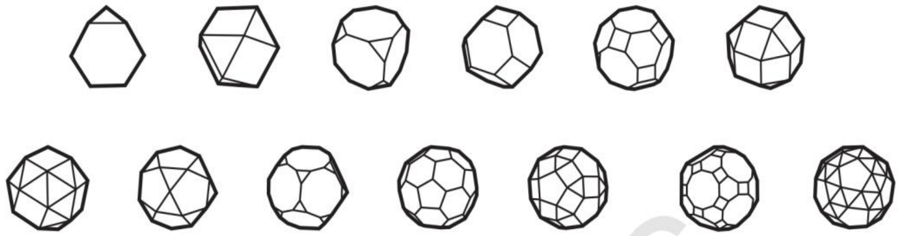
ازدواجية المجسمات Polyhedral duality

المكعب له ستة أوجه، وثمان رؤوس، بينما ثماني الوجوه له ثمانية أوجه، وست رؤوس، وكلاهما له 12 حافة (حرف)، ويأتي هذا التماثل من حقيقة أن المكعب وثماني الوجوه مجسمات مزدوجة، ولإيجاد المجسم الذي يحقق الازدواجية مع مجسم ما: ارسم نقطة في منتصف كل وجه،ووصل بينهما إذا كان الوجهان المرسومتان فيهما النقطتان يتلاقيا وسيكون الهيكل الناتج من النقط والخطوط وصفا للمجسم الجديد: الذي يمثل مزدوج الآخر، وتكرار ذلك؛ أي إيجاد مزدوج المزدوج يعيدنا إلى المجسم الأصلي مرة أخرى. من بين المجسمات الأفلاطونية هناك رباعي الوجوه الذي له أربعة وجوه، وأربعة رؤوس يكون هو مزدوج نفسه، أما اثنا عشري الوجوه وعشريني الوجوه فهما يكونان زوجا مزدوجا، ومجسمات أرشميدس هي ازدواج لمجسمات كاتالان.

مجسمات أرشميدس The Archimedean solids

ليست هناك مجسمات أخرى لها نفس التماثل التام الذي تحققه مجسمات أفلاطون، لكن إرخاء المتطلبات قليلا يفتح الباب لسلسلة مثيرة من الأشكال الجديدة، زود عالم رياضيات القرن الرابع ببس (Pappus) أرشميدس باكتشاف 13 مجسم محدب أوجهه مضلعات منتظمة (لكنها ليس جميعها نفس المضلعات) ومتماثلة في الرؤوس بمعنى أن

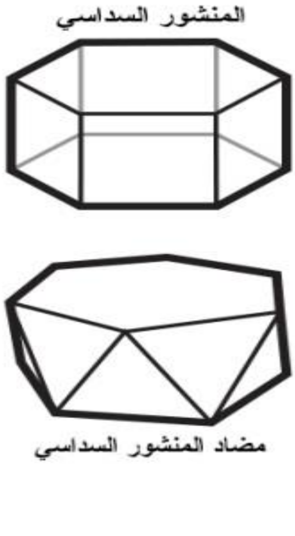
ترتيب الأوجه والحواف عند كل رأس يكون متطابق لجميع الرؤوس، وبالتالي تحريك أي رأس مكان الأخرى هو تماثل للشكل.



عشروني الوجوه المقطوع يشتبه بكون كرة القدم الشهيرة تأخذ شكله ، وكذلك جميع بنى جزئ بكمنستر (60 ذرة كربون).

المنشور والمنشور المضاد Prisms and antiprisms

تعرف مجسمات أرشميدس بأنها مجسمات محدبة أوجهها منتظمة ولها رؤوس متماثلة لكن تلك الثلاثة عشر شكلا لا تمثل الإمكانيات كلها؛ حيث أن هناك أيضاً عائلتان من المجسمات المنتهية التي تحقق هذه المعايير.

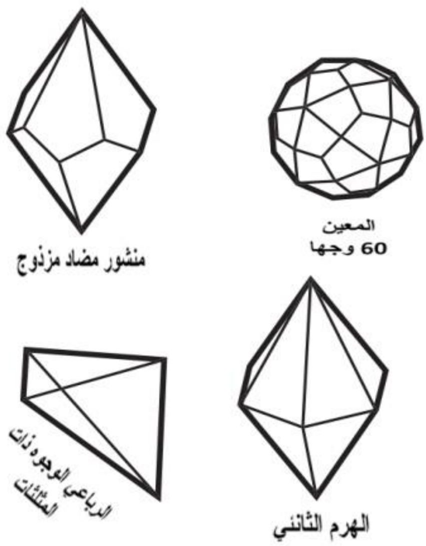


يشكل المنشور بأخذ مضلعين منتظمين متماثلين (شكلين سداسيين متطابقين مثلا) ثم توصيل حوافهما معا بواسطة مربعات، وبصفة عامة المنشور مجسم يشكل باستخدام مضلعين منتظمين لهما عدد (n) من الأضلاع موصلين معا عن طريق حلقة مكونة من عدد (n) من المربعات. (أحيانا يطلق على المجسم الذي يحل فيه المستطيلات محل المربعات اسم منشور لكن لا تكون كل الأوجه مضلعات منتظمة)

لتكوين مضاد المنشور السداسي، يتم لي اثنين من السداسي المنتظم ثم توصيلهما باستخدام مثلثات متساوية الأضلاع، وبصفة عامة يتكون المنشور المضاد من اثنين من

المضلعات التي عدد أضلاعها (n)، والتي ترتبط ببعضها عن طريق حلقة مكونة من عدد (2n) من المثلثات المتبادلة متساوية الأضلاع.

حجر النرد المنتظم Fair dice



ما الأشكال التي يمكن أن تكون حجر نرد منتظم؟ لعمل ذلك، لابد أن يكون المجسم محدبا، وجميع أوجهه متطابقة، وبالطبع فإن المجسمات الأفلاطونية تحقق تلك المعايير إلا أنها ليست الوحيدة، ففي عام 1865 نشر أيوجين كاتالان (Eugène Catalan) قائمة من ثلاثة عشر مجسما رائعا يحمل نفس هذه الخاصية، لكن ذلك لم يقلل من شأن تصنيفات أفلاطون.؛ لأن الأوجه هنا ليست مضلعات منتظمة بل هي على شكل معين هندسي، أو مثلثات مختلفة الأضلاع، أو أشكال الطائرة الورقية، أو أشكال خماسية غير منتظمة.

نحصل على مجسمات كاتالان بإيجاد المجسمات التي تحقق خاصية الازدواج مع مجسمات أرشميدس. ولهذه الأشكال الأنيقة أسماء غريبة خرقاء مثل المعين الإثنيعشري (rhombic dodecahedron) الذي له إثنا عشر وجها على شكل معين، و strombic hexecontahedron الذي يحتوي على 60 وجه على شكل طائرة ورقية.

وهناك أيضاً ثلاث عائلات من الأشكال المنتهية تحقق هذه المعايير :

1- الهرم الثنائي (bipyramids): حيث تلتصق قاعدتا هرمين عدد أضلاعهما (n) معا (يمكن الحصول عليه كشكل يحقق خاصية الازدواجية مع المنشور)

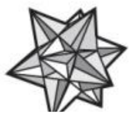
2- trapezohedra حيث يلتصق مخروطان مكونان من أشكال الطائرة الورقية معا (وهي إزدواجات المنشور المضاد).

3- (disphenoids) وهي عبارة عن عدد من رباعي الوجوه أوجهها الأربعة مثلثات غير متساوية الأضلاع متطابقة.

مجسمات كيبلر ـ بوينسوت Kepler – Poinsot polyhedra


الإثنيعشري


الإثنيعشري الصغير


الإثنيعشري الكبير الممدد


□عشروني الوجوه الكبير

هل المجسمات الأفلاطونية هي فقط تلك التي لها أوجه متطابقة من المضلعات المنتظمة؟ كما هو شائع في علم الرياضيات فإن الإجابة تتوقف على التعريفات.

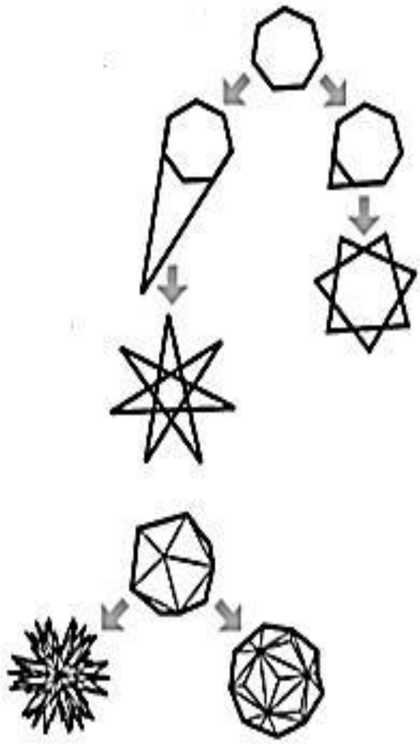
عام 1619 لاحظ يوهـان كيبلـر (Johannes Kepler) مجسمين غير محدبين لهما أيضاً نفـس تلـك الخواص، وقد استغل الفنانون أمثال باولو أوشيلو (Paolo Uccello) جمـالهما بيـنما لم يعرهمـا علـماء الرياضيات السابقون أي اهتمام ربما لأن أوجه هذين الشكلين لا تتلاقى فقط مـن خـلال حواف بل أن تلك الأوجه تمر عبر بعضها البعض مكونة حواف خادعة (false edges).

إذا كنا مهتمين حقا بالمجسمات ثلاثية الأبعاد، فمن المحتمل أننا يجب أن نستبعد منها هذه المجسمات إلا أنها في العادة تصنف على أنها مجسمات مقبولة، وقد قام لويس بوينسيت (Louis Poinsot) عام 1908 بوضع تعريف مجسمين آخرين فصارت مجسمات كيبلر- بوينسوت الأربعة - جدلا - تكملة لقائمة المجسمات المنتظمة التي بدأها أفلاطون، وهذه المجسمات الأربعة هي: الإثنيعشري الصغير الممدد (small stellated dodecahedron)، والإثنيعشري الكبير (great dodecahedron)، والإثنيعشري الكبيرالممدد (great stellated dodecahedron)، وعشروني الوجوه الكبير (the great icosahedron).

المضلعات النجمية star polygons ، والمجسمات النجمية star polyhedra

يندرج اثنين من مجسمات كيبلر-بوينسوت تحت فئة المجسمات النجمية، وهما: الإثنعشري الصغير الممدد (small stellated dodecahedron)، والإثنعشري الكبير

المدد (great stellated dodecahedron) وكلاهما نحصل عليه من إثني عشري الوجوه (dodecahedron) عن طريق عملية التمديد (stellation): أي تمديد الحواف والأضلاع حتى تتلاقى. ويمكن تصور الفكرة الأساسية من خلال المضلعات، فعلى سبيل المثال: النجمة الخماسية (Pentagram) هي تمديد للمضلع الخماسي (Pentagon)، وغالبا يكون الاختيار بين الأضلاع التي يمكننا تمديدها متاحا: المضلع السباعي (heptagon) يمكن تمديده بطريقتين فيعطي شكلين سباعيين مختلفين.



تم توثيق الطرق المختلفة لتمديد عشريني الوجوه في كتاب المجسمات العشرينية التسعة وخمسون (The Fifty-Nine Icosahedra) الذي كتبه كل من كوكسيتر (Coxeter)، ودوفال (Du Val)، وفلازر (Flather)، وبيتري (Petrie) عام 1938، وبعض مجسمات أرشميدس لها مئات الملايين من التمديدات المختلفة.

هناك سبعة عشر مجسم منتظم (Uniform polyhedra) عبارة عن مجسمات نجمية مشتقة من مجسمات أرشميدس. المجسمات النجمية عادة ليست كروية من الناحية الطوبولوجية بسبب الطريقة التي تمر بها الأوجه عبر بعضها البعض؛ لذلك فإنها لا تحقق صيغة أويلر للمجسمات (Euler's polyhedral formula).

المجسمات المركبة Compound Polyhedra

اكتشف يوهان كيبلر - بالإضافة إلى اكتشافه أول مجسمين من مجسمات كيبلر-بوينسوت- أول مجسم مركب وهو: الثماني المدد(the stella octangula) الذي نحصل

عليه بإدخال اثنين من رباعي الوجوه (tetrahedron) في بعضهما البعض بحيث يصبح مركزهما مشتركا (ويمكن الحصول عليه أيضاً بتمديد مضلع ثماني(octahedron))، وكما هو حال المجسمات النجمية الأخرى، فإن هذا الشكل غير محدب كما أنه ذاتي التقاطع مما يؤدي إلى تكون حواف ورؤوس خادعة.

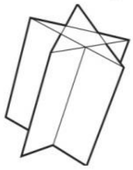
تلك الأشكال التي يمكن فصلها عن بعضها البعض والحصول على مجسمين منفصلين لا تصنف دائما على أنها مجسمات في حد ذاتها، لكنها ذات وجوه متطابقة، وكذلك حوافها ورؤوسها؛ مما يجعلها مجسمات مركبة منتظمة، وهناك أربعة أشكال أخرى من هذه المجسمات تكونت بطريقة مشابهة من خمسة أو عشرة من رباعي الوجوه (tetrahedron)، وخمسة مكعبات (cubes)، وخمسة مضلعات ثمانية (octahedra).

المجسمات المنتظمة Uniform Polyhedra

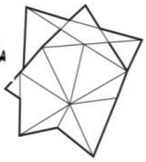
فتح اكتشاف المجسمات النجمية الباب لتصنيف جديد من المجسمات المنتظمة: وهي المجسمات التي أوجهها مضلعات منتظمة (بما فيها المضلعات النجمية)، والتي رؤوسها متطابقة. الأمثلة المحدبة على هذا التصنيف كانت معروفة منذ زمن بعيد: إنها المجسمات الأفلاطونية، ومجسمات أرشميدس، والمنشور، والمنشور المضاد. أما الغير محدبة فأولها: مجسمات كيبلر-بوينسوت، والمجسمات ذاتية التقاطع، و 53 شكل وضعها كل من كويستر (Coxeter)، ولونجيت هيجز (Longuet Higgins)، وميلر (Miller) في قائمة عام 1954، بدأت هذه القائمة بـ (tetrahemihexahedron) الذي ينشأ من تقاطع ثلاثة مربعات، وأربعة مثلثات متساوية الأضلاع، وآخرها (dirhombicosidodecahedron) أو كما يطلق عليه وحش ميلر (Miller's monster) له ستون رأس يتلاقى عند كل منها أربعة مربعات، ومثلثان، ونجمتان خماسيتان (pentagram) مما يجعل عدد أوجهه الكلية 124 وجه.

وتأتي عائلتان غير منتهيتان لتكملا قائمة المجسمات المنتظمة، وهما:

المناشير النجمية (star prisms) (حيث يرتبط مضلعان منتظمان عدد أضلاعهما (n) بحلقة من المربعات المتقاطعة)، والمناشير النجمية المضادة (star antiprisms (حيث يرتبط مضلعان منتظمان عدد أضلاعهما (n) بحلقة من المثلثات متساوية الأضلاع المتقاطعة). انظر إلى الرسم.

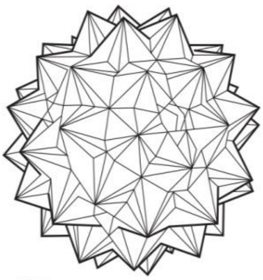


منشور نجمي



منشور نجمي مضاد

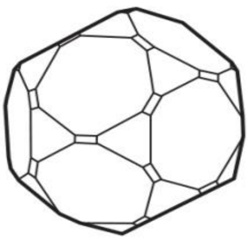
عام 1970 أثبت (S.P. Sopov) أن هذه القائمة أصبحت مكتملة، لكن عام 1975 اكتشف (جون سكيلينج) اكتشافا مثيرا. لقد وجد إمكانية واحدة إضافية إذا سمح للحواف أن تطابق بعضها البعض (بمعنى أن يصبح بإمكان حافة واحدة أن تكون مشتركة بين أربعة وجوه) وهي مجسم سكيلينج (Skilling's figure) (the great disnub dirhombidodecahedron) الذي له 204 أوجه تتلاقى في ستين رأس كما بالشكل.



مجسم سكيلينج

المجسمات متساوية الزوايا Isogonal Polyhedra

لتعريف المجسم المنتظم جزءان:جميع الرؤوس متطابقة (أي أن ترتيب الوجوه والحواف عند كل رأس يطابقها عند كل الرؤوس الأخرى)، وجميع الوجوه منتظمة (يمكن أن تكون غير محدبة) فإذا أسقط الشرط الثاني سيصبح عدد الأشكال الممكنة غير منته، وتلك الأشكال هي ما يطلق عليه المجسمات متساوية الزوايا (Isogonal Polyhedra)



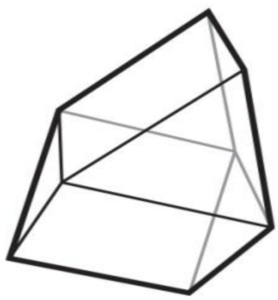
مجسمات متساوية الزوايا

يمكن تصور ذلك من خلال الأمثلة الأولى: رباعي السطوح حاد الزوايا (disphenoid tetrahedra) (انظر حجر النرد المنتظم). خذ أي متوازي المستطيلات (cuboid)، واختر أربعة رؤوس لا تشترك في نفس الحواف فإذا وصلت بينها تحصل على

(disphenoid)، وليس هناك تصنيف مكتمل للمجسمات متساوية الزوايا (Isogonal Polyhedra) حتى الآن.

مجسمات جونسون Johnson solids

عام 1966 تجاهل نورمان جونسون (Norman Johnson) كل الأسئلة التي تدور حول التماثل، وسأل ببساطة: ما المجسمات المحدبة التي يمكن تكوينها من المضلعات المنتظمة (ليس ضروريا أن تكون جميعها نفس الشكل)؟ فأخرج كتيبا يحتوي على 92 مجسما محدبا. وعام 1969م أثبت فيكتور زالجالير (Victor Zalgaller) أن قائمة مجسمات جونسون، بالإضافة إلى مجسمات أفلاطون، وأرشميدس، والمناشير، ومضاداتها هي بالفعل كل المجسمات الموجودة.



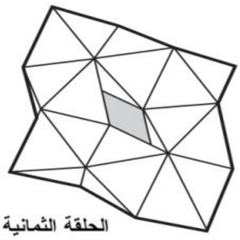
مجسمات رباعي المثلثات والمربعات

أول مجسم من مجسمات جونسون هو الهرم الذي قاعدته مربعة، وجوانبه مثلثة، (J_1) ومن مجسماته أيضاً المجسم (J_{26}) المكون من أربعة مربعات، وأربعة مثلثات متساوية الأضلاع ويسمى (gyrobifastigium).

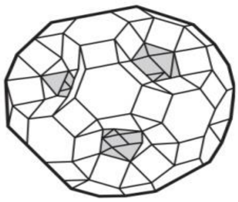
ملفات ستيوارت الحلقية Stewart toroids

كتاب "مغامرات بين الملفات الحلقية" (adventures among the toroids) كتاب مغمور كتبه بوني ستيوارت بخط اليد، ونشره بشكل شخصي عام 1970، وتحول إلى عمل كلاسيكي بين أولئك المهتمين بالمجسمات، وفيه درس ستيوارت المجسمات التي تتكون من المضلعات المنتظمة، لكن ليبتعد عن مجسمات جونسون لم يحصر نفسه في دراسة الأشكال المحدبة فقط.

ربما كان الآخرون ليتخلوا عن هذا الأمر باعتباره قضية خاسرة؛ فلا يوجد حد لعدد مجسمات جونسون التي يمكن لصقها معا إلا أن بعض هذه الأشكال يحمل قدرا عاليا من التماثل، مثل ثمانية من المجسمات الثمانية التي يمكن لصق أوجهها معا لتكوين حلقة. إن



أكثر مجسمات ستيوارت المدهشة لا تأتي من فكرة لصق المجسمات معا بل تأتي من الفلسفة العكسية: لقد أخذ نماذج كبيرة للعديد من مجسمات جونسون وأرشميدس ودرس جميع الإمكانيات المتاحة لثقب هذه النماذج وتبطينها بمضلعات منتظمة.



في وجهة نظر الطوبولوچيا فإن هذه الأشكال ليست كرات بل تارات نونية (n) انظر السطوح القابلة للتدوير (orientable surfaces1) عدد ثقوبها (n) يعطى بما يسمى الطراز، وبالتالي هذه الترتيبات يجب أن تحقق شكلا مجسما مناسبا (Polyhedral formula).

المجسمات رباعية الأبعاد Polychora

ولما أثمرت دراسة المجسمات ثلاثية الأبعاد ثمارا رائعة فكر علماء الرياضيات مباشرة في تعميم ذلك. وتماما كما كانت المجسمات ثلاثية الأبعاد نظائر للمضلعات في الأبعاد الثلاثية، فإن المجسمات رباعية الأبعاد هي نظائر للمضلعات أيضاً لكن في الأبعاد الرباعية. وتبني هذه المجسمات الرباعية عن طريق تلاقي خلايا مجسمة ثلاثية الأبعاد في أوجه مضلعة ثنائية الأبعاد وحواف مستقيمة أحادية البعد، ورؤوس صفرية الأبعاد.

وتماما كما صنف أفلاطون المجسمات ثلاثية الأبعاد المحدبة المنتظمة صنف عالم الهندسة السويسري لودويج شليفلي (Ludwig Schläfl i) المجسمات رباعية الأبعاد المحدبة المنتظمة، وقد وجد أن :

- الشكل الخماسي رباعي الأبعاد (pentachoron) يتكون من خمسة من رباعي الوجوه وهو المناظر لرباعي الوجوه.

(1) الأجسام التي تعود إلى نقطة البداية بنفس الاتجاه بعد التحرك في مسار مغلق

- الشكل المكعب الرباعي الأبعاد (the tesseract) أو المكعب الفوقي الرباعي (4-hypercube): ويتكون من ثمانية مكعبات.
- المجسم السداسي عشر رباعي الأبعاد (hexadecachoron)أو((4–orthoplex) أو (4–cross-polytope) ويتكون من ستة عشر سحطا رباعي، وهو المناظر للمجسم الثماني ثلاثي الأبعاد.
- ((the icositetrachoron (octaplex) ويتكون من 24 مجسم ثماني ثلاثي الأبعاد، وهو شكل جديد وليس له مناظر ثلاثي الأبعاد.
- (hecatonicosachoron) ويتكون من 120 (dodecahedra) وهو المناظر لـ (dodecahedron).
- (hexacosichoron) ويتكون من 600 رباعي وجوه، وهو المناظر لـ (icosahedron).

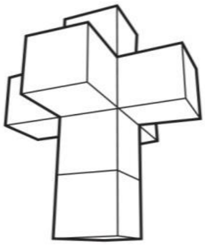
وقد وضع شليفلي وإيدموند قائمة بعشرة مجسمات رباعية الأبعاد منتظمة غير محدبة: إن مجسمات شليفلي- هيس رباعية الأبعاد هي نظائر مجسمات كيبلر- بوينسيت ثلاثية الأبعاد.

المكعب الزائدي Hypercube

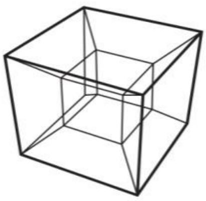
يمكن توصيف رؤوس المربع تماما باستخدام الإحداثيات الديكارتية: ((0,0), (0,1), (1,0), and (,1,)))، وبالمثل الرؤوس الثمانية للمكعب نحصل عليها من: ((0,0,0,), (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0), (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0), and(1,1,1),)). ولسنا بحاجة إلى رؤى عميقة لندرك أن الرؤوس الستة عشر للمكعب رباعي الأبعاد (المكعب الزائدي) يجب أن تكون : ((0,0,0,0), (0,0,0,1), (0,0,1,0), (0,1,0,0), (1,0,0,0), (0,0,1,1), (0,1,0,1), (0,1,1,0), (1,0,0,1), (1,0,1,0), (1,1,0,0), (0,1,1,1), (1,0,1,1), (1,1,0,1), (1,1,1,0), (1,1,1,1),)).

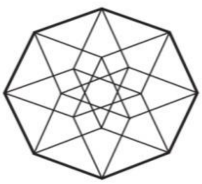
وهذه بداية وسائل المتبعة هي الشبكة، تماما كما تبنى المكعبات من ستة مربعات مطبقة معا يمكن بناء مكعب رباعي الأبعاد من ثمانية خلايا مكعبة "مطبقة معا"، وقد وضع

سلافور دايلي تصور هذه الشبكة في لوحة الصلب (Corpus Hypercubus)، كما تأملها روبرت هينلين عام 1941 في القصة القصيرة "وقد بنى منزلا معوجا" (And He Built – A Crooked House) التي فيها يبني مهندس معماري منزلا على شكل تلك الشبكة ثم يأتي زلزال ليطبقه ويصبح منزلا على هيئة مكعب رباعي الأبعاد.



والبديل لوسيلة الشبكة هو استخدام الإسقاط (Projection): حيث يرسم مكعب ثلاثي الأبعاد على صفحة ثنائية الأبعاد كمربع داخله مربع آخر ورؤوسيهما متصلة عن طريق الحواف، بالمثل فإن أحد الإسقاطات ثلاثية الأبعاد الممكنة للمكعب رباعي الأبعاد تتكون من مكعب داخله مكعب ورؤوسيهما متصلة عن طريق الحواف، وبالتالي تكون الخلايا الثمانية المكعبة هي المكعب الخارجي، والمكعب الداخلي والستة الباقية (المشوهة بسبب المنظور) تربط أوجه المكعبين الداخلي والخارجي.





هناك إمكانية ثالثة هي إسقاط بيتري (Petrie projection) للمكعب رباعي الأبعاد، وهي مكافئة لرسم مكعب عن طريق توصيل رؤوس أحد المربعات برؤوس مكعب آخر من نفس الحجم لكنه مزاح قطريا.

المجسمات المنتظمة رباعية الأبعاد Uniform polychora

يمكن طرح الأسئلة التي قادت إلى الرؤى المثيرة حول المجسمات ثلاثية الأبعاد مرة أخرى لكن في سياق المجسمات رباعية الأبعاد. عام 1965 أكمل كل من جون هورتون كون واي، ومايكل جاي باستخدام الكمبيوتر تصنيف المجسمات رباعية الأبعاد المناظر لمجسمات أرشميدس، والتي بدأتها عام 1910، العصامية المعجزة إليسيا بول ستوت (Alicia Boole Stott).

هذه المجسمات الأرشميدية رباعية الأبعاد محدبة ذات رؤوس متطابقة، وجميع أوجهها

مضلعات منتظمة، وبالتالي فإن خلاياها لابد أن تكون إما مجسمات أفلاطون، أو مجسمات أرشميدس أو مناشير أو مناشير مضادة، وإجمالا هناك 64 شكل منفرد في قائمة، بالإضافة إلى عائلتين منشوريتين غير منتهيتين.

والبحث مستمر لتوسيع هذا العمل ليتضمن النظائر غير المحدبة في تصنيف مكتمل للمجسمات المنتظمة رباعية الأبعاد

متعددات الأبعاد المنتظمة Regular polytopes

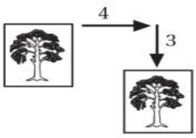
متعدد الأبعاد(polytope) هي كلمة عامة تصف المضلع، أو المجسم ثلاثي الأبعاد، أو المجسم رباعي الأبعاد أو نظائرها في أبعاد أعلى. الأجسام الأكثر تماثلا تستأثر اهتماما خاصا ألا وهي متعددات الأبعاد المنتظمة(Regular polytopes). في الأبعاد الثنائية هناك عدد غير منته من المضلعات المنتظمة، ومنها : المثلث متساوي الأضلاع، والمربع، والخماسي المنتظم، وهكذا، أما في الأبعاد الثلاثية: فهناك خمسة مجسمات من مجسمات أفلاطون، وفي الأبعاد الرباعية هناك ستة مجسمات أفلاطونية رباعية الأبعاد.

أثبت لوديج شليفلي أن هناك شيئا مميزا يحدث عندما ننظر إلى الأبعاد الأعلى من أربعة، وهي أنه لا يوجد أبدا سوى ثلاثة مجسمات منتظمة، وهي: (simplex)، والمكعب الزائدي (hypercube)، و(orthoplex) وهي نظائر رباعي الوجوه، والمكعب، وثماني الوجوه ثلاثي الأبعاد على الترتيب.

وهناك أيضاً متعددات الأبعاد المزعجة المتقاطعة ذاتيا، وغير المحدبة التي يجب أن تفسر. وهي في الأبعاد الثنائية: المضلعات النجمية، وأولها النجمة الخماسية، أما في الأبعاد الثلاثية فنجد مجسمات كيبلر- بوينست، وفي الأبعاد الرباعية 10 مجسمات من مجسمات شلفلي-هيس رباعية الأبعاد، ونذكر مرة أخرى أن في الأبعاد الأعلى تصبح أبسط، وابتداء من الأبعاد الخماسية فأعلى لا يوجد أي مجسمات منتظمة على الإطلاق، وهذا مثال على ظاهرة معروفة جدا بين أوساط علماء الهندسة: هي أن الحياة في الأبعاد الثلاثية أو الرباعية أعقد في نواحي كثيرة منها في الأفضية ذات الأبعاد الأعلى.

التحويلات TRANSFORMATIONS

تقايسات المستوى Isometries of the plane



هناك العديد من الطرق المختلفة لتحريك صورة ما إلى موضع جديد بعد رسمها في مستوى دون أن يحدث لها التواء أو تشويه، ويسمى ذلك تقايسات المستوى، وعلميا يمكن تعريف ذلك بأن أي خط في الصورة سيكون له نفس الطول قبل وبعد التحريك.

- الدوران (rotation): يعطي بمعلومتين نقطة تكون مركزا للدوران، وزاوية تحدد مقدار الدوران (ودائما يعرف في الرياضيات أن الزاوية الموجبة تكافئ الدوران عكس عقارب الساعة، والزاوية السالبة تكافئ الدوران مع عقارب الساعة).
- النقل(translation): تحريك الشكل خلال المكان ويعبر عنه بمتجه بحيث يعبر الصف العلوي عن الحركة ناحية اليمين (أو اليسار إذا كان رقما سالبا)، والصف السفلي عن إزاحة الشكل لأعلى أو أسفل، بالتالي على سبيل المثال تكافئ $\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$ تحريك الجسم أربع وحدات يمينا، وثلاث وحدات لأسفل.
- الانعكاس (reflection): يعرف على أنه خط مستقيم يعمل كمرآة فيحرك كل نقطة إلى موضع على الجهة المقابلة وتبعد نفس المسافة عن الخط.
- الإنزلاق (glide): هو انعكاس يتبعه نقل بمحاذاة نفس الخط (انظر التماثل الانزلاقي).

يمكن التعبير عن الدورانات والانعكاسات باستخدام مصفوفات التحويل.

التماثل Symmetry

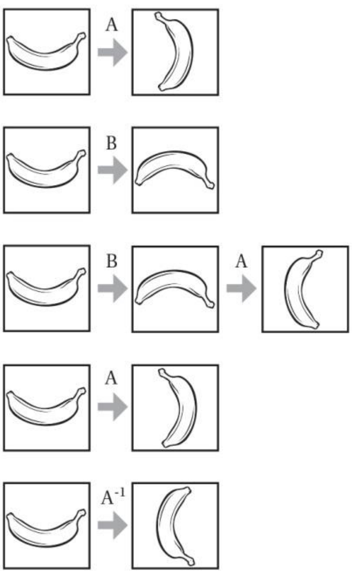
لأي شكل مرسوم في المستوى، التماثل هو تقايس يجعل الشكل يبدو كما هو، على سبيل المثال: المربع له تماثل دوراني وانعكاسي، فاعتبار مركز المربع هو مركز الدوران، وتدوير المربع 90° درجة يتركه على نفس الشكل، وتكرار تلك المناورة ينتج عنه نوعان آخران من التماثل: دورانات 180°، و270° قبل أن يعود المربع ثانية لموضعه الابتدائي، لذلك يقال أن المربع له تماثل دوراني من الرتبة الرابعة.

وللمربع أيضاً أربعة خطوط من التماثل الانعكاسي: القطران، والخط الأفقي والرأسي، وبجمع ما سبق نجد أن المربع له ثمانية تماثلات (بما فيها التماثل التافه (ترك المربع كما هو)، وهذه المعلومة متضمنة فيما يسمي بمجموعة تماثل المربع.

يمكن أن يكون للأشكال تماثل دوراني فقط، أو انعكاسي فقط، أو كلاهما. الأنماط غير المنتهية مثل الفيسفاء (التبليط) قد يكون لها تماثل انتقالي أو تماثل إنزلاقي.

مجموعات التماثل Symmetry groups

التماثل عند علماء الرياضيات هو حدث ينتج عنه شكل يبدو كما كان يبدو في السابق، وكان لهذا المنهج العملي أثرا رائعا، فإذا كان كل من (A)، و(B) متماثلين فإن من الممكن دمجهمها لنحصل على عنصر ثالث. في حالة المربع: إذا كان (A) هو دوران 90 درجة عكس عقارب الساعة حول المركز، (B) هو انعكاس في المحور الأفقي فإن (A o B) هو ناتج تنفيذ (B) أولا ثم (A)، وهو ما يتضح أنه انعكاس على خط القطر (the diagonal line y = x').



بالطبع يوجد تماثل واحد يكون عديم التأثير عند دمجه مع أي تماثل أخر: وهو التماثل التافه

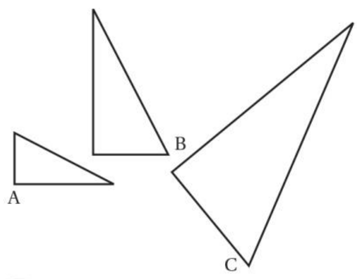
الذي يترك المربع كما هو. لكل تماثل معكوس: إذا كان (A) هو تدوير المربع 90° درجة عكس عقارب الساعة فسيكون معكوسه، والذي يرمز له بالرمز (A^{-1})هوالتدوير 90° درجة مع عقارب الساعة ، وتشير هذه الحقائق إلى أن مجموعة تماثلات المربع تشكل مجموعة - (زمرة)(group).

وهذا صحيح بالنسبة لتماثلات أي شكل. بالنسبة للأشكال ثنائية الأبعاد توجد عائلتان من المجموعات اعتمادًا على إذا ما كان الشكل له أي تماثل إنعكاسي أم لا، فإذا لم يكن له تماثل إنعكاسي كما هو الحال في شكل الصليب المعقوف (swastika) فستكون المجموعة دائرية مما يعني أنها تشبه الجمع بنمط معين (4 في هذه الحالة)، وإذا كان هناك أيضاً تماثل إنعكاسي كما هو الحال في المربع تكون المجموعة ثنائية السطح (dihedral).

أما في الأبعاد الثلاثة فحجم مجموعة تماثل المكعب يساوي 48، وتكون مجموعات تماثل المجسمات ثلاثية الأبعاد ومتعددة الأبعاد أكثر تعقيدًا من ذلك. وفي حالة أكثر الأشكال تماثلًا مثل الدائرة والكرة تكون مجموعات التماثل هي مجموعات لاي غير المنتهية للفيسفاء أيضاً مجموعات تماثل غير منتهية، تحديدًا: مجموعات النسيج(frieze groups)، ومجموعات ورق الحائط (wallpaper groups).

التشابه Similarity

يقال لمثلثين أنهما متشابهان إذا كانت زواياهما متطابقة، إذا المثلثات: (A)، (B)، (C) جميعا زواياها 90،60،30 على سبيل المثال فيقال إنهم مثلثات متشابهة (ليس ضروريا أن تكون الأضلاع متساوية). يسمح التشابه للمثلث بأن يحدث له انعكاس، وهذه طريقة سريعة لإدراك ظاهرة أوسع.

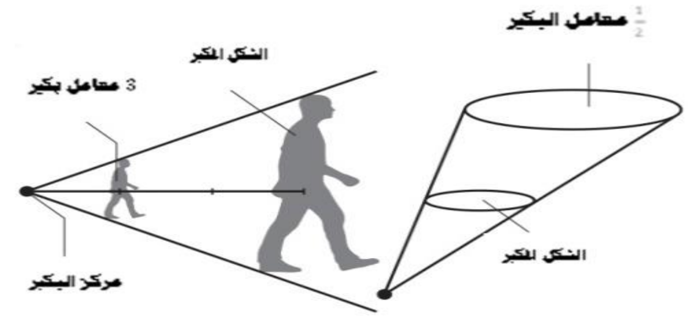


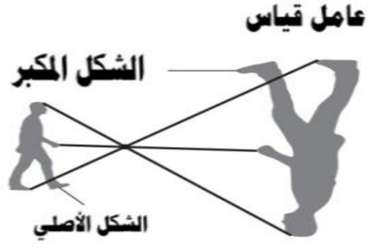
بصفة عامة، يكون شكلان متشابهين إذا كان لهما نفس الشكل ولكن ليس بالضرورة نفس الأبعاد، ولا نفس الموضع (إذا كان لهما نفس الشكل والأبعاد يقال أنهما متطابقان، وسيكون

هناك تقايس بنقل أحدهما إلى الآخر)، كما هو الحال فإن هذا التعريف غير دقيق إلى حد غير مرض، لكن يمكن جعله أكثر دقة من خلال فكرة التكبير (Enlargement).

التكبير Enlargement

يتحدد التكبير بمعلومتين: نقطة (يطلق عليها مركز التكبير)، ورقم (عامل التحجيم). أي شكل في المستوى يمكن تحويله كما يلي: اختر نقطة تنتمي لهذا الشكل، ومد خطا بينها وبين مركز التكبير. إذا كان عامل التحجيم يساوي 2، فإن النقطة المناظرة على الجسم المكبر ستكون واقعة على الخط بحيث تكون المسافة بينها وبين مركز التكبير ضعف المسافة بين مركز التكبير والنقطة الأصلية على الجسم، وإذا كان عامل التحجيم 3 فستكون المسافة ثلاثة أمثال وهكذا. تكرار هذه العملية لعدة نقط سوف يحدد موضع الجسم المكبر.



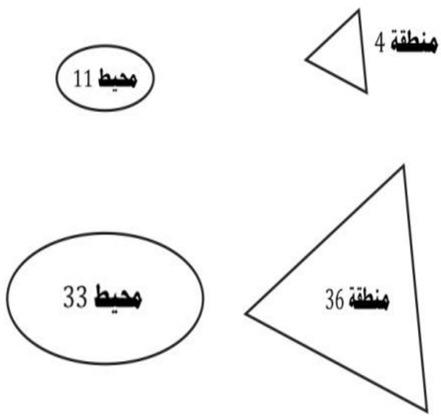


من العواقب المؤسفة للمصطلحات أن "التكبير" يمكن أن يجعل الأشياء أصغر حجما!، فإذا كان عامل التحجيم يقع بين صفر ، و 1 فإن الشكل الناتج سيكون نسخة مصغرة من الشكل الأصلي، وإذا كان سالبا فإن خطوط الإنشاء سوف تنقل الشكل إلى

الجهة الأخرى من المركز ولكنها ستجعله مقلوبا حول نفسه خلال العملية (ويسمى أحيانا الانعكاس حول نقطة).

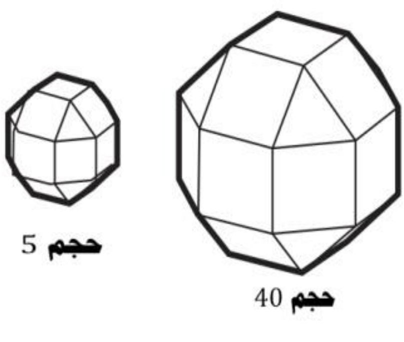
ونفس الخطوات تنطبق على الأجسام في الأبعاد الأعلى ، ويقال للأجسام التي تكون نسخة مكبرة من أجسام أخرى أنها متشابهون.

عوامل التحجيم Scale factors



الجسمان المتشابهان لهما نفس الشكل، والنسب لكن بأبعاد مختلفة، وهذا الاختلاف في الأبعاد يقاس بما يسمى عامل التحجيم. إذا كان طول شكل ما 3 وحدات، وكان عامل التكبير 2 فسيكون طول الشكل المكبر $3\times2=6$ وحدات، ولا ينطبق ذلك على الخطوط المستقيمة فقط، فإذا كان هناك قطع ناقص محيطه 11 وحدة، وتم تكبيره بعامل تحجيم 3 فسيكون محيط القطع الناقص الجديد 33 وحدة.

إلا أن ذلك لا يمكن تطبيقه على المساحة، إذا كانت مساحة مثلث 4، وتم تكبيره بعامل تحجيم 3 فإن مساحة المثلث الجديد لن تكون 3×4 بل تحسب عن طريق ضرب المساحة الأصلية في مربع عامل التحجيم $4\times3^2= 36$، ومرة أخرى نؤكد أن هذا الأسلوب صالح للتطبيق على أي شكل وهو مفيد عندما يكون حساب المساحة بالطرق المباشرة غير متاح.



في الأبعاد الثلاثية إذا كان مجسم ما حجمه 5، وتم تكبيره بعامل 2 فلإيجاد حجم المجسم الجديد سنوجد حاصل ضرب الحجم القديم في مكعب معامل التحجيم: $5\times2^3=40$.

الفسيفساء TESSELLATIONS

الفسيفساء Tessellations

لطالما افتتن الناس بتلك الأنماط المكونة من تكرار الأشكال البسيطة بداية بتلك الموجودة على مقابر الفراعنة وصولا إلى نقوش الفنان موريتس كورنيليس إيشر (M.C Escher وكان فن التبليط واسع الانتشار في العالم الإسلامي حيث حدا النهي الديني عن الفن التشكيلي بالفنانين إلى استكشاف الإمكانيات الجمالية للفن المجرد كتلك التي تزين قصر الحمرا بإسبانيا. وقد استغرق الأمر وقتا أطول بالنسبة لعلماء الرياضيات حتى اكتشفوها.والفكرة الأولى هي أن شكل ثنائي الأبعاد يزين الأرضية إذا كان يمكنه أن يؤدي وظيفة القرميدة (البلاطة): أي أنه يمكن رص نسخ منه جنبا إلى جنب بحيث يمكن تغطية مساحة كبيرة حسب إراداتك، دون تداخل ولا فراغات.

أبسط أنواع التبليط هو الفسيفساء المنتظم على الرغم من شيوع غير المنتظم وشبه المنتظم في التصميمات بنفس القدر. ولما أصبح هناك مجموعة أكبر من البلاط ، فكان لابد من إعطاء قدر أكبر من الاهتمام للتماثلات الممكنة وقد حدث ذلك من خلال مجموعات ورق الحائط، ومجموعات النسيج، ولاشك أن علماء الرياضيات أيضاً يستكشفون هذه الظاهرة من وجهة نظر الأبعاد الأعلى.

الفسيفساء المنتظمة Regular tessellations

إن أبسط أنواع التبليط هو ذلك الذي يستخدم مضلعا واحدا منتظما: وهذه التغطية المنتظمة مكافئة لمجسمات أفلاطون. المثال الأكثر شيوعا هو مثال الشبكة: التغطية بمربعات بحيث تتلاقى أربعة منها عند كل رأس، وكذلك يمكن استخدام مثلثات متساوية الأضلاع

إذا كانت مرتبة بحيث تتلاقى ستة منها عند كل رأس، لكن ما هي المضلعات المنتظمة الأخرى التي يمكن استخدامها؟ ليس من الممكن استخدام المضلع الخماسي: فإذا حاولت استخدامه فسوف ينتهي بك الأمر إلى وجود مضلعات خماسية غير مكتملة (pentaflakes) (الزاوية الداخلة للمضلع الخماسي 108° درجة؛ أي أنه ليس من مضاعفات العدد 360). والمضلع السداسي المنتظم هو المضلع الوحيد الآخر الذي يمكن استخدامه، وهي حقيقة يستغلها النحل.

أما المضلعات السباعية، والمضلعات التي عدد أضلاعها (n) حيث (n) أكبر من ذلك لا يمكن استخدامها؛ حيث أنك إذا وضعت اثنين منهما جنبا إلى جنب فستكون الزاوية المتبقية أصغر بكثير من أن تتسع لمضلع ثالث.

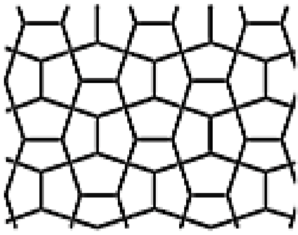
الفسيفساء غير المنتظمة Irregular tessellations

ليست فقط المضلعات المنتظمة هي التي تستخدم في التبليط، بل إن أي مثلث يمكن استخدامه أيضاً، ولرؤية ذلك، ارسم أي مثلث، ثم قم بقصه واستخدمه كقالب لرسم مثلث آخر، ثم قم بتحريك القالب بحيث تنطبق إحدى أضلاعه على الضلع المناظر له في المثلث المرسوم (كن حذرا، قم فقط بتدوير القالب في المستوى دون أن تقلبه) واستخدمه في رسم مثلث آخر مرة أخرى وكرر ذلك لتحصل على نمط يغطي المستوى.

ينطبق الأسلوب نفسه على الأشكال الرباعية: كل الأشكال التي لها أربع أضلاع مستقيمة يمكن استخدامها في التبليط، أما التبليط الخماسي فهو أكثر تعقيدا؛ فبعض المضلعات الخماسية يمكن استخدامها إلا أن المنتظم منها لا يمكن استخدامه بينما

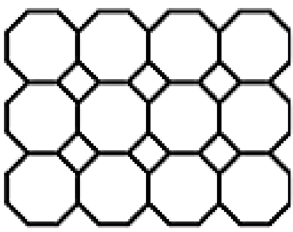
المضلعات السداسية المنتظمة تستخدم في التبليط، وقد بين كارل ريندهارت عام 1918 أن هناك بالضبط ثلاثة تصنيفات من المضلع السداسي المحدب غير المنظم التي يمكن استخدامها في التبليط أيضاً، ولكل $(n \geq 7)$ فلن يكون هناك مضلعات محدبة عدد أضلاعها (n) تصلح للتبليط.

التبليط الخماسي Pentagonal tilings



المضلعات الخماسية المنتظمة لا يمكن استخدامها في التبليط، لكن هناك بعض المضلعات الخماسية المحدبة غير المنتظمة يمكن استخدامها في ذلك. هناك أربعة عشرة طريقة مختلفة معروفة للتبليط، إحداها فسيفساء القاهرة كما في الشكل، والذي يزين الأرصفة في شوارع القاهرة ، وطرق أخرى مثل الأربع طرق التي اكتشفها الرياضي الهاو مارجوري رايس عام 1977، وآخرها اكتشافا تلك التي اكتشفها رولف ستين عام 1985. ولم يثبت بعد أن تلك القامة التي تضم ال 14 طريقة هي كل الطرق الممكنة في التبليط الخماسي.

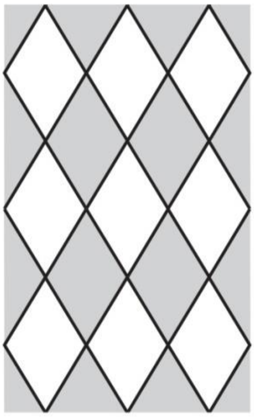
الفسيفساء شبه المنتظمة Semiregular tessellations



يستخدم هذا النوع مضلعات منتظمة مثل الفسيفساء المنتظمة إلا أن هذا النوع يسمح بأكثر من نوع واحد من البلاط، ويتطلب أن تكون جميع الرؤوس متطابقة، وهناك ثمانية أنواع من هذا التبليط كل منها يتكون من اثنين أو ثلاثة من المثلثات متساوية الأضلاع، والمربعات، والأشكال السداسية المنتظمة، والمضلعات الثمانية، والمضلعات الثنيعشرية، وبعض هذه التبليطات يأتي في نسخ يسارية أو يمينية.

وأحيانا يطلق على هذا النوع اسم الفسيفساء الأرشميدية؛ لأنها تتوافق مع مجسمات أرشميدس، وقد شكلت هذه الأنواع الثمانية أساس الأنماط التزيينية في القصور والمعابد لآلاف السنين.

التماثل الانتقالي Translational symmetry

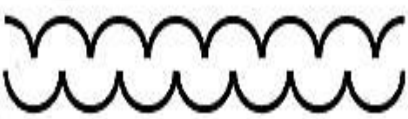


الأشكال المنتهية مثل المضلعات والمجسمات ثلاثية الأبعاد يمكن أن يكون لها نوعين من التماثل على أقصى تقدير: تماثل انعكاسي، وتماثل دوراني، بينما التبليط غير المنته يتيح نوعا ثالثا من التماثل، ألا وهو التماثل الانتقالي؛ فإزاحة تبليط بمعين هندسي إلى يمين الصفحة مقدار الوحدة لا يغير من شكله شيئا وهذا يسمى تماثلا، وبالطبع فإن إزاحته وحدتين أو 3 أو 4 ... إلخ يسمى تماثلا أيضاً، مما يعني أن النمط المتماثل انتقاليا له تلقائيا عدد لا نهائي من التماثلات.

التماثل الإنتقالي لنمط ما هو الخطوة الأولى نحو التصنيف، والعديد من الأنماط الشائعة له نوعان من التماثل الانتقالي هما: يسار- يمين، و أعلى- أسفل، وهذا بشكل أساسي يسمح بوجود 17 نمطا مختلفا مصنفة بمجموعات ورق الحائط ، وبعض أنواع التبليطات لها نوع واحد فقط من التماثل الانتقالي: إما يسار-يمين، أو أعلى - أسفل (وليس كلاهما معا)، وهذا يندرج تحت ما يسمى مجموعات النسيج أو مجموعات فريز.

أما التبليط اللادوري بما فيه تبليطي بينروز وأمان ويتميز بأن له تماثل دوراني وانعكاسي لكن ليس له تماثل انتقالي على الإطلاق

التماثل الانزلاقي Glide symmetry



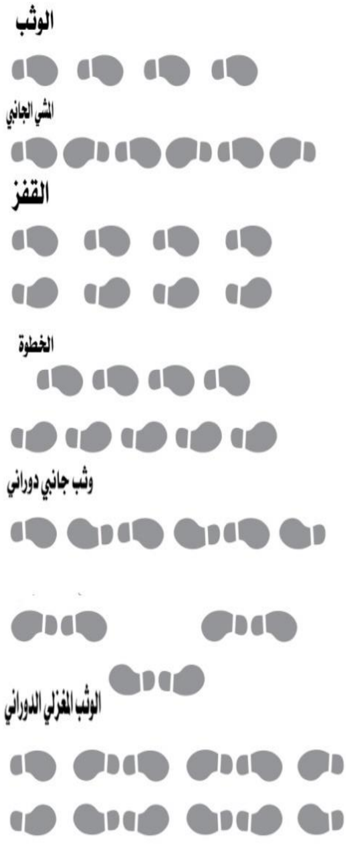
بالإضافة إلى التماثل الدوراني، والانعكاسي والانتقالي هناك نوع أخير ممكن من التماثل في الأنماط ثنائية الأبعاد ألا وهو التماثل الإنزلاقي.

التماثل الإنزلاقي هو مزيج من الانتقال والانعكاس، كما يتضح من الشكل، يمكن أن يتم إيجاد الصورة بالانعكاس حول محور أفقي ثم نقلها بمحاذاة نفس المحور فيكون التماثل الناتج ليس انعكاسيا ولا انتقاليا بل إنزلاقيا (أو إنزلاق- انعكاس)، على عكس المزج بين

الدوران والانتقال الذي ينتج عنه دائما دوران آخر (على الرغم من أن تحديد مركزه لا يتم بطريقة مباشرة دائما). العديد من التبليطات والأنماط لها تماثلات إنزلاقية، ولذلك برزت أهميتها في مجموعات النسيج وورق الحائط.

مجموعات النسيج Frieze groups

في فن العمارة تطلق كلمة فريز (Frieze) على الشريط الضيق الممتد على طول أعلى الحائط. ومنذ العصور القديمة، زينت هذه الفريزات بأنماط هندسية متكررة، وفي هذا السياق سنجد أن هناك تماثل إنتقالي لكن فقط تماثل انتقالي من النوع يسار–يمين. والأنماط من هذا القبيل تأتي في سبعة أنواع تصف أسماؤها –التي أطلقها عليها جون هورتون كون واي– آثار خطوات الأقدام بالتماثلات الصحيحة:



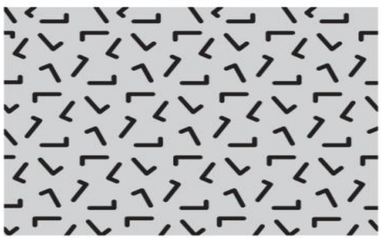
- الوثب (The hop): هو أبسط المجموعات، وهو عبارة عن انتقالات فقط.
- المشي الجانبي (The sidle): انتقالات مصحوبة بانعكاسات حول محاور رأسية.
- القفز(The jump): انتقالات وانعكاس أفقي
- الخطوة (The step): إنتقالات وإنزلاقات.
- الوثب الدوراني (The spinning hop): إنتقالات مع تماثلات دورانية بـ 180° درجة.
- المشي الجانبي الدوراني (The spinning sidle): إنتقالات، وإنزلاقات، وانعكاسات حول محاور رأسية، وتماثلات دورانية بـ 180° درجة.
- القفز الدوراني (The spinning jump): هو أكبر المجموعات، وفيه إنتقالات، وانعكاسات حول محاور رأسية، وانعكاس أفقي وحيد، وتماثل دوراني بـ 180° درجة.

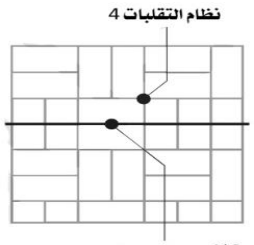
كـونـواي أوربيـفـولـد Conway's orbifolds[1]

تصنف المجموعات الفريزية الأنماط التي لها تماثلات من النوع يمين – يسار، أو أعلى – أسفل، لكن ما الأنماط الناتجة إذا استخدمنا كلا النوعين معا؟ أبسط نمط يمثل ذلك هو فكرة ال (orbifolds) التي ابتكرها جون كون واي ويرمز لها بالرمز (o).

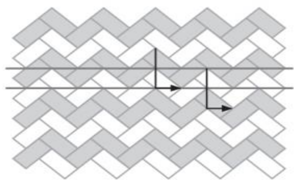
على عكس المضلعات، يمكن للتبليطات أن يكون لها أكثر من مركز دوران، فإحدى الإمكانيات لها مراكز دوران من الرتبة السادسة، وإمكانيات أخرى تكون مراكزها من الرتبة الثالثة، ومجموعة أخيرة مركزها من الرتبة الثانية. المثال الموضح له مراكز الدوران تلك، وليس له تماثل انعكاسي، ويرمز لهذه المجموعة بـ (632).

632





4*2



XX

أما الأنماط التي لها تماثلات إضافية انعكاسية فتحدد بـ (*).

وللدورانات نوعان: المشكال (kaleidoscopes) التي تقع مراكزها على محور انعكاس، والتقلبات (gyrations) التي لا تقع مراكزها على محور انعكاس.

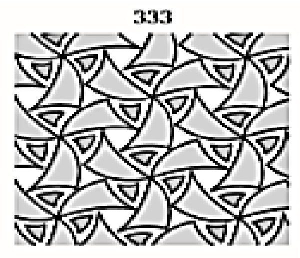
توضع التقلبات (gyrations) قبل *، وتوضع المشكال (kaleidoscopes) بعدها. نمط رقعة الشطرنج له المجموعة (442^*) أي ثلاثة مشكالات من الرتبة الرابعة، والرابعة، والثانية، وليس لها تقلبات (gyrations)، أما النمط الذي يرمز إليه بـ(4^*2) فله تقلب من الرتبة الرابعة، ومشكال من الرتبة الثانية.

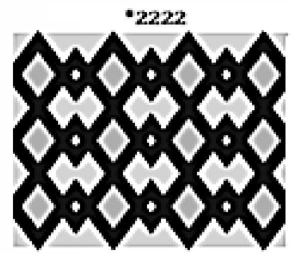
(1) هو مصطلح صاغه العالم ثورستون في سياق هندسة المتشعبات الثلاثية (https://en.wikipedia.org/wiki/Orbifold)

النوع الأخير الذي يؤخذ في الاعتبار هو الإنزلاق الذي يرمز له بالرمز (x)، وإمكاناته هي (xx) الذي له نوعان من الإنزلاق (وليس له انعكاسات أو دورانات)، و (x^*) التي لها إنزلاق واحد، وانعكاس واحد، و (22x) التي ليس لها أي انعكاسات بل دورانين من الرتبة الثانية، وانزلاق.

مجموعات ورق الحائط Wallpaper groups

تصنف مجموعات ورق الحائط تلك الأنماط التي تحتوي على نوعين من التماثل الانتقالي. عام 1891 أثبت إيفجراف فيدوروف أن هناك بالضبط 17 إمكانية مختلفة. هنا سنستخدم طريقة تسمية الأوربيفولد. نقطة بداية التصنيف هي الحقيقة التالية: الأنماط التي لها نوعين من الإنتقال يمكن أن يكون لها تماثل دوراني فقط من الرتبة الأولى، أو الثانية، أو الثالثة، أو الرابعة، أو السادسة، ويسمى ذلك بمبرهنة التقيد البلوري (Crystallographic restriction theorem).

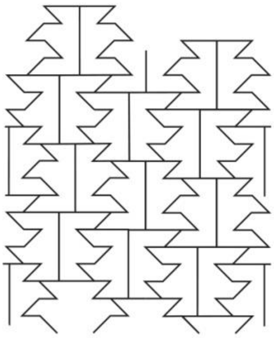




أبسط نمط هو النمط الذي له تماثل إنتقالي فقط: ويرمز له بالرمز (o). وإمكانيات وجود نمط له دورانات، لكن دون أن يكون له انعكاسات أو تماثلات إنزلاقية هي: (632, 442, 333 and 2222)، أما في وجود تماثلات دورانية، وانعكاسية فالإمكانيات هي (,*632, *333, 3*3, *442, 4*2, 22* *632* ** and 2*22 ,2222*). (الأخيرة لها محوري انعكاس متوازيين، وليس لها تماثل دوراني). وأخيرا الأنماط التي لها إنزلاقات هي (xx, *x and 22x).

تبليط هيسش Heesch's tile

أحد الأسئلة التي طرحها ديفيد هيلبرت في مسألته رقم 18 كان متعلقا بالأشكال التي يمكنها أن تستخدم في التبليط بمفردها لكن بطريقة إلى حد ما غريبة. على الرغم من

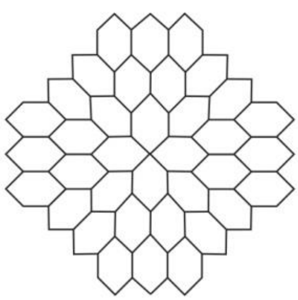

بلاط هيسش

أن كل البلاطات متطابقة إلا أنها تكون في مواضع غير متطابقة، مما يعني أنك ستكون دائما قادرا على إيجاد بلاطتين لا يمكن تنسيقهما في تماثل؛ لأن ترتيبات البلاط حولها مختلفة، وليس صعبا أن تشيد تبليط كهذا (أي تبليط لا دوري يحقق هذا الوصف).

كان سؤال هيلبرت عما إذا كان هناك أي شكل يمكن أن يستخدم في التبليط بهذه الطريقة.

في الواقع، طرح هيلبرت هذا السؤال في سياق التبليط ثلاثي الأبعاد(ملأ الفراغ بالمجسمات ثلاثية الأبعاد) من المحتمل أنه أعتقد أنه ليس هناك شيء كهذا في الأبعاد الثنائية، لكن عالم الرياضيات العظيم تغاضى عن إمكانية، واكتشف هينريك هيسش عام 1935 أول بلاطة متعددة الأوجه، كما أن هناك تبليط ثلاثي الأبعاد يحقق معايير هيلبرت اكتشفه كارل رينهاردت عام 1928.

التبليط غير الدوري Aperiodic tiling


تبليط شعاعي

يمكن أن يكون للتبليط نوعان من التماثل الإنتقالي (مصنف بمجموعات ورق الحائط)، أو نوع واحد منه تصفه مجموعات مجموعات فريز. هناك أيضاً تبليط ليس له تماثل إنتقالي على الإطلاق، والذي يسمى تبليط غير دوري وهو لا يكرر نفسه أبدا، حتى إذا كنت سترصف مترا مربعا، فسيكون من المستحيل أن تكرر النمط بحيث ينطبق على نفسه، ولأن لها تماثل دوراني، وانعكاسي فقط فإن مجموعات تماثلهم الممكنةهي نفس مجموعات تماثل المضلع. الأمثلة الشائعة هي التبليط النصف قطري (بمجموعات تماثل ثنائية السطح)، والتبليط الحلزوني الجميل (بمجموعات تماثل دائرية) مثل تبليط فودربرج، أما الإمكانيات الأكثر غرابة هي تبليطات بنروز وآمان.

التبليط غير القابل للحساب Uncomputable tilings

نفرض أنني قدمت لك مجموعة من الأشكال ووضعت لك تحد أن تستخدمها في تبليط المستوى، ولست مهتما بالتماثل؛ كل ما هو مطلوب أن تغطي أكبر مساحة ممكنة كما طلبت دون وجود فجوات أو تداخلات، ولديك أي عدد ترغب به من كل شكل. إذا أعطيتك مربعات، ومثلثات متساوية الأضلاع فلن تواجه صعوبة، أما إذا كانت مضلعات خماسية منتظمة، ومضلعات سباعية، وعشرية فلن يمكنك تنفيذ المطلوب، لكن إذا أعطيتك مجموعة من 100 من المضلعات المعقدة غير المنتظمة فسيكون عليك أن تفكر.

السؤال الذي وجهه هاو وانج كان عما إذا كان هناك خطوات معينة يمكنك اتباعها لمعرفة إذا كانت مجموعتي يمكنها رصف هذا المستوى أم لا، بمعنى آخر: كان يبحث عن خوارزمية. عام 1961م ظن أنه وجد واحدة لكن ليثبتها اضطر لوضع فرض أن ليس هناك مجموعة يجب أن تبلط المستوى بشكل لا دوري فقط. اكتشاف تبليط بنزوري وأمان محى هذا الفرض، ومعها خوارزمية وانج، في الحقيقة ليس هناك خوارزمية تحل هذا المسألة: إنها غير قابلة للحساب.

