الأعداد

ما هي الرياضيات؟ إن علم الأعداد هو التخمين الأول لكثير من الناس، وهذا ليس خطأ، ومع ذلك تطورت نظرتنا للأعداد مع مرور الوقت. اليوم هناك العديد من أنظمة العد المختلفة التي جديدة بالاهتمام. ولكل منها خصائص، وأسرار الخاصة بها. وهذا الموضوع ما يسمى بنظرية الأعداد. الأعداد الطبيعية التي تضم ..... ,5 ,4 ,3 ,2 ,1 ,0.

أول شيء يجب القيام به مع هذه الأعداد هو إجراء العمليات الحسابية بينها من خلال الجمع والطرح والضرب والقسمة. هناك عدة طرق لمعرفة حساب النتائج. التي تعتمد على النظام العشري، والقيمة المكانية على مستوى

أعمق، مثل أسئلة حول الأعداد الطبيعية التي تندرج إلى فئتين رئيستين. الأولى تتعلق بالأعداد الأولية. الذرات التي يتم بنائها كل الآخرين حتى اليوم. ويحيى دراسة أسرارها وتشمل الأسئلة المفتوحة الكبرى في مشاكل Landau's وافتراضية Riemann

أما الفئة الثانية، فهي نظرية الأعداد معادلة Diophantine. وهي ترمز للعلاقات بين الأعداد الصحيحة. حدسية Catalan (في نظرية Mihaileseus)، على سبيل المثال يقول أن 8، 9 فقط عددين موجبين، وسوف تجد من أي وقت مضى أن كلاً من العددين يجلسا بجانب بعضها البعض.

الأساسيات THE BASICS

الجمع (الإضافة) Addition

اليوم ومنذ آلاف السنين، نستخدم الأرقام كمبدأ أساسي للعدد، ويتضمن العد الإضافة (الجمع)؛ فعند إدراج عنصر (بند) جديد في مجموعتك أنت تحتاج لإضافة واحد إلى مجموعك، بالإضافة إلى ذلك والأكثر عمومية تمتد هذه ماذا يحدث إذا قمت بإضافة ثلاثة عناصر (بنود) لمجموعة من خمسة؟ هناك طرق فعاله لإضافة أعداد كبيرة تتطلب تطوير العددية (الحسابية) (انظر إلى الجمع بإعادة التسمية) فعلماء الرياضيات لديها العديد من المصطلحات للجمع: الجمع هو: المجموع عند إضافة كل شيء معا. ويتم إضافة المزيد والمزيد من الأعداد معا، وهو ما يسمى بالمتسلسلة اليوم، من الجانب الآخر فعملية الجمع (الإضافة) تتجاوز أعداد واضحة إلى موضوعات أكثر حيوية مثل كثيرات الحدود والعوامل.

الطرح Subtraction

المنظور الرياضي للطرح قد يبدو غريبا من أول وهلة منذ فجر الأرقام السالبة. كل عدد مثل 1 لديه المقابل له أو المعكوس الجمعي (–10) ويصرف هذا عند إضافة الاثنين معا (العدد ومعكوسه) يلغي كل منهما الآخر، ليكون الناتج صفر. ومن ثم عملية الطرح من خطوتين.

فمثلاً لحساب 20-9 لأول مرة فإننا نستبدل 9 مع المعكوس الجمعي لها (–9) وبالتالي إضافة العدد 20 ، (–9) حتى تكون 20 – 9 هي اختصار لـ 20 + (90) وهذا الأمر يكون في الغالب مزعجاً للأطفال، لماذا الترتيب في الجمع (الإضافة) غير ضروري مثل (3+7=7+3) لكن في الطرح الترتيب ضروري $(3 - 7 \neq 7 - 3)$ ؟

عندما نفهم أن الإضافة أمر لا يهم بعد في كل الأحوال 3+ (–7) = (–7) +3 .

إذاً كيف يمكنك طرح الأرقام السالبة مثل –7- (–4)؟ تطبق نفس القواعد، لأول مرة نستبدل (–4) مع معكوسها الجمعي 4 ثم قم بإضافة –7 +4=–3.

الضرب Multiplication

الضرب هو على هيئة الجمع المتكرر، فمثلاً إذا كان كل في أسرة ما معه اثنين من الخرز وهناك أربعة أشخاص في هذه الأسرة. كم عدد الخرز هناك تماما؟ الإجابة 2+2+2+2 أو 2×4 بصورة مختصرة ومن هذا التعريف، فإنه من الواضح أن (ن×م) بالطبع يساوي (م×ن) وهذا حقيقي كما يمكن أن يرى في مجموعة مستطيلة من (m) الأعمدة و (n) الصفوف.

إذا كنت تعد هذه كصفوف (n) وأعمدة (m) من الخرز لكل منهما تحصل على مجموعة. (nxm) ولكن هذا هو (mxn) عندما تنظر إليها على أنها كصفوف m وأعمدة n . فإن ذلك المجموع لا يمكن أن يعتمد على طريقة العد لدينا، وهذه يجب أن يكون مساوى لمصطلح الضرب، والكلمة الانجليزية "of" أو "من" على سبيل المثال.

3 مجموعات من، 7 يكون الناتج 21 هذا لا يزال صالحا للكسور، مثل النصف من ستة هو ثلاثة وتكتب $\frac{1}{2} \times 6 = 3$.

والشائع أن نخلط بين من يعني القسمة هنا الرمز الأكثر شيوعا للضرب هو " × " على الرغم أن علماء الرياضيات وغالب ما يفضل ". " أو حتى أي شيء على الإطلاق 3. س تعني 3 س يعني 3×س لضرب الكثير من الأرقام عندما نستخدم الضرب (لاحظ ناتج الضرب والجمع).

بما أن 3×5=15، ونحن نقول أن 3 هو عامل عوامل العدد 15، و 15 من مضاعفات العدد 3. العوامل الأولية للعد هي البناء الأساسي للعدد، وهو ما أكدته النظرية الأساسية في الحساب.

المجموع وحاصل الضرب Sums and products

افترض أنك تريد إيجاد مجموع الأرقام من 1 إلى 100 فإن كتابة قائمة الأعداد الصحيحة سوف تستغرق الكثير من الوقت والورق، لذلك ابتكر علماء الرياضيات الاختزال واستخدموا الرمز اليوناني سيجما لإيجاد ناتج الجمع.

$$\sum_{j=1}^{100} ز$$

الأرقام على أعلى وأسفل سيجما توضح المدى ز يبدأ في 1 ويأخذ كل قيمة تباعا حتى بعد الصيغة سيجما فإننا نقوم بالجمع.

بما أن في هذه الحالة نحن تجمع أرقام واضحة فقط، وبالتالي إذا أردنا جمع أول 100 مربع كامل فإننا نكتب

$$\sum_{j=1}^{100} ز = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots\cdots\cdots + 100^2$$

إذا كنا نريد أن نضاعف بدلا من الجمع ونستخدم الرمز اليوناني "بي" "Pi" وذلك لإيجاد حاصل الضرب

$$\prod_{j=1}^{100} ز = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots\ldots.. \times 100$$

(هذا يعرف أيضاً باسم 100! (مضروب 100))

القوى (الأسس) Powers

مثلما الضرب هو تكرار الجمع (3×4=3+3+3+3) لذلك الأسس أو القوى يكون الضرب المتكرر $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$ حيث 3 هي القاعدة أو الأساس 4 هي القوة أو الأس بعض القوى لها أسماء خاصة بها مثل: مرفوع للقوة 2 تسمى تربيع، لأن لمربع طول ضلعه × سم فإن مساحته X^2 سم^2 (على سبيل المثال 16 تربيع لـ4)

وبالمثل مرفوع للقوة 3 تسمى تكعيب يمكننا أن نفهم X^n بمعنى 1 × X × X ×X× .... × n X من المرات، وهذا يوحى لنا أن $x^0 = 1 , x^1 = x$ وهذا الاصطلاح مقيد بدلا من النظريات العمية، والطلاب في كثير من الأحيان معارضون لذلك ويتصدون إلى أن x^0 ينبغي أن تساوي صفرا .

قوانين القوى The laws of powers

ماذا يحدث عندما تضرب القوى معا؟ إذا كان لدينا مفكوك $2^3 \times 2^4$ فإنه يصبح $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^7$ نلاحظ أن 4+3=7

وهذا المثال يوضح أول قانون للقوى

$$x^a \times x^b \times = x^{a+b}$$

بالنسبة للقانون الثاني للقوى نفرض أن $(5^2)^3 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^6$

الملاحظة المهمة أن 2×3=6 بشكل عام

$$(x^a)^b = x^{a \times b}$$

ويمكن أن تمتد الأسس (الضرب) للأسس السالبة ويمكن دراستها في بعض الدروس مثل الأعداد المركبة وقد تعتمد على الدالة الأسية.

القوى السالبة Negative powers

لإعطاء معنى للقوى السالبة مثل 10^{-2} فمن المنطقي أولا. أن ننظر إلى نمط القوى الموجبة، ثم نحاول تمديد القاعدة للحصول على أكبر قوة موجبة للعدد 10 وهي الحفاظ على الضرب في 10 فمثلا:

نبدأ بـ $10^1 = 10$ ثم الضرب في 10 مرة أخرى

فإننا نحصل $10^2 = 10 \times 10 = 100$ وبالضرب في 10 فإننا

نحصل على $10^3 = 10 \times 10 \times 10$ وهكذا

نحن نستطيع أن نغير هذه القاعدة رأسا على عقب إذا بدأنا مع $10^6 = 1000\,000$ ثم العد التنازلي للقوى للحصول على القوى الأقل كالآتي نقسم على 10 وهو $1000\,000 = 10^5 = 10^6 \div 10 = 100000 \div 10$ ثم نحصل على 10^4 عندما نقسم على 10 مرة أخرى وهكذا نعود إلى $10^1 = 10$ ولكن لا يوجد سبب للتوقف هنا. ولكي نصل إلى القوى الأقل $10^{\text{صفر}}$ تقسم مرة أخرى على 10 لذلك $1^{\text{صفر}} = 10^1 \div 10 = 1$ولو

استمرنا في القسمة فإننا نحصل على القوى السالبة

$$\frac{1}{10} = 10 \div 1 \quad = 10 \div 10^{\text{صفر}} = 10^{1-}$$

$$\frac{1}{1-} = 10 \div \frac{1}{10} \quad = 10 \div 10^{1-} = 10^{2-}$$

ويكون النمط كالآتي .... $10^{-n} = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10^n}$ (8 من المرات)

القوى السالبة لـ x تعرف بأنها المعكوس الضربي القوى الموجبة لـ x حيث = (x^{-n}) $(x^{-1})^n$

الجذور Roots

ما العدد الذي مربعه 16 ؟ بالطبع الإجابة 4. وبطريقة أخرى 4 4 هو الجذر التربيعي للعدد 16 بنفس الطريقة 3^3 تساوي للعدد 27 لذلك العدد 3 هو الجذر التكعيبي للعدد 27. بالمثل $2^5 = 32$ لذلك 2 هو الجذر الخامس للعدد 32 ويرمز للجذر $\sqrt{\ }$. لذلك $2 = \sqrt{32}°$، $\sqrt[3]{27} = 3$. بالنسبة للجذر التربيعي للعدد 2 ، $\sqrt{16}$=4. ويمكن كتابة الجذور على هيئة قوى كسرية.

القوى الكسرية Fractional powers

ما معنى القوى الكسرية؟ إذا كان 3^4 تعني أن 3 ضربت في نفسها 4 مرات لذلك $3^{\frac{1}{2}}$ تعني أن تكون 3 ضربت في نفسها $\frac{1}{2}$ مرة والتي لا تبدو صغيرة جدا، كما تبدو القوى السالبة مفهومة من خلال الدمج مع المعكوس (القوى الموجبة) والقوى الكسرية يمكن أن يكون لها معنى عندما تفسر على أنها جذور، فمثلا: $32^{\frac{1}{5}}$ له قيمة ما بالتالي يجب أن يحقق القانون الثاني للقوى

$$(x^a)^b = x^{axb}$$

خاصة $\left(32^{5\frac{1}{5}}\right) = 32^{5\times\frac{1}{5}} = 32^1 = 32$ وبالتالي $32^{\frac{1}{5}}$ هو العدد الذي إذا رفع إلى القوى الخامسة، فإن الناتج يكون 32 وهذا يجب أن يعني أن $32^{\frac{1}{5}} = \sqrt[0]{32} = 2$ بالمثل نحن نستطيع أن نكتب $27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$ وأيضا $16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$ وبصفة عامة $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$

ما معنى أن نعطي التعبير مثل $32^{\frac{4}{5}}$ ؟

القانون الثاني للقوى يساعدنا مرة أخرى حيث أن: $\left(32^{\frac{1}{5}}\right)^4 = 2^4 = 16$ بالمثل $27^{\frac{4}{3}} = 3^4 = 81$، وبصفة عامة $x^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{x})^m$

اللوغريتمات Logarithms

وهي مثل الطرح بالنسبة للجمع، والضرب بالنسبة للقسمة، كذلك اللوغاريتمات بالنسبة للقوى (الأسس) $2^3 = 8$ يمكن إعادة صياغتها مثل $_2$لو^8 $= 3$ واضح أن لوغاريتم 8 للأساس 2 يساوي 3. لتقييم $_3$لو81 فإننا نحتاج $3^{؟؟} = 81$ بالطبع الإجابة تكون 4.

يمكن إيجاد اللوغاريتمات لأي عدد موجب لا يساوي الواحد، ولكن هناك قاعدتين شائعتين بشكل خاص، لأن القوى 10 مناسبة لتمثيل الأعداد الضخمة، واللوغاريتم الذي أساسه 10 هو مفيد جدا لقياس ترتيب ضخامة العدد $_{10}$لو n هو تقريبا عدد الأرقام في التمثيل العشري N ويطلق على اللوغاريتم الذي أساسه e باللوغاريتم الطبيعي وهي الأكثر شيوعا في الرياضيات البحتة.

قوانين اللوغاريتمات The laws of logarithms

القانون الأول للقوى ينص على أن $x^a \times x^b = x^{a+b}$ القانون الأول للوغاريتمات المناظر له ينص على

$$\text{Log}(cd)=\text{log}c+\text{Log } d$$

(يجب أن تكون جميع اللوغاريتمات لها نفس الأساس) وللتحقق من ذلك نفرض أن $C = x^a$, $d = x^b$ ، من القانون الأول للقوى بأخذ اللوغاريتم بأننا نحصل على

$$a = \text{Log}_x c\,,\quad b = \text{Log}_x d \quad \rightarrow (1)$$

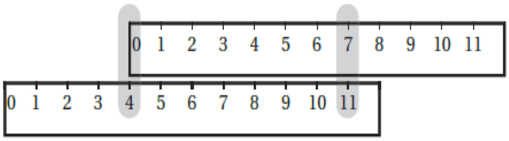
بما أن اللوغاريتمات لها نفس الأساس $cd = x^{a+b}$

لذلك $a+b=\text{Log } cd$ بالتعويض من [1]

القانون الثاني للوغاريتمات يناظر القانون الثاني للقوى لأي c و d

$$\text{Log } c^d = d \text{ Log } C$$

قاعدة الشرائح المتحركة Slide rules



في البداية قاعدة الشرائح المتحركة يمكن أن تستخدم في الجمع كالآتي: نأخذ مسطرتين بالسنتميتر ووضعها جنبا إلى جنب إذا كانت ترغب في حساب 4+7 حرك المسطرة العليا كي تكون بدايتها عند 4 في المسطرة السفلي حدد الرقم 7 على المسطرة العليا، ثم قراءة القيمة المناظرة لها في المسطرة السفلية، مع تعديل طفيف تنتج هذه الفكرة البسيطة قاعدة الشرائح للوغاريتمات وكذلك يمكن استخدمها للضرب بدلا من الجمع.

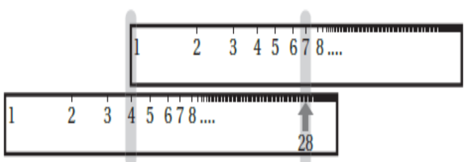
قاعدة الشرائح اللوغارتمية Logarithmic slide rules

قبل اختراع الآلة الحاسبة كانت عملية ضرب الأعداد الكبيرة تستغرق وقتاً ومجهوداً كبيراً وتكون أيضاً عرضه للخطأ. إن قاعدة الشرائح اللوغارتمي، هو الجهاز الذي يستخدم لإيجاد اللوغارتمات بطريقة سهلة وسريعة والعنصر الحاسم والأساسي هو القانون الأول للوغارتمات

$$\text{Log } (cd) = \text{Log } c + \text{Log } d$$

وهذا ينص على اللوغارتم يحول الضرب إلى جمع إذا كان ضرب عددين هو cd فإن Log cd يكون Log c + Log d

قاعدة الشرائح اللوغارتمية تعمل بالشكل الاعتيادي مع فارق واحد مهم بدلا من استخدام المسطرة القياسية والتي فيها 4 تشير إلى 4 سم ثم وضع 4 والتي تشير إلى لوغارتم 4 سم في النهاية (نتيجة واحدة هو أن الحاكم اللوغارتمي يبدأ من 1 بدلا من



صفر لأن لوغارتم 1 = صفر) وفي أعقاب نفس الإجراء لقاعدة الشرائح العادية فإننا نصل إلى النقطة Log 4+ Log 7 على طول المسطرة السفلي وتشير إلى 28.

قاعدة الشرائح اللوغارتمية ممكن أن تعمل على أي قاعدة، ولكن تم تصميمها لأول مرة باستخدام اللوغارتمات بواسطة William oughtred في عام 1620.

علم الحساب ARITHMETIC

الجمع بإعادة التسمية Addition by hand

الاستفادة من وجود نظام جيد للأعداد والذي يتيح اختصارات للحساب لكي تجمع 765 و 123، يمكننا أن نفعل ما هو أفضل بكثير مما ابتدأ 765 ولو من جانب واحد 123 مرة، والفكرة الأساسية هي بسيطة بما فيه الكتابة وهي كتابه العددين رأسيا (أحدهما فوق الأخر) مع الحفاظ على القيمة المكانية للأرقام ثم جمع كل عمود كالآتي:

$$\begin{array}{r} 765 \\ \underline{123\ +} \\ 888 \end{array}$$

الصعوبة عندما يكون مجموع الرقمين في العمود الواحد أكثر من 9 لنفرض إننا نريد جمع 56 ، 37. وإنما نبدأ من اليمين من خانة الآحاد في هذه المرة 13=6+7.

والعدد الذي في خانة الآحاد بالتأكيد هيكون 3 وتكتب الإجابة في خانة الآحاد، ويكون لدينا 10، الخطوة الثانية نضيف ما يصل إلى عشرة إلى عمود العشرات، على أي حال نحن نحتاج إلى إضافة واحد إلى عمود العشرات قبل الجمع

$$\begin{array}{r} 56 \\ \underline{37\ +} \\ 93 \end{array}$$

هذه الطريقة يمكن تعميمها بسهولة الجمع ما يزيد عن رقمين

$$\begin{array}{r} 339 \\ 389 \\ \underline{+273} \\ 1001 \end{array}$$

الطرح بإعادة التسمية Subtraction by hand

كما هو الحال مع الجمع والفكرة الأساسية للطرح هي محاذاة الأعداد في الأعمدة وطرح عمود ثم الأخر ابتدأ من خانة الآحاد

$$\begin{array}{r} 96 \\ \underline{34 -} \\ 62 \end{array}$$

في هذه الحالة. نحن قد نواجه مشكلة لكي نأخذ عددا كبير من عدد صغير

$$\begin{array}{r} 73 \\ \underline{58 -} \\ ??? \end{array}$$

نلاحظ أننا بحاجة إلى أخذ 8 من 3 ونحن لا نستطيع عمل ذلك إلا عن طريق الأعداد السالبة، ومن الأفضل تجنبها باستخدام أسلوب آخر وهو تقسيم العدد 73 إلى 7 عشرات و3 آحاد بدلا من ذلك سوف نكتب بأنه 6 عشرات و 13 آحاد كالآتي:

آحاد	عشرات
13 8-	6 5

الآن يمكننا إجراء عملية الطرح كما سبق ونكتب هذه الطريقة بالشكل

$$\begin{array}{cc} 6 & 13 \\ 7 & 3 \\ 5 & 8- \\ \hline 1 & 5 \end{array}$$

عملية أخذ 1 (الاستلاف) من العمود الآخر قد تتكرر عدة مرات في عملية حسابية واحدة.

الضرب بإعادة التسمية (طريقة الجدول) Multiplication by hand, table method

لو أننا نعرف جدول الضرب بالتالي ضرب عدد مكون من رقم مع عدد آخر مكون من رقم واحد يكون بسيط. مرة واحدة يمكننا فعل هذا. النظام العشري يجعل من السهل إلى حد ما مضاعفة أعداد كبيرة مثلا لحساب 7×53 كالعادة يمكننا تقييم 53 إلى 5 عشرات

و 3 آحاد. المفتاح الحقيقي هو أن نستطيع من ضرب كل جزء على حدة كالآتي (50+3) ×7= (7×50) + (7×3). بعض الناس يستخدموا طريقة الشبكة:

	7
50 3	350 21

لأنها الحساب أننا نضيف (نجمع) كل شيء في الجزء الداخلي من الجدول

371=21+350

وهذه الطريقة تستخدم لأعداد أكبر مثل 123×45:

	40	5
100 20 3	4000 800 120	500 100 15

ولإنهاء الحساب فإننا نجمع 4000+800+120+500+100+15=5535

الضرب بالتقييم طريقة العمود Multiplication by hand, column method

طريقة بديلة لجدول الضرب إجراء الضرب. هي عمود بواسطة عمود بالإضافة أول بأول بدلا من النهاية

$$\begin{array}{r} \underline{13} \\ \underline{5\times} \end{array}$$

نبدأ بضرب عمود الآحاد فإننا نحصل على 15 ونكتب الإجابة في خانة الآحاد 5 وإضافة واحد في خانة العشرات بعد إجراء عملية الضرب في عمود العشرات فإننا نضيف ذلك كالآتي

$$\begin{array}{r} 13 \\ 5\times \\ \hline 65 \end{array}$$

لضرب 13×45 نضرب 40×5 ونضيف الناتج الذي نحصل عليه. نكتب الناتجيين كل منها الآخر ونجمع

$$\begin{array}{r} 13 \\ \underline{45\times} \\ 65 \\ \underline{520+} \\ 585 \end{array}$$

القسمة القصيرة Short division

القسمة القصيرة هي طريقة لتقسيم عدد كبير (المقسوم) من قبل عدد مكون من رقم واحد (المقسوم عليه). الفكرة الأساسية هي أن تأخذ الرقم المقسوم ابتداء من اليسار. وفوق كل رقم نكتب عدد مرات المقسوم الملائم لها:

$$\begin{array}{r} 132 \\ 3\overline{)396} \end{array}$$

وتأتي هذه المضاعفات عندما لا يناسب المقسوم عليه تماما فى احدى الأرقام، ولكن يترك باقي .ففي المثال التالي، 3 تقسم 7 فتعطى 2 والباقى هو 1. فنضع 2 فوق 7 كما سبق ، ويتم وضع 1 فوق العدد التالى ونضع قبله 8، حيث يتم اعتباره 18

$$\begin{array}{r} 026 \\ 3\overline{)7^{1}8} \end{array}$$

وكثيرا ما سيتعين علينا القيام بذلك أكثر من مرة

$$\begin{array}{r} 0\;3\;2 \\ 9\overline{)2^{2}8^{1}8} \end{array}$$

ويمكن استخدام القسمة القصيرة مع أعداد مكونة من رقمين مثل 12 أيضاً (بمجرد معرفتك عدد مرات الضرب). في هذا المثال، 12 لا يمكن أن تقسم 9، حيث أن الـ 9 أقل من المقسوم عليه

$$\begin{array}{r} 0\,7\,6 \\ 12\overline{)9^{9}1^{7}2} \end{array}$$

القسمة المطولة Long division

القسمة المطولة هى أساسا نفس عملية القسمة القصيرة. ولكن تصبح عملية القسمة أكبر، حيث يتعين معرفة المزيد من الارقام ، كما سنجد أن حساب الباقي أصبح أكثر طولا. وهى أفضل من القسمة المبعثرة بحمل الباقي، حيث أنها مكتوبة بطريقة طولية . فبدلا من كتابتهم هكذا

$$\begin{array}{r} 0\ 4\ 7 \\ 18\overline{)8^{8}4^{12}6} \end{array}$$

نقوم بكتابتهم بطريقة طولية هكذا

$$\begin{array}{r} 047 \\ 18\overline{)846} \\ \underline{-72\downarrow} \\ 126 \end{array}$$

وفى المثال السابق سنجد أن 18 لاتقسم الرقم 8 الموجود فى خانة المئات ، ولكن العدد84 يمكن أن يقسم على 18 فتعطينا 4 حيث 4×18=72 ، ولكن 5×18= 90 فنكتب 4 فى الأعلى ونكتب 72 أسفل العدد 84 ثم نطرح لنحصل على الباقى فيكون 12 إذا كنا نستخدم القسمة القصيرة سيكون علينا وضع هذا الرقم أعلى الخانة التالية، ولكن الخطوة التالية فى القسمة المطولة هى اسقاط الرقم التالى من 846 أي (6) فنحصل على العدد 126 وبقسمته على 18 سنجد الناتج 7 وبذلك نكتب 7 فى الجزء العلوى ونكتب الناتج 126 فى الأسفل وبالطرح نجد أن الناتج صفر وبذلك نكون قد انتهينا.

قابلية القسمة Divisibility tests

كيف يمكنك أن تقول أن عدداً صحيحاً واحداً قابلاً للقسمة على آخر؟ بشكل عام لا يوجد أي أسلوب سهل. ولكن هناك حيل مختلفة للأرقام الصغيرة التي تستغل المراوغات في النظام العشري، وعندنا الأسلوب العادي لكتابة الأرقام. وبعضها من السهل جدا أن نفعله دون تفكير:

- أي عدد يقسم على 2 إذا كان احاده 0، 2،4،6، 8
- أي عدد يقسم على 5 إذا كان احاده 0 أو5
- أى عدد يقسم على 10 إذا كان احاده 0

وهذا الشئ الوحيد الذى يمتد بسهولة إلى اختبارات قابلية القسمة لـ 100، 1000، وهكذا.

قابلية القسمة على 3، 9 Divisibility by 3 and 9

العدد الصحيح يقبل القسمة على 3 إذا ما كان مجموع الأرقام المكونة للعدد من مضاعفات3. لذلك 123 قابلة للقسمة على 3 لأن 6=3+2+1 ، 6 من مضاعفات3 . ولكن235 لا تقبل القسمة على3 حيث 10=5+3+2 و10 ليست من مضاعفات 3.