تبليط بنروز وأمان Penrose and Amman tilings

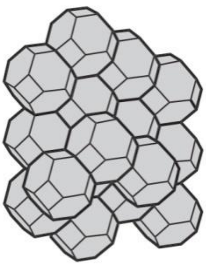
كان التبليط اللا دوري معروفا عند صناع الفسيفساء في روما القديمة، وبدا أن كل مثال له نظير دوري. إذا كانت هناك مجموعة من البلاطات تغطي المستوى فإنه يمكن إعادة ترتيبها بحيث تغطي المستوى في تماثل إنتقالي. عام 1961 وضع هاو وانج حدسية مفادها أن هذا لابد أن يتحقق دائما: ليس هناك مجموعة منتهية تعطي أنماطا لا دورية. فقط، لكن هذه الحدسية التي وضعها هاو دحضها تلميذه روبرت بريجر عام 1964 عندما كون مجموعة من 20426 مربع محزز يمكنها تغطية المستوى بأنماط لا دورية فقط.

وفي فترة السبعينيات اكتشف كل من عالم الفيزياء الرياضية روجر بنروز، والرياضي الهاوي روبرت أمان كل على حدة تبسيطات جميلة لهذه النتيجة، ففي عام 1974م وجد بنروز مجموعة لا دورية من بلاطتين فقط: كلاهما على شكل معين هندسي، وأضلاعهما متساوية، أحدهما منفوخ، والآخر نحيف، وهي تبلط المستوى لكن عن طريق تحزيز الحواف (أو تلوينها

مع التأكيد على أن الحواف المتماسة متماثلة)، وقد أكد بينروز أنها لا يمكن أن تغطي المستوى بشكل دوري، وأطلق عليها اسم "rhombs"، كما أنه عثر على مجموعتين أخرتين لا دوريتين من البلاط: "الطائرات الورقية والسهام" (kites and darts)، والتي تستخدم أيضاً نوعين مختلفين من البلاط، والخماسيات (pentacles) التي تستخدم أربعة أنواع مختلفة من البلط. أما أمان ومعه فرانك بنكير فقد اكتشف أمثلة أخرى بما فيها تبليط أمان - بنكير الذي يتكون من مربعات ومعينات هندسية.

من الأسئلة البارزة في نظرية التبليط: هل هناك بلاطة واحدة يمكنها تغطية المستوى لكن بطريقة لا دورية فقط؟

أقراص العسل والبلورات Honeycombs and crystals



قرص العسل هي فسيفساء في أكثر من بعدين؛ فبدلا من تغطية المستوى ببلاطات مضلعة، تغطي أقراص العسل الثلاثية الفضاء ثلاثي الأبعاد بخلايا ثلاثية الأبعاد.

ويطلق على المجسم الذي يغطي المستوى مجسم ثلاثي الأبعاد مالئ الفضاء (space-filling polyhedron)، ولا يحقق ذلك من مجسمات أفلاطون إلا مجسم واحد هو المكعب (اعتقد أرسطو عن طريق الخطأ أن رباعي الوجوه يمكن استخدامه في التبليط؛ ربما لأن الشكل الناتج من دمجه مع ثماني الوجوه ثلاثي الأبعاد يمكن استخدامه).

ومع ذلك هناك أيضاً مجسمات أخرى مالئة الفضاء، أحدها يندرج تحت مجسمات أرشميدس، وثماني الوجوه المقطوع يمكن استخدامه أيضاً وكذلك المناشير المثلثة، والسداسية، وأحد مجسمات جونسون وهو (gyrobifastigium). أما بالنسبة للمجسمات ثلاثية الأبعاد ذات الوجوه غير المنتظمة فإن أحد أجسام كاتالان وهو المجسم الأثنعشري (dodecahedron) يملأ الفراغ وكذلك يفعل أكثر من 300 مجسم ثلاثي الأبعاد متنوع آخر.

أما الأنماط التي تحتوي على أكثر من مجسم فإن النتيجة الأساسية هي مبرهنة التقيد

البلوري التي تقول أن تبليط الفضاء ثلاثي الأبعاد والذي له تماثل إنتقالي يمكن أن يكون له دورانات فقط من الرتبة 2 أو 3 أو 4، أو 6. ونظائر مجموعات ورق الحائط هي المجموعات البلورية ال 230 ، وتلك نتيجة أساسية في علم المواد حيث أنها تقيد الترتيبات الممكنة للجزيئات في المجسمات البلورية.

أقراص العسل في الأبعاد التي عددها n (n-dimensional (honeycombs

في الأبعاد الرباعية، هناك ثلاثة مجسمات رباعية الأبعاد يمكنها تغطية المستوى: المكعب الزائدي (hypercube)، والسداسي رباعي الأبعاد (hexadecachoron)، والمجسم ذو الأربعة وعشرون وجها رباعي الأبعاد (icositetrahedron)، أما في الأبعاد الخماسية فأعلى فإن المكعب الزائدي فقط هو الذي يمكن استخدامه، إلا أنه يمكن تكوين أنماط أكثر تعقيدا من دمج أكثر من نوع من البلاط، ولتحليل ذلك وتحليل هذه الأنماط كما يلي: تلعب مجموعات الفضاء دور مجموعات ورق الحائط السبعة عشر، والمجموعات البلورية التي عددها 230.

طرح ديفيد هيلبرت في مسألته الثامنة عشر سؤالا أساسيا: ألا يوجد سوى عدد محدود من مجموعات الفضاء في كل بعد؟ وفي عام 1911 استطاع لودفيغ بيبربيش الإجابة عن هذا السؤال بالإيجاب (قدم بيبربيش مساهمات بارزة أخرى في الرياضيات لكن هذه الإسهامات لم تحظ بالاحترام بسبب سياسته النازية). وفي عام 1978م، أظهر هارولد براون (Harold Browen) ورولف بيلون (Rolf Bulow) وجوكيم نيبسر (Joachim Neubuser) أن هناك 4,895 مجموعة فضاء في أربعة أبعاد. وفي عام 2001 استخدم كل من فيلهلم بليكسين (Wilhelm Plesken) وتيلمان شولز (Tilman Schulz) الكمبيوتر لتسجيل 222,097 مجموعة فضاء في خمسة أبعاد و 28,934,974 في ستة أبعاد.

أشباه البلورات Quasicrystals

تأتي المجسمات في شكلين علي المستوي الجزيئي: الشكل اللابلوري (amorphous) حيث يتم ترتيب الجزيئات بشكل عشوائي كما هو حالة السؤال (مثل الزجاج)، والشكل البلوري حيث يتم ترتيبها في أشكال هندسية ثابتة (مثل الماس).

في عام 1982 اكتشف دان سيتشمينت (Dan Schechtment) سبيكة من الألومنيوم والمنجنيز وكانت فيها خاصية غير متوقعة: وهي أن لها تماثل دوراني من الرتبة 5. كان الأساس العلمي لذلك مرفوضا؛ لأنه متعارض مع مبرهنة التقيد البلوري الأساسية، والتي تنص علي عدم السماح بدوران البلورات الصلبة إلا بدورانات من الرتبة 2 و 3 و 4 و 6 فقط. إلا أن بالتدقيق في الأمر بدا بعد كل هذا أن المادة ليست بلورية؛ لأنها ليس لها تماثل إنتقالي، لكن أيضاً المجسمات اللابلورية ليست مرتبة بما يكفي لتظهر تماثلا دورانيا، فماذا كانت تلك السبيكة إذا؟

لقد قابل علماء الرياضيات أبنية مماثلة من قبل في التبليط اللادوري لبنروز، وأمان، وقد اكتشف سيتشمينت (Schechtment) نظائر ثلاثية الأبعاد لها؛ لذلك أطلق عليها اسم شبه البلورة (quasicrystal)، ومنذ ذلك الحين تم العثور علي العديد من أشباه البلورات في الطبيعة، والتي احتلت مكانا بين المواد الصلبة غير البلورية والبلورية، وهذه التطورات حثت على المزيد من الدراسات الرياضية. وتفسر العديد من التبليطات اللادورية الآن على أنها شرائح (القطاعات المخروطية هي شرائح من السطوح المخروطية)

ويمكن تفسير المجموعة التي أسماها بنروز (rohmbs) على إنها شريحة مأخوذة من بلورة مكعب زائدي خماسي الأبعاد.

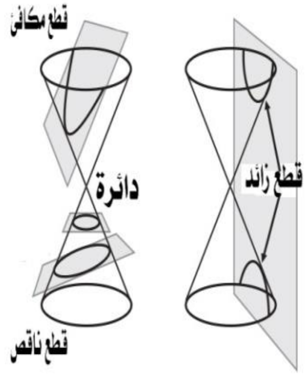
المنحنيات والسطوح CURVES AND SURFACES

المنحنيات Curves

المنحني هو شكل هندسي أحادي الأبعاد وأبسط أمثلته هي تلك الأشكال غير المنحنية على الإطلاق ألا وهي الخطوط المستقيمة وهي الأبسط من الناحية الجبرية أيضاً؛ فالخطوط المستقيمة توصف في الإحداثيات الديكارتية بمعادلات مثل ($x + y + 1 = 0$)، أو($3x - y - 7 = 0$) أو بصفة عامة معادلات على الصورة ($Ax + By + C = 0$) (حيث (A) و(B) و(C) لا تساوي الصفر) وتسمى معادلات كثيرة حدود من الدرجة الأولى.

أما معادلات الدرجة الثانية فتحتوي بالإضافة إلى ذلك على الحدود x^2, y^2 أو (xy)، وهذه المنحنيات التربيعية لها وصف راق حيث توصف بالقطوع المخروطية، ويأتي بعد ذلك المنحنيات المكعبة وهي من الدرجة الثالثة، ومن بينها المنحنيات الإهليلجية التي تلعب دورًا مركزيًا في نظرية الأعداد الحديثة، وهناك منحنيات أخرى مثل حلزون أرشميدس الذي يمكن توصيفه بشكل أفضل في الإحداثيات القطبية.

القطوع المخروطية Conic sections



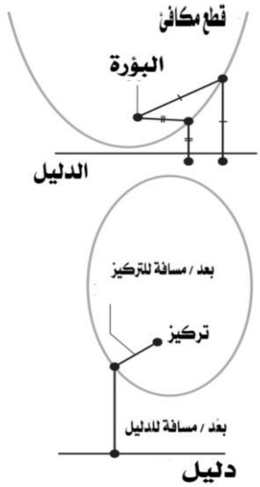
ما المنحنيات التي توصف بمعادلات الدرجة الثانية؟ كان معظم علماء الهندسة الإغريق ولاسيما (أبلونيوس البرغاوي) حوالي 220ق م قادرين على حل هذه المسألة حتى 1800 عام قبل اختراع ديكارت لنظام الإحداثيات الديكارتية، وكان لها حلا ممتازا: أولا نعتبر أن لدينا زوجا من المخاريط اللانهائية متصلين من طرفيهما. القطاعات المخروطية هي المنحنيات التي تنتج عن أخذ شرائح من هذا السطح، وهي تشكل عائلة من المنحنيات تعطى بمعادلات من الدرجة الثانية. أخذ شريحة أفقية ينتج عنه دائرة (وتعطي بالمعادلة $(x^2 + y^2 - 1 = 0)$، أما أخذ شريحة رأسية تمر بالمركز يعطي زوجًا من الخطوط المستقيمة المتقاطعة (يعطى بالمعادلة $(x^2 - y^2 = 0)$ على سبيل المثال).

المنحنيات التربيعية Quadratic curves

الأنواع الرئيسة الثلاثة للقطاعات المخروطية هي: القطوع الناقصة (الإهليلجية)، والقطوع المكافئة، والقطوع الزائدية. أي معادلة من الدرجة الثانية تكون على الصورة $(Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0)$ حيث (A)،(B)،(C)،(D)،(E)،(F) أرقام الرقم $(B^2 - 4AC)$ يحدد نوع المنحنى، فإذا كان صفرًا يكون المنحنى قطعًا مكافئًا (أو في

حالات أخرى قد يكون خط مستقيم، أو مستقيمين متوازيين)، وإذا كان سالبًا فيكون المنحنى قطعًا ناقصًا (أو نقطة منفردة أو لا شيء على الإطلاق)، وإذا كان موجبًا فيكون المنحنى قطعًا زائديًا (أو زوج من الخطوط المستقيمة المتقاطعة).

البؤرة والدليل Focus and directrix



يمكن إنشاء قطاعات مخروطية بطريقة أخرى بالإضافة إلى تقاطع مخروط مع مستوى. اختر نقطة في المستوى وخطا مستقيما لا يمر بها. يطلق على هذه النقطة اسم البؤرة ويطلق على الخط اسم الدليل. لأي نقطة تنتمي إلى المستوى يمكننا السؤال عن بعد هذه النقطة عن البؤرة، وبعدها عن الدليل (يقصد بالبعد دائما أقصر مسافة؛ أي المسافة العمودية)، ما الشكل الذي ستكونه مجموعة النقط التي تبعد نفس المسافة عن البؤرة والدليل؟ الإجابة هي: القطع المكافئ

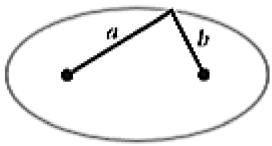
بتغيير السؤال نحصل على منحنيات مختلفة: إذا أردنا أن تكون المسافة بين النقطة والبؤرة نصف المسافة بين النقطة والدليل فسيكون المنحنى الناتج هو القطع الناقص، وإذا أردنا أن تكون هذه المسافة ضعف المسافة بين النقطة والدليل سوف نحصل على قطع زائد.

في كل الإنشاءات السابقة، الكمية المؤثرة هي النسبة بين بعد النقطة عن البؤرة وبعدها عن الدليل، وسنعطي على هذه النسبة الرمز (e)، السمة المميزة للقطوع المخروطية هي أن تكون النسبة (e) ثابتة لأي نقطة على المنحنى ، وهي تسمى الابتعاد المركزي أو الاختلاف المركزي للمنحنى ، فإذا كان ($1 > e > 0$) يكون المنحنى قطعًا ناقصًا ، وإذا كان ($e = 1$) فإنه يكون قطعًا مكافئًا ، أما إذا كان($e > 1$) فهو قطع زائد.

القطوع الناقصة Ellipses

يعرف القطع الناقص على أنه شريحة من مخروط، أو يعرف بطريقة البؤرة/ الدليل. في

الحقيقة، القطع الناقص شكل متماثل وله بؤرتان تقعان في جهتين مختلفتين من المركز، وهاتين البؤرتين توفران طريقة أخرى لتعريف القطع الناقص: لنفرض أن المسافتين بين نقطة ما وبين البؤرتين هما (a)، و(b) فيمكن تعريف القطع الناقص باستخدام الشرط الذي يقول أن (a+b) رقم ثابت دائما.



وهذا يقدم طريقة رائعة لرسم القطع الناقص: اغرس دبوسين في قطعة من الورق مربوطين ببعضهما البعض عن طريق خيط مرتخ، وبتتبع الأماكن التي يكون فيها الخيط مسحوبا نحصل على قطع ناقص.

المحور الرئيسي للقطع الناقص هو أطول قطعة مستقيمة داخله تكون مارة بالبؤرتين والمركز ويصل بين نقطتين من نقاطه، والمحور الثانوي هو العمودي على المحور الرئيسي: أقصر خط مستقيم يمر بالمركز ويصل بين نقطتين على القطع. يمكن حساب الاختلاف المركزي (e) عن طريق قسمة المسافة بين البؤرتين على طول المحور الرئيسي.

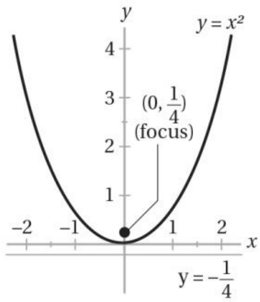
الدائرة حالة خاصة من القطع الناقص حيث تنطبق البؤرتان: قطع ناقص اختلافه المركزي صفر.

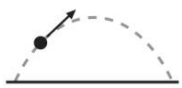
عام 1609 وضع يوهان كيبلر قانونه الأول للحركة الكوكبية (Planetary motion) ويقول إن : مدار أي كوكب هو قطع ناقص إحدى بؤرتيه الشمس.

القطوع المكافئة Parabolas

بخلاف القطع الناقص، القطع المكافئ ليس منحنى مغلق بل له طول لا نهائي. القطع المكافئ هو أحد القطوع المخروطية، ويعرف على أنه شريحة من مخروط مأخوذة على طول مستوى مواز لحافة المخروط، أو بدلا من ذلك يمكن تعريفه على أنه مجموعة من النقط تبعد عن خط ما (الدليل) مسافة تساوي بعدها عن نقطة معينة (البؤرة).

من القطوع المكافئة الشائعة القطع الذي يعطى بالمعادلة ($y = x^2$) (أو المكافئة لها ($x^2 - y = 0$)، وبؤرته هي $\left(0, \frac{1}{4}\right)$، ودليله ($y = -\frac{1}{4}$).

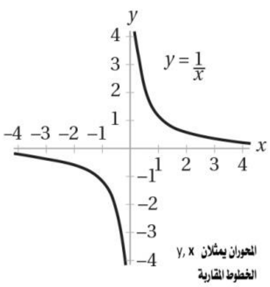




لم تكن فيزياء الحركة مفهومة جيدا خلال العصور الوسطى، فاعتقد الناس أن بصفة عامة عند إطلاق قذيفة مدفعية فإنها تسلك مسارا مستقيما حتى تفقد قوة الدفع وتسقط أرضا إلا أن جاليلو في القرن السابع عشر مزج معرفته الرياضية بمهاراته التجريبية وتحدى هذا الفرض، وأجرى سلسلة من الاختبارات بينت أن المقذوفات تتحرك في مسارات على هيئة قطوع مكافئة (بإهمال تأثير مقاومة الهواء)، ولم يفهم العلماء صحة ذلك إلا بظهور أعمال إسحاق نيوتن.

تفرق وكالة ناسا بين المذنبات الدورية التي لها مدارات قطعية ناقصة (وبالتالي تظهر مجددا كما في حالة المذنب هالي الذي يظهر مرة كل 75 سنة، لكن بعض المذنبات طويلة الدورة تظهر كل 10 ملايين سنة)، والمذنبات أحادية الظهور (Single-apparation comet) التي تتحرك في مدارات قطعية مكافئة أو زائدية والتي لا تمر بالنظام الشمسي إلا مرة واحدة.

القطوع الزائدية Hyperbolas



القطع الزائد هو القطع المخروطي الوحيد الذي له فرعان منفصلان وهو ينتج من أخذ شريحة من نصفي المخروط المزدوج. القطوع الزائدية– مثل أبناء عمومتها: القطوع الناقصة– لها بؤرتان ودليلان، وأيضا تقدم البؤرتان وصفا بديلا. إذا كانت المسافتين بين نقطة على المنحنى والبؤرتين هما (a) و(b)، فإن الرقمين (a-b)، و (b-a) ثابتين لأي نقطة على المنحنى (التبديل بينهما يسمح بنقلنا بين الفرعين)، ولهذا السبب تظهر القطوع الزائدية في أنماط تداخل الموجات. إذا أسقط حصاتين في بركة فستتداخل مجموعتا التموجات الدائرية مكونة عائلة من القطوع الزائدية.

جميع القطوع الزائدية لها خطان تقارب. في حالة أشهر قطع زائد (yx = 1) (الذي يكافئ yx = 1) يكون خطي التقارب هما المحوران (x) و(y).

وبلا شك فإن هذين المحورين متعامدان مما يجعل القطع الزائد قطعًا مستطيلًا(مركز اختلافه دائمًا =($\sqrt{2}$).

خطوط التقارب Asymptotes

الخط التقاربي لمنحنى هو خط مستقيم يقترب منه المنحنى اختياريًا لكننه لا يصل إليه أبدًا. من الأمثلة التقليدية القطع الزائد (yx = 1)، حيث تزداد (x) أكثر و أكثر بينما (y) تقترب إلى الصفر أكثر وأكثر دون أن تصل إليه أبدًا؛ بالتالي يسمى (y=0) خط تقارب للمنحنى، وبالمثل كلما زادت (y) اقتربت (x) للصفر أكثر مما يجعل الخط (x=0) خط تقاربي أيضاً.

ليست كل المنحنيات لها خطوط تقاربية؛ فالقطوع الناقصة، والمكافئة على سبيل المثال ليس لها خطوط تقاربية.

تكعيبات نيوتن Newton's cubics

الأنواع الثلاثة من القطوع المخروطية هي منحنيات توصف بمعادلات تربيعية، أما المنحنيات ذات الدرجات الأعلى فتأتى على هيئة مجموعات متنوعة أكثر كثيرا من ثلاثة، بعضها يمكن التعبير عنه بشكل أفضل في الإحداثيات القطبية.

عام 1710 اهتم إسحاق نيوتن بمنحنيات تعرف بمعادلات تحتوي على الحدود (x^3) (xy^2)(x^2y): المنحنيات التكعيبية، وعلى عكس القطوع المخروطية فإن هذه المنحنيات يمكن أن تقطع بعضها البعض، وبعض المنحنيات التكعيبية تأتي على هيئة جزأين، وبعضها قد يكون له نتوءات: مواضع لا تكون فيها المنحنيات ملساء بل تكون لها نقطة حادة.وقد توصل نيوتن إلى 72 نوعا مختلفا من المنحنيات التكعيبية، ثم توصلت الأبحاث التالية له إلى 6 أنواع إضافية. المنحنيات التكعيبية تندرج بشكل كامل تحت تلك العائلات الثمانية وسبعين.

أكثر المنحنيات التكعيبية أهمية هي المنحنيات الإهليلجية (القطعية الناقصة) التي لازالت تحتل مركزا مهما في علم الرياضيات إلى يومنا هذا، لكن ليس كل منحنى تكعيبي يكون إهليلجيا، لكن نيوتن أوضح أن كل المنحنيات التكعيبية يمكن إنشاؤها عن طريق تقليص أو تمديد منحنى إهليلجي بطريقة مناسبة.

السطوح من الدرجة الثانية Quadric surfaces

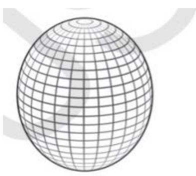
في الفضاء ثنائي الأبعاد، أبسط المنحنيات هي الخطوط المستقيمة (وتعطي بمعادلات خطية)، وتتبعها القطوع المخروطية: المنحنيات الواقعة في المستوى المعرف بمعادلات الدرجة الثانية. بالنظر إلى السطوح في الفضاء ثلاثي الأبعاد نجد أن الصيغ الخطية تعرف المستويات المسطحة، والصيغ التربيعية (الدرجة الثانية) تنتج عائلة من سطوح الدرجة الثانية التي نحصل عليها أساسا من ترقية القطوع المخروطية إلى الأبعاد الثلاثية بطرق مختلفة، وأبسط صور ذلك هي الأسطوانات المكونة من قطوع ناقصة، ومكافئة وزائدية والتي نحصل عليها من إنشاء جدران مستقيمة أعلى هذه المنحنيات، وتكون معادلاتها نفس معادلات المنحنيات الأصلية مصحوبة بالبعد (z) الذي يأخذ أي قيمة.

بعد تدوير ومركزة السطح، نحصل على العديد من سطوح الدرجة الثانية التي توصف بمعادلة على الصورة ($Ax^z + By^z + Cz^z = 1$)، فإذا كانت (A)،و(B)،و(C) قيم موجبة فإن المعادلة تكون معادلة سطح ناقص، أما إذا كانت قيمتان منهما موجبتين وواحدة سالبة فإن المعادلة تكون معادلة سطح زائد ذو طية واحدة،وإذا كانت قيمتان منهما سالبتين وواحدة موجبة فإن المعادلة تكون معادلة مجسم دوراني زائد ذو طيتين، بينما المعادلة ($z = Ax^2 + By^2$) تعرف السطح المكافئ: إهليلجي إذا كانت (A)،و (B) متماثلتين في الإشارة، وزائدي إذا كانتا متعاكستين في الإشارة.

أما الحالات المتبقية فهي المخاريط الإهليلجية (مخاريط لها مقاطع إهليلجية)، وأزواج المستوى.

السطح الناقص Ellipsoid

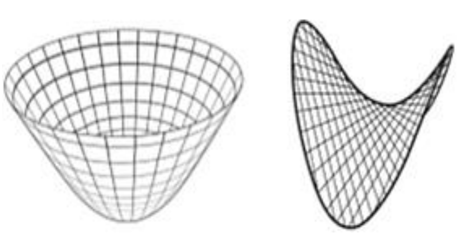
يشبه كرة منبعجة و/ أو ممددة مقاطعها قطوع ناقصة، والحالة الخاصة منه هو السطح الكروي حيث يكون مقاطعه في اتجاه واحد جميعها دوائر، وقد علمنا أن الأرض تقريبا كروية منذ عمل إسحاق نيوتن على الجاذبية الكونية، إلا أن في القرن الثامن عشر دار بعض الجدال حول ما إذا كانت كرة ممدة (كروي متطاول مثل كرة الرجبي أو كرة القدم الأمريكية) كما اعتقد عالم الفلك الفرنسي جيوفاني، وجاسك كاسيني أم كرة منبعجة (كروي مفلطح) كما اعتقد نيوتن نفسه، وأثبتت القياسات فيما بعد أن نيوتن كان على صواب على الرغم من أن الأجرام السماوية الأخرى قد تكون على شكل كروي متطاول وإحداها : الكوكب القزم هاوميا.



توصف السطوح الناقصة بالمعادلة $(Ax^2 + By^2 + Cz^{2=1})$. حيث (A)، (B)، (C) أرقام موجبة إذا كانت (A)و(B)و(C) جميعها قيم مختلفة فسيكون الناتج سطح ناقص مختلف الأطوال، أما إذا تساوى اثنان منهما وليكن (A=B) سوف يكون لدينا سطح كروي (مفلطح إذا كان (C > A)، ومتطاول إذا كان (C > A).. أما إذا كانت (A)=(B)=(C) فيكون الشكل كرة.

السطوح المكافئة Paraboloids

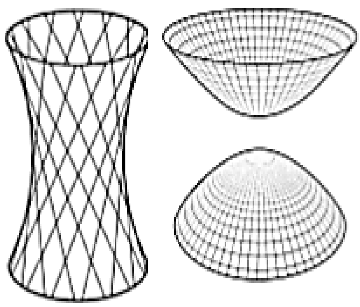
منها نوعان: سطوح مكافئة إهليلجية وهي على شكل كؤوس مكافئة مقاطعها إهليلجية، إذا كانت هذه القطوع الإهليلجية دوائر فسيكون الناتج سطح مكافئ دائري، وهو واسع الاستخدام في مجال الاتصالات في تصميات أطباق الأقمار الصناعية، والتليسكوبات الراديوية؛ حيث أن لها خاصية مفيدة وهي أن جميع الأشعة العمودية على القاعدة تنعكس مباشرة إلى البؤرة، وبعكس



هذه العملية، نجد أن السطوح المكافئة الدائرية تستخدم أيضاً كعواكس في إضاءة المسارح، والإضاءة التجارية، فعند وضح مصباح في البؤرة يعكس السطح المكافئ الضوء على هيئة أشعة متوازية.

الشكل الثاني هو السطح الكافئ الزائدي على شكل سرج الحصان، يشبه رقائق برنغل الشهيرة، كما أنها تستخدم في التسقيف في فن العمارة الحديثة، ويوصف السطح المكافئ الزائدي الأصلي بالمعادلة ($z=xy$).

السطوح الزائدية Hyperboloids

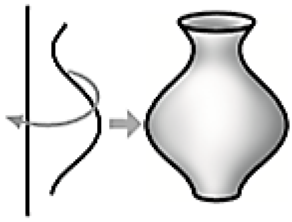


السطح الزائدي اسم يطلق على نوعين من السطوح: ذو الطية الواحدة، وذو الطيتين. السطح الزائدي ذو الطيتين يشبه سطحين زائديين إهليلجيين مواجهين لبعضهما البعض وبينهما فجوة (على الرغم من أن هذا ليس هو الوصف الدقيق، فالإنحناء مختلف قليلا). أما ذو الطية الواحدة فهو مشهور بأنه يشبه أبراج التبريد، وبأخذ شرائح رأسية من كلا النوعين ينتج قطوع زائدة، أما مقاطعها الأفقية فهي قطوع ناقصة.

معظم التطبيقات تتضمن وجود السطوح الزائدة الدورانية ذات الطية الواحدة حيث تكون القطوع الناقصة دوائر. (غالبا يفهم مصطلح سطح زائدي على أنه اختصار للسطح الزائدي الدوراني ذي الطية الواحدة). وبما أن هذه السطوح سطوح مسطرة فبالتالي يمكن إنشاؤها بسهولة. خذ حلقتين دائريتين متطابقتين ووصل النقط المتناظرة عن طريق أسلاك يؤدي شدها إلى تكوين إسطوانة، أما ليها يؤدي إلى تكون سطح زائدي، وبما أن السطح مزدوج التسطر فإن هناك مجموعتان من الأسلاك يمكن جعلها مستقيمة آنيا، ولأن هذه السطوح يمكن إنشاؤها من أشعة مستقيمة فقد اشتهرت في الفنون والعمارة منذ قام فلاديمير شوكهوف ببناء برج مائي على سطح زائد عام 1896م.

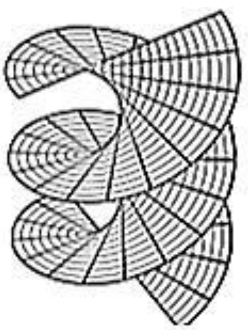
السطوح الدورانية Surfaces of revolution

هناك طريقة لطيفة تستخدم لبناء سطوح دورانية ثنائية الأبعاد من المنحنيات أحادية البعد، وهي التدوير. لنبدأ بالدائرة، ارسم خطا مستقيما يمر بمركز الدائرة كقطر لها. أثناء دوران هذه الدائرة حول هذا المحور في الأبعاد الثلاثة فإنها تمسح سطحا، تحديدا هو الكرة، وهذه الخدعة صالحة لأي منحنى على الرغم من أن السطح الناتج لا يعتمد فقط على اختيار المنحنى بل على موضع المحور؛ فتدوير دائرة حول محور لا يمر بها على سبيل المثال ينتج طارة.



تدوير خط مستقيم حول محور موازي ينتج أسطوانة دائرية، أما إذا كان الخطان غير متوازيين ينتج المخروط المزدوج الذي يضم القطوع المخروطية. أما إذا بدأنا بخطين متخالفين (ليسا متوازيين أو متقاطعين) في الفضاء ثلاثي الأبعاد سيكون السطح الممسوح هو السطح الزائد الدائري ذو الطية الواحدة. وتدوير قطع ناقص حول أحد محوريه ينتج عنه سطح كروي، بينما تدوير القطع المكافئ يعطي سطح مكافئ دائري، والقطع الزائد يعطي سطح زائد دائري. والمزيد من المنحنيات المعقدة تعطي سطوح دورانية جميلة للغاية، وطالما استخدم صانعو الفخار والنحاتون هذه الحقيقة.

السطوح المسطرة Ruled surfaces

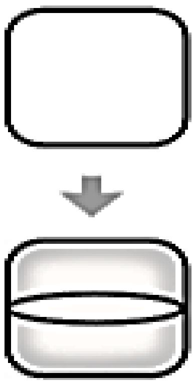


ينشأ المستوى بالكامل من خطوط مستقيمة: الخطوط المستقيمة على السطح تغطيه بالكامل. والمثير للدهشة أكثر من ذلك هو أن هناك مستويات تبدو أكثر انحناء وتحمل نفس الخاصية. الأسطوانات تنشأ فقط عن طريق بناء حوائط مستقيمة بمحاذاة مسارات منحنية. والمخاريط أيضاً سطوح مسطرة، ومن الأمثلة المشهورة أيضاً السطح الحلزوني الذي يتكون عن طريق سطح مستقيم يدور بشكل حلزوني على طول محور رأسي لأسفل ، وهو يذكرنا بالرصيف المنحدر الموجود في موقف السيارات متعدد الطوابق (الجراج).

هناك ثلاثة أسطح مزدوجة التسطير حيث تقع كل نقطة على خطين مستقيمين وهي: المستوى، السطح الزائد الدوراني ذو الطية الواحدة، والسطح المكافئ الزائدي.

السطوح ذات الأبعاد الأعلى Surfaces of higher degree

السطوح التربيعية تعطى بكثيرات حدود من الدرجة الثانية، فإذا قام بزيادة الدرجة، فسنحصل على ثروة من السطوح الأكثر تعقيدا، ومن أمثلة ذلك السطح على شكل جرس، (ding-dong surface) وهو سطح مكعبي الذي نحصل عليه كسطح دوراني لمنحنى تكعيبي قاطع لنفسه.

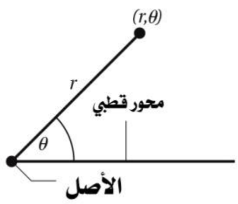


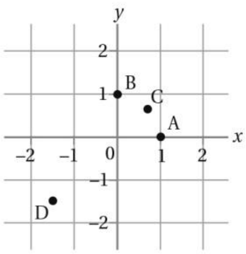
ومن تصنيفات السطوح المثيرة السطوح التربيعية الفائقة (superquadrics)، وهي تحاكي السطوح من الدرجة الثانية، باستبدال حدود من رتب أعلى بالحد (x^2). على سبيل المثال السطح الكروي هو سطح دوراني للقطع الناقص، ومعادلة القطع الناقص هي ($\left|\frac{x}{a}\right|^2 + \left|\frac{y}{b}\right|^2 = 1$)، وبوضع حدود من درجات أعلى (n) محل حدود الدرجة الثانية نحصل على قطع ناقص فائق يعطى بالمعادلة ($\left|\frac{x}{a}\right|^n + \left|\frac{y}{b}\right|^n = 1$) (إذا كانت (a)=(b) فسنحصل على دائرة تربيعية (squircle))، وهي لا تمت لمسألة تربيع الدائرة القديمة بصلة). المثال الموضح في الشكل معادلته ($|x|^7 + |y|^7 = 1$)، وإذا أخذنا السطح الدوراني له سنحصل على بيضاوي فائق (superegg). والخاصية المثيرة في هذا الشكل أن مقدر انحناء أطرافه يساوي صفر؛ لذلك يمكنه أن يقف معتدلا تماما على عكس السطح الدائري، وقد استغل عالم الرياضيات والنحات بت هين هذه الحقيقة.

الإحداثيات القطبية POLAR COORDINATES

الإحداثيات القطبية Polar coordinates

يحدد نظام الإحداثيات الديكارتية موضع نقطة على المستوى من خلال المسافة بينها وبين زوج من المحاور المتعامدة، وبديل هذا النظام هو نظام الإحداثيات القطبية، وهو يعرف بمعلومتين أيضاً: مسافة وزاوية ، ويرمز لهما بـ (r) و (θ) على الترتيب. المسافة تحدد بعد النقطة عن نقطة الأصل، وبالتالي من الرسم نجد أن كل من (A) و (B) (اللتان إحداثياتهما الديكارتية (1,0) و (0,1) على الترتيب) تبعد عن نقطة الأصل وحدة واحدة ، وكذلك النقطة (C) إحداثياتها الديكارتية $(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ (وهذا يستنتج من مبرهنة فيثاغورث $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$)





إذا المسافة وحدها لا تصلح للتمييز بين النقط في الإحداثيات القطبية، لذلك نذكر أيضاً الزاوية التي تصنعها النقطة عند نقطة الأصل مقاسة من المحور القطبي، وهو الخط الأفقي الذي يبدأ من نقطة الأصل ويمتد يمينا (هو الجزء الموجب من محور (X) في الإحداثيات الديكارتية) بالتالي فإن النقطة (A) التي تقع على هذا الخط قياس زاويتها صفر. في علم الرياضيات تكون الزاوية الموجبة دائما في اتجاه عكس عقارب الساعة؛ لذلك فإن النقطة (C) لها زاوية قياسها 45°، و(B) لها زاوية قياسها(90°).

إلا أننا عادة نقيس الزاوية بالقياس الدائري: لذلك - بكتابة المسافة قبل الزاوية- فإن الإحداثيات القطبية للنقط: (A) و (B) و(C) هي

$$(1,0),\left(1,\frac{\pi}{2}\right),\text{and }\left(1,\frac{\pi}{4}\right)$$

النقطة (D) تقع على بعد وحدتين من نقطة الأصل بزاوية قياسها 270 درجة؛ لذلك تكون إحداثياتها القطبية $(2,\frac{2\pi}{2})$.

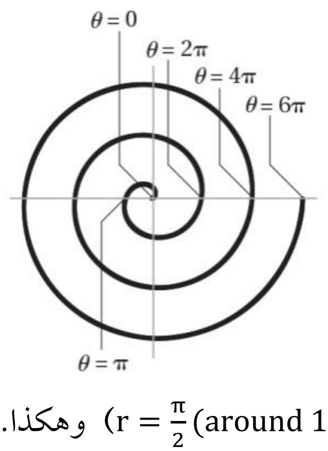
الهندسة القطبية Polar geometry

الإحداثيات القطبية والديكارتية لغتان مختلفتان للتحدث عن نفس الأجسام، فما يقال في واحدة يمكن ترجمته إلى الأخرى، إلا أن الإحداثيات القطبية تصف بعض الأشكال الهندسية في المستوى بكفاءة أكثر، على سبيل المثال: الدائرة التي نصف قطرها 1 لها صيغة بسيطة هي (r=1) وهذه الصيغة تصف مجموعة النقط (1,0) التي تبعد كل منها مسافة الوحدة عن نقطة الأصل، ومن ناحية أخرى فإن تثبيت الزاوية ولتكن ($\frac{\pi}{4}$)، والسماح بتغيير (r) ينتج عنه خط مستقيم بقيمة هذه الزاوية عن المحور الأفقي، وهو مايوصف بالمعادلة ($0 = \frac{\pi}{4}$).

من الأمثلة الأخرى للأشكال التي توصف وصفا جيدا في الإحداثيات القطبية: حلزونات أرشميدس، والحلزونات اللوغارتمية والدويريات.

الإحداثيات القطبية مهيمنة في تحليل الأعداد المركبة: فجميع الأعداد المركبة (z) تأتي مصحوبة بمسافة (r) (مقدار العدد المركب) وزاوية (e) إزاحته الزاوية، وهما مرتبطان معا في الصيغة ($z = re^{10}$).

حلزونات أرشميدس Archimedean spirals



الإحداثيات القطبية مثالية تماما لوصف الأشكال الحلزونية التي تكون فيها بعد النقطة عن نقطة الأصل يعتمد على إحدى خواص الدوران، وأبسط هذه الحالات هي حلزون أرشميدس الذي يعطى بالمعادلة ($r = 0$)، وهو يتكون من كل النقط التي يتساوى فيها كل من الإحداثيين القطبيين: تلك التي على الشكل (0,0). عندما ($0 = \frac{\pi}{4}$ (that is 45°)) يكون الطول ($\frac{\pi}{4}$) أيضاً (حوالي (0.8))، عندما ($0 = \frac{\pi}{2}$ (or 90°)) ، يكون الطول ($r = \frac{\pi}{2}$ (around 1.6)) وهكذا. وبمجرد أن تصبح (2π) يكون الحلزون قد أكمل لفة كاملة ويعبر المحور القطبي، لكن

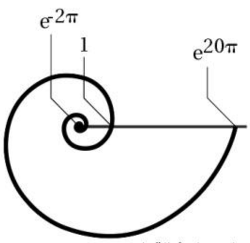
لايزال يمكننا رسم قيم أكبر لـ (0) حتى تعبر المحور مرة أخرى عند ($4\pi(720°$)، ومرةأخرى عند (6π)،و (8π)،و (10π) وهكذا.

يمكن جعل الحلزون يتمدد أو ينكمش بتمضين ثابت ضربي: ($r = 20$) تحدد تشتت ضعف التشتت السابق، و ($r = \frac{1}{2\pi}0$) تصف حلزون يعبر المحور عند القيم (0,1,2,3,...). السمة المحددة لهذه الحلزونات (على عكس الحلزونات الزائدية أو اللوغارتمية) أنها اللفات المتتابعة تبعد عن بعضها مسافات متساوية (مثل الأخاديد على شريط من الفينيل).

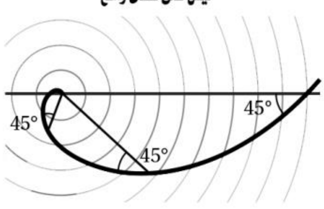
حلزون باركر هو حلزون أرشميدي تكونه المجالات المغناطيسية للشمس ويتغلغل في الفضاء.

الحلزونات اللوغاريتمية Logarithmic spirals

الشكل الذي أطلق عليه جيكوب بيرنولي اسم Spiral Mirabilis ('the miraculous spiral') (الحلزون المعجزة) معادلته في الإحداثيات القطبية (($r = e^0$)، يكافئها $0 =$ (in r) بدءًا من $1 = 0 = 0, e^0$ يقطع المنحنى المحور القطبي عند 1، ويقطعه مرة أخرى عند ($e^{2\pi(\text{around } 535.5}$)، وعند ($e^{4\pi}(\text{around } 586751.3$) وهكذا. وأيضًا هناك معنى لأن تنعكس الحركة الحلزونية وذلك بإعطاء الزاوية قيم سالبة، وبالتالي يقطع المحور أيضاً عند ($e^{2\pi}(\text{about } 0.002$)، و($e^{-4\pi}(\text{around } 0.000003$) أحيانًا كثيرة بشكل غير منته حيث يقترب أكثر من نقطة الأصل(على الرغم من أنه على عكس الحلزون الزائدي، حيث تقل المسافات بسرعة لدرجة أن الطول بمحاذاة المنحنى من أى نقطة إلى نقطة الأصل يصبح نهائيًّا).



ليس على نطاق واسع



لقد ذهل جيكوب بيرنولي من التشابه الذاتي

الذي يشبه الكسريات الموجود في الحلزون اللوغاريتمي: فإذا قمت بتكبيره أو تقليصه بعامل ($e^{2\pi}$) فسينتج نفس المنحنى تمامًا، بل علاوة على ذلك أنك إذا أخذت معكوس الحلزون (الذي يعطى بالمعادلة $r = e^{-0}$) فستكون النتيجة نفسها أيضاً. لقد كان بيرنولي مفتونًا بهذا المنحنى إلى الحد الذي جعله يوصي بنقشه على قبره. (لكن من المؤسف أن النحات لم يكن عالم هندسة فنقش حلزون أرشميدس بدلا منه).

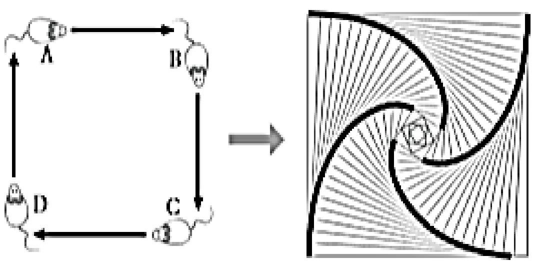
يعرف الحلزون اللوغاريتمي أيضاً باسم الحلزون متساوي الزوايا؛ لأن من ضمن الخواص المحددة له: أن الزاوية بين المماس له ونصف قطره ثابتة وقياسها ($\frac{\pi}{4}$) (أي 45 درجة).

تعطى حلزونات لوغاريتمية بزوايا مختلفة بالمعادلة($r = e^{co}$) و لقيم مختلفة من (c) تنتج زاوية مختلفة ($\tan^{-1}\left(\frac{1}{c}\right)$).

الحلزونات اللوغاريتمية وتقريباتها مثل حلزونات فيبوناتشي شائعة في الطبيعة بدءا من المجرات الحلزونية والتكوينات السحابية، وحتى أصداف حيوان النوتر البحار.

مسألة الفئران الأربعة The problem of the four mice

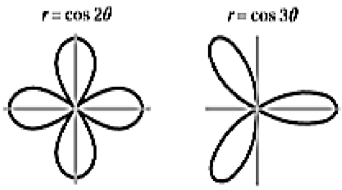
عام 1871 وضع عالم الفلك والرياضيات روبرت كالي ميلر مسألة صعبة في امتحان الحصول على درجة الشرف في علم الرياضيات بجماعة كامبردج الذي عرف عنه سوء السمعة لقد تضمن أربعة فئران (A)، و(B)، و(C)، و(D) تبدأ من الأركان الأربعة لغرفة مربعة الشكل، ويطلق سراحها في نفس الوقت وتركض جميعها بنفس السرعة بحيث يطارد الفأر A الفأر B، يطارد الفأر B الفأر C ، يطارد الفأر C الفأر D، ويطارد الفأر D الفأر A وكان المطلوب في المسألة التنبؤ بالمسار الذي تسلكه هذه الفئران.



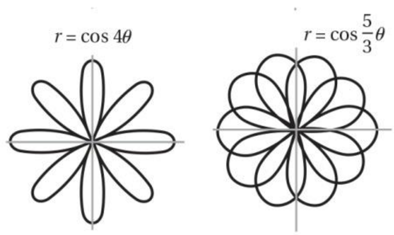
مبدئيا، يركض كل فأر بمحاذاة الحائط، لكن بما أن هدفه يتحرك أيضاً، فسينحرف

عن ذلك المسار. الإجابة هي أن مساراتهم سوف تنتج شكل أربعة حلزونات لوغاريتمية متشابكة تتقارب عند مركز الغرفة، يمكن تعميم ذلك على الغرف مضلعة الشكل. عام 1880 وضع بيير بروكارد في الاعتبار ثلاثة فئران في غرفة على شكل مثلث غير منتظم، فتلاقت الحلزونات الثلاثة في نقطة بروكارد الأولى أو الثانية في المثلث على حسب اتجاه الفئران (انظر مراكز المثلثات).

الزهور Roses



ما الذي قد يجعل عالم رياضيات مؤمن بالخرافات يعتقد أن المعادلة (r = cos 20) سعيدة الحظ؟ في الإحداثيات القطبية تصف هذه المعادلة زهرة برسيم ذات أربع ورقات: رباعية الورقة (quadrifolium)، وهي إحدى أفراد عائلة منحنيات الزهور التي تعطى بالمعادلات (r = cos k0 (or r = sin k0) لقيم مختلفة من (K).



درس هذه المنحنيات لأول مرة الكاهن الإيطالي ليجو جيدو جراندي في مطلع القرن الثامن عشر. ويعتمد المنحنى على الرقم (K): فإذا كان فرديا فسيكون للوردة عدد من البتلات يساوي (K)، بالتالي فإن المعادلة (r = cos 30) تصف زهرة ذات ثلاث بتلات أو ثلاثية الورقة (trifolium)، وإذا كان زوجيّا فسيكون للوردة ليس عدد (K) من البتلات بل ضعف (K)، وفي هذه المرة تتداخل البتلات. وإذا كان (K) عددا نسبيّا وليكن ($k = \frac{a}{b}$) حيث (a) و(b) في أبسط صورة فسيكون لدينا أيضاً حالتان: (a) و(b) كلاهما فردي فسيكون للزهرة عدد بتلات يساوي (a) وسيكرر النمط نفسه عندما تصل (bπ) إلى القيمة (فترة (bπ) وإلا فسيكون للزهرة عدد بتلات (2a) وفترة (2bπ). أما إذا كان (k) غير نسبي مثل ($k = \sqrt{2}$) فإن الزهرة لا تكرر نفسها أبدا ويكون لها عدد لا نهائي من البتلات.

مسألة الوقت الموحد The tautochrone problem

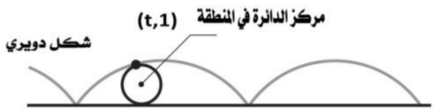
عام 1659 كان كريستيان هوجينز يدرس الخرزات المنزلقة على المنحدرات. بفرض عدم وجود قوى احتكاك، اكتشف منحنى بارز يتميز بأنه (tautochronous) أي "موحد الزمن" فليس مهم الارتفاع الذي يضع عليه الخرز في البداية، فدائما يستغرق نفس الزمن لينحدر إلى القاع، لقد كان المنحنى الذي اكتشفه هوجينز هو الدويري. إذا رسمت نقطة على إطار دراجة فسيكون الدويري هو المسار الذي تسلكه النقطة أثناء سيرك بالدراجة مع اختلاف أن الدويري موحد الزمن يكون مقلوبا كما لو كنت تقود دراجتك نحو السقف

مسألة أقصر وقت The brachistochrone problem

عام 1696 وضع يوهان بيرنولي تحديا لقراء المجلة العلمية (Acta Eruditorum). لنفرض أن لدينا نقطتين (A)، و(B) حيث (A) أعلى من (B) (لكنها ليست فوقها رأسيا) الفكرة هي أن ترسم منحنى من (A) إلى (B) وتسمح لخرزة بالانزلاق عليه. ما المنحنى الذي يجب رسمه إذا كنا نريد للخرزة أن تصل إلى (B) في أقصر وقت ممكن؟ هذه هي مسألة أقصر زمن.

تمكن العديد من علماء الرياضيات من تقديم إجابة لهذا السؤال بما فيهم: نيوتن، وليبنيز، وبرنولي نفسه، بالإضافة إلى أخيه جيكوب. كانت الإجابة هي نفسها إجابة مسألة الوقت الموحد: المنحنى هو الدويري.

الدويريات Cycloids



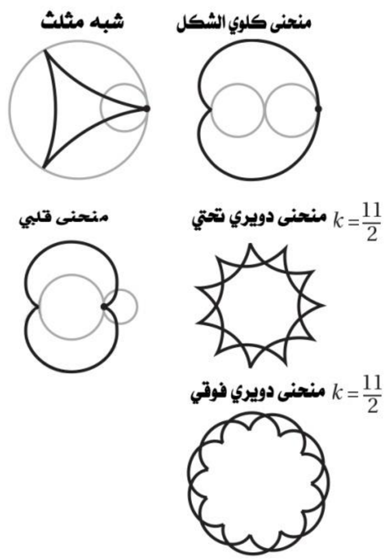
ارسم خطا أفقيا ودحرج دائرة على طول هذا الخط. إذا حددت نقطة على الدائرة، فإن المنحنى المار بها هو الدويري، وهو الشكل المشهور في مسألتي الزمن الموحد، وأقصر زمن، ويوصف في الإحداثيات الديكارتية بالمعادلات الحدودية.

$$x = t - \sin t$$
$$y = 1 - \cos t$$

بزيادة (t) يتحرك مركز الدوائر أفقيّا على طول الخط (y=1)، بالتالي عند زمن (t) يكون المركز عند (t,1) ويكون المنحنى متحركا. الدويريات الزائدية والناقصة تشبه ذلك مع استبدال دوائر بالخط الأفقي.

الدويريات الزائدية والناقصة Hypocycloids and epicycloids

إذا دارت دائرة صغيرة داخل أخرى كبيرة يمكننا تحديد نقطة على الدائرة الصغيرة ونتتبع مسارها، وسيكون المنحنى الناتج دويريّا زائدا. إذا كان طول نصف قطر الدائرة الخارجية ضعف الداخلية، فإن ذلك يسمى ازدواجا طوسيّا؛ حيث أدرك ناصر الدين الطوسي في القرن الثالث عشر أن هذا الدويري الزائد ليس إلا قطعة مستقيمة. أما إذا كان نصف قطر الدائرة الكبيرة ثلاثة أضعاف الصغيرة نحصل على منحنى به أربعة نتوءات (أركان حادة)، وهكذا.

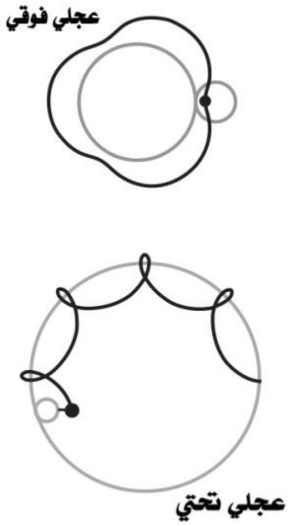


الإنشاء المشابه هو الدويري المكافئ عندما تدور دائرة حول أخرى من الخارج. من الدويريات المكافئة الملاحظة الدويري الذي تكون فيه الدائرتان من نفس الحجم، في هذه الحالة يكون الناتج هو الشكل القلبي (cardioid)، أما إذا كان طول نصف قطر الدائرة الخارجية نصف الداخلية فإن الناتج (nephroid) (شكل الكلية).

بالنسبة لهذين الشكلين، فالأساس هو معرفة النسبة بين نصف قطر الدائرة الكبيرة إلى نصف قطر الدائرة الصغيرة ولتكن هذه النسبة (k)، إذا كانت (k) عددا صحيحا نحصل على منحنى به عدد (k) من النتوءات، أما إذا كان نسبيا وليكن ($k = \frac{a}{b}$) حيث

(a)، و(b) في أبسط صورة سيتقاطع المنحنى مع نفسه ويكون له عدد a) من النتوءات، أما إذا كان (K) غير نسبي، فإن المنحنى لا يتقارب أبدا، وستنتج فوضى خلاقة.

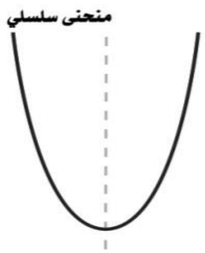
العجلات الدوارة Roulettes



(The spirograph) هي لعبة رياضية اخترعها ديني فيشر في الستينيات لرسم أشكال جميلة وصعبة، ربما تستحوذ هذه اللعبة علماء الهندسة أكثر من الأطفال، وهي تعتمد على مبدأ يشبه مبدأ الدويريات اهتمام، والدويريات الزائدية والدويرات الناقصة: قرص صغير من البلاستيك يلف حول خط، أو دائرة ثابتة أكبر منه، والاختلاف يكون في موضع القلم (بدلا من أن يكون على محيط الدائرة الأصغر، يمكنه أن يناسب ثقبا صغيرا على القرص)، وتسمى المنحنيات الناتجة (trochoids)، و (hypotrochoids) و (epitrochoids) (مشتقة من الكلمة الإغريقية (trochos) التي تعني عجلة)

يمكن توسيع الفكرة بحيث نسمح لسن القلم أن يكون خارج القرص الأصغر على بعد مسافة معينة من المركز (كما يكون عود ثقاب ملتصقا بالقرص).

العجلات الدوارة (Roulettes) هي أعم تلك المنحنيات التي ترسم بهذه الطريقة حيث نحصل عليها بإرفاق نقطة بمنحنى(ليس ضروريا أن تكون واقعة على المنحنى) وتدوير هذا المنحنى حول آخر وتتبع مسار النقطة، على سبيل المثال: تدوير قطع مكافئ حول خط مستقيم وتتبع مسار بؤرته ينتج تسلسلا (سلسال).



السلسال Catenary

ثبت طرفي سلسلة في حائط واسمح بتدلي السلسلة بين طرفيها، ما المنحنى الناتج؟ هذا هو السؤال الذي طرحه

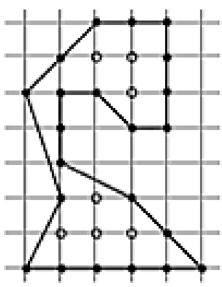
جيكوب برنولي في المجلة العلمية (Acta Eruditorum) عام 1690م (إننا نفترض أن السلسلة مرنة تماما وكثافتها زوجية) وقد سبق أن درس جاليليو ذلك عام 1638، وقال إن المنحنى الناتج هو قطع مكافئ لكنه كان مخطئا كما وضح جوكيم جونجيس عام 1669.

وقد تلقى بيرنولي ثلاث إجابات صحيحة من: جوتفريد ليبنيز، وكريستيان هوجينز، وأخيه يوهان بيرنولي، وكانت نتائجهم ضمن الانتصارات المبكرة التي حققها التحليل التفاضلي. المنحنى الذي يجيب عن هذا السؤال هو السلسال (منحنى السلسلة) الذي يعطى بالمعادلة ($y = \frac{e^x+e^x}{2}$) أو بشكل أدق ($y = \cosh x$)حيث (soch) هي دالة جيب التمام الزائدية.

الهندسة المتقطعة DISCRETE GEOMETRY

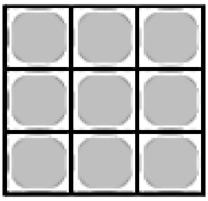
مبرهنة بيك Pick's theorem

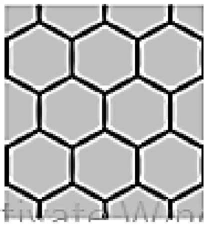
هناك العديد من الطرق لحساب مساحة شكل ما في المستوى. وبصفة عامة كلما ازدادت تعقيد الشكل، ازداد تعقيد الصيغة المستخدمة في حساب مساحته. وقد وجد عالم الرياضيات الاسترالي جورج بيك عام 1899 طريقة أنيقة لحساب المساحات.



ارسم شبكة من النقط بوضع نقطة عند جميع نقاط المستوى التي كلا إحداثييها رقم صحيح. تصلح طريقة بيك لأي شكل يمكن تكوينه عن طريق توصيل هذه النقط معا بخطوط مستقيمة. هناك فقط مكونان: عدد النقط المكونة لحدود الشكل، ولتكن (A)، وعدد النقط المحوطة به وليكن (B). تقول مبرهنة بيك أن المساحة تساوي ($\frac{A}{2} + B - 1$). في المثال الذي في الصورة ($A = 22$)، و(B=7) لذلك تكون المساحة $17 = 1 - 7 + \frac{22}{2}$. وهذا يوفر وسيلة سريعة لحساب مساحات الأشكال المعقدة التي قد تضمن بطريقة أخرى تقسيم الشكل إلى مثلثات، وهي طريقة فيها شيء من الإسهاب.

التعبئة الدائرية لثو Thue's circle packing





لنفرض أن لديك منضدة وحقيبة من العملات المعدنية، وأنك أمام تحدي بأن تقوم برص أكبر عدد ممكن من العملات على هذه المنضدة علما بأن جميعها لها نفس الحجم، ولا يمكن رصها فوق بعضها البعض، لا يمكن سوى أن ترص بشكل مستو على المنضدة، ما هي الاستراتيجية المثلى لعمل ذلك؟

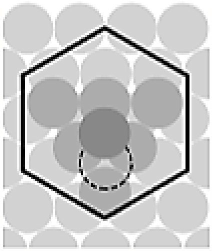
هناك احتمالان واضحان: التعبئة المربعة حيث ترص العملات في صفوف وأعمدة، وكل عملة تمس أربع عملات أخريات. والتعبئة السداسية حيث تمس كل عملة ست عملات أخريات (تؤدي إلى صفوف متداخلة).

للمقارنة بين هذين الأسلوبين نستخدم ما يسمى كثافة التعبئة: نسبة المساحة المغطاة بالعملات من المنضدة. كثافة التعبئة للبلورة المربعة تساوي ($\frac{\pi}{4}$) (حوالي 79٪) وللبلورة السداسية ($\frac{\pi}{\sqrt{12}}$) (حوالي 91٪)، لذلك يبدو الأمر كما لو كانت التعبئة السداسية هي الأفضل، لكن هل نحن متأكدون أننا لم ننس طريقة أخرى تحقق ترتيبا أفضل؟

عام 1831 أثبت كارل فريدريك جاوس أن التعبئة السداسية هي الأكثر إحكاما من بين أنواع التعبئة المنتظمة وهي تلك التعبئات المتماثلة التي تكون على شكل بلورات: أنماط لها تماثل إنتقالي مزدوج، لكن هل من الممكن لبعض الترتيبات الغريبة غير المنتظمة أن تكون أفضل؟ عام 1890 أثبت أكسل ثو أخيرا أنه ليس هناك ترتيبات كهذه. مبرهنة التعبئة الدائرية لثو هي النظير ثنائي الأبعاد لحدسية كيبلر.

حدسية كيبلر (مبرهنة هيل الأولى) The Kepler conjecture (Hales' theorem 1)

عام 1661 تصور يوهان كيبلر نسخة ثلاثية الأبعاد من مبرهنة التعبئة الدائرية لثو: ما هي أفضل طريقة لتعبئة كرات فوق بعضها البعض بحيث تشغل أقل حجم ممكن من الفضاء؟ يمكن لبائعو الفاكهة حول العالم تقديم إجابة لهذا السؤال: أولا إذا قمت برص



طبقة واحدة من الكرات مرتبة بالطريقة السداسية استنادا لتعبئة ثو الدائرية، ثم وضعت طبقة أخرى فوقها بشكل متدرج بحيث تكون الكرات موضوعة في أكثر النقط الممكنة انخفاضا، ثم كرر ذلك.

أكد كيبلر فيما يعرف بحدسية كيبلر أن هذه هو أكثر الترتيبات الممكنة إحكاما بحيث أنه ليس هناك ترتيبات أخرى بنفس الحجم يمكن فيها تعبئة كرات أكثر. لكن بالنظر إلى الأمر بشكل أعمق نجد أن هذا الحل ليس وحيدا: هناك اختياران اعتمادا على ما إذا كنت وضعت الثالثة فوق الأولى مباشرة (التعبئة السداسية) أو بشكل متدرج (تعبئة المكعب متمركز الوجه) على الرغم من أن كلتا الطريقتين لها نفس كثافة التعبئة ($\frac{\pi}{\sqrt{18}}$) (حوالي 74٪).

من ناحية الحدس يبدو واضحا وضوحا كافيا أن هذه الحلول هي الحلول المثلى، إلا أنه قبل عام 1900 لم يكن قد تم التوصل إلى برهان بعد، وألقى ديفيد هيلبرت الضوء على هذا التحدي في مسألته الثامنة عشرة. ولم يحدث قبل عام 1998 أن تم إثبات ذلك، وكان ذلك على يد توماس هيل وتلميذه المتخرج صمويل فيرجوسون، على الرغم من أن هذا البرهان امتد في 250 صفحة، واعتمد في أجزاء كثيرة منه على أكواد كمبيوتر، وبيانات تصل إلى أكثر من 3 جيجابايت، والتي شكلت صعوبة بالغة في فحصها؛ فقد ترك الفريق الذي كان منوطا بمراجعة البرهان بعد أربع سنوات من العمل مصرحين بأنهم على الرغم من تأكدهم بنسبة 99٪ أن البرهان صحيح لا يمكنهم التصديق على ذلك. أما الآن فيعمل هيلز على جيل ثان من البرهان ينوي أن يتحقق من صحته باستخدام البرامج التي تفحص صحة البراهين.

تعبئة الكرات في الأبعاد العليا Hypersphere packing

حلت حدسية كيبلر عام 1998 (على الأقل بنسبة تأكيد 99٪)، لكن نفس المسألة في الأبعاد الأعلى لازالت مفتوحة. فلم يتم التأكد حتى من أن التعبئة الأقرب الكرات في الأبعاد العليا تعطي بلورات منتظمة أكثر من الترتيبات الأقل تماثلا. التعبئة المنتظمة على الأقل يمكن فهمها جيدا حتى البعد الثامن. على الرغم من أننا لا نعرف أفضل طريقة لتعبئة

الكرات في الأبعاد، العليا إلا أنه بفضل مبرهنة مينكوسكي – هلاوكا؛ إذ لدينا فكرة عن كثافة التعبئة التي ستنتج عنها، فهي تحدد التعبئة المثلى في البعد (n)، وستحقق دائما كثافة على الأقل $(\frac{\xi(n)}{2^{n-1}})$ حيث (ξ) هي دالة ريمان – زيتا.

في البُعد الـ 24، يحدث شيئا ملفتا، تظهر طريقة جديدة كليا لتعبئة الكرات تعرف باسم بلورات ليتش نسبة إلى مكتشفها عام 1965. ليس من المؤكد تماما أن هذه هي الطريقة المثلى للتعبئة، إلا أن كلا من هنري كون، وآبرياف كومار عام 2004 وضحا أنه إذا كان من الممكن لأي ترتيب آخر أن يحسن من هذه الطريقة فسيكون ذلك بنسبة ضئيلة، حيث ستزيد كثافة التعبئة فقط (2×10^{-30}) على الأكثر.

حدسية أقراص العسل السداسية (مبرهنة هيلز الثانية)

Hexagonal honeycomb conjecture (Hales theorem 2)

لنفرض أنك تود تقسيم صحيفة كبيرة من الورق إلى خلايا مساحة كل منها 1 سم مربع باستخدام أقل كمية حبر ممكنة لرسم الخطوط. ربما ستكون المحاولة الأولى هي رسم مربعات 1×1 لكن هناك إمكانيات أخرى: مستطيلات، أو مثلثات التبليط، أو مضلعات خماسية غير منتظمة، أو تبليط هيسش أو أي تبليط يستخدم بلاطة واحدة.

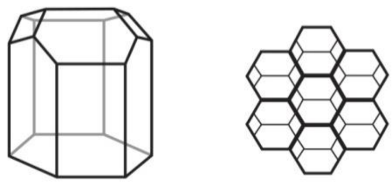
كان من المعتقد لسنوات عديدة أن الطريقة التي تتضمن أقل طول كلي ممكن من الخطوط هي البلورة السداسية، وفي واقع الأمر كان ذلك يعتبر أحيانا بمثابة حقيقة مفترضة ضمنيا على الرغم من أن أحدا لم يثبتها. في عام 1999 قدم توماس هيلز برهانا: نمط المضلع السداسي هو حقا أكثر الأنماط كفاءة، وهذا ما يفسر سبب تخزين النحل للعسل في أنابيب سداسية بدلا من المربعة أو التي مقطاعها على شكل بلاطة هيستش على سبيل المثال.

هذه الخلايا تتطلب أقل كمية شمع من أي أنظمة أخرى لها تبليط مطابق بالنسبة إلى أحجامها . و لهذه القصة بقية مثيرة تتعلق بما لا يعرفه النحل.

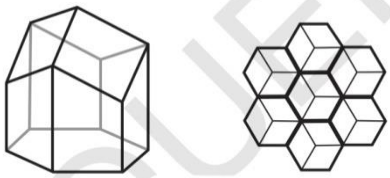
ما لا يعرفه النحل What bees don't know

عام 1953 نشر لازولو فيجيه توث مقالة بحثية تحت عنوان "ما يعرفه، ومالا يعرفه

النحل" وضح فيها أن تصميم أقراص العسل التي يصنعها النحل ليست مثلى تماما على الرغم من استخدامهم لحدسية أقراص عسل النحل السداسية.



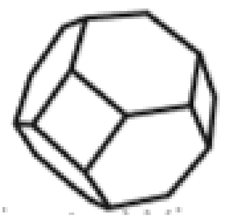
خلية Fejes Toth



خلية النحل

خلايا العسل مفتوحة من أحد الجانبين، وفي الناحية المغلقة هناك طبقتان من الأنابيب السداسية يفصلهما تقسيم شمعي يتكون من أربعة معينات هندسية تغلق كل أنبوب. أوضح فيجيه أنه كمية الشمع المطلوبة للتقسيم قد تكون أقل إذا كانت مكونة من مضلعين سداسيين، ومربعين صغيرين إلا أن تصميم فيجيه استخدم شمعا أقل من ذلك الذي يستخدمه النحل بنسبة (0.35%) فقط. الفوائد التي تعود على النحل من حيث الراحة في الإنشاء وتحقيق استقرار الخلية قد يفسر سبب الاختيار الذي اختاره النحل.

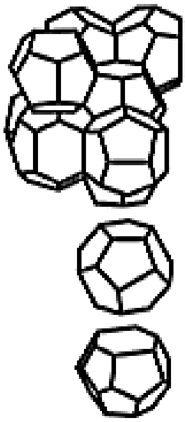
حدسية كيلفن Kelvin's conjecture



أي الأشكال ثلاثية الأبعاد له أقل نسبة بين مساحته السطحية إلى حجمه؟ الإجابة هي الكرة، وهذا ما يفسر سبب كون فقاعات الصابون دائرية.

أصبح هذا السؤال أكثر تعقيدا عندما أردنا أكثر من خلية، وهذا هو السؤال الذي أخذه السيد كيلفن في الاعتبار عام 1887: كيف تقسم فضاء ثلاثي الأبعاد إلى خلايا من نفس الحجم باستخدام تقسيمات لها أقل مساحة سطحية؟ وهذا هو النظير ثلاثي الأبعاد لحدسية قرص العسل السداسي، وقد اعتقد كيلفن أنه وجد الترتيب الأمثل وهو ما يعرف الآن بخلية كيلفن وهي في الأساس ثماني سطوح مقطوع (مجسم أرشميدي مالئ للفضاء) ذو أوجه منحنية قليلا.

رغوة وير- فيلان Weaire-Phelan foam



عام 1993 دحض كل من عالم الفيزياء الإيرلندي دينيس وير وروبرت فيلان حدسية كيلفن، حين اكتشفا بنية جديدة محسنة تفوق خلية كيلفن بنسبة (0.3%). كانت وحدتهم التكرارية مكونة من ثمان مجسمات ثلاثية الأبعاد غير منظمة منحنية قليلا: اثنين من إثني عشري الوجوه (فيه 12 وجه خماسي)، وستة من مجسم له أربعة عشر وجها كل منهما فيه وجهان سداسيان، و 12 وجها خماسيا. احتفي بهذا الاكتشاف في بناء مركز السباحة الوطني للأولمبياد ببكين عام 2008، وقد شرح المعماري كورت واجنر أنهم أنشأوا حجما كبيرا من شكل رغوة وير- فيلان ثم نحتوا الشكل الأساسي للمبنى على هيئة بنية الرغوة. وليس معروفا إذا كانت رغوة وير- فيلان تمثل الحل النهائي لمسألة كيلفن أم لا .

مسألة تلوين الخريطة The map colouring problem

كم عدد الألوان التي تحتاجها لتلوين خريطة بحيث لا تقع دولة على حدود دولة أخرى لها نفس اللون؟ كان هذا هو السؤال الذي طرحه المحامي البريطاني وعالم الرياضيات السيد ألفريد كيمب عام 1879 لم يكن هذا السؤال يهم جغرافيا العالم الحقيقي: أي ترتيب من الأشكال تكون الدول فيه قطعة واحدة متصلة (على عكس الولايات المتحدة الأمريكية التي تمثل فيها كل من آلاسكا وهاواي أجزاء منفصلة) صنف على أنه خريطة. أما الدول التي تتلاقى في نقطة واحدة فيسمح لها أن تأخذ نفس اللون، ولا يستثنى من ذلك إلا الدول التي تفصل بينها خطوط حدودية.

كان حل كيمب أن جميع الخرائط المرسومة على كرة والتي يمكن تصورها يمكن في جميع الحالات أن تلون بأربعة ألوان. ولسوء حظه وجد بيرسي هيود عام 1890 مشكلة:لم يعن ذلك أن الألوان الأربعة غير صالحة بل تحدد فجوة عميقة في حجة كيمب. مع ذلك استطاع هيود عن الطريق التوسع في أفكاره أن يثبت أن خمسة ألوان دائما كافية لذلك.

نظرية الألوان الأربعة The four colour theorem

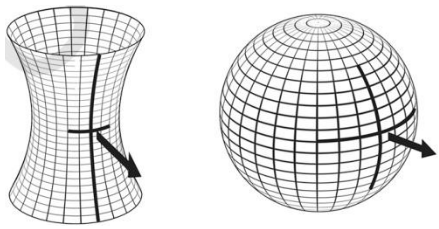
ظلت مسألة تلوين الخريطة مفتوحة لأكثر من 80 عاما: لم يستطع أحد أن يثبت أن أربعة ألوان دائما كافية، ولم يستطع أحد أيضاً أن يبني خريطة تحتاج خمسة ألوان. لم يكن حتى عام 1976 عندما نشر كل من كينيس آبيل، وولفجانج هاكن بجامعة إلينوي برهانهما أن أربعة ألوان حقا كافية دائما.

لم يعتمد برهانهما على البراعة الرياضية فحسب بل تطلب جهدا جبارا، واستغرق ما يقرب من 1000 ساعة من وقت الكمبيوتر، واشتمل على أكثر من 1000 رسم بياني. وقد فسر آبيل قائلا: "ليس هناك إجابة أنيقة بسيطة وعلينا أن نقوم بتحليل حالة هائل لكل إمكانية ممكنة."

الهندسة التفاضلية DIFFERENTIAL GEOMETRY

انحناء جاوس Gaussian curvature

إذا كان لدينا سطح ونريد طريقة ما لقياس مدى انحنائه، فبالطبع قد يكون فيه بعض الأجزاء المستوية، وبعض الأجزاء الأخرى شديدة الانحناء، إذاً فالانحناء ظاهرة محلية.



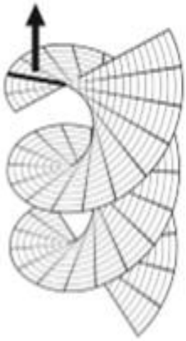
انحناء جاوس هو وسيلة تستخدم التحليل التفاضلي لقياس الانحناء عند نقطة معينة(x)، وينتج عنها رقم (k(x))، وتعمل عن طريق وضع سهم خارج من السطح عموديّا عند النقطة (x)، وهذا السهم هو متجه عمودي.

إذا كان (if k(x) < 0) فإن السطح ينحني باتجاه المتجه العمودي في اتجاه واحد وبعيدا عنه من الاتجاه الآخر، بمعنى آخر فإن السطح عند (X) يكون على شكل سرج الحصان، ومن الأمثلة على ذلك السطح الزائد ذو الطية الواحدة الذي لديه انحناء سالب في كل المواضع. أما الكرة فهي مثال على سطح له انحناء موجب في كل المواضع (لذلك (k(x) > 0) عند كل نقطة).

إذا بدأنا عند النقطة (x) التي اخترناها ستكون كل النقط منحنية في اتجاه واحد نسبة إلى المتجه العمودي على السطح.

وكما هو متوقع، يمكن أن يكون للسطح انحناء موجب في مواضع وسالب في مواضع ، وصفري في مواضع أخرى إلا أن هناك حدودا لهذه الحالات، وهي تعطى بما يسمى بمبرهنة جاوس- بونيت.

السطوح القابلة للبسط Developable surfaces



إذا كان انحناء جاوس عند نقطة (x) يساوي صفر بمعنى أن ($k(x) = 0$)، فهذا لا يعني أن السطح مستو بالكامل بل يعني أن هناك على الأقل اتجاه واحد يكون فيه السطح مستويا. الاسطوانة لها انحناء صفري عند كل النقط ومثلها جميع الأسطح التي يمكن بسطها في المستوى دون أن تتشوه، وهذا ما يطلق عليه السطوح القابلة للبسط، ومن الأمثلة الأخرى المخروط، والحلزون القابل للبسط.

مبرهنة إجريجوم Theorema Egregium

إذا رسمت خطا مستقيما على ورقة، وتساءلت عما إذا كان الخط الذي رسمته أفقيا أم لا، فستجد أن الإجابة لا تعتمد فقط على الخط بل يتوجب عليك الأخذ في الاعتبار موضع الخط بالنسبة للورقة أو أرضية الحجرة، فالخواص مثل كون الشكل الهندسي أفقيّا أم لا ليست خاصية أصيلة فيها، بل تعتمد على علاقتها بالفضاء المحيط. تقول مبرهنة إجريجوم لجاوس أن انحناء جاوس لا ينطبق عليه ما سبق بل إنه خاصية أصيلة للسطح ولا تعتمد على الفضاء المحيط، وقد اعتقد جاوس أن هذه نتيجة بارزة لأن تعريفه الأصلي كان مفرطا في مراعاة الظروف المحيطة.

الهندسة المحلية والعامة Local and global geometry

هناك عدة طرق لرؤية سطح هندسي، إحداها أن تعير اهتماما شديدا لهندسته التفصيلية

في نطاقات صغيرة. ينتمي الانحناء إلى العالم المحلي، بينما من ناحية أخرى ينتمي مميز أويلر إلى مملكة أخرى ألا وهو الطوبولوچيا ، والتي فيها ينظر للعنصر الهندسي نظرة عامة، ولا يكون لتغيراته في النطاقات الصغيرة علاقة بالموضوع

وفي ظل التطور المذهل ، ارتبطت هاتان الظاهرتان–مع ذلك– ارتباطا وثيقا عن طريق نتيجة أساسية لهندسة القرن التاسع عشر، والتي تعزى إلى كارل فريدريك جاوس وبيير بونيت ألا وهي: مبرهنة جاوس–بونيت.

مبرهنة جاوس-بونيت Gauss–Bonnet theorem

إذا كنا نعمل على سطح (S) له مساحة منتهية، وليس له حواف فبالتالي سيمدنا التكامل بطريقة لأخذ البيانات المحلية عند كل نقطة من نقط (S)، وإيجاد متوسطها للحصول على معلومة واحدة عامة عن السطح كله. تقول مبرهنة جاوس–بونيت أنك عندما تقوم بإجراء التكامل لانحناء جاوس (K) فإن ما سيظهر لن يكون إلا مميز أويلر (مضروبا في الثابت (2π))

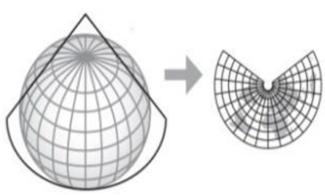
$$\int_{s} k = 2\pi \times x(S)$$

ولأن مميز أويلر خاصية طوبوبوجية، فهي لا تتأثر بأي قدر من التمديد أو اللي، وهذا يعني أن الانحناء الإجمالي للسطح ثابت كذلك. إذا قمت بحني السطح ودفعه فسيمكنك تغيير انحناء كل نقطة تغييرا كبيرا، إلا أن هذه التغييرات تلاشى بعضها بعضا.

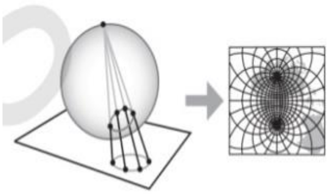
جميع السطوح الملساء التي تتصف بأنها كرة طوبولوچية (مثل سطح الموزة، أو المقلاة) لها مميز أويلر قيمته 2، لذلك عندما تقوم بإجراء التكامل لانحناء جاوس على السطح كله فستكون النتيجة دائما (4π).

المساقط الخرائطية Cartographic projections

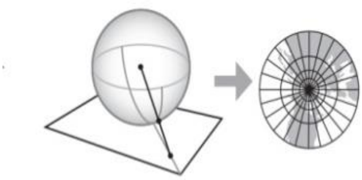
الخريطة الجغرافية مثال جيد لدالة رياضية تحول النقطة من نقطة على الكوكب إلى نقطة على ورقة، لكننا نرغب في ألا تفسد هذه الدالة جغرافية الأرض، وبالتالي هناك متطلبات إضافية عديدة يمكن إضافتها.



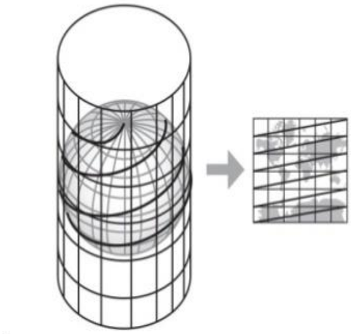
1- الخرائط متساوية الأبعاد يجب أن تحافظ على المسافة بين أي نقطتين، وللأسف الخريطة المستوية لا يمكن أن توفر ذلك.



2- الدوال متساوية المساحة تحافظ على نسب المساحات، ومن أمثلة ذلك مسقط ألبيرس الذي يتكون عن طريق أخذ مخروط من الكرة الأرضية، وإسقاط النقط عليه.



3- الدوال التشكيلية تحافظ على الزوايا بالتالي فإن الخطين المتلاقيين على الأرض يتلاقيان بنفس الزاوية على الخريطة، ومن الممكن رسم خريطة تشكيلية للأرض باستخدام على سبيل المثال الإسقاط المجسمي.

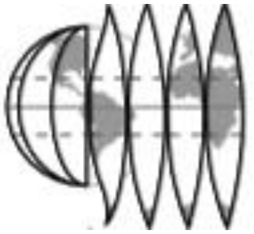


4- المسقط المزولي: يحافظ على المسار الأقصر بين أي نقطتين (لكن ليس طول المسار)، وهذا يعني أنه يمثل الدوائر الكبيرة الموجوة على السطوح الكروية بخطوط مستقيمة في الصفحة (يمكن تمثيل أنصاف الكرات فقط)

5- الخط الثابت: هو مسار حلزوني حول الكرة يتحدد فقط بالاتجاه الزاوي الابتدائي، وقد كانت مهمة تاريخيا في الملاحة. إسقاطات ميركاتور هي خرائط تمثل هذه الخطوط الثابتة كخطوط مستقيمة، وهي تتكون بلف الكرة الأرضية داخل اسطوانة وإسقاط النقط للخارج.

ليس هناك خريطة يمكنها أن تحتوى على أكثر من سمة من السمات السابقة، وهناك بعض التشوهات الحتمية، والسؤال الذي يسأله راسم الخريطة يكون عن الأولويات التي يراعيها.

الخرائط المتساوية الأبعاد للأرض Isometric maps of the earth



تكون الخريطة الأرضية متساوية إذا كانت المسافة بين أي نقطتين على الأرض هي نفسها المسافة بين أي نقطتين على الخريطة (بالطبع بعد تحجيمها بشكل مناسب)، إلا أن هذه الخرائط حتى ولو كانت لأجزاء من الكرة الأرضية يستحيل رسمها على ورقة مسطحة، وهذه إحدى نتائج مبرهنة إجريجوم. لأن الانحناء خاصية أصيلة فلابد أن يحافظ عليه بأي دالة متساوية (مثل تلك التي تحول النقطة من نقطة على الكوكب إلى نقطة على الخريطة)، بالتالي فإن الخريطة متساوية الأبعاد للأرض لابد أن تكون منحنية مثل الكرة الأرضية وليست مستوية. بالنسبة لنطاق صغير مثل مدينة مثلا لن يكون هناك مشكلة لأن الأرض تكون تقريبا مسطحة

هناك طرق لتقريب الخرائط المتساوية للكرة الأرضية كلها مثل خريطة قشرة البرتقال، لكن بشكل أساسي العقبة ليست ثابتة.

الإسقاط المجسمي Stereographic projection

الإسقاط المجسمي هو وسيلة لرسم خريطة كرة على مستوى مسطح، والفكرة كالآتي: ضع الكرة على المستوى، ثم بمعلومية النقطة (x) على الكرة ارسم شعاعا من القطب الشمالي خلال الكرة ويمر بـ (x). المكان الذي يقطع فيه الشعاع المستوى هو موقع (x) على الخريطة، أما النقطة الوحيدة التي لا تظهر على الخريطة ستكون نقطة القطب الشمالي، وستكون الخريطة الناتجة خريطة تشكيلية بمعنى أن الزوايا الموجودة على الخريطة تساوي نظيراتها على الكرة.

بالإضافة إلى علم رسم الخرائط، يستخدم الإسقاط المجسمي في علم الرياضيات أيضاً، بدءا من مستوى الأعداد المركبة ، وبإجراء الخطوات العكسية للخطوات السابقة نحصل على كرة ريمان التي تمثل فيها نقطة القطب الشمالي نقطة جديدة تعرف باسم (النقطة عند مالانهاية) (وهذا يقدم وسيلة مرضية لعرض الخرائط التشكيلية للأعداد المركبة، والتي تعرف باسم تحويلات موبيوس).

الطوبولوجيا TOPOLOGY

الطوبولوجيا Topology

تركز الهندسة التقليدية على الأجسام الجاسئة مثل الخطوط المستقيمة، والزوايا، والمنحنيات التي تعطى بمعادلات دقيقة، بينما تدرس الطوبولوچيا بنيّا على مستوى أعلى من التجريد. الخواص الطوبولوچية لشكل ما هي تلك الخواص التي تتحمل أي كمية من التمديد أو اللي (ليس القطع ولا اللصق). على سبيل المثال:يمكن للمكعب أن يهرس حتى يصبح كرويا بينما الطارة (التي على شكل الكعك المحلى) لا يمكنها ذلك؛ لذا طوبولوچيا الدائرة والمكعب متكافئان بينما الطارة مختلفة عنهما، بالمثل الحرف (c)، والحرف (L) متكافئان طوبولوچيا لكنهما يختلفان عن الحرف (B).

كما سميت "الهندسة المطاطية" rubber sheet geometry وتحولت الطوبولوچيا إلى موضوع مستقل بذاته في بدايات القرن العشرين، على الرغم من أن جذورها ترجع إلى حل ليونارد أويلر لمسألة جسور كونسبيرج السبعة عام 1763، أما الآن فتتضمن الطوبولوچيا العديد من الأجسام الكبيرة محل البحث، وخريطة مترو أنفاق لندن هي مثال على التمثيل الطوبولوچي حيث إنها تهمل الهندسة الدقيقة للمسافات والاتجاهات، لكنها تمثل بدقة العوامل، مثل: ترتيب المحطات، وتقاطعات خطوط قطارات المترو.

شريط موبيوس Möbius strip

خذ شريطا مستطيلا من الورق، وقم بليه نصف لي قبل لصق طرفيه معا وسوف تحصل على شريط موبيوس الذي اكتشفه أوجست فيرديناند موبيوس عام 1858، والشيق في هذا السطح أنه ليس له إلا جانب واحد (أو في لغة المصطلحات الرياضية: سطح غير قابل للتوجيه)، وقد ظهر كثيرا في أعمال الفنان موريتس كورنيليس إيشر (M.C Escher). ويستمد هذا الشريط أهميته الرياضية من اعتماد الكثير من الإنشاءات الطوبولوچية تعتمد عليه، ولا سيما المستوى الإسقاطي

الحقيقي وزجاجة كلاين، حيث إن كليهما يمكن إنشاؤه عن طريق لصق حافة الشريط بنفسها بإحدى طريقتين.

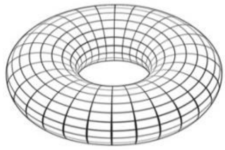
السطوح القابلة للتوجيه Orientable surfaces

إذا نظرت فقط إلى جزء صغير من كرة، فستجد أنها تشبه كثيرا المستوى ثنائي الأبعاد (بالفعل هذا هو منظور معظم البشر في معظم حياتهم)، ولا تتضح طبيعتها الكروية العامة إلا بالتصغير. وهذا في الأساس هو تعريف السطح: حول جميع النقط هناك رقعة من مستوى (ربما منحني قليلا)، والسؤال هو ما هي الأشكال العامة الممكنة الأخرى التي يمكن ترقيعها معا بهذه الطريقة؟ المستوى الكامل نفسه هو أحد هذه الأمثلة، لكن التركيز الأكبر من نصيب السطوح المغلقة التي لها مساحة منتهية (وتكون على هيئة قطعة واحدة).

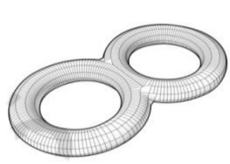
في الطوبولوچيا نهتم فقط بالسطوح الطوبولوچية المختلفة: السطح على شكل ثمرة الموز على سبيل المثال سوف يصنف على أنه كرة، بينما الطارة (التي على شكل الكعك المحلى) هي سطح جديد لا كروي، كما أن الطارة المزدوجة مختلفة أيضاً، بالتالي هناك طريقة للحصول على سطوح مختلفة طوبولوچيا بشكل حقيقي: ابدأ بكرة واستمر في عمل ثقوب (وهو ما يكافئ عمل عرى handles).

عدد الثقوب يطلق عليه طراز السطح ، لكن هذه الطريقة لا تمثل كل الإمكانات: هناك أيضاً السطوح غير القابلة للتوجيه.

كرة



طارة

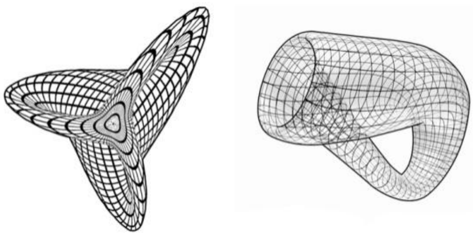


طارة مزدوجة

السطوح غير القابلة للتوجيه Non-orientable surfaces

تعريف السطح هو تعريف محلي: هو شيء يبنى من رقعتين من مستوى ثنائي الأبعاد، وأحيانا يخرج علماء الرياضيات بإمكانيات غير متوقعة. فيمكن ترقيع جزأين من المستوى

معا بطريقة مترابطة داخليا، لكن لا يمكن تمثيلها تمثيلا دقيقا في الفضاء ثلاثي الأبعاد، وتلك هي السطوح غير القابلة للتوجيه.

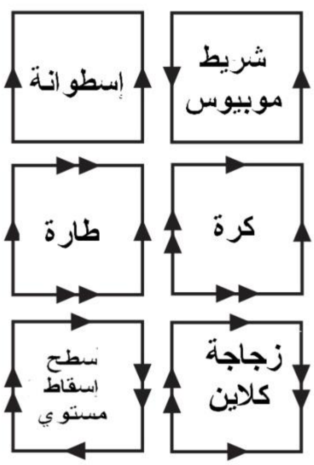


من الناحية العلمية تعريف السطح غير القابل للتوجيه كالتالي: إذا وضعت علامة مائية على سطح فسيمكنها الإنزلاق حتى تعود إلى موضع البداية، لكن كصورة معكوسة للصورة الأصلية، وهذا يعني أن السطح لابد أن يحتوي على شريط موبيوس في مكان ما.

للحصول على السطوح غير القابلة للتوجيه، نبدأ بكرة ، ونقوم بقطع شرائح طولية نخيطها على هيئة شرائط موبيوس بمحاذة حوافها. أول سطحيين غير قابليين للتوجيه، نحصل عليها بهذه الطريقة هما: المستوى الإسقاطي الحقيقي وزجاجة كلاين.

المستوى الإسقاطي الحقيقي وزجاجة كلين

Real projective plane and Klein bottle



ابدأ بمربع من الورق وارسم أسهم بمحاذاة الحواف اليمنى واليسرى بحيث تشير إلى الأعلى، فإذا لصقت هذه الحواف معا جاعلا الأسهم تنطبق فستحصل على اسطوانة.

ابدأ مجددا لكن هذه المرة بجعل الأسهم في اتجاهات متعاكسة، ولصق الحواف جاعلا الأسهم رؤوس الأسهم تتلامس الآن فينتج شريط موبيوس.

للحصول على سطح بلا حواف، فستحتاج أيضاً إلى توصيل الضلعين الباقيين: خذ ترتيب الاسطوانة، وأضف زوجا من الأسهم في الأعلى والأسفل كلاهما يتحرك من اليسار إلى اليمين وسوف يكون لديك نمط الطارة. يمكن

أيضاً الحصول على دائرة بهذه الطريقة (بالطبع، من وجهة نظر الطوبولوچيا فإن مخروطين متصلين من ناحية قاعدتيهما يكونان كرة).

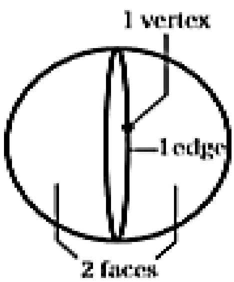
أما الترتيبان الممكنان الباقيان فيمثلان المستوى الإسقاطي الحقيقي، وزجاجة كلاين. إذا حاولت الحصول على هذه الأشكال باستخدام ورقة فستجد أنها لا يمكن أن تتكون في فضاء ثلاثي الأبعاد دون أن تقطع الورقة نفسها.. في زجاجة كلاين الصحيحة لا يحدث ذلك، إلا أن السماح به يتيح ببناء نماذج جميلة جدا من زجاجة كلاين والمستوى الإسقاطي الذي يمثل مثالا مهماً للفضاء الإسقاطي.

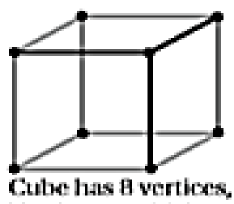
تصنيف السطوح المغلقة The classification of closed surfaces

1- يمكن إنشاء السطوح القابلة للتوجيه عن طريق إضافة عرى (handles) للكرة للحصول على طارة ثم طارة مزدودة و.. هكذا.

2- يمكن تشكيل السطوح غير قابلة للتوجيه عن طريق البدء بكرة وتخييط شرائط موبيوس: أولا ينتج مستوى إسقاطي حقيقي ثم زجاجة كلاين و.. هكذا.

ماذا يحدث إذا بدأنا بطارة وقمنا بتخييط شريط موبيوس بها؟ في سحر الرياضيات، لا يبدو أن هذا يعطينا شيئا جديدا: هذا سطح غير قابل للتوجيه مثله كمثل كرة فيها 3 شرائط من شرائط موبيوس مخيطة فيها.





Cube has 8 vertices, 12 edges, and 6 faces

إحدى أهم النتائج الأولى للطوبولوچيا تصنيف السطوح المغلقة (الذي جعله برهانا رسميا اعتمادا على أعمال آخرين قبله) تقول أنه ليس هناك سطوح أخرى. جميع الأسطح تنتمي إلى عائلة من العائلتين السابقتين.

يمكن جعل هذه النتيجة أكثر دقة باستخدام مميز أويلر.

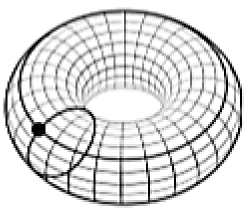
صيغة أويلر للمجسمات Euler's polyhedral formula

ابدأ بكرة، وقم بتحديد علامات بعض النقط (أو رؤوس) عليها وليكن عددها (V) الآن وصل بينهم ببعض الحواف وليكن عدد (E) من الحواف. (المعلومات المختفية هنا: أن جميع الرؤوس يجب أن يتفرع منها مسارين على الأقل، والحواف لا يمكن أن تنتهي أو تتلاقى إلا عند الرؤوس). تلك العملية تقسم الكرة إلى مناطق (أوجه) مختلفة، وليكن عددها (F)، أبسط مثال هنا به رأس واحدة، وحافة واحدة تمر حول الكرة مرة واحدة وتقسمها إلى وجهين (V=1, E=1 and F=2).

عام 1750 لاحظ ليونارد أويلر أن أعداد الرؤوس والحواف والأوجه في جميع الأمثلة يحقق العلاقة (V-E+F=2). (وهو ما يعرف أحيانا بصيغة أويلر: كان أويلر صاحبا لصيغ كثيرة) لكنه لم يستطع أن يقدم دليلا على أن هذا هو ما يحدث دائما لكن آندرين ماري ليجندر تمكن من ذلك عام 1794.

ولابد أن ينطبق هذا على جميع الأسطح التي تكافئ الدائرة من الناحية الطوبولوچية: لذا لابد أن تتبع رؤوس وحواف وأوجه جميع المجسمات ثلاثية الأبعاد هذه الصيغة).

صيغ المجسمات على السطوح Polyhedral formulas on surfaces



لا تصلح صيغة أويلر للمجسمات للتطبيق على السطوح غير الكروية طوبولوچيا مثل الطارة، لكن يمكننا تطبيق نفس الأسلوب مع الانتباه إلى أن الحواف تقسم السطح فعليا إلى أوجه لا يمكن فردها بحيث تكون مستوية بدلا من الأنابيب. بالنسبة للطارة يحدث ذلك برأس واحدة وحافتين، وهو ما ينتج عنه سطح واحد؛ لذلك في هذه الحالة (V-E+F=0). وهذه الصيغة الجديدة صحيحة لأي ترتيب من الرؤوس والحواف والأوجه في الطارة، وبالقيام بشيء نفسه لطارة مزدوجة نجد أن (V-E+F=-2).

هناك نتائج مشابهة تصلح للسطوح غير القابلة للتوجيه أيضاً، ففي المستوى الإسقاطي الحقيقي نحصل دائما على (V-E+F=1)، وفي زجاجة كلاين نحصل على (V-E+F= 0).

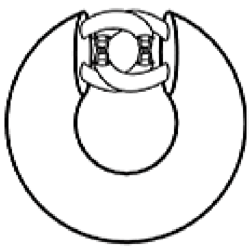
خصائص أويلر Euler characteristic

تقول صيغ المجسمات على السطوح أنه إذا كان لديك سطح ما وقمت بتقسيمه إلى رؤوس وحواف فإن الرقم (V-E+F) سيكون دائما نفس الرقم، وهذا الرقم الثابت يسمى مميز أويلر للسطح، ويرمز له بالرمز الإغريقي (X)؛ لذا إذا كان (S) كرة، و(T) طارة، و(D) طارة مزدوجة فسيكون $X(S) = 2, X(T) = 0 \text{ and } X(D) - 2$.

بالنسبة للسطوح قابلة التوجيه، إذا كانت (X) كرة ولها مقابض عددها (g) (بمعنى أن طراز (x) هو (g))، بالتالي ($X(X) = 2 - 2g$)، وللسطوح غير قابلة التوجيه، إذا كانت (Y) كرة ولها عدد (n) من شرائط موبيوس فسيكون ($X(Y) = 2 - n$).

لكن مميز أويلر بمفرده لا يمكنه تحديد السطح المغلق (كل من الطارة وزجاجة كلاين معامل أويلر لها يساوي صفر)، لكن تصنيف السطوح المغلقة ينص ضمنا على أن جميع السطوح تحدد تماما بمعلومتين: ما إذا كانت قابلة للتوجيه أم لا، ومميز أويلر لها.

كرة ألكساندر القرنية Alexander's horned sphere



من الناحية الطوبولوچية يتضح أن عددا كبيرا من الأشكال المختلفة ظاهريا متكافئة: الموزة تكافئ الكرة، وفنجان الشاي يكافئ الطارة، وحرف (M) يكافئ الرقم (8). في عام 1924 قام عالم الطوبولوچيا جيمس ألكسندر ببذل أقصى جهده باكتشافه للكرة القرنية. يعتبر هذا الشكل من الناحية الطوبولوچية كرة، لكنه حقا مثالا عن باثولوچيا الفصائل، وهو يتكون من طارة مأخوذ منها شريحة، وترتيب غير منته من القرون المتشابكة على جانبي الشريحة، وتظل القرون مقسمة ومتشابكة حتى أطرافها النهائية وهو ما يكون غبار كانتور. وقد كان ذلك صادما لعلماء الطبولوجيا في بدايات القرن العشرين والذين اعتقدوا أن أي كرة لابد أن تقسم الفضاء ثلاثي الأبعاد بشكل هش إلى جزأين بسيطين: داخلي وخارجي، لكن الجزء الخارجي للكرة القرنية معقد بشدة؛ حيث يمكن رسم حلقات عديدة مختلفة غير منتهية لا يمكنها الوصول من جهة إلى أخرى.

متعددات الشُعب Manifolds

السطح هو عبارة عن عنصر يمكن تقسيمه إلى رقع تشبه جميعا جزء من مستوى (بشكل آخر: يعرف باسم الفضاء الإقليدي ثنائي الأبعاد)، وفكرة متعدد الشعب ترفع ذلك إلى أبعاد أعلى، فمتعدد الشعب (Manifold) هو عنصر يمكن تقسيمه إلى رقع تشبه فضاء إقليدي من البعد (n)). (مدى قرب التشابه بين ذلك هو ما يفرق بين الطوبولوچيا البسيطة والطوبولوچيا التفاضلية)؛ لذا فإن: المتشعب أحادي البعد هو منحنى ، وثنائي الأبعاد سطح، وهناك مثالا واضحا على متعدد الشعب ثلاثي الأبعاد : هو الفضاء الثلاثي الأبعاد نفسه، لكن هناك أمثلة أخرى أيضاً، فالكرة الثلاثية هي النظير ثلاثي الأبعاد للكرة الثنائية، وهي الموضوع الذي تتناوله حدسية بوانكارية الشهيرة والتي حلت عام 2003. هناك ثلاثة متشعبات مغلقة يمكن تصنيفها تماما بمبرهنة.

مبرهنة التركيبات الهندسية لثلاثة من متعدد الشُعب

The geometrization theorem for 3-manifolds

تماما كما يصف تصنيف السطوح المغلقة كل متشعب – ثنائي، مغلق، فإن مبرهنة التركيبات الهندسية الحديثة تصنف بشكل كامل المتشعبات–الثلاثية المغلقة (مغلق يعني أن له حجم منته وليس له حواف).

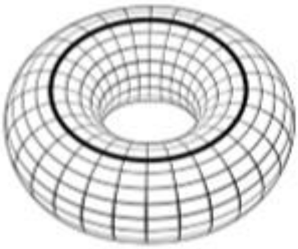
عام 1982 وضع ويليام ثورستون الحاصل على ميدالية فيلدز قائمة بثمانية أنواع خاصة من المتشعب 3 التي اعتقد أنها يجب أن تكون الأشكال الأولية التي تتكون منها الأشكال الأخرى، وقد وصف كيفية تقطيع أي متشعب 3 مغلق إلى قطع اعتقد هو أن كل منها يجب أن يكون واحدا من أنواعه الثمانية الخاصة. متشعبات ثورستون الثمانية تتوافق مع مفاهيم مختلفة للمسافة، وأشهرها: المستوى الإقليدي، والمستويات الزائدية، وكذلك الهندسة الكروية، وتأتي الخمسة الباقية من مجموعات معينة من مجموعات لاي.

أوضح ثورستون أن العديد من المتشعبات–الثلاثية تحقق حدسية التركيبات الهندسية لكنه لم يستطع إثبات ذلك على الإطلاق. عام 2003 استطاع بيرلمان أن يقدم برهانا

باستخدام طرقه عالية التطور من الأنظمة التحريكية وتكملة على عمل ريتشارد هاميلتون، ثم ظهر حدسية بوانكارية المشهورة كنتيجة لذلك.

الاتصال البسيط Simple connectedness

إذا رسمت حلقة على سطح كروي عادي، فإنها سوف تنكمش تدريجيا حتى تصبح نقطة واحدة، وهذا هو تعريف الاتصال البسيط، وهذه الخاصية تميز بين الكرة والطارة حيث أن الحلقة المحيطة بثقب لا تنكمش حتى تصبح نقطة.

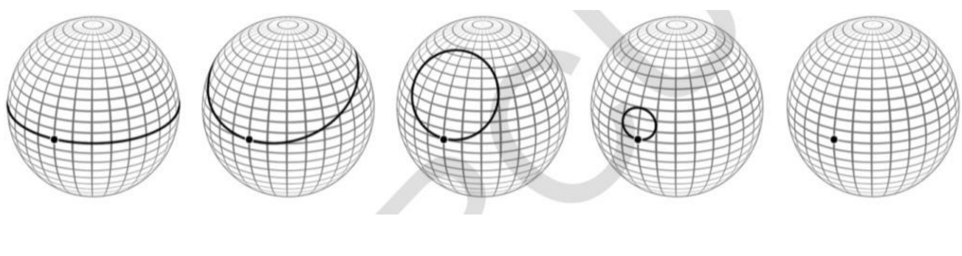


وبعض السطوح الأخرى مثل المكعبات متصلة اتصال بسيط أيضاً، وكنها مكافئات للكرة، وبالتالي فإن من الناحية الطوبولوچية الكرة هي السطح ثنائي الأبعاد الوحيد المتصل، وقد عالجت حدسية بوانكارية التساؤل عما إذا كان ذلك صحيحا أيضاً للمتشعبات الثلاثية بدلا من السطوح.

حدسية بوانكاريه (مبرهنة بيرلمان)

Poincaré conjecture (Perelman's theorem)

أول من وضع هذه الحدسية عام 1904 جولز هنري بوانكاريه (الآن ترقت إلى درجة المبرهنة)وهي تحتل مكانا بارزا في الطوبولوچيا الحديثة. لقد كان معروفا لعدة سنوات قبل ذلك أن الكرة هي السطح الوحيد المتصل اتصالا بسيطا، وكان سؤال بوانكارية عما إذا كان ذلك سيظل صحيحا إذا نظرنا إلى بعد واحد أعلى. كان من المعروف أن الكرة الثلاثية (الكرة ثلاثية الأبعاد المناظرة للكرة العادية) متصلة اتصالا بسيطا، وينقص ذلك أن نعرف ما هي ثلاثيات التشعب الأخرى غير المكتشفة التي يمكن أن تكون كذلك أيضاً لنستبعدها.



تقول حدسية بوانكارية أن الكرة الثلاثية هي حقا ثلاثي التشعب الوحيد المتصل اتصالا بسيطا، وقد استرعت اهتماما واسعا في علم الرياضيات، وتحدت محاولات عديدة لإثباتها خلال القرن العشرين، وكذلك في علم الفيزياء حيث يمكن تفسيرها على أنها تضع حدودا للشكل الممكن للعالم. عام 2000 وضعت هذه الحدسية ضمن مسائل المليون دولار لمعهد كلاي، وأثبتها أخيرا عام 2003 جريجوري بيرلمان كنتيجة لمبرهنة التركيبات الهندسية. وقد رفض بيرلمان الجائزة النقدية وكذا ميدالية فيلدز.

مثلية التوضع Homotopy

في الأبعاد الأخرى غير الثلاثية، يحتاج سؤال بوانكارية إلى إعادة الصياغة قليلا؛ فالاتصال البسيط لم يعد كافيا، ونظيره المناسب هو ما يسمى مثلية التوضع، وهي ما يحدد ما إذا كان متشعبا ما به أي ثقوب. تهتم مثلية التوضع بما يحدث عندما تدرج قشرة كروية -بدلا من رسم حلقة- داخل المتشعب، والسؤال المهم هو ما إذا كان بإمكان هذه القشرة أن تنكمش إلى نقطة أم سيعرقلها ثقب ما كما حدث للحلقة على سطح الطارة. ويمكن استخدام كرات مختلفة الأبعاد لاكتشاف الثقوب مختلفة الأنواع.

المتشعب الذي لا يحتوي على أي ثقوب استنادا إلى هذه الطريقة يطلق عليه كرة مثلية التوضع، واستنادا إلى حدسية بوانكارية المعممة، فإن الكرة العادية هي الكرة الوحيدة مثلية التوضع في كل بُعد.

حدسية بوانكارية المعممة The generalized Poincaré conjecture

قد نعتقد بسذاجة أنه كلما زادت الأبعاد التي ننظر فيها أصبحت الرياضيات أكثر إبهاما، لكن ذلك غير صحيح؛ ففي نواحي عديدة نجد أن الفضاء ثلاثي ورباعي الأبعاد أكثر صعوبة في تحليله من الأفضية ذات الأبعاد الأعلى.

تقول حدسية بوانكارية المعممة أن في كل بعد تكون الكرة العادية هي الكرة الوحيدة مثلية التوضع، وقد أجاب تصنيف السطوح المغلقة بالفعل عن هذا السؤال بالإيجاب في حالة الأبعاد الثنائية، وعام 1961 أثبت ستيفن سامبل أن حدسية بوانكارية المعممة صحيحة

في كل الأبعاد بدءا من البُعد الخامس فأعلى تحت فرضيات إضافية، وقد منحه هذا الإنجاز ميدالية فيلدز عام 1966م. في نفس السنة استطاع ماكس نيومان أن يبين أن تلك الفرضيات الإضافية ليست ضرورية وبذلك أكمل الإثبات، وتبقت الأبعاد الثلاثية والرباعية، وقد حل مايكل فريدمان (الذي حصل على ميدالية فيلدز عام 1986م) الأبعاد الرباعية، وبالتالي كانت حدسية هنري بوانكارية في الأبعاد الثلاثية هي آخر ما تم حله، وكان ذلك على يد جيورجي بيرلمان عام 2003.

الطوبولوجيا التفاضلية Differential topology

التعريف الطوبولوچي للمتشعب يسمح بالوجود العادل لبعض العناصر الغريبة. لكن في الطوبولوچيا التفاضلية تصبح هذه المتطلبات أكثر إحكاما، فلا يسمح إلا بالمتشعبات الناعمة؛ لذلك لم تعد الاعتلالات مثل ندفة ثلج كوخ، ولا كرة ألكسندر القرنية موجودة، وبالمثل الفكرة الطوبولوچية لمتشعبين متكافئين هي إلى حد ما خشنة؛ حيث تتيح لأحدهما السحب واللي؛ ليتحول إلى الشكل الآخر بطرق عنيفة. المفهوم الأفضل إذا هو التكافؤ التفاضلي: حيث يعتبر متشعبين ناعمين أنهما متشعب واحد إذا كان أحدهما يمكنه أن يتحول إلى الآخر بنعومة (أساسا بطريقة يمكن تفاضلها)، لكن هذا يضيف إمكانية بارعة: قد يتضح أن المتشعبين الناعمين متطابقين طوبولوچيا ومختلفين تفاضليا، أو يمكن القول بطريقة أخرى أن متشعب طوبولوچي ضمني واحد يمكنه دعم بنيتين ناعمتين متعارضتين، وهذه ظاهرة يصعب تخيلها ليس فقط؛ لأنها لا تحدث فعلا في الأبعاد الأحادية أو الثنائية أو الثلاثية (لذلك يبقى تصنيف السطوح المغلقة ومبرهنة التركيبات الهندسية للمتشعبات الثلاثية المغلقة صالحا على مستوى المتشعبات الناعمة) بل إنها تحدث في الأبعاد الرباعية بأسلوب مثير.

الفضائيون من البُعد الرابع Aliens from the fourth dimension

جميع هواة الخيال العلمي يعلمون أن البُعد الرابع هو مكان جنوني. في الثمانينيات اكتشف علماء الطوبولوچيا التفاضلية أن الحقيقة أغرب من الخيال العلمي. في الأبعاد الأحادية والثنائية والثلاثية الفرق بين المتشعب، والمتشعب الناعم ليس مهم بوجه خاص: فكل متشعب طوبولوچي يمكن تحويله إلى متشعب طوبولوچي ناعم، والمتشعبات

الناعمة المتكافئة طوبولوچيا تكون متكافئة تفاضليا أيضاً. أما بدخول البُعد الرابع ينهار هذا النظام المريح بشدة.عام 1983 اكتشف سيمون دونالدسون باستخدام أفكار من نظرية ينج- ميل مجموعة كبيرة من المتشعبات الرباعية التي لا يمكن جعلها ناعمة: فهي لا تسمح بأي بنية تفاضلية على الإطلاق، والأسوأ من ذلك أن أبسط متشعب رباعي، وهو الفضاء رباعي الأبعاد نفسه، قد وقع تحت هذه الطائلة حيث اكتشف مايكل فريدمان متشعبا يطابق الفضاء الرباعي الأبعاد طوبولوچيا لكنه مختلف عنه تفاضليا، وفي عام 1987 بين كليفورد تاوبس أن هذا الوضع أكثر ضراوة من ذلك: حيث يوجد عدد غير منته بشكل لا يحصى من المتشعبات التي ينطبق عليها ذلك حيث أن جميعها غير متكافئة تفاضليا ، وأطلق عليها الأفضية رباعية الأبعاد العجيبة.

الكرات العجيبة Exotic spheres

الأفضية رباعية الأبعاد العجيبة حقا شاذة: في كل الأبعاد الأخرى هناك نسخة واحدة ناعمة من الفضاء الإقليدي.

أما في الأبعاد الأعلى من 4 وكذلك في الأبعاد الرباعية تبقى فكرة أن المتشعبات الناعمة لا يمكن التمييز بينها طوبولوچيا لكنها مختلفة تفاضليا صحيحة (مع ذلك، على عكس أدغال البُعد الرابع، ففي الأبعاد الأعلى يمكن أن يوجد فقط عدد منته من المتشعبات العديدة المتعارضة)، وهذا يحدث حتى مع الكرات: عام 1956 اكتشف جون ميلنور عن طريق التجارب باستخدام الكواترينون quaternions(1) متشعب سباعي الأبعاد غريب الأطوار، ولكنه تذكر فيما بعد قائلا: "في أول الأمر اعتقدت أنني سوف أعثر على مثال مضاد لحدسية بوانكارية المعممة في البُعد السابع". لكن بمزيد من الفحص، لم يكن ذلك صحيحا؛ فقد كان متشعبه قابلا للتحول إلى كرة ولكنه لا يفعل ذلك بنعومة، فمن الناحية الطوبولوچية كان كرة ، أما من الناحية التفاضلية لم يكن كذلك، وكانت هذه هي أول كرة عجيبة.

(1) عدد مركب على الصيغة $w + xi + yj + zk$ حيث w , x , y , z أرقام حقيقية بينما i , j , k وحدات تخيلية تحقق شروطا معينة.

حدسية بوانكارية الملساء في الأبعاد الرباعية

The smooth Poincaré conjecture in four dimension

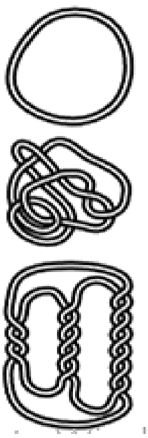
في الأبعاد الأحادية والثنائية والثلاثية ليس هناك كرات عجيبة: هي تلك المتشعبات الناعمة التي تعتبر كروية من وجهة النظر الطوبولوچية، ولكنها ليست كذلك من وجهة النظر التفاضلية. عام 1963 طور كل من جون ميلنور، ومايكل كيرفير نظرية (surgery theory): هي طريقة فعالة لمعالجة المتشعبات الأعلى في الأبعاد عن طريق القطع واللصق، وقد كان ذلك طفرة تكنولوجية مكنتهم من تحديد عدد الكرات العجيبة الموجودة في كل بعد - خمسة أبعاد- على الأقل بدقة، والإجابة هي أنه لا يوجد أي كرات عجيبة في الأبعاد الخماسية أو السداسية، لكن ما اكتشفها ميلنور في الأبعاد السباعية كانت واحدة ضمن عائلة مكونة من 27، أما في الأبعاد الأعلى فتتراوح الإجابة بين عدم وجود كرات عجيبة إلى وجود عدد اعتباطي لا نهائي من العائلات.

لكن كما في حالة الأفضية العجيبة رباعية الأبعاد، فالفضاء رباعي الأبعاد غريب بشكل فريد، فحتى الوقت الذي نكتب فيه ليس معروفا بعد إذا كان هناك أي كرات عجيبة في البُعد الرابع أم لا، ومن المتصور حتى أنه يمكن أن يكون هناك عدد لا نهائي التأكيد على عدم وجود كرات عجيبة في الفضاء رباعي الأبعاد (بمعنى أن كل كرة من الناحية الطوبولوچية تكون كذلك من الناحية التفاضلية أيضاً) تعرف باسم حدسية بوانكارية الملساء في الأبعاد الرباعية، وتعتبر مسألة بالغة الصعوبة.

نظرية العُقد KNOT THEORY

العُقد الرياضية Mathematical knots

كانت نظرية الدوامة الخاصة بالذرة فكرة في فيزياء القرن التاسع عشر، وجاء فيها أن الذرات عبارة عن عُقد في الإيثير السائد، على الرغم من أن عمر هذه النظرية كان قصيرا إلا أنها حدت بالسيد كيلفن، وبيتر تيت إلى بدء أبحاث رياضية حول العُقد والتي لا تزال تشكل مجالا قائما للبحث إلى يومنا هذا.



في وجهة نظر عالم الرياضيات، العُقدة هي قطعة معقودة من خيط لابد أن تكون نهايتيه مربوطتين لتكوين حلقة معقودة. عندما يكون هناك أكثر من خيطين يسمى رابطا ، وطبقا لنظرية الدوامة فإن عقدتين تمثلان مركبا كيميائيا إذا كانتا في الأساس نفس الشيء، وعلى الرغم من أن هذه الفكرة ظلت لمدة طويلة غير محتفى بها إلا أن السؤال الذي تطرحه سؤال طبيعي جدا. أن تكونا "في الأساس نفس الشيء" هو مفهوم طبولوچي : يقال لعقدتين أنهما متكافئتان إذا كان يمكن جذب ومد إحداهما بحيث تتحول إلى شكل الأخرى (بالطبع دون قطع أو لصق).

الهدف الأساسي لهذه النظرية هو إيجاد وسيلة لتحديد ما إذا كانت عُقدتان متكافئتين أم لا، وهي مسألة عميقة خادعة. يشرح زوج بيركو مدى صعوبة هذه المسألة حتى في حالة العُقد سهلة المقارنة، فحتى أبسط عقدة على الإطلاق، العُقدة المحلولة، وهي حلقة بسيطة غير معقودة يمكن أن تكون مموه بمهارة، ويسمى ذلك مسألة حل العُقد. تقدم خوارزمية (هاكن) حلا نظريا لمسألة العُقد، لكن مازال البحث قائما لإيجاد ثوابت عقدية أكثر فعالية.

جداول العُقدة Knot tables

في القرن التاسع عشر بدأ بيتر بيت في وضع قائمة بجميع العُقد الممكنة طبقا لأعداد التقاطع فيها، وبحلول عام 1877 كان تيت قد وضع في هذه القائمة عقد تصل عدد التقاطعات فيها إلى 7 تقاطعات، وقد شاركه في هذا المشروع ريفرند توماس كيركمان وهو كاهن إنجليزي، وشارلز ليتيل من ولاية نبراسكا بالولايات المتحدة الأمريكية الذين تواصلا معه عن طريق البريد الإلكتروني وتمكنوا جميعا من تصنيف عقد ذات ثمانية وتسعة وعشرة تقاطعات، وقطعوا شوطا في العُقد ذات أحد عشر تقاطع، واستمرت المجهودات خلال القرن العشرين إلا أن بزيادة هذه القائمة وزيادة تعقيد تلك العُقد أصبح تحديد العُقد التي هي في الحقيقة نفس الشيء تحديا هائلا.

عام 1998 نشر كل من هوستي، وذيستليثوايت وويكس مقالة تحت عنوان "العُقد

المليون وسبعمائة وواحد ألف وتسمائة وست وثلاثون الأولى" والتي اشتملت على التصنيفات كاملة حتى 16 تقاطع. وعلى الرغم من أنه حتى الآن ليس هناك قائمة مكتملة أكثر من ذلك معروفة بعد إلا أن بعض العائلات الفرعية تم تصنيفها حتى 24 تقاطع مما جعل الجداول الحالية تصل إلى أكثر من (500,000,000,000) عُقدة ورابطة مختلفة.

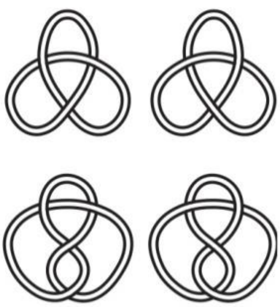
زوج بيركو The Perko pair

10_{161}

10_{162}

من أقدم جداول العُقد التي وضعت الجدول الذي وضعه شارلز ليتل عام 1885، وقد عرض قائمة من 166 عقدة ذات 10 تقاطعات وكان من بينها الثنائي (10_{161})، و(10_{162}). الأجيال التالية من منظرين العُقد بنوا على هذا الأساس، ولمدة 100 عام تقريبًا ظل (10_{161})، و(10_{162}) جنبا إلى جنب في كل كتالوج وكتاب لم يكن حتى عام 1974 عندما استطاع المحامي بمدينة نيويورك والرياضي الهاوب كينيث بيركو أن يضع يده على موطن الخطأ: العُقدتان هما في الواقع نفس العُقدة ولكن بشكل مختلف.

العُقد اللا انطباقية chiral knots



تأتي عُقدة البرسيم ذات التقاطعات الثلاثة (trefoil) كأبسط العُقد بعد العُقدة المحلولة (unknot)، وهي في الواقع تأتي على صورتين: اليسارية، واليمينية، وكذلك تأتي العُقدة التي على شكل الرقم 8 في شكلين معاكسين لبعضهما كصورة المرآة، إنه ليس واضحا بأي حال من الأحوال لكن هاتين العُقدتين يتضح أنهما متكافئان.، فبالقليل من المط يمكن أن تتحول العُقدة اليسارية التي على شكل الرقم 8 إلى يمينية. هل الأمر كذلك أيضاً بالنسبة لعُقدة البرسيم؟ الإجابة هي لا؛ فعُقدة البرسيم عُقدة لا انطباقية مما يعني أن الصورتين مختلفتين بينما العُقدة على شكل الرقم 8 عُقدة

انطباقية، وبالنسبة للعُقد الأكثر تعقيدا يصبح من الصعب جدا تحديد ما إذا كانت انطباقية أم لا.

ولنظرية العُقدة العديد من التطبيقات الأوسع في مجال العلوم كما أن الانطباقية لها أهمية فيزيائية. وفي مجال الكيمياء تكون بعض المركبات لا انطباقية مما يعني أن جزيئاتها تأتي على شكلين يساري ويميني، ويكون لهما خصائص كيميائية مختلفة.

ثوابت العُقدة Knot invariants

عام 1923 وجد جيمس ألكسندر طريقة لتعيين تعبيرات جبرية لكل عقدة. الخاصية المهمة هي أنه إذا كانت عُقدتان متكافئتين (مهما بدتا مختلفتين) فستعبر عنهما نفس كثيرة الحدود، وكانت كثيرة حدود ألكسندر هي أول ثابت لعقدة، أما عقدة البرسيم فكثيرة الحدود المعبرة عنها هي $(t^{-1} - t)$، والعقدة على شكل الرقم 8 $(-t^{1} + 3 - t)$، وهذا يوضح أنهما مختلفتان قطعيا؛ ليس هناك أي مناورات تؤدي إلى تحويل أحدهما إلى الأخرى، ومع ذلك فإن هذا الأسلوب لم يكن مثاليا، (-3,5,7) فعقدة بريتزل لها كثيرة حدود 1، وهي نفسها كثيرة الحدود المعبرة عن العُقدة المحلولة على الرغم من أنهما ليستا متكافئتين.

كثيرة حدود جونز The Jones polynomial

كانت كثيرة حدود ألكسندر هي أفضل وسيلة جبرية للتمييز بين العُقد لمدة 50 عاما، لكن عام 1984 لاحظ فوغان جونز صلة غير متوقعة بين عمله في التحليل وبين نظرية العُقدة، وقد تبلورت رؤيته في ثابت عقدة جديد، وعلى الرغم من أنه لم يكن مثاليا بعد إلا إنه فاق ثابت ألكسندر في العديد من المميزات، ولاسيما أنه بإمكانه تمييز الانطباقية دائما، عُقدة فكثيرة الحدود المعبرة عن عُقدة البرسيم اليمينية هي $(s + s^{3} - s^{4})$، بينما اليسارية لها كثيرة الحدود $(s^{-1} + s^{-3} - s^{-4})$.

لقد شق اكتشاف جونز طريقه سريعا في تطبيقات أوسع في مجال العلوم ولا سيما بين جزيئات الحمض النووي العقدية في مجال الكيمياء الحيوية. وقد بنى على كثيرة حدود جونز منذ عمله بحثا عن ثوابت أكثر فعالية، وفي عام 1993 صاغ ماكسيم كونتسيفيتش كيانا

رياضيا جديدا يعرف باسم تكامل كونتسيفيتش، وهو عنصر معقد جدا (حتى تكامل كونتسيفيتش للعُقدة المحلولة يصعب تدوينه). ومن المسائل المهمة التي لا تزال مفتوحة في نظرية العُقدة هي حدسية فاسيليف (Vassiliev's conjecture) التي تفترض ضمنا أن تكامل كونتسيفيتش يمكنه بالفعل التمييز بين أي عقدتين.

خوارزمية هاكن The Haken algorithm

عام 1970 حل ولفجانج هاكن مسألة تحديد ما إذا كانت العُقدتان متكافئتين أم لا، وكانت خطته في ذلك هي قلب المسألة كلها رأسا على عقب؛ فبدلا من مقارنة عقدتين تطفوان في الفضاء نظر إلى مكملات تلك العُقد: الأشكال ثلاثية الأبعاد التي تتبقى عند إزالة العُقد من المواد المحيطة تاركة ثقوب على شكل العُقد (كما لو كان قد وضع خيوط معقودة بارتخاء في صندوق من الزجاج ثم أزال الخيوط)، وبتحديد إذا كان الشكلان طبولوجيا هما نفس الشيء، فسيسري ذلك على العُقد أيضاً، وقد طور هاكن طريقة لتحليل المكملين إلى مراحل قبل تحديد إذا ما كانا نفس الشيء أم لا، وقد كانت فكرة نيرة إلا أن خوارزمية هاكن لازال بها بعض الفجوات عندما انتقل إلى اهتمامات أخرى (لاسيما مبرهنة الألوان الأربعة) إلا أن سيرجي ماتفيف عام 2003 استطاع أن يسد الفجوة الأخيرة.

على الرغم من أن خوارزمية هاكن انجاز رائع لكنها قد تكون صعبة جدا لدرجة أنها لا يمكن تنفيذها على كمبيوتر في العالم الحقيقي؛ لذا تستخدم الآن خوارزميات أكثر عملية في جدولة العُقد، وفي وسائل نحو مسائل حل العُقد.

ومن المساوئ الأخرى لهذه الخوارزمية أنها ليس لها أي بصمات؛ فهي من الناحية النظرية بإمكانها تقديم إجابة بنعم أو لا على التساؤل عما إذا كانت عُقدتان محددتان هما نفس الشيء لكنها لا تعرف أو تصف عقد منفردة؛ لذلك نحتاج إلى ثوابت العُقد.

مسألة حل العُقد The unknotting problem

الهدف العام لنظرية العُقدة هو معرفة ما إذا كانت عُقدتان متكافئتين أم لا، والسؤال الأبسط هو تحديد ما إذا كانت عُقدة معطاة مكافئة للعُقدة المحلولة (الحلقة المسطحة غير

المعقودة) أم لا. وقد اكتشفت خوارزميات أكثر سهولة من خوارزمية هاكن تحديدا من أجل تعرُّف ترتيبات العُقد المحلولة، لكن حتى هذه الخوارزميات ليس معروفا إذا كان يمكن تسريعها بدرجة كافية ليصبح لها استخدامات عملية في العالم الواقعي بمعنى، ما إذا كان يمكن إجابة هذا السؤال في وقت كثير الحدود (راجع أطروحة كوبهام). من المعروف أن مسألة حل العُقد تندرج تحت المسائل التي صعوبتها من التصنيف (NP)، لذلك فإن إجابة إيجابية لمعادلة (P=NP) ستحسم الأمر.