وهذه الخدعة تعمل لأن الاعداد تكتب كـ xyz حيث يمكن كتابته على صورة 100X + 10Y+Z وهذا يساوي 99 x + 9 y + x + y + z . والآن البديهى أن 9y+99x بالتأكيد تقبل القسمة على3. وبذلك فيكون العدد الصحيح يقبل القسمة على3، إذاً، وإذا فقط كان x + y + z يقبل القسمة على3. ويبين هذا الدليل أيضاً أن هذه الخدعة تعمل مع الرقم 9. لذلك 972 تقبل القسمة على 9، حيث 9 + 7+ 2 = 18 وهى من مضاعفات9. ولكن 1001 لا تقبل القسمة على 9 حيث 1 + 0 + 0 + 1 = 2 وهى ليست من مضاعفات الرقم 9.

قابلية القسمة على 6 Divisibility by 6

إن قابلية القسمة على 6 هو تكافؤ بسيط لتطبيق القابلية لكل من 2 ، 3 فالعدد الصحيح يقبل القسمة على 6 إذا وإذا فقط كان العدد زوجيا ومجموع أرقامه من مضاعفات الـ 3. لذلك 431 ليست قابلة للقسمة على 6 لأن العدد ليس زوجيا، أيضاً العدد 430 لا بقبل القسمةعلى 6 لأن مجموع أرقامه 7 ليس من مضاعفات3. لكن العدد 432 يقبل القسمة على 6 لانه عددا زوجيا ومجموع أرقامه من مضاعفات 3 (لاحظ أنه لا يلزم أن يكون مجموع أرقام العدد من مضاعفات الـ 6).

القسمة على 2، 4 Divisibility by 2 and 4

يمكن أن نقول ما إذا كان العدد قابلا للقسمة على 2 بمجرد النظر الى آحاده. وهذا يعمل بسبب أن كتابة العدد كـ 'xyz' على صورة 100x+10y +z والآن من البديهى أن 100x+10y دائما يقبلون القسمة على2. لذلك فان الجواب يعتمد فقط على z.

وبالمثل، يمكننا أن نقول ما إذا كان عدد يقبل القسمة على 4 فقط بمجرد النظر في آخر رقمين. لو انها تشكل عددا يقبل القسمة على 4، فيكون العدد الصحيح يقبل القسمة على4. لذلك 1924 قابلا للقسمةعلى 4، لأن 24 تقبل القسمة على 4.ومن ناحية أخرى 846لا تقبل القسمة على4 ، لأنه46 لاتقبل القسمة على 4. مرة أخرى، 'wxyz' يمكن كتباتها على الصورة 1000w+100x+10y+z ومن البديهى أن 1000w+100x دائما يقبلون القسمة على 4، لذلك فلكى يكون العدد ككل قابلا للقسمة على 4 فإن ذلك يعتمد فقط على قابلية 10y+z

قابلية القسمة على 8 Divisibility by 8

إن قابلية القسمة على4 تمتد بسهولة إلى 8، 16، 32 وهكذا. وبالنظر في الأرقام الثلاثة الأخيرة من عدد ما يكفي لتحديد القسمة على8. لذا 7448 يقبل القسمة على 8، حيث أن 448 تقبل القسمة على 8.

ومن المسلم به أن قابلية القسمة هذه تعتمد على معرفة جدول ضرب 8 إلى 1000، ولذلك لا يزال من المفيد عند تحليل أعداد كبيرة جدا لأرقام أصغر، وقد يكون من العملي بقدر أكبر القسمة على 2 ومن ثم تطبيق قابلية القسمة على4.

وبالمثل يتم تحديد الأرقام الأربعة الأخيرة لاختبار قابلية القسمة على 16، وهكذا.

القسمة على 7 Divisibility by 7

تعتبر دراسة قابلية القسمة على 7 من أصعب حيل الأرقام إلى 10 فلمعرفة قابلية قسمة عددا ما على 7 نتبع الخطوات التالية : نأخذ الرقم الموجود بالآحاد ثم نضاعفه، ثم نطرح الناتج من باقى العدد الأصلى، فإذا كان الناتج من مضاعفات 7 كان العدد الأصلى

قابلا للقسمة على 7، كمثال سنبدأ 224 نأخذ الرقم 4 ونضاعفه فنحصل على 8 ثم نطرحها من 22 فينتج 14 وهى من مضاعفات الـ7 لذلك 224 تقبل القسمة على7.

ولأعداد أكبر، قد نحتاج إلى تطبيق هذه الحيلة أكثر من مرة. كمثال سنبدأ بـ 3028 سنأخذ 8 ونضاعفها فنحصل على 16. ثم نطرحها من 302 فنحصل على 286، ثم ونكرر الخطوات فنأخذ 6 ونضاعفها فنحصل على 12 ثم نطرحها من 28 فنحصل على 16. وهذا ليس قابلا للقسمةعلى7 لذلك فالعدد 3028 ليس قابلا للقسمة على 7. وذلك يعمل لأن كل عدد يمكن كتابته كـ $10x+y$، حيث y هو الرقم الأخير (وذلك بين 0 ، 9)، و x هوالناتج بعد فصل y. ففى المثال 224، $x = 22$، و $y= 4$ بعد ذلك $10x+y$ يقبل القسمة على 7 إذا وإذا كان فقط $20x+2y$ تقبل القسمة على 7. (الضرب فى 2 لا يقبل القسمة على 7) لذلك فالآن سنكتبها على الصورة$20x+2y= 21x -x+2y$. فمن البديهى أن $21x$ يقبل القسمة دائما على 7، لذلك فإن قابلية قسمة العدد الأصلي على 7 تعتمد على $-x + 2y$ ، أو مكافئه السلبي $x-2y$.

القسمة على 11 Divisibility by 11

تعتبر قابلية القسمة على 11 ذو طابع خاص .حيث انها تعمل من خلال اتخاذ مجموعة متناوبة من الأرقام: بإضافة الأولى، وطرح الثانية، وإضافة الثالثة، وهكذا. فإذا كان الناتج يقبل القسمة على11 ، فيكون العدد الأصلي يقبل القسمة على 11. ولدقة أكثر ، نأخذ خمسة أعداد كـ 'vwxyz' على سبيل مثال، وهذا يقسم على 11 إذاً، إذا فقط كان $v-w+x-y+z$ يقبل القسمة على 11. (إذا كان $v-w+x-y+z=0$ فذلك يصنف كعدد يقبل القسمة على 11) لذلك،لاختبار العدد 5893، نقوم بالحساب التالى $5-8+9-3=3$ لذلك العدد لايقبل القسمة على 11.

ويعمل هذا لأن الأرقام التالية هي كلها تقبل القسمة على11: 99, 9999, 999999 وهكذا. من ناحية اخرى 9, 999, 99999... إلخ لاتقبل القسمة على 11، ولكن 11, 1001, 100001 ... إلخ. تكتب 'vwxyz' كـ $10000v + 1000w + 100x + 10y + z$, وهذا يساوي $9999v+1001w+99x+11y+v-w+x-y+z$.

تلاحظ فى الأعلى أن 9999v+1001w+99x+11y ستكون دائما قابلة القسمة على11. لذلك لمعرفة هل العدد الصحيح يقبل القسمة على 11 ام لا، فذلك يعتمد على x-w+x-y+z .

هذا النظام يزيد الأعداد الصحيحة، وله فوائد رياضية، ففي نظام الأعداد الصحيحة لا تكون عملية القسمة ممكنة دائما؛ حيث يمكنك قسمة 8 على 2 لكن لا يمكنك قسمتها على 3. أما الأعداد النسبية فهي تكون نظاما يطلق عليه المجال (field) وفيه يمكن قسمة أي أرقام بالإضافة إلى جمعها وطرحها وضربها، والاستثناء الوحيد هو الصفر فلا يمكنك أن تقسم عليه (انظر القسمة على صفر).

قابلية القسمة على الأعداد الأولية الأخرى Divisibility by other primes

أفضل طريقة لقسمة الأعداد المركبة هي اختبار كل مكون أولي على حدة، وكل الأعداد الأولية الأخرى يمكن اختبارها بطريقة مشابهة لاختبار العد 7، وهي تتضمن أخذ الخانة الأخيرة، وضربها في ثابت مناسب ثم إضافة أو طرح الناتج من الرقم الأساسي بعد أن حذفت خانته الأخيرة.

- لاختبار قابلية القسمة على 13، خذ الخانة الأخيرة واضربها في 4 وأضف الناتج إلى الرقم المختصر، أي لاختبار قابلية العدد 197 للقسمة على 13 خذ الرقم 7 واضربه في 4 وأضف الناتج إلى 19 ليكون الناتج 47، ولأن هذا العدد لا يقبل القسمة على 13 فإن 197 لا يقبل القسمة على 13 أيضاً.
- لاختبار قابلية القسمة على 17، خذ الخانة الأخيرة واضربها في 5 واطرح الناتج من الرقم بعد حذف الخانة الأخيرة، على سبيل المثال نبدأ بالعدد 272، خذ الرقم 2 واضربه في 5 ليكون الناتج 10 ثم اطرح هذا الناتج من 27 لتحصل على 17 الذي يقبل القسمة على 17 وبالتالي فإن 272 يقبل القسمة أيضاً.
- لاختبار قابلية القسمة على 19، خذ الخانة الأخيرة واضربها في 2 وأضف الناتج إلى الرقم بعد حذف خانته الأخيرة.

يمكن استخدام اختبارات كهذه للأعداد الأولية الأكبر من تلك الأعداد أيضاً.

الفرق بين مربعين Difference of two squares

أحد أسهل الخصائص الجبرية وأكثرها فائدة خاصية الفرق بين مربعين، وهي تقول أن لأي عددين a و b ($a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$) ولا يحتاج إثبات ذلك إلى أكثر من فك القوسين:

$$(a + b)(a - b) = a^2 + ab - ab - b^2$$

وهذا بالمثل ينطبق على أي اتحاد من الأرقام أو المتغيرات الجبرية مثل $15^2 - 3^2 = (15+3)(15-3)$ و $(x^2 - 16 = (x-4)(x-4))$ لأن $(4^2 = 16)$. ومن الاستخدامات العديدة لهذه الخاصية استخدامها كوسيلة لتسريع الحساب العقلي.

العمليات الحسابية باستخدام المربعات Arithmetic using squares

من أوائل المهام التي تولى إلى الأشخاص الذين يتدربون على القيام بالعمليات الحسابية بسرعة هي تذكر الأرقام المربعة الاثنين وثلاثين الأولى، فبالإضافة إلى كونها مفيدة في حد ذاتها فإنه يمكن استخدامها أيضاً لضرب أزواج أخرى من الأرقام، والحيلة هنا هي استغلال الفرق بين مربعين.

إذا كان العددان كلاهما زوجيا أو كلاهما فرديًا فسيكون مباشرة هناك عدد واقع بينهما، على سبيل المثال، إذا أردنا ضرب 14 × 18 نلاحظ أن العدد 16 يقع بينهما، لذلك يمكننا أن نعيد كتابة المسألة في الشكل $(16+2)\times(16-2)$ وهو الفرق بين مربعين هما: $16^2 - 2^2$ وبما أننا نتذكر أن $16^2 = 256$ فستكون الإجابة 252.

أما إذا كان العددان ليس كلاهما زوجيا أو فرديا فيمكن أن نقوم بالحل على خطوتين، على سبيل المثال لحساب 15×18 فإننا نجزأها إلى 14×18+18 وسبق أن حسبنا بالأعلى 14×18=252 وبالتالي 15×18=252+18=270.

طرح العدد تسعة Casting out nines

يعتبر طرح العدد تسعة وسيلة مفيدة للكشف عن الأخطاء الحسابية، والفكرة الأساسية هي جمع خانات العدد ثم طرح العدد 9 كلما أمكن وذلك لعدة مرات حتى نحصل على

رقم من 0 إلى 8، وبالتالي إذا بدأنا بـ 16.987 فإننا نجمع 6+1 لنحصل على 7، ويمكن إهمال ال 9 التالية ثم إضافة 8 ليصبح الناتج 15 ثم نطرح 9 لنحصل على 6 ونجمع 7 لنحصل على 13 ثم نطرح 9 فيكون الناتج 4، ويمكن أن نكتب N(16,987)=4.

الهدف من ذلك هو أننا إذا حسبنا 41,245+16,987 على أنها 58,242 فيمكننا المراجعة عليها كالتالي: N(16,987)=4، و N(41,245)=7 وبجمعهما معا وطرح 9 مجددا نحصل على قيمة N للمسألة 4+7−9=2. في حين أن إجابتنا تعطي N(58,242)=3 وبما أنهما ليستا متطابقتين نعرف أننا قد أخطأنا، والإجابة الصحيحة هي 58,232.

ويمكن استخدام الحيلة نفسها في الطرح والضرب وقسمة الأعداد الصحيحة، على سبيل المثال، إذا حسبنا 637×845 على أنها 538,265 فإننا نحسب N(845)=8 و N(637)=7 وضربهما معا يعطي 56 وبتكرار العملية نحصل على نتيجة للطرف الأيسر تساوي N(56)=5+6-9=2 وبما أن N(538,265)=2 أيضاً فإن الطرفين منطبقان وبذلك يكون الاختبار قد نجح. إن هذه الوسيلة تصل إلى التأكد من الإجابة في الحساب من النمط 9.

وهي مفيدة في اكتشاف الأخطاء إلا أنها تعطي أعداداً سالبة مزيفة (على سبيل المثال، لا يمكنها اكتشاف تبديل خانة مكان أخرى في الإجابة).

حساب تراتينبرغ Trachtenberg arithmetic

كان جاكو تراتينبرغ عالم رياضيات ومهندسًا روسي الجنسية هرب إلى ألمانيا عقب ثورة 1917، وهو يهودي ومن دعاة السلم الواضحين، ألقي القبض عليه وسجن في معسكر اعتقال بعد ظهور النازية، وأثناء فتره حبسه التي دامت سبع سنوات وضع نظامًا جديدًا لإجراء الحساب العقلي مع التركيز على السرعة، وهذه الأساليب تشكل أساس الحساب السريع، ومن أمثلة ذلك طريقة تراتيتنبرغ للضرب في 11.

في عام 1944 تهرب تراتينبرغ بمساعدة زوجته من حكم بالإعدام، وفر هاربًا إلى سويسرا وهناك أسس المعهد الرياضي في (زيورخ) وعلم أساليبه لأجيال من الطلاب.

طريقة تراتينبرغ للضرب في 11 Trachtenberg multiplication by 11

من أمثلة حساب تراتينبرغ ضرب الأعداد الكبيرة مثل 726,154 في 11. نأخذ خانات العدد 762,154 من اليمين إلى اليسار، ونبدأ بإنزال الخانة الأولى: 4 ثم نجمع أول خانتين 4+5 لنحصل على 9، حتى الآن لدينا 94، وبعد ذلك نجمع الخانتين الثالثة والرابعة 5+1 لنحصل على 6 فنصل إلى 694، ونستمر في جمع الخانات مثنى مثنى إلى أن نصل إلى 2+ 7 ونحصل على 9 فنصل إلى 987,694، والخطوة الأخيرة هي نقل الرقم الأخير 7 وإنزاله وبذلك تصبح الإجابة 7,987,694.

العامل المعقد الوحيد هو عندما يكون مجموع خانتين مساويًا 10 فأكثر، فعلى سبيل المثال لضرب 78×11 نكتب أولا 7، والآن مجموع 7، و8 يساوي 15، لذلك نكتب 5 ونحتفظ بـ 1 للخطوة القادمة،إلى ذلك يكون لدينا 57 والخطوة الأخير تكون عادة كتابة الخانة الأخيرة وهي 8 لكن هذه المرة لابد من إضافة الرقم الذي احتفظنا به من الخطوة السابقة وهو 1 وبذلك تصبح الإجابة النهائية 957.

من الممكن تلخيص هذه الطريقة: "أضف كل خانة إلى الخانة المجاورة." حيث الخانة المجاورة تعني الخانة التي على يمينها. مع القليل من التمرن على هذه الطريقة سيصبح الضرب في 11 عفويا إلى حد كبير. وقد اخترع جاكو تراتينبرغ طرقًا مشابهة لهذه الطريقة للضرب في جميع الأرقام من 1 إلى 12، على سبيل المثال، القاعدة المناظرة للضرب في 12 هي: اضرب كل خانة في 2 ثم أضف الناتج إلى الخانة المجاورة.

أنظمة الأعداد NUMBER SYSTEMS

أنظمة الأعداد Number systems

أقدم أنظمة الأعداد هو النظام الذي استخدمه البشر لعد الأشياء لآلاف السنين: نظام الأعداد الطبيعية ط الذي يتكون من ....,5 ,4 ,3 ,2 ,1 ,0 ومع تقدم الحضارات ظهرت حاجة ملحة إلى أنظمة أرقام أكثر تعقيدًا، فلحساب الأرباح والديون نحتاج إلى تضمين الأعداد السالبة، والذي نتج عنه مجموعة الأعداد الصحيحة (ص).

ليس كل شيء قابلا للقياس باستخدام الأعداد الصحيحة، فمثالان مثل نصف يوم وثلثي متر يظهران الحاجة إلى نظام يتوسع إلى ماهو أشمل من الأعداد الصحيحة، وفي الوقت الحاضر يعرف النظام الذي يجمع بين الكسور والأعداد الصحيحة باسم نظام الأعداد النسبية (ن) وقد اكتشف الفيثاغورثيون أن الأعداد النسبية ليست كافية لقياس جميع الأطوال، وبملء الفجوة بين الأعداد النسبية توصلنا إلى مجموعة الأعداد الحقيقية (ح)، وفي القرن السادس عشر أدرك علماء الجبر الإيطاليون أثناء عملهم على حل المعادلات أن هذه المجموعة لا تزال غير كافية. أما نظام الأعداد الذي ينتج من إدخال الجذر التربيعي للعدد -1 يطلق عليه نظام الأعداد المركبة (C).

أنظمة الرياضيات Mathematical disciplines

يمكن دراسة كل نظام أعداد على حدة وبحثه بمصطلحاته الخاصة، وقد توصل علماء الرياضيات إلى أشكال كل منها وخواصها. تبدو مجموعتا الأعداد الطبيعية والنسبية مباشرتين للوهلة الأولى لكنهما شديدتا التحفظ وتمثلان صعوبة شاقة عند العمل عليهما، وهذا هو عالم نظرية الأعداد، وفي الناحية المقابلة، تسبب مجموعة الأعداد المركبة حيرة لمن ينظر إليها من بعد ولكنها تكافيء الأشخاص الذين يمتلكون الشجاعة الكافية لمعرفتها ببساطتها وقوتها المذهلتين، وقد كان تحليل الأعداد المركبة أحد انتصارات علم الرياضيات في القرن التاسع عشر.

وفي المنتصف توجد مجموعة الأعداد الحقيقية والتي تمثل المجال المناسب لفهم الأطوال وهو الأمر الذي أدركه قدماء اليونان لأول مرة ، وقد بني الكثير من علم الهندسة والطبولوجيا من الأعداد الحقيقية (ح).

الأعداد الطبيعية Natural numbers

في كهف وسط سلسلة جبال الليبومبو في (سوازيلاند) عثر علماء الآثار في السبعينيات على عظام ساق البابون محفور عليها 29 علامة لقد استخدمت كعصا للحساب والرقم 29 يشير إلى التقويم القمري، وبذلك تصبح عظمة الليبومبو التي ترجع إلى عام 35000

قبل الميلاد هي أقدم قطعة رياضية نملكها، وهي توضح نظام الأعداد الأول الذي استخدمه الإنسان في العد لآلاف السنين: إنها الأعداد الطبيعية

0, 1, 2, 3, 4, 5,….

يعرف نظام الأعداد الطبيعية بـ (ط)، ومن الناحية النظرية، السمة المحددة لـ (ط) هي الاستنتاج الرياضي، وهو يقول أن تقريبًا عند البدء بصفر وإضافة 1 بشكل متكرر فإننا في النهاية نكون قد وصلنا لكل الأرقام، وفي الحقيقة هناك خلاف بين علماء الرياضيات حول ما إذا كانت ط تتكون من 0, 1, 2, 3, 4, 5,…. أم 0, 1, 2, 3, 4, 5,….، ونقطة الخلاف هي كون العدد صفر عددًا طبيعيا أم لا.

ما قبل العدد صفر The prehistory of zero

ذلك الرقم الذي نسميه صفرًا استغرق عدة سنوات حتى أصبح مقبولًا كرقم قائم بذاته، لقد تطلب التفكير في الصفر الذي يمثل لا شيء في صورة شيء ما قفزة تخيل، وكان المحرك وراء وجود الصفر ظهور تعبير القيمة المكانية. بالطبع يوجد عدد غير منته من الأرقام لكننا لا نريد اختراع المزيد من الرموز دائما لوصفها، في الوقت الحاضر نستخدم الرموز من 1 إلى 9 فقط بالإضافة إلى الصفر لوصف أي رقم من خلال جعل موضع الرقم ناقلا لمعلومة ما تماما مثلما ينقل الرمز معلومة ، وبذلك فإن ال 5 في العدد 512 تعني خمسمائة، بينما في العدد 54 تعني خمسين "خمس عشرات".

هذا نظام بارع لكن ما الذي يحدث إذا لم يكن لدينا عشرات، كما في العدد مائتين وثلاثة؟ ببساطة، ترك البابليون القدماء فراغات، بالتالي ربما يكونوا قد كتبوا (3 2) (بالطبع لم يستخدموا الأرقام العربية أو الأساس 10 لكن هذا مثال لتوضيح الفكرة فحسب)، والمشكلة واضحة حيث سيكون من الممكن الخلط بينها وبين 23 وبحلول القرن الثالث قبل الميلاد تحايل البابليون بالاشتراك مع حضارات أخرى عن طريق استخدام رمز لحفظ المكان يشير إلى العمود فارغ. لقد كان لدى قدماء الصينيين الصفر كمبدأ رياضي وفي الحقيقة العدد السالب أيضاً لكن تعبيرهم البدائي أصبح متخلفًا أمام هذا الفهم الأعمق.

صفر براهماجوبتا Brahmagupta’s zero

كانت الهند هي المكان الذي اجتمع فيه التدوين البابلي، والمفهوم الصيني للرقم صفر في نهاية المطاف ليظهر الصفر كرقم مستقل وفي عام 628 بعد الميلاد، عرفه براهماجوبتا تعريفًا رسميا على أنه:

ناتج طرح أي عدد من نفسه

قد تبدو رؤيته الحسابية واضحة في الوقت الحاضر إلا أنها مثلت طفرة في تاريخ الفكر البشري: "عند إضافة الصفر إلى عدد ما أو طرحه فإن العدد يبقى كما هو دون تغيير، وعند ضرب عدد ما في صفر فإن الناتج صفر."

وقد مهد عمل براهماجوبتا النظرية الأساسية للأعداد السالبة إلا أن ذلك استغرق وقتا طويلا حتى يكتسب قبولا واسعا.

انتماء الصفر لمجموعة الأعداد الطبيعية The naturalness of 0

في تاريخ الرياضيات العديد من الخلافات الملحوظة مثل غوتفريد لايبنيز وإسحاق نيوتن الذين تجادلا بشدة حول علم حساب التفاضل والتكامل ومن أكثر الخلافات الدائمة وأقلها إثارة و أقلها في احتمالية الحل هو الخلاف حول ما إذا كان الصفر يجب أن يصنف عددا طبيعيا أم لا. لم يكن الشخص الذي قام بحفر العلامات على عظمة الليبومبو ليفكر في ذلك؛ إن علماء الرياضيات الحديثة منقسمون. هذا الكتاب يتبنى بشكل عام فلسفة تشبه المذهب البوذي وهي أن الصفر مثال للأعداد الطبيعية لكن في بعض الحالات يؤدي ذلك إلى ظهور مشكلة أن الصفر هو العدد الطبيعي الأول و 1 هو العدد الثاني و 2 هو العدد الثالث وهكذا، وبالتالي فإن عند التعامل مع المتتاليات على سبيل المثال فإنه من الأنسب استبعاد الصفر.

الربح والدين Profi t and debt

إذا كانت الأرقام تستخدم بشكل أساسي في العد، إذًا ماذا تعني الأرقام السالبة ؟ كيف يمكن أن يكون لديك 3- من التفاحات؟ الأصل المرجح للأعداد السالبة هو

التجارة حيث تمثل الأرقام الموجبة الربح بينما تمثل الأرقام السالبة الدين. لقد مثل علماء الرياضيات الصينيين القدامى الأعداد بأعود للعد واستخدموا الأعواد الحمراء والسوداء للتمييز بين الأعداد الموجبة والسالبة على الترتيب. (وقد عكست هذه الألوان في العالم الغربي وأصبحت العبارتان (in the black)و (in the red) تعنيان (دائن) و (مدين) على الترتيب).

الأعداد السالبة Negative numbers

على الرغم من الأصل القديم للأعداد السالبة إلا أنها اعتبرت لفترة طويلة محلا للشك حتى بدايات القرن التاسع عشر، فقد نظر إليها الكثير من الناس على أنها اختصار لشيء آخر (كمية موجبة من الديون بدلا من كمية سالبة من الأرباح) بدلا من اعتبارها أرقام قائمة بذاتها وقد قنع العديد من علماء الرياضيات بتوظيفها كأدوات في الحساب لكن إذا كانت النتيجة النهائية سالبة فإنها غالبا تهمل وتعتبر غير صحيحة. (ظلت الأعداد المركبة أيضاً في حالة مماثلة من عدم التحديد لعدة اعوام) إلا أن هذا الأمر تحدد في 628 حين كتب عالم الرياضيات الهندي راهماجوبتا أطروحته عن الحساب المشترك للأعداد الموجبة والأعداد الصحيحة السالبة والصفر والذي نسميه الآن نظام الأعداد الصحيحة.

الأعداد الصحيحة Integers

الأعداد الصحيحة هي جميع الأعداد الصحيحة الموجبة والسالبة والصفر، ويعرف هذا النظام (Z) التي ترمز إلى كلمة (Zahlen) والتي تعني (الأعداد) باللغة الألمانية. إن ما يميز مجموعة الأعداد (Z) هو أن الكميات مثل درجة الحرارة التي تقع على جانبي الصفر يمكن قياسها وبالمثل يمكن قياس الأرباح والديون على مقياس واحد.