الهندسة اللاإقليدية NON-EUCLIDEAN GEOMETRY

هندسة زائدية Hyperbolic geometry

في القرن التاسع عشر اكتشف كارل فريدريك جاوس، ونيكولاي لوباشفسكي و جانوس بوليا كل على حدة نظاما هندسيا جديدا ممكنا وغير مألوف يسمى الهندسة الزائدية، وهو يحافظ على مكونات الهندسة الإقليدية مثل: المسافات، والزوايا، والمساحات لكنها تتحد بطرق جديدة وغير متوقعة. أما مسلمة التوازي فتفشل في هذا النظام بشكل حاسم، وكانت تاريخيا هي القوة الدافعة وراء هذا الاكتشاف. وأصبح مجموع زوايا المثلث أقل من ط (180)، والأكثر غرابة من ذلك أن معرفة زوايا المثلث (A,B,C) فقط تمكنك من حساب المساحة: ($\pi - (A + B + C)$) (وهو شيء لا يمكن تصوره في الفضاء الإقليدي حيث توجد مثلثات متشابهة ، وبأي مساحة ترغب فيها).

كيف لنا أن نتخيل فضاء غريب كهذا؟ تم إنشاء نماذج مختلفة من المستويات الزائدية؛ لاسيما قرص بوانكاريه. أما نموذج مينكوسكي فهو هندسة زائدية على أحد نصفي سطح زائدي ذي طيتين. إن هذا يلعب دورا مركزيا في النسبية الخاصة في الفيزياء، فمعظم الموضوعات المهمة في الهندسة الإقليدية لها نظائر في الهندسة الزائدية. هناك أيضاً سطوح زائدية، ومتشعبات، وحساب مثلثات زائدي (فيه دالة جيب التمام الزائدية ودالة الجيب الزائدية)، ونظرية متطورة للتبليط في الأفضية الزائدية على سبيل المثال.

قرص بوانكاريه Poincaré disc

قرص بوانكاريه هو نموذج للهندسة الزائدية لم يكتشفه هنري بوانكاريه بل أوجينو بيلترامي عام 1868، وهو إنشاء لمستوى زائدي مصمم ليكون سهل الفهم بالنسبة لنا - نحن أهل الهندسة الإقليدية- وهو يقع في دائرة تمثل الحج غير المنته للمستوى، وبالنسبة للمراقب من الداخل تبدو حافة الدائرة بعيدة بشكل غير منته، أما من الخارج تبدو المسافات أكثر انضغاطا كلما اقتربت من الحافة. "الخطوط المستقيمة" في هذا النموذج هي أقواس الدائرة التي تتلاقى مع الحد في زوايا قائمة، بالإضافة إلى الأقطار التي تمر مباشرة خلال الدائرة. وقد تحرى الفنان موريتس كورنيليس إيشر نموذج القرص للهندسة الزائدية في العديد من رسوماته.

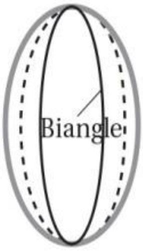
الهندسة الإهليلجية Elliptic geometry

بمجرد اكتشاف الهندسة الزائدية ضربت هيمنة الهندسة الإقليدية في مقتل، وتعالت الأصوات التي تتساءل:هل يوجد أي هندسات ممكنة أخرى؟ في حقيقة الأمر نحن نعيش على واحدة من أربع هندسات لمدة الأربعة بلايين سنة الأخيرة. الهندسة الزائدية تخترق مسلمة التوازي عن طريق وجود أكثر من خط واحد يمر خلال أي نقطة بحيث يكون موازيا لخط معلوم أما الهندسة الإهليلجية فهي تقول أنه ليس هناك خطوط متوازية على الإطلاق؛ فكل خطين يتلاقيان (مسلمات إقليدس الأخرى يجب أن تعدل قليلا لتسمح بذلك لكن ثوابتها لازالت متحققة).

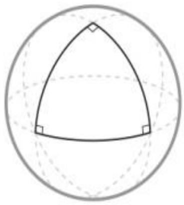
هناك أشكال رائعة مختلفة من الهندسة الإهليلجية إلا أن أكثرها شيوعا هي المجموعة الكروية التي يكون فيها الفضاء عبارة عن سطح كرة، وتلعب الدوائر الكبيرة دور الخطوط المستقيمة: أكبر دوائر تستوعبها الكرة (وهي تنشأ من مستويات تمر بمركز الكرة، وهي الخطوط الجيوديسية للكرة).

في الهندسة الإهليلجية مجموع قياسات زوايا المثلث أكبر من 180 (لكن أصغر من 540)، ومنها المثلث ثلاثي الزاوية القائمة.

الزوايا الثنائية Biangles



في الهندسة الإهليلجية لا توجد خطوط متوازية؛ فكل خطين لابد أن يتلاقيا. في هذا السياق تكون قمة المثلث كأكثر المضلعات الأساسية مستولى عليها بوساطة زاوية ثنائية ذو وجهين

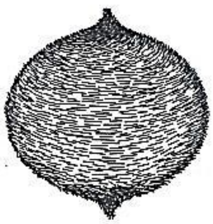


في الهندسة الكروية لابد أن تكون زاويتي ثنائي الزاوية متساويتين، وتتحدد مساحته ببساطة عن طريق جمع الزاويتين

يفسر ثنائي الزاوية أن في الهندسة الإهليلجية لم تعد نقطتان تحددا خطا وحيدا بل إن هناك عدد لا نهائي من الخطوط التي يمكنها ربطهما معا، بالمثل على كوكب الأرض ليس هناك مايسمى أقصر مسار بين القطبين الشمالي والجنوبي.

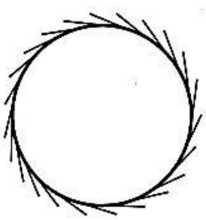
الطوبولوجيا الجبرية ALGEBRAIC TOPOLOGY

نظرية الكرة المشعرة Hairy ball theorem



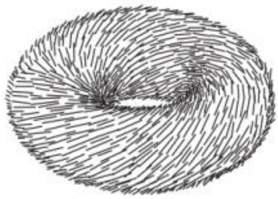
لا يمكنك تمشيط كرة

في أواخر القرن التاسع عشر اكتشف هنري بوانكاريه ما أصبح معروفا بمودة باسم مبرهنة الكرة المشعرة.



بفرض أن لديك كرة ينبت فيها الشعر عند كل نقطة، ونريد أن نمشطه بشكل مستو وناعم حول الكرة (بمعنى آخر لدينا حقل متجه على الكرة) تقول مبرهنة بوانكاريه أنك مهما حاولت تحقيق ذلك فسوف تترك دائما على الأقل شعرة وهذه نظرية طوبولوچية لذلك فإن أي سطح مكافئ للكرة طوبولوچيا (مثل كلب على سبيل المثال) لا يمكن أبدا أن يمشط تمشيطا مثاليا.

الطارات المشعرة وزجاجات كلاين Hairy tori and Klein bottles



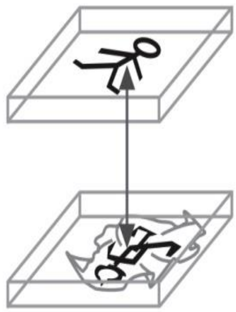
تثير نظرية الكرة المشعرة تساؤلا: ما الأشكال التي يمكن تمشيطها؟ بالنزول إلى البعد الأقل مقدار بعدا واحدا نجد أنه من السهل تمشيط دائرة مشعرة دون ترك شعرة. وعلى الرغم من أن الكرة لا يمكن تمشيطها إلا أن هناك سطحايان ثنائيا الأبعاد يمكن تمشيطهما، والمثال الوحيد القابل للتوجيه هو الطارة المشعرة أما الطارة المزدوجة والطارة الثلاثية فلا يمكن. زجاجة كايلن المشعرة هي السطح غير القابل للتوجيه الوحيد الذي يمكن تمشيطه، لذلك فإن المستوى الإسقاطي الحقيقي على سبيل المثال لا يمكن تمشيطه.

ويتغير ذلك تماما عند زيادة الأبعاد مقدار بعد واحد؛ حيث يمكننا تمشيط كرة مشعرة ثلاثية الأبعاد(النظير ثلاثي الأبعاد للكرة المألوفة)، وبالمثل يمكننا تمشيط كرة خماسية الأبعاد، وسباعية الأبعاد، وبصفة عامة أي كرة لها في الأبعاد (n) حيث (n) عددا فرديا، أما الكرات في الأبعاد (n) لا يمكن تمشيطها أبدا إذا كانت (n) عددا زوجيا.

النقط الثابتة هندسيا Geometric fixed points

لنفرض أن لديك ورقة موضوعة بشكل مستوى في أرضية صندوق وقمت بسحقها، أو طيها، أولفها ثم ألقيت بها في الصندوق مرة أخرى فإن مبرهنة النقطة الثابتة لبراور تؤكد أن لا بد أن تكون هناك نقطة واحدة على الأقل على الورقة تقع مباشرة فوق موضعها الأصلي، وهناك مثال آخر هو الذي ألهم براور بملاحظة ما لاحظه: إذا قمت بتقليب القهوة الموجودة في فنجان بأي مقدار فسيكون هناك جزيء من المشروب يقع تماما في موضعه الأصلي، وتسمى تلك النقط نقط ثابتة هندسيا، وتؤكد مبرهنة براور أن في العديد من الأحوال سوف يكون هناك نقطة كهذه.

مبرهنة النقطة الثابتة لبراور Brouwer's fixed point theorem



تقوم فكرة مبرهنة النقطة الثابتة لبراور على أنك إذا أخذت جسما هندسيا وقمت بتشويهه بطريقة ما، فسوف يكون هناك على الأقل نقطة ما موقعها لم يتغير. إلا أن هناك بعض المحاذير.

أولا في مثال الورقة التي في الصندوق، لا يمكنك تمزيقها، فالمبرهنة سوف تنتهك إذا مزقت الورقة نصفين وقمت بتبدليهما، يعني ذلك رياضيا أن الدالة لابد أن تكون متصلة.

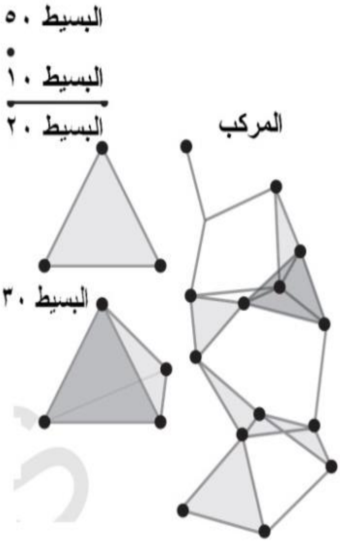
ثانيا يجب أن تعيد الورقة كلية إلى الصندوق (وألا تسكب القهوة). مثال آخر: إذا كنت تحمل خريطة متجولا في المدينة فسوف يكون هناك دائما نقطة على الخريطة تحتل تماما الموقع الذي تمثله، أما إذا أخذت الخريطة خارج المدينة لن يبقى ذلك صحيحا؛ لأنه يعني أن من المؤكد أننا نتحدث عن دالة من الفضاء (X) في نفسها.

النقطة الأخيرة أكثر براعة. إذا وضعنا في اعتبارنا المستوى غير المنته كليا، وقمنا بإزاحته وحدة لليمين فلن تكون هناك أي نقطة ثابتة، فالمبرهنة تتحقق فقط إذا كان (X) طوبولوچيا قرصا أو كرة ، وهذا قد يكون خط مستقيم في الأبعاد الأحادية، أو قرص في الأبعاد الثنائية، أو كرة في الأبعاد الثلاثية فأكثر، وفي كل حالة لابد أن يتم تضمين حدود (X)، فإزالة الحافة يجعل المبرهنة لا تتحقق.

وما سبق معا نجد أن: إذا كان لدينا دالة متصلة ($f\colon X \to X$) من كرة في نفسها، فلابد أن يكون هناك نقطة ما ثابتة أي نقطة بحيث تكون ($f(x) = x$).

الطوبولوجيا الجبرية Algebraic topology

توصل علماء الطوبولوچيا في مطالع القرن العشرين إلى لغة جديدة مبسطة للهندسة مبنية على المبسطات (simplices) حيث:



- المبسط صفر هو نقطة منفردة.
- المبسط الأحادي هو قطعة مستقيمة محدودة بنقطتين.
- المبسط الثنائي هو مثلث محدود بثلاث قطع مستقيمة، وثلاث نقط.
- المبسط الثلاثي هو رباعي سطوح محدود بأربعة مثلثات، وست قطع مستقيمة، وأربع نقط.
- المبسط الرباعي هو خماسي رباعي الأبعاد (راجع المجسمات رباعية الأبعاد) محدود بخمسة من رباعي السطوح، وعشرة مثلثات، وعشر قطع مسقيمة، وخمس نقط وهكذا.

هذه التسلسلات من الأرقام يمكن قراءتها من مثلث باسكال).

أما المجمع (complex) فهو شكل يتكون من لصق أي عدد من المبسطات معا بطول حوافها، وما لاحظه سولمون ليفستشز ، وآخرون هو أن البيانات المطلوبة هنا تكون أقل ما يمكن، بالتالي تظهر قواعد جبرية ضمنية معينة، وبجمع وطرح المبسطات تنتج مجموعات تماثل، ومجموعات التماثل(homology groups) هذه تحمل تشفيرا لقدر كبير من البيانات عن الشكل.

التثليث Triangulation

لا تبنى الكرة من الأجزاء الأساسية مثل المبسطات، وبالسماح للمبسطات بالانحناء، والتمدد عند إنشائها تنشأ مجموعة متسعة جدا من الأشكال، وعندما يمكن تفكيك شكل ما إلى هذه المبسطات الممدة نقول أن هذا الشكل تم تثليثه. يمكن تثليث الكرة إلى أربعة مثلثات، وفي حقيقة الأمر كل متشعب في الأبعاد الثنائية والثلاثية يمكن تثليثه، ولهذا السبب نجد أن مجموعات التماثل أداة فعالة جدا في مسائل الهندسة العملية مثل التصوير

الطبي بينما الفضاء رباعي الأبعاد مكان غريب، وبعض المتشعبات الرباعية لا يمكن تثليثها على الإطلاق، أما في الأبعاد الأعلى فالإجابة غير معروفة.

مميز أويلر هو أحد أمثلة البيانات القيمة التي تنشأ من التثليث.

الهندسة الجبرية ALGEBRAIC GEOMETRY

المتغيرات varieties

الطريقة القياسية لوصف منحنى هي استخدام معادلة تتضمن عادة كثيرة حدود، وهذا يمدنا مباشرة بوجهتي نظر: المنحنى الهندسي، وكثيرة الحدود الجبرية، فمعادلة الدائرة هي $(x^2 + y^2 = 1)$، فإذا كتبنا $(p(x, y))$ لترمز إلى كثيرة الحدود $(x^2 + y^2 - 1)$ بالتالي فإن الدائرة هي مجموعة من النقط حيث تتلاشى (p) بمعنى أن الدائرة هي مجموعة جميع الأزواج المرتبة (x, y) بحيث تكون $(p(x, y) = 0)$، وهذه هي الفكرة الأساسية للمتنوعة التي هي عبارة عن مجموعة من النقط التي تتلاشى عندها كثيرة حدود ما (أو مجموعة من كثيرات حدود). والعمليات الهندسية مثل لصق المتنوعات معا، أو البحث عن مناطق تداخلها تناظر عمليات جبرية معينة على كثيرات الحدود، وهذه هي نقطة بداية موضوع الهندسة الجبرية التي هدفها الأساسي هو فهم المتنوعات باعتبارها ظواهر عامة بدلا من التركيز على أمثلة فردية (مثل القطوع المخروطية).

الهندسة الجبرية Algebraic geometry

كل متنوعة هندسية تؤدي إلى بنية جبرية مناظرة، تسمى حلقة كثيرة حدود (polynomial ring)، وفهم الهندسة فهما جيدا يتطلب معرفة بعلم الجبر والعكس صحيح، فهذا الهجوم ذو الحدين قد أثمر عن نتائج خصبة خلال القرن العشرين.

الإطار الابتدائي للهندسة المعاصرة هو الأعداد المركبة، حيث تؤكد المبرهنة الأساسية في الجبر أن كل متنوعة لها نصيب كامل من النقط، إلا أن الهندسة الحديثة تطبق هذه التقنيات في مدى واسع من الإطارات الأخرى.

موضوع المعادلات الديفونتية القديم يبحث عن حلول صحيحة لكثيرات الحدود، وقد أدخلت الهندسة الجبرية وسائل جديدة إلى هذا البحث فنتج عن ذلك الهندسة الديفونتية، وكان إثبات ويل لمبرهنة فيرما الأخيرة ناتجا بارزا لهذا التجارب الرائع مابين الهندسة ونظرية الأعداد.

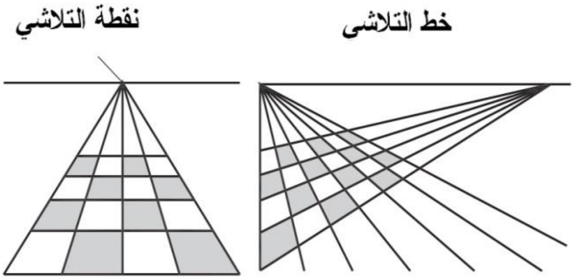
كثيرات الحدود لها معنى في كل مكان يمكن فيه القيام بعملية الجمع، والطرح، والضرب مما يفتح أسئلة هندسية في مواضع غير متوقعة مثل الحقول المنتهية. وقد كشفت حدسيات ويل أسرار الهندسات المنتهية. أما كيفية تداخل الهندسة الجبرية، والطوبولوچيا الجبرية فهذا هو الموضوع الذي تتناوله حدسية هودج، وهو من أعمق الأسئلة المتعلقة بهذا الموضوع.

الهندسة الجبرية نظرية فعالة للغاية لكنها تعمل على مستويات عالية من التجريد لدرجة مخيفة، والتي طورت في عناصر جروتينديك للهندسة الرياضية الجبرية (Grothendieck's Éléments de Géométry Algébrique).

المنظور Perspective

كيف يمكنك تمثيل فضاء ثلاثي الأبعاد في مستوى ثنائي الأبعاد؟ يرجع تاريخ هذه المسألة إلى رسامين الكهف في العصر الحجري. بالطبع هناك العديد من العقبات الفنية في طريق التمثيل الطبيعي تماما، ومن الأشياء التي يهتم بها علم الرياضيات هي الطريقة التي تبدو عليها الأشياء البعيدة أصغر من الأشياء القريبة، وقد كانت هناك محاولات بسيطة لاستيعاب هذه الظاهرة بصفة عامة لكنها بدت غريبة وخاطئة مثل المنظور الملتوي في الفن المصري القديم. وقد حقق فنانو النهضة الإيطالية أمثال جيوتو، وبرانليستشي باكتشاف طريقة استخدام نقط التلاشي لرسم الأجسام القصيرة.

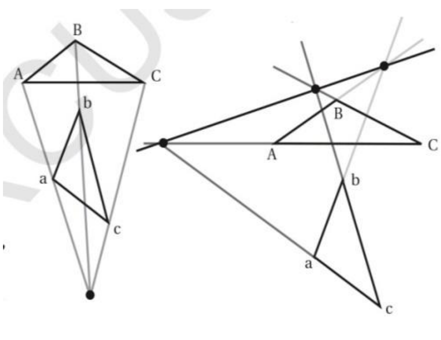
نقط التلاشي وخطوط التلاشي Vanishing points and vanishing lines



تضمن الاستخدام الأولي للمنظور على يد الفنانيين أمثال ماساكو نقطة تلاشي وحيدة، وكانت عادة في مركز اللوحة. إذا تخيلنا أن الأرضية في الرسم رقعة شطرنج غير منتهية، فستكون الخطوط المتوازية المبتعدة عن المشاهد متقاربة في هذه النقطة الوحيدة.

جرب الفنانون الذين جاءوا بعد ذلك مثل فيتوري كارباكيو وضع نقطة التلاشي تلك في مواضع مختلفة، أحيانا حتى خارج اللوحة إلا أن هذا التعديل قدم مسألة أخرى. عندما كانت نقطة التلاشي في المركز كانت خطوط رقعة الشطرنج المبتعدة عن المشاهد تتقارب، وكانت الخطوط العمودية عليها تبدو أفقية، أما تغيير موضع النقطة يعنى أن هذه الخطوط لم تعد تبدو أفقية، وفي الحقيقة فإن هذه الخطوط تتقارب لتتجمع في نقطة تلاشي ثانية، أما الخطوط المستقيمة المرسومة في الرقعة بزوايا متوسطة تتقارب عند نقط تلاشي تقع بين هاتين النقطتين، والخط الذي يصل بين نقطتي التلاشي يسمى خط التلاشي.

مبرهنة ديساركو Desargues' theorem



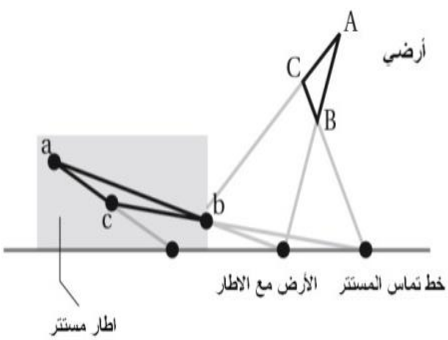
خذ مثلثين (abc)، (ABC). جاءت تسمية هذه المبرهنة بهذا الاسم تكريما لأبي هندسة المنظور جيرارد ديساركو وهي تربط بين فكرتين مختلفتين:

1- المثلثان في منظور من نقطة واحدة إذا كانت الخطوط (Aa)، و(Bb)، و (Cc) تتقارب جميعا إلى نقطة.

2- المثلثان في منظور خط إذا كانت نقط التلاقي الثلاثة لـ (AB, ab)، (BC, bc)، (AC, ac) تقع جميعا على خط مستقيم واحد.

تقول مبرهنة ديساركو أن هاتين الحالتين متكافئتان حيث أن: المثلثين يكونان في منظور من نقطة واحدة إذا وإذا فقط كانا في منظور خط.

كيف ترسم مثلثا How to draw a triangle



تعد مبرهنة ديساركو نتيجة مهمة للفنان التشكيلي، فهي تمحو الحاجة إلى القلق حيال نقط التلاشي، والنقطة الرئيسة هي أنه ليس من الضروري أن يقع المثلثان في نفس المستوى، والحالة الوثيقة بذلك هي عندما يكون المثلث (ABC) واقعا على الأرضية بينما المثلث (abc) هو صورته على لوحة الرسام.

نتخيل أن اللوحة تقف على الأرضية بزاوية 90، وهدف الرسام أن يجعل المثلثين في منظور من نقطة واحدة، لكن أين يجب أن يرسم (abc)؟ تقول مبرهنة ديساركو أن المثلثين لابد أن يكونا في منظور من خط، وهذا الخط يجب أن يكون حيث تتلاقى الأرضية باللوحة.

يمكن للرسام أن يبدأ بالنقطة (a) أينما أراد ثم يتأكد ن كل حافة من (abc) تمتد لتقطع الأرضية في نفس المكان الذي يقطع فيه الضلع المناظر من (ABC) ال اللوحة.

الهندسة الإسقاطية Projective geometry

أي نقطتين على المستوى الإقليدي تحددان خطا مستقيما، والعكس، من الصحيح تقريبا أن أي خطين يتقابلان في نقطة، وهذه الازدواجية بين النقط والخطوط تشكل مبدأ رائعا وفعالا، إلا أنها للأسف لا تكون إلى حد ما صحيحة: لأن الخطين المتوازيين لا يلتقيان.

في الرسم يحدث عكس ذلك، فالخطوط المتوازية يمكنها أن تتلاقى، أو على الأقل تظهر على أنها تتلاقى، فالخطوط المتوازية المبتعدة عن المشاهد تتقارب في النهاية

ما يسميه الرسامون نقطة التلاشي يناظر الفكرة الرياضية لنقطة عند ما لا نهاية. الفكرة هي توسيع المستوى بإضافة نقط إضافية جنبا إلى جنب في الموضع الذي يفترض أن تتلاقى الخطوط المتوازية.فيه.

بمجرد فعل ذلك، تبدأ الهندسة في أن تبدو مختلفة، وبطرق عديدة أبسط، على سبيل المثال: القطوع المخروطية الثلاثة تتحد مرة أخرى كرؤى مختلفة للقطع الناقص (الإهليلجي)، وبالطبع فإن الهندسة الإسقاطية ليست هندسة إقليدية، حيث إنها مصممة بحيث لا تتحقق مسلمة التوازي، لكنها ليست لاإقليدية بنفس معنى الهندسة الزائدية بل إن أفضل تصور لها يكون على إنها تقارب (من الناحية العلمية: ضغط) للهندسة الإقليدية، فلا يزال كل نطاق صغير ينتمي للهندسة الإقليدية تماما: ولا نكشف طبيعته اللاأقليدية الكلية إلا عندما ننظر إلى الفضاء ككل).

الإحداثيات المتجانسة Homogeneous coordinate

لا يفضل علماء الرياضيون المراوغة والتحايل بشأن مفهوم "اللانهاية": لقد كتب الذين يتلاعبون بهذا المبدأ بحرية الكثير من الهراء خلال القرون. لذلك إذا كانت الهندسة الإسقاطية بحاجة إلى "نقاط عند اللانهاية" إضافية، فإننا نحتاج إلى نظام إحداثيات يكون للمالانهاية فيه معنى، وقد قدمت إحداثيات موبيوس المتجانسة حلا أنيقا.

تعطى الإحداثيات على المستوى الحقيقي بزوج من الإحداثيات الديكارتية مثل (2,3) أو (x, y) بينما النقط على المستوى الإسقاطي فتعطى بثلاثة إحداثيات: [2,3,1] أو [x,y,z]، والاختلاف أن بعض الإحداثيات تمثل نفس النقطة تماما كما يمكن التعبير عن الرقم بعدة كسور متكافئة، على سبيل المثال: [2,3,1]، [4,6,2]، [-10,-15,-5] مثل نفس النقطة الإسقاطية، وبصفة عامة: ضرب أي عدد ثابت في كل الإحداثيات لا يغير النقطة.

يمكن تضمين جميع نقط المستوى العادي عن طريق ربط (x,y) بـ [x,y,1]. لكن

هناك المزيد من النقط عند مالا نهاية أيضاً، وتكون على الصورة [x,y,0] لذلك يمكن كتابة معادلة خط التلاشي عن الرسام على الصورة : (Z=0).

الهندسة المنتهية Finite geometry

منهج الهندسة الجبرية هو دراسة الأشكال خلال كثيرات الحدود التي تعرفها، وقد بدأ هذا المنهج في الأعداد الحقيقية مع دراسة القطوع المخروطية على سبيل المثال.

بمجرد أن أصبح نظام الأعداد المركبة متطورا تطلب ذلك مرحلة مركزية لكن فلسفة الهندسة الجبرية لها معنى في أي سياق يمكن فيه القيام بعملية الجمع والطرح والضرب والقسمة، بشكل خاص يمكننا الأخذ في الاعتبار هندسة المجالات المنتهية. وأبسط مثال على ذلك هو الحساب النمطي بأساس أولي. يمكننا البدء بكثيرة حدود مثل ($x^2+2=0$)، وبدلا من إيجاد حلول لها تنتمي إلى الأعداد الحقيقية، نحاول حلها في مجموعة الأعداد الصحيحة، حالة 3.

هنا

$$1^2 + 2 = 3 = 0 \qquad \text{(الحالة 3)}$$

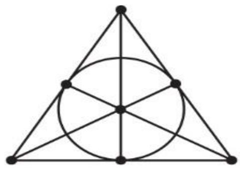
أيضاً

$$y^2 + 2 = 6 = 0 \qquad \text{(الحالة 3)}$$

لذلك، في الحالة 3، يكون لكثيرة الحدود x^2+2 حلان هما تحديدا القيمة 1، والقيمة 2. ونفس كثيرة الحدود في حالة 5 ليس لها حل. يعتبر ذلك مثالا للبدء بدالة كثيرة حدود وعد النقط التي تحققها في المجالات المنتهية (Finite fields)، لكن الآن ما هو النمط؟ عندما نعمل على مجالات منتهية أكبر كثيرا هل يمكن لعدد الحلول أن يظهر لنا فجأة عشوائيا، أم أنه توجد قواعد أساسية تحكم ذلك؟ أجيب عن هذا السؤال في أحد أبرز معالم الهندسة في القرن العشرين وهو إثبات بيير ديلين (Pierre Deligne's) لحدسيات ويل (Conjectures Weil).

الهندسة الإسقاطية لها معنى في هذا السياق أيضاً، وقد نتجت عنها أشكال مثل مستوى فانو.

مستوى فانو Fano plane



المستوى الإسقاطي هو مجموعة من نقاط وخطوط منظمة بحيث:

- أي نقطتين تقعان على خط وحيد.
- أي خطين يتلاقيان في نقطة واحدة.
- يوجد أربع نقاط ثلاثة منها لا تقع على خط واحد.

الطريقة القياسية لعمل مستويات إسقاطية تكون من خلال الإحداثيات المتجانسة مما ينتج عنه مستويات إسقاطية حقيقة ومركبة يمكننا تنفيذ نفس الخدعة بدءا بمجال منته وأصغر تلك المجالات هو المجال ثنائي العنصر (F_2) (حيث لا يوجد مجال منته صحيح ذو عنصر واحد)، وفي هذه الحالة فإن النتيجة هي مستوى فانو، الذي يتألف من سبع نقاط فقط، متصلة بسبعة خطوط وتم تسميتها بهذا الاسم نسبة إلى عالم الهندسة الإيطالي جينو فانو.

دالة زيتا لويل Weil's Zeta function

تأتي المجالات المنتهية على شكل أبراج قاعدتها عدد أولي. البرج الأول يرتكز على العدد 2، ويتكون من المجالات ... $F_2, F_4, F_8, F_{16},$ (مجال حجمه2,4,8,16, وهكذا).

البرج الذي قاعدته العدد 3 يتكون من ... $F_3, F_9, F_{27}, F_{81},$ و لأي عدد أولي P.

هناك برج ... $F_P, F_{P^2}, F_{P^3},$ بحيث تكون الطوابق الأولى التي عددها m تشكل f_{p^m}. المتنوعة (Variety) هي كيان هندسي معرف بدوال كثيرة الحدود، على سبيل المثال ، يتم تعريف الدائرة بواسطة $x^2 + y^2 = 1$، فعندما نكون على علم بكثيرة الحدود تلك أو المتنوعة ,V يمكننا التساؤل عن عدد النقاط التي تحقق المتنوعة عند كل مستوى F_{P^m}، فلنسمي هذا العدد N_m، وبالتالي تصبح V لها عددN_1 من النقاط في المجال F_p ، وكذلك عددN_2 من النقاط في المجال F_{P^2}، وأيضا عدد N_3من النقاط في المجال F_{P^3} وهكذا.

بالتأكيد لا يمكن للمتنوعة أن تفوت نقاطًا في طريقها صعودًا إلى قمة البرج، لذلك... $N_1 \leq N_2 \leq N_{3\leq}$ فتكون المتسلسلة ... $N_1, N_2, N_3,$ هي أساس هندسة المجالات

المنتهية، وهذا ما بدأ أندريه ويل (Andre Weil) في فهمه .وكانت فكرته هي وضع المتسلسة في دالة لامية (L-Function) على الشكل ζ فيما عرف باسم دالة زيتا لويل (Weil's Zeta Function).

حدسيات ويل (نظرية ديلينن) The Weil's conjectures (Deligne's theorem)

دالة زيتا لويل (Weil's Zeta Function) عبارة عن تكوين صعب، إلا أن حدسيات ويل تؤكد أنها أسهل كثيرا مما تبدو عليه في الوهلة الأولى.

في الحدسية الأولى لويل (The first Wail's conjecture) قال أن ζ يتم تحديدها عن طريق عدد كبير منته من البيانات وهذه حقيقة مهمة، لأنها تعني أن المتسلسلة $N_1, N_2, N_3, \ldots$ لا تضم أعدادا عشوائية، بل تأتي في نمط ثابت يمكن التنبؤ به.

الفرضيتان المتبقيتان وضحتا هذا النمط بدقة؛ حيث تعين الفرضية الثانية المواقع التي تصبح فيها $\zeta = 0$ ، فهي ببساطة تقول أن كل أصفار ζ تقع على الخط الحرج $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}$ مما يذكرنا بفرضية ريمان (Riemann hypothesis) .

لقد كانت حدسيات ويل (The Weil's conjectures) هي القوة الدافعة وراء التوسع الكبير الذي حدث في الهندسة الجبرية خلال القرن العشرين، وقد أثبت ألكسندر جروثيندك (Alexander Grothendieck) الحدسية الأولى عام 1960م، بينما أثبت بيير ديلين (Pierre Deligne) الحدسيات الأخرى عام 1974م.

نظرية هودج Hodge theory

بحلول منتصف القرن العشرين قطعت الهندسة شوطا طويلا أبعد ما يكون عن أي شيء عرفه إقليدس. وفي نفس الوقت ظلت اهتمامات علماء الهندسة التقليدية قائمة مثل: ما أنواع الأشكال التي يمكن أن تكون موجودة ؟

وقد أثرى علم الجبر هذا السؤال إثراء ضخما وفي اتجاهين مختلفين: أولهما المعادلات كثيرة الحدود في الهندسة الجبرية، والثاني مجموعات الطوبولوجيا الجبرية، وقد حقق لنا

الأول مجموعات متنوعة كأفكار أساسية للأشكال وتوسعة ذلك قليلا يؤدي بنا إلى الدورات الجبرية التي تبنى أساسا عن طريق إضافة المجموعات المتنوعة معا أو ضربهم في أعداد نسبية.

وعلى جانب آخر يقع البناء الطوبولوچي للمبسطات (Simplices) والفرق الجوهري هنا هو أن هذه البنى تنشأ من أعداد حقيقية بدلا من الأعداد المركبة، والاختلاف الآخر هو أنها بنى طوبولوچية مرنة غير مقيدة بمعادلات كثيرة حدود. نذكر ثانية أن هذه المبسطات تضاف إلى بعضها البعض مكونة دورات طوبولوچية

وكان الإطار الذي تلاقت فيه هاتين النظريتان تحديدا هو الهندسة الإسقاطية خلال الأعداد المركبة، أما السؤال الذي طرحه ويليام هودج (William Hodge) أثناء خطابه في المؤتمر الدولي لعلماء الرياضيات عام 1950م هو: متى تؤدي هاتان الفكرتان إلى نفس النتيجة؟ متى تصبح الدورات الجبرية والدورات الطوبولوچية متكافئة؟.

حدسية هودج The Hodge conjecture

يعتبر الوصول إلى الحل الجزئي للمسألة الرئيسة في نظرية هودج أمرا سهلا. عند النظر إلى الأعداد المركبة خلال الأعداد الحقيقية نجد أن الأعداد المركبة لها بعدان (وهو ما يفسر سبب تشابه الرسم البياني لأرجاند (Argand diagram) مع المستوى ثنائي الأبعاد)، وبالمثل فإن أي متنوعة من الأعداد المركبة يجب أن تحتوي على أبعاد زوجية،من خلال منظور حقيقي. لذا فإن المعيار الأول لكي تكون الدورة جبرية أن تكون لها عددا زوجيا من الأبعاد إلا أن هذا ليس كافيا.

لقد كان هودج (Hodge) متمكنا من علم التفاضل والتكامل، كما أن عمله على معادلة لابلاس (Laplace’s equation) زوده باللغة التي مكنته بشكل خاص من توصيف الدورات الطبولوجية المستقرة، والتي تعرف الآن باسم دورات هودج (Hodge cycles).

افترض هودج (Hodge) أنه تمكن من الوصول إلى الوصف الطوبولوچي الصحيح للدورات الجبرية وبالتأكيد أي دورة جبرية الآن يمكن وصفها بدورة هودج (Hodge’s cycles).

ويعتبر سؤال المليون دولار (منذ أعلن معهد كلاي (Clay institute) عنها في عام 2000م) هو إثبات ما إذا كان عكس الحدسية صحيح أيضاً.

لا أحد يشك في مدى أهمية نظرية هودج (Hodge) إلا أن التساؤل حول ما إذا كانت تقدم الإجابة الصحيحة مازال قائما. وفي عام 1962م، أفاد الثنائي عطية وهيرزبرج (Atiyah and Hirzebruch) أن هذه الحدسية غير صحيحة عند تقييدها إلى الدورات على الأعداد الصحيحة بدلا من الأعداد النسبية.

أما آندريه ويل (Andre Weil) فلم يؤمن بصحة حدسية هودج (Hodge)، واعتقد أن علماء الهندسة عليهم أن يبحثوا عن مثالا مضادا لها. وحتى يتم العثور على برهان أو مثال مضاد ستظل حدسية هودج كما قال ألكسندر غروتيندِيك (Alexander Grothendieck): "إنها أعمق حدسية في النظرية التحليلية للمتنوعات الجبرية."

عناصر غروتيندِيك للهندسة الجبرية

Grothendieck’s Éléments de Géométrie Algébrique

نجحت الإحداثيات الديكارتية في فتح الهندسة الرياضية على الطرق الجبرية بشكل كبير كما اتضح من تصنيفات القطوع المخروطية و تكعيبات نيوتن.

الجبر الحديث هو موضوع مجرد بحت كما أن ظهور المتنوعات الجبرية مكن هذا التجريد من الدخول إلى الهندسة، مما جعله أكثر عرضة لهجوم التعميم بدلا من التركيز على الأمثلة الفردية.

في الستينات من القرن الماضي، تعرض هذا الموضوع لانقلاب هائل آخر، وكان مفجر الثورة هذه المرة ألكسندر غروتيندِيك (Grothendieck) الذي ربما كان الخبير التجريدي الأعظم، ودراسته المطروحة في أربعة مجلدات تحت اسم (Éléments de Géométrie Algébrique) أعادت صياغة موضوع الهندسة الجبرية برمتها على نحو أعمق، وارتكز عمله على استبدال المتنوعات بمخططات.

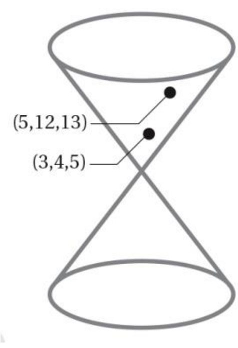
المخططات Schemes

كان الدافع الأكبر لنهج غروتينديك (Grothendieck) هو اختلاف بين لغتي الجبر والهندسة، حيث أن العناصر الهندسية الأساسية كانت هي المتنوعات التي يتم تعريفها بكثيرات حدود تشكل في الوقت نفسه عنصرا جبريا ألا وهو الحلقة كثيرة الحدود (polynomial ring). أدرك غروتينديك (Grothendieck) أن نوعا محدودا جدا من الحلقات يمكن أن ينشأ بهذه الطريقة، وأكثرهم شيوعا حلقة الأعداد الصحيحة الحلقة (Z)، ولكن لا توجد أي متنوعة محتوية على (Z) كحلقة لها. وقد كانت فكرته الجريئة أن الأساليب الهندسية التي تم تطويرها لابد أن تعمل مع أي حلقة، حتى ولو لم يكن لها متنوعة تابعة، وقد سميت البنى الجديدة بالمخططات (Schemes).

تعتبر المخططات تجريدية للغاية، والعديد منها ليس له تفسير هندسي واضح، واستخدامها يشكل تحديا تقنيا هائلا، إلا أن تصنيف المخططات بالمقابل أفضل بكثير من المتنوعات،وهذا يؤدي بدوره إلى جعل النظرية أكثر تماسكا وقوة في المجمل والذي ظهر جليا من خلال حدسيات ويل.

الهندسة الديفونتية DIOPHANTINE GEOMETRY

الهندسة الديفونتية Diophantine geometry



على الرغم من أن دراسة المعادلات الديفونتية موضوع متعلق بنظرية الأعداد، إلا أن لها جذورا في علم الهندسة في ثلاثيات فيثاغورث.

في الأربعينات من القرن الماضي أدرك عالم الهندسة أندريه ويل (Andrea Wail) أن الأساليب المتطورة في الهندسة الجبرية مرتبطة بشدة بهذا الموضوع، وكان ذلك بداية الجمع الذي حدث في القرن العشرين بين نظرية الأعداد والهندسة.

فإذا نظرنا من ناحية هندسية للمعادلة ($x^2 + y^2 = z^2$) تحدد سطحا (هو بالتحديد المخروط المزدوج)، أما من وجهة نظر نظرية الأعداد هذه المعادلة هي شرط ثلاثيات فيثاغورث وما وضحه إقليدس فيما بعد أن هذا المخروط به عدد لانهائي من النقط التي إحداثياتها أرقام صحيحة. بصفة عامة: أي معادلة رياضية كثيرة الحدود مثل كثيرة حدود فيرما ($x^n + y^n = z^n$) تحدد متنوعة، لكن السؤال الذي يطرحه منظرو نظرية الأعداد هو ما إذا كانت هذه المتنوعة تحتوى على أي نقطة (x, y, z) إحداثياتها أعداد صحيحة أم لا.

في العادة يكون من الكافي أن تبحث فقط عن النقط التي إحداثياتها أعداد نسبية، بالتالي فإن البحث عن متنوعات فيها نقط نسبية هو ما يشغل منظري نظرية الأعداد الحديثة.

النقاط النسبية على متنوعة جبرية

المتنوعة: هي عنصر هندسي معرف بمعادلات كثيرة حدود.

مثال: المنحنيات: وهي متنوعات أحادية الأبعاد في الواقع المنحنيات تعتبر كذلك المفتاح لأبعاد أعلى، لأن أي متنوعة يمكن تشكيلها بمجموعة من المنحنيات.

يتم تقسيم المنحنيات حسب درجة تعقيدها أو طرازها فالمنحنيات البسيطة مثل القطوع المخروطية من الطراز صفر وقطعا تحتوى على عدد لانهائي من الأعداد النسبية (مثال : الدائرة ($x^2 + y^2 = 2$))، أو لا تحتوى على أي أعداد نسبية على الإطلاق مثل ($x^2 + y^2 = 3$).

الآن يمكننا اكتشاف حالة كل منحنى بدون صعوبة كبيرة ومن جهة أخرى فإن المنحنيات الأخرى الأكثر تعقيدا من الطراز 2 أو أكثر تحتوى على عدد منته من الأعداد النسبية وهذا ما استشعره العالم لويس مورديل (Louis Mordell) عام 1922م، وأثبته أخيرا العالم جيرد فلاتينجس(Gerd Flating’s) عام 1983م.

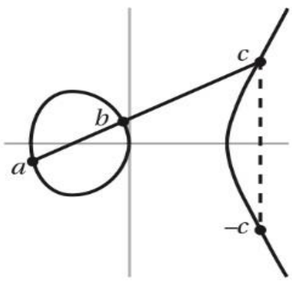
كانت مبرهنة فلاتينج (Flating’s) خطوة كبيرة للأمام، ولكنها لم تغلق الباب بعد في موضوع الأعداد النسبية على المنحنيات. وبين النوع السهل والمعقد، تبقى المنحنيات

الإهليلجية المبهمة من الطراز1والتي يمكن أن تشتمل على عدد منته أو غير منته من النقاط النسبية، وتحديد الفرق بين هاتين الحالتين هو السؤال الذي طرح في أحد أهم الأسئلة المهمة المفتوحة المتعلقة بهذا الموضوع: حدسية بيرخ وسوينارتون – داير (the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture).

المنحنيات الإهليلجية Elliptic curves

سنجد شيئا مثيرا للانتباه فيما يتعلق بالمعادلة ($y^2 + x^3 - x$) فهي تصف منحنى، ولكنه من نوع غير مألوف لنا؛ حيث يمكنك أن تجمع نقاطه حسب القاعدة التالية:

إذا كان (a) (b) نقطتين على ذلك المنحنى ارسم خط مستقيم يربط النقطتين، وبالتالي ذلك الخط سيقطع المنحنى في نقطة ثالثةc فنقول أن وبالتالي تصبح $z + b + c = 0.\text{so } a + b = -c$ (صفر المجموعة يمثل كنقطة إضافية عند ما لانهاية وهي تناظر خطوط رأسية؛ راجع الهندسة الإسقاطية)



فقط في المنحنيات الإهليلجية (يجب ألا يتم الخلط بين هذا وبين مفهوم القطع الناقص) يمكن تطبيق هذه القاعدة بسهولة لدرجة تجعل المنحنى يصبح مجموعة. وبما أن المجموعات الناتجة صعبة التكهن بها فهي تعتبر الدعامة الأساسية لعلم التشفير الحديث (cryptography).

بصفة عامة، معادلة المنحنى الإهليلجي على الشكل ($y^2 = x^3 + Ax + B$)

هذه المنحنيات بسيطة نسبيا ولكنها لازالت صعبة الاستيعاب. المنحنيات الإهليلجية تلعب دورا رئيسا في نظرية الأعداد الحديثة ولاسيما إثبات ويل لمبرهنة فيرما الأخيرة وبرنامج لانج لاند (Lang land’s programme)، وخواص هذه المنحنيات هي موضوع حدسية بيرخ وسوينارتون – داير (the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture).

الحلول النسبية للمنحنيات الإهليلجية Rational solutions of elliptic curves

بداية بالمعادلة ($y^2 = x^3 + 1$)، فإن فطرة المنظر ستقوده إلى التساؤل عما إذا كان هناك أرقام صحيحة تحقق هذه المعادلة. مثل ($3^2 = 2^3 + 1$). مؤخرا أصبح من المتفق عليه أن يمتد البحث عما إذا كان هناك كذلك أعداد نسبية تحقق هذه المعادلة، والسؤال الأساسي لهذه المعادلة هو ما إذا كانت المعادلة لها حلول نسبية كثيرة غير منتهية أم أن لها عدد محدود منته.

أكثر المعادلات الأساسية التي لم يفهم فيها هذا السؤال بشكل كامل هي معادلات المنحنى الإهليلجي مثل ($y^2 = x^3 + 1$)، حل معادلة مثل $y^2 = x^3 + 1$ للمنحنيات الإهليلجية الشكل أصبح الهدف الأسمي لنظرية الأعداد الحديثة. فخلال عام 1960 قدم كل من بريان بيرخ وبيتير سوينارتون حدسية قد تحدد عدد الحلول النسبية لهذه المعادلات المهمة.

حدسية بيرخ وسوينارتون - داير Birch and Swinnerton-Dyer conjecture

لأي منحنى وليكن (E) هناك إجراء متبع لتحديد دالة اللامية (L- Function)، فقد ادعى بيرخ وسوينارتون – داير أن هذه الدالة تقوم بترميز تفاصيل الحلول النسبية للمعادلة ، واعتقدوا بشكل خاص أن الدالة يمكنها اكتشاف ما إذا كانت (E) لها عدد محدود أو غير محدود من الحلول النسبية . تفترض حدسيتهم ضمنيا أنه إذا كانت $L(1) = 0$ ، فإن المنحنى له عدد لانهائي من الحلول النسبية أما إذا كانت $L(1) \neq 0$ فإن الأمر ليس كذلك.

أما أفضل تقدم حتى الآن في هذه المسألة يرجع إلى فيكتور كوليفاجن عام 1988، فمبرهنة كولفاجن – عند دمجها مع النتائج التالية لويلز و آخرين– تثبت نصف الحدسية تحديدا أن $L(1) \neq 0$، وبالتالي يكون لـ (E) عدد منته من النقط النسبية. والنصف المتبقي مخصص لحله 1000000 دولار كجائزة من مؤسسة كلاي.

الأشكال النمطية Modular forms

يبدو عالم التحليل المركب الحديث أبعد ما يكون عن مسائل المعادلات الديفونتية العتيقة، إلا أنه بسبب أن نظرية الأعداد والهندسة قد توحدتا خلال القرن العشرين، فقد تم تقديم تحليل مركب أحدث يتناول هذا المزيج، والمفهوم الأساسي هو مفهوم الشكل النمطي، وهو دالة تقوم بإدخال أعداد مركبة من النصف العلوي لمستوي فينتج عنها أعداد مركبة، ومن الملاحظ أن الأشكال النمطية تتمتع بدرجة عالية من التماثل.

الدالة الجيبية (The sine function) دالة دورية أي تقوم بتكرار نفسها ، فلو تحركنا يمينا خطوة مقدارها 2π سنجد إن الدالة لم تتغير، الأشكال النمطية تحقق تماثل كهذا لكن من خلال قواعد أكثر تعقيدا؛ حيث لا يتم تحديد التماثل بأعداد مفردة مثل 2π بل يجب أن يكون عن طريق مصفوفات 2×2 من الأعداد المركبة.

يمكن القول أن هناك سببان جعلا الأشكال النمطية لها هذا البريق في عالم الرياضيات الحديثة، أولهما إثباتها نظرية فيرما الأخيرة (من خلال مبرهنة النمطية modularity theorem)، والثاني هو البحث العملاق (the monster) (كما وصف بواسطة تصنيف المجموعات المنتهية البسيطة).

مبرهنة النمطية Modularity theorem

قام يوكاتا تانياما (Yukata Taniyama) وغورو شيمورا (Goro Shimura) في الخمسينيات من القرن الماضي بوضع حدسية تهدف إلى الربط بين مجاليين رياضيين مختلفين تماما، لقد وضعت في الاعتبار عنصرين مختلفين كلية: الأول هو المنحنيات الإهليلجية أكثر ما يهم منظري الأعداد، والثاني يأتي من عالم التحليل المركب وهو الأشكال النمطية. زعم تانياما وشيورا أن المنحنيات الإهليلجية والأشكال النمطية يعتبرا أساسا شيئا واحدا، حتى وإن كان التعبير عنهم يكون بلغات مختلفة، وكذلك أن الدالة اللامية يجب أن تكون بمثابة قاموسا يترجم بين اللغات المستخدمة في التحليل ونظرية الأعداد.

بدت حدسية تانياما وشيورا (Taniyama–Shimura) صعبة صعوبة لا يمكن

تذليلها، مع ذلك أصبحت مركز اهتمام مكثف في الثمانينيات، عندما وضح كلا من جيرهارد فراي وكينيث ريبيت (Gerhard Frey and Kenneth Ribet) كيف أن إثبات هذه الحدسية قد يتضمن مبرهنة فيرما الأخيرة. في عام 1995م، أثبت أندريه ويلز ، وريتشارد تايلور (Richard Taylor) جزءا كبيرا من المبرهنة ، وكان ذلك كافيا لويلز ليستنتج مبرهنة فيرما الأخيرة أما إثبات المبرهنة كليا كان في برويل وكونراد ودياموند ، وتايلور عام 2001. مبرهنة النمطية كما تعرف الآن أصبحت أساس التصميم الشامل المعروف ببرنامج لانجلاند (Langlands' program).

برنامج لانجلاند Langlands' program

تقوم الرياضيات على مجموعة من الحدسيات: هي تأكيدات يعتقد بعض علماء الرياضيات أنها صحيحة لكن لم يستطع أحد إثباتها بعد، بعضها مثل حدسية بوانكاريه ارتقت إلى مبرهنة، والبعض الآخر دحض وأهمل (على الرغم من أن حتى الحدسيات الخاطئة مثل برنامج هيلبرت (Hilbert's program) يمكن أن تشكل دافعا فعالا نحو التقدم). فقط بعض علماء الرياضيات تألقوا في هذا الموضوع، مثل الرؤية الموحدة (unifying vision) . كتب روبرت لانجلاند إلى آندريه ويل موجها له سؤالا إبداعيا عام 1976م: ماذا سيحدث إذا تم التوافق بين كل من عالم الرياضيات الجبرية وعالم التحليل.

تظهرمبرهنة النمطية (modularity theorem) أن بعض العناصر من العالمين ترتبط ارتباطا وثيقا، وقد كان ذلك ما توقعه لانجلاند (Langlands) إلا أن برنامجه يخطو إلى ما هو أبعد من ذلك بكثير فكان في حاجة إلى تخطي الأشكال النمطية إلى أشكال تشكيلية، ودوال مركبة يوصف تماثلها من خلال المصفوفات الكبيرة.

تعتبر الدالة اللامية (L-function) التي تحول بيانات نظرية جالوا(Galois) الجبرية إلى دوال تحليلية في أعداد مركبة هي أساس مشروع لانجلاند ، ويعتقد انغلاندز (Galois) أنه بمجرد تجاوز هذه الفجوة سيتم تحقيق الشمل بين العالمين.

حدسيات لانجلاند لمجالات الأرقام Langlands' number field conjectures

بالإضافة إلى إثبات المبرهنة النمطية (modularity theorem) ، أحرز تقدم ملحوظ في إثبات رؤية لانجلاند (Langlands)، ويأتي الجانب الجبري في ثلاثة أجزاء، المجالات المحلية (local field)، ومجالات الدوال (function fields)، ومجالات الأعداد (number fields)، والتي لها أهمية خاصة في التحليل، والهندسة، ومجالات الأعداد (number fields). على الترتيب. بحلول عام 2000 تم التحقق من اثنين من أصل ثلاث حدسيات وضعها لانجلاد بواسطة لورانت لافورج (Laurent Lafforgue) الذي حاز على ميدالية فيلدز لتمكنه من التوصل إلى حل من 300 صفحة لمجالات الدوال.

بقت فقط حدسية واحدة من حدسيات لانجلاد بلا إثبات وهي حدسيته عن مجال الأعداد ولكنها بالفعل صعبة، ومازالت تقف صامدة أمام محاولات منظري نظرية الأعداد إلى اليوم.

الجبــر

كالمفهوم المعتاد: نقطة الانطلاق في الجبر هي استبدال الأعداد بالحروف والغرض الأول من ذلك هو إمكانية التعبير عن القوانين العامة كحقيقة أن a X b=b X a مهما كانت قيمة الأعداد a,b والمثال الأكثر تعقيدا هو نظرية ذات الحدين.

واستخدام الحروف للتعبير عن الأعداد المجهولة، فتح الطريق لعلم حل المعادلة. والمثال البسيط هو إيجاد قيمة العدد x حيث 4+n=6 والسعي إلى حل المعالات الأعلى مثل التكعيبية ومعادلات الدرجة الرابعة والتي كانت الطريق لعلماء الرياضيات في النهضة الإيطالية.

ثم جاء "أبيل" و "جالوا" للعمل على دراسة حل المعادلات من الدرجة الخامسة، والذي رفع علم الجبر إلى آفاق جديدة. في هذه المرحلة كانت عملية استبدال الاشياء المألوفة بأخرى مجردة.

فتم استبدال أنظمة العدد المألوفة بالتركيبات الجبرية العامة وخاصة الزمر. وفي هذا المستوى كانت نظريات التصنيف الرائعة ممكنة ولاسيما تلك الأمور البسيطة المنتهية.

وللجبر المجرد الحديث الكثير من الآليات لبعض المناطق الأخرى من الرياضيات من الهندسة ونظرية العدد إلى نظرية الكم الميداني.

حروف للأعداد LETTERS FOR NUMBERS

حروف للأعداد Letters for numbers

بالنسبة لكثير من الناس تصبح الرياضيات غير مريحة لهم عند ظهور الحروف وذلك لتعودهم على استخدام الأعداد فقط. ترى ما الحكمة من ذلك؟ الغرض الأول من استخدام الحرف للتعبير عن العدد المجهول.

مثل 3Xy=12 وتسمى بالمعادلة، والتي تعني أن y هو العدد الذي إذا ضرب في 3 يصبح الناتج 12 في هذا المثال كان من الممكن أن نضع علامة استفهام بدلا من y: 3X?=12. ولكن هذا غير ممكن عند وجود أكثر من مجهول واحد. على سبيل المثال: عددان إذا جمعا كان الناتج يساوي 5، وإذا ضربا كان الناتج يساوي 6 وإذا استخدمنا الحروف للتعبير عن هاتين المعادلتين: x+y=5 و x x y=6.

عادة لا تستخدم الرمز x عند كتابة المعادلات الجبرية، أو يتم استبداله بنقطة.

وبذلك تصبح المعادة 3y=12 أو 3.y=12 . مع مراعاة كتابة العدد قبل الحرف ليكتب هكذا 3y=12 لا أن يكتب y3=12

المتغيرات والتعويض Variables and substitution

من الممكن استخدام الأعداد المجهولة (الحروف) للتعبير عن المتغيرات مثل: أنا أركض على الطريق، فإن هذا القانون d=4t+5 يعبر عن العلاقة بين المسافة من البيت (d) ، مقاسة بالمتر) والوقت منذ البداية (t ، محدد بالثواني) حيث d ، t هي أعداد مجهولة من الممكن اكتشافها، إذا أردنا معرفة المسافة بعد ثانيتين فإننا نعوض عن قيمة t=2 في القانون، وبالتالي يصبح d=4x2+5=13 وبالسؤال عن المدة اللازمة للانتهاء من طريق طوله 21 meters فإننا نعوض عن d=21 فيكون 21=4t+5 وبحل هذه المعادلة تكون t=4 .seconds

الأقواس Brackets

تستخدم الأقواس لفصل العمليات الحسابية إلى أجزاء وبالتالي فإن 8x(2+3) تعني أن نجمع 3 و 2 أولا ثم نضرب الناتج في 8 ولحل أكثر العمليات الحسابية المعقدة فإننا دائما نبدأ بفك الأقواس

$$((5x(2+1))+1) \div 4 = ((5x3)+1) \div 4 = (15+1) \div 4 = 16 \div 4 = 4$$

ولتجنب كتابة أقواس كثيرة في العملية الحسابية، فإنه توجد طريقة لحل العمليات الحسابية والتي تأتي بدون أقواس وتسمى طريقة بيدماس

بيدماس BIDMAS

ما ناتج 7×3+2 ربما يبدو هذا السؤال تافها ولكن أحد هذين الحلين هو الحل الصحيح

(i) 2+3x7= 5x7=35

(ii) 2+3x7=2+21=23

بيدماس هي طريقة لتجنب الشك في أكثر من حل وذلك بوضع الطريقة الصحيحة لترتيب العمليات الحسابية

(1) الأقواس (2) الأسس (3) القسمة أو الضرب (4) الجمع أو الطرح

ومن هذا الترتيب يتضح أن (i) إجابة خاطئة ، وهنا يتضح أهمية الأقواس لأنه لو كان السؤال على هذا النحو 7x(3+2)، كانت الإجابة صحيحة وبالمثل $6 \div 3-1=2-1=1$ ولكن $6 \div (3-1) = 6 \div 2=3$.

وبالتالي عند استخدام كثير من الأقواس $((2\times5.((6^4\div3))$ فإنه لا حاجة لبيدماس ولكن لتجنب كتابة الكثير من الأقواس فإنها طريقة مفيدة.

العوامل المشتركة Common factors and expanding brackets

(i) 3 x (5 + 10) = 3 x 15 = 45

(ii) 3 x 5 + 3 x 10 = 15 + 30 = 45

ليس من قبيل الصدفة أن تكون إجابة كلا من i ، ii هي نفس الإجابة، فمثلا إذا كان معي ثلاث ورقات من فئة الخمسة جنيهات وثلاثة ورقات من فئة العشرة جنيهات فإن المجموع لا يتغير سواء تم حسابهم على أنهم ثلاثة ورقات من فئة الخمس عشر جنيه، أو تم حساب مجموع الورقات فئة الخمسة جنيهات وتم جمعهم على الورقات فئة العشر جنيهات. وبالتالي فإن قانون التوزيع يعطي نفس الإجابة في هذه المواقف ومن الممكن استخدام طريقة أخذ العامل المشترك مع وضع الأقواس وبداخل الأقواس أيا من علاقة الجمع أو الطرح مضرورة في رقم خارج القوسين $(10 + 5)\times 3$.

أو استخدام الطريقة العكسية وذلك بضرب العدد خارج القوس في أي عدد داخل القوس ثم جمع كل عملية ضرب

$$3\times(5+10) = 3\times 5+ 3\times 10$$

وبطريقة أخرى إذا كان كلا من الأعداد المجموعة تقبل القسمة على عدد معين فإننا نستطيع أن نأخذ هذا العدد كعامل مشترك

$$20+28 = 4\times 5+4\times 7 = 4\times(5+7)$$

وهذه الطريقة لا تنفع في حساب الأعداد فقط ولكن أيضاً في المتغيرات وتصبح هذه الطريقة أساسية في تبسيط الصيغ . على سبيل المثال:

$ax + 4x = x(a + 4)$ وذلك بأخذ x كعامل مشترك

أو بفك الاقواس $2x(x - y^2)2ax - 2ay^2$

الأقواس التربيعية Squaring brackets

إذا كان لدينا عملية جمع داخل قوسين مضروبة في شئ ما خراجها فأننا نستطيع أن نوجد الناتج بطريقة فك الأقواس مثل: $(1+2)x2=1x2+2x2$

هل نستطيع أن نفعل نفس الشئ عندما تكون الأقواس مرفوعة لأس معين؟

لسوء الحظ فإن $(1 + 2)^2 \neq 1^2 + 2^2$، الأول يساوي $9 = 3^2$، والثاني يساوي $1 + 4 = 5$. ولذلك فإن الأقواس التربيعية أكثر تعقيداً.

ولكن هكذا حولنا التربيع إلى عملية ضرب، فإن قانون ضرب الأقواس يكون كالتالي:

$$(1+2)^2 = (1+2)x(1+2) = 1(1+2) + 2(1+2) = 1+2+2+4$$

وبإستخدام المتغير تكون أكثر إيضاحاً

$$(1+x)^2 = (1+x)x(1+x) = 1(1+x) + x(1+x) = 1+x+x+x^2$$
$$= 1+2x+x^2$$

وإذا كان لدينا متغيرين فإن الإجابة تكون: $(y+x)^2 = y^2 + 2yx + x^2$

نظرية ذات الحدين The binomial theorem

وماذا لو رفعت الأقواس لاس أعلى من التربيع؟

لو استخدمنا طريقة ضرب الأقواس سوف تكون عملية مرهقة ولكن بالنهاية سوف نكتشف أن:

$$(1+x)^3 = 1+3x+3x^2+x^3$$
$$(1+x)^4 = 1+4x+6x^2+4x^3+x^4$$
$$(1+x)^5 = 1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5$$

وعند وجود متغيرين: $(x+y)^4 = y^4 + 4y^3x + 6y^2x^2 + 4yx^3 + x^4$

ولذلك عند حساب $(7+2a)^4$ فلإننا نعوض عن الصورة السابقة

ولكن ما معنى متتابعة الأرقام هذه 1,4,6,4,1 ؟

هذه الاعداد هي معاملات ذات الحدين.

معاملات $(1+x)^4$ هي

$(1+x)^4$ هي $^4C_0 = 1,\quad {}^4C_1 = 4,\quad {}^4C_2 = 6,\quad {}^4C_3 = 4,\quad {}^4C_4 = 1$

وينسب اكتشاف نظرية ذات الحدين إلى "بليز باسكال"

وتعتبر الطريقة المثلى لتذكر نظرية ذات الحدين هو مثلث باسكال.

مثلث باسكال Pascal's triangle

في القرن السابع عشر اكتشف عالم الرياضيات الفرنسي بليز باسكال هذا المثلث

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

وهكذا.

كل صف يبدأ وينتهي بالعدد 1 وكل عدد من أعداد الوسط هو عبارة عن مجموع العددين الموجدين فوقه. وقد تم إكتشاف مثلث باسكال خصوصاً لمعرفة معاملات ذات الحدين فمثلاً إذا كنت تريد معرفة معاملات مفكوك $(1 + y)^4$ فإنه سوف تكون موجودة في خامس صف من المثلث $1 + 4y + 6y^2 + 4y^3 + y^4$.