ومن وجهة نظر علم الرياضيات فإن المجموعة (Z) أفضل من النظام الأصغر للأعداد الطبيعية ط. ويمكن أن تجمع الأعداد الطبيعية دون أن يخرج نطاق الناتج عن مجموعة الأعداد الطبيعية إلا أنها لا يمكن طرحها دائما ، فإذا أردت حل 3-2 فستخرج عن نطاق نظام الأعداد الطبيعية أما في نظام الأعداد الصحيحة فيمكن طرح أي رقمين (b-a).

وهذا أيضاً يسمح بحل معادلات أكثر ، فعلى سبيل المثال 2=3+x معادلة مكونة فقط من أعداد طبيعية لكن ليس لها حل في هذا النظام أما في نظام الأعداد الصحيحة فلها حل، وفي الواقع يمكن الآن حل أي معادلة (x+a=b) دون الخروج عن مجموعة الأعداد الصحيحة (Z).

الأعداد النسبية Rational numbers

أي عدد يمكن التعبير عنه في صورة كسر مكون من أرقام صحيحة يسمى عدد نسبي (بمعنى أنها نسب وليس المقصود أنها منطقية أو عقلانية)، ومن أمثلة ذلك 2 (لأنها تساوي 2/1) و 8/17 و 3/4-. والسبب وراء ابتكار هذه الكسور واضح؛ حيث تتضح فوائدها في قياس الزمن، أو المسافات أو الموارد وكذلك الكميات مثل: نصف شهر، أو ثلث ميل، أو ثلاثة أرباع جالونا. يشير علماء الرياضيات إلى النظام الذي يضم جميع الأعداد النسبية بالرمز Q (يرمز إلى كلمة خارج القسمة في اللغة الإنجليزية quotient).

هذا النظام يزيد نظام الأعداد الصحيحة كما يجلب فوائد رياضية. ففي نظام الأعداد الصحيحة لا تكون عملية القسمة ممكنة دائما؛ حيث يمكنك قسمة 8 على 2 لكن لا يمكنك قسمتها على 3. أما الأعداد النسبية فهي تكون نظاما يطلق عليه المجال (field). وفيه يمكن قسمة أي أرقام، بالإضافة إلى جمعها وطرحها وضربها، والاستثناء الوحيد هو الصفر فلا يمكنك أن تقسم عليه) انظر القسمة على صفر.

الأعداد الحقيقية Real numbers

المسافة بين الأعداد الصحيحة ثابتة؛ حيث أن المسافة بين أي عدد صحيح والعدد التالي له تساوي الوحدة، لكن ذلك لم يعد صحيحا للأعداد النسبية؛ حيث أنها يمكنها قياس مسافات أصغر. إذا بدأنا بالعدد 1 فلن يكون هناك ما يطلق عليه العدد النسبي "التالي". هناك $1+\frac{1}{10}, 1+\frac{1}{3}, 1+\frac{1}{2}$ و $1+\frac{1}{20,000}$ وأعداد نسبية قريبة من الواحد كيفما تشاء، وبالتالي سيبدو غريبا أن تصر أن مع ذلك هناك فجوات بين الأعداد النسبية، لكن ذلك صحيح كما يظهر من عدم نسبية العدد $\sqrt{2}$.

عند رسم المنحنى البياني للمعادلة ($y = x^2 \;\; 2$) ستجد أن المنحنى عند المواضع التي يجب أن يقطع فيها محور (x) يدخل إلى فجوة في الأعداد النسبية.

ملء هذه الفجوة إجراء تكنيكي ينتج عنه نظام الأعداد الحقيقية (R) ، والذي يعرف أيضاً بخط الأعداد الحقيقية (real line)، ويمكن تصوره على أنه كل النقط الواقعة على خط غير منته أصبح كاملا الآن، مما يعني أنه ليس به فجوات.

هناك طريقة أخرى لتصور نظام الأعداد الحقيقية على أنها مجموعة جميع المفكوكات العشرية الممكنة. ابدأ بعدد صحيح وليكن ‎-14، ثم ضع علامة عشرية متبوعة بأي عدد غير منته من الخانات: (‎-14.6936027480.) لكن كن حذرا، لأن بعض الأعداد مثل (0.99999999.) لها أكثر من مفكوك عشري واحد.

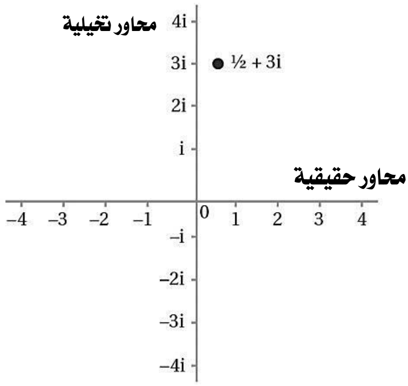
الأعداد التخيلية Imaginary numbers

في القرن السادس عشر في إيطاليا انصب اهتمام المجتمع الرياضي على حل المعادلات التكعيبية، ومعادلات الدرجة الرابعة، وكان العائق أمام ذلك أن بعض المعادلات البسيطة مثل ($x^2=1$)، ليس لها أي حل في نظام الأعداد الحقيقية، وقد نتج ذلك عن قواعد ضرب الأعداد السالبة، حيث لا يوجد عدد حقيقي يعطي عند تربيعه عددا سالبا. اكتشف علماء الجبر الإيطاليون أنهم إذا تخيلوا حلا لهذه المعادلة بكل بساطة، وأطلقوا عليه (i)، فسيتمكنوا من استخدام هذا الحل في حساباتهم وقد ينتج عنه نتائج دقيقة وحقيقية لحل معادلات أخرى.

مضاعفات (i) بأعداد حقيقية مثل: ($-\frac{1}{2}i, \pi i, 3i$) تسمي أعدادا تخيلية، مصطلح الأعداد "التخيلية" بالتضاد مع الأعداد "الحقيقية" مصطلح مضلل ويؤسف له إذا فهمت تسميته من الناحية التاريخية.

نظام الأعداد المركبة، الذي وضعه رفايل بومبيلي (Rafael Bombelli) عام 1572 على أساس قوي، هو موطن الأعداد التخيلية، وفي حقيقة الأمر نعلم أن نظام الأعداد المركبة يمكن بناؤه من الأعداد الحقيقية بطريقة مباشرة وصريحة ، والحقيقة أن (i) ليس عددا تخيليا يفوق (π) أو (-3) في شيء إلا إنه لسوء الحظ علقت به هذه التسمية.

الأعداد المركبة Complex numbers



يتكون نظام الأعداد المركبة (C) رسميا من إضافة الأعداد التخيلية إلى الأعداد الحقيقية، وفي حقيقة الأمر العدد المركب ليس إلا عدد حقيقي مثل ($\frac{1}{2}$) مضاف إلى عدد تخيلي مثل (3i) فيصبح ($\frac{1}{2}$+3i) عددا مركبا، وهذه الأعداد المركبة يمكن جمعها، وطرحها، وضربها، وقسمتها وفقا لقواعد الحساب المركب.

مخطط أرجاند (The Argand diagram)، هو الطريقة القياسية لتمثيل العدد المركب في المستوى ثنائي الأبعاد بالتالي تبدو الأعداد المركبة مثل الإحداثيات الديكارتية المألوفة، حيث يكون المحور الحقيقي أفقيا، ويكون المحور التخيلي رأسيا، والمستوى المركب يمثل إطارا رائعا للهندسة، حيث تنسجم فيه الأفكار الهندسة والجبرية انسجاماً تاماً.

تشكل الأعداد المركبة نقطة نهاية تطور مفهوم العدد، فالمبرهنة الأساسية في الجبر تقول أنها توفر كل ما يمكن أن يكون مطلوبا بالنسبة لحلول المعادلات كثيرة الحدود.

الرباعيات Quaternions

في لحظات حاسمة في التاريخ، أعاد علماء الرياضيات النظر في ماهية العدد، ومن اللحظات الفارقة: اكتشاف الصفر، والأعداد السالبة والنسبية، وتشكل الأعداد المركبة نقطة توقف طبيعية لهذه الامتداد، حيث تقول المبرهنة الأساسية في الجبر أن كل المعادلات التي نود حلها يوجد لها حلول في الأعداد المركبة، فبإمكاننا تمديد الأعداد المركبة إلى نظام أكبر.

تتكون الأعداد المركبة من أزواج من الأعداد الحقيقية (a, b) بالإضافة إلى مكون جديد هو (i) الجذر التربيعي للعدد (-1). أي عدد مركب يمكن كتابته على الصورة (a + ib). وعام 1843 اكتشف السيد ويليام هاملتون (Sir William Hamilton) نظاما

قائما على رباعيات (quadruples) من الأعداد الحقيقية (a, b, c, d) مصحوبة بثلاثة مكونات جديدة هي (i)، و(j)، و(k)، وكل رباعي يمكن كتابته على الصورة ($a + ib + jc + kd$.)، والقاعدة الأساسية للرباعيات هي ($i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$). كان هاملتون متحمسا جدا لاكتشافه إلى درجة حدت به إلى حفر هذه المعادلة على كوبري بروم في دبلين. (لازالت هناك لوحة تحيي ذكرى ذلك في هذا المكان).

هناك ثمن يجب أن يدفع نظير هذا التوسع، فعملية الضرب الآن لم تعد إبدالية، فليس صحيحا دائما أن ($A \times B = B \times A$)، بالتالي فإن الرباعيات تكنيكيا لا تكون مجالا. أصبحت الرباعيا بعد اكتشافها موضوعا رئيسيا في علم الرياضيات. وعلى الرغم من أن شهرتها ضعفت بعد ذلك، إلا أنها لا تزال مستخدمة إلى الآن فهي تستوعب بدقة سلوك الدورانات في الأفضية ثلاثية ورباعية الأبعاد.

الثمانيات Octonions

عندما اكتشف السيد ويليام هاملتون نظام الرباعيات، كتب إلى صديقه جون جرافز (John Graves) يشرح له إنجازه، فرد عليه جرافز قائلا: "إذا كان في إمكانك استخدام الكيمياء لتركيب ثلاثة أرطال من الذهب، لم تتوقف عند هذا الحد؟"

وإيفاء من جرافز بكلمته توصل إلى نظام أكبر يُعرف الآن باسم الثمانيات، وهو يتكون من ثمانيات من الأعداد الصحيحة ($a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7$) مصحوبة بسبعة مكونات جديدة ($i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6,i_7$) جميعها تربيع للعدد -1، بالتالي يكون الثماني العام على الشكل: ($a_0 + i_1a_1 + i_2a_2 + i_3a_3+ i_4a_4 + i_5a_5+ i_6a_6+ i_7a_7$).

مبرهنة هورفيتز Hurwitz's theorem

خرج علينا هاملتون بالرباعيات، وجرافز بالثمانيات، إلى أي مدى يمكن أن يمضي هذا التعميم قدما؟ أثبت أدولف هورفيتز (Adolf Hurwitz) عام 1898م أن ما تم التوصل إليه هو أقصى ما يمكن، وأن الأعداد الحقيقية، والمركبة، والرباعيات، والثمانيات هم الأربعة أنظمة الوحيدة التي يطلق عليها جبر التقسيم المنظم: وهي بنية تضم الأعداد

الحقيقية التي تسمح بإجراء عمليتي الضرب والقسمة، بطريقة معقولة هندسيا.وقد وصف عالم الفيزياء الرياضية جون بيز (John Baez) هذه العائلة عام 2002:

> الأعداد الحقيقية هي معيل الأسرة الذي يمكن الاعتماد عليه، وهي المجال المكتمل المنظم الذي نعتمد عليه جميعا، أما الأعداد المركبة فهي أكثر بهرجة قليلا، إلا أنها تمثل الأخ الأصغر الذي تكن له الأسرة الاحترام: ليست مرتبة ولكنها مكتملة جبريا، والرباعيات هي ابن العم المنبوذ في التجمعات العائلية؛ لأن عمليات الضرب فيها غير إبدالية، لكن الثمانيات هي العم المجنون العجوز الذي لا يسمح له أحد بالخروج من العلية: فالعمليات فيها لا تتميز بخاصية التجميع (Non-associative).

لا تتميز بخاصية التجميع: تعني أنك إذا قمت بضرب ثلاثة ثمانيات (A), (B), (C). قد تجد أن $(A\times(B\times C)\neq(A\times b)\times C)$، وهذا هو انتهاك لأحد أهم القوانين الجبرية الأساسية، وعلى الرغم من جنون الرباعيات والثمانيات فهي مفيدة في تفسير شواذ رياضية أخرى، مثل مجموعات لأي الاستثنائية.

الأعداد النسبية RATIONAL NUMBERS

المقلوبات Reciprocals

تعرف باسم المعكوسات الضربية. المقلوب هو العدد الذي تحتاج الضرب فيه ليكون حاصل الضرب 1، بالتالي مقلوب العدد 2 هو $(\frac{1}{2})$، والعكس صحيح. يسهل الحصول على مقلوب الكسر: فقط اقلب الكسر، بالتالي مقلوب $(\frac{5}{7})$ هو $(\frac{7}{5})$.

يرمز لمقلوب (X) بالرمز $(\frac{I}{X})$ أو (x^{-1}) على الرغم أن بالنسبة لعلماء الرياضيات (إذا لم يكونوا مؤرخين)، فالقلب (Reciprocation) فكرة أساسية تتخطى مجرد القسمة أو أخذ القوى السالبة، فهو أيضاً بمثابة مرآة بين الأعداد الكبيرة والصغيرة، فمثلا مقلوب 1 مليون هو واحد من المليون والعكس صحيح. وهناك رقم واحد ينفرد بأن ليس له مقلوب؛ حيث لا توجد قيمة لـ (X) تحقق $(x \times 0 = 1)$، لذلك فإن (الصفر) ليس له مقلوب.

القسمة Division

تحدد القسمة عدد المرات التي يسع بها رقم رقما آخر، لذلك ($15 \div 3 = 5$) لأن العدد 15 يتسع للعدد 3 خمس مرات تماما: $15 = 3 \times 5$. وهذا ينطبق أيضاً على الكسور، وبالتالي ($\frac{1}{4} \div \frac{1}{2} = 2$) لأن ($\frac{1}{2}$) تتسع $\frac{1}{4}$ مرتين تماما.

وهناك نظرة بديلة لعملية القسمة وهي رؤيتها باعتبارها العملية الأساسية للقلب (Reciprocation) (بالطبع الإشارة باستخدام المقلوب هي المرجحة أكثر من قول خارج قسمة 1 على 4).

ويمكن أن نفهم ($m \div n$) باعتبارأن (m) مضروبة في مقلوب (n) بمعنى أن ($m \times \frac{1}{n}$)، وبالتالي ($15 \div 3 = 15 \times \frac{1}{3} = 5$)، و($\frac{1}{2} \div \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times 4 = 2$) وهذا يمتد بسهولة إلى كسور أكثر عمومية ، وبالتالي ($\frac{2}{5} \div \frac{3}{4} = \frac{2}{5} \times \frac{4}{3} = \frac{8}{15}$) .

الكسور المكافئة Equivalent fractions

في عالم الأعداد الصحيحة هناك طريقة واحدة للتعبير عن أي رقم: 7 هي 7، ولا يمكنك كتابتها بأي طريقة أخرى (قد يعترض جيمس بوند على ذلك قائلا أنها يمكن أن تسبق بأصفار 00007، لكن ذلك لا يمثل أي غموض حقيقي). عندما ندخل إلى عالم الأعداد النسبية الذي يمكن أن نطلق عليه عالم الكسور يحدث شيء غير ملائم، فهناك العديد من الطرق التي تعبر بصدق عن نفس الرقم، فعلى سبيل المثال ($\frac{2}{3}$) تمثل نفس الرقم الذي تمثله ($\frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{14}{21}$) وحشد آخر من الكسور التي لا تبدو مباشرة أنها الكسور نفسها، وهذا هو ما يسمى بالكسور المكافئة. وإذا بدأت برقم ما ثم قمت بضربه في 2 ثم قسمت الناتج على 2 فمن المتوقع أن تعود إلى القيمة التي بدأت بها، وهذا يؤدي إلى قاعدة الكسور المكافئة: فإذا قمت بضرب البسط في أي عدد لا يساوي الصفر وقمت بضرب المقام في نفس العدد فستحصل على كسر مكافئ، وبالتالي: ($\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$) لأن ($\frac{4}{6} = \frac{2\times2}{3\times2}$).

وبالنظر إلى عكس ذلك؛ إذا كان كل من البسط والمقام يقبل القسمة على عدد ما، فيمكنك دائما تبسيطهما معا للحصول على كسر مكافئ: ($\frac{12}{15}$) يمكن تبسيطه لأن كل من

(12)، (15) قابل للقسمة على 3، وهذا يسمى التبسيط (simplifying) وينتج عنه الكسر المكافئ ($\frac{4}{5}$). في معظم الاستخدامات، يكون أفضل (أبسط) تمثيل للكسر عندما تكون جميع التبسيطات الممكنة قد أجريت، بحيث لا يكون هناك عوامل مشتركة بين البسط والمقام بعد ذلك (أي يكونوا في أبسط صورة (coprime))، وإحدى نتائج المبرهنة الأساسية في الحساب أن هذه التمثيل دائما موجود وهو تمثيل منفرد.

ضرب الكسور Multiplying fractions

القاعدة الأساسية لضرب الكسور بسيطة: اضرب البسط، واضرب المقام، وبالتالي ($\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{2\times4}{3\times5} = \frac{8}{15}$.)، وهناك طريقة مختصرة هي أن تقوم بكل الاختصارات الممكنة قبل البدء في الضرب بدل من القيام بذلك بعد الضرب، أي أن بدلا من أن تحسب ($\frac{21}{8} \times \frac{2}{15} = \frac{42}{120}$) ثم تقوم بالتبسيط تلاحظ أن كل من البسط والمقام قابل للقسمة على 2 و3، وبالاختصار تحصل على ($\frac{1}{5} \times \frac{7}{4} = \frac{7}{20}$).

جمع الكسور Adding fractions

من أكثر الأخطاء الشائعة التي يرتكبها التلاميذ هي اعتقاد أن ($\frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{3}{7}$). المنطق المستخدم واضح، لكن بتجربة فكرية صغيرة سيتلاشي ذلك: ف($\frac{1}{2}$) الكعكة بالإضافة إلى ($\frac{1}{4}$) الكعكة بوضوح يعطينا ($\frac{3}{4}$) الكعكة وليس ($\frac{2}{6}$) منها.

بعض الكسور يسهل جمعها: الكسور التي لها الرقم نفسه في المقام أي لها مقام موحد؛ حيث من البديهي جدا القول أن ($\frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$). لجمع كسرين آخرين علينا أولا أن نجد كسرين مكافئين لهما مقاما موحدا، وعندما يكون أحد المقامين من مضاعفات الآخر يكون الأمر مباشرا، فمثلا لحساب ($\frac{3}{7} + \frac{5}{14}$) نقوم أولا بتحويل ($\frac{3}{7}$) إلى كسر مقامه 14 تحديدا ($\frac{6}{14}$)، فيصبح بإمكاننا الجمع ($\frac{6}{14} + \frac{5}{14} = \frac{11}{14}$).

عندما نواجه ($\frac{1}{6} + \frac{3}{4}$) فسنحتاج إلى إيجاد مضاعف مشترك للمقامين ؛ أي رقم يقبل القسمة على 4 و 6 معا، وإحدى طرق الحصول عليه تكون عن طريق ضرب المقامين ($4 \times 6 = 24$)، فهذا يؤدي المطلوب تأدية تامة، لكن إذا استخدمنا المضاعف المشترك

الأصغر (12) سوف نقلل من عدد الاختصارات المطلوبة لاحقا. الآن نحول الكسرين إلى كسرين مقامهما 12 ثم نجمع ($\frac{3}{4}+\frac{1}{6}=\frac{9}{12}+\frac{2}{12}=\frac{11}{12}$).

الكسور العشرية الدائرة Recurring decimals

الكسور العشرية الدائرة هي امتدادات عشرية تتكرر للأبد دون توقف، على سبيل المثال ($\frac{1}{12}=0.083333333...$) يكتب كما جرت العادة على الصورة (0.083)، وبعض الكسور لها نمط تكراري أطول مثل ($\frac{2}{7}=0.285714285714285714$) الذي يكتب ($\overline{0.285714}$) أو (0.285714). ويمكن كتابة الكسور العشرية دائما على صورة كسور دقيقة، وبالتالي فهي تمثل أعدادا نسبية.

الأعداد غير النسبية مثل ($\sqrt{2}$) لها امتدادات عشرية تمتد إلى الأبد دون تكرار؛ لذلك فهي ليست كسورا عشرية دائرة. بعض الأعداد لها تمثيلات منتهية ومتكررة على حد سواء، الرقم 1 هو أحد أمثلة هذه الأعداد.

$$0.\overset{0}{9}=1$$

حقيقة أن الكسر الدائر (0.9)(أي...0.99999999) يساوي 1 هي واحدة من أكثر الحقائق التي تلقى مقاومة في الرياضيات الابتدائية، فالطلاب يصرون دائما على إن الرقمين متجاوران وليسا الرقم نفسه، أو يقولون أنه لابد أن يحدث شيء ما بعد كل هذا العدد الكبير من الرقم 9 المتكرر. وإليكم ثلاثة براهين مختلفة تثبت أن العددين متساويان (بالتأكيد برهان واحد من هذه البراهين كاف)

1- بالتحويل من الكسر إلى الكسر العشري ($\frac{1}{3}=0.3$) أي(...0.333333)، وضرب الطرفين في 3 نحصل على (1=0.9)

2- (1-0.9=0.0) ومن الواضح أن (0=0.0) بمعنى آخر المسافة بين (1)، و(0.9) تساوي صفر، أي أنهما لابد أن يكونا الرقم نفسه.

3- لنفرض أن ($x=0.9$)،وبالضرب في 10 نحصل على ($10x=9.9$). طرح المعادلة الأولى من المعادلة الثانية ينتج عنه ($9x=9$)، وبالتالي ($x=1$).

البرهان الأخير هو صيغة تحويل أي كسر دائر إلى كسر اعتيادي. لنفرض أن ($x = 0.4$) وبالضرب في 10 نحصل على ($10x = 4.4$) وبطرح المعادلة الأولى من المعادلة الثانية ينتج أن ($9x = 4$)، وبالتالي ($x = \frac{4}{9}$) .

الأعداد غير النسبية Irrational numbers

العدد النسبي في الرياضيات هو وصف لكسر اعتيادي، أما الأعداد مثل (π)، و($\sqrt{2}$)، و (e) التي لا يمكن وضعها على صورة كسر اعتيادي تسمى غير نسبية (لمرة أخرى نقول أن هذه التسمية ليس لها علاقة باللامنطقية أو الغباء)[(1)] .

أولت الطائفة الفيثاغورثية في اليونان القديمة اهتماما غامضة بالأعداد الصحيحة، واعتقدت أن جميع الأعداد نسبية، وطبقا لما جاء في الأسطورة، ثم غراقهيپاسس Hippasus من ميتاپونتم Metapontum عندما أثبت لأول مرة أن العدد ($\sqrt{2}$) غير نسبي، حيث اعتبر هذه الاكتشاف بدعة.

عدم نسبية العدد $\sqrt{2}$ The irrationality of $\sqrt{2}$

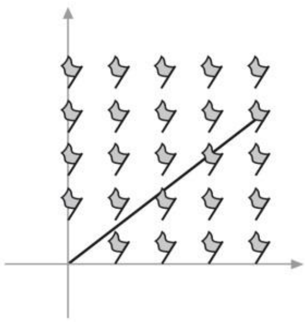
الحقيقة القائلة أن العدد $\sqrt{2}$ غير نسبي هي مثال شهير على البرهان بالتناقض. كون العدد $\sqrt{2}$ غير نسبي يعني أنه لا يمكن وضعه على صورة كسر اعتيادي دقيق، بالتالي يبدأ البرهان بافتراض أن $\sqrt{2}$ يمكن كتابته على صورة كسر اعتيادي وليكن ($\sqrt{2} = \frac{a}{b}$). الهدف الآن هو إيجاد تناقض من هذا الفرض.

إذا كان (a)، (b) بينهما عوامل مشتركة فيمكن تبسيط الكسر: سنفرض أننا قمنا بذلك، وبالتالي لا توجد عوامل مشتركة بين (a)، و(b). الآن، تعريف $\sqrt{2}$ يعني أنك إذا

(1) ملاحظة: يؤكد الكاتب على ذلك لأن الترجمة الحرفية لـ (irrational numbers) هي الأرقام اللامنطقية، أو الأرقام الغبية وبالطبع هذا لا يمت إلى التسمية بصلة، والسبب في تسميتها irrational يرجع إلى عدم قابليتها للتمثيل على صورة كسر اعتيادي وهي بذلك عكس الأرقام النسبية (rational) فجاءت التسمية بإضافة السابقة (Ir) وهذا هو سبب الخلط.

قمت بضربه في نفسه سيكون الناتج 2، وبالتالي $(\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}=2)$ أي أن $(\frac{a^2}{b^2}=2)$، إذا $(a^2=2b^2)$ وبالتالي (a^2) عدد زوجي. الآن يجب أن تكون (a) عددا زوجيا لأن مربع أي عدد فردي يكون فرديا، بالتالي (a) هي أحد مضاعفات العدد 2، وليكن $(a=2c)$، إذا $((2c)^2=2b^2)$ و$(4c^2=2b^2)$، لكن $(b^2=2c^2)$ و بالتالي (b^2) عدد زوجي، وبالتالي (b) عدد زوجي أي يقبل القسمة على 2، لكننا افترضنا أنه لا يوجد عوامل مشتركة بين (a)، و(b) ، والآن أثبتنا أن كليهما يقبل القسمة على 2 وهو التناقض المطلوب. هذا البرهان الذي غالبا يعزى إلى هيپاسس Hippasus من ميتاپونتم Metapontum حوالي عام 500 ق م يمكن تطويعه لإثبات أن الجذر التربيعي لأي عدد أولي (في الحقيقة أي عدد صحيح غير مربع كامل) يكون غير نسبي.

مسألة الشعاع The problem of the ray

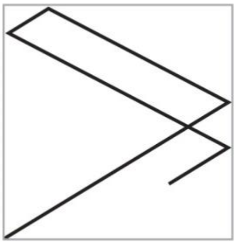


نعمل على مستوى مزود بإحداثيات ديكارتية، وقمنا بوضع علم عند كل النقط التي إحداثياتها أعداد صحيحة (1,1)، و(2,5)، و(-4,7) وهكذا. الآن لنتخيل أننا أطلقنا شعاع ليزر من نقطة الأصل عبر المستوى، هل يصطدم الشعاع بسارية العلم أم لا ؟

تتوقف الإجابة على الميل (m) للخط المستقيم الذي سيتبعه الشعاع. معادلة هذا الخط هي: $(y=mx)$، فإذا صدم الشعاع العمود عند (p,q) فبالتالي لابد أن $(q=mp)$ وتكون $(m=\frac{q}{p})$، وبما أن (q) و (p) أعداد صحيحة فهذا يعني أن (m) عدد نسبي، وبالتالي فإن الإجابة هي أن إذا كانت (m) نسبية فإن الشعاع سوف يصطدم بالسارية، وإلا فلن يصطدم.

مسألة الشعاع المنعكس The problem of the reflected ray

درس كل من كونيج (König) وسزكس (Szücs) تطويعا مثيرا لمسألة الشعاع. بدلا من السواري، تخيلا مربعا حوائطه الداخلية عبارة عن مرايا، ويطلق شعاع الليزر من أحد



الأركان إلى هذا الصندوق ذي المرايا، ما نوع المسار الذي سيسلكه هذا الشعاع؟ (نفرض أن الشعاع يرتد في الاتجاه الذي سقط منه إذا صدم أحد أركان الصندوق).

تعتمد الإجابة أيضاً على الميل (m): إذا كان نسبيا فسوف يبدأ الشعاع بعد بعض الوقت في تتبع أثر المسار السابق، وسوف يعيد نفس الحلقة مرارا وتكرارا، ومن ناحية أخرى إذا كانت (m) غير نسبية، فلن يكرر الشعاع نفسه أبدا. الخط الناتج سيكون كثيفا داخل الصندوق، وهذا لا يعني أنه حرفيا سوف يمر بجميع النقط داخله (لهذا فهو لا يعتبر منحنى مالئ للفضاء تماما)، لكنك إذا اخترت أي نقطة داخل الصندوق وحددت مسافة ما ، حتى ولو كانت ضئيلة جدا، فبالتالي سيمر الشعاع في النهاية خلال المسافة من النقطة التي اخترتها.

العوامل والمضاعفات FACTORS AND MULTIPLES

ضرب الأعداد السالبة Multiplying negative numbers

بفرض أن "آنا" تدفع "لبوب" ثلاثة دولارات يوميا وأنها تفعل ذلك منذ فترة، بالتالي يتغير رصيد "بوب" يوميا بمقدار +3، وكذلك رصيد "آنا" لكن بمقدار-3، وخلال يومين من الآن سيصبح رصيد "بوب" +6 مقارنة برصيده اليوم؛ ويفسر ذلك بـ ($2 \times 3 = 6$)، ومن ناحية أخرى فإن خلال مدة -2 يوم من الآن (أي منذ يومين) كان رصيد "بوب" أقل بمقدار 6 دولارات، وهو ما يساوي -6 بالنسبة لليوم، وبكتابة ذلك في جدول نحصل على:

2×3=6
1×3=3
0×3=0
-1×3=-3
-2×3=-6

يبين الصف الأوسط أننا نقارن رصيد "بوب" بمستوى اليوم. بعد صفر من الأيام سيكون بالتأكيد تغير بمقدار صفر من الدولارات).

الآن نأخذ في الاعتبار أموال "آنا" التي تتغير بمقدار -3 يوميا، بالتالي خلال مدة +2 يوما (بعد يومين)، سيكون -6 (أقل 6 دولارات)مقارنة بمستوى اليوم، ويفسر ذلك بـ (2×-3=-6)، ماذا عن -2 يوما من الآن ؟ كان لدى "آنا" 6 دولارات أي مستوى نسبي مقداره +6، وبكتابة ذلك في جدول نحصل على جدول الضرب لـ -3.

2×-3=-6
1×-3=-3
0×-3= 0
-1×-3= 3
-2×-3= 6

وهناك طريقة أخرى للتفكير في ذلك وهي أن ضرب عدد ما في عدد سالب يغير إشارته دائما بين +/ –، أما الضرب في عدد موجب يترك الإشارة كما هي دون تغيير، بالتالي إذا بدأنا بـ 3 وقمنا بضربها في -2 ستتغير إشاراتها : +3 ستصبح -6، لكن هذا ينطبق على الأعداد السالبة أيضاً: فإذا بدأنا بـ -3 وقمنا بضربها في -2 ستتغير إشارتها: -3 ستصبح +6.

القسمة على صفر Division by 0

ربما تكون القسمة على صفر هي أكثر الأخطاء الرياضية شيوعا بين الأخطاء جميعا، حتى الباحثين المحنكين يمكنهم روي قصص مروعة عن إيجاد القسمة على صفر كامنة في براهينهم. هناك سبب مقنع يفسر لماذا تكون القسمة على صفر ممنوعة، وهو يأتي مباشرة من المعنى يقسم divide. إننا نكتب (4 = 2 ÷ 18) لأن 4 هو العدد الذي عند ضربه في 2 يكون الناتج 8 لذلك فإننا لحساب القيمة (0 ÷ 8) نحتاج إلى إيجاد عدد حين نضربه في صفر يكون الناتج 8 ومن الواضح أنه لا وجود لعدد كهذا.، ومن ناحية أخرى فإنه عند حساب (0 ÷ 0) نحتاج إلى إيجاد رقم عند ضربه في صفر يكون الناتج صفرا، لكن جميع الأرقام تحقق ذلك !

حساب التفاضل يتناول بالدراسة الكسور التي على الصورة ($\frac{x}{y}$) عندما تقترب (x) و (y) أكثر وأكثر من الصفر. واعتمادا على العلاقة الدقيقة بين (x) و(y) يمكن لهذا الكسر أن يقترب من أي رقم محدد، أو يذهب إلى ما لا نهاية، أو يترنح ظاهريا بشكل عشوائي.

إثبات أن 2=1 A proof that 1=2

نفرض أن ($a = b$) وبضرب الطرفين في (b) نحصل على ($ab = b^2$)، وطرح (a^2) من كلا الطرفين يعطي ($ab - a^2 = b^2 - a^2$)، وبتحليل كل جزء نحصل على ($a(b - a) = (b + a)(b - a)$)، وبحذف ($b - a$) من الطرفين يتضح أن ($a = b + a$) لكن ($a = b$)، لذلك ينص هذا على أن ($a = 2a$) وبالتالي (1=2). يصبح علم الجبر هنا غامضا غموضا بحتا، ويصبح هناك العديد من الاختلافات الممكنة (كلما بدت أكثر تطورا كأن أفضل)

الحجة الأساسية هي أن ($0 \times 1 = 0 \times 2$) (وهي صحيحة ولا شك)، وبالتالي (1=2). الخطوة الخاطئة في البرهان هي حذف ($b - a$) من الطرفين والتي تؤول إلى قسمة على صفر مختفية.

المبرهنة الأسسية في الحساب The fundamental theorem of arithmetic

عرفت خاصية مهمة للأعداد الأولية في مسألة 7.30 في كتاب العناصر لإقليدس: إذا كان هناك عدد ($a \times b$) يقبل القسمة على عدد أولي (p) فلابد أن يكون (a)، أو (b) يقبل القسمة على هذا العدد الأولي وهذا ليس صحيحا بالنسبة للأعداد المؤلفة (غير الأولية) (composite numbers) مثل 10 حيث أن (4×5) يقبل القسمة على 10 لكن 5 أو 4 لا تقبلان القسمة عليها.

ونتيجة لذلك، وهو ما كان معروفا لقدماء اليونان أيضاً،هي المبرهنة الأساسية في الحساب والتي تنص على أمرين:

1- جميع الأعداد الصحيحة الموجبة يمكن كتابتها على هيئة عوامل أولية

2- هذه الكتابة تكون بطريقة وحيدة.

بالتالي يمكن تفكيك العدد (308) إلى ($2 \times 2 \times 7 \times 11$)، والطريقة الأخرى الوحيدة لكتابة هذا العدد كمضاعفات أولية هي إعادة ترتيب ذلك مثل ($2 \times 7 \times 2 \times 11$)، وبالتالي فإننا –وبدون تحقق– على علم بأن ($13 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \neq 308$).

وكما يشير الاسم، فهذه الحقيقة هي الأساس الذي يبنى عليه علم الرياضيات كله. وذلك يخص الأعداد الصحيحة فقط أما في الأعداد النسبية لا يتحقق شيء كهذا لأن هناك طرق عديدة مختلفة لتقسيم عدد ما، على سبيل المثال: ($2 = \frac{4}{3} \times \frac{3}{2}$ and $2 = \frac{7}{8} \times \frac{16}{7}$).

العامل المشترك الأعلى highest common factor

العامل المشترك الأعلى (highest common factor) أو القاسم المشترك الأكبر (greatest common divisor) لعددين طبيعيين هو أكبر رقم يقبلان القسمة عليه معا، على سبيل المثال: العامل المشترك الأعلى لـ 18، 24 هو 6: ليس هناك عدد أكبر يقبلان القسمة عليه.

يمكن إيجاد (ع.م.أ) لعددين عن طريق تفكيكهما إلى أعداد أولية، وضرب جميع عوامليهما الأولية المشتركة (بما فيها العوامل المكررة)، على سبيل المثال: 60=2×2×3×5 و 84=2×2×3×7. لذلك يكون (ع.م.أ) للعددين 60، و84 هو 2×2×3=12، وتمتد نفس الطريقة لحساب العامل المشترك الأعلى لأكثر من عددين. الأعداد مثل 8، 9 التي يكون العامل المشترك الأعلى لها 1 تسمى أعدادا أولية فيما بينها (co-prime).

المضاعف المشترك الأصغر Lowest common multiple

المضاعف المشترك الأصغر لأي عددين هو أصغر رقم يقبل القسمة عليهما، معا، لذلك يكون المضاعف المشترك الأصغر لـ 4، 6 هو 12؛ لأنه أصغر رقم يظهر في جدولي ضرب العدد 4، و 6 معا ويمكن إيجاد (م.م.أ) لعددين عن طريق ضربيهما ثم القسمة على عاملهما المشترك الأعلى، لذلك يكون (م.م.أ) للعددين 60، 84 هو ($420 = \frac{60\times84}{12}$).

الأعداد المثالية Perfect numbers

يقال لعدد صحيح أنه مثالي إذا كان مجموع عوامله (بما فيها العدد 1، لكن باستثناء العدد نفسه) يساوي العدد نفسه.

أول عدد مثالي هو العدد 6: عوامله 1، و 2، و3، ثم يليه العدد 28 الذي عوامله 1 و 2 و 4 و 7 و 14، وقد أثارت الأعداد المثالية الفضول منذ قام الفيثاغورثيون بإلحاق أهمية غامضة بهذا التوازن ما بين مكونات الجمع والضرب، ولازالت الأعداد المثالية تجذب انتباه علماء الرياضيات إلى الآن وتنقسم دراستها إلى جزأين: الأعداد المثالية الزوجية، والأعداد المثالية الفردية.

الأعداد المثالية الزوجية Even perfect numbers

أثبتت أول نتيجة مهمة على الأعداد المثالية حوالي عام 300 ق م في كتاب العناصر لإقليدس؛ حيث أثبتت المسألة 9.36 أنه إذا كان $(2^k - 1)$ عددا أوليا فإن $\frac{(2^k-1)(2^k)}{2}$ يكون عددا مثاليا. وبعد قرون أعيد النظر في هذه النتيجة بمجرد ظهور الأعداد الأولية التي على الصورة $(2^k - 1)$ والتي عرفت باسم أعداد "ميرسين" الأولية (Mersenne prlmes.)، وبالتالي لإعادة صياغة نتيجة إقليدس، إذا كان (M) هو أحد أعداد "ميرسين" الأولية، بالتالي $\frac{M(M+1)}{2}$ يكون عددا مثاليا زوجيا، وعكس نظرية إقليدس صحيح أيضاً كما لاحظ عالم القرن العاشر ابن الهيثم؛ فإذا كان العدد الزوجي مثاليا فلابد أن يكون على الصيغة $\frac{M(M+1)}{2}$ حيث (M) أحد أعداد "ميرسين" الأولية، وعلى سبيل المثال $\frac{3\times4}{2} = 6$ و $\frac{7\times8}{2} = 28$ إلا أن ابن الهيثم لم يتمكن من إثبات ذلك إثباتًا تامًا، وظل الأمر كذلك حتى مجيء ليونارد أويلر (Leonhard Euler) بعد حوالي 800 عام.

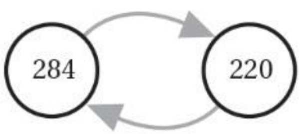
هذه النتيجة – تعرف أحيانا باسم مبرهنة إقليدس – أويلر (Euclid-Euler theorem)– تبرهن على التقابل الأحادي (one-to-one correspondence) بين الأعداد المثالية الزوجية وأعداد ميرسن الأولية، بالتالي فإن اكتشاف أعداد "ميرسين" أولية جديدة يعطي مباشرة أعداد مثالية زوجية جديدة، وبالمثل تنتقل الأسئلة حول أحدهما إلى أسئلة حول الطرف الآخر، وينطبق ذلك بصفة خاصة على السؤال الأهم في هذا الصدد: وهو إذا ما كانت قائمة الأعداد المثالية الزوجية منتهية أم لا.

الأعداد المثالية الفردية Odd perfect numbers

لم يعثر أحد بعد على عدد مثالي فردي بل إن معظم الخبراء هذه الأيام يشكون في وجوده، لكن لم يستطع أحد منهم أيضاً إثبات أن هذا المخلوق ليس له وجود، وفي أي حال من الأحوال لا تشكل احتمالية عدم وجوده أي عقبة أمام علماء الرياضيات في دراسة هذه الأعداد بعمق. يأمل علماء الرياضيات في تحديد الأماكن التي يمكن أن يتواجد فيها، أو في جمع الذخيرة اللازمة من أجل البرهان بالتناقض كحل نهائي.

في القرن التاسع عشر قام جيمس سيلفستر بتحديد العديد من الشروط التي يجب أن يحققها العدد المثالي الفردي، واعتقد أن هذا الرقم يحتاج إلى معجزة ليصبح موجودا، وفي عام 1991 استخدم كل من برنت،وكوهين وتيريلي جهاز كمبيوتر لاستبعاد وجود أي عدد مثالي فردي طوله أقل من 300 خانة.

الأعداد الصديقة Amicable pairs



معظم الأرقام ليست مثالية، وعندما تقوم بجمع عواملها فإما إنك تنتهي من هذا الجمع 0 (في حالة العدد الناقص)، أو أنك تتخطى الحد (في الأعداد الزائدة)، لكن أحيانا توازن الأعداد الناقصة والزائدة بعضها بعضا، على سبيل المثال العدد (220) عدد زائد (abundant)؛ حيث إن عوامله: (1,2,4,5,10,11,20,22,44,55,110) ومجموعها يساوي 284. أما عوامل العدد (284) هي (1,2,4,71 142) ومجموعها لا يساوي (248) بل (220).

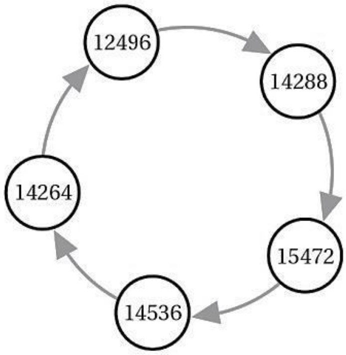
لقد أذهلت الأعداد الصديقة علماء الرياضيات الكلاسيكيين، وكذلك علماء العالم الإسلامي، وفي القرن العاشر اكتشف ثابت ابن قرة قاعدة للحصول على أعداد صديقة، وقد طور أويلر هذه القاعدة فيما بعد.

في وقت كتابة هذا الكتاب، عدد الأعداد الصديقة الموجودة (11,994,387) مختلف، وعدد خانات أكبرها يساوي (24,073)، وكما كان الحال في الأعداد المثالية يبقى التساؤل

حول ما إذا كان هناك حقا عددا لا نهائيا. كل زوج معروف يتكون من إما رقمين زوجيين أو فرديين، ولكن لم يثبت أبدا أن هذا لابد أن يتحقق دائما.

الأعداد الأنيسة Sociable numbers

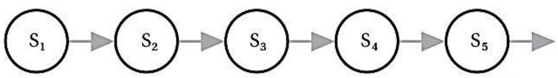
العددان الصديقان هما زوج من الأعداد تأخذك عملية جمع عوامل أي منهما إلى الآخر، لكن يمكن أن تكون هناك دورات أكبر: جمع عوامل العدد (12,496) يعطي (14,288)، ثم نحصل بعد ذلك على (15,472) ثم (14,536) و (14,264)، قبل الرجوع مجددا إلى (12,496)، لذلك يقال أن تلك تمثل دورة طولها 5. وتعرف الأرقام التي تحقق ذلك باسم الأعداد الأنيسة في زمن كتابة هذا الكتاب، أطول دورة معروفة من الأعداد الأنيسة طولها 28، وهي



14316, 19116, 31704, 47616, 83328, 177792, 295488, 629072, 589786, 294896, 358336, 418904, 366556, 274924, 275444, 243760, 376736, 381028, 285778, 152990, 122410, 97946, 48976, 45946, 22976, 22744, 19916, 17716.

المتتاليات التجزيئية Aliquot sequences

ابدأ بأي رقم وليكن (S_1)، وقم بجمع كل عوامله الصحيحة لتحصل على رقم جديد (S_2).



إذا كان $(S_1 = S_2)$ يكون الرقم مثاليا، وإلا فكرر العملية؛ اجمع كل العوامل الصحيحة لـ (S_2) لتحصل على رقم جديد(S_3). إذا كان $(S_1 = S_3)$ فإن (S_1)، (S_2) تشكلان زوجا من الأعداد الصديقة، وإلا فيمكننا أن نستمر في تكرار ذلك للحصول على (S_4, S_5, S_6)، ويطلق على ذلك اسم متتالية تجزيئية (Aliquot كلمة يونانية تعني متعدد). المتتالية الجزئية للعدد 95 هي (95,25,6,6,6,...).

وقد وصلت المتتالية إلى رقم مثالي بقيت عليه، وبالمثل إذا وصلت أي متتالية تجزيئية

إلى أحد رقمي زوج من الأعداد الصديقة، أو أي رقم أنيس فبالتالي سوف تبقى في دائرة مفرغة دائما، والبديل لذلك هو أن تصل المتتالية إلى رقم أولي وهو ما يؤدي إلى انتهائها، فالمتتالية التي تبدأ بـ 49 على سبيل المثال يكون الرقم التالي 8 ثم 7 لكن الرقم الذي يلي ذلك لابد أن يكون 1 (لأن 7 ليس لها عوامل أخرى)، ثم صفر.

عام 1888 وضع "أوجين كاتالان" فرضية تقول أن: جميع المتتاليات التجزيئية تنتهي بإحدى الطرق السابقة إلا أن بعض الأعداد تثير الشكوك حول هذه الحدسية: 276 هو أول تلك الأرقام العديدة مجهولة المصير، حيث أن متتاليته وصلت إلى حوالي 2000 حد حتى الآن ولازالت في نمو، وبعد 1500 حد تفوق عدد الخانات ال 150 خانة.

الاستقراء INDUCTION

البرهان بالاستقراء Proof by induction

كيف يمكنك إثبات العديد من الأشياء غير المنتهية في مرة واحدة؟ إحدى الطرق القيمة هي الاستقراء الرياضي الذي يستخدم في إثبات النتائج بما فيها الأعداد الطبيعية. لنفرض أنني أريد إثبات أن جميع الأرقام الطبيعية تحقق خاصية ما ولتكن (X) يقوم الاستقراء بمهاجمة الأعداد الحقيقية بالترتيب، وتكون الحالة الأساسية في الحجة هي إثبات أن العدد صفر يحمل الخاصية ، ثم تأتي الخطوة الاستقرائية التي تثبت أن إذا كان k ,.... ,o جميعها أعدادا تحمل الخاصية (X) فمن المؤكد أن تحملها **k + 1** أيضاً. إذا أمكن إثبات ذلك، بالتالي لن يكون هناك أبدا ما يسمى العدد الأول الذي لا يحمل الخاصية (X) ، وبالتالي سيكون من المستحيل وجود أي رقم لا يحمل الخاصية (X) ، إذا جميع الأرقام تحمل الخاصية (X).

يشبه الاستقراء تأثير الدومينو الرياضي: فالحالة الأساسية تدفع قطعة الدومينو الأولى، ثم تقوم الخطوة الاستقرائية بإثبات أن من المؤكد أن تتسبب القطعة الأولى في إسقاط الثانية، والثانية تسقط الثالثة، وهكذا حتى تسقط جميع القطع ولا تبقى قطعة واحدة واقفة. والاستقراء هو صفة محددة للأعداد الطبيعية: فلا يمكن تطبيقه مباشرة على

الأعداد الحقيقية على سبيل المثال، إضافة الأعداد من 1 إلى 100 مثال على الاستقراء المستخدم، لكن من المآخذ التي أخذت عليه: مفارقة الرجل الأصلع، وإثبات أن جميع الأعداد مثيرة للاهتمام.

العدد 1729 عدد مثير للاهتمام 1729 is interesting

$$1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$$

عندما زار ج . هـ. هاردي (G.H.Hardy) عالم الرياضيات النابغة فيرتوسو سيرنفاسا رامانجان (virtuoso Srinivasa Ramanujan) استقل سيارة أجرة تحمل الرقم 1729، وقد أبدى ملاحظته لصديقه أن هذا الرقم يبدو رقما مملا إلى حد ما ، فأجاب رامنجان بأنه ليس كذلك، وقال: "إنه رقم مثير للاهتمام جدا، فهو أصغر رقم يمكن تمثيله كمجموع مكعبين بطريقتين مختلفتين". ربما كان شخص ذو مستوى تفكير أقل من رامنجان ليجادل حول كون جميع الأرقام المثيرة للاهتمام، وهي حقيقة يوجد لها برهان بالاستقراء.

برهان أن جميع الأعداد مثيرة للاهتمام
A proof that every number is interesting

الحالة الأساسية هي الصفر: وهو -مما لاشك- فيه أكثر الأرقام إثارة للاهتمام على الإطلاق، أما الخطوة الاستقرائية فتفترض أن الأرقام (k ,... ,1,2 ,.) جميعها أرقام مثيرة للاهتمام والرقم التالي الذي يجب أن يكون إما مثيرا للاهتمام أو لا هو1 + k ، فإذا لم يكن كذلك فسيكون هو أول عدد غير مثير للاهتمام، لكن هذا سيجعل له اهتماما خاصا: وهذا تناقض، لذلك لابد أن يكون مثيرا للاهتمام، وبذلك تكتمل الخطوة الاستقرائية، وبذلك أثبتنا باستخدام الاستقراء أن جميع الأعداد مثيرة للاهتمام.

هذا - بلا شك- لا يعدو كونه محاكاة ساخرة لبرهان، وليس شيئا حقيقيا، فمدى إثارة عدد ما للاهتمام ليست خاصية محددة بدقة، ولنكون أكثر تحديدا هي خاصية تعتمد على تقدير ذاتي غير ثابت، ففي الواقع هناك بعض الأرقام التي تكون مثيرة أكثر من غيرها (ويعتمد ذلك على الشخص الذي تسأله)، وهذا البرهان يتطلب حسما مصطنعا يجعل جميع الأعداد إما مثيرة للاهتمام تماما أو لا .

جمع الأعداد من 1 إلى 100 Adding up 1 to 100

في إحدى الحجرات الدراسية في ألمانيا في القرن ال 18، أسند مدرس المرحلة الابتدائية هير بوتنر(Herr Büttner) إلى تلاميذه في الصف مهمة جمع الأعداد من 1 إلى 100 أملا في أن يكون الدرس لطيفا وهادئا إلا أنه فوجئ بأحد التلاميذ يرفع يده خلال ثوان ويجيب: 5050. عندما كبر هذا التلميذ أصبح شخصية بارزة في مجال الرياضيات، إنه كارل فريدريك جاوس (Carl Friedrich Gauss). لابد أن يكون جاوس الصغير قد توصل إلى صيغة جمع أعداد متتالية: ($1 + 2 + \cdots + n = \frac{n\times(n+1)}{2}$)، إذا كانت ($n = 3$) نجمع الأعداد الثلاثة الأولى (1+2+3=6)، وتعطى الإجابة نفسها باستخدام ($\frac{3\times(3+1)^2}{2}$)، وأدرك جاوس أن كل ما عليه فعله هو التعويض عن ($n = 100$) في هذه الصيغة للحصول على الإجابة ($\frac{100\times(100+1)}{2}$).

وهناك طريقة هندسية لرؤية ذلك عن طريق معرفة الرقم المثلثي الذي ترتيبه (n)، كما يمكن أيضاً إثبات ذلك إثباتا أكثر حسما باستخدام الاستقراء.

جمع الأعداد من 1 إلى (n)، برهان بالاستقراء

Adding 1 up to n, proof by induction

سنثبت بالاستقراء أن ($1 + 2 + \cdots + n = \frac{n\times(n+1)}{2}$)، وتتضمن الحالة الأساسية الجمع حتى الرقم الذي ترتيبه صفر، من الواضح أن الناتج صفر. الطرف الأيمن يساوي ($\frac{0\times(0+1)}{2}$)، لذلك فإن الصيغة صحيحة عند ($n = 0$).

الآن تأتي الخطوة الاستقرائية: نفرض أن هذه الصيغة صحيحة لإحدى قيم (n) ولتكن (k)، وبالتالي ($1 + 2 + \cdots + k = \frac{k\times(k+1)}{2}$). نريد استنتاج أن نفس الشيء صحيح لقيمة (n) التالية وهي ($n = k + 1$) وهذا يتبع ($1 + 2 + \cdots + k + (k + 1) = \frac{k\times(k+1)}{2} + (k + 1)$)، وبالقليل من خفة اليد الجبرية يظهر الطرف الأيمن على الصورة ($\frac{(k+1)\times(k+2)}{2}$) وهي الصيغة الصحيحة عندما ($n = k + 1$).

جمع أول مائة عدد مربع Adding the first hundred squares

يمكن كتابة صيغة جمع الأعداد من 1 إلى (n) بطريقة أنيقة باستخدام رمز المحصلة

$$\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$$

وهناك صيغة مشابهة من أجل حساب مجموع أول (n) عدد مربع ويمكن إثباتها أيضاً بالاستقراء

$$\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

لذلك إذا أردنا حساب $(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 100^2)$ فكل ما علينا فعله هو وضع $(n = 100)$ في هذه الصيغة: $\frac{100\times101\times201}{6}$ وتساوي 338,350.

ولجمع المكعبات لدينا الصيغة

$$\sum_{j=1}^{n} j^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

(لاحظ أن هذه الصيغة هي تربيع الصيغة الأولى) لقوى أعلى نحصل على :

$$\sum_{j=1}^{n} j^4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$$

$$\sum_{j=1}^{n} j^5 = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2$$

$$\sum_{j=1}^{n} j^6 = \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^3 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n$$

الحصول على صيغة عامة للقوى الأعلى يتطلب جهدا أكبر، ويتضمن أعداد بيرنولي: متتالية لها أهمية في نظرية الأعداد.