ويوجد أيضاً في هذا المثلث أكثر من نمط عددي ، على سبيل المثال: إذا نظرت إلى الأقطار، فإن الأول لا يوجد به غير العدد 1 والثاني ...1,2,3,4,5, والثالث .....1,3,4,10, وتسمى الأعداد المثلثية، وبعد ذلك الأعداد المضلعة، ثم الأعداد بالنسبة لرباعي السطوح، وبحذف الأعداد الزوجية من هذا المثلث ينتج نمط عددي أقرب لمثلث "سيربينسكي" ، وهكذا .

المعادلات EQUATIONS

المعادلات Equations

على الرغم من أن كثير من الناس تخاف من مصطلح المعادلة، ولكن إذا نظرنا إلى مفهوم المعادلة لا يتعدي كونه شيئا مساوياً لشئ آخر 1+1=2 تسمى معادلة وبالمثل $E = MC^2$ وأي شيء يحتوي على علامة التساوي بين مقدارين وعادة تشتمل المعادلات على كثيرات حدود.

عند دراسة المعادلات فإن فكرتها تكون أقرب إلى كفتي الميزان عند توازنهما وهذا معناه لكي تظل المعادلة صحيحة يجب أن تجري نفس العملية في الطرفين فمثلاً: إذا أضفنا 6 للطرف الأيسر أو ضربناه في 24 فإننا يجب أن نفعل نفس الشئ في الطرف الأيمن، هذا الشئ يكون واضحًا في الأعداد

$$13 - 2 = 11 \Rightarrow (13 - 2) + 6 = 11 + 6$$

13−2=11 ، (13−2)+6=11+6 وبالمثل: (13−2)× 24 = 11× 24

نفس الشئ عندما تحتوي المعادلة على مجهول، على سبيل المثال $3x + 1 = 16$. فإذا طرحنا 1 من الطرفين ينتج أن $3x = 15$ وإذا قسمنا كلاً من الطرفين على 3 ينتج أن $x = 5$ وهذا هو حل المعادلة الأصلية.

كثيرات الحدود Polynomials

كثيرة الحدود هي عبارة عن مقدار يحتوي على أعداد مجهولة (وتمثل بحروف مثل y , x) مثل : $3x^2 + 15y + 7$ هي كثيرة حدود في مجهولين y, x والأعداد 15 , 3 تسمى معاملات. معامل x^2 هو 3 ومعامل y هو 15 والعدد 7 يسمى بالحد الثابت وهو الذي لا يحتوي على x أو y .

وتعتبر كثيرات الحدود مهمة جداً في الهندسة، وذلك بوضع كثيرة الحدود تساوي صفر فإنها تعرف بالشرط اللازم لإحداثيات نقطة على المستوى (x, y) .

ولذلك فإن مجموعة النقاط التي تحقق هذا الشرط تنتج شكلاً هندسيًا كخط مستقيم، أو في هذه الحالة يسمى قطعًا مكافئاً.

إذا كانت كثيرة الحدود تحتوي على مجهول واحد فإنها تنتج معادلة $x^2 + 3x + 2 = 0$ وحل هذه المعادلة هو عبارة عن إيجاد قيم x التي تجعل المعادلة صحيحة وتسمى بجذور كثيرة الحدود.

ودرجة كثيرة الحدود هي عبارة عن أعلى أس تحتوي عليه فمثلاً. $x^2 + 3x + 2$ من الدرجة الثانية وتسمى معادلة تربيعية. وكثيرات الحدود من الدرجة الأولى تعتبر أبسط

كثيرات الحدود وتسمى بكثيرة الحدود الخطية. وعموماً فالنظرية الأساسية للجبر تقول أن كثيرة الحدود من الدرجة ن يكون لها ن من الجذور في الأعداد المركبة.

المعادلات الخطية Linear equations

عرف البشر أهمية . المعادلات سريعاً عند حل الأسئلة المقالية مثل: ماهو العدد الذي إذا أضيف ضعفه إلى العدد 3 كان الناتج 9 ؟ وذلك بتحويل هذا السؤال إلى معادلة $2x + 3 = 9$ وتعتبر هذه المعادلة من النوع البسيط لها مجهول واحد x ليست تربيعية ولا تحتوي على جذر تربيعي ولا أي شئ معقد وتسمى بالمعادلات الخطية، وذلك لانها عرفت من معادلة الخط المستقيم: $Y = 2X + 3$ ومفتاح حل هذه المعادلة هو إجراء نفس العملية في طرفي المعادلة حتى نحصل على قيمة X.

أولاً نطرح 3 من الطرفين: $2X = 6$ ثم قسمة الطرفين على 2 لنتيج أن $X = 3$ ولكن ماذا عن هذه المعادلات $4x + 20 = 4$؟ اعتبر "جيوفانتس الإسكندري" أن هذه المعادلات ليس لها حل في الأعداد وقتها ولذلك فقد انتظر للقرن السابع الميلادي لإكتشاف الأعداد السالبة بواسطة "براهما جوبتا" وبنفس الطريقة تم حل أي معادلة خطية في مجهول واحد فعند حل هذه المعادلة: $4x + 20 = 4$ نقوم بطرح 20 من الطرفين لينتج $4x = -16$ ثم قسمة الطرفين على 4 ليصبح $x = -4$.

تحليل كثيرات الحدود Factorizing polynomials

إذا حاولنا حل معادلة من هذا النوع $x^3 + 7x + 6 = 0$ فإننا سوف نبحث عن قيم x التي تجعل هذه المعادلة صحيحة، على سبيل المثال: 2 هو حل للمعادلة لأن $2^3 - 7x2 + 6 = 0$ ولكن 3 ليس حل لأن $3^3 - 7x3 + 6 = 12 + 0$ وتحول إلى:

$$x^3 - 7x + 6 = (x - 1)(x^2 + x - 6)$$

(ويمكن التأكد من ذلك عن طريق فك الأقواس) وإذا لم نستطع تعرُّف قيمة x من المعادلة الأصلية فإننا يجب أن نضعها على هذا الشكل $(x - 1)(x^2 + x - 6) = 0$ فلو عوضنا عن قيمة x بـ 1 فإن القوس الأول يساوي 0 وبالتالي فإن x=1 هو أحد حلول

المعادلة. وإذا كان حاصل ضرب عددين يساوي 0 فإن أحد هذين العددين يساوي 0 ولذلك فإذا كان $(x-1)(x^2+x-6)=0$ فإن إما x=1 أو $x^2+x-6=0$.

وبالنسبة لكثيرة الحدود الثانية فإنها تحلل إلى $(x-3)(x-2)$ وبذلك تكون المعادلة الأصلية $(x-1)(9x-2)(x+3)=0$ وهذا هو شكل التحليل وتكون حلول المعادلة هي 1,2,-3 هل يوجد أي حلول أخرى؟ الإجابة لا. لأنه لأي قيم أخرى لـ x يكون المقدار $(x-1)(x-2)(x+3)$ لا يساوي 0.

نظرية العامل The factor theorem

تحسم نظرية العامل الجدل حول تحليل كثيرات الحدود فمثلاً العدد a هو جذر كثيرة الحدود p فقط إذا كان $(x-a)$ تقسم P وهذا بوجود كثيرة حدود أخرى Q بحيث $P=(x-a)\times Q$ ولكي نستطيع حلها فإننا نقسمها بالشكل $(x-c)\,...\,(x-b)\,(x-z$ وبذلك يكون حلها هي الأعداد a,b,……,c وفي المثال السابق تكون 1,2,-3.

المعادلات التربيعية Quadratic equations

تختلف المعادلات التربيعية عن المعادلات الخطية في إنها تحتوي على الحد x^2 وتم دراستها بواسطة البابليون القدماء في حساب أبعاد ومساحات معينة، على سبيل المثال: شكل مستطيل أحد أبعادة أكبر من الأخر بمقدار 5 أمتار ومساحته 36م^2 ولحساب أبعاد نحل المعادلة $x\times(x+5)=36$ والتي تكون على الشكل $x^2+5x-36=0$.

ونشأت طريقة حل المعادلات التربيعية في القرن السابع بواسطة العالم الهندي "براهما جوبتا" وفي القرن التاسع بوساطة عالم الرياضيات الفارسي "محمد ابن موسى الخوارزمي" في كتابه "حساب الجبر والمقابلة".

الصيغة التربيعية The quadratic formula

في العصر الحديث تمت إعادة ترتيب أي معادلة تربيعية على الشكل $ax^2+bx+c=0$ لبعض a,b,c ويكون لها حلان يمكن إيجادهما عن طريق الصيغة العامة $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

ويكون الحلان مختلفين بواسطة $\pm$ ويكون حل المعادلة $x^2 + 5x - 36$ هو $\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times1\times(-36)}}{2\times1}$ وتساوي $\frac{5\pm13}{2}$ وتكون $4, 9$.

إكمال المربع Completing the square

تعتبر بعض المعادلات التربيعية أسهل في حلها من معادلات أخرى فأحيانا يكون أخذ الجذر التربيعي كافي لحل المعادلة مثل $x^2 = 9$ حلها هو $x = 3, -3$ أو $(x+1)^2 = 9$ وبأخذ الجذر التربيعي يكون $x + 1 = \pm3$ والحل هو $x = -4$ و $x=2$.

وتعتبر إكمال المربع هو أحد طرق حل المعادلة التربيعية وتكون الخطوة الأولى هي ترتيب المعالة بحيث يكون معامل الحد الذي يحتوي على x^2 هو 1 فمثلاً، $2x^2 + 12x - 320$ وبقسمة الطرفين على 2 تصبح $x^2 + 6x - 16 = 0$. وبالنظر إلى الحد الثاني الذي يحتوي على x وبقسمة معاملة على 2 ثم تربيعه يصبح الناتج 9 وهو العدد الذي يكمل المربع، وبمعرفة هذا العدد يصبح هو الثابت الوحيد في الطرف الأيسر x^2+6x+9 ولذلك فإننا سوف نغير الطرف الأيمن للحافظ على توازن المعادلة لتصبح: $x^2 + 6x + 9 = 25$.

وبتحليل الطرف الأيسر يصبح $(x + 3)^2$ وتحل المعادلة بأخذ الجذر التربيعي لتصبح $x + 3 = \pm5$ ويكون حل المعادلة $x = -8$ و $x = 2$

وبتطبيق هذه الطريقة على المعادلة العامة $ax^2 + bx + c = 0$ ينتج الصيغة العامة $\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

المعادلات التكعيبية Cubic equations

المعادلات التكعيبية هي المعادلات القادمة في التسلسل الهرمي للمعادلات في مجهول واحد وهي التي تحتوي على x^3 مثل $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ وتعتبر أولى المحاولات الجدية لحل هذه المعادة كانت في القرن الحادي عشر عن طريق الشاعر الفارس ومتعدد جوانب الثقافة "عمر الخيام" بإستخدام القطع المخروطي.

وفي القرن السادس عشر أصبحت المعادلات التكعيبية من أكبر المشاكل في هذا العصر. وبالنسبة لعلماء الرياضيات مثل "جيرولاموكاردانو" و "نيكولوفونتانا" و "لودوفيكوفيل ري" فقد راهنو بسمعتهم على حل هذه المعادلات. ولذلك فقد نشر "كاردانو" في كتابة "1545" "Ars magna" الحل العام للمعادلة التكعيبية وكان له أثر كبير في اكتشاف الأعداد السالبة وتطوير الأعداد المركبة، وعموماً فإن للمعادلة التكعيبية ثلاثة حلول ويوجد منهم حل حقيقي على الأقل.

الصيغة التكعيبية The cubic formula

تعتبر الصيغة العام لحل المعادلة التكعيبية $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ أكثر تعقيداً من المعادلة التربيعية ، يجب أولاً معرفة $q = \frac{a3}{27} + \frac{ab}{6} - \frac{c}{2}$ وأيضاً $p = q^2 + (\frac{b}{3} - \frac{a^2}{9})^3$ ويكون الحل الأول هو

$$x_1 = \sqrt[3]{q + \sqrt{p}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{p} - \frac{a}{3}}$$

والثاني هو

$$x_2 = (\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2})\sqrt[3]{q + \sqrt{p}} + (\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2})\sqrt[3]{q - \sqrt{p} - \frac{a}{3}}$$

وتعطي $\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ الجذرين تكعيبين للواحد الصحيح

المعادلات من الدرجة الرابعة Quartic equations

يأتي بعد ذلك المعادلة من الدرجة الرابعة وهي التي تحتوي على x^4 مثل $x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6 = 0$ بدون أعداد مركبة. طرحت هذه المعادلات تساؤلات كثيرة بالنسبة لعلماء العصر الحديث أمثال "لودوفيكوفراري" بعض هذه المعادلات مثل $x^4 + 1 = 0$ لا يوجد لها حل في الأعداد الحقيقية وبعضها لها أربعة حلول، ومع ذلك فقد أعدوا طرقاً بسيطة لاستخدام الأعداد السالبة والمركبة في حلها.

في عام 1545 قدم "جيرولاموكاردانو" كتابة "Ars magna" والذي يحتوي على 40 فصل وقدم فيه طريقة فيراري لحل المعادلات من الدرجة الرابعة

صيغة حل المعادلات من الدرجة الرابعة The quartic formula

لحل المعادلة $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

نفرض أولاً: $e = ac - 4d$ و $f=4bd-c^2-a^2d$ ثم نستخدم الصيغة لحل المعادلة $y^3 - by^2 + ey + f = 0$

هذه المعادلة يجب أن يكون لها حل في الأعداد الحقيقية ، نفرض أن

$$G=\sqrt{a^2-4b+4y} \quad \text{و} \quad h = \sqrt{y^2 + 4d}$$

ويمكن إيجاد الأربعة حلول عن طريق حل المعادلين التربيعيتين:

$$x^2+\frac{1}{2}(a+g)x+\frac{1}{2}(y+h)=0 \quad \text{و} \quad x^2 + \frac{1}{2}(a - g)x + \frac{1}{2}(y - h) = 0$$

المعادلات من الدرجة الخامسة Quintic equations

مما سبق نستنتج أن الصيغ العامة لحل المعادلات التكعيبية والمعادلات من الدرجة الرابعة تعتبر صعبة جداً وفي الفترة من 1600 إلى 1800م اكتشف العلماء أن طرق حل المعادلات من الدرجة الخامسة والسادسة والسابعة أكثر تعقيداً وقد بذل العلماء مجهوداً كبيراً في اكتشاف طرق حلها. واعترف "ليونارد أويلر" أن كل المحاولات المبذولة كل هذه المعادلات قد باءت بالفشل.

أخذت القصة منحنى آخر في القرن التاسع عشر على يد عالم الرياضيات "نيلزابيها" الذي أثبت في "مخطوطة الصفحة السادسة" أنه لا يوجد صيغ حل للمعادلات من الدرجة الخامسة وما فوق. هذه المعادلات لها دائما حلول وهذه هي النظرية الأساسية للجبر ولكن لا توجد طريقة لايجاد هذه الحلول.

المعادلات الغير قابلة للحل Insoluble equations

خلال عصور التاريخ المختلفة ساعد اكتشاف أنظمة الاعداد الجديدة في حل معظم المعادلات السابقة والتي لم يكن لها حل وقتها فمثلاً اكتشاف الأعداد السالبة ساعدت في حل المعادلات مثل $x + 6 = 4$ والتي اعتبرها "ديوفانتس" غير قابلة للحل، وتحل بنفس طريقة حل المعادلات الخطية.

وتحتوي الاعداد الحقيقية على الأعداد الغير نسبية مثل $\sqrt{2}$ والتي تساعد في حل معادلات مثل $x^2 = 2$، وساعد اكتشاف الأعداد المركبة على حل معادلات مثل $x^2 = -1$ ومع هذه الاكتشافات يبقى السؤال: هل توجد معادلات باقية ليست لها حل؟ أعطت النظرية الأساسية للجبر الاجابة وهي: لا.

النظرية الأساسية للجبر The fundamental theorem of algebra

أثبت "كارل فريدريتش جاوس" في رسالة الدكتوراه الخاصة به عام 1799م أن الأعداد المركبة لا تعطي فقط حل للمعادلة $x^2 = -1$ كل كثيرة حدود تحتوي على أعداد مركبة لابد أن يكون لها حل في الأعداد المركبة فمثلاً $x^5 + 2ix = -4$ لابد أن يكون لها حل في الأعداد المركبة.

وغالباً فإن كل كثيرة حدود من الدرجة n لها عدد n من الحلول المختلفة على الرغم من أن هذه الحلول من الممكن أن تتضاعف كما في حالة $(x - 1)^2 = 0$ والتي تحتوي على حل واحد فقط $x = 1$ تحتوي النظرية الأساسية للجبر على العديد من الاثباتات أربعة منهم تم اكتشافهم بواسطة "جاوس".

المعادلات المتزامنة Simultaneous equations

من الممكن حل معادلة في مجهول واحد x مثل $3x + 4 = 10$ ولكن لايوجد حل محدد لمعادلة واحدة في مجهولين مثل $x + y = 4$ بل يوجد لها عدد لا نهائي من الحلول :

$x = 2$ and $y = 2$ و $y=2.5$ و $x=1.5$ و $x=1001$ and $y= 997$

وهكذا. وتمثل هذه المعادلة بخط مستقيم وإحداثيات كل نقطة على المستقيم تعطي حل للمعادلة الأصلية. وإذا وجدت معادلة أخرى $x - y = 2$ فإننا نستطيع أيضاً أن نوجد لها عدد لانهائي من الحلول ولكن هل نستطيع إيجاد قيم لـ x، y والتي تحققان المعادلتان معاً $x - y = x , x + y = 4$ ؟

من الممكن إيجاد الحل بيانياً عن طريق إيجاد نقطة تقاطع المستقيمان معاً. يوجد طريقتان لحل المعادلتان معاً. الأولى عن طريق الحذف بإضافة أو طرح المعادلين لكي نتخلص من أحد المجهولين ففي هذا المثال عند جمع المعادلتين سيتم التخلص من y ويتبقى $2x=6$ ونستكمل حل المعادلة لنحصل على $x=3$ وبعد ذلك نوعض في أحد المعادلتين السابقتين عن قيمة x لنحصل على قيمة $y=1$ ليصبح الحل $x=3$ ، $y=1$.

نبدأ من جديد في حل المعادلتين بطريقة التعويض $x+y=4 , x-y=2$أولاً نغير أحد المعادليتن لنحصل على أحد المجهولين بدلالة الآخر فمثلاً نغير المعادلة $x+y=4$ لتصبح $x=4-y$ ثم نعوض عن ذلك في المعادلة الآخرى لتصبح $(4 - y) - y = 2 \Leftarrow 4-2y=2$ لنحصل على $2y = 2$ ومنها $y=1$ وبالتعويض من قيمة y في أحد المعادلتين الأصليتين نحصل على $x = 3$.

أنظمة أكبر من المعادلات Larger systems of equations

وكالعادة في القاعدة العامة فإنه لحل نظام من ثلاث مجاهيل فإننا نحتاج إلى ثلاث معادلات وبالمثل للأعداد الأعلى، ولذلك فلحل المعادلات $x + y + z = 0$ و $x - y - z = 2, x - 2y + 7 = 3$ فإننا نستخدم نفس طرق حل المعادلات المتزامنة ولكن لحل الأنظمة الأكبر من ذلك فإننا نحتاج إلى استخدام المصفوفات.

إذا بدأنا في حل المعادلتين الأثنين $x + y = 1 , 2x + 2y = 2$ فسوف نكتشف أنها نفس المعادلة وهذه الظاهرة من الممكن أن تحدث مع الأنظمة الأعلى مثل: $x + y + z = 6 , 2x - y + z = 3 , x + 4y + 17 = 15$ فإن هذه المعادلات لن تحل بالطريقة العادية، وذلك بسبب أن المعادلة الثالثة ليست جديدة ولكنها تأتي من المعادلتين

التي قبلها (بضرب الأولى في 3 وطرح الثانية من الناتج) وتسمي مثل تلك الأنظمة بالتابع ويكون لهم عدد لانهائي من الحلول مثل $x = 1 , y = 2, z = 3$.

نأتي بعد ذلك لأنظمة المعادلات التي ليس لها حل مثل $x + y = 1 , x + y = 2$ وتحل المعادلتين عن طريق مستقيمين متوازيين (وبالتالي فإنه لا يوجد لهما نقطة تقاطع) وفي النظام ثلاثي الأبعاد فإننا نحصل على مستويان متوازيان كما في المعادلتين $x + y + z = 1 , x + y + z = 2$.

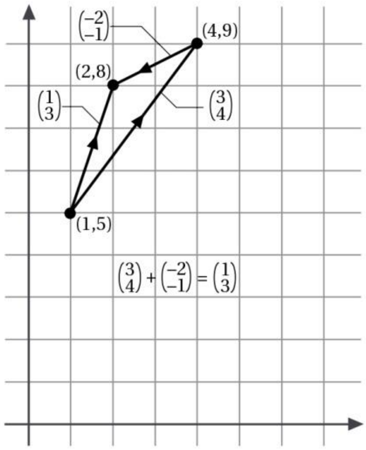
وفي الأنظمة الأكثر تعقيداً فإنها تمثل بمستقيمات منحرفة مثل $z = x + y = 1 , z = x - y = -1$ وتكون مستقيمان غير متوازيين وغير متقاطعين ولكن عبارة عن مستقيمن يمران في مستوى ثلاثي الأبعاد دون أن يتقاطعا.

حلقات كثيرات الحدود Polynomial rings

تعتبر الأعداد في الصل أداة لتعداد الأشياء وساعدت البشر كثيراً في عمليات أخرى. وفي القرن العشرين حدث تحول بشأن كثيرات الحدود قبل ذلك كانت تعتبر كثيرة الحدود طريقة مناسبة لبعض المشكلات التي تحتوي على عدد مجهول فقط ولكن في الوقت الحالي فإن كثيرات الحدود من الممكن أن تجمع وتطرح وتضرب ولذلك فإن مجموعة كثيرات الحدود ذات المعاملات الصحيحة وفي متغيرا واحد x تكون حلقات تسمى z(x) وبالمثل فإننا نستطيع أن نسمى حلقات كثيرات الحدوث ذات المعاملات المركبة وفي متغيرين c(x, y) ويوجد أنظمة عديدة أخرى مثل أنظمة العدد المختلفة وهذه الأنظمة لها عمق خفي ودراستها لها أهمية كبيرة في علم الجبر المعاصر ونظرية العدد والهندسة.

المتجهات والمصفوفات VECTORS AND MATRICES

المتجهات VECTORS



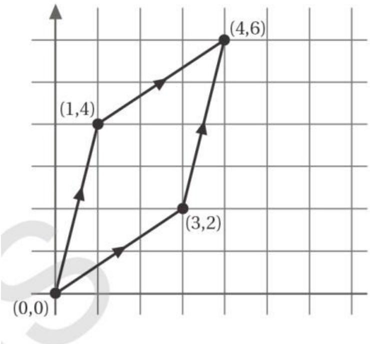
في هندسة المستويات تعرف الأشياء مثل $\binom{3}{4}$ بالمتجهات وهي عبارة نظام لإعطاء اتجاه من نقطة لأخرى.

ويعتبر العدد في الصف العلوي هو المسافة في اتجاه اليمين، والصف السفلي هو المسافة في الاتجاه الأعلى، ولذلك فإن $\binom{3}{4}$ تمثل بثلاث وحدات في اتجاه اليمين وأربعة وحدات لأعلى. والعدد السالب في الصف العلوي تعني اتجاه اليسار وفي الصف السفلي تعني الاتجاه لأسفل ولذلك فإن $\binom{-2}{-1}$ قفز بوحدتان في اتجاه اليسار ووحدة واحدة لأسفل وبداية من النقطة (1,5) في اتجاه المتجه $\binom{3}{4}$ سوف نصل إلى النقطة (4,9) وإذا أخذنا بعد ذلك المتجه $\binom{-2}{-1}$ قفز بوحدتان في اتجاه اليسار ووحدة واحدة لأسفل وبداية من النقطة (1,5) في إتجاه المتجه $\binom{3}{4}$ سوف نصل إلى النقطة (4,9) وإذا أخذنا بعد ذلك المتجه $\binom{-2}{-1}$ فسوف نصل للنقطة (2,8) بواسطة المتجه $\binom{1}{3}$ وذلك بواسطة جمع المتجهين $\binom{1}{3} = \binom{3}{4}+\binom{-2}{-1}$ تطبق نفس الطريقة على المتجهات في المستوى ثلاثي الأبعاد مثل $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ وبالمثل رباعي وخماسي الأبعاد.

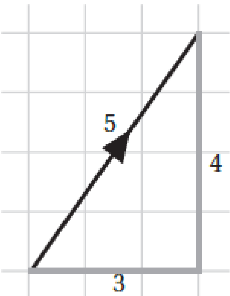
قانون متوازي الأضلاع Parallelogram law

لأي متجه مسافة واتجاه ويكتب عن طريق سهم مستقيم لطول معين وليس له نقطة بداية ولا نهاية. فإذا بدأنا المتجه $\binom{1}{4}$ من نقطة الأصل (0,0) فسوف نصل للنقطة (1, 4) وإذا أخذنا بعد ذلك المتجه $\binom{3}{2}$ فسوف نصل للنقطة (4, 6) وإذا أخذنا المتجهين بترتيب معاكس فسوف نصل لنفس النقطة (4, 6) ولذلك فإنه لأي متجهين u, v $u+v = v+u$.

ولذلك فإن جميع المتجهين تبادلي ويعرف ذلك بقانون متوازي الأضلاع وعلى الرغم من أن المتجهان لم تكن تعرف قبل القرن التاسع عشر إلى أن قانون متوازي الأضلاع ق عرف في القرن الأول الميلادي بواسطة "هيسروالسكندري"

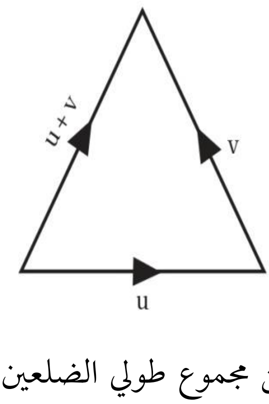


طول المتجه Length of a vector



يوجد المتجه طول واتجاه وطريقة إيجاد طول المتجه هي "نظرية فيثاغورث" ولذلك فإن طول المتجه $\binom{3}{4}$ هو $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ ويرمز لطول المتجه بالرمز $\|V\|$ ويخضع طول المتجه لقوانين تباين المثلث أبعد من الطريق باستخدام الضلع الثالث وتعرف هذه الطريقة في الرياضيات بتباين المثلث ومن البديهي، فإن أي فكرة متعلقة بالمسافة يجب أن تنتج هذه القاعدة.

تباين المثلث The triangle inequality

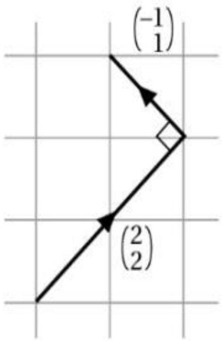


ويعتبر تباين المثلث ذات أهمية كبيرة في دراسة المتجهات فإذا كان u,v متجهان فليس من الصحيح أن طول u+v يساوي طول v مضافا إليه طول u. فمثلا إذا كان

$v=\binom{3}{4}$ و $u=\binom{0}{-4}$ فإن $\|V\|=5$ و $\| u \|= 4$

ولكن $\|V +u \| = 3$ ولذلك فإننا لا نستطيع أن نقول أن $\| u \| + \|V\|= \| V +u \|$ ونستنتج من ذلك أن $\|V+u\|< \|V\|$ $+\|V\|$ والتي تعني أن طول الضلع الثالث في المثلث أصغر من مجموع طولي الضلعين الآخرين.

ضرب المتجهات The dot product

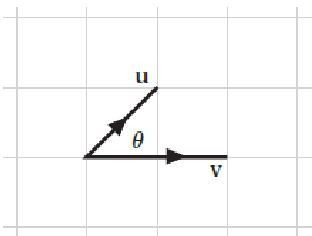


يوجد طريقة لدمج متجهين لا للحصول على متجه ثالث ولكن للحصول على عدد يوصف هذه العلاقة وذلك عن طريق ضرب الأعداد المتناظرة في كل متجه ثم جمع الناتج فمثلا $\binom{1}{2}.\binom{3}{4} = 1x3 + 2x4 = 3 + 8 = 11$ ونستفيد من ضرب المتجهات في معرفة طول المتجه فمثلا $\|V\| = \sqrt{V.V}$ وأيضا في معرفة ما إذا كان المتجهان عموديان وذلك إذا كان $u.V= 0$ فمثلا $\binom{-1}{1}.\binom{2}{2} = -1 \times 2 + 1 \times 2 = 0$ وتساعد أيضاً في إيجاد الزاوية بين متجهين.

الزاوية بين متجهين The angle between two vectors

إذا كانت θ هي الزاوية بين المتجهين u,v إن

$$\cos\theta = \frac{u.v}{\|u\|\|V\|}$$



فعلى سبيل المثال إذا كانت $V= \binom{2}{0} , u - \binom{1}{1}$ فإن:

$u.v = 1x2 + 0x1 = 2$ أيضاً

$\|V\| = \sqrt{2^2} = 2$ و $\| u \| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

وبالتالي فإن:

$$\cos 0 = \frac{2}{\sqrt{2} \times 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 0 = 45^0$$

متباينة كوشي شوارز Cauchy-Schwarz inequality

تعرف المتباينة في الرياضيات بأنها علاقة بين كميتين أحدهما أكبر من الأخرى وأشهر المتباينات قد اكتشفت عن طريق " أوجستن كوشي" عام 1821م وطورها بعد ذلك "هيرمان شوارز" ونص هذه المتباينة. لأي أربعة أعداد a,b,x,y

$$(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$$

وبالتالي فإن:

$$\left|ax + by\right| \leq \sqrt{(a^2 + b^2)\ (n^2 + y^2)}$$

ويمكن التعبير عن هذه المتباينة بواسطة المتجهات بحيث $u - \binom{a}{b}, v = \binom{x}{y}$ لتصبح

$$" \left|u.v\right| = \| u \| \|V\|$$

ويمكن تطبيق هذه المتباينة في المجموعات الأكبر

$$(ax + by + \cdots + CZ)^2 \leq (a^2 + b^2 + \cdots + c^2)(x^2 + y^2 + \cdots + z^2)^1$$

الضرب الاتجاهي لمتجهين The cross p roduct

استنتجنا مما سبق أن حاصل الضرب القياس لمتجهين ليس بمتجه ولكنه عد معين ويوجد طريقة أخرى لضرب متجهين u, v لتعطي متجه ثالث $u \times v$ وتسمى بالضرب الاتجاهي. جبرياً هي أقل دقة وتعمل فقط في المستوى ثلاثي الابعاد فعلى سبيل المثال $u \times v \neq v \times u$ ولكن $u \times v = -v \times u$وتعرف بالقانون

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bz - cy \\ cx - az \\ ay - bx \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

هندسيا فإن $u \times v$ عمودي دائماً على كل من المتجهين u و v ويعطي الاتجاه طبقاً لقاعدة اليد اليمنى. وبالنسبة لـ $u \times v$ يعطي بالعلاقة

$$\| u \times v \| = \| u \| \| v \| \ \sin\ 0$$

حيث 0 هي الزاوية بين المتجهين $u \times v$ إذا كان المتجهان متوازيان فإن الزاوية بينهما صفر وبالتالي فإن طول $u \times v$ يساوي صفر.

وعموما فإن الضرب الاتجاهي له أهمية كبيرة في دراسة الفيزياء لمعرفة المحالات الكهرومغناطيسية.

المصفوفات Matrices

المصفوفة هي عبارة عن مجموعة من الأعداد ممثلة كالتالي: $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ أو $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ وتأتي المصفوفات بشكل مستطيلي أو مربعي ولكن لا نستطيع جمع مصفوفتين إلا إذا كانوا بنفس الحجم وذلك بجمع الأعداد المتناظرة $\begin{pmatrix}6 & 9\\ 9 & 12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & 7\\ 6 & 8\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.

ضرب متجه مصفوفة Multiplying a vector by a matrix

لنبدأ بمثال بسيط. عند ضرب مصفوفة بسيطة (3 2) بمتجه $\binom{4}{5}$ فإننا نحصل على مصفوفة 1×1 وذلك بضرب الأعداد المتناظرة ثم جمع النواتج.

$$(23)\ \binom{4}{5} = (2 \times 4 + 3 \times 5) = (23)$$

وهذه هي الطريقة الأساسية في المصفوفات الأعلى

$$\begin{pmatrix}2 & 3\\ 6 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 \times 4 + 3 \times 5\\ 6 \times 4 + 7 \times 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}23\\ 59\end{pmatrix}$$

وتعلم هذه الطريقة مع كل أنواع المصفوفات

$$\begin{pmatrix}1 & 2\ 3\\ 3 & 2\ 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ 5\\ 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6\\ 3 \times 4 + 2 \times 5\ + 1 \times 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}32\\ 28\end{pmatrix}$$

تعتبر مصفوفة الوحدة $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ من أهم المصفوفات وعند ضربها في أي متجه لا تغير شكل المتجه فعلى سبيل المثال $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\binom{a}{b} = \binom{a}{b}$ ومصفوفة الوحدة 3×3 هي $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ ويرمز لها دائماً بالرمز I ومصفوفة الوحدة هي المحايد الضربي فهي تلعب نفس دور العدد 1 في الأعداد.

ضرب المصفوفات Multiplying matrices

من السهل جداً ضرب مصفوفتين فمجرد معرفتك ضرب متجه بمصفوفة تستطيع أن تحسب $\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ فقط تقسم المصفوفة $\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}$ إلى متجهين $\binom{6}{8}, \binom{5}{7}$ ونحسب حاصل ضرب كل متجه منهم بالمصفوفة الأولى

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19\\43\end{pmatrix} \text{ and } \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}22\\50\end{pmatrix}$$

ثم نكتب المصفوفة على الشكل $\begin{pmatrix}19 & 22\\43 & 50\end{pmatrix}$.

وبعد ذلك نستطيع أن نضرب مصفوفتين بدون فصلها لمتجهين. مع مراعاة أنه عند إيجاد حاصل ضرب مصفوفتين نستخدم الصف من المصفوفة الأولى معغ العمود المناظر من المصفوفة الثانية. وعموماً فإنه في ضرب المصفوفات ليس صحيحاً أن AB=BA ولذلك فإن ضرب المصفوفات ليس تبادلية.

المحددات Determinants

المحدد لمصفوفة مربعة هو عدد مرتبط به مكتوب بطريقة خفية على شكل المحدد. فمثلاً المصفوفة 2×2 $\begin{pmatrix}a & b\\c & D\end{pmatrix}$ والمحدد هو $ad - bc$ يمكن كتابة المحدد على الشكل $\det A$ أو $|A|$

$$\det\begin{pmatrix}a & b & c\\d & e & f\\g & h & i\end{pmatrix} = a.\det\begin{pmatrix}e & f\\h & i\end{pmatrix} - b.\det\begin{pmatrix}d & f\\g & i\end{pmatrix} + c.\det\begin{pmatrix}d & e\\g & h\end{pmatrix}$$

وبنفس الطريقة يمكن حساب المصفوفات الأعلى. ويمكن ضرب المحددات بنفس طريقة المصفوفات. لأي مصفوفتين A, B

$$\det(AB) = \det\ A \det\ B$$

ولذلك بمجرد معرفة المحدد A, B نستطيع معرفة المحدد AB. إذا كان $\det = 0$ فإن A ليس له معكوس. بمعنى أنه لا توجد مصفوفة B. بحيث أن $AB = I$ حيث I هي مصفوفة الوحدة . وإذا كان $\det A \neq 0$ فإن A لها معكوس.

قلب المصفوفات Inverting matrices

إذا كان لدينا المصفوفة A فإن السؤال الأساسي هو هل لديها معكوس أم لا ؟ إذا وجدت المصفوفة B بحيث أن AB=I فهذا يعني أن أي عملية تتم في المصفوفة A تكون غير مفعلة في المصفوفة B.

وإذا لم توجد المصفوفة B فهذا يعني خسارة كبيرة في العمليات بالنسبة لـ A ولقلب المصفوفة "A" 2×2بحث $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ A فإننا نتبع الخطوات الآتية:

1- توجد محددها $\det A = ad - bc$ إذا كان يساوي صفر فإننا يجب أن نتوقف لأن A ليست لها معكوس

2- كون مصفوفة جديدة وتسمى المصفوفة المصاحبة لـ A بحيث

$$\text{adj } A = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

3- نقسم كل عدد في المصفوفة المصاحبة على det A لنحصل معكوس المصفوفة A A^{-1}

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{d}{ad - bc} & \dfrac{-b}{ad - bc} \\ \dfrac{-c}{ad - bc} & \dfrac{a}{ad - bc} \end{pmatrix}$$

وبشكل آخر فإن $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj } A$. ويمكن هذا أيضاً في المصفوفات الأعلى ولكنه يكون من الصعب إيجاد كل من المحدد والمصفوفة المصاحبة بسهولة.

المصفوفة المصاحبة The adjugate of a matrix

يمكن إيجاد مقلوب المصفوفة 3×3 بنفس طريقة المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ نتبع الآتي:

1- نكون مصفوفة جديدة بتبديل الصفوف لأعمدة فالصف الأول يكون العمود الأول وهكذا وتسمى بدور المصفوفة A $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} A^T$.

2- نحدد أحد الأعداد في المصفوفة A^T ونحذف الصف والعمود الموجود به هذا العدد لتصبح المصفوفة 2×2 فمثلاً بحذف الصف والعمود الخاص بالعدد 3 الموجود بالصف الأول $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ لتصبح على الشكل $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ وفي هذه الحالة يكون $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = 3$.

3- وبعمل تلك الخطوة لكل عدد في المصفوفة A^T تنتج المصفوفة $\begin{pmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 7 & -3 & -8 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

4- الخطوة الأخيرة هي تغيير الإشارات طبقاً للقاعدة $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$ والتي تعني أن + تعني عدم تغيير الإشارة و - تعني تغييرها.

لنصف أخيراً للمصفوفة $\text{adj } A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 7 & -3 & -8 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

إذا أردنا استخدام ذلك لايجاد معكوس A فإننا نطبق القاعدة $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\text{adj } A$ لتصبح

$$A^{-1}\begin{pmatrix} \frac{-5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{12} & \frac{1}{4} & \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{12} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

تحويلات المصفوفات Transformation matrices

التحويلات مثل الدوران والإنعكاس هي عبارة عن أخذ إحداثيات نقطة وإعادة توحيدها بطريقة أخرى فمثلاً إنعكاس نقطة على المستقيم $y = x$ تتعين بتغيير إحداثيات النقطة فمثلاً (1,2) تصبح (2,1) .

والإنعكاس في محور السينات تغير إشارة الإحداثي الصادي (1,2) تصبح $(1,-2)$ والدوران بزاوية $90°$ حول نقطة الأصل تجعل النقطة (1,2) تصبح $(-2,1)$ هذه الطريقة تتم عن طريق ضرب المصفوفات ولفعل ذلك فإنه من السهل أن تفعلها بدلالة المتجهات فبدلاًمن النقطة (1,2) سوف نعمل على المتجه التي يعطي إتجاه هذه النقطة من نقطة الأصل وهي. $\binom{1}{2}$ وإنعكاس هذا المتجه في المستقيم $y = x$ يعطي عن طريق ضربه بالمصفوفة $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

وبالمثل إنعكاس في محور السينات يعطي عن طريق ضربة بالمصفوفة $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

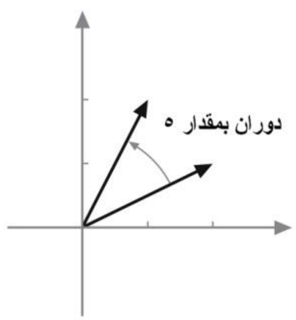
والدوران بزاوية °90 حول نقطة الأصل يعطي بالضرب في $\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$$

دوران المصفوفات Rotation matrices

أشهر أنواع الدوران هي بزاوية °90 و °80 و °270 حول نقطة الأصل ويعطي كلاً منهم بالضرب في المصفوفات $\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$، $\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$، $\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}$.

يعطي دوران المصفوفة حول نقطة الأصل فقط (الدوران حول أي نقطة أخرى يحول إلى دوران حول نقطة الأصل وإنتقال). وتعتبر القاعدة العامة لدوران المصفوفات بزاوية θ هي:



$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ فمثلاً الدوران بزاوية °30 تعطي بـ $\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2}\end{pmatrix}$

ومحدد دوران المصفوفة دائما يساوي 1 حيث $\cos 0 + \sin 0^2 = 1$.

انعكاس المصفوفات Refl ection matrices

يمكن انعكاس المصفوفة حول أي مستقيم يمر بنقطة الأصل وأشهر الأمثلة هي المستقيمات x=0, y=0, y=-x, y = x ويوصف كلاً منهم بالمصفوفات $\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$، $\begin{pmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{pmatrix}$، $\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$ على الترتيب.

وللدورانات الأخرى كل مستقيم يمر بنقطة الأصل يعرف عن طريق حيلة، فمثلا

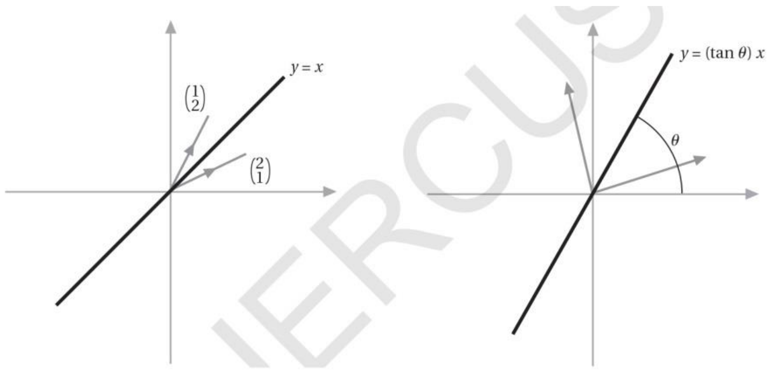
إذا كانت زاويته مع محور السينات هو محور السينات (المستقيم $y=0$) وتكون الزاوية $0°$ والمستقيم $y = x$ زاويته $45°$ ومحور الصادات زاويته $90°$ والمستقيم $y = -x$ زاويته $135°$ والزاوية $180°$ نرجع إلى محور السينات فإذا كانت زاوية مع محور السينات هي θ فإن ميله هو $\tan\theta$ ولذلك فإن معادلة المستقيم تعطى بالعلاقة $y = (\tan\theta)\,x$ والإنعكاس في هذا المستقيم يوصف بالمصفوفة

$$\begin{pmatrix} \cos 20 & \sin 20 \\ \sin 20 & -\cos 20 \end{pmatrix}$$

فالمستقيم $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ زاوتيه $30°$ ويكون الإنعكاس حول هذا المستقيم يعطي بالضرب في المصفوفة

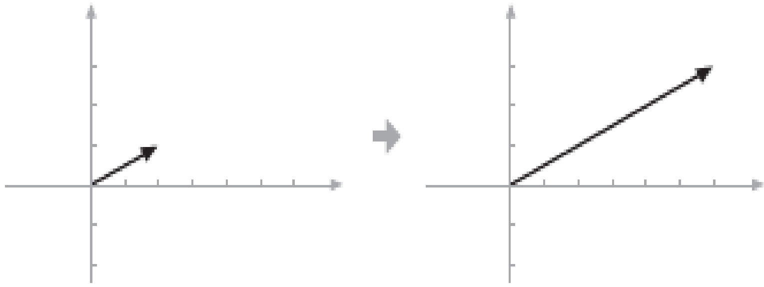
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

ومحدد أي إنعكاس مصفوفة يساوي دائماً 1-.



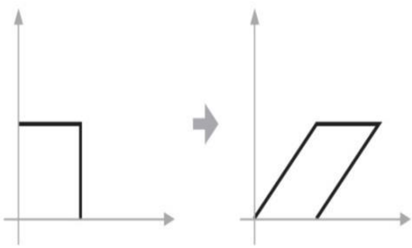
تكبير وقص المصفوفات Enlargement and shearing matrices

كل التكبيرات بالنسبة لنقطة الأصل يمكن كتابتها على شكل مصفوفات بصورة بسيطة، فلتكبير المتجه $\binom{2}{1}$ بمقياس 3 نضرب كل إحداثي في العدد 3 لتعطي $\binom{6}{3}$ وهو نفس الشيء عند ضربه بالمصفوفة $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ حيث $\binom{6}{3} = \binom{2}{1}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.



وعموما فإن التكبير بمقياس a يعطي بالمصفوفة $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

وتوجد طريقة مختلفة للتحويل تعطي بالمصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.



وهذا مثال على القص. فالقفص دائما يحافظ على مستقيم واحد بدون تغيير (وفي هذه الحالة هو محور السينات) وتغير النقاط الأخرى لتوازي هذا المستقيم متناسبة في المسافات بينها. هذا التناسب يسمى عامل القص (في هذه الحالة 1) مع ملاحظة أن القص دائما يحافظ على مساحة الشكل.

مجموعات المصفوفات Groups of matrices

من السهل ضرب المصفوفات عندما تكون المصفوفة مربعة ويوجد مصفوفة خاصة لكل حجم وهي المصفوفة المحايدة والتي لا تغير أي شيء في المصفوفة الأصلية فبالنسبة للمصفوفة 3×3 لا تكون مرة، والمشكلة أنه ليس لكل مصفوفة معكوس، فإذا كان محدد المصفوفة A يساوي صفى فإن A ليس لها معكوس وهذه هي العقبة الوحدية، فإذا استثنينا المصفوفات التي محددها صفر، فإن بقية المصفوفات تكون زمرة وتسمى الزمرة الخطية العامة من الجردة الثالثة. توجد أيضاً. صغيرة أخرى بداخلها. وبالنسبة للمصفوفات التي محددها يساوي 1 تنتج زمرة أخرى وهي الزمرة الخطية الخاصة.

وبالنسبة للمصفوفات 2×2 فإن تجميع كل من دوران وانعكاس المصفوفات يكون زمرة وتسمى الزمرة العمودية من الدرجة الثانية. وفي الأبعاد الأعلى فإن مدى التحويلات الممكنة يزداد. ولكن تبقى الزمرات العمودية مهمة.

وهكذا فإن زمرات المصفوفة المختلفة هي أمثلة مبدئية زمرات "lie groups" وعند تحليلهم بدقة ينتج التصنيف البسيط لـ "lie groups" وعند استبدال الأعداد في المصفوفات بالعناصر من المجال المنتهي، ونستطيع إيجاد العائلات التي تميز في التصنيف البسيط المنتهي للمجموعات.

المصفوفات والمعادلات Matrices and equations

بالإضافة إلى استخدام المصفوفات في الهندسة فإن لها أهمية كبيرة في حل المعادلات المتزامنة وتحويلها إلى معادلة واحدة.

فبأخذ المعادلتين 2x+y=7 , 3x-y=3 فإنه يمكن التعبير عنهما معا كالتالي:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ويكون معكوس المصفوفة $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ هو $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{-2}{5} \end{pmatrix}$

فإذا ضربنا طرفي المعادلة في هذه المصفوفة فإن المصفوفتين على الطرف الأيسر سوف يتم حذفهما ويتبقى $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{-2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ وبضرب المصفوفتين ينتج أن $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ويكون الحل هو $y = 3 , n = 2$ وهذه الطريقة تصلح لحل المجموعات الأعلى من المعادلات في أكثر من مجهول.

نظرية الزمرة GROUP THEORY

بديهيات الزمرة The group axioms

إذا جمعنا عددان صحيحان فانه يوجد شيئان واضحان:

1- يوجد عدد مميز وهو الصفر والذي لا يغير أي شيء إذا تم إضافته لأي عدد.

2- إذا جمعت العدد n مع العدد السالب n- فإن الناتج يساوي صفر والشيء الثالث يوضح بهذا المثال $23 = 6 + 16 = 6 + (5 + 12)$ والتي تعطي نفس الإجابة عندما $23 = 11 + 12 = (6 + 5) + 12$ ولذلك فإن طريقة اختيار القوس لا تؤثر في الناتج لأن هذه الطريقة تسمى الدمج.

هذه الحقائق البسيطة وعلماء التجريد أعطوا فكرة واضحة عن الجبر المجرد والي يسمى الزمرة وهو تجمع عدد من الأشياء والتي يمكن كتباتها في أزواج ولها ثلاث بديهات:

1- يوجد شيء مميز وهو المحايد والذي لا يغير شيء عند جمعه مع آخر.

2- كل شيء له معكوس وهو الذي إذا جمعه مع آخر يعطي المحايد.

3- عملية جمع الزمر دامجة.

الزمر Groups

توجد الزمر في كل أنواع الجبر المجرد، والزمرة هي تجمع من الأشياء بطريقة معينة بحيث تحقق بدهيات الزمرة ويعتبر جمع الأعداد الصحيحة مثال على ذلك كما بينا في الأعلى.

عملية ضرب الأعداد أيضاً تكون زمرة وفي هذه الحالة يكون المحايد 1 ومعكوس العدد q يكون $\frac{1}{q}$ ولكن معكوس 2 هو $\frac{1}{2}$ وهو ليس عد صحي ولذلك فإن الأعداد الصحيحة لا تكون زمرة بالنسبة لعملية الضرب ولكن غذا مدت إلى الأعداد النسبية فإنها تكون زمرة ولكن يوجد مشكلة لان العدد 0 ليس له معكوس لأنه لا يوجد عدد إذا تم ضربه في العدد 0 يعطي 1 ولذلك فسوف نستبعده لنصل إلى الأعداد النسبية الغير صفرية وهي تكون زمرة في عملية الضرب.

هذه الأمثلة لانهائية ولكن توجد أيضاً الزمر المنتهية والتي تحتوي على بعض الزمر المتماثلة والزمر التبادلية.

توضيح آخر بخصوص الأعداد الصحيحة فحيث أن 17+89 :89+17 فإن ترتيب العملية غير مهم وتسمى هذه الزمر "Abelian" نسبة إلى عالم الجبر النرويجي "نيلس أبل"، يوجد أيضاً عدد من الزمر "non-abelian" مثل زمر المصفوفات في عملية الضرب.

زمر التبديل Permutation groups

كم عدد الطرق المختلفة التي نستطيع بها ترتيب المجموعة {1,2,3} ؟ يمكن معرفتها عن طريق $3!=3\times2\times1=6$ والطرق الستة هم 3,2,1;3,1,2;2,3,1;2,1,3 ;1,3,2;1,2,3

لكل ترتيب يوجد دالة مناظرة تسمى التبديل والتي تبين طريقة إعادة ترتيب الأرقام من 1,2,3 إلى الترتيب الجديد

1	→	2
2	→	3
3	→	1

or

1	→	1
2	→	3
3	→	2

وهذا التبديل يمكن تنفيذه واحدا بعد الآخر وبوضعهما معا تعطي:

1	→	2	→	3
2	→	3	→	2
3	→	1	→	1

⇒

1	→	3
2	→	2
3	→	1

والتبديل المحايد لا يغير أي شيء

1	→	1
2	→	2
3	→	3

ولكل تبديل معكوس

1	→	2
2	→	3
3	→	1

or

1	→	3
2	→	1
3	→	2

لأنه عند وضعهم معا يعطي المحايد

1	→	2	→	1
2	→	3	→	2
3	→	1	→	3

ولذلك فإن الست تبديلات تكون زمرة وتسمى الزمرة المتماثلة في ثلاثة عناصر أو 3ـs وبالمثل نستطيع إنشاء الزمرة المتماثلة لأي عدد ومن العناصر

الدورة Cycle notation

الدورة هي طريقة مناسبة لوصف التبديل بدلا من كتابته في جدول

1	→	2
2	→	3
3	→	1

فإننا نستطيع استخدام (3 2 1) للإشارة إلى التبديل فبأخذ 2 to 3,1 to 3,2 لتكمل الدورة إلى 1 .

وبالمثل الدالة الآتية:

1	→	1
2	→	3
3	→	2

يمكن كتابتها على صورة (3 2) (1) حيث دورة 1 هي نفسها وكل من 3 and 2 يكون دورة طولها 2 وغالبا لا يكتب 1 ويكتب التبديل على الشكل (3 2) .

نظرية الكابوس Librarian's nightmare theorem

إذا استعار أحد العملاء كتب من مكتبة ما وأعادها على يمين أو يسار مكانهم الأصلي، ما عدد الترتيبات الناشئة عن ذلك؟

الجواب هو أنه بعد مرور بعض الوقت كل ترتيب يكون ممكن وأبسط التباديل هي التبديلات التي تترك كل شيء كما هو باستثناء تبديل النقطتين المجاورتين والسؤال هو ما أكثر التبديلات المعقدة التي يمكن أن تبنى من التبديلات المتلاحقة؟

والجوب هو لكل تبديل يمكن عمل ذلك.

الدورة (3 2 1) ليست تحويل لأنها تحرك ثلاث عناصر 3 to 1 , 2 to 3 , 1 to 2 ولكنها لها نفس التأثير لتعديل 2 and 1 ثم تبديل 3 and 2.

لتكتب (3 2) (2 1) = (3 2 1) لتضمن نظرية الكابوس أن لكل تبديل يمكن التعبير عنه في صورة ضرب تحويلات.

تحويلات الزمن التبادلية Alternating groups

تقول نظرية الكابوس أن كل تبديل يمكن أن يقسم إلى تحويلات وهذا التمثيل ليس وحيدا فعلي الرغم من أنه يوجد عدة طرق لإنشاء تبديل جزئي من التحويلات على سبيل المثال: في الزمرة المتماثلة "S_3" (3 2) (2 1) = (2 3 1) .

وأيضا (2 1) (3 2) (2 1) (3 2) = (2 3 1) من خلال كل التمثيلات الممكنة يبقى شيء ما هو الثابت إذا كان التبديل عبارة عن حاصل ضرب أعداد زوجية من التحويلات فإن كل تمثيل يجب أن يشتمل على عدد زوجي وبالمثل إذا كان التبديل عبارة عن حاصل ضرب لعدد فردي من التحويلات فإنه يمكن أن يكتب على شكل تركيب لعدد فري وهذه الحقيقة تقسم التبديل إلى فردي وآخر زوجي.

يعتبر تجمع التبديلات الزوجية مهم جدا لأنه يكون زمرة جئية تسمى زمرة تبادلية عدد عناصرها n أو An فعندما $n \geq 5$ تسمى هذه الزمرة بالزمرة البسيطة وحقيقة أن A_5 هي أول زمرة بسيطة يعود إلى نظرية جالوا.

جداول كايلي Cayley tables

ينشأ الأطفال عادة على حفظ جدول الضرب

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

وبالطبع هذا الجدول غير مكتمل لوجود عدد لانهائي من الأعداد، في وحدة الضرب 5 تختفي هذه العقبة لان كل القيم تصبح موجودة

×	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

في القرن التاسع عشر سمي هذا الجدول باسم عالم الرياضيات البريطاني "آرثر كايلي"، هذا الجدول يعرف مجموعة الأعداد الغير صفرية تحت وحدة الضرب S (لاحظ أن كل عنصر في المجموعة يظهر مرة في كل صف وكل عمود).

مثال آخر: بأخذ مجموعة متماثلة من مثلثات متساوية الأضلاع. طالما المحايد يكتب بالشكل 1 وهذا يحتوي على دوران بزاوية 120° يسمي R ودوران آخر بزاوية 240° الناتج عن تضاعف R ويسمي R^2 يوجد أيضاً انعكاس في الخط الرأسي يسمى T والإنعكاسين المتبقيين هما إنتاج تتابع T بـ R أو R^2 لذلك فإننا نسميهم TR وTR^2 ولذلك فإن كل جدول الضرب يظهر كيف تتفاعل هذه العناصر الستة.

كل زمرة منتهية يمكن كتابتها في جدول كايلي بهذه الطريقة.

	ι	R	R^2	T	TR	TR^2
ι	ι	R	R^2	T	TR	TR^2
R	R	R^2	ι	TR^2	T	TR
R^2	R^2	ι	R	TR	TR^2	T
T	T	TR	TR^2	ι	R	R^2
TR	TR	TR^2	T	R^2	ι	R
TR^2	TR^2	T	TR	R	R^2	ι

التماثل Isomorphisms

فهم آرثر كايلي أن النمط بواحدة من جداوله يحتوي على خلاصة مجردة لزمرة. أسماء العناصر والسيناريوهات الهندسية لها أهمية ثانوية. ولكي نقول أن زمرتين متماثلتين يجب أن يكونا نفس الشيء (حتى لو ظهروا في حالات مختلفة تماما) كل ذلك مطلوب لتحويل واحدة لأخرى لها تغير منهجي من التسميات.

في الدورة يكون للزمرة المتماثلة على {0,1,2} جدول كايلي كالتالي:

	ι	(0 1 2)	(0 2 1)	(0 1)	(0 2)	(1 2)
ι	ι	(0 1 2)	(0 2 1)	(0 1)	(0 2)	(1 2)
(0 1 2)	(0 1 2)	(0 2 1)	ι	(1 2)	(0 1)	(0 2)
(0 2 1)	(0 2 1)	ι	(0 1 2)	(0 2)	(1 2)	(0 1)
(0 1)	(0 1)	(0 2)	(1 2)	ι	(0 1 2)	(0 2 1)
(0 2)	(0 2)	(1 2)	(0 1)	(0 2 1)	ι	(0 1 2)
(1 2)	(1 2)	(0 1)	(0 2)	(0 1 2)	(0 2 1)	ι

$$\begin{array}{ccc} 1 & \rightarrow & 1 \\ (0\,1\,2) & \rightarrow & R \\ (0\,2\,1) & \rightarrow & R^2 \\ (0\,1) & \rightarrow & T \\ (0\,2) & \rightarrow & TR \\ (1\,2) & \rightarrow & TR^2 \end{array}$$

وهذا التعديل يسمي قاتل وبديهيا فإنه يقال لزمرتين أنهما متماثلتان إذا كان لهما نفس عدد العناصر لكن هذا ليس كافيا فوحدة الجمع 6 أيضاً تنتج زمرة من ستة عناصر ولكنها مختلفة عن الزمرة السابقة.

	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

وحد التماثل يمكن أن ينطبق على بنية جبرية أخرى غير الزمر (مثل الحلقات والحقول) ولكنها تحمل أيضاً نفس المعنى. وهذان البنيتان مطابقان مع إعادة تسمية العناصر التي تحتاج إلى ذلك فقط للتحويل من واحدة لأخرى.

الزمر البسيطة Simple groups

بما أن العدد الأولى هو العدد الذي لا يقسم إلى أعداد صغيرة فإن الزمر البسيطة لا تقسم أيضاً إلى زمر صغيرة فض حالة الزمر المنتهية يوجد أيضاً نظير للنظرية الأساسية للحساب (نظرية جوردن هولدر 1889م) والتي تقول أن كل زمرة منتهية تبني من زمر بسيطة بطريقة وحيدة. يعطي تصنيف الزمرة البسيطة المنتهية وصفا كاملا لهذه اللبنات الأساسية.

وفي حالة الزمر الغير منتهية تكون غير واضحة، حيث أنه ليست كل زمرة يمكن أن تقسم إلى قطع قابلة للتجزئة بهذه الطريقة وعلى الرغم من أن بعض الحالات الخاصة يمكن معالجتها فإن الحالة الأكثر أهمية هي "تصنيف زمر لاي البسيطة".

تصنيف الزمر البسيطة المنتهية The classifi cation of fi nite simple groups

يعتبر من أهم الاكتشافات الرياضية في القرن العشرين تصنيف الزمر البسيطة المنتهية وهو تتويج لفريق المشروع الضخم والمنشور في حوالي 500 صفحة بمجهود أكثر من 100 عالم من علماء الرياضيات والجهد المبذول لإنشاء "إثبات الجيل الثاني" ومستمرون في مكان واحد، وسوف تمتد إلى 12 مجلدا (تم نشر ستة منهم في وقت كتابة هذا الكتاب) والنظرية الأخيرة تعطي وصف دقيق لـ 18 عائلة غير منتهية من الزمر المنتهية.

أول هذه العائلات هي عائلة الزمر الدائرية: وحدة الجمع P حيث P عدد أولى ثم بعد ذلك الزمر التبادلية والعائلات الباقية هي الزمر المتماثلة لبعض الهياكل الهندسية المنتهية. توصف النظرية أيضاً 26 زمرة فردية مثل الزمر المنقطعة وأكبرهم هي الوحش " The monster".

وأخيرا فإن هذه النظرية الرائعة تنص على أن الـ 18 عائلة والـ 26 زمرة فردية تضم معا المجموعة الكاملة للزمر البسيطة المنتهية.

الوحش The monster

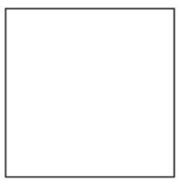
تأتي في 808, 017, 424, 794, 512, 875, 886, 459, 904, 961, 710, 757, 005, 754, 368, 000, 000, 000 عنصر، ويعتبر الوحش أكبر الزمر البسيطة المنتهية من الـ 26 زمرة المتقطعة. يوجد بالطبع زمر منتهية غير محددة الحجم ولكن الممتع في زمرة الوحش هي أنها وحيدة بذاتها وليست جزء من أي عائلة أكبر أو نمط واكتشفت عام 1973م وأنشئت بواسطة "برند فيشر وروبرت جريس" عام 1980م وظهر الوحش في البداية باعتباره صفة غريبة: احتمال اندماجي عجيب.

في عام 1979م وعلى الرغم من تفاجؤ "جون كونوي وسيمون نورتين: من إيجاد منطقة

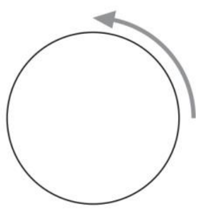
غير مترابطة من الأشكال النمطية ووصف ظاهرة الوحش الغير متوقعة بالعبث وجعلوا التخمين لهذين العالمين وثيق الصلة، وفي سباق القوة عام 1992م أثبت "ريتشاردبورشروس" التخمين العبثي باستخدام أفكار عميقة من نظرية الكم الميداني وبعد إكمال الإثبات وصف شعود حينها بأنه over the moon.

زمر لاى Lie groups

الزمرة المتماثلة لمربع تحتوي على أربعة دورنات بـ 0°, 90°, 180°, 270° وفي المقابل يمكن دوران الدائرة بزاوية 1°, 197.8° أو أي زاوية وهذا يعني أن الزمرة المتماثلة للدائرة تكون غير منتهية، ومن المنطقي أن نتحدث عن دوراناان قريبان من بعضهما فالدوران بزاوية 1° يجعل الدائرة ثابتة بدون تغيير كذلك الدوران بزاوية 0.1°, 0.001° ولذلك فإن هذا الدوران يعتبر أقرب للدوران المحايد فهذا التماثل الطفيف لا يغير شيء. وتسمح هذه الزمرة بالتدرج والتغييرات المستمرة عوضا عن الزمر المتماثلة المنفصلة للمضلعات.