تمثيل الأعداد REPRESENTATIONS OF NUMBERS

القيمة المكانية والتمثيل العشري Place value and decimal notation

العد من 1 إلى 9 أمر سهل، فكل ما نحتاجه هو فقط تذكر الرموز الصحيحة، لكن هناك شيء غريب يحدث عندما نصل إلى 10، فبدلا من استخدام رموز جديدة نبدأ في إعادة استخدام القديمة، وهذا النظام نظام متطور خادع استغرق قرونا عديدة ليتطور، وكانت لحظته الحاسمة هي ظهور رمز للعدد صفر.

فيما يسمى تمثيل القيمة المكانية، لا يمثل الرمز (3) العدد (3) فقط بل قد يمثل (30)، أو (300)، أو (0.3)، فمكان الرمز يحمل معنى لا يقل عن ذلك الذي يحمله الرمز نفسه. تمثل الأعداد الصحيحة على هيئة خانات مرتبة في أعمدة، على اليمين توجد الآحاد، وكل خطوة ناحية اليسار تزيد من قوى الرقم 10. في جدول القيمة المكانية يوضح الرقم 1001 كما يلي:

Thousands	Hundreds	Tens	Units
1	0	0	1

وهذا يسمى النظام العشري؛ لأن أساسه هو الرقم 10، واختيار أساسات أخرى ممكن تماما.

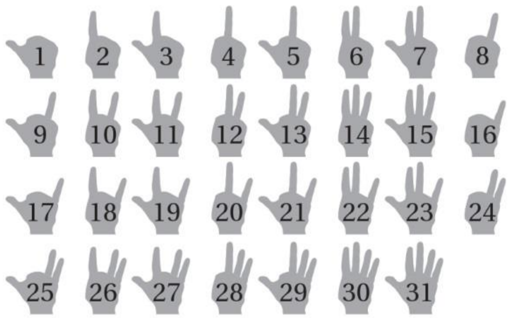
الأساسات Bases

حقيقة أن الرقم 10 هو أساس نظام العد الذي نستخدمه، يرجع جزئيا بالتأكيد إلى التطور الذي منحنا 10 أصابع بدلا من 8 أو 12، أما من وجهة نظر علم الرياضيات، فهو اختيار مفتوح؛ حيث يمكنك تكوين نظام عد أساسه أي رقم، ويكافئ جودة النظام العشري، وفي الحقيقة نجد أن النظام الثنائي - النظام الذي أساسه 2- له مميزات عديدة على الأقل في عصر الكمبيوتر. ويجب التأكيد أن هذا البحث يهتم فقط بطريقة تمثيل الأرقام باستخدام الرموز سواء أكان ذلك مكتوبا على صورة (11) في التمثيل العشري، أم (1011) في التمثيل الثنائي، أم (B) في التمثيل الستعشري أم (10) في التمثيل الأحد عشري، فالهدف موحد في جميع الأنظمة، ولا يصيبه تأثير بسبب هذه التغيرات أكثر مما يصيب الإنسان عند تبديل قبعته.

معظم تعاملنا هذه الأيام يكون مع النظام العشري، لكن ليس كلية، فمعرفة الوقت ليست عشرية: الدقيقة 60 ثانية، والساعة 60 دقيقة، وهذا أحد آثار الحضارة البابلية التي استخدم علماء الرياضيات فيها ، والبيروقراطيون(موظفو الحكومة) نظام أساسه 60. كذلك قسم الصينيون القدماء اليوم إلى 100 (ke) (حوالي ربع ساعة). حتى اعتماد النظام الغربي في القرن ال 17. ظلت خطط تبديل النظام العشري بنظام الساعات والدقائق بين جيئة وذهاب عدة مرات منذ ذلك الحين، ولم تلق إلا نجاحا عابرا كما حدث خلال الثورة الفرنسية.

النظام الثنائي Binary

ثنائي يعنى (أساسه 2)، وبالتالي إذا بدأنا العد من اليمين فإن القيم المكانية تمثل الآحاد، ثم اثنينات، وأربعات، وثمانيات، وستة عشر، إلخ (قوى للأساس 2)، ولتحويل عدد عشري إلى ثنائي نقوم بتفكيكه إلى أجزاء مثل ((1×1)+(1×4)+(1×8)+(1×32)45) فيعطي العدد الثنائي (101101). وبعمل العكس، يكون تحويل الرقم الثنائي إلى عشري كما يلي: العدد (11001) فيه 1 في خانة الآحاد، و 0 في خانة الاثنينات، و 0 في خانة الأربعات، و 1 في خانة الثمانيات، و 1 في خانة الستعشرات، لذلك فهو يمثل في النظام العشري (25=16+8+1).



النظام الثنائي هو أكثر الأنظمة ملائمة للكمبيوتر حيث يمكن تخزين 0 و 1 عن طريق إعدادات التشغيل والإيقاف لمكون أساسي ما. يطلق على الخانات الثنائية اسم بتات (bits)، 8 بتات تساوي 1 بايت وهي وحدة قياس ذاكرة الكمبيوتر، والطريقة التي يمكن لسلاسل البتات أن تحمل بها البيانات هي الموضوع الذي تتناوله بالدراسة نظرية المعلومات.

أول من تصور نظام الأعداد الثنائي- شأنه كشأن الكثير من موضوعات الرياضيات الحديثة- هو جوتفريد ليبنيز (Gottfried Leibniz) في القرن ال17.

النظام الثنائي ليس مفيدا في الكمبيوتر فحسب بل إنه يمكنك من استخدام أصابعك في العد حتى 31 على يد واحدة أو حتى 1023 على كلتا يديك.

النظام الستعشري Hexadecimals

قد يكون التمثيل الثنائي هو أسهل تمثيل عددي بالنسبة للكمبيوتر لكن بالنسبة للعين البشرية يصعب قراءة سلسلة طويلة من الصفر والواحد، لذلك في الغالب نتعامل مع النظام العشري بدلا منه لكن من عيوبه أنه ليس سهل التحويل إلى النظام الثنائي، ولهذا السبب يفضل بعض علماء الكمبيوتر العمل بالنظام الستعشري (الأساس 16)، والذي فيه يكون للخانات من صفر إلى 9 معانيها العادية، أما الخانات (A, B, C, D, E, F) فترمز إلى (10,11,12,13,14,15) على الترتيب. ويكتب العدد العشري (441) في النظام الستعشري على الصورة (1B9). التحويل بين النظام الثنائي والستعشري أسهل كثيرا من التحويل بين الثنائي والعشري، حيث نقوم فقط بتقسيم العدد الثنائي إلى مجموعات من أربع خانات، ثم نحول كل مجموعة منها بالترتيب، وبالتالي تقسم (1111001011) إلى مجموعات (1011 1100 11(00)) وتحويلها الستعشري هو 3CB.

الصورة القياسية Standard form

بفضل النظام العشري فإن للعدد 10 العديد من الخواص المفيدة التي ينفرد بها عن غيره. الضرب في 10 أو القسمة على 10 يكافئ تحريك الخانة مكان واحد يسارا أو يمينا بالنسبة للعلامة العشرية. على سبيل المثال ($4.7 = 10 \div 47$) و ($8.9 = 10 \times 0.89$).

وباستغلال ذلك يمكن التعبير عن أي عدد باستخدام رقم يقع بين 1 و 10 مضروبا أو مقسوما على عدد معين من العشرات والتي يمكن كتابتها على صورة قوى موجبة أو سالبة للأساس 10، ويسمى ذلك بالصورة القياسية، على سبيل المثال ($10^6 \times 3.14$)، ($10^{-5} \times 2.71$) كلاهما مكتوبان على الصورة القياسية. لتحويل رقم عادي مثل (14,100) إلى الصورة القياسية، أولا نحرك العلامة العشرية بحيث يصبح الرقم واقعا بين 1و 10، وهو ما يعطي (1.41) في هذه الحالة، ثم نحتاج إلى الضرب في 10 أربع مرات لتعود القيمة إلى

(14,100)، لذلك في الصورة القياسية تتحول (14,100) إلى (1.41×10^4). وكذلك في الأرقام الصغيرة مثل (0.00173) نتبع نفس الخطوات. أولا نحرك العلامة (إلى اليمين هذه المرة) ليصبح العدد (1.73) ، وهذه المرة لتعود القيمة إلى القيمة الأصلية نحتاج إلى القسمة على 10 ثلاثة مرات ، بالتالي نحصل على قوى سالبة. 1.73×10^{-3} .

الصورة القياسية مفيدة لأنها تسمح بقياس حجم الرقم سريعا (عن طريق قوى للأساس 10)، كما أنها تنسجم بكفاءة مع النظام المتري.

الأعداد الصماء Surds

لا يمكن كتابة العدد ($\sqrt{2}$) على صورة كسر مضبوط لأنه عدد نسبي، والأسوأ من ذلك أنه لا يمكن كتابته على صورة كسر عشري منته أو كسر دائر؛ لأن امتداده العشري يستمر للأبد ولا يكرر نفسه أبدا. في الحقيقة أفضل طريقة لكتابة ($\sqrt{2}$) بالضبط هي كتابته كما هو، لذلك عندما يظهر في ناتج عملية حسابية يكون هناك مبرر قوي للاحتفاظ به في صورته حفاظا على الدقة ، على سبيل المثال ($3 + \sqrt{2}$) ، ومثل هذه التعبيرات يطلق عليها أعداد صماء (جاءت هذه الكلمة من الكلمة اللاتينية (surdus) والتي تعني (لا صوت له) عاكسة مأخذ الخوارزمي على الأعداد غير النسبية، وهي المقابلة للأعداد النسبية المسموعة).

ما ينطبق على ($\sqrt{2}$) ينطبق أيضاً على الجذر التربيعيى لأي عدد طبيعي ليس مربعا كاملا. وعلى الرغم من أن الاحتفاظ بهذه التعبيرات صماء كما هي له معنى أفضل من تقريبها باستخدام الكسور العشرية أو الاعتيادية إلا أننا غالبا نرغب في تبسيطها قدر المستطاع. المكون الرياضي الرئيسي في التعامل مع الأعداد الصماء هو الملاحظة التي تقول أن ($\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$)، وبصفة خاصة ($\sqrt{a^2} = a$)، لذلك يمكننا تبسيط ($\sqrt{12}$) إلى ($\sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$) بدلا من كتابتها على صورتها.

تخليص المقام من الجذور Rationalizing the denominator

إذا كان لدينا التعبير ($\frac{2}{1-\sqrt{3}}$) فغالبا سنرغب في تبسيطه إلى صورة تظهر فيها الجذور

التربيعية في البسط فقط، ولتحقيق ذلك يمكننا دائما ضرب البسط والمقام في نفس الشيء بحيث لا تتغير قيمة الكسر، والخدعة هنا تكون في اختيار المضاعف المناسب. في المثال السابق نختار $(1-\sqrt{3})$ لنرى كيف يحدث ذلك

$$\frac{2}{1+\sqrt{3}}=\frac{2\times(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})\times(1-\sqrt{3})}=\frac{2-2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}-\sqrt{3}-\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{2-2\sqrt{3}}{1-3}=\frac{2-2\sqrt{3}}{-2}=\sqrt{3}-1$$

وبصفة عامة: إذا كان $(\mathbf{a}+\sqrt{\mathbf{b}})$ هو مقام كسر ما فيمكن تخليصه من الجذور عن طريق الضرب بسطا ومقاما في $(\mathbf{a}-\sqrt{\mathbf{b}})$، وهذا سيحول المقام إلى عدد صحيح $(\mathbf{a}^2-\mathbf{b}^2)$ (انظر الفرق بين مربعين).

الأعداد الكبيرة Large numbers

الأرقام الكبيرة سحرت عقول البشر سحرا شديدا البشر ذوي ميول معينة. علماء الرياضيات المنتمين للمذهب الجايني في الهند القديمة أولوا أهمية روحية عميقة للأعداد الكبيرة، ووضعوا تعريفا لما يسمى (rajju)[1] على أنها المسافة التي يقطعها إله ما في ستة أشهر.(الإله-في عقيدتهم- يقطع مسافة قدرها مليون كيلو مترا في لمح البصر). وبناء على ذلك تخيلوا صندوقا مكعبا أطوال جوانبه 1 rajju، ومملوء بالصوف، وعرفوا ما يسمى (palya) على أنه الزمن المستغرق لتفريغ هذا الصندوق عن طريق إزالة جديلة واحدة كل قرن، كما أنهم طوروا نظرية لفئات مختلفة من اللانهاية ، وبذلك توقعوا نظرية المجموعات لكانتور قبلها بأكثر من ألفي عام.

عداد الرمل لأرشميدس Archimedes' Sand Reckoner

وضع أرشميدس في كتابه عداد الرمل حوالي عام 250 ق م تقديرا لعدد حبات الرمل اللازمة لملء الكون، وجاء حله أنه ليس أكثر من (10^{63}) حبة رمل. ليس لهذا الرقم أهمية كبيرة إلا أن علم الكونيات الشمسي الذي كان معروفا في عصر أرشميدش والذي كان

---

(1) معناها في اللغة الهندية حبل أو سلك.

للنجوم فيه مسافات محددة من الشمس شوه هذا العدد. مع ذلك وضح هذا الكتاب اختلاف مفاهيمي مهم:بين الأعداد الطبيعية الكبيرة جدا ومالا نهاية.

لم يكن كتاب عداد الرمل محض تسلية، فقد كان أرشميدس يصحح خطأ مفهومي شائع في عصره: وهو أنه لا يوجد عدد يمكنه قياس شيء هائل، وأن الرمل كمية أساسية غير منتهية، ولعمل ذلك، قام باختراع نظام كامل لتمثيل الأعداد الكبيرة، ووصل إلى "عشرات الآلاف من عشرات الآلاف من الفترات المكونة من عشرات الآلاف من عشرات الآلاف من الأرقام التي تتكون من عشرات الآلاف من عشرات الآلاف من الوحدات" (a myriad myriad units of a myriad myriad numbers of the myriad myriadth period) وهو ما يمكن كتابته على الصورة $10^{8\times10^{16}}$. التمثيل الحديث مثل الأبراج الطويلة من الأسس يمكنها تمثيل أرقام أكبر من ذلك.

أبراج الأسس Towers of exponentials

كيف يمكن وصف الأرقام الكبيرة أفضل وصف باستخدام الرياضيات الحديثة؟ يمكن أن نبدأ بمحاولة كتابتهم عن طريق تمثيل القيمة المكانية العشرية، وباتباع ذلك يكتب الجوجول (Googol) على الصورة:

(10, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000)

من الأسهل أن نقرأه (1 متبوع بمائة صفر، أو (10^{100})، وهذا يبين أن الرفع إلى قوة طريقة رائعة لاستيعاب الأرقام الكبيرة (صاغ ميلتون سيروتا البالغ من العمر 9 سنوات عام 1938 مصطلح (Googol)). الرفع إلى قوى هو كل ما نحتاجه في معظم الاستخدامات، فعدد الذرات في الكون يساوي (10^{80})، وعدد ألعاب الشطرنج الممكنة يقدر بـ (10^{123})، لكن يمكننا دائما صياغة أعداد أكبر، فمثلا العدد جوجولبليكس (googolplex) هو 1 متبوع بعدد جوجول من الأصفار، والتمثيل الأسي يكون

$$(10^{10,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,})$$

ومن الأفضل كتابته على الصورة ($10^{10^{10^2}}$) أو($10^{10^{100}}$) (اختار عالم الرياضيات إدوارد كاسنر عم ميلتون سيروتا مصطلح جوجولبليكس)، وهذا يوضح كيفية توسيع النظام عن طريق تكوين أبراج أطول من الأسس مثل ($10^{10^{10^{10^{10^{10}}}}}$). أما للحصول على أرقام أكبر من تلك الأبراج نحتاج ما يسمى تمثيل أسهم كانوث.

أسهم كانوث Knuth's arrows

يحتل دونالد كانوث مكانا في قلب كل عالم رياضيات؛ حيث أنه مسئول بدرجة كبيرة عما تبدو عليه الرياضيات الحديثة في صفحات الكتب والجرائد التي لا تعد ولا تحصى، فهو مخترع برمجة المنضدات تيكس (the typesetting programming TeX). عام 1976 اخترع كانوث تمثيلا ذا كفاءة عالية لكتابة الأعداد الكبيرة جدا، وهو قائم على التكرار. فلنبدأ بعملية الضرب التي هي في الأساس عملية جمع متكرر: ($4 \times 3 = 4 + 4 + 4$) ثم الرفع إلى قوى، وهو عملية ضرب متكرر:($4^3 = 4 \times 4 \times 4$). الرفع إلى قوة هو السهم الأول، بالتالي فإن ($3 \uparrow 4$) تعني($4^3 = 64$)، أما السهم الثاني فهو تكرار السهم الأول:($4\uparrow4\uparrow4=4\uparrow\uparrow3$)، وذلك يعني ($4^{4^4}$)، وهذا أكبر كثيرا من الجوجول، أما ($4\uparrow\uparrow4$) التي هي ($4^{4^{4^4}}$) فيعتبر الجوجلبليكس قزما بالنسبة إليها.

وبالمثل، السهم الثالث هو تكرار السهم الثاني: ($4\uparrow\uparrow4\uparrow\uparrow4=4\uparrow\uparrow\uparrow3$) وهي ($4^{4^{\cdot^{\cdot^{\cdot^4}}}}$) حيث يصبح البرج أعلى بمقدار (4^{4^4}) من الطوابق، وهذا العدد كبير بشكل مذهل يستحيل التعبير عنه بأي طريقة أخرى، يمكننا الاستمرار على نفس المنوال، حيث يكون السهم الرابع هو تكرار السهم الرابع وهكذا ، لكن المشكلة الأخرى التي ستواجهنا هي أن عدد الأسهم قد يزيد زيادة لا يمكن التحكم فيها، ولمقاومة ذلك يمكننا كتابة ($4\{n\}3$) كاختصار لـ ($3 \uparrow \cdots \uparrow\uparrow\uparrow 4$) حيث (n) عدد الأسهم. وللتعبير عن أرقام أكبر من ذلك أيضاً نحتاج إلى تمثيل أقوى مثل معاملات باورز.

معاملات باورز Bowers' operators

كرس الرياضي الهاوي من ولاية تكساس جوناثان باورز قدرا كبيرا من وقته لإيجاد

وتسمية الأرقام الأكبر. في وقت الكتابة، أكبر عدد توصل إليه عدد عملاق أسماه (meameamealokkapoowa oompa). كانت فكرة باورز الأساسية عبارة عن عملية تتخطى أسهم كانوث، فكان عامله الأول ({{1}}) معرفا كالتالي:

$$m\{\{1\}\}2 = m\{m\}m$$
$$m\{\{1\}\}3 = m\{m\{m\}m\}m$$
$$m\{\{1\}\}4 = m\{m\{m\{m\}m\}m\}m$$

وهكذا. وكان هذا كافيا لتحديد أحد أكبر الثوابت الرياضية ألا وهو عدد جراهام، لكن يمكننا أيضاً الاستمرار وتعريف معامل آخر ({{2}}) ويعرف بما يلي:

$$m\{\{2\}\}2 = m\{\{1\}\}m$$
$$m\{\{2\}\}3 = m\{\{1\}\}(m\{\{2\}\}2)$$
$$m\{\{2\}\}4 = m\{\{1\}\}(m\{\{2\}\}3)$$

وهكذا حتى المعامل الثالث والرابع({{4}},{{3}})، إلخ، حيث يمكن تعريف جميع المعاملات بالتناظر مع ذلك.

ونبدأ المستوى التالي بـ ({{{1}}}) الذي يسلك بالنسبة لـ ({{.}}) مسلك ({{.}}) بالنسبة لـ ({.}) وهكذا، ويمكن تسريع ذلك عن طريق استخدام دالة جديدة تحسب عدد الأقواس: فنكتب (ا lm, n, p, q) ونعني بها (m{{...{p}...}n) حيث يوجد عدد (q) من مجموعات الأقواس، وبالطبع لا يقف باورز عند هذا الحد حيث يستمر هذا الخط من التفكير وصولا إلى ارتفاعات جامحة إلا أن هناك بعض الأرقام التي ستظل صعبة المنال مثل (شجرة فريدمان).

عدد جراهام Graham's number

يشهد غالبا لعدد جراهام بأنه أكبر رقم تم استخدامه عمليا، أما العدد الذي احتل هذه المكانة قبل عدد جراهام كان عدد سكيو (Skewe's number)، عدد ضئيل يساوي $10^{10^{10^{14}}}$.! (تحديد ما إذا كان عدد جراهام لا يزال هو حامل التاج أم لا يتوقف على إذا ماكنت تصنف الأعداد مثل تري (3) على أنها أعداد مفيدة أم لا). عدد سكيو يمكن كتابته بسهولة على شكل برج قصير من القوى إلا أن عدد جراهام يستحيل توصيفه دون الحاجة

إلى بعض الآليات العملاقة مثل معاملات باورز التي يقع فيها عدد جراهام ما بين (3{{1}}63) و (3{{1}}64).

لإعطاء فكرة عن مقدار هذا العدد سنبدأ بـ (3^{3^3}) الذي يساوي (7,625,597,484,987) ثم نبني برجا آخر من العدد 3 أطول بمقدار (3^{3^3})، ونطلق عليه العدد (A_1) (وهو بالفعل عدد كبير بطريقة يصعب تخيلها)، ثم نبني العدد (A_2) على صورة برج من العدد 3 بطوابق عددها (A_1) ، والعدد(A_3) على صورة برج من العدد 3 بطوابق عددها(A_2)، ونستمر في تكرار ذلك حتى نصل إلى (A_{A_1})، ويسمي هذا العدد (B_1) (ويمثل باستخدام أسهم كانوث على الصورة ($3 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3$)، ثم نكون العدد ($B_2$) على الصورة ($3 \uparrow \cdots \uparrow\uparrow 3$) بحيث يحتوى على أسهم عددها (B_1)، وهو ما يمكن كتابته باختصار على الصورة ($B_2 = 3\{B_1\}3$)، ثم ($B_3 = 3\{B_2\}3, B_4 = 3\{B_3\}3$) وهكذا . يقع عدد جراهام بين (B_{63})و (B_{64}) . وقد استخدمه رونالد جراهام عام 1977، حيث كان هو الحد العلوي لمسألة في نظرية رامزي كان حلها الحدسي الصحيح 12.

متتالية الشجرة لفريدمان Friedman's TREE sequence

في الثمانينات، اكتشف عالم المنطق هارفري فريدمان متتالية متزايدة تزايدا سريعا، وأطلق عليها اسم الشجرة "تري" (TREE) اشتقاقا من مسألة في نظرية رامزي. للوهلة الأولى لا تبدو المسألة صعبة للغاية وتبدأ المتتالية بداية حميدة بـ: TREE(1)=1,TREE(2)=3. لكن عند الوصول إلى ((TREE(3)) نصطدم بحائط ! حتى معاملات باورز تقف عاجزة أمام العدد ((TREE(3))، وأدرك فريدمان أن أي محاولة لتوصيف هذا العدد باستخدام لغة الرياضيات العادية لابد أن يتضمن رموزا كثيرة لدرجة يصعب فهمها (على سبيل المثال: أكبر من عدد جراهام) فهو بشكل أساسي لا يمكن توصيفه؛ حيث يمكنك كتابة معاملات باورز بمستويات أعلى وأعلى حتى نهاية الكون دون أدنى تأثير على هذا الرقم.

متتالية الشجرة لفريدمان تتزايد بسرعة كبيرة تعجز الرياضيات العادية (المستخدمة في حسابيات بيانو) عن مواكبتها مما يجعل ذلك أحد الأمثلة الدامغة الراسخة على مبرهنات عدم الاكتمال لجوديل (Gödelian incompleteness).

الكسور المستمرة Continued fractions

الكسر المستمر يكون على الصورة

$$a+\cfrac{b}{c+\cfrac{d}{e+\cfrac{f}{g+\cdots}}}$$

ويمكن كتابته باختصار على الصورة ($\mathbf{a+\frac{b}{c+}\frac{d}{e+}\frac{f}{g+}}$)

في الغالب تكون ($a, b, c, d, e, f, g \dots$) أعدادا صحيحة. تحديد إذا ما كان التتابع ($a, b, c, d \dots$) ينتج عنه كسر مستمر يتقارب إلى قيمة ثابتة معينة أم يتباعد إلى مالا نهاية مسألة صعبة إلا أن هناك وفرة من الأمثلة المعروفة على كسور متقاربة، وأبسط كسر مستمر غير منته هو الكسر المعبر عن المقطع الذهبي:

$$\emptyset = 1+\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\dots$$

وأيضا من الأمثلة الرائعة على ذلك الجذر التربيعي للعدد 2

$$\sqrt{2} = 1+\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\dots$$

وقد أثبت ليونارد أويلر أنه إذا كان هناك كسر مستمر يستمر إلى الأبد ويتقارب، فمن المؤكد أنه يمثل عددا غير نسبياً، ثم استنتج لأول مرة أن العدد (e) غير نسبي عن طريق إثبات أنه يساوي 1

$$e = 2+\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{4+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{6+}\dots$$

وكل هذه الكسور كسور مستمرة بسيطة لأن بسطها (الصفوف العلوية) جميعا يساوي 1.

الكسور المستمرة غير البسيطة Non-simple continued fractions

العدد (e) على صورة كسر مستمر غير بسيط تكون

$$\left(e = 2+\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{2}{3+}\frac{3}{4+}\frac{4}{5+}\frac{5}{6+}\dots\right)$$

كما أن السيد وليام برونكر اكتشف واحدا من أوائل الكسور المستمرة في بدايات القرن ال17، وهو

$$\frac{4}{\pi}=1+\frac{1^2}{2+}\frac{3^2}{2+}\frac{5^2}{2+}\frac{7^2}{2+}\dots$$

والذي يمكن معالجته للحصول على كسر مستمر لـ (π) إلا أن كسر (π) المستمر البسيط لازال غامضا. فكسور رامانجن المستمرة ليست بسيطة فحسب بل إنها لا تتكون من أعداد صحيحة.

كسور راما نجن المستمرة Ramanujan's continued fractions

كان عالم الرياضيات الهندي فيرتوسو سيرنفاسا رامانجان (virtuoso Srinivasa Ramanujan) أكثر تمكنا من الكسور المستمرة من أي عالم رياضيات آخر في العالم ، طبقا لما قاله صديقه ومستشاره جيه إتش هاردي (G.H.Hardy). وقد اكتشف رامنجان العديد من الصيغ الرائعة التي تتضمن كسورا مستمرة اكتشف معظمها مكتوبا بدون ترتيب في دفاتر بعد موته. لم يقدم رامنجان براهين لهذه الصيغ، بالإضافة إلى أنه أيضاً لم يترك أي ملاحظات تشرح كيف قام بهذه المفاخر الأكروباتية العقلية المدهشة. وألقي على عاتق علماء الرياضيات اللاحقين لرامنجان مهمة التحقق من هذه الصيغ، ولا زالت شفرة بعض تدويناته الخاصة جدا غير مفكوكة إلى الآن.

ومن أمثلة عمله على الكسور المستمرة : كسر احتوى على المقطع الذهبي $(\emptyset)$

$$\frac{1}{1+}\frac{e^{-2\pi\sqrt{5}}}{1+}\frac{e^{-4\pi\sqrt{5}}}{1+}\frac{e^{-6\pi\sqrt{5}}}{1+}\dots=e^{\frac{2\pi}{\sqrt{5}}}\left(\frac{\sqrt{5}}{1+\left(5^{\frac{3}{4}}(\emptyset-1)^{\frac{5}{2}}-1\right)^{\frac{1}{5}}}-\emptyset\right)$$

(القيمة العددية لهذا الكسر تساوي حوالي (0.999999) وقد يكون ذلك هو سبب اعتبار رامنجان أنه كسر مثير للاهتمام.). إن هذا حالة خاصة من كسر روجرز رامنجان (Rogers–Ramanujan fraction) المشهور. وقد اكتشفه ليونارد روجرز بمفرده، حيث كان نظاما مبتكرا لحساب قيمة

$$\frac{1}{1+}\frac{q}{1+}\frac{q^2}{1+}\frac{q^3}{1+}\dots$$ لقيم مختلفة من (q)

تكوين الكسور المستمرة Forming continued fractions

لنفرض أننا نريد تحويل أي كسر اعتيادي $(\frac{43}{30})$ إلى كسر مستمر بسيط، فسيكون هناك خطوتان أساسيتان: أولا نفصل الجزء الصحيح عن الجزء الكسري؛ أي تجزئة $(\frac{43}{30})$ إلى $(\frac{13}{30}+1)$ ثم نقلب الجزء الكسري رأسا على عقب، ونضعه في مقام كسر بسطه 1 فيصبح الكسر $(\frac{1}{(\frac{30}{13})}+1)$. يمكننا الآن تكرار ذلك مع $(\frac{30}{13})$. أولا نفصل الجزء الصحيح $(\frac{4}{13}+2)$ ثم نقلب الجزء الكسري رأسا على عقب $(\frac{1}{(\frac{13}{4})}+2)$، وإضافة ذلك إلى الخطوة السابقة يقودنا إلى:

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{(\frac{13}{4})}}$$

وبفصل الجزء الصحيح للكسر $(\frac{13}{4})$ ينتج الشكل النهائي:

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}}$$

انتهت العملية بعد عدد منته من الخطوات لأننا بدأنا بعدد نسبي، أما بالنسبة للأعداد غير النسبية فتنتج هذه العملية كسرا مستمرا طويلا غير منته. الكسر السابق هو كسر مستمر بسيط لأن كل مكوناته أعداد صحيحة، والبسط يساوي 1. يمكن التعبير عن أي عدد حقيقي بكسر مستمر بسيط، ويتم ذلك بطريقة وحيدة.

الكسر المستمر البسيط للعدد ط π's simple continued fraction

يكون الكسر المستمر البسيط على الصورة

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cdots}}}$$

ويمكننا كتابة المتسلسلة الناتجة على الصورة $(a, b, c, d, \ldots)$.

هناك سؤال محير بخصوص الكسر المستمر البسيط للعدد ط ، حيث تبدأ المتسلسلة بـ

(3,7,15,1,292,1,1,1,2,1,3,1,14,2,1,1,2,2,2,2,84,2,...). ووصل إيريك ويستن عام 2003 إلى الحد الذي ترتيبه 100 مليون ، إلا أن النمط المتبع فيها لازال غامضا، وعن طريق اقتطاع المتتالية بعد خطوات قليلة نحصل على تقريب كسري مقبول للعدد (ط): $(3, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{1033993}{33102},)$ إلخ.

ثابت كينتشن Khinchin's constant

إليكم طريقة لتوليد عدد جديد (k) من أي عدد حقيقي (x)

1- يمكن التعبير عن (x) بكسر مستمر بسيط بطريقة وحيدة، بالتالي، كما حدث في ط، نحصل على متتالية (a,b,c,d,e,f,...) تشتمل على (x).

2- ثم يكون بإمكاننا كتابة المتتالية $(\sqrt{ab}, \sqrt[3]{abc}, \sqrt[4]{abcd}, \sqrt[5]{abcde}, ...)$.

3- ستتقارب المتتالية أكثر فأكثر من قيمة ثابتة هي العدد (k) وهو المتوسط الهندسي للمتتالية (a, b, c, d, e, f, ...).

قد تبدو هذه العملية ملتفة إلا أن الأمر منتظر وراء ذلك حقا مدهش: جميع قيم (x) تقريبا تعطي نفس القيمة لـ (k)، وهذا الرقم المذهل يساوي تقريبا (2.685452...) ويعرف باسم ثابت كينتشن نسبة إلى مكتشفه ألكساندر كينتشن عام 1936م.

ليس صحيحا أن جميع قيم (x) بالمعنى الحرفي تعطي نفس القيمة، فالأعداد النسبية وكذلك العدد (ط) لا يعطون (k) إلا أن الأعداد التي تخفي وراءها ثابت كينتشن أكثر كثيرا من تلك الاستثناءات، فإذا اخترنا عددا حقيقا عشوائيا فسيكون احتمال أن هذا العدد يخضع لـ (k) 100٪ تماما، أما الأمر المدهش تماما هو أنه حتى الآن لم يتمكن أحد من إثبات أن أي قيمة منفردة لـ (x) تعطي القيمة (k)، ويبدو العدد ط أنه يعطي القيمة (k) (كما تفعل القيمة (k) نفسها) إلا أن ليس هناك براهين كاملة بعد. العدد (k) نفسه عدد غامض وليس معروفا حتى إذا كان غير نسبي أم لا .

الأعداد المتسامية TRANSCENDENTAL NUMBERS

الأعداد المتسامية Transcendental numbers

العدد غير النسبي هو العدد الذي لا يمكن كتابته على صورة كسر من أعداد صحيحة، والعدد ($\sqrt{2}$) مثال على ذلك إلا أن هناك ما يشعرنا أنه ليس بعيدا جدا عن الأعداد الصحيحة؛ فهناك مسار سريع يمكن أن يسلكه للعودة من كونه ($\sqrt{2}$) فقط عن طريق خطوة ضرب واحدة:($\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$) وهو عدد صحيح.

أما الأعداد المتسامية مثل (π) ليست كذلك؛ فحاصل الضرب ($\pi \times \pi$) لا يساوي عددا صحيحا، وكذلك (($3\pi \times \pi \times \pi$)) و $1001\ \pi^5 + 64\pi$ ليست أعدادا صحيحة أيضاً، في الواقع ليس هناك مسار يسلكه العدد المتسامي ليصبح عددا صحيحا باستخدام الجمع أو الطرح أو الضرب أو القسمة. التعريف العلمي هو أن : العدد (a) يقال له عدد متسامي إذا لم يكن هناك كثيرة حدود مكونة من أرقام صحيحة تعطي عددا صحيحا عند التعويض فيها بالعدد (a). جميع الأعداد المتسامية غير نسبية إلا أن العديد من الأرقام غير النسبية مثل ($\sqrt{2}$) وجميع الجذور وقوى الأعداد النسبية غير متسامية. يطلق على الأعداد غير المتسامية أعداد جبرية.

تسامي العدد π، e The Transcendence of π and e

اكتشف جوزيف ليوفل عام 1844 الأعداد المتسامية الأولى، وكان عدده الأشهر هو العدد (0.110001000000000000000001000) الذي يظهر فيه الرقم 1 في الخانة الأولى والثانية، والسادسة، والرابعة والعشرين وهكذا في متتالية من المضاريب (factorials). كان ظهور الأعداد المتسامية بالتأكيد صادما. وعلى الرغم من أن أعداد ليوفيل مثلت فضولا بدا عليه الاصطناع أكثر من أي موضوع مهم آخر إلا أن أهمية تلك الأعداد ترسخت في علم الرياضيات عام 1873 عندما أثبت شارلز هيرميت أن (e) عدد متسامي، وعام 1882 أضاف فيرديناند فون ليندمان العدد (π) إلى قائمة الأعداد المتسامية، وكان هذا كافيا لحل مسألة تربيع الدائرة القديمة، بذلك ترسخت أهمية الأعداد المتسامية إلا أن أحدا لم يتوقع توصل جورج كانتور لعدد هذه الأعداد.

مبدأ عدم قابلية الأعداد السامية للعد لكانتور

Cantor's uncountability of transcendental numbers

أطاحت نظرية المجموعات لجورج كانتور بالتمثيل القديم لمالانهاية على أنها كيان واحد. وبينت براهينه المتضادة على عدم قابلية الأعداد الحقيقية للعد، وقابلية الأعداد النسبية للعد أن الأعداد غير النسبية تفوق أبناء عمومتها : الأعداد النسبية عددا بشكل غير منته. وذهب كانتور إلى ما هو أبعد من ذلك فالأعداد الجبرية تحتوي على أعداد نسبية إلا أنها أيضاً تحتوي على العديد من الأعداد غير النسبية الأكثر شيوعا مثل ($\sqrt{2}$). أثبتت كانتور أن الأعداد الجبرية أيضاً قابلة للعد شأنها شأن الأعداد النسبية، ولهذا الأمر نتيجة مذهلة: فعلى الرغم من شذوذ وغرابة الأعداد المتسامية إلا أنها هي السائدة؛ حيث أن تقريبا جميع الأعداد الحقيقية أعداد متسامية، أما الأعداد المألوفة التي نستخدمها بكثرة مثل الأعداد الصحيحة والنسبية والجبرية فهي مجرد قطعة فضة صغيرة في فضاء الأعداد المتسامية الفسيح.

نظرية الأعداد المتسامية Transcendental number theory

لقد أثبت جورج كانتور أن تقريبا جميع الأعداد الحقيقية متسامية، ومن العجب العجاب أنه يصعب العثور على أمثلة محددة، وظلت أعداد ليوفيل، و العدد e و (ط) لبعض الوقت هي الأمثلة الوحيدة المعروفة. تناولت المسألة السابعة لهيلبرت عام 1900 لأول مرة الصعوبة الأساسية: الطريقة التي تتفاعل بها الأعداد المتسامية مع الرفع إلى قوى (exponentiation).

قدمت مبرهنة جيلفوند–شنايدر(، the Gelfond–Schneider theorem) عام 1834 الإجابة بتقديم القاعدة المحكمة الأولى للتسامي: يقال أنه إذا كان (a) عددا جبريا (ليس 0 ولا 1)، و كان (b) عددا جبريا غير نسبي فسيكون (a^b) دائما عددا متساميا، بالتالي فإن العددين ($\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$)، و ($3^{\sqrt{7}}$) على سبيل المثال متساميان.وخلال القرن العشرين تم البناء على هذه النتيجة ولا سيما في النتائج مثل مبرهنة الأسس الستة (the six exponentials theorem)، والعمل الرائد لآلان بيكر(Alan Baker) في الستينيات الذي حصل من أجله على ميدالية فيلدز.

كان عمل آلان حول جمع الأعداد على الصورة ($b \ln a$)، وقد أدت نتائجه إلى توسيع مبرهنة جيلفوند–شنايدر إلى حواصل ضرب أعداد على الصورة (a^b) (حيث (a)، و (b) كلاهما عدد جبري، و(a) لا تساوي 0 أو 1، و(b) غير نسبي)

وقد أضاف ذلك إلى رصيد الأمثلة المعروفة للأعداد المتسامية إضافة هائلة عن طريق تضمين أعداد مثل ($2^{\sqrt{3}} \times 5^{\sqrt{7}} \times \sqrt{10}^{\sqrt{11}}$) إلا أن ظاهرة التسامي لا زالت صعبة التحديد للغاية، فإلى اليوم لازالت حالة العديد من الأعداد بما فيها (e^e)، ($e + \pi$) مجهولة. ومعظم تلك الأسئلة غير المحلولة تأتي من حدسية سكانويل (Schanuel's conjecture).

مبرهنة الأسس الستة Six exponentials theorem

أثبت كل من سيجل (Siegel)، وشنايدر (Schneider)، و لانج (Lang)، وراماشاندرا (Ramachandra) مبرهنة الأسس الستة التي تهاجم المسألة الأساسية في نظرية الأعداد المتسامية وهي: عدد مرات الرفع إلى قوى اللازمة ليكون الناتج عددا متساميا.

وهي تنص على أنه إذا كان (a)، (b) أعدادا مركبة ، وكذلك ((x)، (y)، (z) أعدادا مركبة أيضاً فإن على الأقل أحد هذه الأرقام (e^{ax})، (e^{bx})، (e^{ay})، (e^{by})، (e^{az})، (e^{bz}) يكون متساميا، أما الشروط فهي أن (a)، (b) لابد أن يكونا مستقلين خطيا بمعنى أن أحدهما ليس مضاعفا للآخر بعدد نسبي (بالتالي ($a \neq \frac{3}{4}b$) مثلا)، بالمثل يجب ألا تكون أي من (x)، أو(y)،أو (z) يمكن الحصول عليها بضرب الأخرتين في عدد نسبي والجمع (بالتالي ($x \neq \frac{1}{3}y + \frac{2}{5}z$) مثلا).

هذه المسألة مفتوحة، وتعرف باسم حدسية الأسس الأربعة سواء الشيء نفسه يتحقق عند حذف (z) أم لا ينتج من حدسية سكانويل.

حدسية سكانويل Schanuel's conjecture

كانت المشكلة الحرجة منذ بداية نظرية الأعداد المتسامية هي كيفية تصرف الأعداد المتسامية عند رفعها إلى قوى. عام 1960م وضع ستيفن سكانويل (Stephen Schanuel) حدسية شاملة قد تغير فهمنا تماما للظاهرة فقط إذا تم إثباتها . في الحقيقة تندرج حدسية

سكانويل تقريبا تحت كل المبرهنات المعروفة حول الأعداد المتسامية، وفي نفس الوقت تحل مئات الأسئلة المفتوحة بما فيها حدسية الأسس الأربعة، وتسامي (e^e)، و($e + \pi$).

حدسية سكانويل مصاغة باللغة التقنية لنظرية جالو(Galois theory)، وتقول في مضمونها أنه لا يوجد مفاجآت غير سارة مخبأة: فالتسامي والرفع إلى قوى يتفاعلان معا بطريقة بسيطة كما يؤمل تماما. فطبقا لمنظر الأعداد دايفيد ماسر (David Masser، فإن حدسية سكانويل "ينظر إليها بشكل عام على أنها يستحيل إثباتها " إلا أن في عام 2004 طبق بوريس زيلبر (Boris Zilber) أساليب من نظرية النموذج (model theory) ليقدم دليلا قويا غير مباشر على أن حدسية سكانويل يجب أن تكون صحيحة، ولازال النظر في إذا ما كان يمكن اعتبار هذه الرؤية برهانا على تلك الحدسية الخطيرة أم لا قائما.

الإنشاءات باستخدام المسطرة والفرجار
RULER AND COMPASS CONSTRUCTIONS

الإنشاءات باستخدام المسطرة والفرجار Ruler and compass constructions

عالم الهندسة مملوء بالأجسام والأشكال العجيبة، وغالبا ما ننظر إلى تلك الأشياء من وجهة نظر نظرية بحتة، لكن كيف يمكننا إنشاء هذه الأجسام والأشكال بالفعل؟ لنأخذ هذا السؤال إلى حدوده الصحيحة، أي هذه الأشكال يمكن إنشاؤه باستخدام أبسط الأدوات: المسطرة لرسم الخطوط، والفرجار لرسم الدائرة؟ لقد افتتن علماء الرياضيات اليونانيين القدماء بهذا السؤال.

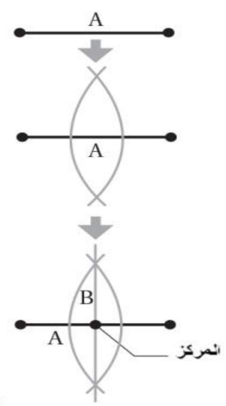
يطلق أحيانا على هذه العملية اسم الإنشاءات باستخدام الحافة المستقيمة والفرجار لتوضيح أن المسطرة هنا لا تستخدم في القياس بل هي فقط أداة لرسم خطوط مستقيمة، وبالمثل، يضبط الفرجار بحيث تكون فتحته مساوية لطول أي خط تم إنشاؤه بالفعل (أو أي طول عشوائي).

بالتمكن من بعض الأمثلة المحددة مثل (إنشاء سباعي عشر جاوس Gauss’ heptadecagon) بدأت بعض المبادئ الجبرية المستخدمة في الوضوح. فأعمال بيير وانتزيل

(Pierre Wantzel) في القرن التاسع عشر وكذلك تطوير الأعداد القابلة للإنشاء هي ما أدت إلى محو هذا السؤال تماما من فرع الهندسة، ووضعه في مملكة نظرية الأعداد الجبرية.

تنصيف الخط المستقيم Bisecting a line

لدينا نقطتان مرسومتان على ورقة: التحدي هو إيجاد النقطة التي تقع في منتصف المسافة بينهما تماما باستخدام مسطرة وفرجار فقط. الحل كما ورد في مسألة 1.10 في كتاب العناصر لإقليدس هو ما يلي:



1- صل النقطتين بخط مستقيم (A)
2- افتح الفرجار بحيث تكون فتحته أكبر من نصف المسافة بين النقطتين. ضع سن الفرجار على احدي النقطتين ثم ارسم قوسا يقطع الخط، وكرر ذلك عند النقطة الثانية.
3- لابد أن يتقاطع القوسان في موضعين (طالما قمت برسمهما بطول مناسب). صل الموضعين بخط مستقيم (B)
4- الموضع الذي يتقاطع فيه الخطان (A)، و(B) هو نقطة المنتصف التي نبحث عنها.

في حقيقة الأمر، هذا الإنشاء يقدم ما هو أكثر قليلا من مجرد إيجاد نقطة المنصف: الخط (B) هو المنصف العمودي للخط (A).

إنشاء الخطوط المتوازية Constructing parallel lines

من البديهيات الأساسية في الهندسة الإقليدية مسلمة التوازي التي تقول أن لأي خط (L)، وأي نقطة (A) لا تنتمي إليه هناك خط آخر يمر بـ (A) موازيا للخط (L). هل يمكن إنشاء ذلك بالمسطرة والفرجار؟

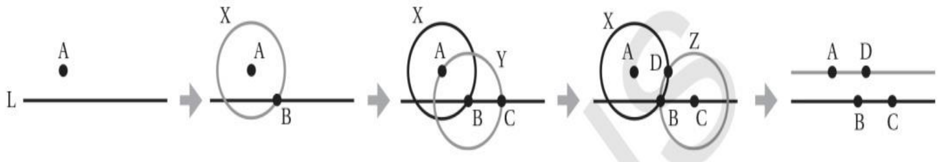
مسألة 1.31 في كتاب العناصر لإقليدس تقول إن ذلك ممكن. أولا افتح الفرجار فتحة أكبر من المسافة بين النقطة (A)، والخط (L) وابق على فتحة الفرجار هذه حتى نهاية الإنشاء.

1- ارسم دائرة (X) مركزها (A) تقطع الخط (L) في موضعين؛ اختر أحدهما وارمز له بـ (B)

2- ارسم دائرة أخرى (Y) مركزها (B) ستقطع الخط (L) في موضعين أيضاً؛ اختر أحدهما وارمز له بـ (C).

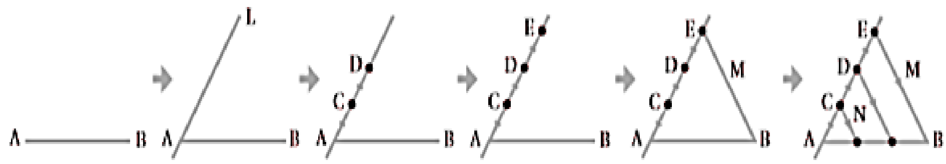
3- ارسم دائرة ثالثة (Z) مركزها (C) ستقطع الدائرة (X) في (B) وفي نقطة ثانية نرمز لها بـ (D).

4- الخط (AD) موازي للخط (L) كما نريد.



تثليث الخط المستقيم Trisecting a line

بما أنه يمكن تنصيف الخط المستقيم باستخدام المسطرة والفرجار فقط، بالتالي يمكن أيضاً تقسيمه إلى أربعة، أو ثمانية أجزاء، أو ست عشرة جزءا متساويا فقط بتكرار ما قمنا به في عملية التنصيف، لكن هل يمكن تقسيم الخط إلى ثلاثة أجزاء متساوية؟ وضح إقليدس في مسألة 6.9 في كتاب العناصر أن ذلك ممكن:



1- لتجزئة الخط (AB) إلى ثلاثة أجزاء، ارسم أولا خطا أخر (L) يمر بـ (A).

2- اختر أي نقطة (C) تنتمي للخط (L) ثم استخدم الفرجار لتحديد نقطة أخرى (D) على الخط (L) بحيث تكون المسافة من (A) إلى (C) هي نفسها المسافة من (C) إلى (D).

3- كرر ذلك لإيجاد نقطة ثالثة (E) تنتمي للخط (L) بحيث تكون المسافة من (A) إلى (C) هي نفسها من (D) إلى (E) بحيث تكون (C) في ثلث المسافة من (A) إلى (E).

4- الآن صل (E) بـ (B) بخط جديد (M).

5- ارسم خطا (N) يمر بـ (C) موازيا لـ (M).

6- النقطة التي يقطع فيها الخط (N) (AB) تقع في ثلث المسافة من (A) إلى (B).

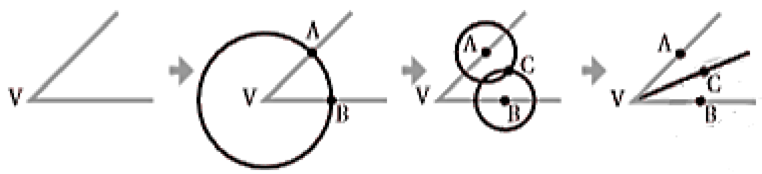
الخطوة 5 تتطلب استخدام إنشاء الخطوط المتوازية.

الخطوط ذات الأطوال النسبية Lines of rational length

يمكن تعميم طريقة تثليث الخط المستقيم للسماح بتجزئة الخط إلى أي عدد تريده من الأجزاء. إذا بدأنا بخط طوله الوحدة يمكننا إنشاء خط طوله $(\frac{x}{y})$ حيث $(\frac{x}{y})$ عدد نسبي. أولا قم بتجزئة الخط إلى عدد (Y) من الأجزاء المتساوية. ثم ضع عدد(x) بحيث تكون نهاياتها متصلة ببعضها البعض (عن طريق قياس أجزاء الخط الطويل باستخدام الفرجار). وهذا يبين أن جميع الأعداد النسبية قابلة للإنشاء. بعض- لكن ليس كلها- الأعداد غير النسبية قابلة للإنشاء أيضاً، لأن الجذر التربيعي عملية قابلة للإنشاء أيضاً.

تنصيف الزاوية Bisecting an angle

لدينا ورقة تحتوي على خطين متلاقيين يصنعان زاوية: التحدي هو تقسيم هذه الزاوية إلى نصفين باستخدام المسطرة والفرجار فقط. الحل الذي جاء في مسألة 1.9 في كتاب العناصر لإقليدس كالآتي:



1- ضع الفرجار عند رأس الزاوية (V)، وافتحه فتحة لها أي طول. ارسم قوسا يقطع ضلعي الزاوية في نقطتين (A)، و(B).

2- بعد التأكد من أن فتحة الفرجار كبيرة، ضع الفرجار عند (A) وارسم دائرة.

3- ابق الفرجار على نفس الفتحة وارسم دائرة أخرى مركزها (B).

4- لابد أن تتلاقى الدائرتان وليكن في (C).

5- صل بين (V)و(C) بخط مستقيم: هذا هو منصف الزاوية.

تثليث الزاوية Trisecting an angle

خطوات تنصيف الزاوية ليست معقدة بصورة خاصة، والسؤال الأصعب كلية هو ما إذا كانت زاوية عامة ما يمكن تثليثها: أي تقسيمها إلى ثلاثة زوايا متساوية. استطاع أرشميدس من بين آخرين أن يحل هذه المسألة، واكتشف كيف يمكن عمل ذلك باستخدام أداة إضافية مكنته من الرسم ألا وهي حلزون أرشميدس، فلم يستطع هو أو غيره تنفيذ هذا الأمر بدقة باستخدام المسطرة والفرجار فقط، إلا أن هناك وسائل تقريبية اكتشفت إحداها أن ترسم وترا يمر بالزاوية ثم تقوم بتثليث هذا الوتر.

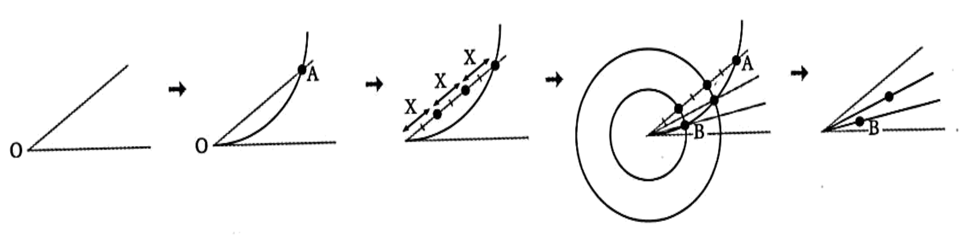
ظل هذا اللغز قائما حتى عام 1836 عندما أثبته بيير وانتزل أخيرا. بصفة عامة لا يمكن جبريا تثليث الزاوية باستخدام المسطرة والفرجار فقط. إلا أن بعض الزوايا الخاصة مثل الزاوية القائمة يمكن تثليثها جبريا.

تثليث الزاوية باستخدام المسطرة والفرجار وحلزون أرشميدس

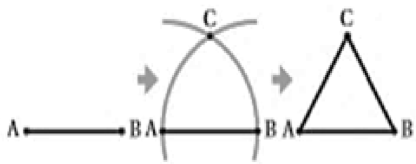
Trisecting an angle using a ruler, compass, and Archimedean spiral

لنفرض أن زاوية ما رأسها المركز (O) وضلعيها خطان أحدهما أفقي والآخر مائل. ارسم حلزونا مركزه (O). عند نقطة ما ولتكن (A) سيقطع المنحنى الخط المائل.