في الحقيقة تبدو زمرة التماثل للدائرة أشبه بالدائرة نفسها فمثلا الدوران بزاوية 360° يرجعنا لنقطة البداية ويوجد أيضاً بعض الانعكاسات الغير منتهية المتناظرة مع اختيار أقطاره مختلفة للدائرة كما في خطوط المرآة. ويمكن لانعكاسين أن يكونا أقرب لبعضهما (إذا كان خطوطهما هي نفسا تقريبا) ولكن لا يمكن لانعكاس أن يكون أقرب للمحايد ولذلك فإن هذه الزمرة المتماثلة تأتي في عنصرين بارزين: الدورنات التي يمكن أن تصل إلى المحايد والانعكاسات التي لا يمكن أن تصل إليه.



وهذه تسمى الزمرة العمودية الثانية. (الثالثة تناظر تماثلات الكرة وهكذا) الزمر العمودية هي أولى الأمثلة لزمر لاي والتي اكتشفت بواسطة النرويجي (سوفوس لاى) والتماثلات لأي مضاعف سلس ينتج زمرة لاى مما يجعل هذا ذا أهمية كبيرة في الفيزياء وغالبا كما في الزمر العمودية فإن زمرة لاى يمكن كتابتها على أنها زمرة مصفوفات.

تصنيف زمر لاى البسيطة The classifi cation of simple Lie groups

في عام 1989م كتب عالم الكم (جون كمولمان) مقالا بعنوان "أعظم ورقة رياضية في كل العصور" واقتبس هذا العنوان المهيب من أعمال العالم (فيلهلم كيلينج) ومن بين كل الاختراقات التكنولوجية وصل كيلينج إلى تصنيف كامل لزمر لاى البسيطة.

تلعب زمر لاى اليوم دوراً أساسياً في علم الفيزياء، ودورا عميقا رياضيا بالطريقة التي ترتبط بها مع علم الجبر عن طريق نظرية الزمرة مع أفكار عميقة من الهندسة التفاضلية وزمر لاى البسيط لها أهمية خاصة : فهي التي لا يمكن تمسيمها إلى زمر لاى الاصفر أكمل (إيلى كارتان) المشروع المهم الذي بدأه كيلينج وكتبه (جين ديودوني) والتي جعله ممكنا فقط بواسطة فطنته الجبرية والهندسية الخارقة والتي صنعت جيليين من الرياضيين وكان نتاج مجهودات كيلينج وكارتان أربع عائلات غير منتهية من زمر لاى البسيطة مستمرة من زمر المصفوفة.

أطلس زمر لاى The atlas of Lie groups

منذ اكتشاف كيلينج وكارتان تصنيف زمر لاى البسيطة فقد عرفنا أن كل زمرة من زمر لاى البسيطة يجب أن تكون واحدة من القائمة وإنجازا هائلا كهذا لم يكن النهاية، لأننا لم نعرف ما بداخل هذه الزمر، وأفضل طريقة لفهم هذا المشروع الضخم والأشياء المجردة هي تقريبهم لاشياء نعرفها جيدا ألا وهي زمر المصفوفات، وهذا هو موضوع نظرية التمثيل. أطلب زمر لاى هو مشروع لتجميع نظرية التمثيل لكل زمر لاى.

E_8

أكثر زمر لاى البسيطة تقعيدا هي E_8 وتصف تماثلات شيء ما في مساحة 57 من الاعباد. وتعتبر E_8 نفسها في مساحة 248 من الأبعاد وتم الانتهاء من تحليل تمثيل المصفوفة E_8 في عام 2007م من قبل فريق من علماء الرياضيات والمبرمجين بقيادة (جيفرى أدمز) في جامعة ماريلاند والمعلومات الموجودة تصف E_8 على أنها تحتل ضخامة 60 جيجا بايت وبالمقارنة فإن الجينوم البشري أقل من حجم جيجا بايت واحد.

مشكلة التمديد The extension problem

في الكيمياء يتم دمج عناصر مثل الكربون والهيدروجين إلى مركبات فصيغة مثل C_5H_{12} تخبرنا أن كل جزئ من المركب يحتوي على خمسة ذرات كربون واثنا عشر ذرة من الهيدروجين. هذه المعلومات ليست كافية لإثبات مركب كيميائي جديد ويمكن الجمع بين العناصر بطرق مختلفة تسمى isomers "الايزومرات" فتجمع ايزومرين معا يعطي الصيغة C_5H_{12} ولأن هذه الذرات ترتبط بطرق مختلفة فالناتج يمكن أن يكون مركبين غير متشابهين في الخصائص الكيميائية.

ينطبق نفس الشيء على نظرية الزمرة. وفهم الزمرة ليس كافيا لمعرفة بنيتها بدلالة الزمر البسيطة ويمكن الدمج بين زمرتين ببعض الطرق المختلفة فعلى سبيل المثال يمكن البدأ بزمرة من وحدة الجمع 2:

	0	1
0	0	1
1	1	0

بأخذ نسختين من هذا ودمجهما معا يعطي احتمالين. أولهما أنه لإضافة زوجين من الزمرة فإن هذا ينتج ما يسمى بزمرة كلاين 4:

	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
(0,0)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
(0,1)	(0,1)	(0,0)	(1,1)	(1,0)
(1,0)	(1,0)	(1,1)	(0,0)	(0,1)
(1,1)	(1,1)	(1,0)	(0,1)	(0,0)

وبالتبادل ينتج وحدة الجمع 4:

	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

وفهم الاحتمالات المختلفة لدمج زمرتين يسمى بمشكلة التمديد وبشكل عام فهو صعب نسبيا ولكن يوجد حالات خاصة مثل الزمر المنتهية من الحجم الأولى وهي من المواضيع المكثفة الدراسة والأسلوب الوحيد تم نشرة بواسطة (ماركوس دي سوتوى) والآخرين وهو استخدام دوال L "L-functions" لترميز المعلومات حول الزمر.

الزمر القابلة للحل Solvable groups

أسهل الزمر فهما هي زمر ابليان حيث أنها صحيحة دائما عند x4 = 4x وجميع أنظمة العدد المألونة تحقق ذلك وليست كل زمرة هي ابليان زمر المصفوفة والزمر التبادلية والزمر المتماثلة ليست زمر ابليان. ثاني أفضل الزمر هي ليست زمر ابليان نفسها ولكنها بنيت من أجزاء بسيطة لميست ابلين مثل A وهي ليست قابلة للحل. وكان لـ (ايفارستي جالويس) نظرة عظيمة لفائدة الزمر في دراسة المعادلات. والسؤال هنا هل الزمر الناتجة قابلة للحل؟ نعرف هذا في (نظرية جالويس).

الجبر المجرد ABSTRACT ALGEBRA

الجبر المجرد Abstract algebra

يختلف الجبر الأعلى عن العادي المكون من تشكيلة الأرقام والحروف لاسيما في تلك الحسابات التي تتم في الإعدادات. الأكثر تجريدا من أنظمة عائلات الأعداد الصحيحة أو الأعداد النسبية. وتلعب أنظمة العدد (مثل الأعداد الصحيحة) دورا في بناء تجمع من الأشياء (تسمى عناصرها) والتي تأخذ مكان الأعداد المفردة ونخضع كل ذلك لبعض البديهيات كبدهيات الزمرة. وكل تلك التركيبات يمكن دراستها بعمق عن طريق التحقيق في النتائج المنطقة من البديهيات.

التركيبات الجبرية Algebraic structures

درست التركيبات الجبرية المجردة على نطاق واسع ومذهل بواسطة علماء الرياضيات والأمثلة الأكثر أهمية هي الزمر والحلقات والحقول فالأول وهلة قد يبدو النهج الرسمي

منقطع كليا عن أي نوع من الواقع ولكن بعض الأشياء الرياضية مثل الأعداد الصحيحة والأعداد المركبة والمصفوفات مناسبة لواحدة أو أكثر من هذه التركيبات، ولذلك فإن دراسة التركيبات المجردة يعتمد أيضاً على دراسة هذه الأنظمة الشائعة.

وأبعد من ذلك فإن هذه التركيبات لديها عادة الظهور في أماكن غير متوقعة وهذا النهج يسمح بحل مساحات واسعة من المشكلات وبدلا من تكرار نفس العمل في سياقات مختلفة فالأفضل من ذلك هو تصنيف هذه التركيبات المجردة وهذا يعني أن مجموعة كل التركيبات تحقق البديهيات التي يمكن أن تعطي صراحة. والأمثلة هي تصنيف الزمر البسيطة المنتهية وتصنيف زمر لاى البسيطة.

الحلقات Rings

توفر الزمر طريقة رائعة لدراسة كل من الجمع والضرب المجردين ولكن بالنسبة للأرقام العادية فإن كلا العمليتين يستمرا في نفس الوقت ودعت الحاجة أيضاً إلى ابتكار طريقة جديدة لتجريد هذا النظام، وكان الحل في توصل مجموعة من علماء الرياضيات في القرن العشرين إلى مفهوم الحلقة وهي تجمع من الأشياء التي يمكن أن تجمع أو تطرح أو تضرب معا متبوعة ببعض البديهيات الدقيقة التي تحكم كيفية تفاعل هذه العملية والمثال الأكثر أهمية هو Z حلقة الأعداد الصحيحة ويوجد أيضاً حلقة المصفوفات وكثيرات الحدود والتي تظهر في جميع دراسات الجبر والهندسة وحلقة الدوال والتي تلعب دورا مهما في التحليل.

جميع الحقول تعتبر حلقات وبالمثل جميع الحلقات تعتبر زمر (عند إهمال عملية الضرب بها والتركيز على الجمع والطرح).

الحقول Fields

لدينا في الحلقة كل من الجمع والطرح والضرب ولكن ينقصنا شيء ألا وهو عملية القسمة وهذا واضح في حلقة الأعداد الصحيحة. فقسمة عدد صحيح 5 على عدد صحيح آخر 7 لا يعطي الناتج عدداً صحيحاً ولذلك فإننا لا يمكنتا أن نأمل في إمكانية القسمة دون ترك التركيب.

الحقل هو المكان الذي يسمح بعملية القسمة (مع استثناء أنه حتى في الحقل لا يمكن القسمة على 0) والحقل الأكثر شيوعا هو حقل الأعداد النسبية والأعداد الحقيقية والأعداد المركبة. يوجد أيضاً حقول مهمة ألا وهي الحقول المنتهية أي الحقل ذو العنصر الواحد و The quaternions و The octionions

الحقـول الأوليـة Prime fi elds

في وحدة الحساب 4 لا يمكن قسمة العدد 1 على 2 والسبب هو أن مضاعفات 2 هي ....,0,2,4,6,8,10 ولك عدد من تلك الأعداد عند قسمته على 4 يترك باقي 0 أو 2 ولذلك فإنه لا يوجد عدد صحيح عند ضربة في 2 يعطي إجابة مطابقة لـ 4 1 mod وهذا يعني أن الأعداد { 3 , 2 , 1 , 0} تحت وحدة الحساب 4 يمكن جمعهم وطرحهم وضربهم ولكن لا يمكن قسمتهم ولذلك فإن هذا التركيب يعتبر حلقة وليس حقلا.

في الوحدة 5 فإن أي عدد يمكن قسمته على آخر (ماعدا 0 كالعادة) فعلى سبي المثال 5 MOD 123 لأن 5 MOD 231 وهذا يعني أن مجموعة الأعداد {0,1,2,3,4} تكون حقلا ويسمى F_5 ويمكن في هذا التركيب إجراء عمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة والسبب في ذلك أن 5 عدد أولى ولكن 4 ليست كذلك. وبنفس الطريقة، فإن وحدة الحساب لأي عدد أولي P تنتج حقلا منتهيا يسمى F_p ليست الحقول المنتهية الوحيدة فيما أنه يمكننا امتداد الأعداد الحقيقية لتصل إلى الأعداد المركبة عن طريق إضافة الجذر التربيعي للعدد 1- فإننا يمكننا امتداد الحقل F_p من خلال دمج بعض العناصر الجديدة. لأي N يوجد حقل جديد F_p بعدد عناصر P فمثلا يوجد حقل F_4 عدد عناصر 4 ولكنه ليس {0,1,2,3} تحت وحدة الحساب 4 تلك الحقول المنتهية هي أشياء مفيدة بشكل ملحوظ على الأقل في الترميز.

الحقـل ذو العنصر الواحد The ‘fi eld’ with one element

طبقا للبديهيات فإن كل حقل يجب أن يحتوي على العنصر الذي لا يغير شرع عند ضربه بآخر وهو 1 والعنصر الذي لا يغير شيء عند جمعه بآخر وهو 0 ولذلك فإن 1.0

واحدة من أهم الحقائق الأساسية في الحقول وهي تحتوي على عنصرين على الأقل (في الحقيقة أصغر حقل F2 يحتوي على عنصرين).

ولذلك لا يوجد حقل يحتوي على عنصر واحد فقط ومع ذلك فإن هذه الاستحالة المنطقية لم توقف "جاك تيتس" من فتح المناقشات حول هذا الموضوع عام 1957م كما أنها لم تمنع العديد من علماء الرياضيات من تطوير مجموعة من المعارف حول الكيان المعدوم والذي يعرف بـ F_1 (أور بما من الأنسب أن يعرف بـ un والتي تعني one بالفرنسية).

كانت رؤية علماء الرياضيات في F_1 ككائن الحد النظري للحقول كما في مالانهاية الأعداد الطبيعية والمبدأ الموجه هو أن F_1 تحول الأجسام الاندماجية إلى أخرى هندسية ووفقا لهذه الفلسفة فإن مجموعة الأعداد الصحيحة يمكن تخيلها على أنها منحني على F_1 ومجموعات عادية غير منظمة من الأشياء المتشابهة الأصناف.

نظرية جالوا Galois theory

كل من الأعداد النسبية والأعداد الحقيقية والأعداد المركبة هي أمثلة للحقول وعلى الرغم من أن كل منها مستقل بذاته إلا أن كل نظام من أنظمة هذه الأعداد له علاقة بالآخر فكل الأعداد النسبية هي أعداد حقيقية وكل الأعداد الحقيقية أعداد مركبة ويوجد شيء مهم يمكن حدوثه عند الانتقال من حقل أصغر إلى حقل أكبر ألا وهي المعادلة التي كانت سابقا ليس لها حل في نظام أعداد معين فمثلا $x^2 - 2 = 0$ ليس لها حل في الأعداد النسبية ولكن عند الانتقال إلى الأعداد الحقيقية وعند الانتقال إلى الأعداد المركبة فيوجد لها حل I.

بناء على مجهودات " أبيل" في حل معادلات الدرجة الخامسة في أوائل القرن التاسع عشر وضع مع "إيفاريست جالوا" عدة محاور مركزية في الجبر وبتاء على هذه المجهودات فقد تطورت نظرية جالوا تطورا عظيما. وفي المصطلحات الحديثة فإن نظرية جالوا هي الدراسة لكيفية معيشة حقل داخل آخر. وثمة جانب بالغ الأهمية وهو أن تقرر ما هي المعادلات الجديدة التي يمكن حلها في الحقل الأكبر ولا يمكن حلها في الحقل الأصغر؟

التماثلات والمعادلات Symmetries and equations

عند الانتقال من حقل أصغر (الأعداد الحقيقية) إلى آخر أكبر (الأعداد المركبة) فإن الحقل الجديد يجلب معه تماثلات جديدة.

فعلى سبيل المثال فإن الاقتران المركب هو تماثل للأعداد المركبة ولا يمكن هذا في الأعداد الحقيقية. وهذا التماثل يقلب على I , I- وهما الحلان للمعادلة $x^2 + 1 = 0$ ونظرية جالوا يمكن اعتبارها دراسة لتماثلات حلول هذه المعادلات. هذه التماثلات تكون زمرة. وأدرك إيفاريست جالوا أن السؤال الأهم هو، هل الزمرة الناتجة قابلة للحل أم لا؟

ومثل أبيل كانت حياة جالوا مذهلة وقصيرة ومأساوية وثورية ملتزمة.

ألقى القبض عليه مرة واحدة لتهديده حياة الملك (على الرغم تبرئته في وقت لاحق) وفي سن الـ 21 قتل في مبارزة في ظروف غامضة.

نظرية جالوا Galois' theorem

تناول جالوا مسألة متى يمكن حل معادلة الجذور. والصيغة التربيعية هي صيغة تحتوي على $+, -, \times, \div, \sqrt{\ }, \sqrt[3]{\ }, \sqrt[4]{\ }, \ldots\ldots$ والتي سوف تعطي حلول لأي معادلة تربيعية والصيغ التكعيبية والدرجة الرابعة بالمثل.

وتقول نظرية جالوا أن هذه الصيغة موجودة إذا كانت الزمرة المناظرة قابلة للحل.

الزمر الماثلة S_1, S_2, S_3, S_4 هي زمر قابلة للحل وهو ما يفسر لماذا المعادلات الخطية والتربيعية والتكعيبية كلها لها صيغ لحلها ومن ذلك فإن الزمر $S_5, S_6, S_7, \ldots\ldots$ غير قابلة للحل وعند تقسيم S_n إلى قطع بسيطة فإنك تواجه زمرة non abelian البسيطة A_n (انظر الزمر المتبادلة). وبالتالي فإن المعادلات من الدرجة الخامسة والدرجات الأعلى ليست قابلة للحل.

نظرية التمثيل Representation theory

المشكلة في الجبر هي أنها غالبا يعتقد أنها مجردة كثيرا وهذا ليس اعتقاد الطلاب فقط

بل هي مشكلة علماء الرياضيات أيضاً فعلى سبيل المثال تعتبر الزمرة شيء مجرد للغاية. للزمر المنتهية يمكننا الحصول على ترتيب لها عن طريق كتابة جدول كايلي (طالا أنها ليست كبيرة جدا) وبفعل ذلك فإن هذا العمل يجعل الزمرة مجردة. وللزمر الغير منتهية لا يوجد طريقة أسهل من ذلك. فتعتبر أكثر الزمر المادية أسهل كثيرا للعمل عليها. زمر المصفوفات هي أمثلة رئيسة. فكل ما عليك القيام به هو أن تتعلم قوانين ضرب المصفوفة وتصبح الزمرة أكثر استيعابا تعتبر نظرية التمثيل طريقة مناسبة لفهم الجبر المجرد وأفضل طريقة هي عندما يمكننا تحديد أن زمرتنا هي في الواقع زمرة مصفوفة (وهذا يعني أنها متماثلة لأخرى) وحتى عندما لا يكون ذلك صحيحا فإنه يمكننا إيجاد زمر مصفوفة تقريبية لزمرتنا. وهذا يسمى بتمثيل الزمرة. وتهدف نظرية التمثيل إلى تجميع الزمرة الأصلية من المعلومات المقدمة من تمثيلها. بدأت نظرية التمثيل في دراسة الزمر ولكن دراسة الحلقات والتركيبات الأخرى بهذه الطريقة هي الموضوع الرئيسي للجبر الحديث.

نظرية الفئة Category theory

قال الشاعر "جون دون" "لا يوجد رجل مثل الجزيرة" وينطبق هذا أيضاً على التركيبات الجبرية فإذا أردنا دراسة زمرة معينة فإنها غالبا تكون منتجة لبحث علاقتها مع الزمر الأخرى. والمثال التقليدي هو تقسيم الزمرة إلى زمر أصغر وللزمر الأخرى تكون العلاقات ممكنة أيضاً.

ومن الأفضل التعبير عن هذه العلاقات كدوال بين الزمر ولذلك فإن كمية معينة من المعلومات لا تبقى مع الزمرة الفردية ولكن مع الدرجات الأعلى. وتجمع كل هذه الزمر والدوال بينها هو مثال للفئة.

يمكن حدوث شيء رائع وجدير بالملاحظة وهو إمكانية إثبات أشياء باستخدام تقنيات عامة والتي لا يبدو أنها تعتمد على خصائص الزمر ولكن فقط على فئة من الموضوعات مع دوالها. وحول علماء التوبولوچي "سوندرس ماك لين وصموئيل إلينبرج" ما وصفوه بالسابق بالهراء المجرد إلى موضوع في مساره الصحيح وأدت أبحاثهم في هذا المجال على

تطور علم التوبولچي الجبري والذي يربط بين الزمر وعلم التوبوجلي. وأفضل وسيلة لتخيل هذا هو إدراك أنها كفئة من المساحات التوبولوچية والزمر.

ومع تفكير علماء الرياضيات بطريقة أكثر تجريدا في الأشياء الغامضة (وتعتبر مخططات الهندسة الجبرية الحديثة مثال رئيس على ذلك) بدأت أهمية طرق نظرية الفئة تنمو سريعا.

متى يصبح شيئان هما نفس الشيء؟ When are two things the same?

يعتبر هذا السؤال هو السؤال العميق والمفاجئ وله عدة إجابات تعتمد تحديدا على معنى "نفس الشيء" واقتراب الهندسة لتقديم إجابات مختلفة ويعتبر السؤال أيضاً مهم في الجبر.

وأقوى مفهوم للتشابه هو مفهوم التساوي: يقال لشيئين أنهما نفس الشيء إذا كانوا واحد في كل شيء وليس اثنين (في اللغة الغير رياضية التساوي له معاني مختلفة كالرجال والنساء يمكن أن يتساويا ولكنها ليسا نفس الشيء) التساوي هي فكرة صحيحة من التشابه لنظرية الزمرة. في الجبر تكون أكثر تقييدا وفي نظرية الزمرة يفضل التماثل فكرة أنهما متطابقان فمثلا لا يمكن لزمرتين أن يكونا نفس الشيء ولكن إذا كانا متماثلان فإن لديهم نفس جدول كايلي ويكونا متطابقان في كل شيء مهم.

في بعض السياقات ولاسيما الهندسة الجبرية أعتبر (كيتي موريتا) أن حلقتين هما نفس الشيء إذا كان لهما نفس التمثيل وهذا الا يعني أنهما متماثلان ولكن حاول موريتا معادلة ما يكفي لضمان وجود العديد من الخواص المهمة.

الفئة المشتقة The derived category

أفضل طريقة للتصدي إلى مسألة متى يصبح شيئان هما نفس الشيء هي نظرة الفئة حتى تم اكتشاف فكرة أكثر عمقا من التشابه عن طريق (جان لويس فيردر وألكسندر جورثنديك) وتسمى الفئة المشتقة مع تعميم مرويتا للتكافؤ فإذا أنتج شيئان نفس الفئة المشتقة فهذا يعني تجاهل التفاصيل السطحية داخلها واعتبارهما نفس الشيء وتعتبر الفئة المشتقة مكونا مهمّا لبرنامج (لانجلان) فضلا عن الجبر الحديث والهندسة الجبرية.

علم الإحصاء

لا يقدم علم الرياضيات نماذج للظواهر المتوقعة فقط، كما هو الحال في علم الميكانيكا النيوتونية Newtonian Mechanics، بل يقدم أيضاً أدوات ثمينة لا تقدر بثمن لتحليل مبدأ الشك uncertainity. وهذا المجال يسمي الاحتمال Probability. وفي هذا المجال بإمكان التجارب البسيطة مثل إلقاء حجر النرد، أو إلقاء قطعة النقود أن تقدم رؤى نافذة في مجال رياضة الاحتمالات.

لا يستغنى أي عمل أو أي حكومة في العالم عن استخدام علم الرياضيات متمثلا في الإحصاء استخداما يوميا؛ فهو الأداة المستخدمة لتحليل كل أشكال البيانات العددية.

لا عجب في أن علمي الاحتمالات والإحصاء يرتبطان ببعضهما البعض ارتباطا وثيقا، فالبيانات الإحصائية التي تجمع من خلال التجارب تقدم دلائل حول توزيع الاحتمال الكامن وراءها، وكذلك يمكن إثبات عديد من النتائج الضخمة المنسجمة لمثل هذه التوزيعات مثل: قانون الأعداد الكبيرة the law of large numbers ، ونظرية الحد المركزية the central limit theorem، فمن الصادم أن هذه الحسابات الرياضية غالبا ما تتعارض بشدة مع الحدس البشري. ومن أمثلة ذلك: مسألة مونتي هول Monty Hall problem، ومغالطة المدعي the prosecutor`s fallacy. (ويرجح البعض أن هذه السمة قد تكون متأصلة في التطور). ويقوم الناس بتطبيق الاستدلال البايزي techniques of Bayesian inference لتعزيز قدراتهم على تقدير حجم المخاطرات ومحاربة الميل إلى اللاعقلانية.

يعد علم التشفير Cryptography فرع مهم من فروع الرياضيات التطبيقية. ويتراوح هذا العلم مابين القدم والحداثة، فهو يضم أقدم وسيلة لتشفير الرسائل وهي التشفير أحادي الحرف monoalphabetic cipher، كما يضم نظرية المعلومات؛ تلك النظرية الحديثة التي تدعم الإنترنت.

الإحصاء STATISTICS

المتوسط Mean

لنفرض أننا خرجنا وقمنا بجمع مجموعة البيانات الآتية:

3, 3, 4, 3, 4, 5, 3, 9, 4

سنطلق على هذه المجموعة A. قد تكون هذه المجموعة هي أعداد أوراق، أو أعداد السكان في شارع ما. مهما كان الشيء الذي تمثله هذه الأرقام فإننا قد نحتاج حساب معدلها. المتوسط الحسابي the mean، والوسيطmedian، والمنوال mode ، ومتوسط المدى mid-range جميعها تعبر عن المعدل average ولكن بصيغ حسابية مختلفة وغالبا لا تكون نواتج هذه الصيغ متساوية.

المتوسط mean هو أشهر صيغ حساب المعدل Average ويحسب بجمع الأرقام التي نريد حساب متوسطها (38 = 4 + 9 + 3 + 5 + 4 + 3 + 4 + 3 + 3)، ثم القسمة على عددها (9 في هذا المثال)، وبالتالي يكون المتوسط في هذا المثال هو $4.2 = \frac{38}{9}$ 4.2= 38/9.

وبشكل عام إذا كان لدينا عدد m من الأرقام:am , ... ,a1, a2 فيمكن حساب متوسطها من العلاقة: $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_m}{m}$. ويمكن أن يأخذ المتوسط تسلسلات غير متوقعة، فعلى سبيل المثال: متوسط عدد أذرع البشر حول العالم لا يساوي 2؛ إنه يساوي تقريبا 1.999 (معظم البشر لهم ذراعان، وبعضهم إما أن يكون بلا أذرع أو له ذراع واحد، وعدد قليل جدا لديه ثلاثة أذرع أو أكثر). بالتالي الأغلبية الساحقة من البشر لديهم عدد أذرع يفوق المعدل وفي هذه الحالة نستخدم المتوسط mean.

الوسيط Median

لنفرض أن لدينا مجموعة A من البيانات.3, 3, 4, 3, 4, 5, 3, 9, 4 ونريد حساب الوسيط–median فإننا نقوم أولا بترتيب القيم ترتيبا تصاعديا :

3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 9

فيكون الوسيط هو الرقم الذي يقسم الأرقام إلى نصفين وهو العدد 4 في هذا المثال.

ولكن يأتي التعقيد عندما يكون عدد البيانات رقما زوجيا، ففي هذه الحالة يكون الوسيط هو المتوسط الحسابي للرقمين الذين يقعان في المنتصف. على سبيل المثال: لنفرض أننا نريد حساب الوسيط لمجموعة القيم : 9,10,12,14 . لايوجد بين تلك القيم رقما يقع في المنتصف (لأن عدد القيم زوجي)، لكن يوجد قيمتين في المنتصف هما : 10,12؛ لذلك نحسب المتوسط لهما فيكون الناتج هو الوسيط $11 = \frac{10+12}{2}$.

المنوال Mode و متوسط المدى mid-range

المنوال هو القيمة الأكثر تكررا في مجموعة بيانات. في المثال السابق، منوال المجموعة A هو القيمة 3. بعض مجموعات البيانات يكون المنوال ليس له معنى مثل: 1,2,3,4,5 أو .2,2,50,1001,1001

أما المدى فهو أبسط صور المعدل؛ فهو المتوسط الحسابي لأكبر وأصغر قيمة. في المثال السابق، متوسط المدى للمجموعة A هو $6 = \frac{3+9}{2}$.

الجداول التكرارية Frequency tables

كان التعامل مع المجموعة A في الأمثلة السابقة سهلا؛ فهي مكونة فقط من 9 قيم، ولكن في الكثير من التطبيقات العملية تكون مجموعات البيانات أكبر بكثير.

وتظل الأساليب الرياضية المتبعة في حساب المتوسط الحسابي، والوسيط الحسابي، والمنوال كما هي سواء أكانت مجموعات البيانات كبيرة أم صغيرة، يكون هناك فقط اختلاف طفيف في تمثيل البيانات.

لنفرض أن لدينا بيانات عن عدد سكان كل منزل أو شقة في مدينة ما فإنه يمكننا تمثيل النتائج فيما يسمي الجداول التكرارية:

عدد مرات التكرار	عدد السكان في العقار
292	0
5745	1
8291	2
4703	3
2108	4
961	5
531	6
المجموع	22,631

هذا يعنى أنه يوجد 292 عقار خال من السكان، و5745 عقار يسكنه فرد واحد، وهكذا. ومجموع العقارات في المدينة يساوي 22,631 عقار. وأسهل معدل يمكن حسابه هنا هو المنوال الذي يمكن استخراجه مباشرة من الجدول: وهو هنا = 2 لأنه هو القيمة الأكثر تكرارا من بين البيانات.

حساب المتوسط باستخدام الجداول التكرارية Mean from frequency tables

لحساب المتوسط mean من الجدول التكراري السابق نقوم بحساب مجموع عدد سكان جميع العقارات ثم نقسم هذا المجموع على عدد العقارات. يحتوى عمود "عدد مرات التكرار" على عدد المنازل ومجموعها يساوي 22,631 منزلا، ولكن كيف يمكن حساب مجموع عدد السكان؟

من الواضح أن عدد سكان المنازل الخالية من السكان يساوي صفرا. ويوجد 5745 عقار يشغله ساكن واحد وهذا يسهم بعدد 5745 ساكن من مجموع السكان. وعدد السكان الكلي في العقارات التي يسكنها فردان هو 8291×2 =16,582 ساكن. وعدد السكان الكلي في العقارات التي يسكنها ثلاثة أفراد هو 4703×3 = 14109ساكن.

بذلك يتضح أنه لحساب العدد الكلي للسكان نقوم بحساب حاصل ضرب أول عمودين في الجدول. للتسهيل سوف نعطي العمود الأول الرمز n، ونرمز لعدد مرات التكرار بالرمز f ، ثم نضيف عمودا جديدا للجدول لوضع حاصل ضرب n x f.

n	f	n x f
0	292	0
1	5745	5745
2	8291	16,582
3	4703	14,109
4	2108	8432
5	961	4805
6	531	3186
المجموع	22,631	52,859

يمثل العمود الثالث (n x f) العدد الكلي للسكان في كل منزل. وبجمع هذا العمود نحصل على العدد الكلي للسكان في المدينة ويساوي 52,859 وبذلك يمكننا أخيرا حساب المتوسط الحسابي: $\frac{52.859}{22.631} = 2.34$ مقربا لأقرب رقميين عشريين).

ويمكن كتابة المتوسط الحسابي بطريقة أخرى باستخدام رمز المجموع

$$\frac{\sum n \times f}{\sum f}$$

التكرار التراكمي Cumulative frequency

الوسيط median في الجدول التكراري السابق هو العقار الذي يقع في منتصف القائمة وهو العقار الذي ترتيبه 11316. لذلك نريد أن نستنتج الفئة المناسبة. الطريقة المناسبة لعمل ذلك هي إضافة عمود لحساب التكرار التراكمي.

عدد السكان في العقار	عدد مرات التكرار	التكرار التراكمي
0	292	292
1	5745	6037
2	8291	14,328
3	4703	19,031
4	2108	21,139
5	961	22,100
6	531	22,631

المدخل الأول في عمود التكرار التراكمي هو 292، وهو نفسه المدخل الأول في عمود التكرار البسيط. أما المدخل التالي فهو مختلف؛ حيث إن عدد السكان في العقار الذي يشغله ساكن واحد يساوي 5745 ساكن بينما 6037 هو عدد السكان في العقارات الخالية من السكان أو التي يشغلها ساكن واحد ، وبالمثل المدخل الثالث 14328 هو عدد العقارات الخالية من السكان أو التي يشغلها ساكن واحد أو ساكنان.

التكرار التراكمي في أغلب الأحيان يكون مفيدا، خاصة أنه يسهل عملية حساب الوسيط الحسابي . ففي هذا المثال نريد أن نبحث عن المنزل الذي ترتيبه 11316، وبما أن فئة المنزل الذي يشغله ساكنان يشمل المنزل الذي ترتيبه 6038 حتى المنزل الذي ترتيبه 14328 إذا لابد أنه ينتمي إلى هذه الفئة،وبالتالي الوسيط الحسابي يساوي 2.

المدى الربيعي Interquartile Range

المعدلات المختلفة لمجموعة من البيانات هي وسائل لتحديد مركز هذه المجموعة. ومن الوسائل الأخرى المهمة في هذا الصدد تشتت القيم spread وتوجد طرق مختلفة لوصفه.

المدى range هو الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة في البيانات المجمعة، وهذا لا يقدم قياسا مفيدا؛ لأن اهتمامه ينصب في الأساس على القيم المتطرفة (النقاط التي تقع بعيدا عن الإطار العام الذي ندور في فلكه)، وهنا يظهر مقياس أخر هو الانحراف الربيعي.

يحسب الوسيط عن طريق ترتيب كل القيم ترتيبا تصاعديا ثم تكون القيمة التي تقع في منتصف المسافة تماما بين القيمة العظمى والصغرى هي الوسيط الحسابي. وبالطبع يمكن النظر إلى النقاط التي تقع في ربع أو ثلاثة أربع المسافة بين هاتين النقطتين، ويطلق على تلك النقاط اسم الربيعات–quartiles ، وتسمى المسافة بينها الانحراف الربيعي–Interquartile Range. فعلى سبيل المثال: إذا كان لدينا مجموعة من البيانات لها القيم الآتية : 50 ,20 ,18 ,15 ,10 ,9 ,7 ,5 ,3 ,1 ,1 فيكون الوسيط الحسابي هو 9، والربيعات

هي 3، و 18 فيكون الانحراف الربيعي مساويا لـ 18-3=15 والمدى الكلي 50-1= 49 . أما إذا كان لدينا مجموعات بيانات كبيرة فإننا نستخرج الربيعات من جدول التكرار التراكمي:

عدد السكان في العقار	عدد مرات التكرار	التكرار التراكمي
0	292	292
1	5745	6037
2	8291	14,328
3	4703	19,031
4	2108	21,139
5	961	22,100
6	531	22,631

الربيع الأول هو المنزل الذي ترتيبه 5658 الذي يقع في فئة المنازل التي يشغلها ساكن واحد.الربيع الثالث هو المنزل الذي ترتيبه 16947 الذي يقع في فئة المنازل التي يسكنها ثلاثة أفراد ويكون الانحراف الربيعي هو 3-1=2، والمدى الكلي=6-0=6.

تباين العينة sample variance

يتشابه تباين العينة مع الانحراف الربيعي في أنه هو أيضاً أحد مقاييس التشتت. وتباين العينة هو المقياس الطبيعي الذي ننظر إليه بعين الاعتبار عندما نتعامل مع الوسيط على أنه مركز العينة. لنفرض مجموعة X من البيانات تحتوي على عدد n من النقاط، وأن الوسط هو μ، يمكن حساب المسافة بين أي نقطة x ونقطة الوسيط من العلاقة x-μ ، ثم نقوم بتربيع الناتج لنحصل على قيمة موجبة $(x-\mu)^2$.

وإذا قمنا بذلك مع جميع قيم X ثم أخذنا الوسيط للنواتج نكون قد حسبنا التباين-variance للمجموعة X ونطلق عليه VarX ويحسب من العلاقة

$$\text{Var X} = \frac{\sum (x-\mu)^2}{n}$$

على سبيل المثال:

لدينا مجموعة من البيانات لها القيم الآتية: 3,3,3,3,4,4,4,5,9 يكون متوسطها 4.2، ولحساب التباين نطرح قيمة المتوسط من كل قيمة على حدة فتكون القيم بعد الطرح كالتالي:

4.7، 0.7، -0.2، -0.2، -1.2 ، -1.2 ، -1.2 ، -1.2

ثم نقوم بتربيع القيم بعد الطرح وحساب متوسطها

$$\frac{4\times(-1.2)^2+3\times(-0.2)^2+(0.7)^2+(4.7)^2}{9}=3.284$$

(لأقرب ثلاثة أرقام عشرية)

ويكون الانحراف المعياري standard deviation للمجموعة X مساويا $\sqrt{\text{VarX}}$ وهو يساوي في المثال السابق $\sqrt{3.284} = 1.812$ (لأقرب ثلاثة أرقام عشرية). (انظر التباين و القيم المتوقعة للتوزيع الاحتمالي).

العزوم Moments

الطريقة التي ذكرناها لحساب التباين صحيحة وتعمل جيدا ولكن يوجد طريقة أسرع قليلا، فقد وجد أن التباين يساوي المتوسط الحسابي لمربعات القيم مطروحا منها مربع المتوسط

$$\text{Var X} = \frac{\sum x^2}{n} - \mu^2$$

نقوم بحساب متوسط مربعات مجموعة البيانات التي قيمها: 3,3,3,3,4,4,4,5,9 :

29+25+24*3+23*4/9=21.1 دائر

ثم نطرح مربع المتوسط

$21.1-(4.2)^2$= 3.284 (لأقرب ثلاثة أرقام عشرية)

يعرف المتوسط $\frac{\sum x}{n}$ أيضاً باسم العزم الأول the first moment، أما متوسط مربعات

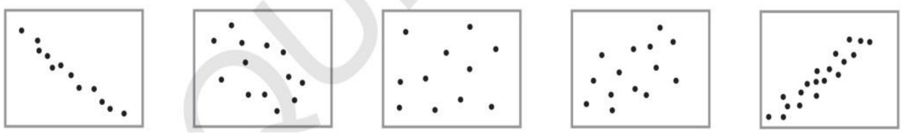
القيم $\frac{\sum x^2}{n}$ فيعرف باسم العزم الثاني second moment، ويستخدم علماء الإحصاء عزوما ذات رتب أعلى في تحليلاتهم.

الارتباط Correlation

هل تزيد إحتمالية إصابة المدخنين بمرض السرطان عن غيرهم؟ هل عدد أبناء سكان البلاد الممطرة أكبر من عدد أبناء سكان البلاد الأخرى؟ هل الخنافس الأكثر وزنا تتمتع بأعمار أطول؟ يحتاج العلماء في كثير من الأحيان إلى دراسة العلاقة بين ظاهرتين، والأداة الإحصائية التي تقوم بذلك هي الارتباط

لنفرض أن لدينا بيانات عن وزن بعض الخنافس وأعمارها وأردنا اختبار إذا ما كانت هناك علاقة بين الوزن والعمر أم لا. يمكننا البدء بعمل رسم بياني بين الوزن والعمر، فإذا كانت النقاط الناتجة تبدو عشوائية ومشتتة إذا لا يوجد ارتباط بين عاملي الوزن والعمر، وعلى النقيض من ذلك، إذا كانت ترتيب النقاط أشبه ما يكون بالخط المستقيم إذا العاملان يرتبطان ارتباطا قويا وما يقع بين الحالتين السابقتين يكون ارتباطا ضعيفا.

بفرض وجود نوع من الارتباط، إذا كان الزيادة في الوزن يصاحبها زيادة في طول العمر يسمي ارتباط طردي، أما إذا كان طول العمر يقل بزيادة الوزن يسمى الارتباط ارتباط عكسي



هناك العديد من الأساليب التي يمكن لعلماء الإحصاء من خلالها تعيين رقم يصف الارتباط ، ويسمي هذا الرقم معامل الارتباط–correlation coefficient (ومنها معامل ارتباط الرتب لسبيرمان–Spearman's rank correlation coefficient)

وفي جميع الأحوال، تتراوح قيمة معامل الارتباط بين -1 ، +1 بحيث تعبر النتائج

القريبة من -1 عن ارتباط عكسي قوي، والنتائج القريبة من +1 عن ارتباط طردي قوي، وإذا كانت النتيجة صفرا دل ذلك على عدم وجود ارتباط. وحتى إذا كشفت دراستنا لعاملي وزن وطول عمر مجموعة من الخنافس عن وجود ارتباط طردي بين هذين العاملين فليس بإمكاننا أن نعرف إذا ما كانت الخنافس الأكثر صحة، والأطول عمرا تكون زائدة الوزن أم أن الوزن الزائد يساعد على حماية الخنفساء من التعرض للإصابات أم أن هناك عامل ثالث لم ندرسه مثل النوع: فقد تكون أنثى الخنفساء أثقل وزنا وأطول عمرا من ذكر الخنفساء ، وهنا يجب توخي الحذر لأن الارتباط لا يتضمن عنصر السببية (لا يساعد على معرفة أي العوامل سبب للآخر).

معامل ارتباط الرتب لسبيرمان Spearman's rank correlation coefficient

توجد طرق عديدة لاختبار الارتباط. ويتميز معامل ارتباط سبيرمان للرتب بأنه لا يشترط أن يكون الارتباط ارتباطا خطيا حتى يمكن تطبيقه.

بفرض أن العلماء قد اكتشفوا نوعا جديدا من النباتات المضيئة ، وأرادوا البحث في إذا ما كان هناك ارتباط بين طول النبات ودرجة إضاءته . سوف أقوم بأخذ عينة صغير لتوضيح هذه الطريقة: .

النبات	طول النبات	درجة الإضاءة
A	6.1	0.41
B	4.5	0.37
C	5.0	0.36
D	5.9	0.31
E	7.3	0.45
F	6.2	0.38

الخطوة الأولى هي ترتيب النباتات حسب الطول ودرجة الإضاءة (بحيث تكون الرتبة 1 هي رتبة النبات الأطول والأكثر إضاءة).

النبات	طول النبات	رتبة طول النبات	درجة الإضاءة	رتبة درجة الإضاءة
A	6.1	3	0.41	2
B	4.5	6	0.37	4
C	5.0	5	0.36	5
D	5.9	4	0.31	6
E	7.3	1	0.45	1
F	6.2	2	0.38	3

الآن يمكننا أن ننحي البيانات الحقيقية جانبا ، ونعمل على الرتبتين. ثم نحسب فرق الرتب (d) لكل نبات ونحسب مربعه (d^2).

النبات	رتبة طول النبات	رتبة درجة الإضاءة	فرق الرتب (d)	مربع فرق الرتب (d^2)
A	3	2	1	1
B	6	4	2	4
C	5	5	0	0
D	4	6	-2	4
E	1	1	0	0
F	2	3	-1	1

ثم نجمع عمود مربع فرق الرتب (d^2) الذي مجموعه في المثال السابق: $\sum d^2 = 10$، ويمكن كتابة ذلك في هيئة صيغة رياضية تسمي صيغة معامل سبيرمان

$$p = 1 - \frac{6\sum d^2}{n(n^2 - 1)}$$

حيث n هو عدد النباتات وهو 6 في المثال السابق. (يلاحظ أن الارتباط يكون ارتباطا تاما إذا تساوت جميع الرتب وعندها يكون معامل الارتباط مساويا الواحد الصحيح، وهذا شيء مرغوب فيه). في المثال السابق يكون معامل ارتباط الرتب هو

$$p = 1 - \frac{6 \times 10}{6(36 - 1)} = 0.71$$

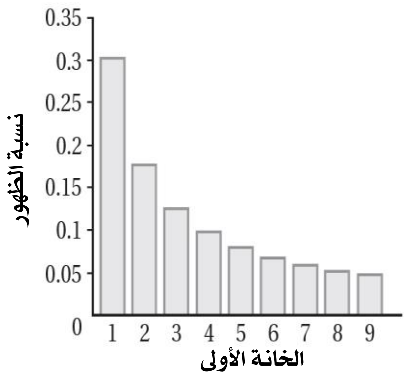
(لأقرب رقمين عشريين) وهو ارتباط طردي متوسط.

ظاهرة الخانة الأولى من اليسار The first digit phenomenon

لنأخذ مجموعة بيانات واقعية، دفاتر حسابات شركة على سبيل المثال أو ارتفاع سلسلة جبال. ثم نسجل عدد مرات ظهور الأعداد من 1 إلى 9 في الخانة الأولى من اليسار مع إهمال الصفر. قد يتوقع معظم الناس أن التسعة أرقام لها نفس احتمالية الظهور (أي أن كل ظهور لرقم من التسعة أرقام تكون احتماليته $\frac{1}{9}$)، ولكن لاحظ عالمان من علماء القرن التاسع عشر هما:سايمون نيوكوم Simon Newcomb، وفرانك بينفورد Frank Benford أن ذلك لا يتحقق . وتقصى بينفورد الأمر بتعمق أكثر فقام بحساب الخانات الأولى من اليسار في كمية كبيرة من البيانات بدءا من إحصائيات لعبة كرة البيسبول وحتى إحصائيات مصبات الأنهار ، ووجد أن العدد 1 يظهر في الخانة الأولى بنسبة 30٪ بينما يظهر الرقم 2 بنسبة 17٪ وتقل النسبة حتى نصل إلى العدد 9 الذي يظهر بنسبة 5٪.

قانون بينفورد Benford's law

يقدم قانون بينفورد صيغة رياضية لظاهرة الخانة الأولى ، وينص على أن نسبة تكرار ظهور العدد n في الخانة الأولى من اليسار يساوي تقريبا $\log_{10}(1+\frac{1}{n})$ لكن علينا أن نتوخى الحذر عند التعامل مع هذا القانون؛ حيث أنه في الغالب لا ينطبق على الأرقام العشوائية (التي نطلق عليها البيانات الموزعة توزيعا منتظما) ولهذا يكون قانون



بينفورد عديم القيمة في اختيار أرقام اليناصيب. وبالمثل لا ينطبق القانون على البيانات التي تقع في نطاق ضيق (فمثلا: العديد من رؤساء الولايات المتحدة الأمريكية لا تكون الخانة الأولى في أعمارهم هي 1) . أما مابين الحالتين السابقتين تتكرر مواقف لا حصر لها سواء أكانت اجتماعية أم طبيعية تخضع لقانون بينفورد. (لقانون بينفورد قيمة كبيرة في الولايات المتحدة في مجال التقصي عن الاحتيال).

نظرية هيل Hill's theorem

أصبح استخدام قانون بينفورد سائغ الاستخدام في نواح عدة منذ ظهوره. بالنظر إلى الأرقام من 1 إلى 9 فقط، نجد أن الخانة الأولى تكون تامة الانتظام. الآن سنكون مجموعة جديدة من الأرقام عن طريق مضاعفة الأرقام من 1 إلى 9 لتصبح المجموعة كالآتي: 2,4,6,8,10,12,14,16,18

فأصبحت احتمالية ظهور الرقم 1 في الخانة الأولى تفوق ال 50٪، وهذا يفسر عدم استقرار التوزيع المنتظم للخانات الرائدة. سوف تقوم العديد من الإجراءات الرياضية بتحريف التوزيع المنتظم إلى توزيع بينفورد.

كانت هذه محض فكرة لم تثبت قبل عام 1998م، العام الذي قام فيه العالم ثيودرهيل– Theodore Hill بتقديم تفسير دقيق. كانت الملاحظة الرئيسة أن قانون بينفورد لا يعتمد على الأساس–base. لقد بني قانون بينفورد على الأعداد التي أساسها 10، ولكن يمكن تطبيق نفس الفكرة على أي أساس آخر b مع استخدام معدل ظهور الخانة الأولى n من العلاقة $\log_b(1+\frac{1}{n})$ ، وقد أثبت هيل أن قانون بينفورد هو التوزيع الاحتمالي الوحيد للخانات الرائدة الذي يحقق خاصية عدم الاعتماد على أساس الأرقام.

الاحتمال PROBABILITY

الاحتمال Probability

الاحتمال هو طريقة رياضية للتعبير عن فرصة حدوث حدث ما وليكن X. تطبق هذه الطريقة بمساواة المتغير X بقيمة سنرمز لها بالرمز P(X) تتراوح قيمتها بين صفر، وواحد.

ببساطة، إذا كان P(X) يساوي صفرا يكون الحدث X مستحيلا،على سبيل المثال : احتمال ظهور العدد 7 عند إلقاء حجر نرد أما إذا كانت P(X) يساوي 1 يكون الحدث مؤكدا وفيما بين ذلك مثلا عند إلقاء قطعة نقود منتظمة يكون احتمال ظهور الصورة يساوي 1/2، ويكون احتمال ظهور رقم من 1 إلى 5 عند إلقاء حجر النرد مساويا 5/6.

يكون حساب الاحتمال مفيدا في نواح عديدة، عندما يكون عدد النواتج محدودا لكن في بعض التطبيقات يكون حساب الاحتمال بسيطا. من الأفضل أن نترجم العبارة P(X)=0 على أنها تعني أن الحدث X غير محتمل الحدوث أبدا. لنفرض أنني سأختار بطريقة عشوائية تماما رقما حقيقيا يقع بين0 ، و 10 . ما هو احتمال اختيار القيمة الدقيقة للعدد ط (دون تقريب إلى رقم أو رقمين عشريين)؟ الاحتمال هنا صفر؛ لأن العدد ط هنا هو واحد من أرقام لا نهائية التي يمكن أن يقع على أي منها الاختيار. لدراسة احتمالات كهذه، جاء ما يسمى التوزيع الاحتمالي المتصل(continuous probability distributions).

النواتج outcomes والنواتج الناجحة successes

عند إلقاء حجر نرد منتظم نجد أن هناك ست نواتج جميعها لها نفس احتمال الظهور. لنفرض أننا مهتمين باحتمالية ظهور العدد 6 إذا يعنى أن أحد النواتج تحديدا سيكون الحصول عليه هو النتيجة الناجحة

واحتمال ظهوره=1/ 6 إن المبدأ الأساسي في حساب الاحتمال مباشر جدا؛ حيث يمكن حساب احتمال ظهور النتيجة الناجحة دائما من العلاقة احتمال النتيجة الناجحة =

$$\frac{\text{عدد النواتج الناجحة}}{\text{عدد النواتج الكلية}}$$

طالما كانت كل النواتج لها نفس احتمال الظهور.

وإذا قمنا برمي حجري نرد منتظمين (B،A) فسيكون لدينا 36 نتيجة محتملة: احتمال ظهور الأرقام من 1إلى 6 على حجر النرد A مع احتمال ظهور الأرقام من 1 إلى 6 على حجر النرد B. وإذا أردنا معرفة احتمال ظهور رقمين مجموعها 7 .

نحسب عدد حالات الظهور الفعلي لرقمين مجموعهما . 7 مرات الظهور الفعلي هي

A	1	2	3	4	5	6
B	6	5	4	3	2	1

وبما أن عددها 6،إذا الاحتمال هنا = 6/ 36=1/ 6.

يمكن استخدام هذه الفكرة البسيطة كأساس لمسائل ذات مستويات أعلى مثل: مسألة عيد الميلاد–Birthday Problem. إن حساب احتمالات كهذه ينطوي على استخدام ما يسمي بالتوافيق وذلك لحساب عدد النواتج

جمع الاحتمالات Adding Probabilities

لنفرض أننا نعرف احتمال وقوع حدثين: X، Y.فما هو احتمال وقوع الحدث الجديد X أو Y؟بحكم التجارب تم التوصل إلى أن (أو–or) تعني (جمع الاحتمالات– Adding probabilities)

على سبيل المثال: احتمال ظهور الرقم 4 عند رمي حجرة نرد منتظمة =1/ 6، وكذلك ظهور الرقم 5 له نفس الاحتمال، إذا يكون احتمال ظهور 4 أو 5 يساوي 1/ 6+1/ 6=1/ 3 ولابد من توخي الحذر الشديد في ذلك؛ لأن حدوث أخطاء وارد جدا في مثل هذه العمليات. لنفرض أنني رميت قطعتي نقود A، B، ما هو احتمال ظهور الصورة على القطعة A أو القطعة B ؟ احتمال ظهور الصورة على القطعة A= 1/ 2 ، وكذلك احتمال ظهور الصورة على القطعة B ، وبجمع الاحتمالين 1/ 2+1/ 2=1

نجد أن مجموعهما يساوي. قد يتبادر إلى الذهن أن هذا يعني أن الحدث مؤكد، ولكن في واقع الأمر، هذا ليس له معنى؛ لأن ببساطة يمكن أن أحصل على كتابتين (أي أن وقوع حدث ظهور صورتين معا ليس حدثا مؤكدا).

إذا بشكل عام لا يمكن تطبيق قاعدة جمع الاحتمالات إلا إذا كان الحدثان متنافيين.

ضرب الاحتمالات Multiplying Probabilities

لنفرض أننا نعرف احتمال وقوع حدثين: X، Y. فما هو احتمال وقوع الحدث الجديد X و Y؟ بحكم التجارب في هذه الحالة تم التوصل إلى أن (و–and) تعني ضرب الاحتمالات.

على سبيل المثال: إذا قمت بإلقاء قطعتي نقود منتظمتين فسيكون احتمال ظهور الصورة على القطعتين معا = 1/ 2 ×1/ 2=1/ 4.

وكما هو الحال في جمع الاحتمالات، يؤدي الخطأ في تطبيق القاعدة إلى الحصول على نتائج ليس لها معنى؛ فبفرض أنني ألقيت قطعة نقود منتظمة مرة واحدة، سيكون احتمال ظهور الصورة يساوي 1/ 2 وكذلك سيكون احتمال ظهور الكتابة يساوي 1/ 2، إذا بتطبيق قاعدة ضرب الاحتمالات سنجد أن احتمال ظهور الصورة والكتابة معا (في نفس الرمية) يساوي 1/ 4، وهذا غير معقول؛ لأن ذلك الحدث مستحيل الحدوث فيكون احتمال حدوثه مساويا صفر.

القواعد السابقة نتجت بحكم التجارب والخبرة إلا أننا لابد من أن نفهم معنى الأحداث المستقلة–Independent events حتى نعرف متى تكون هذه القواعد قابلة للتطبيق أم لا.

الأحداث المتنافية Mutually exclusive events

يقال أن الحدثينX و Y متنافيان إذا كان احتمال حدوثهما معا مستحيلا؛ أي أنه إذا وقع الحدث X فإن الحدث Y لا يقع والعكس صحيح. فمثلا إذا رميت حجر نرد سيكون حدثا ظهور العدد 2، وظهور العدد 5 حدثين متنافيين.

وإذا كان الحدثان X و Y متنافيين فإنه لحساب احتمال وقوع أحدهما (X أو Y) نستخدم قاعدة جمع الاحتمالات

$$P(X\ OR\ Y) = P(X) + P(Y)$$

على سبيل المثال: إذا كان احتمال ظهور العدد 2، واحتمال ظهور العدد 5 عند إلقاء حجر نرد يساويان 1/ 6 فإن احتمال ظهور 2 أو 5 يكون 1/ 6+1/ 6=1/ 3.

ولكن إذا ألقيت حجري نرد A، B فسيكون حدثا ظهور 2 على الحجر A، وظهور 5 على الحجرB غير متنافيين؛ حيث أنهما من الممكن أن يحدثا معا لذلك لا يمكن استخدام قاعدة جمع الاحتمالات.

الأحداث المستقلة Independent events

يقال أن الحدثين X و Y مستقلان إذا كان حدوث أحدهما لا يؤثر على الآخر؛ أي أنه

سواء وقع الحدث X أم لم يقع فلن يتسبب ذلك في التأثير على احتمال الحدث Yوالعكس صحيح.

لنضرب مثالا تقليديا: إذا قمت بإلقاء حجر نرد وقطعة نقود فسيكون حدث الحصول على الرقم 6، وحدث ظهور الصورة على قطعة النقود حدثين مستقلين.

إذا كان X وY حدثين مستقلين فإنه احتمال حدوث X، و Y معا (X وY) يحسب بضرب الاحتمالين باستخدام العلاقة:

$$P(X \text{ AND } Y) = P(X) \times P(Y)$$

وبشكل خاص، يكون احتمال ظهور الصورة و العدد 6 معا =1/ 2×1/ 6=1/ 12.

الاستقلال لا يكون واضحا دائما. لنضرب مثالا آخر: إذا قمنا بسحب ورقة لعب من مجموعة أوراق ثم خلطنا الأوراق وقمنا بالسحب مرة أخرى، فهل تكون نتيجتي السحبتين أحداثا مستقلة ؟ تتوقف الإجابة على ما إذا كانت الورقة المسحوبة أولا قد أعيدت إلى مجموعة الأوراق قبل السحب مرة أخرى. فإذا أعيدت الورقة قبل السحب مرة أخرى يكون الحدثان مستقلين أما إذا لم تتم إعادتها قبل السحب مرة أخرى يكون احتمال الحدث الأول مؤثرا على احتمال الحدث الثاني فيكونان غير مستقلين.

ومن الصواب تقريبا القول بأنه لا يمكن أن يكون هناك حدثان مستقلان ومتنافيان في الوقت ذاته، ولكن يوجد استثناء واحد، تحديدا إذا كان أحد الحدثين مستحيلا. فحدثي ظهور الصورة عند إلقاء قطعة النقود، والحصول على رقم 7 عند رمي حجر نرد منتظم هما حدثان مستقلان بلا شك، وهما حدثان متنافيان في الوقت ذاته. بديهيا لا يمكن أن يتحقق الاثنان معا لأن حدث ظهور الرقم 7 نفسه مستحيل.

مسألة يوم الميلاد The Birthday problem

كم عدد الأفراد المتواجدين في غرفة ما بحيث يصبح احتمال وجود شخصين لهما نفس يوم الميلاد 50٪ على الأقل؟ من الملائم هنا أن نقلب السؤال رأسا على عقب فنقول احسب -لأعداد مختلفة من الأفراد- احتمال أن يكون جميع الأفراد في غرفة ما لهم يوم

ميلاد مختلف. القيمة الأولى لعدد الأفراد التي عندها يقل الاحتمال عن 50٪ هي إجابة المسألة الأصلية.

يصاحب النموذج المستخدم في الحل بعض الافتراضات الضمنية التي يجب ملاحظتها. فمن الواضح أن المسألة تهمل وجود السنة الكبيسة، وتفترض بمهارة أن جميع أيام السنة متساوية من حيث كونها أيام ولد فيها أشخاص على الرغم من أن هذا ليس صحيحا إلى حد ما في الواقع العملي.

نظرية يوم الميلاد The Birthday Theorem

لحل مسألة يوم الميلاد نفرض أولا أن هناك فردان فقط في الغرفة، وبالتالي يكون العدد الكلي للترتيبات الممكنة لأيام الميلاد=365×365. ومن ناحية أخرى إذا كان كل منهما قد ولد في يوم مختلف، فيمكن أن يكون يوم ميلاد الشخص الأول في أي يوم من أيام السنة (365 احتمال)، وأن يكون يوم ميلاد الشخص الثاني في أي يوم ماعدا اليوم الذي يوافق يوم ميلاد الشخص الأول (364 احتمال)

وبذلك يمكن القول بأن عدد الأيام الممكنة لأيام الميلاد حيث لا يشترك الشخصان في يوم ميلاد واحد=364×365. واحتمالية حدوث أحدها يساوي $\frac{365\times364}{365\times365}$

ويمكن تعميم ذلك على عدد n من الأفراد في الغرفة فيكون العدد الكلي للترتيبات الممكنة لأيام الميلاد= n365، وإذا كان لكل شخص في الغرفة يوم ميلاد مختلف فإننا سوف نتبع نفس التفكير السابق:

يمكن أن يكون يوم ميلاد الشخص الأول في أي يوم من أيام السنة (365 احتمال)، وأن يكون يوم ميلاد الشخص الثاني في أي يوم ماعدا اليوم الذي يوافق يوم ميلاد الشخص الأول (364 احتمال) ، وأن يكون يوم ميلاد الشخص الثالث في أي يوم ماعدا يومي ميلاد الشخصين الأول والثاني (363 احتمال)، وهكذا حتى نصل إلى الشخص n الذي لابد ألا يوافق يوم مولده أيام أول (n-1) أي (n–366 احتمال)، واحتمال حدوث ذلك.

$$\frac{365 \times 364 \times \ldots \times (366 - n)}{365}$$

ويمكن تبسيط ذلك إلى

$$\frac{364!}{(365 - n)! \times 365}$$

إذا ما هي أقل قيمة لـ n حتى تصبح قيمة العلاقة السابقة 0.5 ؟ بتجربة عدة قيم لـ n نجد أن إجابة السؤال السابق هي n=23 وهي القيمة التي تصبح عندها قيمة الاحتمال السابق مساوية 0.493.

الاحتمالات الشرطية Conditional Probability

في مدينة ما، 48٪ من المنازل لديها اتصال انترنت عالي السرعة- broadband internet، و 6٪ من المنازل لديها كابل تليفزيون واتصال انترنت عالي السرعة، والسؤال هو : ما احتمالية أن يكون لمنزل ما كابل تليفزيون مع العلم أنه لديه انترنت عالي السرعة ؟

إذا كان X، وY حدثان فإنه يمكن كتابة الاحتمال الشرطي لكل منهما رياضيا على الصورة

$$P(X \mid Y) = \frac{P(X\&Y)}{P(Y)}$$

حيث $P(Y) \neq 0$

في المثال السابق: نفرض أن X هو حدث أن المنزل فيه كابل تليفزيون، و Y هو حدث أن المنزل فيه إنترنت عالي السرعة مع ملاحظة أننا لسنا في حاجة إلى معرفة P(X) لحساب الإجابة

$$P(X \mid Y) = \frac{0.06}{0.48} = 0.125, \text{OR } 12.5\%$$

وفي العديد من المواقف يكون حساب الاحتمال الشرطي مفيدا للغاية لأنه يسمح بتحديث الاحتمالات عند توفر معلومات جديدة ، ويطلق على ذلك الاستدلال البايزي- Bayesian inference.

نظرية بايز Bayes' Theorem

عام 1764م نشر بحث مهم للمبجل توماس بايز(Thomas Bayes) بعد وفاته. وقد ذكر فيها تفسير قاطع للاحتمالات الشرطية. وكان ذلك أساس نظرية بايز التي تنص على أنه: لأي حدثين X و Y يمكن تطبيق العلاقة

$$P(X|Y) = P(Y|X) \times \frac{P(X)}{P(Y)}$$

إلى حد ما، هذه العلاقة ليست معقدة، إنها تتبع تعريف الاحتمال الشرطي:

$$P(Y|X) = \frac{P(X\&Y)}{P(X)}$$

وكذلك

$$P(X\&Y) = P(Y|X)P(X)$$

وبالتعويض بذلك في العلاقة $P(X|Y)$ نحصل على النتيجة. وهذه النظرية لها أهمية بالغة، على سبيل المثال، تستخدم في تحليل مسألة الايجابيات الزائفة problem of false positives.