من التعريف: لجميع النقط الواقعة على الحلزون تكون المسافة بين النقطة والمركز تساوي قياس الزاوية المرسومة لأن $(\mathbf{r = 0})$. عند هذه المرحلة يكون تثليث الزاوية مكافئا لتثليث المسافة بين (A)، و(O) ، وبالطبع هذه مسألة يمكن حلها ، ولنقل أن المسافة الناتجة (X). نفتح الفرجار فتحة مساوية لـ (X)، ونستخدم ذلك لإيجاد نقطة على الحلزون تقع على بعد (X) من المركز ، وهذا هو حل المسألة الأصلية.



إنشاء مثلث متساوي الأضلاع Constructing an equilateral triangle



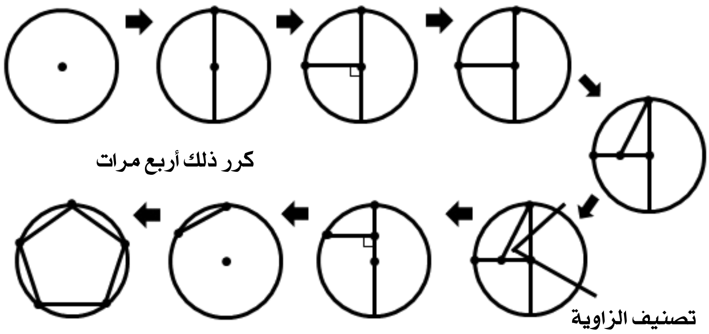
تبين أول مسألة في كتاب إقليدس؛ المسألة 1.1 أن المثلث المتساوي الأضلاع يمكن إنشاؤه باستخدام المسطرة والفرجار. نفرض أن لدينا قطعة من خط مستقيم (وليكن طرفيها (A)، و(B). التحدي هو أن نجد نقطة أخرى (C) بحيث يكون (ABC) مثلثا متساوي الأضلاع. حل إقليدس كما يلي:

1- افتح الفرجار فتحة مساوية للمسافة بين (A)، و(B)، ثم ارسم قوسا مركزه (A)، ويمر بالنقطة (B).
2- بنفس فتحة الفرجار ارسم قوسا مركزه (B)، ويمر بالنقطة (A).
3- لابد أن يتلاقى القوسان في نقطة: هي النقطة (C).

إنشاء المربعات، والمضلعات الخماسية Constructing squares and pentagons

المثلث متساوي الأضلاع هو أول مضلع منتظم،وهو قابل للإنشاء، يليه المربع، وقد بينت مسألة 1.46 في كتاب العناصر لإقليدس أن المربع قابل للإنشاء أيضاً، ويتوقف ذلك على إمكانية رسم زاوية قائمة عند نقطة (A) على خط ما (L)، وهذا ممكن عن طريق أخذ نقطتين (B)، و(C) على مسافة متساوية على جانبي النقطة (A) وبالتالي تكون منصفة للقطعة (BC).

يحتوي كتاب العناصر أيضاً على شرح كيفية إنشاء مضلع خماسي منتظم (انظر الشكل)، وكذلك إنشاء مضلع سداسي، وخماسي عشر (15 ضلع).



سباعي عشر جاوس Gauss' heptadecagon

يمكن تمديد طريقة إقليدس لإنشاء المضلعات المنتظمة لتشمل المضلعات الأخرى، وقد تمكن علماء الرياضيات كلية من إنشاء مضلع منتظم عدد أضلاعه (n) حيث (n) إحدى القيم الآتية (3,4,5,6,8,10,12,15,16,20,24,30,32,40,48,60,64,...)... وبقي الوضع كما هو عليه دون تغيير لمدة ألفي عام. وقد كان ذلك غير مرضيا أبدا: ألا يمكن إنشاء مضلعات عدد أضلاعها 7، أو 9، أو 11؟ و إذا كان ذلك غير ممكن فماذا تعني تلك المتتالية؟ أم أن هناك طرقا مناسبة لذلك لكن غير مكتشفة بعد؟

عام 1796م، أدهش كارل فريدريك جاوس (Carl Friedrich Gauss) عقول المجتمع الرياضي بإعلانه أنه تمكن من إنشاء مضلع سباعي عشري منتظم (17 ضلعا). وجاء شرح ذلك في تحليله للمضلعات القابلة للإنشاء خلال الأعداد الأولية لفيرما (Fermat primes). كان جاوس سعيدا باكتشافه إلى درجة جعلته يطلب نحت هذا الشكل على شاهد قبره إلا أن النحات رفض ذلك مبينا أنه سوف يبدو على شكل دائرة. وقد مثل هذا الشكل المحبب إلى قلب جاوس في تمثال تكريما له في مسقط رأسه: مدينة براونشفايغ بألمانيا.

المضلعات القابلة للإنشاء Constructible polygons

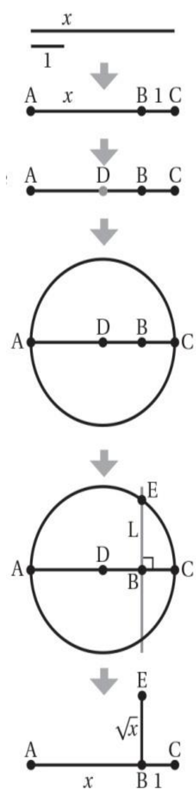
جعل إنشاء جاوس للمضلع السباعي عشر متتالية المضلعات القابلة للإنشاء أكثر غموضا: (3,4,5,6,8,10,12,15,16,17,20,24,30,32,40,48,60,64,...)..... إلا أنه في الحقيقة لم يتوقف عند حقيقة أن المضلع ذا السبع عشرة ضلعا قابل للإنشاء، بل بين أنه إذا كان العدد (n) له صورة معينة فإن المضلع الذي عدد أضلاعه (n) يكون قابلا للإنشاء، وهذه الصورة تعتمد على التفكيك الأولي (prime factorization) للعدد (n).

فإذا كانت (n) إحدى قوى العدد 2 فسيكون المضلع الذي عدد أضلاعه (n) قابلا للإنشاء، وإن لم يكن الأمر كذلك، فلابد لكي تكون (n) قابلة للإنشاء أن تكون الأعداد الأولية الوحيدة التي تظهر في تفكيك (n) هي أعداد فيرما الأولية: تلك الأعداد على الصورة ($2^{2^m}+1$) مثل ($3(=2^{2^0}+1)$) و ($15(=2^{2^1}+1)$) وبالطبع ($17(=2^{2^2}+1)$).

والأكثر من ذلك أن هذه الأعداد الأولية لفيرما تظهر مرة واحدة فقط في مفكوك (n). بالتالي يكون معيار جاوس لتحديد قابلية الإنشاء هو أن $(n = 2^k \times p \times q \ldots \times s)$ حيث (k) أي رقم طبيعي، و $(p, q, \ldots, s)$ أعداد فيرما أولية مختلفة.

وقد افترض جاوس أن هذا الشرط ضروري أيضاً: فالمضلع الذي عدد أضلاعه (n) يكون قابلا للإنشاء فقط إذا تحقق هذا الشرط. وقد أثبت بيير وانتزل ذلك عام 1836. ويتوقف إيجاد المزيد من المضلعات القابلة للإنشاء فقط على ما إذا كان هناك المزيد من أعداد فيرما الأولية أم لا.

إنشاء الجذر التربيعي Constructing a square root



بين إقليدس في 2.14 من كتاب العناصر كيفية إنشاء جذر تربيعي باستخدام المسطرة، والفرجار فقط. لنفرض أن لدينا طولين هما (I)، و(x) (سوف نفرض أن $(\mathbf{x} > \mathbf{1})$ للتسهيل، لكن هذه الطريقة يمكن تطبيقها بسهولة إذا كانت $(\mathbf{x} < \mathbf{1})$. التحدي هو إنشاء خط جديد طوله $(\sqrt{\mathbf{x}})$.

1- أولا ضع الطولين جنبا إلى جنب من نهايتيهما بحيث تحصل على خط (AC) طوله $(\mathbf{x} + \mathbf{1})$، ويمكن تنفيذ ذلك باستخدام الفرجار. حدد النقطة (B) حيث تتلاقى القطعتان.

2- نصف (AC) لتحصل على نقطة (D).

3- افتح الفرجار فتحة مساوية لطول (AD) وارسم دائرة مركزها (D).

4- بعد ذلك ارسم خطا مستقيما (L) يمر بالنقطة (B) عمودياً على (AC).

5- حدد نقطة (E) يقطع فيها الخط (L) الدائرة.

6- الخط (EB) طوله يساوي $(\sqrt{\mathbf{x}})$.

السبب وراء نجاح ذلك هو أن (DE) يساوي (DC) في الطول ويساويان تحديدا نصف (AC) $(\frac{x+1}{2})$، وأيضا طول (DB) = $(\frac{x+1}{2} - 1 = \frac{x-1}{2})$، وبالتالي عند تطبيق مبرهنة فيثاغورث على المثلث (DBE) نجد أنه إذا كان طول الضلع (EB) يساوي (y) فإن $(y^2 + (\frac{x-1}{2})^2)$، وبالقليل من الجبر تكتمل الحجة.

تربيع الدائرة Squaring the circle

التحدي كالآتي: لدينا دائرة، والمطلوب هو إنشاء مربع له نفس المساحة باستخدام المسطرة والفرجار فقط. لقد حيرت هذه المسألة- التي تعرف أيضاً باسم (the quadrature of the circle)- عقول علماء الرياضيات منذ عصور اليونانيين القدماء، وهي وثيقة الارتباط بمسألة أكثر قدما هي: قيمة العدد ط.

لنفرض أن نصف قطر الدائرة يساوي الوحدة، بالتالي فإن مساحتها تساوي $(\boldsymbol{\pi} \times \mathbf{1}^2 = \boldsymbol{\pi})$، بالتالي لابد أن تكون أضلاع المربع الذي نريده مساوية $(\sqrt{\boldsymbol{\pi}})$، وبمجرد أن يكون لدينا خط بهذا الطول فسيصبح إنشاء المربع مباشرا، أي أن عُقدة المسألة تكمن في إنشاء هذا الطول.

بما أن الجذور التربيعية قابلة للإنشاء فيكفي إنشاء خط طوله $(\boldsymbol{\pi})$، بالتالي يكون مفتاح حل المسألة هو ما إذا كانت $(\boldsymbol{\pi})$ قابلة للإنشاء أم لا. عام 1836 وضح "بيير وانتزل" أنه إذا كان $(\boldsymbol{\pi})$ عددا متساميا فإنه يكون غير قابل للإنشاء. أما الجزء النهائي من هذه الأحجية جاء عام 1882 عندما تضمنت مبرهنة ليندمان - ويرستراس (the Lindemann–Weierstrass theorem) أن $(\boldsymbol{\pi})$ حقا عدد متسامي، وبالتالي يكون تربيع الدائرة مستحيلا.

تربيع الدائرة التقريبي لراما نجن Ramanujan's approximate circle-squaring

وجد سيرنفانا 1914 طريقة تقريبية دقيقة جدا لتربيع الدائرة، فعلى الرغم من أن $(\boldsymbol{\pi})$ غير قابل للإنشاء إلا أنه وجد تقريبا عجيبا له قابلا للإنشاء، وهو تحديدا $\left(\sqrt[4]{\frac{\mathbf{2143}}{\mathbf{22}}}\right)$ ، ودقته تصل إلى 8 خانات عشرية. العدد $(\frac{\mathbf{2143}}{\mathbf{22}})$ قابل للإنشاء كطول نسبي، ثم تطبق خطوات

إنشاء الجذر التربيعي مرتين للحصول على $\left(\sqrt{\frac{2143}{22}}\right)$ ثم $\left(\sqrt[4]{\frac{2143}{22}}\right)$. إذا كان طول الدائرة الأصلية مترا واحدا سوف تكون أضلاع المربع الناتج دقيقة إلى أقرب نانومتر.

مضاعفة المكعب Doubling the cube

حوالي عام 430 ق.م عانت آثينا من مرض الطاعون الفتاك، فاستشار الآثينيون عرافة أبولو على جزيرة دي لوس. أخبرتهم العرافة أن للقضاء على الطاعون عليهم إنشاء مذبح جديد للكنيسة حجمه ضعف الحجم الحالي. وعندما استشاروا أفلاطون كان رده أن العرافة تنوي فضح عدم اهتمام الإغريق بعلم الهندسة، هذه هي رواية أصل مسألة مضاعفة المكعب، ومهما كانت هذه الرواية حقيقية أم لا، فإن هذه المسألة حقا شغلت عقول علماء الرياضيات القدامى، وهي في الأساس مسألة إنشاء باستخدام المسطرة والفرجار (و إن كانت في الأبعاد الثلاثية): لدينا مكعب والتحدي هو إنشاء مكعب جديد حجمه ضعف المكعب الأصلي.

لنفرض أن طول حرف المكعب الأصلي مترا واحدا، وبالتالي يكون حجمه مترا مكعبا ويكون حجم المكعب المطلوب مترين مكعبين، مما يعني أن طول حرفه يساوي ($\sqrt[3]{\mathbf{2}}$)، وإنشاء هذا الطول هو لب المسألة. تمكن (Menaechmus) صديق أفلاطون من حل المسألة باستخدام المزيد من الأدوات أكثر من المسطرة والفرجار البسيطين: أدرك في الأساس أن القطعين المكافئين ($\mathbf{y^2 = 2x}$)، و($\mathbf{y = x^2}$) يتقاطعان في نقطة إحداثي (X) لها يساوي (وهي رؤية مذهلة حيث إن الإحداثيات الديكارتية لم تكتشف إلا بعد آلاف السنين من ذلك). في النهاية عام 1836 أثبت بيير وانتزل –الذي بين أن ($\sqrt[3]{\mathbf{2}}$) عدد غير قابل للإنشاء–أن المسالة مستحيلة.

الأعداد القابلة للإنشاء Constructible numbers

تختصر العديد من مسائل إنشاءات المسطرة والفرجار إلى التالي: إذا كان لدينا خط طوله الوحدة، وعدد (r)، فهل من الممكن إنشاء خط طوله (r)؟ إذا كان ذلك ممكنا نقل أن العدد (r) عدد قابل للإنشاء، ومن الواضح أن الأعداد الصحيحة مثل 4 قابلة للإنشاء:

ارسم خطا طويلا ثم استخدم الفرجار لتحديد طول أربع قطع مستقيمة متتالية طول كل منها الوحدة.

الأعداد على الصورة $(\frac{m}{n})$ قابلة للإنشاء أيضاً: يمكن بسهولة تمديد طريقة تثليث الخط المستقيم للحصول على خط طوله عدد نسبي.

حتى الآن يتضح أن جميع الأعداد النسبية قابلة للإنشاء إلا أنها ليست هي فقط، فالجذور التربيعية أيضاً قابلة للإنشاء. وقد أثبت بيير واتنزل أن ذلك هو أقصى ما في وسعنا عمله: فالأعداد القابلة للإنشاء هي فقط الأعداد التي نحصل عليها عن طريق جمع الأعداد النسبية وطرحها وضربها وقسمتها، وإيجاد جذورها التربيعية، ويشير ذلك إلى أن الأعداد القابلة للإنشاء تكون مجالا (field).

بصفة خاصة، جميع الأعداد القابلة للإنشاء أعداد جبرية، مما يعني أنه ليس هناك عددا متساميا مثل (π) قابل للإنشاء، لكن ليست جميع الأعداد الجبرية قابلة للإنشاء: فمثلا $(\sqrt[3]{2})$ ليس قابلا للإنشاء على الرغم من أن $(\sqrt[4]{2})$ قابلا للإنشاء لأنه يساوي $(\sqrt{\sqrt{2}})$. هذه الرؤية قدمت لوانتزل حل العديد من المسائل البارزة لآلاف السنين: تثليث الزاوية، ومضاعفة المكعب، كما أنه أكمل عمل جاوس على المضلعات القابلة للإنشاء وحقق تقدما واسعا في مسألة تربيع الدائرة.

المعادلات الديفونتية DIOPHANTINE EQUATIONS

نظرية الأعداد Numbers theory

قد يبدو مصطلح (Numbers theory) وصفا جيدا لعلم الرياضيات بأكمله إلا أن هذا الموضوع يركز على نظام الأعداد الصحيحة العادية أكثر من نظام الأعداد الحقيقية أو المركبة المخلخلين، فالأعداد الصحيحة هي أقدم البني الرياضية وأكثرها جوهرية إلا أن أعمق الأسئلة الرياضية تكمن تحت سطح هذه الأعداد بما فيها فرضية ريمان (Riemann hypothesis) ومبرهنة فيرما الأخيرة (Fermat's last theorem).

لقد كان البابليون القدماء شغوفين بنظرية الأعداد كما يتضح من الألواح مثل لوح بليمبتون 322(Plimpton 322) التي يرجع تاريخها إلى حوالي عام 1800 ق.م. وقد شهد العصر الكلاسيكي تطورات مهمة من خلال أريثماتيكا (مجموعة من 13 كتاب للعالم ديوفانتوس بالإسكندرية) حوالي عام 250م. أما نظرية الأعداد الحديثة فقد كانت بواكيرها في أعمال القاضي الفرنسي بيير دي فيرما في القرن السابع عشر.

نظرية الأعداد الجبرية والتحليلية Algebraic and analytic numbers theory

الاهتمامان الرئيسيان لنظرية الأعداد المعاصرة هما سلوك الأعداد الأولية، ودراسة المعادلات الديفونتية: وهي الصيغ التي تصف العلاقات بين الأعداد الصحيحة. وهذان الموضوعان يتوافقان تقريبا مع الفرعين الرئيسيين للموضوع: نظرية الأعداد الجبرية، ونظرية الأعداد التحليلية.

أما أدوات الموضوعين فهي مختلفة حيث أن المنهج الجبري يدرس الأعداد من خلال العناصر مثل المجموعات والمنحنيات الإهليلجية بينما نظرية الأعداد التحليلية تستخدم وسائل من الأعداد المركبة مثل الدالة اللامية (L-functions). ويقدم برنامج لانجلاند (Langland's program) إشارة محيرة إلى أن هذين الموضوعين العظيمين هما وجهتا نظر مختلفة لنفس العناصر الكامنة.

الحساب النمطي Modular arithmetic

الحساب النمطي هو حساب البواقي. نقول 11 مطابقة لـ 1 (بمقياس) 5 وتكتب ((11=1(mod5))، وتعني أن باقي العدد 11 عند قسمته على العدد 5 يساوي 1 لأن ($11 = 2 \times 5 + 1$). وكل ما يهم هنا هو الباقي 1 ليس عدد مرات تكرار العدد 5 في العدد 11 (وهو 2 في هذه الحالة). بالمثل يمكن أن نكتب ((6+6=0(mod4)) (مقياس 4)، أو (($8 \times 3 = 2(\mathrm{mod}11)$) (مقياس 11).

الحساب النمطي واسع الانتشار ليس فقط في علم الرياضيات بل في الحياة اليومية. فنظام ال 12 ساعة يعتمد على قدرتنا على عمل حسابات نمطية بمقياس 12، وإذا قمت

بحساب أي أيام الأسبوع سيكون بعد تسعة أيام من اليوم تكون قد قمت بعملية حسابية مقياسها 7، والحساب النمطي مفيد في نظرية الأعداد لأنه يزود بالمعلومات عن الأرقام التي قيمها المضبوطة مجهولة عن طريق النتائج الفعالة مثل مبرهنة فيرما الصغرى (Fermat’s little theorem)، وقانون التبادل التربيعي لجاوس (Gauss’ quadratic reciprocity law).

مبرهنة الباقي الصينية Chinese remainder theorem

في وقت ما بين القرنين الثالث والخامس بعد الميلاد كتب عالم الرياضيات الصيني سان زي (Sun Zi): "لنفرض أننا لدينا عدد غير معروف من العناصر، عند عدها ثلاثة ثلاثة يتبقى اثنان، وعند عدها خمسة خمسة يتبقى ثلاثة، وعند عدها سبعة سبعة يتبقى اثنان، كم عدد هذه العناصر؟" من وجهة النظر الحديثة، هذه المسألة تنتمي للحساب النمطي: وما نحتاجه هو عدد (n) حيث (n = 2) (مقياس 3)، و(n = 3) (مقياس 5)، و(n = 2)(مقياس 7).

تنص مبرهنة الباقي الصينية على أن هذا النوع من المسائل له حل دائما، وأبسط الحالات تتضمن فقط متطابقين: إذا كانت (a)، (b)، (r)، (s) أي أعداد فسيكون هناك دائما عدد (n) حيث (n = a مقياس (r))، و (n = b (مقياس(s))، والشرط هو أن (r)، و(s) لابد أن يكونا عددين أوليين فيما بينهما (أي ليس بينهما عوامل مشتركة (coprime))، وهذا يمتد مباشرة إلى حل أي عدد من المتطابقات (بشرط أن المقاييس جميعها أولية فيما بينها). الحل (n) ليس وحيدا تماما: 23 و 128 كلاهما حل لمسألة سان زي الأصلية. وبصفة عامة سيكون هناك حلا واحدا بالضبط يكون على الأكثر حاصل ضرب جميع المقاييس وهو في هذه الحالة ((7 × 5 × 3)105).

مبرهنة فيرما الصغرى Fermat’s little theorem

مبرهنة فيرما الصغرى هي حجر الزاوية لنظرية الأعداد الابتدائية وهي تأتي من ملاحظة أن ($15^2 - 15$) قابلة للقسمة على 2، و ($101^7 - 101$) قابلة للقسمة على 7.

عام 1640 كتب بيير دي فيرما إلى بيرنارد فرينكل دي بيسي نص نظريته الصغيرة: إذا كان (p) عددا أوليا، و (n) عدد صحيح، بالتالي $(n^p - n)$ لابد أن يكون قابلا للقسمة على $(n^p - n)$، وبكتابة ذلك باستخدام الحساب النمطي نحصل على

$$n^p - n = 0(\text{mod } p) \text{or } n^p = n(\text{mod } p)$$

إذا كانت (n) نفسها لا تقبل القسمة على (p) سيكون ذلك مكافئا لـ

$$(n^{p-1} = 1(\text{mod } p))$$

وأضاف فيرما ملاحظته المميزة "كنت سأرسل لك البرهان إلا إنني خشيت أن يكون طويلا جدا".

والبراهين المعروفة الأولى لهذه المبرهنة كانت لجوتفيرد ليبنيز في عمله غير المنشور حوالي عام 1683، وليونارد أويلر عام 1736.

قانون التبادل التربيعي Quadratic reciprocity law

أحب عالم الرياضيات الألماني العظيم كارل فريدريك جاوس هذه النتيجة، وأطلق عليها اسم المبرهنة الذهبية. وقد وضع ليونارد أويلر نص هذه النظرية عام 1783، ونشر جاوس أول برهان كامل لها عام 1796.

لأي عددين أوليين فرديين (p)، و(q) يصف هذا القانون تماثلا رائعا بين سؤالين: ما إذا كانت (p) مربع بمقياس(q) ، وما إذا كانت (q) مربع بمقياس (p).

يؤكد القانون أن هذين السؤالين لهما نفس الإجابة إلا عندما $((p = q = 3(\text{mod}4))$ (مقياس 4) حيث يكون لهما إجابتين متضادتين. خذ العددين 5، و 11 على سبيل المثال. أولا $(11 = 1(\text{mod}5)$ (مقياس 5)، والعدد 1 هو عدد مربع، لذلك فإن المبرهنة تتنبأ أن أيضاً 5 مقياس 11 لابد أن تكون عددا مربعا أيضاً.

هذا لا يتضح مباشرة، لكن بنظرة أكثر تعمقا نجد أن $((4^2 = 16 = 5(\text{mod}11))$.

يشكل قانون التبادل التربيعي، جنبا إلى جنب مع مبرهنة فيثاغورث، أحد أكثر

النتائج المبرهنة بكثرة في علم الرياضيات، فقد وضع له جاوس وحده ثمانية براهين في حياته، ويوجد الآن أكثر من مائتي برهان تستخدم مجموعة متنوعة من الأساليب.

أريثماتيكا لديوفانتوس Diophantus' Arithmetica

عاش ديوفانتوس في الإسكندرية حوالي عام 250 م وعرف بأبي الجبر، فعلى الرغم من أن البابليين القدماء كانوا قد بدأوا البحث عن الحلول الصحيحة للمعادلات التربيعية إلا أن كتاب أريثماتيكا المكون من 13 مجلدا لديوفانتوس والذي سميت المعادلات الديفونتية تكريما له بدئ بجدية ، وكان بمثابة حجر الزاوية في تاريخ نظرية الأعداد، لكن يعتقد أنه فقد عند تدمير المكتبة العظيمة بالإسكندرية. إلا أنه في عام 1464 عادت ستة كتب منها إلى الظهور مجددا، وانصب عليها تركيز بالغا من علماء الرياضيات الأوربيين ولا سيما بيير دي فيرما.

المعادلات الديفونتية Diophantine equations

المعادلة الديفونتية هي كثيرة حدود شأنها كشأن أي كثيرة حدود أخرى، لكن الفرق أننا هنا مهتمون فقط بالأعداد الصحيحة ، فلا يمكن ظهور إلا الأعداد الصحيحة في كثيرة الحدود (على الرغم أن السماح بظهور الكسور لا يشكل فرقا). الأهم أننا لسنا مهتمين إلا بالحلول الصحيحة للمعادلة.

بالتالي، بدلا من تحليل الأعداد الحقيقية أو المركبة (x)، (y)، (z) التي تحقق ($x^3 + y^3 = z^3$)، نسأل ما إذا كانت هناك أي أعداد صحيحة تحققها (في هذه الحالة، الإجابة لا كما ينتج من أشهر المسائل الديفونتية وهي مبرهنة فيرما الأخيرة). السبب وراء هذا الاهتمام المستمر هو أن كثيرات الحدود هي الطريقة الصحيحة للتعبير عن العلاقات الممكنة (أو غير الممكنة) بين الأعداد الصحيحة، على سبيل المثال: تقول حدسية كاتالان (Catalan's conjecture) أن العددين 8 ، 9 هما العددان الصحيحان الوحيدان المتجاوران اللذان يمكن كتابتهما على صورة قوى أعداد صحيحة.