تجزئة الحدث Splitting an event

لنفرض أننا اخترنا شخصا عشوائيا في شارع وأردنا أن نحسب احتمال أن هذا الشخص يرتدي نظارات. والإحصائيات المتوفرة في مدينتنا تقول أن 65٪ من الإناث ، و40٪ من الذكور يرتدون النظارات، ونعلم أيضاً أن51٪ من السكان إناث، و49٪ ذكور،كيف يمكننا دمج المعلومات التي لدينا حتى نحسب الاحتمال المطلوب؟

لنفرض أن Y هو حدث أن الشخص أنثى. و X هو الحدث محل اهتمامنا؛حدث أن الشخص يرتدي نظارات. لقد قمنا بتقسيم الأحداث إلى حدثين أصغر هما (X و Y معا أي X & Y) ، و (X وليس Yأي X & not) وهما حدثان متنافيان إذا:

$$P(X) = P(X\&Y) + P(X\&\text{not } Y)$$

وبالتعبير عن $P(X\&Y)$ باستخدام الاحتمال الشرطي نحصل على:

$$P(X\&Y) = P(X|Y)P(Y)$$

وبالمثل

$$P(X\&Y) = P(X \mid Y)P(Y)$$

وبوضع ذلك في الصيغة السابق ذكرها نحصل على:

$$P(X) = P(X \mid Y)P(Y) + P(X \mid \text{not } Y)P(\text{not } Y)$$

عندئذٍ يمكننا استخدام البيانات المتوفرة لدينا: $P(X|Y)=.65$، $P(X|notY)=0.4$

$P(\text{not } Y)=0.49$ ،$P(Y)=0.51$

فينتج

$$P(X)=0.65\times0.51+0.4\times0.49=0.5275$$

الإيجابيات الزائفة False positives

إذا كانت مؤشرات فحص مرض ما كالتالي: إذا كان الشخص مريضا يعطي الاختبار 99٪ من الوقت نتيجة إيجابية ، ونتيجة سلبية زائفة 1٪، أما إذا كان الشخص سليما يعطي الاختبار نتيجة سلبية 95٪ من الوقت و نتيجة إيجابية زائفة 5٪. وهذا المرض مرض نادر يصيب نسبة 0.03٪ من السكان. فإذا اخترنا شخصا اختيارا عشوائيا وليكن اسمه هارولد وقمنا بفحصه ، وكانت نتيجة فحصه إيجابية فيكون السؤال المحير هنا: ما هو احتمال إصابته بالمرض؟

نريد أن نضع ذلك في صورة رياضية: لنفرض X هو حدث أن هارولد مصاب. قيمة $P(X)$ قبل أن نقوم بتحليل بيانات الفحص = 0.0003

Y هو حدث أن فحص هارولد إيجابي، ويمكننا تجزئة هذا الاحتمال وكتابته على الصورة

$$P(Y) = P(Y \mid X)P(X) + P(\text{not } X)$$

وناتجه هو $0.99\times0.0003+0.05\times0.9997=0.050282$

يهمنا الآن حساب $P(X|Y)$ وهو احتمال إصابته بالمرض مع كون نتيجة فحصه

موجبة، وهنا يمكن تطبيق نظرية بايز لنحصل على النتيجة الآتية:

$$P(X \mid Y) = P(Y \mid X) \times \frac{P(X)}{P(Y)} = 0.99 \times \frac{0.0003}{0.050282} = 0.50091$$

إذا احتمال إصابة هارولد بالمرض علما بأن نتائج فحصه إيجابية أقل من 0.6٪.

وتفسير هذه النتيجة المثيرة للدهشة هو أن النتائج الإيجابية الحقيقية تمثل نسبة كبيرة من عدد المصابين الضئيل الذي يفوقه بنسبة كبيرة النتائج الإيجابية الخادعة ، وهذه النتائج الإيجابية الخادعة تشكل نسبة صغيرة من عدد ضخم هو عدد غير المصابين لذلك ،على الرغم من دقة الفحص ، فعندما تم اختيار عينات عشوائية من الناس كانت غالبية النتائج الإيجابية خادعة.

مغالطة المدعي العام The prosecutor's fallacy

نفرض أن لدينا متهم تجري محاكمته بتهمة السطو. وجدت الشرطة في مسرح الجريمة خصلات من شعر اللص، وأظهرت فحوصات الطب الشرعي أنها تطابق شعر المتهم، وشهد علماء الطب الشرعي أن احتمال وجود شخص عشوائي يحقق نفس التطابق مع خصلة الشعر يساوي $\frac{1}{2000}$.

نقع في مغالطة المدعي عندما نستنتج أن احتمال كون المتهم مذنبا يساوي $\frac{1999}{2000}$ واعتبار ذلك دليلا دامغا.

بالطبع، هذا غير صحيح. فإذا كان عدد سكان مدينة يساوي 6 مليون نسمة، سيكون عدد الأشخاص الذين قد تطابق خصلة الشعر في مسرح الجريمة مع العينة المأخوذة منهم يساوي

$$3000 = 6{,}000{,}000 \times \frac{1}{2000}$$

إذا يكون احتمال أن يكون هذا المتهم مذنبا استنادا فقط على هذا الدليل $=\frac{1}{3000}$.

صاغ مصطلح (مغالطة المدعي–The prosecutor's fallacy) كل من ويليام تومسون–William Thomson، وإدوارد شومان–Edward Schumann عام 1987م في

مقالهما الذي كان عنوانه"تأويل الأدلة الإحصائية في القضايا الجنائية Interpretation of-statistical Evidence in Criminal Trials"التي تناولوا فيها مدى سهولة وقوع الناس في هذه المغالطة بها فيهم على أقل تقدير مدع عام واحد.

مغالطة محامي الدفاع The defence attorney's fallacy

وضع تومسون، وشومان في الاعتبار أيضاً الخطأ العكسي لمغالطة المدعي العام وأطلقوا عليها اسم مغالطة محامي الدفاع. في المثال السابق ذكره ، قد يجادل محامي الدفاع عن أن دليل تطابق خصلة الشعر دليل عديم القيمة؛ لأنه يرفع من احتمال الإدانة بنسبة ضئيلة $\frac{1}{3000}$. إذا كانت خصلة الشعر هي الدليل الوحيد ضد المتهم، يصبح عدد المشتبه بهم قبل أخذ دليل خصلة الشعر في الاعتبار هو عدد سكان المدينة جميعا 6000000، وبأخذ الدليل الجديد في الاعتبار يقل هذا العدد بمعامل 3000 ليصبح 2000.

ومع ذلك، قد يتوقع أحدهم أن هذا ليس هو الدليل الوحيد، وفي هذه الحالة يصبح العدد الابتدائي للمشتبه بهم الممكنين أصغر بكثير، فإذا كان يساوي 4000 على سبيل المثال قد يقلله دليل الطب الشرعي بمعامل 2000 فيصبح 2، مما يرفع احتمال أن يكون المتهم مذنب من $\frac{1}{4000}$ إلى $\frac{1}{2}$ فيصبح دليلا ذا قيمة.

مغالطة مقلوب الاحتمال The fallacy of probability inversion

قد تثير ظاهرة الإيجابيات الخادعة ومغالطة المدعي الدهشة. ومن الناحية الرياضية نجد أنهما متشابهتان: حيث أن المغالطة في الحالتين كانت الخلط بين$P(X|Y)$،و$P(Y|X)$. عندما تكون قيمة $P(X|Y)$ كبيرة جدا يفترض الناس أن $P(Y|X)$ لابد أن تكون قيمتها كبيرة أيضاً. في مثال الفحص الطبي الذي ذكر آنفا كان احتمال وقوع نتائج إيجابية بشرط وقوع الإصابة = 0.99، بينما احتمال وقوع الإصابة بشرط وقوع نتائج إيجابية= 0.056. وهذه الأمثلة توضح الخلط الذي قد يحدث.

وهذه المغالطة واسعة الانتشار (حتى في غرف الجراحة وقاعات المحاكم). ويجادل بعض الناس عن أنها ليست مجرد خطأ رياضي شائع، بل تحيز معرفي متأصل في الطبيعة

البشرية. في كلتا الحالتين يظل تقدير هذا الأمر أساسيا لإعطاء البيانات الإحصائية معنى في العالم الواقعي.

التكرارية Frequentism

ما الحالة الوجودية للاحتمال؟ بمعني آخر، إلى مدي يوجد حقا ما يسمى بالاحتمال في الواقع؟ هناك مدرستان فكريتان رئيسيتان هما: المدرسة التكرارية Frequentism، والمدرسة البيزية Bayesianis .

يرى مؤيدو المدرسة التكرارية أن العشوائية جزء أصيل في العالم الواقعي، وهذا ما يحدده الاحتمال. فعندما نقول أن احتمال الحدث A يساوي $\frac{1}{2}$ يعنى أنه إذا أعيدت التجربة عدة مرات فإن A يقع نصف عدد المرات بالضبط، ما يعني أن احتمال الحدث A هو مقياس تكرار وقوعه مع معرفة الشروط الابتدائية (قد تكون هذه القيمة قيمة تقريبية تم التوصل إليها بعد عدد محدد من التجارب، و قد تكون قيمة مضبوطة إلى أقصى حد)

وكما هو واضح، لا يطبق هذا المبدأ بسهولة على الأحداث التي تقع مرة واحدة فهو مناسب أكثر للأحداث المتكررة

البيزية Bayesianism

أما مؤيدو المدرسة البيزية – على النقيض من مؤيدي المدرسة التكرارية- يرون أن الاحتمال غير موجود في العالم الخارجي. إنه – بكل ما تعنيه الكلمة- وسيلة بشرية لتحديد درجة التأكد وذلك استنادا على بيانات تفتقر إلى الكمال. بمعنى آخر: الاحتمال هو مفهوم موضوعي؛ حيث تكون تقديرات الناس له مختلفة تبعا لاختلاف المعلومات المتوفرة لديهم.

الاحتمال المبدئي لرمية قطعة نقود وظهور الصورة عليها=1/ 2 نتج عن أن المعلومات المتوفرة لدينا ضئيلة، وإذا توفرت لدينا معلومات أخرى أكثر عن وزن قطعة النقود، وموضعها الابتدائي، وأسلوب الرامي يكون بإمكاننا تعديل الاحتمال، وإذا عرفنا قدر كبير من تلك المعلومات يصبح بإمكاننا التنبؤ بالنتيجة بشيء من التأكيد. (عرف عن عالم

الرياضيات جون كونواي–John Conway إتقانه مهارة إلقاء قطعة النقود والحصول على نتيجة بعينها).

الاستدلال البايزي Bayesian inference

نتيجة لوجهة النظر البايزية يري مؤيدو هذه النظرية أن كل الاحتمال يندرج تحت نوعية الاحتمال الشرطي، لنفرض أننا أشرنا إلى احتمال وقوع الحدث A ب P(A) (يكون ذلك في حقيقة الأمر P(A|C) حيث C يمثل المعرفة الحالية ولكننا نهمل كتابتها). ويكون هذا هو الاحتمال المسبق، وعندما تردنا معلومات جديدة ولتكن B سنحتاج إلى تحديث حساباتنا وهذا يعني أنه عند استخدام الاحتمال الشرطي لحساب (P|A) يسمي ذلك بالاحتمال اللاحق.

وكما يظهر من مغالطة مقلوب الاحتمال، يمكن للاستدلال البايزي أن يهمل النتائج غير المتفقة مع الحدس، يستخدم المفكرون المؤيدون لوجهة النظر البايزي هذا الأسلوب لتحسين تقدير الاحتمال في مجموعة كبيرة من الموضوعات بدءا من الاقتصاد وحتى الذكاء الاصطناعي.

نظرية الاتفاق لأومان Aumann's agreement theorem

هناك ثلاثة أجزاء في الاستدلال البايزي: التوزيع الاحتمالي السابق، وبيانات جديدة، والتوزيع الاحتمالي اللاحق الذي هو نتاج الجزأين السابقين.

في عام 1976م، قام أومان بتزويد اثنين من المفكرين المؤيدين للنظرية البيزية باحتمالات مسبقة متطابقة لحدث ما X، وزود كل شخص بمجموعة بيانات مختلفة. الاحتمال الشرطي على الأرجح سيعطي احتمالين لاحقين مختلفين للحدث X بالطبع. كان سؤال عن ما عما سيحدث إذا قام الشخصان بمشاركة احتماليهما اللاحقين (بمعني جعلهم على نفس القدر من المعرفة العامة) بدون مشاركتهم لمجموعة البيانات المعطاه لكل منهما.

الإجابة مباشرة رياضيا، ولكن بأي حال من الأحوال: بعد مرات عديدة من مشاركة الاحتمالات وإعادة الحسابات سيصل الاثنان في النهاية إلى نفس احتمال الحدث X اللاحق. فقال أومان العبارة الآتية: "ليس باستطاعة من لهم نفس السوابق أن يتفقوا على ألا يتفقوا".

مسألة مونتي هول Monty Hall Problem

مونتي هول هو المقدم السابق للمسابقة التليفزيونية لنعقد صفقة!– Let's make a deal. كان على المنافسين اختيار باب واحد من بين ثلاثة أبواب ليظهر ما خفي وراءه من جوائز مختلفة. كانت تلك هي سلسلة الأحداث المتبعة التي شكلت الإلهام لبرنامج مسابقات مونتي هول التي اشتهرت بأنها أسوأ ألغاز الاحتمال سمعة.، وكان مكتشفه عام 1975م هو ستيف سليفن–Steve Slevin.

هناك ثلاثة أبواب A، وB، وC، خلف أحدهم سيارة رياضية جديدة كليا أما الاثنان الآخران فخلفهما ملعقتين خشبيتين. يختار المتسابق أحد الأبواب وليكنA بذلك تكون احتمالية اختياره الجائزة الكبرى=1/ 3.

ثم يقول مونتي –الذي يعلم الباب الذي توجد خلفه السيارة–: "لن أخبرك عما يوجد خلف الباب A، ولكن سأكشف لك عن أن وراء الباب B ملعقة خشبية، هل ستحتفظ باختيارك أم تريد اختيار الباب C ؟"

الفرض الطبيعي هنا هو أن الاحتمالات بين كل من A، وC له متساوية، والتبديل بينهما لن يشكل أي فرق. وفي الواقع هذا الفرض غير صحيح: حيث أن احتمال أن يكون C هو الباب الذي يخفي السيارة =2/ 3 بينما احتمال A =1/ 3، لذلك ينبغي على المتسابق أن يبدل اختياره.

هل ينبغي تبديل الاختيار أم لا؟

القول بأن حل مسألة مونتي هول كان مفاجأة فيه شيء من التهوين. شعر قراء مجلة باراد – Parade بالغضب عندما ناقشت مارلين فو ساف هذه المسألة عام 1990م. وانهالت الشكاوى التي صدر بعضها عن العديد من علماء الرياضيات المحترفين اعتراضا منهم على حل المسألة الذي وصفوه بأنه خاطئ ويدل على جهلها بعلم الرياضيات.

من الأفضل زيادة عدد الأبواب لإثبات صحة ما قالته مارلين وليكن عددهم 100 باب. لنفرض أن المتسابق عليه اختيار الباب رقم 54 واحتمال إيجاد السيارة هو 1٪ . بعد

ذلك يكشف مونتي أن الأبواب التي لها الأرقام: من 1 إلى 53، ومن 55 إلى 86، ومن 88 إلى 100 تخفي وراءها ملعقة خشبية. هل على المتسابق تبديل الباب 54 بالباب 87 أم التمسك بالباب 54؟ المفتاح الرئيسي للحل هنا هو أن احتمال أن يكون الباب 45 هو الباب الرابح يظل كما هو 1٪؛ حيث أن مونتي كان حريصا على ألا يشي بما يؤثر على هذا الاحتمال.أما نسبة ال 99٪ الباقية فقد أصبحت من نصيب الباب 87 بدلا من أن تتوزع على بقية الأبواب الأخرى، وبذلك يتضح أنه ينبغي التبديل واختيار الباب 87.

تعتمد مسألة مونتي هول على الحذاقة. النقطة الحاسمة هي أن يكون مونتي هول على علم بمكان وجود السيارة. إذا كان مونتي لا يعرف ذلك وفتح أحد الأبواب الأخرى عشوائيا (مخاطرا بالباب الصحيح ولكن وجد باب وراءه ملعقة خشبية) سيتغير الاحتمال ويصبح مساويا 1/2، أما في المسألة الأصلية يفتح أي باب من الاثنين الذي يعلم أن وراءهما ملعقة خشبية ويظل احتمال إيجاد المتسابق للسيارة مساويا 1/3 كما كان في البداية. دون أيما تغيير.

إبرة الكونت بوفون Count Buffon's needle

إذا قمت بإلقاء إبرة عشوائيا على ورقة مسطرة، فما هو احتمال أن تسقط الإبرة في المسافة الفاصلة بين أي خطين؟ لقد بحث جورج لوكلير(كونت دي بوفون)- Georges Leclerc le Comte de Buffon هذا السؤال في عام 1777م. أجرى بوفون تجاربه بإلقاء عصي فوق كتفيه، وتركها تسقط على بلاط أرضية غرفته.

تعتمد الإجابة على طول الإبرة (L)، والمسافة (d) التي تفصل بين الخطوط.

إذا كانت L≤d تكون الإجابة $\frac{2l}{\pi d}$.

أما في حالة L > d يصبح الأمر معقدا أكثر ولكن بدرجة طفيفة. بالتالي إذا كان طول الإبرة 1سم، والمسافة بين الخطين 2 سم تكون الإجابة ببساطة 1/ π، وهذا يمثل الطريقة المعروفة باسم طريقة مونت كارلو- لحساب قيمة π: وهي أن تقوم بإجراء التجربة عدد ما يحلو لك من المرات ثم تقوم بقسمة عدد المرات الكلية للسقوط على عدد مرات سقوط

الإبرة على الخط وبذلك تحصل على قيمة تقريبية لـ π. وحاول كومت دي بوفون في العام نفسه تطبيق الاحتمال الشرطي على دراسة الفلسفة عن طريق محاول حساب احتمال أن تشرق الشمس صباح اليوم التالي علما بأنها قد أشرقت عدد n من المرات قبل ذلك.

قانون الأعداد الكبيرة The law of large numbers

تمت تسمية هذا المبدأ لأول مرة عام 1989 م من قبل كل من بيرسي ديوكوينز Persi Dioaconis وفريدريك موستلير Frederick Mosteller على الرغم من أن هذه الظاهرة كانت معروفة لفترة كبيرة قبل ذلك الوقت.

عندما تكون العينة كبيرة بما فيه الكفاية، يصبح أي شيء صادم محتمل الحدوث

من المعتاد أن اليناصيب لا تحظي بنسب احتمالات جيدة؛ حيث أنني إذا قمت بشراء بطاقة يناصيب فستكون فرصتي في الفوز ضئيلة جدا (ربما 1 إلى 10 ملايين). إذا فزت سأصاب بالدهشة من وقوع حدث احتمالية حدوثه ضعيفة، ولكن من وجهة اليناصيب: إذا بيعت عدة ملايين بطاقة يناصيب فإن احتمالية فوز أحد الأشخاص احتمالية جيدة.

أما المثال الأكثر غرابة وشذوذا هو فوز امرأة أمريكية بيناصيب نيوجيرسي مرتين. من وجهة نظر الفائز هذا حقا حدث لا يصدق. وضع كل من دياكوينز (Diaconis)، وموستيلر (Mosteller) سؤالا أعمق: "ما هي فرصة أن يفوز شخص واحد من بين ملايين وملايين الأشخاص الذين يشترون بطاقات اليناصيب مرتين في عمره؟"

كانت إجابة كل من ستيفن صمويل (Stephen Samuels) وجورج مكاب (George McCabe) في فترة تالية لذلك: "من الناحية العملية، هذا مؤكد".

المصادفة Coincidence

يمثل قانون الأعداد الكبيرة أداة مفيدة لدراسة المصادفة عند وقوع أحداث كان من المرجح بدرجة كبيرة أنها لن تحدث. لنفرض أننا نطلق على حدث ما أنه حدث نادر إذا كان احتمال حدوثه أقل من واحد في المليون. في عام 1953م لاحظ ليتلوود Littlewood

أن من بين سكان الولايات المتحدة الأمريكية ال 250 مليون هناك مئات الأشخاص يتعرضون لأحداث نادرة كل يوم. وبقياس ذلك على بقية العالم، نجد أنه يجب توقع حدوث الأحداث التي يكون احتمال حدوثها واحد في المليار.

مصادر مصادفة أخرى واضحة تنشأ من حدسنا الضعيف للاحتمال، وتبين الحلول المدهشة لمسألتي عيد الميلاد وظاهرة الايجابيات الزائفة كيف أن حدسنا لا يمكن الاعتماد عليه.

توزيعات الاحتمال PROBABILITY DISTRIBUTIONS

المتغيرات العشوائية Random variables

يحسب الاحتمال البسيط عن طريق معرفة عدد المرات الناجحة وعدد الاحتمالات الكلية الممكنة لوقوع حدث معين وهو وسيلة ذات قيمة إلا أنه يوجد حالات أكثر تعقيدا لن تجدي معها هذه الطريقة. إذا استبدلنا حجر النرد المنتظم بآخر غير منتظم فإن احتمال ظهور العدد 6 لن يكون $\frac{1}{6}$.

ولتنقيح ذلك نحتاج إلى مصطلحات جديدة. فضاء العينة the sample space هو مجموعة كل النتائج الممكنة لتجربة عشوائية ما. في حالة إلقاء حجر نرد يكون فضاء العينة هو الأرقام من 1 إلى 6.

المتغير العشوائي (Random variable) قيمة من القيم الممكنة المختلفة التي لكل واحدة منهن احتمال ما. (وهو من الناحية الفنية دالة من فضاء العينة للأرقام الواقعة بين الصفر والواحد). توجد كل أنواع الدوال الممكنة. المتغير العشوائي الذي يعطي للرقم 6 احتمال الظهور مرة واحدة، ويعطي الأرقام من صفر إلى 5 احتمال ظهور صفر من المرات يكافئ حجر نرد يظهر رقم 6 كحدث مؤكد.

المتغير العشوائي الذي يعطي كل رقم احتمالا يساوي $\frac{1}{6}$ يكافئ حجر نرد منتظم. هذا المتغير العشوائي له توزيعات احتمال مختلفة.

توزيعات الاحتمال Probability distributions

هناك مجموعة كبيرة من توزيعات الاحتمال، ولكنها تنقسم إلى نوعين أساسيين مختلفين. التوزيع الاحتمالي المنفصل (discrete distribution) تكون نواتج التجربة منفصلة عن بعضها كما في حالة حجر النرد الذي يمكن أن يأخذ القيمة 4، أو 5 ولكن لا يمكن أن يأخذ القيمة $4\frac{1}{2}$ في التوزيع الاحتمالي المتصل(Continuous distribution) لا يكون الأمر كذلك (على سبيل المثال: طول شخص ما يمكن أن يأخذ أي قيمة بين4، و5).

إذا كان لدينا توزيع احتمالي X، فإن أهم معلومتين لابد من معرفتهما : مركز التوزيع، ومدى انتشاره، ويتم قياسهما عن طريق: المتوسط(the mean)، والتباين (variance) على الترتيب. ترمز E إلى التوقع أو القيمة المتوقعة للتوزيع، وهو بديل (مضلل قليلا) عن المتوسط (mean).

في التجارب،يتطابق كل من المتوسط وتباين العينة لمجموعة ما من البيانات مع المتوسط النظري والتباين للتوزيع الضمني، يحدث هذا بشكل أكبر كلما زادت مجموعات البيانات المستخدمة، وذلك نتيجة لقانون الأرقام الكبيرة-law of large numbers.

التوقع Expectation و التباين Variance

إذا كان لدينا متغير عشوائي منفصل X، فإن المتوسط يعرف بأنه مجموع النواتج الممكنة كل مضروب في الاحتمال المناظر له. إذا كانتX تمثل توزيع رمي حجر نرد منتظم، النواتج الممكنة هي الأرقام من 1 إلى 6، وكل منها له احتمال $\frac{1}{6}$ إذا المتوسط

$$3\frac{1}{2} = \frac{1}{6}\times 6 + \frac{1}{6}\times 5 + \frac{1}{6}\times 4 + \frac{1}{6}\times 3 + \frac{1}{6}\times 2 + \frac{1}{6}\times 1 = 3\frac{1}{2}$$

التعريف الاصطلاحي للمتوسط(التوقع) هو:$E(X) = \Sigma x \times P(X = x)$؛ حيث X تمثل أى ناتج من النواتج الممكنة، و $P(X=x)$ هو الاحتمال المناظر.

وإذا كان التوزيع العشوائي متصلاً فإن التعبير السابق يصبح $E(x) = \int x \int (x)dx$؛ حيث f هي دالة كثافة الاحتمال (انظر التوزيع الاحتمالي المتصل).

لنفرض أن $E(X) = \mu$ فيكون التباين $V(X)$ الذي يقيس تشتت التوزيع الاحتمالي معرفا كالتالي في رمية حجر النرد $V(X) = E(X-\mu)^2$ ويمكن حسابه بطريقة أسهل باستخدام $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ في رمية حجر النرد

$$E(X^2) = \frac{1}{6} \times 1^2 + \frac{1}{6} \times 2^2 + \frac{1}{6} \times 3^2 + \frac{1}{6} \times 4^2 + \frac{1}{6} \times 5^2 + \frac{1}{6} \times 6^2 = 15\frac{1}{6}$$

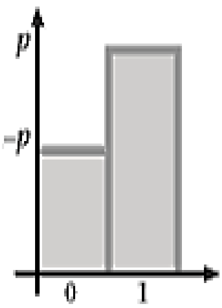
إذًا:

$$V(X) = 15\frac{1}{6} - \left(3\frac{1}{2}\right)^2 = 2\frac{11}{12}$$

يحسب التشتت كذلك باستخدام الانحراف المعياري (سيجما)الذي يعرف بالعلاقة $\sigma = \sqrt{V(X)}$

في رمية حجر النرد تكون قيمة التشتت هي $\sqrt{2\frac{11}{12}}$ ويساوي تقريبًا 1.7.

توزيع بيرنولي Bernolli distribution



هو واحد من أبسط التوزيعات الاحتمالية. يمكنه وصف تجربة إلقاء قطعة نقود غير منتظمة أو أي تجربة لها اثنان من النواتج الممكنة ذات الاحتمالية المختلفة. تجربة تسمى تجربة برنولي، لها اثنان من النواتج الممكنة: النجاح واحتماله P، والفشل واحتماله 1-P من الشائع إعطاء النجاح رقم 1 والفشل رقم صفر، وبالتالي يعطي توزيع بيرنولي احتمال 1 لـ P، و 0 لـ 1-P (وكل الأرقام الأخرى تعطى احتمال صفر).

لا يبدو توزيع بيرنولي لتجربة واحدة مفيدا كثيرا أما عند دمج عدة تجارب معا نحصل على توزيع أرقى وأعقد، ومن الأمثلة المهمة على ذلك: توزيع الدالة ذات الحدين- Binomial. التوقع لتوزيع بيرنولي هو p وتباينه P (1-P) .

تجارب ذات الحدين Binomial trials

لنفرض أننا قمنا بإلقاء 100 حجر نرد منتظم. ما هو احتمال ظهور الرقم 6 على 17 حجر منهم بالضبط؟ لأن أحجار النرد منتظمة يمكن حل المسألة بحساب عدد المرات الناجحة وعدد النواتج الكلية كما يلي. إذا نظرنا إلى ال 17 حجر نجد أن احتمال ظهور الرقم 6 عليها هو $\left(\frac{1}{6}\right)^{17}$ (حيث أن الرميات مستقلة) . ونريد أيضاً ألا يظهر الرقم 6 على ال 83 حجر المتبقي: وهذا الاحتمال = $\left(\frac{5}{6}\right)^{83}$.

بالتالي يكون احتمال أن ال 17 حجر الذين سبق أن حددناهم–هم فقط وليس غيرهم– يظهر عليهم الرقم 6 يساوي $\left(\frac{5}{6}\right)^{83} \times \left(\frac{1}{6}\right)^{17}$. هذا الاحتمال لكل اختيار ممكن لل17 حجر. إذًا لإجابة السؤال الأصلي سوف نضرب هذا الاحتمال في عدد الاختيارات الممكنة لل 17 حجر من ال100(حيث أن الأحداث أحداث متنافية) يحسب عدد الاختيارات الممكنة لل 17 حجر من 100 باستخدام التوافيق-Combination $\binom{100}{17}$

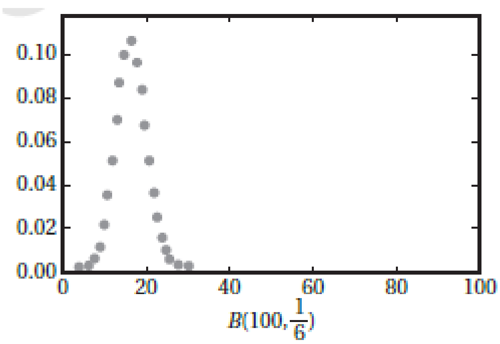
$$\binom{100}{17} \times \left(\frac{1}{6}\right)^{17} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{83}$$

وبالتالي تكون الإجابة : (تساوي تقريبا 0.1).

كان هذا مثالا على تجارب ذات الحدين ويتم توصيف ذلك بتوزيع ذات الحدين.

توزيع ذات الحدين Binomial distribution

يحدد توزيع ذات الحدين بقيمتين: n وهو عدد تجارب بيرنولي المتطابقة التي أجريت، P احتمال أن تنتهي كل من هذه التجارب بنجاح. في المثال السابق $n = 100$, $P = \frac{1}{6}$، ونكتب التعبير $X \sim B(100, \frac{1}{6})$ لنعني أن X متغير عشوائي مع توزيع ذات الحدين



وبشكل عام إذا كان $X\sim B(n,p)$، إذًا X تقيس عدد المرات الكلي للنجاح من بين n من المرات المستقلة من تجارب بيرنولي التي لها احتمالP إذًا لكل عدد K يقع بين صفر و n

يكون احتمال أن X=K هي

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

أما توقع X فيحسب من العلاقة $E(X)=np$، والتباين: $V(X)=np(1-p)$

عملية بواسون Poisson Distribution

يستقبل تليفون مكتب متوسط مكالمات يقدر بـ 3 مكالمات في الساعة في الفترة بين التاسعة صباحا وحتى الخامسة مساء. في ساعة ما قد لا يتلقى اتصالات، أو يتلقي اتصالا واحدا أو 2، 3،4،5، 6 ..... مكالمات، ولا نعرف تحديدا آخر رقم لعدد المكالمات يجب أن نتوقف عنده ولكن كلما زاد العدد قل الاحتمال تدريجيا، فإذا افترضنا أن الاتصالات تأتي في أوقات عشوائية بدون فارق بين أوقات تلقي المكالمات على مدار اليوم الواحد أو بين الأيام المختلفة يكون ذلك مثالا على عملية بواسون.

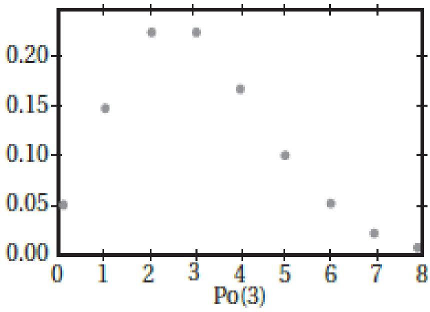
بشكل عام: تضع عملية بواسون نموذجا لعدد مرات حدوث ظواهر عشوائية خلال وقت محدد معطى أو خلال منطقة ما في الفضاء.

توزيع بواسون Poisson-Distribution

نحتاج متغيرا عشوائيا يحدد احتمال جميع مرات الظهور الممكنة 0,1,2,3,4, لعملية بواسون. التوزيع الأكثر شيوعا في الاستخدام هو توزيع بواسون الذي اكتشفه العالم عام 1838م سيمون- دينيس بواسسون باستخدام قانون الأحداث النادرة – the law of rare events.

نحتاج رقما واحدا لتحديد توزيع بواسون يطلق عليه عادة الكثافة (Intensity) λ .

في المثال السابق: $\lambda=3$، ولنعبر عن أن X متغير عشوائي في هذا التوزيع نكتب $X\sim PO(3)$.



بالتالي يكون احتمال تلقي عد صفر من المكالمات في ساعة ما $P(X=0)=e^{-3}$ واحتمال تلقي مكالمة واحدة $P(X=1)=$ $3e^{-3}$، ومكالمتين $P(X=2)=\frac{3^2e^{-3}}{2}$ واحتمال تلقي K من المكالمات $P(X=K)\ \frac{3^ke^{-3}}{k!}$.

وبشكل عام إذا كان(λ) if $X\sim po$ ، فإن

$$P(X-k)=\frac{\lambda^{k}e^{-\lambda}}{k!}$$

التوقع والتباين لتوزيع بواسون بالمعامل لامدا يعطى بالعلاقة $E(X)=V(X)=\lambda$.

قانون الأحداث النادرة Law of rare events

لنفرض أن مصنعًا ما ينتج آيس كريم بطعم الفول السوداني. متوسط عدد السوداني في بولة الآيس كريم=18 . والطريقة الطبيعية لنمذجة هذه المسألة تكون باستخدام توزيع بواسون $X\sim po(18)$.

لكن هناك منهج آخر . لنفرض أن هناك 36000 حبة فول سوداني في الوعاء الذي يصنع فيه الآيس كريم، واحتمال وجود حبة ما في بولة ما يساوي 0.0005. يمكننا نمذجة هذا السيناريو باستخدام توزيع ذات الحدين$X\sim B(36{,}000{,}0.0005)$.

ومن المؤكد أن النموذج الأول أكثر ملائمة لكن النموذج الثاني أكثر دقة، وهذا لا يشكل أمرًا مقلقًا؛ لأن قانون الأحداث النادرة يضمن أن نتيجتي النموذجين متقاربتين إلى حد كبير.حيث أنه من الناحية العلمية ينص قانون الأحداث النادرة على أنه عندما تزدادn كثيرًا وتصبح p صغيرة بحيث يظل متوسط عدد المرات الناجحة ثابتًا $\lambda\ = np$ ، وبالتالي يزداد التوزيع $B(n,p)$ ليصل إلى توزيع بواسون $po(\lambda)$، وكانت هذه هي الطريقة التي اكتشف بها سايمون-ديني بواسون -Simeon-Denis Poisson التوزيع الخاص به.

التوزيع الاحتمالي المتصل Continuous probability distributions

إذا اخترنا شخصا في مدينة ما اختيارا عشوائيا وقمنا بقياس طوله لن نتمكن في هذه الحالة من تطبيق التوزيعات السابقة مثل توزيع ذات الحدين أو توزيع بواسون. المشكلة هنا تكمن في أن الأطوال كميات متصلة وليست منفصلة؛أي لا تشكل أرقاما صحيحة منفصلة: 1،2،3. إنما نستخدم مدى من الأرقام المتصلة. يمكن تطبيق التوزيع المتصل في مثل تلك الحالات(البيانات عبارة عن أطوال أشخاص مثلا). ويطبق عن طريق رسم منحنى لكل حالة، ويسمى هذا المنحنى دالة كثافة الاحتمال.

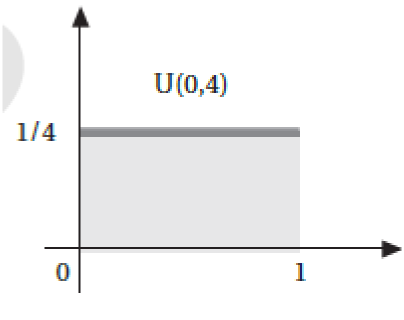
في التوزيع المنفصل نحسب احتمال وقوع X في مدى معين عن طريق القيام بعملية الجمع لكل الاحتمالات المناظرة، أما في التوزيع المتصل نقوم بعملية التكامل على المنحنى على امتداد المدى المطلوب، وبالتالي يكون احتمال أن X يقع بين العددين 4، 6 يمكن تمثيله بالمساحة تحت المنحنى في هذا المدى.

في التوزيع المنفصل لابد أن يكون المجموع عند جمع كل الاحتمالات يساوي الواحد الصحيح. أما في التوزيع المتصل لابد أن تكون المساحة تحت المنحنى تساوي الواحد الصحيح أبسط توزيع متصل هو الواحد المنتظم (uniform one).

التوزيع الذي يشغل الأهمية الكبرى وبمثابة القلب النابض للنظرية الحديثة للاحتمال هو التوزيع الطبيعي.

التوزيع المنتظم Uniform distribution

تخيل لعبة نحلة دوارة محيطها طوله 4سم وعليها علامات مرقمة من 1 إلى 4. قمنا بتدويرها مرة ثم سجلنا النقطة الموجودة على محيط النحلة والتي تكون ملامسة للأرض عند استقرار النحلة تماما. رقم النقطة سيكون واقعا بين 1، و4 (لا يشترط أن يكون رقما صحيحا).



وبفرض أن النحلة منتظمة، إذا يمكن التعبير عن هذه المسألة باستخدام متغير عشوائي X له توزيع منتظم.

يتحدد التوزيع المنتظم بنقطتيه المتطرفتين (في هذه الحالة (0،4))، وجميع الفترات الواقعة بين هاتين النقطتين ولها نفس الطول لها احتمالات متساوية. بالتالي يكون احتمال سقوط الاسطوانة بين 1.1 و 1.3 مساويا لاحتمال سقوطها بين 3.7، 3.9 على سبيل المثال.

وبشكل عام: إذا كان $X \sim U(a, b)$ تكون دالة كثافة الاحتمال لها قيمة ثابتة بين a وb تعطى بالعلاقة $\frac{1}{a-b}$ وقيمتها صفر فيما عدا ذلك. في المثال السابق، ينتج عن تطبيق ذلك الحصول على رسم بياني ارتفاعه $\frac{1}{4}$. المثال النمطي لهذا النوع من التوزيع هو التوزيع المنتظم القياسي $U(o, 1)$. توقع التوزيع المنتظم العام يحسب من العلاقة $\frac{a+b}{2}$ وتباينه يحسب من العلاقة $\frac{1}{12}(b-a)^2$.

التوزيع الطبيعي Normal distribution

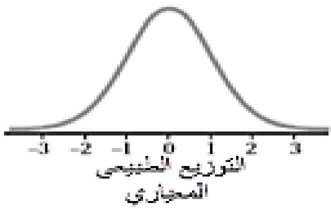
بعيدا عن علم الرياضيات، يعرف منحنى التوزيع الطبيعي باسم منحنى الجرس- bell curve.

عرف لأول مرة في العمل الذي قدمه إبراهام ديموافر (Abraham De Moivre) عام 1756م تحت اسم مذهب الفرص(The Doctrine of Chance) على خلفية عمل ليونارد أويلر(Leonhard Euler's) على الدالة الأسية، لتحديد هذا النوع من التوزيع نحتاج معرفة كميتين: متوسط التوزيع μ، الذي يعين مركز التوزيع بدقة، وتباينه σ^2 الذي يحدد تشتت التوزيع. وهناك مجموعة كبيرة من الظواهر يمكن وضع نموذج لها باستخدام التوزيع الطبيعي للمتغير العشوائي X X $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ عن طريق اختيار قيم مناسبة لـ μ وσ^2، من هذه الظواهر: طول مجموعة من النساء البالغات، ونتائج اختبار، وسرعة دوران الكواكب.

الشكل الأساسي لمنحنى الجرس يعطى من بالمعادلة $y = e^{-x^2}$ ولكن لابد من إعادة تحجيمه حتى تصبح المساحة تحت المنحنى مساوية 1 عن طريق نقل μ إلى المركز، وتوسيع

امتداد المنحنى تبعا لقيمة a^{-2} و بدمج ما سبق معا تصبح دالة كثافة الاحتمال:

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



في حالة التوزيع الطبيعي المعياري N(0,1) يمكن تبسيط ذلك قليلا إلى $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

وهذه النسخة المعيارية هي ما نحتاجه حقا لأن أي توزيع طبيعي يمكن جعله توزيعا طبيعيا معياريا.

إذا كان $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ فإنه يمكن جعله معياريًا عن طريق تعريف $\gamma = \frac{X-\mu}{\sigma}$، ومن ثم $Y \sim N(0,1)$ التوزيع المعياري هو بمثابة التوزيع الأم لكل توزيعات الاحتمال، بمعناه الدقيق المعطى من مبرهنة الحد المركزية the central limit theorem.

المتغيرات العشوائية المتطابقة المستقلة

Independent, identical random variables

تتضمن العديد من الحالات في نظرية الاحتمال متوالية من المتغيرات العشوائية المتطابقة المستقلة ... $X_1, X_2, X_3, X_4,$. المثال القياسي على ذلك هو القيام بتجربة واحدة عدة مرات بحيث تكون كل مرة مطابقة لما قبلها ، لكن نواتج التجربة في كل مرة تكون مستقلة عن المرات الأخرى مثال: الرمي المتكرر لحجر نرد. (اختيار ورقة لعب من مجموعة أوراق فقط إذا تم تبديل الورقة وإعادة خلط الأوراق كل تجربة).

والشائع هو أن نحسب متوسط أول عدد n مرات من تكرار التجارب. نقوم بذلك عن طريق تعريف متغير عشوائي جديد.

$$Y_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

حيث Yn تمثل متوسط عدد نواتج التجارب n الأولى (متوسط نتائج أول n رمية لحجر النرد) ويصف قانون الأعداد الكبيرة the law of large numbers ، ومبرهنة الحد المركزية the central limit theorem هذا المتغير.

قانون الأعداد الكبيرة Law of large numbers

ارم حجر نرد منتظم 10 مرات، أو 100 مرة، أو 1000 مرة، واحسب متوسط الناتج في كل مرة. ما الذي تتوقع حدوثه؟ يتنبأ قانون الأعداد الكبيرة أنه كلما كبرت العينة، يجب أن نتوقع أن متوسط نتائج هذه العينة سوف يقترب أكثر من المتوسط النظري الذي قيمته 3.5.

كان جيكوب بيرنولي-Jacob Bernoulli هو أول من يضع ذلك على هيئة نظرية محكمة عام 1713م على الرغم من ظهور أشكال غير رسمية لهذه النظرية قبل عدة سنوات من ذلك. تشير النظرية إلى متوالية من المتغيرات العشوائية المتطابقة المستقلة لكل منها متوسط μ، ومن ثم نضع تعريفا لمتغيرات عشوائية جديدة

$$Y_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

يجزم قانون الأعداد الكبيرة بأن كلما ازدادت n،اقتربت قيمة المتغير العشوائي Yn للرقم المحدد μ.

صقلت مبرهنة الحد المركزية هذا القانون ولكن القانون يحظي بتطبيقية أوسع؛ حيث تتطلب مبرهنة الحد المركزية وضع افتراض بشأن تباين المتغير Xi.

مبرهنة الحد المركزية Central limit theorem

عام 1733م استخدم إبراهام ديموافر Abraham De Moivre التوزيع الطبيعي لوضع نموذج للعدد الكلي لظهور الصورة في تجربة رمي قطعة نقود عدد كبير من المرات. يبدو أن هناك خطأ ما: عدد رميات قطعة النقود منفصل وليس مستمر فيكون نموذج توزيع ذات الحدين هو الملائم هنا وليس التوزيع الطبيعي!

ومع ذلك لم يرتكب ديموافر خطأ ولو بسيط، على العكس كان ما فعله هو أول شرارة لظهور نتيجة أساسية في نظرية الاحتمال هي: نظرية الحد المركزية.

بفرض وضع نموذج لتجربة ما باستخدام متغير عشوائي X وكان المتوسط μ، والتباين a^2، لا يهم معرفة توزيع X ، ولكن الأمر المهم هو معرفة المعلومات السابقة. قد

يكون توزيعا منتظما، أو توزيع بواسون، أو حتى أي توزيع لم يتم اكتشاف نوعه بعد. تقول نظرية الحد المركزية أنه إذا كررت التجربة عدة مرات ستكون النتيجة المتوسطة معطاه باستخدام توزيع طبيعي، ولمزيد من الدقة تتوافق مرات تكرار التجربة مع متتالية من المتغيرات العشوائية المستقلة المتطابقة $X_1\ X_2\ X_3\ X_4...$ ومن ثم يمكننا أخذ متوسطات العينة

$$Y_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

تخبرنا مبرهنة الحد المركزية أنه كلما أصبحت n قيمة كبيرة جدا أصبح التوزيع Yn تقريبا $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ وتصبح الأمور أكثر دقة عند جعل Yn قياسيا بتعريف $Z_n = \frac{y_n-\mu}{a/\sqrt{n}}$.

بذلك نقول أن كلما زادتn تصبح المتغيرات العشوائية Zn أقرب إلى التوزيع الطبيعي المعياري N(0,1) .

مغالطة المقامر Gambler's Fallacy

قانون المتوسطات هو مصطلح قد يكون معروفا خارج علم الرياضيات، ولكنك لن تجد أثرا لهذا المصطلح في أي كتاب يتناول نظرية الاحتمال. عندما يكون استعمال هذا القانون صالحا يشير إلى قانون الأرقام الكبيرة، أما إذا كان خاطئا يصبح مثالا على مغالطة المقامر. بفرض أن مقامر رأى أن اللون الأسود كان اللون الرابح في المقامرة 6 مرات متتابعة فقد يعتقد أن بعد المرة السادسة سيحين دور الأحمر ليكون هو اللون الرابح وبالتالي يكون احتمال ظهوره في لعبة الروليت أكبر في المرات التالية. إذا كانت هناك محاولات متتالية (دوران قطعة النقود أو عجلة المقامرة) وعرف عنها أنها مستقلة، فستصبح مغالطة المقامر- بالتعريف خاطئة.

مغالطة المقامر تظهر كنتيجة لوجود خطأ في نظرية الأعداد الكبيرة. الخطأ هو أن هذا القانون يتنبأ بتنبؤات احتمالية عن سلوك متوسط على مدى بعيد، ولا تقدم تنبؤات عن نتائج تجارب فردية بالطبع وجود عدد كبير من النتائج مستقلة لازال يستحق أن يؤخذ في عين الاعتبار حيث أنه دليل على أن التجارب ليست كما تبدو (إما أن الاحتمالات لاتتحقق أو الأحداث ليست مستقلة تماما).

العمليات العشوائية STOCHASTIC PROCESSES

العمليات العشوائية Stochastic Processes

ابدأ المشي من منتصف طريق ما، ثم قم بإلقاء قطعة نقود منتظمة. إذا كانت نتيجة الرمية ظهور صورة امش مسافة متر في اتجاه الشمال، أما إذا كانت كتابة امش مسافة متر في اتجاه الجنوب. ثم ألقها مرة أخرى. إلى أين سينتهي بك المسير بعد إلقائها 10 مرات أو 100 مرة؟ هذه التجربة مثال على سير عشوائي.

بالنسبة للسير العشوائي المعتمد على اتجاهين، لنأخذ على سبيل المثال ولاية مانهاتن المعروفة بشوارعها التي على شكل شبكة مربعة. عند كل مفترق طريق يكون لديك احتمال متساو للسير شمالا أو جنوبا أو شرقا أو غربا مربع واحد (وضعنا نموذج للمدينة بحيث نفرض أنها شبكة لا نهائية مع إهمال إمكانية الوصول لحوافها)، وبالمثل يمكن تعريف سير عشوائي في مستوى ثلاثي الأبعاد أو أي مستوى لانهائي (لأن المسألة تكون تافهة إذا كانت المستويات نهائية).

السير العشوائي هو أبسط مثال على العمليات العشوائية، وهي العمليات التي تتغير بتغير الزمن استنادا إلى قواعد احتمالية وليس علاقات محددة. تعتبر سلاسل ماركوف– Markov chains والحركة البراونية –Brownian motion أمثلة أكثر تعقيدا.

السير العشوائي لبوليا Polya’s random walks

صاغ جورج بوليا George Polya مصطلح السير العشوائي عام 1921م بعد دراسته لحالتي السير العشوائي أحادي البعد، وثنائي الأبعاد الوارد ذكرهما في المثالين السابقين. كان سؤاله كالتالي: في البداية اختر نقطة على الرسم البياني. الآن احسب احتمالية أن يصل إليها في النهاية الشخص السائر سيرا عشوائيا؟ السؤال الأسهل الذي يفضي إلى نفس الأمر: ما هو احتمال أن يعود السائر في نهاية المطاف إلى نقطة البداية؟ أوضح بوليا أن النتيجة هي 1 في كلا الحالتين وجعل ذلك تأكيدا افتراضيا.

تعرف حالة السير أحادي البعد باسم دمار المقامر gambler's ruin. المقامر الذي

يلعب لعبة منتظمة عشوائية ضد نادي القمار لديه احتمال 1 لخسارة كل عملاته في نهاية اللعبة. قد يبدو ذلك غير مثير للدهشة، لكن بوليا وضح أن بزيادة عدد الأبعاد يصبح الأمر غير متحقق، فالسير العشوائي على شبكة ثلاثية الأبعاد تكون احتمالية الرجوع فيه إلى نقطة البداية أقل، وبعد ذلك تثبت قيمة هذا الاحتمال عند حوالي 0.34، فالسير العشوائي ذو الأبعاد الأكثر لا يغطي الشبكة كلها بل يظهر سلوكا كسريا مثيرا للدهشة كلما زادت الأبعاد.

سلاسل ماركوف Markov chains

في كل مرحلة من مراحل السير العشوائي لمانهاتن تقوم بإلقاء قطعة نقود لمعرفة الاتجاه التالي الذي عليك أخذه. تعتبر نظرية الاحتمال أن رمي قطعة النقود يمثل بمتغير عشوائي من نوع بسيط. سلسلة ماركوف هي متتالية من المتغيرات العشوائية مثل السير العشوائي، لكن يكمن الفرق في أن هذه المتغيرات العشوائية قد تكون من نوع أكثر تعقيدا مثل السير العشوائي على شبكة بها ناقلات أو أي أفخاخ خداعية أخرى. عبر عالم الاحتمالات أندري ماركوف في القرن التاسع عشر عن السمات التي تحدد سلسلة ماركوف. سمات هذه السلسلة أن التوزيع الاحتمالي في كل مرحلة يعتمد فقط على الحاضر وليس الماضي (في السير العشوائي المهم النقطة التي وصلت إليها، أما كيفية وصولك إلى تلك النقطة فهو مهمل).

تمثل سلاسل ماركوف إطارا ممتازا لوضع نماذج للعديد من الظواهر بما فيها: التغيرات السكانية، وتقلبات البورصة. تحديد السلوك النهائي لعملية ماركوف يمثل مشكلة عميقة كما توضح شروحات بوليا للسير العشوائي ثلاثي الأبعاد.

النظرية الحركية للغازات Kinetic theory of heat

كان روبرت براون (Robert Brown) عالم نبات، ورائدا في الفحص الميكروسكوبي في مجال العلوم الحيوية. في عام 1827م وجه مجهره نحو حبوب لقاح زهرة الربيع العالقة في الماء. كانت الأجزاء الصغيرة من المادة تطفو على الماء وتندفع اندفاعا عشوائيا، عرف ذلك فيما بعد باسم الحركة البراونية.

اعتقد براون في بداية الأمر أن هذه الجسيمات عبارة عن مخلوقات حية ضئيلة، ولكن

المزيد من التقصي كشف عن أن نفس الحركة المميزة غير المنتظمة ظهرت في مسحوق صخري مذاب جيدا في الماء.

عام 1905م أدرك العالم آينشتاين- أن هذه الجسيمات تدفع بواسطة جزيئات الماء، وهي ضئيلة جدا لايمكن رؤيتها. ومن الجدير بالذكر أن بزيادة درجة حرارة الماء تتحرك الجزيئات المرئية بشكل أسرع. أدرك آينشتاين أن هذا دليل قوي غير مباشر على النظرية الجزيئية للحرارة- وكما نعلم ، الطاقة الحرارية في المادة ليست إلا طاقة حركية للجزيئات المكونة لها.

الحركة البراونية Brownian motion

كان لابد من وجود نموذج رياضي للحركة البراونية للجزيئات حتى يتسنى لنا تجسيد تفاصيل عمل آينشتاين على النظرية الحركية للغازات، وحيث أن تغيير مسار الجزيء تغيير عشوائي ومستقل عن حركته السابقة فهو يتشابه مع العملية العشوائية كما في سلسلة ماركوف. ولكن في السير العشوائي وسلاسل ماركوف يكون الوقت على هيئة خطوات منفصلة؛ حيث تحدث كل خطوة في العملية بعد مدة ثابتة من الزمن، أما في الحركة البراونية يغير الجسيم من اتجاهه باستمرار فيبدو المسار على هيئة سير عشوائي مصغر بحيث تؤول خطوات الانتقال إلى صفر.

يمثل السير العشوائي بمتوالية من المتغيرات العشوائية ... $X_1, X_2, X_3, X_4,$؛ أي مجموعة من Xi حيث i رقم طبيعي. وعلى النقيض من ذلك ، تمثل حركة براون بمجموعة متصلة من المتغيرات العشوائية ؛ أي مجموعة من Xi حيث i رقم حقيقي.

ماذا يحدث عند توسيع هذا النظام؟ بين آينشتين أن بعد أي مدة زمنية يمثل موضع الجسيم بتوزيع طبيعي ثلاثي الأبعاد (موضعه في كل بعد موزع توزيعا طبيعيا، والأبعاد الثلاثة مستقلة).

التشفير CRYPTOGRAPHY

التشفير أحادي الحرف Monoalphabetic encryption

من أبسط الطرق المستخدمة لتشفير رسالة هو إعادة ترتيب الحروف قبل كتابة الرسالة. على سبيل المثال: نظام تشفير قائم على ترتيب الحروف على لوحة المفاتيح:

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	Y	Z
Q	W	E	R	T	Y	U	I	O	P	A	S	D	F	G	H	J	K	L	Z	X	C	V	B	N	M

يمكننا استخدام هذا المفتاح في تشفير رسالتنا، ولكن قبل البدء في التشفير : تعرف الرسالة باسم (النص الصريح) وستكتب بحروف صغيرة. لنفرض أن رسالتك تقول: "قابلني في الحديقة عند الثالثة صباحا–'meet me in the park at three a.m.' ينتج النص المشفر (الذي سيكتب بحروف كبيرة) عن طريق تبديل الحروف طبقا للجدول بالأعلى 'DTTZ DT OF ZIT HQKA QZ ZIKTT Q.D.'

وبمجرد إرسال ذلك إلى جهة الاتصال المطلوبة، تقوم بدورها بقراءة الرسالة، باستخدام نفس المفاتيح. وبالتأكيد ليس هناك أي سبب وراء اختيار حروف الهجاء فقط؛ أي أن أي 26 رمز ستكون جيدة. ولجعل الجملة أقل إرشادا قد نود حذف بعض علامات الترقيم والمسافات.

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
$\surd$	$=$	$\cap$	$\div$	$\aleph$	$\exists$	Σ	$\neq$	$\rightarrow$	$\int$	$\in$	∞	x	$\cup$	$\pm$	e	$\frac{dy}{dx}$	Π	1	π	i	$\forall$	θ	$\subseteq$	$\varnothing$	$\times$

$$' \rightarrow \neq \surd\forall\aleph\pi \neq \aleph x\surd\pi\aleph \mathrm{II} \rightarrow \surd\infty 1\varnothing \pm \mathrm{i}\ \mathrm{II}\aleph\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}\mathrm{i} \rightarrow \mathrm{II}\aleph'$$

تحليل الشفرات Cryptanalysis

لنفرض أنك قد وقع في يديك رسالة مشفرة مرسلة لعدو لك:

WKRKRPUEBRXEUGRJURJFBGDRFRBKGFRGBGURPBJRXFOKGRPURZ UGRXAKIJRPK

AOFXOFVUDIJUXKIFJUGKRAKQQKZULXKIJEKGRFERBDFQUSFDPUZB QQPFTUFZPB

RUEFJGFRBKGBGPUJPFGLXKIJEKLUZKJLBDDBDXYPIDDPUZBQQWBT
UXKIFVUXR
PUOFRUJBFQDFJUBGMKSGIOMUJDBSUBWPRABTULUDRJKXRPBDOU
DDFWUFAR
UJXKIPFTUOUOKJBDULBRLKGKREKGRFEROUFWFBGUGLKAOUDDFWU

كيف يمكن المحاولة في فك شفرتها؟ هذا هو السؤال الذي يسأله علم التشفير.

لنفرض أن المرسل استخدم أسلوب أحادي الحرف (الطريقة الأم التي اكتشفت في القرن 19 على يد أبوالكندي (Abu al-Kindi). أساس التحليل التكراري هو ملاحظة الحروف التي ليس لها نفس الشيوع. الخطوة الأولى تحليل أكثر الحروف شيوعا في النص المشفر

U	R	F	D	B	G	D	J	P
36	29	26	25	23	19	18	17	15

الفكرة الأساسية: هي محاولة إبدال الأرقام بالحروف الأكثر تكرارا التي تنشأ في الانجليزي. وهي على الترتيب مجموعة في ETAOINSHRDLU.

تحليل التكرار Frequency analysis

في المثال السابق يمكن أن نبدأ بتبديل الحرفين الإنجليزيين الأقل شيوعا t،e بأكثر حرفين شيوعا U، R، وهو ما يعطينا:

WKtKtPeEBtXEeGtJetJFBGDtFtBKGFtGBGetPBJtXFOKGtPetZeGtXAKIJt
PKAOFXOFVeDIJeXKIFJeGKtAKQQKZeLXKIJEKGtFEtBDFQeSFDPeZBQQ
PFTeFZPBteEFJGFtBKGBGPeJPFGLXKIJEKLeZKJLBDDBDXYPIDDPeZB
QQWBTeXKIFVeXtPeOFteJBFQDFJeBGMKSGIOMeJDBSeBWPtABTeLeDtJ
KXtPBDOeDDFWeFAteJXKIPFTeOeOKJBDeLBtLKGKtEKGtFEtOeFWFB
GeGLKAOeDDFWe

الآن يمكننا فتح خط هجومي آخر. في بعض المواضع يكون الحرف t في الرسالة الصريحة متبوعا بالحرف المشفر P، ومن معرفتنا باللغة الإنجليزية يبدو أنه P تمثل h، وهو ما يعطينا:

WKtKtheEBtXEeGtJetJFBGDtFtBKGFtGBGethBJtXFOKGthetZeGtXAKIJt
hKAOFXOFVeDUeXKIFJeGKtAKQQKZeLXKIJEKGtFEtBDFQeSFDheZBQ
QhFTeFZhBteEFJGFtBKGBGheJhFGLXKIJEKLeZKJLBDDBDXYhIDDheZ
BQQWBTeXKIFVeXtheOFteJBFQDFJeBGMKSGIOMeJDBSeBWhtABTeLe
DtJKXthBDOeDDFWeFAteJXKIhFTeOeOKJBDeLBtLKGKtEKGtFEtOeFW
FBGeGLKAOeDDFW

ومن خلال دمج تحليلات تكرار حروف مختلفة أو تكرار مجموعة من الحروف معا، وذكاء الحل، واستخدام مبدأ التجربة والخطأ يصبح لدينا قدرة على تحقيق تطور أكبر.

ومن الملائم ذكر تحذير مهم بهذا الصدد: تحليل التكرار ليس علما قائما بذاته، وهو يعمل بشكل أفضل مع النصوص الكبيرة. هذا المثال القصير إلى حد ما مفتعل لكن كل ما يراد به هو شرح الأساليب الأساسية.

إيتون شردلو ETAOIN SHRDLU

يعتمد تحليل الكرار على معرفة التكرارات النسبية بين الحروف المختلفة في اللغة الإنجليزية لاشك في أن هذه مجرد متوسطات ولن يكون عددا دقيقا في أي نص.

الحرف	معدل ظهوره كل 100 حرف	الحرف	معدل ظهوره كل 100 حرف
E	12.7	m	2.4
T	9.1	w	2.4
A	8.2	f	2.2
O	7.5	g	2.0
I	7.0	y	2.0
N	6.7	p	1.9
S	6.3	b	1.5
H	6.1	v	1.0
R	6.0	k	0.8
D	4.3	j	0.2
L	4.0	x	0.2
U	2.8	q	0.1
C	2.8	z	0.1

تجمع العبارة ETAOIN SHRDLU الاثني عشر حرفا الأولى مرتبة حسب تكراريتها، وقد كان ذلك معروفا في العصر الذي ظهرت فيه آلات طباعة اللينوتيب[1] حيث رتبت الحروف على لوحة المفاتيح حسب تكراريتها تقريبا. وأحيانا كانت تظهر هذه العبارة في الجرائد عن طريق الخطأ.

تحليل التكرار ليس مفيدا للحروف المنفردة فحسب، بل مفيد أيضاً مع مجموعات الحروف التي تظهر معا (مثل th التي هي أكثر شيوعا من qz)

حرفان يمثلان صوتا منفردا	معدل مرات الظهور كل 2000 حرف	حرفان يمثلان صوتا منفردا	معدل مرات الظهور كل 2000 حرف	حرفان يمثلان صوتا منفردا	معدل مرات الظهور كل 2000 حرف
Th	50	at	25	st	20
Er	40	en	25	io^^B	18
On	39	es	25	le	18
An	38	of	25	^ is	17
Re	36	or	25	ou	17
He	33	nt	24	ar	16
In	31	ea	22	as	16
Ed	30	ti	22	de	16
Nd	30	to	22	rt	16
Ha	26	it	20	ve	16

التشفير المتعدد للأحرف Polyalphabetic encryption، الأكواد Codes، وأخطاء التهجئة Spelling mistakes

هناك أساليب عديدة تزيد من صعوبة فك التشفير أحادي الحرف. أحد هذه الأساليب هو استخدام التشفير متعدد الأحرف وفيه يكون هناك أكثر من طريقة لتشفير الحرف الواحد، وبذلك قد يستخدم المفتاح الواحد 52 حرفا هجائيا وكل حرف من الشفرة مشفر

(1) قطعة معدنية تحتوى على قوالب معدنية تمثل كل الحروف المستعملة منضدة بجوار بعضها بعضا، وقد أطلق عليها اسم "خط الحروف الطباعية–Linotype .

باختيار رمزين. لمزيد من التعقيد، نستخدم الرموز الوهمية–dummy symbols وهي رموز ليس لها معنى وسيقوم المتلقي (الموجه إليه الرسالة المشفرة) بحذفها ولكنها ستشوش أي متلقي دخيل:

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	dummy
S	L	6	M	D	R	{	E	Q	W	\	A	@	B	K	7	J	3	T	C	O	?	G	4	P	H	X
Z	!	(	5	%	*	1	)	–	9	+	F	£	$	2	N	Y	~	I	;	8	^	U	#	,	V	}

وإحدى الوسائل القديمة هي إضافة مستويات عليا من التشفير. حتى يومنا هذا نقوم بتشفير الرسائل باستخدام رموز مختلفة ترمز إلى حروف الرسالة، وهذا ما يسمى الشفرة، أما الكود– فهو استخدام كلمات بشكل مقنع، على سبيل المثال:

بنك	دولار	سيارة	رجل شرطة
نعامة	رخام	طبلة	صلصة اللحم

أما الوسيلة الثالثة فهي استخدام أخطاء تهجئة متعمدة في الرسالة، وذلك لمنع التحليل التكراري من اكتشاف الأمر. الثلاث وسائل السابقة تعمل على جعل فك تشفير الرسائل أصعب منه في التشفير أحادي الحرف البسيط:

{DXC}C;EX28HXS$}B5@ZX3~!ATRX~K£X}@KXI;3,(E{}P?CX2K1~S
A,P$5X38}£2O;V}M%’

لوحة المرة الواحدة One - time pad

نقطة ضعف التشفير أحادي الحرف هو أن الحرف يتم تشفيره بنفس الطريقة كل مرة مما يفتح الباب على مصراعيه أمام التحليل التكراري وفك التشفير. خففت حدة هذه المشكلة باستخدام وسائل أخرى مثل التشفير المتعدد للأحرف، والتشفير باستخدام الأخطاء الهجائية، وغيرهما من الوسائل. ولكن في نهاية المطاف قد يتمكن أي محلل شفرات خبير من اجتياز تلك العقبات وخاصة إذا كان مزودا بجهاز كمبيوتر لكشف الإمكانات المختلفة للحروف.

لوحة المرة الواحدة هي وسيلة بديلة تعمل على استخدام سلسلة من الحروف كمفتاح لها. لنفرض أن المفتاح يبدأ بكلمة (mathematical رياضي)

أولا: تحول حروف النص غير المشفر إلى أرقام تبعا لترتيبهم الهجائي.

النص غير المشفر(plain text)

a	b	o	r	t	m	i	s	s	i	o	n
1	2	15	18	20	13	9	19	19	9	15	14

المفتاح (Key)

a	m	t	h	e	m	a	t	i	c	a	L
13	1	20	8	5	13	1	20	9	3	1	12

ونحصل على النص المشفر(Ciphertext) بجمع كل رقمين متناظرين ثم إعادة تحويلها إلى حروف، وإذا كان الناتج أكبر من 26 نطرح من الناتج 26. بمعنى أن عملية الجمع تتم بتردد 26 (Modulu 26) (انظر العمليات الحسابية النمطية).

النص المشفر (Ciphertext)

14	3	9	26	25	26	10	13	2	12	16	26
N	C	I	Z	Y	Z	J	M	B	L	P	Z

يقوم المتلقي بعد ذلك بفك تشفير الرسالة عن طريق القيام بعملية عكسية لما تم شرحه في الأعلى (طالما يعرف مفتاح الشفرة).

هذا النوع من التشفير يكافئ تشفير حروف متتالية تبعا لشفرات أحادية مختلفة. يرجع المستوى الأمني العالي لطريقة تشفير لوحة المرة الواحدة وتسميتها بهذا الاسم إلى أن كل مفتاح يستخدم لتشفير رسالة واحدة فقط ثم يتم التخلص منه لذلك قد تكون هناك لوحات متطابقة وفيها مفتاح في كل صفحة ونقلب صفحة جديدة مع كل رسالة.

مبدئيا لا يمكن اختراق طريقة لوحة المرة الواحدة أبدا، كما أثبت كلود شانون (Claude Shannon) عام 1949م.

هناك العديد من الرسائل غير المشفرة الممكنة والتي لها نفس الطول وبدون المفتاح لن يتمكن أي محلل شفرة عدو من التفرقة بين تلك الرسائل.

المفاتيح العامة Public Keys

نظريا لا يمكن خرق طريقة اللوحة الواحدة إلا أنها تحتاج إلى مفاتيح كثيرة جدا؛ حيث يحتاج المرسل والمتلقي مفتاح جديد لكل رسالة. القيام باستبدال هذه المفاتيح محفوف بالمخاطر الحتمية. في طريقة لوحة المرة الواحدة أو أي طريقة تشفير تقليدية تكون عمليتي التشفير وفكه عمليتين متماثلتين. بمعنى أن كل من المرسل والمتلقي يحتاج أن يكون لديه نفس المفتاح.

أما في المفاتيح العامة فلا وجود لهذا التماثل؛ حيث يصبح المفتاح في هذه الحالة جزأين: الجزء الخاص (Private Part) وهو الذي يحتفظ به المالك، ولا يشاركه مع أحد أبدا، والجزء العام(Public Part) الذي يسمح للجميع بالوصول إليه.

يستطيع أي شخص تشفير رسالة باستخدام المفتاح العام ويرسلها إلى المالك الذي يكون هو الشخص الوحيد الذي في إمكانه فك التشفير لأن ذلك يتطلب مفتاح خاص

بالمثل تخيل أن مؤسسة عمل ما توفر عددا مطلقا من الأقفال المتطابقة غير الموصدة ولكل منها مفتاح وحيد تملكه المؤسسة وحدها. إذا أراد شخص ما أن يرسل لها شيئا يمكنه وضعه في صندوق وقفله بأحد الأقفال. يمكن للمؤسسة فقط أن يفتح هذا القفل فيما بعد.

التشفير باستخدام مفتاح عام (Public key cryptography) هو العمود الفقري لأمن الشبكات الحديث (Modern internet security). يتكون المفتاح من رقمين أوليين كبيرين وليكونا p و q ويتم الإبقاء على سريتهما بينما يصرح عن حاصل ضربهما p×q.

يعتمد أمن هذا النظام على الصعوبة المتأصلة في القيام بالعملية العكسية لهذه العملية؛ أي ما يعرف باسم مسألة تحليل الأعداد الصحيحة (Integer factorization problem).

نظرية المعلومات لشانون Shannon's information theory

كان البحث الذي نشره كلود شانون عام 1948م بعنوان (نظرية رياضية في التواصل A Mathematical Theory of Communication) رائعة من روائع عصر ما بعد الحرب وكان له بصمة في ميلاد موضوع نظرية المعلومات كما أنه أصبح ذا مكانه لا تقدر بثمن منذ النصف الثاني من القرن العشرين. في هذا البحث درس شانون عمليات: التشفير (encoding)، والتراسل وفك تشفير المعلومات (transmitting and deciphering information)، ولكن مساهمته لم تكن طريقة جديدة في عالم التشفير

نبدأ بذكر أنه كان رائدا في استخدام النظام الثنائي (Binary) كلغة أساسية للمعلومات. ثم قام لأول مرة بتحليل الأساس النظري لإرسال المعلومات. وبحث في حدوده وحلل المعدل الأقصى لقدرة النظام على إرسال بيانات و تعتمد الإجابة على مصدر المعلومات وخصوصا على كمية ما تسمى مقياس عشوائية النظام (إنتروبي entropy). وهو مقياس يحدد بدقة تقلب البتات (الخانات في النظام الثنائي) المتتابعة في سيل من الأكواد الثنائية عن طريق وضع نموذج له باستخدام عملية ماركوف(Markov process). اكتشف فيما بعد أن مفهوم الإنتروبي عند شانون يكافئ تعقيد كولموجروف (Kolmogorov complexity).

الحالتان اللاتي وضعهما شانون محل الدراسة هما: الأنظمة الخالية من التشويش (noiseless systems)، والأنظمة المشوشة(noisy systems) (التي يسهل حدوث خطأ فيها) ؛ في الأخيرة، درس الحدود النظرية لقوى تصحيح أخطاء الشفرات (the theoretical limits of the powers of error correcting codes).

تعقيد كولموجروف Kolmogorov complexity

يتم تمثيل المعلومات في التكنولوجيا الحديثة على شكل تتابعات ثنائية. (آسكي ASCII هو شفرة لتحويل الحروف ورموز أخرى عديدة إلى النظام الثنائي على سبيل المثال). وبعض هذه التتابعات يكون أكثر تعقيدا من الآخرين. يسهل وصف التتابع 111111 حيث أنه يحتوي على كمية ضئيلة من المعلومات. قد يكون تخزين سلسلة مكونة من مليون 1 إهدارا لمساحة القرص، ولذلك تستخدم برامج الأرشفة التي يمكنها ضغط هذا التتابع بشكل كبير عن طريق إعادة تخزين المعلومات على هيئة أوامر لكتابة مليون 1 (111....) بهدف توفير المساحة.

في الستينيات استخدم كل من راس سولومونوف (Ray Solomonoff) وآندري كولموجروف (Andrey Kolmogorov) هذه الفكرة كطريقة لتحديد كمية المعلومات التي تحتويها سلسلة من البتات. تعقيد كوولموجروف لسلسلة ما هو: أقل طول للسلسة يمكن الوصول إليه عند ضغطها. السلاسل التي تحمل معلومات كثيرة تكون غير قابلة للضغط وبذلك يكون تعقيدها عالي. أما السلاسل التي تحمل معلومات قليلة مثل المليون 1 التي ذكرناها يمكن ضغطها بكفاءة وبذلك نقول أن تعقيدها منخفض. تعقيد كولموجروف يكافئ بالأساس مفهوم الإنتروبي لسلسلة من البتات عند شانون.

أكواد تصحيح الأخطاء Error-correcting codes

عند إرسال معلومات خلال قناة مشوشة (Noisy channel) يمكن أن تتسلسل بعض الأخطاء. أكواد تصحيح الأخطاء هي شفرات تمكن الرسالة من تحمل بعض مستويات التلف.

أبسط طريقة لذلك هي التكرار البسيط(Plain repetition): بدلا من إرسال عبارة (COME NOW) نرسل (CCCOOOMMMEEE NNNOOOWWW) إذا أصاب التلف خانة واحدة نستعين بباقي المجموعة: CCCAAANNQNNNOOOTTT3.

أما إذا حدث أكثر من خطأ ستحدث أزمة أخرى. يمكن التغلب على ذلك باستخدام

مجموعات تكرارية أطول وليكن 100 تكرار للحرف لكن سينتج عن ذلك تقليل في سرعة العملية. أوضح شون توضيحا بارزا أن هذه المفاضلة بين الدقة والسرعة ليست حتمية إذ يمكن باستخدام بعض التكنولوجيا الرياضية إيجاد شفرات سريعة وتحقق مستوى الدقة المطلوب. حتى إذا أصاب التلف نسبة 99٪ من الرسالة، قد يظل فك شفرتها بكفاءة شيئا ممكنا. تعتمد إحدى الطرق على المربعات اللاتينية (Latin squares) التي في طبيعتها تعتبر مصححا للأخطاء.

إذا كان أحد مدخلات المربع اللاتيني تالفا يكون من السهل تحديده وتصليحه عن طريق فحص كل الصفوف والأعمدة . وبعض الطرق المتطورة تستخدم البنى الجبرية للمجالات النهائية (the algebraic structures of finite fields).

المصطلحات

0.9˚= 1.29	كسر دائر
36 officers problem	مسألة الـ 36 ضابط
1089 puzzle	لغز الرقم 1089
1089 theorem	مبرهنة الرقم 1089
1729 is interesting	العدد 1729 عدد مثير للاهتمام

A

abc conjecture	حدسية abc
abstract algebra	الجبر التَجريدي
abstract algebra	الجبر التجريدي
abstraction	التجريد
Achilles and the tortoise	معضلة أخيل والسلحفاة
adding 1 up to n, proof by	البرهان بالإضافة حتى n

induction	الاستقراء
adding the first hundred squares	جمع أول مائة رقم مربع
adding fractions	جمع الكسور
adding probabilities	جمع الاحتمالات
adding up 1 to 100	الجمع من 1 حتى مائة
addition	الجمع
addition by hand	الجمع باستخدام أصابع اليد
adequacy and soundness theorems	مبرهنات الكفاية والصحة
adjugate of a matrix	المصفوفة المصاحبة
after the happy ending	ما بعد النهاية السعيدة
AKS primality test	اختبار أ.ك.أس لأولية عدد ما
Alexander's horned sphere	كرة ألكسندر القرنية
algebraic and analytic number theory	نظرية الأعداد الجبرية والتحليلية
algebraic geometry	الهندسة الجبرية
algebraic structures	البنى الجبرية
algebraic topology	الطوبولوچيا الجبرية
algorithms	خوارزميات
aliens from the fourth dimension	الفضائيون من البعد الرابع
aliquot sequences	متتالية تجزيئية
alternate segment theorem,	مبرهنة القطاع المتبادل
the 95 alternating groups	المجموعات المتبادلة
AM and FM	تعديل السعة و تعديل التردد
amicable pairs	الأعداد الصديقة
amplitude	السعة
analytic continuation theorem	مبرهنة الاستمرار التحليلي
analytic functions	الدوال التحليلية

Andrica’s conjecture	حدسية أندريكا
angle between two vectors	الزاوية بين متجهين
angles	الزوايا
angles in the same segment	الزوايا المشتركة في قوس
angles in a triangle	زوايا المثلث
antimatter	المادة المضادة
aperiodic tilings	تبليط غير دوري
approximating tangents with secants	المماسات المتقاربة مع القواطع
Archimedean solids	مجسمات أرشميدس
Archimedean spirals	حلزونات أرشميدس
Archimedes’ cattle	ماشية أرشميدس
Archimedes’ Sand Reckoner	عداد الرمل لأرشميدس
area of a triangle	مساحة المثلث
Aristotle’s classification of categorical syllogisms	تنصيف أرسطو للقياسات المنطقية الفئوية
Aristotle’s three laws of thought	قوانين أرسطو الثلاثة للفكر
arithmetic	علم الحساب
arithmetic progression	التوالي الحسابي
arithmetic using squares	الحساب باستخدام المربعات
asymptotes	خطوط التقارب
atlas of Lie groups,	أطلس مجموعات لاي
attracting cycles	الدورات الجاذبة
Aumann’s agreement theorem	نظرية الاتفاق لأومان
automated theorem proving	إثبات النظريات آليًا
axiom of choice	مسلمة الاختيار
axiomatic set theory	نظرية المجموعات البديهية
axiomatizing predicates	مسندات النسق المسلماتي

axioms of Peano arithmetic	مسلمات بيانو الحسابية

B

bald man paradox	مفارقة الرجل الأصلع
Banach-Tarski paradox	مفارقة باناخ-تارسكي
barber paradox	مفارقة الحلاق
bases	الأساسات
basic logic	المنطق الأساسي
basics,	الأساسيات
Bayes' theorem	مبرهنة بايز
Bayesian inference	الاستدلال البايزي
Bayesianism	وجهة النظر البايزية
Beal's conjecture	حدسية بيل
Bell numbers	أعداد بل
Benford's law	قانون بينفورد
Bernoulli distribution	توزيع برنولي
Bertrand's postulate	مسلمة برتراند
beyond propositional logic	ما وراء المنطق الافتراضي
Bézout's lemma	متطابقة بوزو
biangles	زوايا ثنائية
BIDMAS	الحروف الأولية للعمليات مرتبة حسب ترتيب أولويتها
bifurcations	التشعبات
binary	ثنائي
Binet's formula	صيغة بينيت
binomial coefficients	معاملات ذات الحدين
binomial distribution	توزيع ذات الحدين

binomial theorem	مبرهنة ذات الحدين
binomial trials	تجارب ذات الحدين
Birch and Swinnerton-Dyer conjecture	حدسية بيرخ وسوينارتون-داير
birthday problem,	مسألة يوم الميلاد
birthday theorem	مبرهنة يوم الميلاد
bisecting an angle	تنصيف زاوية
bisecting a line	تنصيف خط
black holes	الثقوب السوداء
blue-eyed suicides	انتحار ذوي العيون الزرقاء
blue-eyed theorem	مبرهنة ذوي العيون الزرقاء
bodies with constant acceleration	الأجسام المتحركة تحت تأثير عجلة ثابتة
bodies with constant displacement	الأجسام ذات الإزاحة الثابتة
bodies with constant velocity	الأجسام المتحركة بسرعة منتظمة
boundary conditions	الشروط الحدية
Bowers' operators	معاملات باورز
Boyer's square of squares	مربع الأعداد المربعة لبوير
brachistochrone problem	مسألة أقصر وقت
brackets	الأقواس
Brahmagupta's zero	صفر براهاماجوبتا
Brouwer's fixed point theorem	مبرهنة النقطة الثابتة لبراور
Brownian motion	الحركة البراونية
Brun's constant	ثابت برون
building waveforms	تكوين الشكل الموجي
butterfly effect	تأثير الفراشة

C

calculus of the natural logarithm	حساب تفاضل وتكامل اللوغاريتم الطبيعي
calculus of power series	حساب تفاضل وتكامل متسلسلات القوى
Cayley tables	جدول كايلي
Cantor dust	غبار كانتور
Cantor’s diagonal argument	حجة كانتور القطرية
Cantor’s theorem 275	مبرهنة كانتور
Cantor’s uncountability of transcendental numbers	مبدأ عدم قابلية الأعداد السامية للعد لكانتور
cardinal numbers	الأعداد الأساسية
cardinal trichotomy principle,	مبدأ التقسيم الثلاثي للأعداد الأساسية
Cartesian coordinates	الإحداثيات الديكارتية
Cartesian geometry	الهندسة الديكارتية
cartographic projections	المساقط الخرائطية
casting out nines	إهمال الرقم تسعة ومضاعفاته
Catalan’s conjecture(Mihaˇ ilescu’s theorem)	حدسية كاتلان
catastrophe theory	نظرية الكارثة
categorical sentences	الجمل الفئوية
category theory	نظرية الفئات
catenary	السلسال
Cauchy-Schwarz inequality	متباينة كوشي-شفارز
central limit theorem	مبرهنة الحد المركزية
centres of triangles	مراكز المثلث
chain rule	قاعدة السلسلة
proof of the chain rule	إثبات قاعدة السلسلة
Chaitin’s Ω	الثابت أوميجا لشاتين
chaos	الفوضى

chaos versus randomness	الفوضى مقابل العشوائية
chaotic systems	الأنظمة الفوضوية
checkers is solved	التوصل إلى حل لعبة الداما
Chen’s theorem 1	مبرهنة تشين الأولى
Chen’s theorem 2	مبرهنة تشن الثانية
Chen’s theorem	مبرهنة شين
Chinese postman problem	مسألة ساعي البريد الصيني
Chinese remainder theorem	مبرهنة الباقي الصينية
chiral knots	العُقد اللا انطباقية
Church’s thesis	أطروحة الكنيسة
circle formulas	صيغ الدائرة
circles	دوائر
classification of closed surfaces	تصنيف السطوح المغلقة
classification of finite simple groups,	تصنيف المجموعات المنتهية البسيطة
classification of simple Lie groups,	تصنيف مجموعات لاي
classification theory	نظرية التصنيف
classifications	تصنيفات
Clay Institute millennium problems	مسائل ألفية معهد كلاي
coastline problem,	مسألة السواحل
Cobham’s thesis	أطروحة كوبهام
coincidence	المصادفة
Collatz conjecture	حدسية كولاتز
combinations	التوافيق
combinatorics	التوافقيات
common factors and expanding brackets	العوامل المشتركة وفك الأقواس
common knowledge	المعرفة العامة

completing the square	إكمال المربع
complex analysis	التحليل المركب
complex exponentiation	رفع الأعداد إلى قوى مركبة
complex Fourier series	متسلسلة فورير المركبة
complex functions	الدوال المركبة
complex numbers	الأعداد المركبة
complex powers	القوى المركبة
complexity classes	فئات التعقيد
complexity theory	نظرية التعقيد
compound interest	الفائدة المركبة
compound polyhedra	المجسمات ثلاثية الأبعاد المركبة
computability	المحاسبية
computability theory	نظرية المحاسبية
computable real numbers	الأعداد الحقيقية القابلة للحساب
computably enumerable sets	حساب المجموعات المرقمة
computational mathematics	رياضيات الحوسبة
computers 309	الكمبيوتر
conditional probability 330	الاحتمال الشرطي
conic sections	القطوع المخروطية
conservation of kinetic energy	بقاء طاقة الحركة
conservation of momentum	بقاء كمية التحرك
constants of integration	ثوابت التكامل
constellations of primes	كوكبة الأعداد الأولية
constructible numbers	الأعداد القابلة للإنشاء
constructible polygons	مضلعات قابلة للإنشاء
constructing an equilateral triangle	إنشاء مثلث متساوي الأضلاع

constructing parallel lines	إنشاء خطوط متوازية
constructing a square root	إنشاء جذر تربيعي
constructing squares and pentagons	إنشاء مربعات وأشكال خماسية
constructive mathematics 316	الرياضيات البنائية
constructivism	البنائية
continued fractions	الكسور المستمرة
continuity	الاستمرارية
continuous functions	الدوال المستمرة
continuous interest	الفائدة المستمرة
continuous probability distributions	التوزيع الاحتمالي المتصل
continuum hypothesis	فرضية الاستمرار
contrapositive	المكافئ العكسي
convergence	التقارب
converging and diverging sequences	المتسلسلات المتقاربة والمتباعدة
converse	عكسي
convex quadrilaterals	الأشكال الرباعية المحدبة
convexity	التحدب
Conway's orbifolds	كونواي أوربيفولد (هو مصطلح صاغه العالم ثورستون في سياق هندسة المتشعبات الثلاثية https://en.wikipedia.org/wiki/Orbifold)
correlation	الارتباط
cosecant, secant and cotangent	قاطع التمام، والقاطع، وظل التمام
law of cosines	قانون جيوب التمام
Count Buffon's needle	إبرة الكونت بوفون
countable infinities	اللانهايات القابلة للعد
counterexamples	الأمثلة المضادة
cross product	الضرب الاتجاهي

cryptanalysis	تحليل الشفرات
cryptography	التشفير
cubic equations	معادلات تكعيبية
cubic formula	صيغ تكعيبية
cumulative frequency	التردد التراكمي
curl	معامل الدوران
curves and surfaces	المنحنيات والسطوح
curves	المنحنيات
cycle notation	رمز الدورة
cyclic quadrilaterals	الأشكال الرباعية الدائرية
cycloids	الدويريات

D

De Broglie relations	علاقات دي براولي
De Moivre's theorem	مبرهنة ديموافر
De Morgan's laws	قوانين ديمورجان
de Polignac's conjecture	حدسية دو بوليجناك
Deep Blue	العملاق الأزرق (ديب بلو)
defence attorney's fallacy,	مغالطة محامي الدفاع
definite integrals	التكاملات المحدودة
degree of a vertex	درجة الرأس
derivative	المشتقة
derivative song	أغنية المشتقة
derived category,	الفئة المشتقة
Desargues' theorem	مبرهنة ديساركو
determinants	المحددات

developable surfaces	السطوح القابلة للبسط
difference of two squares	الفرق بين مربعين
differentiability	قابلية التفاضل
differential calculus	حساب التفاضل
differential equations	المعادلات التفاضلية
differential geometry	الهنسة التفاضلية
differential topology	الطوبولوچيا التفاضلية
differentiating from first principles	التفاضل بالمبادئ الأولية
digital radio	الراديو الرقمي
dimension	بُعد
dinner party problem,	مسألة حفل العشاء
Diophantine equations	المعادلات الديفونتية
Diophantine geometry	الهندسة الديفونتية
Diophantus' *Arithmetica*	أريثماتيكا (مجموعة كتب للعالم ديوفانتوس)
Dirichlet's theorem	مبرهنة دركليه
discrete geometry	الهندسة المتقطعة
discreteness and continuity	التقطع والاستمرار
displacement and velocity	الإزاحة والسرعة
distributed computing	الحوسبة الموزعة
distributed mathematics projects	مشاريع الرياضيات الموزعة
div	معامل التباعد
dividing complex numbers	قسمة الأعداد المركبة
divisibility by 2 and 4	قابلية القسمة على 2 و 4
divisibility by 3 and 9	قابلية القسمة على 3 و 9
divisibility by 6	قابلية القسمة على 6
divisibility by 7	قابلية القسمة على 7

divisibility by 8	قابلبة القسمة على 8
divisibility by 11	قابلبة القسمة على 11
divisibility by other primes	قابلبة القسمة على أعداد أولية أخرى
divisibility tests	اختبارات قابلية القسمة
division	القسمة
division by 0	القسمة على صفر
Dodgson's soriteses	أكوام دودسجون (Sorites مأخوذة من كلمة يونانية تعني الكومة)
domain and range	المجال والمدى
dot product	الضرب القياسي
double-slit experiment with extra measurements	تجربة الشق المزدوج بمزيد من القياسات
doubling the cube	مضاعفة المكعب
Dürer's magic square	مربع دورر السحري
dynamical systems	الأنظمة التحريكية

E

$E = mc2$	الطاقة= الكتلة مضروبة في مربع السرعة
E8	إحدى مجموعات لاي
eclipses of Io,	خسوف القمر آيو
Egyptian fractions	الكسو المصرية
Einsteinian frames of reference	إطارات آينشتاين المرجعية/ الإطارات المرجعية عند آينشتاين
Einsteinian spacetime	زمكان آينشتاين
Einstein's field equation	معادلة المجال لآينشتاين
electromagnetic fields	المجالات الكهرومغناطيسية
electroweak theory	نظرية القوة الإلكترونية الضعيفة
ellipses	القطع الناقص

ellipsoid	السطح الناقص / السطح الإهليلجي
elliptic curves	المحنيات الإهليلجية
elliptic geometry	الهندسة الإهليلجية
empiricism	التجريبية
empty set, ∅	المجموعة الخالية فاي
encoding sets in binary	مجموعات الترميز في نظام الأرقام الثنائي
energy is relative	الطاقة نسبية
enlargement	التكبير
enlargement and shearing	التكبير والقص
matrices	المصفوفات
entanglement	التشابك
Entscheidungsproblem	مسألة القرار
EPR paradox,	مفارقة إي بي آر
epsilon and delta	إبسلون و دلتا (رموز إغريقية)
equal and opposite reactions	ردود الفعل المتساوية والمتضادة
equal tangent theorem,	مبرهنة المماسات المتساوبة
equation of a straight line	معادلة الخط المستقيم
equations	معادلات
equilibrium	التوازن
equivalence of mass and energy	تكافؤ الكتلة والطاقة
equivalent fractions	الكسور المتكافئة
Erdo's numbers	أعداد إردوس
Erdo's-Straus conjecture	حدسية إردوس–شتراوس
error-correcting codes	أكواد تصحيح الخطأ
ETAOIN SHRDLU	عبارة ليس لها معنى، كانت تظهر في الجرائد عن طريق الخطأ
Euclidean geometry	الهندسة الإقليدية

Euclidean plane	المستوى الإقليدي
Euclid's *Elements*	كتاب العناصر لإقليدس
Euclid's postulates	مسلمات إقليدس
Euclid's proof of the infinity of primes	برهان لانهائية الأعداد الأولية لإقليدس
Euler bricks	قوالب طوب أويلر
Euler characteristic	مميز اويلر
Euler line	خط أويلر
Euler's fluid flow formula	صيغة أويلر لسريان الموائع
Euler's formula	صيغة أويلر
Euler's partition function	دالة التجزئة لأويلر
Euler's polyhedral formula	صيغة أويلر للمجسمات
Euler's product formula	صيغة حاصل الضرب لأويلر
Euler's trigonometric formula	صيغة أويلر المثلثية
evaluating definite integrals	حساب التكاملات المحدودة
evaluating indefinite integrals	حساب التكاملات غير المحدودة
even perfect numbers	عدد مثالي زوجي
every number is interesting, a proof that	إثبات أن جميع الأعداد مثيرة للفضول
law of the excluded middle	قانون الوسط المستبعد
existence	الوجود
exotic spheres	الكرات العجيبة
expectation and variance	التوقع و التباين
explosion	انفجار
exponential function,	الدوال الأسية
exponential growth	النمو الأسي
exponentiation	رفع الأعداد إلى قوى
extension problem	مسألة الفك

eyeball theorem	مبرهنة كرة العين

F

factor theorem	مبرهنة العامل
factorials	المضروبات
factorizing polynomials	تحليل كثيرات الحدود
factors and multiples	العوامل والمضاعفات
fair dice	حجر نرد منتظم
fallacy of probability inversion	مغالطة مقلوب الاحتمال
falling bodies	الأجسام الساقطة
false positives	الإيجابيات الخادعة
Fano plane,	مستوى فانو
Fermat primes	مقدمات فيرما
Fermat’s last theorem	مبرهنة فيرما الأخيرة
Fermat’s polygonal number theorem	مبرهنة العدد المضلعي لفيرما
Fermat’s primality test	اختبار فيرما لأولية الأعداد
Fermat’s two square theorem	مبرهنة مربعي فيرما
Fibonacci	فيبوناتشي
Fibonacci sequence	متسلسلة فيبوناتشي
Fibonacci spiral	حلزون فيبوناتشي
Fibonacci’s rabbits	أرانب فبوناتشي
‘field’ with one element	مجال ذو عنصر واحد
fields	المجالات
fields and flows	المجالات والسريان
Fields Medal	ميدالية فيلدز
finding Golomb rulers	إيجاد مساطر جولوم

finite fields	المجالات المحدودة
finite geometry	الهندسة المحدودة
finitism	التناهي
first digit phenomenon	ظاهرة الخانة الأولى من اليسار
flows	السريان
fluid dynamics	ديناميكا الموائع
fluid model	نموذج المائع
focus and directrix	البؤرة والدليل
forces of nature	قوى الطبيعة
forcing	الإجبار
formal systems	الأنظمة الشكلية
formalism	الشكلية
forming continued fractions	تكوين الكسور المستمرة
four colour theorem,	مبرهنة الألوان الأربعة
problem of four mice	مسألة الفئران الأربعة
Fourier analysis	تحليل فورير
Fourier series	متسلسلة فورير
Fourier transform,	تحويل فورير
Fourier's formulas	صيغ فورير
Fourier's theorem	مبرهنة فورير
fractal dimension	البعد الكسيري
fractals	الكسيريات
fractional powers	القوى الكسرية
Frege's logicism	المنطقانية عند فريجيه
frequency	التردد
frequency analysis	تحليل التردد

frequency tables	الجداول التكرارية
frequentism	التكرارية
Friedman's *TREE* sequence	متتالية الشجرة لفريدمان
frieze groups	مجموعات النسيج
frivolous theorem of arithmetic	المبرهنة في الحسابيات اللامعقولة
Froggy's problem	مسألة فروجي
functions	الدوال
functions as power series	الدوال في صورة متسلسلات قوى
fundamental theorem of algebra	المبرهنة الأساسية في الجبر
fundamental theorem of arithmetic	المبرهنة الأساسية في الحسابيات
fundamental theorem of calculus	المبرهنة الأساسية في حساب التفاضل والتكامل
fuzzy logic	المنطق الضبابي
fuzzy sets	المجموعات الضبابية

G

Galilean relativity	النسبية عند جاليليو
Galilean spacetime	زمكان جاليليو
Galileo's cannonballs	كرات مدفع جاليلو
Galois' theorem	مبرهنة جالو
Galois theory	نظرية جالو
gambler's fallacy	مغالطة المقامر
game theory	نظرية الألعاب
game-theoretic solutions	الحلول النظرية للألعاب
games and strategies	الألعاب والاستراتيجيات
games-playing machines	آلات لعب الألعاب
Gardner's logician	عالم منطق جاردنير

gauge groups	مجموعات القياس
Gauss’ heptadecagon	سباعي عشر جاوس
Gauss-Bonnet theorem	مبرهنة جاوس–بونيت
Gaussian curvature	انحناء جاوس
general relativity	النسبية العامة
generalization	التعميم
generalized binomial coefficients	معاملات ذات الحدين المعممة
generalized binomial theorem	مبرهنة ذات الحدين المعممة
generalized magic squares	المربعات السحرية المعممة
generalized Poincaré conjecture	حدسية بوانكاريه المعممة
generalized Riemann hypothesis	فرضية ريمان المعممة
geodesics	خطوط جيوديسية
geometric fixed points	النقاط الهندسية الثابتة
geometric progressions	المتواليات الهندسية
geometric series	متسلسلة هندسية
geometrization theorem for manifolds	مبرهنة التركيبات الهندسية لمتعددات الشعب
glide symmetry	التماثل الانزلاقي
Gödel’s first incompleteness theorem	مبرهنة عدم الاكتمال الأولى لجوديل
Gödel’s second incompleteness theorem	مبرهنة عدم الاكتمال الثانية لجوديل
Goldbach’s conjecture	حدسية جولدباخ
golden rectangle	المستطيل الذهبي
golden section in the arts	المقطع الذهبي وعلاقته بالفنون
golden section	المقطع الذهبي
Golomb rulers	مساطر جولوم
grad	معامل التدرج
gradient of a tangent	ميل المماس

gradients	الميل(التدرجات)
Graeco-Latin Squares	المربعات اليونانية اللاتينية
Graham’s number	رقم جراهام
graph theory	نظرية الرسم البياني
graphs	الرسوم البيانية
gravitational equivalence	تكافؤ الجذب
gravitational tides	جاذبية المد والجزر
gravity	الجاذبية
Green-Tao theorem	مبرهنة جرين –تاو
Grelling’s paradox	مفارقة جريلنج
Grothendieck’s Éléments de Géométrie Algébrique	عناصر غروثنديك في الهندسة الجبرية
group axioms	بديهيات المجموعة
group theory	نظرية المجموعة
groups	مجموعات
groups of matrices	مجموعات المصففوفات
Grover’s reverse phone book algorithm	خزارزمية عكس دليل الهاتف لجروفر

H

hadrons	الهادرونات
hailstone numbers	أعداد حبة البَرَد
hairy ball theorem	مبرهنة الكرة المشعرة
hairy tori and Klein bottles	الطارات المشعرة وزجاجات كلاين
Haken algorithm	خوارزمية هاكن
halting number K	Kعدد التوقف
halting problem	مسألة التوقف
Hamiltonian	معامل هامليتون

happy ending problem	مسألة النهاية السعيدة
Hardy-Littlewood conjecture, the first	حدسية هاردي- ليتلوود الأولى
Hardy-Littlewood conjecture, the second	حدسية هاردي- ليتلوود الثانية
harmonic series	متسلسلة توافقية
harmonic series diverges	تباعد المتسلسلة التوافقية
harmonics	نغمات توافقية
he knows that she knows that …	هو يعلم أنها تعلم أن …
heat equation, solutions to	حلول معادلة الحرارة
heat equation	معادلة الحرارة
Heesch's tile	تبليط هيسش
Heisenberg's uncertainty principle	مبدأ عدم التأكد لهايزنبرج
Heisenberg's uncertainty relations	علاقات عدم التأكد لهايزنبرج
hexadecimals	أرقام النظام الستعشري
hexagonal honeycomb conjecture (Hales' theorem 2)	حدسية أقراص العسل السداسية (مبرهنة هيل الثانية)
Higgs boson	بوزون هيجز
higher-dimensional spaces	الأفضية ذات الأبعاد الأعلى
higher-order differential equations	معادلات تفاضلية ذات رتب عليا
highest common factor	العامل المشترك الأعلى
Hilbert's 10th problem	مسألة هيلبرت العاشرة
Hilbert's problems	مسائل هيلبرت
Hilbert's program	برنامج هيلبرت
Hill's theorem	مبرهنة هيل
Hodge conjecture,	حدسية هودج
Hodge theory	نظرية هودج
Hodge's theorem	مبرهنة هودج
homogeneous coordinates	الإحداثيات المتجانسة

homotopy	مثلية التوضع
honeycombs and crystals	أقراص العسل والبلورات
how to draw a triangle	كيف ترسم مثلثًا
Hurwitz's theorem	مبرهنة هورويتز
hyperbolas	قطع زائد
hyperbolic geometry	هندسة القطع الزائد
hyperbolic geometry of light	الهندسية القطعية الزائدية للضوء
hyperbolic trigonometry	الحسابات المثلثية الزائدية
hyperboloids	السطوح الزائدة
hypercube	المكعب الفوقي/ الزائد
hypersphere packing	تعبئة الكرات في الأبعاد العليا
hypocycloids and epicycloids	الدويريات الفوقية والتحتية
Hypothesis H	فرضية إتش

I

imaginary numbers	الأعداد التخيلية
implicit differentiation	التفاضل الضمني
impossible sentence	الحكم المستحيل
inclusion-exclusion principle	مبدأ التضمين والإقصاء
indefinite integrals	التكاملات غير المحدودة
independence of the parallel postulate	استقلال مسلمة التوازي
independence results	استقلالية النتائج
independent events	الأحداث المستقلة
independent, identical random variables	المتغيرات العضوائية المتطابقة المستقلة
induction	الاستقراء
induction,proof by	البرهان بالاستقراء

inertial frames of reference	الاطارات القصورية المرجعية
infinitesimals	الكميات متناهية الصغر
inscribed angle theorem	مبرهنة الزاوية المحيطية
insoluble equations	معادلات غير قابلة للحل
inspiration and perspiration	الالهام وبذل الجهد والعرق
integer factorization problem	مسألة التحليل إلى عوامل صحيحة
integers	الأعداد الصحيحة
integrability	قابلية التكامل
integral calculus	حساب التكامل
integration	التكامل
integration by parts	التكامل بالتجزيئ
integration by substitution	التكامل بالتعويض
intermediate value theorem	مبرهنة القيمة المتوسطة
interquartile range	الانحراف الربيعي
intersecting chords theorem	مبرهنة الأوتار المتقاطعة
intersection	تقاطع
intuitionism	المنهج الحدسي
inverting matrices	معكوس المصفوفة
irrational numbers	الأعداد غير النسبية
irrationality of (root 2)	عدم نسبية جذر العدد 2
irregular polyhedra	المجسمات ثلاثسة الأبعاد غير المنتظمة
irregular tessellations	الفسيسفاء غير المنتظمة
isogonal polyhedra	المجسمات متساوية الزوايا
isometric maps of the earth	الخرائط المتساوية الأبعاد للأرض
isometries of the plane	تقايسات المستوى
isomorphisms	التماثل

J

Johnson solids	مجسمات جونسون
Jones polynomial	متعدد حدود جونز
Julia sets	مجموعات جوليا

K

Kakeya's conjecture	حدسية كاكيا
Kakeya's needle	إبرة كاكيا
Kelvin's conjecture	حدسية كلفن
Kepler conjecture (Hales' theorem 1)	حدسية كيبلر (مبرهنة هيل الأولى)
Kepler triangle	مثلث كيبلر
Kepler-Poinsot polyhedra	مجسمات كيبلر-بوينسوت ثلاثية الأبعاد
Khinchin's constant	ثابت كينتشن
kinetic energy	الطاقة الحركية
kinetic theory of heat	النظرية الحركية للحرارة
knight's tours	جولات جندي الشطرنج
knot invariants	ثوابت العُقدة
knot tables	جداول العُقدة
knot theory	نظرية العُقدة
Knuth's arrows	أسهم كانوث
Koch snowflake	(منحنى) ندفة ثلج كوخ
Kolmogorov complexity	تعقيد كولموجروف

L

L-functions	الدوال اللامية
Lagrange's four square theorem	مبرهنة المربعات الأربع للاجرانج

Landau's problems and the n2 + 1 conjecture	مسائل لانداو و حدسية 1 + n2
Langlands' number field conjectures	حدسيات لانجلاند لمجالات الأرقام
Langlands' program	برنامج لانجلاند
language of mathematics	لغة علم الرياضيات
Laplace's equation	معادلة لابلاس
Laplacian	معامل لابلاس
large cardinals	الأعداد الأساسية الكبيرة
large numbers	الأعداد الكبيرة
large numbers, law of	قوانين الأعداد الكبيرة
large primes	الأعداد الأولية
larger systems of equations	أنظمة معادلات أكبر
Latin squares	المربعات اللاتينية
Legendre's conjecture	حدسية لجاندر
Legendre's three square theorem	مبرهنة المربعات الثلاث لجاندر
length of a vector	طول المتجة
letters for numbers	الحروف بدلًا من الأرقام
liar paradox, the	مفارقة الكذاب
librarian paradox	مفارقة امين المكتبة
librarian's nightmare theorem	مبرهنة كاوبس أمين المكتبة
Lie groups	مجموعات لاي
limits of sequences	حدود المتسلسلات
Lindenmayer systems	أنظمة ليندنماير
linear Diophantine equations	المعادلات الدفتونية الخطية
linear equations	المعادلات الخطية
lines of rational length	خطوط الأطوال النسبية
Liouville's non-elementary integrals	تكاملات ليوفل غير الابتدائية

local and global geometry	الهندسة المحلية والعامة
logarithmic slide rules	مساطر الحاسبة اللوغارتيمية
logarithmic spirals	الحلزونات اللوغاريتمية
logarithms	اللوغاريتمات
laws of logarithms	قوانين اللوغاريتمات
logic gates	البوابات المنطقية
logic and reality	المنطق والواقع
logistic map	الخريطة اللوجستية
long division	القسمة المطولة
lowest common multiple	المضاعف المشترك الأصغر
Lucas-Lehmer test	اختبار لوكاس-ليهمر

M

magic cubes	المكعبات السحرية
magic knight's tours	جولات جندي الشطرنج السحرية
magic squares	المربعات السحرية
Mandelbrot set	مجموعة ماندلبرو
manifolds	المتشعبات/ متعددات الشعب
map colouring problem	مسألة تلوين الخريطة
Markov chains	سلاسل ماركوف
mass is relative	الكتلة نسبية
mathematical collaboration	التعاون في مجال الرياضيات
mathematical disciplines	الأنظمة الرياضية
mathematical knots	العُقد الرياضية
mathematics in the information age	علم الرياضيات في عصر المعلومات
mathematics as logic	الرياضيات والمنطق وجهان لعملة واحدة

mathematics and technology	علم الرياضيات والتكنولوجيا
Matiyasevich's theorem	مبرهنة ماتياسيفيتش
matrices	المصفوفات
matrices and equations	المصفوفات والمعادلات
maxima and minima	القيم العظمى والصغرى
Maxwell's equations	معادلات ماكسويل
mean	المتوسط
mean from frequency tables	حساب المتوسط باستخدام الجداول التكرارية
measurement paradox	مفارقة القياسات
median	الوسيط
Mersenne primes	أعداد مرسين الأولية
mex	الرقم المستبعد الأصغر
Michelson-Morley experiment	تجربة ميكلسون ومورلي
Minkowski spacetime	زمكان مينكوسكي
Möbius strip	شريط موبيوس
modal logics	المنطق الشكلي
mode and mid-range	المنوال ومتوسط المدى
model theoretic algebra	نموذج الجبر النظري
model theory	نظرية النموذج
models of Peano arithmetic	نماذج حساب بيانو
modular arithmetic	الحساب النمطي
modular forms	الأشكال النمطية
modularity theorem	مبرهنة النمطية
modulus and argument	المقدار والزاوية
modus ponens	قانون الاستلزام
moments	العزوم

momentum	كمية التحرك
monoalphabetic encryption	التشفير أحادي الحرف
monster	العملاق
Monty Hall problem	مسألة مونتي هول
multi-dimensional spheres	الكرات متعددة الأبعاد
multiplication	الضرب
multiplication by hand, column method	الضرب باستخدام اليد، طريقة العمود
multiplication by hand, table method	الضرب باستخدام اليد طريقة الجدول
multiplying complex numbers	ضرب الأعداد المركبة
multiplying fractions	ضرب الكسور
multiplying matrices	ضرب المصفوفات
multiplying negative numbers	ضرب الأعداد السالبة
multiplying probabilities	ضرب الاحتمالات
multiplying a vector by a matrix	ضرب متجة في مصفوفة
multivalued logic	المنطق متعدد القيم
mutually exclusive events	الأحداث المتنافية

N

n-dimensional honeycombs	أقراص العسل في الأبعاد التي عددها n
NAND, NOR, XOR and XNOR	بوابة ليس و، بوابة ليس أو، بوابة أو الاستثنائية، بوابة ليس أو الاستثنائية
Nash's equilibrium theorem	مبرهنة التوازن عند ناش
natural logarithm	اللوغاريتم الطبيعي
natural numbers	الأعداد الطبيعية
naturalness of 0	طبيعية العدد صفر
Navier-Stokes equations	معادلات نيفيه ستوك
Navier-Stokes problem	مسألى نيفيه ستوك

necessary and sufficient	ضروري وكاف
negative numbers	الأعداد السالبة
negative powers	القوى السالبة
nets	الشبكات
new models of set theory	نماذج جديدة من نظرية المجموعة
Newtonian mechanics	ميكانيكا نيوتن
Newton’s cubics	مكعبات نيوتن
Newton’s first law	القانون الأول لنيوتن
Newton’s inverse square law	قانون التربيع العكسي لنيوتن
Newton’s laws	قوانين نيوتن
Newton’s second law	القانون الثاني لنيوتن
Newton’s third law	القانون الثالث لنيوتن
Nim	لعبة نيم
nimbers	أعداد لعبة نيم
non-commuting operators	المعاملات غير الإبدالية
non-convex quadrilaterals	الأشكال الرباعية غير المحدبة
non-deterministic complexity classes	فئات التعقيد غير القطعية
non-deterministic Turing machines	آلات تورنج غير القطعية
non-Euclidean geometry	هندسة غير إقليدية
non-orientable surfaces	السطوح غير القابلة للتوجيه
non-simple continued fractions	الكسور المستمرة غير البسيطة
non-standard analysis	التحليل غير القياسي
non-standard models	النماذج غير القياسية
normal distribution	التوزيع الطبيعي
normal numbers	الأعداد العادية
not	ليس

NP-completeness	اكتمال NP
nth term of a sequence	الحد النوني للمتسلسلة
number systems	أنظمة الأعداد
number theory 54	نظرية الأعداد
numerical analysis 229	التحليل العددي

O

observables	المتغيرات الظاهرة
octonions	الثمانيات (نظام أعداد ثماني الأبعاد)
odd perfect numbers	الأعداد المثالية الفردية
one to one correspondence	تقابل أحادي
one-time pad	لوحة المرة الواحدة
1089 puzzle	لغز الرقم 1089
1089 theorem	مبرهنة الرقم 1089
optimal Golomb rulers	مساطر جولوم المثلى
oracles	نبوءات
orders of knowledge	رتب المعرفة
orientable surfaces	السطوح القابلة للتوجيه

P

P = NP question	مسألة P = NP
paper size	مقاس الورقة
parabolas	القطوع المكافئة
paraboloids	السطوح المكافئة
paraconsistent logic	المنطق غير المتسق
parallel lines	الخطوط المتوازية

parallel postulate	مسلمة التوازي
parallelogram law	قانون متوازي الأضلاع
partial derivatives	المشتقات الجزئية
partial differential equations	المعادلات التفاضلية الجزئية
partial differential equations, solutions of	حلول المعادلات التفاضلية الجزئية
partial differentiation	التفاضل الجزئي
partitions of integers	تجزيئات التكاملات
partitions of a set	تجزئة المجموعات
Pascal's triangle	مثلث باسكال
Peano arithmetic	حسابيات بيانو
Peano's space-filling curve	منحنى بيانو المالئ للفضاء
Pell equations	معادلات بيل
pen and paper puzzles	ألغاز الورقة والقلم
Penrose and Ammann tilings	تبليط بينروز وأمان
pentaflakes	مضلعات خماسية غير مكتملة
pentagonal tilings	التبليط الخماسي
perfect cuboids	متوازيات المستطيلات المثالية
perfect numbers	الأعداد المثالية
Perko pair	زوج بيركو
permutation groups	مجموع
permutations	مجموعات التبديل
perspective	المنظور
philosophies of mathematics	فلسفات علم الرياضيات
photons	القوتونات
Picard's theorem	مبرهنة بيكارد
Pick's theorem	مبرهنة بيك

pigeonhole principle	مبدأ برج الحمام
pi 's simple continued fraction	الكسر المستمر البسيط للعدد ط
place value and decimal notation	القيمة المكانية والتمثيل العشري
planar graphs	الرسوم البيانية المستوية
Planck constant	ثابت بلانك
Platonic solids	المجسمات الأفلاطونية
Platonism	الأفلاطونية
Plato's cave	كهف أفلاطون
plotting graphs	رسم الرسوم البيانية
Poincaré conjecture (Perelman's theorem)	حدسية بوانكاريه (مبرهنة بيرلمان)
Poincaré disc	قرص بوانكاريه
Poincaré group	مجموعة بورانكاريه
Poisson distribution	توزيع بواسون
Poisson processes	عمليات بواسون
polar coordinates	الإحداثيات القطبية
polar geometry	الهندسة القطبية
polyalphabetic encryption,codes and spelling mistakes	التشفير المتعدد للأحرف،و الأكواد، وأخطاء التهجئة
Pólya's random walks	السير العشوائي لبوليا
polychora	المجسمات رباعية الأبعاد
polygonal numbers	الأعداد المضلعية
polygons	المضلعات
polygons and polyhedra	المضلعات والمجسمات ثلاثية الأبعاد
polyhedra	المجسمات ثلاثية الأبعاد
polyhedral duality	ازدواجية المجسمات
polyhedral formulas on surfaces	صيغ المجسمات على السطوح
polymath projects	المشروعات متعددة الأفراد في مجال الرياضيات

polynomial rings	الحلقات كثيرة الحدود
polynomials	كثيرات الحدود
possible worlds	العوالم الممكنة
potential energy	طاقة الوضع
power series	متسلسلات القوى
power sets	مجموعات القوى
powers	القوى
laws of powers	قوانين القوى
predicate calculus	حساب القضايا
predicates	قضايا
prehistory of zero	ما قبل تاريخ العدد صفر
primality testing	اختبار أولية الأعداد
prime counting function	دالة عد الأعداد الأولية
prime fields	مجالات الأعداد الأولية
prime gaps	فجوات الأعداد الأولية
prime number theorem 1	المبرهنة الأولى للعدد الأولي
prime number theorem 2	المبرهنة الثانية للعدد الأولي
prime numbers	الأعداد الأولية
Principia Mathematica	مجلد المبادئ الرياضية للفلسفة الطبيعية
prisms and antiprisms	المنشور والمنشور المضاد
prisoner's dilemma	معضلة السجينين
probability	احتمال
probability distributions	توزيعات الاحتمال
product rule	قاعدة حاصل الضرب
proof of the product rule	برهان قاعدة حاصل الضرب
profit and debt	الربح والدين

projective geometry	الهندسة الإسقاطية
proof	برهان
proof by contradiction	البرهان بالتناقض
proof that 1=2	إثبات أن 1=2
proof theory	نظرية البرهان
proof-checking software	البرامج التي تفحص صحة البراهين
propositional calculus	حساب اقتراحي
prosecutor’s fallacy	مغالطة المدعي العام
public keys	المفاتيح العامة
puzzles and perplexities	الألغاز والأحاجي
Pythagoras’ theorem	مبرهنة فيثاغورث
Pythagoras’ theorem, proof of	برهان مبرهنة فيثاغورث
Pythagorean triples	ثلاثيات فيثافورس

Q

quadratic curves	المنحنيات التربيعية
quadratic equations	المعادلات التربيعية
quadratic formula	الصيغ التربيعية
quadratic reciprocity law	قانون التبادل التربيعي
quadratic systems	الأنظمة التربيعية
quadric surfaces	السطوح التربيعية
quantized observables	المتغيرات الظاهرة المكماة
quantum chromodynamics	الديناميكا اللونية الكمية
quantum complexity classes	فئات التعقيد المكماة
quantum computing	الحوسبة المكماة
quantum double-slit experiment	تجربة الشق المزدوج الكمية

quantum electrodynamics	الكهروديناميكا الكمية
quantum field	المجال الكمي
quantum field theory	نظرية المجال الكمي
quantum mechanics	ميكانيكا الكم
quantum momentum	كمية التحرك المكماة
quantum systems	الأنظمة المكماة
quark confinement	احتجاز الكواركات
quarks	الكواركات
quartic equations	معادلات من الدرجة الرابعة
quartic formula	صيغة الدرجة الرابعة
quasicrystals	أشباه البلورات
quaternions	رباعيات
quintic equations	معادلات من الدرجة الخامسة
quotient rule	قاعدة خارج القسمة

R

radians	الزوايا نصف القطرية/ التقدير الدائري
radioactive decay	التحلل الإشعاعي
Ramanujan's approximate	تقريب رامانجن
circle-squaring	تربيع الدائرة
Ramanujan's continued fractions	كسور رامانجن المستمرة
Ramsey numbers	أعداد رامزي
Ramsey theory	نظرية رمزي
Ramsey's theorem	مبرهنة رامزي
random real numbers	أعداد حقيقية عشوائية
random variables	متغيرات عشوائية

randomness	العشوائية
law of rare events	قانون الأحداث النادرة
rates of change of position	معدلات تغيير الموضوع
rational numbers	الأعداد النسبية
rational numbers have gaps	الأعداد النسبية بينها فجوات
rational points on varieties	النقاط النسبية على متنوعة جبرية
rational solutions of elliptic curves	الحلول النسبية للمنحنيات الإهليلجية
rationalizing the denominator	تخليص المقام من الجذور
ratios of Fibonacci numbers	نسب أرقام فيبوناتشي
problem of ray	مسألة الشعاع
real and imaginary parts	الأجزاء الحقيقية والتخيلية
real line	خط الأعداد الحقيقية
real numbers	الأعداد الحقيقية
real projective plane and Klein bottle	المستوى الإسقاطي الحقيقي و زجاجة كلاين
reciprocals	مقلوبات/ تبادلات
recurring decimals	كسر عشري دائر
problem of the reflected ray	مسألة الشعاع المنعكس
reflection matrices	مصفوفات الإنعكاس
regular polytopes	متعددات الأبعاد المنتظمة
regular tessellations	الفسيسفاء المنتظمة
relativistic quantum theory	النظرية الكمية النسبية
representation theory	نظرية التمثيل
representations of numbers	تمثيل الأعداد
reverse mathematics	علم الرياضيات المعكوسة
Riemann hypothesis	فرضية ريمان
Riemann zeta function	دالة زيتا ريمان

Riemann’s rearrangement theorem	مبرهنة
Riemann’s zeroes	أصفار ريمان
right angles	زويا قائمة
right-angled triangles	مثلثات قائمة الزاوية
rings	حلقات
roots	جذور
roses	زهور
rotation matrices	مصفوفات الدوران
roulettes	العجلات الدوارة
RSA factoring challenge	تحدي تفكيك خوارزمية آر اس إيه
ruled surfaces	السطوح المسطرة
ruler and compass constructions	الإنشاءات باستخدام المسطرة والفرجار
Russell’s paradox	مفارقة راسل

S

sample variance	اختلاف العينة
scalar and vector functions	الدوال المقياسية والمتجهة
scale factors	عوامل التحجيم
Schanuel’s conjecture	حدسية سكانويل
schemes	المخططات
Schrödinger’s cat	قطة شرودنجر
Schrödinger’s equation	معادلة شرودنجر
science of deduction	علمم الاستنتاج
second derivative test	اختبار المشتقة الثانية
second derivative	المشتقة الثانية
second partial derivatives	المشتقات الجزئية الثانية

self-similarity	التشابه الذاتي
semiregular tessellations	الفسيسفاء شبه المنتظمة
separating the variables	فصل المتغيرات
sequences	متسلسلات
series	متسلسلة
Sessa's chessboard	رقعة شطرنج سيسا
set membership	مجموعة العضوية
set theory	نظرية المجموعات
sets	مجموعات
seven bridges of Königsberg	جسور كونيغسبرج السبعة
Shannon's information theory	نظرية المعلومات لشانون
short division	القسمة القصيرة
shortest path problem	مسألة أقصر مسار
sieve of Eratosthenes	غربال إراتوستينس (خوارزمية)
similarity	التشابه
simple connectedness	الاتصال البسيط
simple groups	المجموعات البسيطة
simultaneous equations	معادلات آنية
sine, cosine and tangent	الجيب، جيب التمام، والظل
sine waves	موجات جيبية
law of sines	قانون الجيوب
six exponentials theorem	مبرهنة الأسس الستة
size of the union	حجم الاتحاد
sketch of the proof of the fundamental theorem of calculus	رسم برهان المبرهنة الأساسية في حساب التفاضل والتكامل
slide rules	المساطر المنزلقة

smooth functions	الدوال الناعمة
smooth Poincaré conjecture in four dimensions	حدسية بوانكاريه الناعمة في الأبعاد الرباعية
sociable numbers	الأعداد الأنيسة
solution spaces	أفضية الحل
solvable groups	مجموعات قابلة للحل
space is relative	الفضاء نسبي
spacetime	الزمكان
Spearman’s rank correlation	ارتباط الرتب لسبيرمان
special relativity	النسبية الخاصة
speed of light	سرعة الضوؤ
splitting an event	تجزئة الحدث
sports contests and experiment design	المباريات الرياضية وتصميم التجارب
Sprague-Grundy theorem	مبرهنة سبراج–جراندي
squaring brackets	أقواس التربيع
squaring the circle	تربيع الدائرة
standard derivatives	المشتقات القياسية
standard form	الصيغة القياسية
standard model of particle physics	النموذج القياسي لفيزياء الجسيمات
star polygons and star polyhedra	المضلعات النجمية و والمجسمات النجمية
statistics	الإحصاء
step functions	دوال الخطوة
stereographic projection	الإسقاط المجسمي
Stewart toroids	ملفات ستيوارت الحلقية
stochastic processes	عمليات تصادفية
strange attractors	الجواذب الغريبة
stringed instruments	الآلات الوترية

stupidity tests	اختبارات الغباء
subsets	مجموعات فرعية
subtraction	الطرح
subtraction by hand	الطرح باستخدام اليد
successes and outcomes	النواتج والنواتج الناجحة
Sudoku	لعبة سودوكو
Sudoku clues	مفاتيح حل سودوكو
summing powers	قوى جمع
sums and products	المجموع والمحصلات
sums of two squares	مجموع مربعين
Sundman's series	متسلسلة سندمان
surds	الأعداد الصماء
surfaces of higher degree	السطوح ذات الأبعاد الأعلى
surfaces of revolution	سطوح دورانية
syllogisms	القياس المنطقي
symmetries and equations	التماثلات والمعادلات
symmetry	التماثل
symmetry groups	مجموعات التماثل
symmetry groups of spacetime	مجموعات تماثل الزمكان
syntax and semantics	البناء والدلالات

T

tangent spaces	الأفضية المماسة
Tarski's geometric decidability theorem	مبرهنة القدرة على إتخاذ القرارات الهندسية لتارسكي
tautochrone problem	مسألة الوقت الموحد
tautology and logical equivalence	التكرار والمكافئ المنطقي

Taylor's theorem	مبرهنة تايلور
tessellations	الفسيفساء(التبليط)
theorem of Thales	مبرهنة طاليس
theory and experiment	النظرية والتجربة
Theorema Egregium	مبرهنة إجريجو
things that don't exist	الأشياء غير الموجودة (اللاموجودات)
36 officers problem	مسألة ال 36 ضابط
three-body problem	مسألة الثلاثة أجسام
three-cycle theorem	مبرهنة الدورات الثلاثة
Thue's circle packing	التعبئة الدائرية لثو
time is relative	الزمن نسبي
time-like,space-like and light-like paths	المسارات شبه الزمانية ، وشبه المكانية وشبه الضوئية
to switch or not to switch?	هل ينبغي تبديل الاختيار أم لا؟
topology	طوبولوچيا (دراسة المجموعات المتغيرة التي لا تتغير طبيعة محتوياتها)
towers of exponentials	أبراج الأسس
Trachtenberg arithmetic	حساب تراشتنبيرج
transcendental number theory	نظرية الأعداد المتسامية
transcendental numbers	الأعداد المتسامية
transfer principle	مبدأ النقل
transformation matrices	مصفوفات التحويل
transformations	التحويلات
translational symmetry	التماثل الانتقالي
travelling salesman problem	مسألة البائع المتجول
triangle inequality	متباينة المثلث
triangles	مثلثات
triangular numbers	أعداد مثلثية

triangulation	التثليث
trigonometric identities	الخواص المثلثية
trigonometric values	القيم المثلثية
trigonometry	حساب المثلثات
trisecting an angle	تثليث زاوية
trisecting an angle using a ruler, compass, and Archimedean spiral	تثليث الزاوية باستخدام المسطرة والفرجار وحلزون أرشميدس
trisecting a line	تثليث الخط
law of truly large numbers	قانون الأقام الكبيرة حقًا
truth tables	جداول الحقيقة
Turing degrees	درجات تورنج
Turing machines	آلات تورنج
twin prime conjecture	حَدْسِيَّةِ العددانِ الأوليَّانِ التوأم
two-body problem	مسألة الجسمين
type theory	نظرية النمط

U

ultrafinitism	التناهي الفائق
uncertain reasoning	المنطق غير المؤك\
uncertainty and paradoxes	عدم التأكد والمفارقات
uncomputable equations	المعادلات غير القابلة للحوسبة
uncomputable real numbers	الأعداد الحقيقية غير القابلة للحوسبة
uncomputable tilings	التبليط غير القابل للحساب
uncountability of the realnumbers	عدم قابلية الأعداد الحقيقية للعد
uncountable infinities	المالانهاية غير المعدودة
unexpected hanging	الشنق غير المتوقع

uniform distribution	التوزيع المنتظم
uniform polychora	المجسمات المنتظمة رباعية الأبعاد
uniform polyhedra	المجسمات المنتظمة ثلاثية الأبعاد
union	اتحاد
uniqueness	التفرد
unknotting problem	مسألة حل العُقد

V

value of the golden section	قيمة المقطع الذهبي
vanishing points and vanishing lines	نقط التلاشي وخطوط التلاشي
variables and substitution varieties	المتغيرات وتعوضيات المتنوعات
vector calculus	حساب المتجهات
vector fields	الحقول المتجهة
vectors	متجهات
vectors and matrices	المتجهات والمصفوفات

W

wallpaper groups	مجموعات ورق الحائط
Waring's problem	مسألة ويرنج
wave functions and probability amplitudes	الدوال الموجية وسعات الاحتمال
wave-particle duality	إزدواجية الموجة-الجسيم
waves	الموجات
Weaire-Phelan foam	رغوة وير-فيلان
Weil conjectures (Deligne's theorem)	حدسيات ويل(مبرهنة ديلين)
Weil's zeta function	دالة زيتا لويل
what bees don't know	ما لا يعرفه النحل

what comes next?	ماذا يأتي بعد ذلك؟
what mathematicians do	ما يقوم به علماء الرياضيات
when are two things the same?	متى يكون شيئان الشيء نفسه؟
Wiles' theorem	مبرهنة وايلز

Y

Yang-Mills problems	مسألة- يانج-ميل
Yang-Mills theory	نظرية يانج-ميل
Young's double-slit experiment	تجربة الشق المزدوج لينج

Z

Zeno's dichotomy paradox	مفارقة زينون للانقسام
Zeno's paradoxes	مفارقة زينون
Zermelo-Fraenkel set theory	نظرية مجموعات زيرميلو-فرينكل

تم بحمد الله