الكسور المصرية Egyptian fractions

كسر الوحدة هو الكسر الذي بسطه 1 مثل $(\frac{1}{2})$ ، أو$(\frac{1}{3})$ ، و$(\frac{1}{4})$ (لكن ليس $(\frac{3}{4})$، وبالتأكيد يمكن كتابة أي عدد نسبي على صورة كسور وحدة مجموعة معا: على سبيل المثال $(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4})$. أما السؤال الأكثر إثارة فهو عن الأعداد النسبية التي يمكن كتابتها على شكل كسور وحدة مجموعة معا على أن تكون هذه الكسور مختلفة.

على سبيل المثال $(\frac{1}{4}+\frac{1}{2})$ تمثيل للكسر $(\frac{3}{4})$ على صورة كسر مصري، وأطلقت عليه هذه التسمية؛ لأن هذه المسألة شغلت عقول علماء الرياضيات في مصر القديمة، وتشتمل بردية ريند (The Rhind papyrus) التي يرجع تاريخها إلى عام 1650 ق.م على قائمة من الكسور على الصورة $(\frac{2}{n})$ مكتوبة على صورة كسور مصرية.

عام 1202 كتب ليوناردوپيزا (Leonardo of Pisa) (المعروف بفيبوناتشي) كتابه (Liber Abaci) الذي أثبت فيه أن جميع الكسور يمكن تقسيمها بهذه الطريقة، وقدم خوارزمية لإيجاد هذه الصورة، لكن ذلك لم يحل الموضوع حلا كاملا: لازالت الأسئلة قائمة حول عدد كسور الوحدة اللازمة لتمثيل عدد ما، ونجد ذلك متضمنا في حدسية إردوس–شتراوس (Erdo˝s-Straus conjecture).

حدسية إردوس- شتراوس Erdo˝s-Straus conjecture

أي كسر معلوم على الصورة $(\frac{4}{n})$ (حيث (n) تساوي على الأقل 2) يمكن كتابته على صورة مجموع ثلاثة كسور وحدة (أي كسور بسطها 1). بالتالي لكل (n) تحقق ما سبق هناك ثلاثة أعداد صحيحة : (x)،و(y)،و(z) حيث $(\frac{1}{z}+\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=\frac{4}{n})$، على سبيل المثال عند $(n = 5)$ سيكون الحل $\frac{1}{10}+\frac{1}{5}+\frac{1}{2}=\frac{4}{5}$. لقد قاوم إدعاء بول إردوس، وإرنست شتراوس عام 1948 بأن ذلك صحيحا دائما.

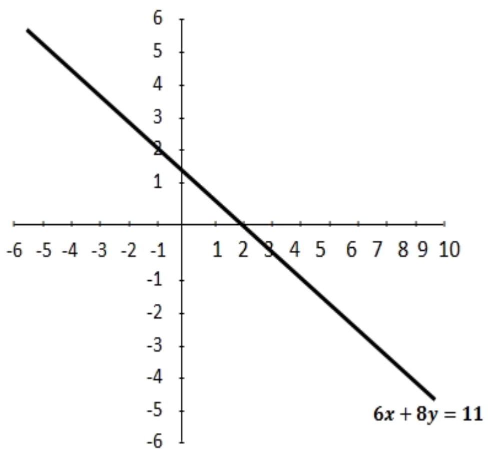
نظرية بوزو المصغرة Bézout's lemma

العامل المشترك الأعلى (المقام المشترك الأعلى) للعدين 36، و60 يساوي 12. تقول نظرية بوزو المصغرة التي أخذت تسميتها من إيتيين بوزو(Étienne Bézout) أن هناك

عددين صحيحين (x)، و(y) بحيث ($36x + 60y = 12$)، وبنظرة أعمق. نجد أن أحد الحلول هو ($x = 2$ and $y = -1$) لكن سيكون هناك عدد لا نهائي من الحلول الأخرى أيضاً مثل ($x = 7$ and $y = 4$). يمكن إعادة صياغة ذلك كعبارة حول المعادلات الديفونتية: إذا كان (d) هو العامل المشترك الأعلى للعددين (a)، و(b) فإن نظرية بوزو تضمن أن المعادلة ($ax + by = d$) لها عدد لا نهائي من الحلول الصحيحة (integers)، وهذه النظرية هي مفتاح فهم جميع المعادلات الخطية الديفونتية.

المعادلات الخطية الديفونتية Linear Diophantine equations

أبسط المعادلات الديفونتية هي المعادلات التي تحتوي على (x)، و(y) البسيطة (ليس فيها (x^2) أو (xy) أو قوى أعلى): أي المعادلات الخطية مثل ($6x + 8y = 11$)، فأي معادلة كهذه تحدد خطا مستقيما في المستوى، وبالتالي يكون السؤال عما إذا كان لهذه المعادلة حلول صحيحة مكافئا للبحث عن النقط الواقعة على هذا الخط ولها إحداثيات صحيحة..



تتناول نظرية بوزو أهم حالة: فهي تقول أن ($ax + by = d$) لها حل عندما يكون العدد (d) هو العامل المشترك الأعلى (المقام المشترك الأعلى) للعددين (a)، و(b) (وفي هذه الحالة يكون للمعادلة عدد لا نهائي من الحلول). في الحقيقة، المعادلة ($ax + by = d$) لها حلول فقط عندما يكون (d) أحد مضاعفات المضاعف المشترك الأصغر للعددين (a)، و(b)، بالتالي ليس للمعادلة ($6x + 8y = 11$) حلولا صحيحة لأن المضاعف المشترك الأصغر للعددين 6، 8 هو 2، و11 ليست من مضاعفات 2.

إذا كان للمعادلة الخطية أي حلول صحيحة، فسيكون عدد هذه الحلول لا نهائيا.

وهذه النتيجة تنطبق على المعادلات التي لها عدد أكثر من المتغيرات مثل ($3x + 4y + 5z = 8$)؛ حيث إن العامل المشترك الأعلى للأعداد 3، 4، 5 هو 1، وبما أن 8 هي أحد مضاعفات العدد 1، إذا يكون للمعادلة عدد لا نهائي من الحلول.

ماشية أرشميدس Archimedes' cattle

حوالي عام 250 ق.م أرسل أرشميدس خطابا لصديقه إيراتوستينس (Eratosthenes) يحتوي على تحدي لعلماء رياضيات الإسكندرية، وكان هذا التحدي حول "ماشية الشمس" الصقلية ، وهو قطيع يتكون من بقرات وثيران ذوي ألوان مختلفة. سوف نرمز لعدد الثيران البيضاء بالرمز(W)، وعدد البقرات البيضاء بالرمز (w)، ووبالمثل نرمز لعدد الثيران السوداء بالرمز (X)، وعدد البقرات السوداء بالرمز (x)، والرمزين (Y)، و(y) للماشية المنقطة، والرمزين (Z)،و (z) للون البني.

وصف أرشميدس القطيع خلال نظام من المعادلات الديفونتية الخطية:

$$W = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)X + Z \qquad X = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)Y + Z \qquad Y = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)W + Z$$
$$w = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)(X + x) \qquad x = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)(Y + y) \qquad y = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)(Z + z)$$
$$z = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)(W + w)$$

كان التحدي هو إيجاد بنية القطيع. لا نعرف كيف تعامل الإسكندرانيون مع ذلك، فالحل الأول المعروف هو الحل الذي جاء به علماء الرياضيات الأوربيين الذين أعادوا اكتشافه في القرن الثامن عشر:

$$w = 10{,}366{,}482, \quad X = 7{,}460{,}514, \quad Y = 7{,}358{,}060,$$
$$Z = 4{,}149{,}387, \quad w = 7{,}206{,}360, \quad x = 4{,}893{,}246,$$
$$y = 3{,}515{,}820, \quad z = 5{,}439{,}213,$$

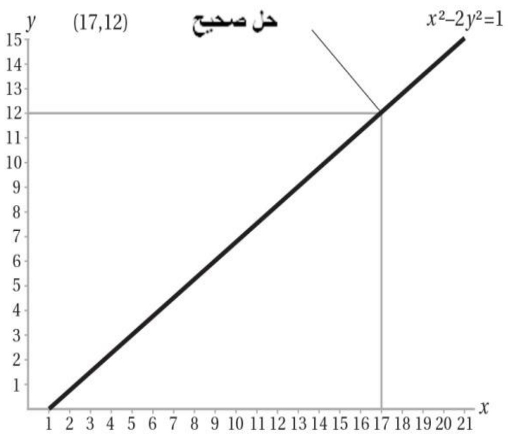
أي أن عدد رؤوس الماشية الكلي يساوي 50,389,082 .

إلا أن أرشميدس نوه على أن أي شخص يقوم بحل هذه المسألة "لن يقال أنه غير ماهر أو جاهل بالأعداد، ولا يجب أيضاً أن يعد من الحكماء"؛ حيث أن الحكمة التامة تتحقق بحل هذه المسألة في وجود شرطين إضافيين: أولهما أن يكون ($W + X$) عددا مربعا، وثانيهما

أن يكون (Y + Z) عددا مثلثا.مافعله أرشميدس أزال المسألة من مجال المعادلات الخطية وجعلها أصعب بصورة ملحوظة. عام 1880 وصف إيه آمثور (A. Amtho)حلا قائما على اختزال المسألة إلى معادلة بل(Pell equation) ($a^2 + 4729494b^2 = 1$). ومع بداية عصر الكمبيوتر تجسد الحل في صورة إجابة ذات (206,545) خانة:عدد ماشية أكبر من عدد الذرات الموجودة في الكون كله بشكل لا يقارن.

معادلات بل Pell equation

أسهل معادلات ديفونتية يمكن التعامل معها هي المعادلات الخطية، حيث يكون هناك خطوات مباشرة لتحديد ما إذا كان هناك أي حلول صحيحة أم لا، لكن الصورة تصبح أكثر ضبابية عند وجود المربعات كما يظهر في الحالة غير المعروفة لمتوازيات المستطيلات التامة.

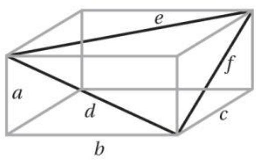


حوالي عام 800 ق.م قدم العالم الهندي بودهيانا (Baudhayana) العدد ($\frac{577}{408}$) على أنه تقريب للعدد ($\sqrt{2}$)، ومن المحتمل أنه توصل إلى ذلك عن طريق دراسة المعادلة ($x^2 - 2y^{2=1}$) التي أحد حلولها $x = 277$ and $y =$ 408 (بالإضافة إلى ($x = 17 , y =$ 12). المعادلة ($x^2 - 2y^2 = 1$) هي أول مثال على معادلات بيل ، ومن الأمثلة أيضاً المعادلة ($x^2 - 3y^2 = 1$)، وبصفة عامة ($x^2 - ny^2 = 1$) حيث (n) عدد طبيعي غير مربع (في الحقيقة هذه المعادلات لا علاقة لها بجون بيل إلا أن ليونارد أويلر اختلط عليه الأمر بينه وبين ويليام برونكر (William Brouncker) إلا أن التسمية بقيت عالقة).

خضعت معادلات بيل للدراسة كثيرا فيما مضى في الهند ولا سيما دراسة براهماجوبتا (Brahmagupta) لها عام 628 م.

طريقة (chakravala) التي تعزى إلى باساكرا الثاني (Bhaskara II) في القرن الثاني عشر هي خطوات لحل معادلات بل باستخدام الكسور المستمرة، وقد سخرت بشكل مذهل لحل الحالة الغريبة ($x^2 - 61y^2 = 1$) لإيجاد القيم الصغرى للحل $x = 1,766,319,049$ و ($y = 266,153,980$). وقال هيرمان هانكل (Hermann Hankel) على طريقة (chakravala) "أفضل ما تم تحقيقه في نظرية الأعداد قبل لاجرانج". وكان جوزيف لويس لاجرانج (Joseph Louis Lagrange) هو أول من قدم برهانا دقيقا على أن ($x^2 - ny^2 = 1$) لابد أن يكون لها عدد لا نهائي من الحلول الصحيحة لأي عدد (n) غير مربع.

قوالب طوب أويلر Euler bricks



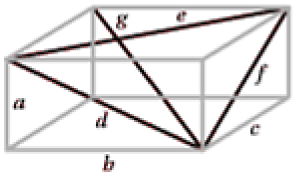
تمكننا ثلاثيات فيثاغورث (Pythagorean triples) من إنشاء مستطيل جميع أضلاعه وأقطاره أعداد صحيحة، على سبيل المثال المستطيل الذي أطوال أضلاعه 3 و 4 سيكون طول قطريه 5 (طبقا لمبرهنة فيثاغورث)، وقالب طوب أويلر يعمم ذلك إلى الأبعاد الثلاثة: وهو عبارة عن متوازي مستطيلات (انظر المجسمات ثلاثية الأبعاد غير المنتظمة) جميع حروفه أعداد صحيحة، وكذلك أقطار كل وجه. أصغر قالب طوب لأويلر أطوال حروفه تساوي 44، و 117، و 240 وحدة، واكتشفه بول هاك عام 1719. عام 1740 اكتشف عالم الرياضيات الكفيف نيكولاس ساندرسون طريقة لتوليد عدد لا نهائي من قوالب طوب أويلر. وقد أضاف أويلر نفسه على هذه الطريقة لاحقا إلا أن حتى الآن لا توجد طريقة لمعرفة كل القوالب الممكنة.

يمكننا ترجمة الهندسة إلى جبر باستخدام مبرهنة فيثاغورث. قالب طوب أويلر الذي أضلاعه (a, b, c)، و أقطار أوجهه (a, e, f) لابد أن يحقق المعادلات الديفونتية الآتية:

$$b^2 + c^2 = e^2 \quad \text{and} \quad c^2 + a^2 = f^2 \qquad a^2 + b^2 = d^2$$

أكثر الموضوعات بحثا بعد قوالب طوب أويلر كانت متوازيات المستطيلات المثالية "صعبة المنال".

متوازيات المستطيلات المثالية Perfect cuboids



لقد افتتن علماء الرياضيات منذ القرن الثامن عشر بقوالب طوب أويلر: وهي متوازيات مستطيلات أطوال أحرفها وأقطار وجوهها جميعا أعداد صحيحة، والامتداد الطبيعي لذلك هو أن نرغب في أن يكون قطر متوازي المستطيلات أيضاً عددا صحيحا، وهذا يصف متوازي المستطيلات المثالي. المشكلة هي أن أحدا لم يعثر على أي متوازي مستطيلات مثالي أبدا ، ومسألة وجودها أم عدم وجودها مسألة مهمة لازالت مفتوحة.

وبدلالة المعادلات الديفونتية يكون كل ماهو مطلوب أن تحقق (a, b, c) (التي تمثل أحرف متوازي المستطيلات) ، و(d, e, f) (التي تمثل أقطار الأوجه) ، و(g) (التي تمثل قطر متوازي المستطيلات) المعادلات:

$$a^2 + b^2 = d^2 \quad b^2 + c^2 = e^2 \quad \text{and} \quad c^2 + a^2 = f^2$$

بالإضافة إلى

$$(a^2 + b^2 + c^2 = g^2)$$

لم يسبق أن عثر أحد على متوازي مستطيلات مثالي، لكن من المعروف أنه إذا عثر على أحدها فسيكون طول أحد أضلاعه على الأقل 9 مليار وحدة إلا أن في عام 2009 اكتشف كل من جورج سوير (Jorge Sawyer)، وكليفورد ريتر (Clifford Reiter) وجود متوازيات سطوح (parallelepipeds) مثالية (انظر المجسمات ثلاثية الأبعاد غير المنتظمة) أطوال حروف أصغرها هي 271، 106، 103، وأقطار أوجهها التي على شكل متوازي أضلاع هي 101، 183، 266، 312، 255، 323 وأقطاره 374، 300، 278، 272.

مجموع مربعين Sums of two squares

هناك سؤال رياضي قديم يقول: ما الأعداد الطبيعية التي يمكن كتابتها على صورة مجموع مربعين؟ وقد قدمت مبرهنة مربعي فيرما الإجابة عن هذا السؤال بالنسبة للأعداد الأولية: الأعداد التي يمكن كتابتها كذلك هي الأعداد على الصورة $(4m + 1)$ (وأيضا $1^2 + 1^2 = 2$)، لكن ماذا عن الأعداد المؤلفة (غير الأولية)؟ لا يمكن ذلك بالنسبة للعددين 6، 14، ولكن العدد 45 يمكنه ذلك: $(6^2 + 3^2 = 45)$، وبالنسبة للأعداد الكبيرة مثل (6615) يحتاج إيجاد الإجابة إلى الكثير من التجريب.

تشير نتائج فيرما إلى أن الأعداد الأولية لها أهمية خاصة، وأن العقبة الرئيسة هي الأعداد الأولية على الصورة $(4m + 3)$ (3,7,11,19,23,31) إلخ. الحل (الذي يمكن استنتاجه من مبرهنة فيرما) يقوم أولا بتفكيك العدد الصحيح (n) إلى أعداد أولية باستخدام المبرهنة الأساسية في الحساب، ثم تنص المبرهنة على أن (n) يمكن كتابتها على صورة مجموع مربعين إذا كان أي عدد أولي على الصيغة $(4m + 3)$ يظهر في المفكوك عددا زوجيا من المرات ، بالتالي $(3 \times 2 = 6)$ لا تحقق ذلك لأن 3 تظهر مرة واحدة (عدد فردي من المرات) ، لكن 45 $(5 \times 3^2 = 45)$ يمكن أن تكتب على صورة مجموع مربعين؛ لأن 3 تظهر مرتين (عدد زوجي من المرات)، وبدون الحاجة إلى مزيد من التجريب أصبح في إمكاننا معرفة أن العدد (6615) تستحيل كتابته على صورة مجموع مربعين؛ لأن $(7^2 \times 5 \times 3^3 = 6615)$ حيث يظهر العدد 3 ثلاثة مرات.

مبرهنة المربعات الأربعة للاجرانج Lagrange's four square theorem

ترجم كلود باشي (Claude Bachet) عام 1621 الكتب الستة التي بقيت من مجموعة كتب أريثماتيكا لديوفانتوس (التي يرجع تاريخها إلى حوالي عام 250م) من اليونانية القديمة إلى اللاتينية. وقد لعبت هذه المجلدات دورا مهما في تطور نظرية الأعداد الحديثة ولاسيما على يد بيير دي فيرما، كما أن باشي نفسه كان عالم رياضيات، وقد لاحظ أن بين طيات أعمال ديوفانتوس إدعاء بارزا: يقول أن جميع الأعداد الصحيحة يمكن كتابتها على صورة مجموع أربعة مربعات، على سبيل المثال $(0^2 + 1^2 + 1^2 + 3^2 = 11)$، $(1^2 + 6^2 + 8^2 + 30^2 = 1001)$.

وقد لاحظ فيرما نفس الشيء فيما بعد الذي عرف باسم حدسية باشي (Bachet's conjecture) إلا أن أول برهان منشور لجميع الأعداد الصحيحة كان على يد جوزيف لويس لاجرانج (Joseph-Louis Lagrange) عام 1770، ثم عممت هذه النظرية المهمة فيما بعد خلال مبرهنة العدد المضلعي لفيرما (Fermat's polygonal number theorem)، ومسألة ويرنج (Waring's problem).

مبرهنة المربعات الثلاثة للجاندر Legendre's three square theorem

نشر ليونارد أويلر البرهان الأول لمبرهنة مربعي فيرما عام 1749، وقد قدم إجابة للسؤال عن الأعداد التي يمكن كتابتها على صورة مجموع مربعين بشكل أساسي، وفي عام 1770 أثبت جوزيف لويس لاجرانج مبرهنته: مبرهنة المربعات الأربعة للاجرانج (Lagrange's four square theorem) مبينا أن جميع الأعداد الطبيعية يمكن كتابتها على صورة مجموع أربعة أعداد مربعة، واللغز الذي بقى هو: ما الأعداد التي يمكن كتابتها على صورة مجموع ثلاثة مربعات؟ هذا ممكن بالنسبة لمعظم الأعداد، أما أول الأعداد التي لا يمكن كتابتها كذلك هي (7,15,23,28,31,39,47,55,60,...).

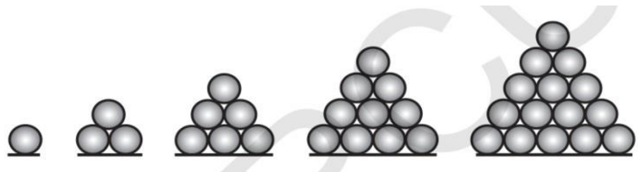
عام 1798 فكك آندريان ماري لاجندر هذه المتتالية، وهي تتكون من أعداد تقل عن مضاعفات الثمانية بمقدار 1: (7,15,23,31) بالإضافة إلى أنها مضروبة في 4 بشكل متكرر: (28,60,92,124,...) و (112,240,368,496,...) وهكذا.

باختصار، كانت النتيجة التي حصل عليها لاجندر هي أن جميع الأعداد يمكن كتابتها على صورة مجموع ثلاثة مربعات ماعدا الأعداد على الصورة ($4^n(8k-1)$).

الأعداد المثلثة Triangular numbers

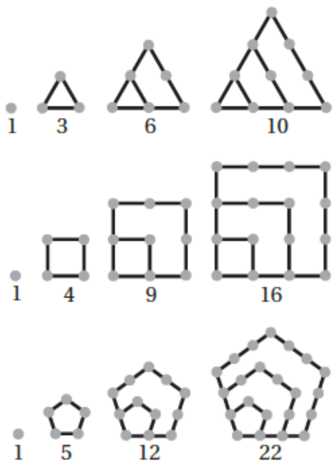
في الرياضات التي تستخدم العصا مثل لعبة البلياردو، وبول(Pool) تكون مجموعة الكرات في بداية اللعبة عبارة عن 15 كرة مرتبة على شكل مثلث متساوي الأضلاع، وليس وهما أن نتخيل أن الاختيار وقع على هذا الرقم لأنه عددا مثلثا: فالعددان 14، 16 لا يمكنهما تكوين مثلث متساوي الأضلاع. أصغر عدد مثلثي هو 1 قم 3 ثم 6، وبالنظر

إلى مجموعات الكرات المناظرة لكل عدد نجد أن الصف الأول به كرة واحدة والصف الأول في العدد المثلثي الذي يليه يساوي 2 ثم 3 وهكذا، لذلك فإن الأعداد المثلثية هي الأعداد التي على الصورة (n+…+4+3+2+1) حيث (n) أي عدد.، وصيغة جمع الأعداد من 1 إلى (n) (انظر جمع الأعداد من 1 إلى 100) تعطي صيغة إيجاد العدد المثلث الذي ترتيبه ($\frac{n(n+1)}{2}$).



وهي صيغة لمعامل ذات الحدين $\binom{n}{2}$، وبذلك تعطي الأعداد المثلثة حل مسألة المصافحة: كم عدد المصافحات الحادثة عندما يصافح عدد (n) من الأشخاص بعضهم البعض جميعا؟ كما أن الأعداد المثلثة هي أول الأعداد المضلعة.

الأعداد المضلعة Polygonal numbers



الأعداد المثلثة هي تلك الأعداد التي تعد عدد الكرات التي يمكن ترتيبها على شكل مثلث متساوي الأضلاع. الأعداد التربيعية هي الأعداد المناظرة للمربعات، هل يمكن تطبيق ذلك على المضلعات الخماسية المنتظمة أو المضلعات الأخرى؟ الإجابة هي أن ذلك ممكن إلا أن الحذر مطلوب لأن طريقة ترتيب الكرات في مجموعات خماسية لا يكون واضحا مباشرة.

اتفق على أن يكون العدد الخماسي الأول هو 1، والثاني هو 5 وتأتي الأعداد التالية لذلك عن طريق اختيار أحد الأركان وإضافة كرة واحدة إلى كل ضلع من ضلعيه ثم إكمال الشكل الخماسي (بحيث يحيط بجميع الكرات السابقة) انظر الشكل. وهذا يعطي العدد الخماسي التالي: (12,22,35,51) وهكذا.

وتطبق نفس الخطوات مع الأعداد السداسية (أولها: 1,6,15,28,45,66 ، وكذلك الأعداد السباعية وأي مضلع عدد أضلاعه (n) حيث (n) أي عدد.

صيغة العدد المثلثي الذي ترتيبه (m) هي $(\frac{m(m+1)}{2})$ أو يمكن وضعها على صورة أخرى $(\frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}m)$ ، وصيغة العدد المربع الذي ترتيبه (m) تساوي بالطبع (m^2) ، وصيغة العدد الخماسي للعدد الذي ترتيبه (m) هي $(\frac{3}{2}m^2 - \frac{1}{2}m)$، والنمط العام قد يكون أصبح واضحا الآن: صيغة العدد المضلع الذي عدد أضلاعه (n) وترتيبه (m) هي $(\frac{n}{2}-1)m^2 - (\frac{n}{2} - 2)m$. وقد أثبتت مبرهنة العدد المضلعي لفيرما (Fermat's polygonal number theorem) حقيقة أن لهذه الأعداد أهمية حقيقية نظرية.

مبرهنة العدد المضلعي لفيرما Fermat's polygonal number theorem

أثبت كارل فريدريك جاوس أن جميع الأعداد يمكن كتابتها على صورة مجموع ثلاثة أعداد مثلثة، وكرر جاوس ما جاء به أرشميدس فكتب:

$$\text{EYPHKA num} = \Delta + \Delta + \Delta$$

عام 1770 كان لاجرانج قد أثبت مبرهنة المربعات الأربعة: التي تقول أن جميع الأعداد يمكن كتابتها على صورة مجموع أربع أعداد مربعة (أو كما كان جاوس سيضعها $(wm = \square + \square + \square + \square)$.

هاتان النتيجتان معا شكلتا أول حالتين من مبرهنة العدد المضلعي لفيرما، أما الحالة التالية فهي تلك التي تقول أنه من الممكن التعبير عن جميع الأعداد على صورة مجموع أعداد خماسية، وبصفة عامة تؤكد المبرهنة على إمكانية الحصول على جميع الأعداد عن طريق تمثيلها على صورة مجموع (n) من أعداد مضلعة عدده أضلاعها (n). وزعم بيير دي فيرما أن لديه برهان على ذلك إلا إنه كعادته لم يخبر به أحدا، وجاء أول برهان مكتمل على يد أوجستين لويس كوشي عام 1813م.

مبرهنة فيرما الأخيرة Fermat's last theorem

الأعداد 3، 4، 5 من ثلاثيات فيثاغورث؛ لأن $(5^2 = 4^2 + 3^2)$. وتساوي 25=16+9

حوالي عام 300 ق.م أدرك إقليدس أنه لابد من وجود عدد لانهائي من الثلاثيات المكونة من أعداد صحيحة والتي تحقق المعادلة ($x^2 + y^2 = z^2$)، وفي عام 1637م وضع بيير دي فيرما تصورا لما يحدث عند استبدال أعداد ذات قوى أعلى بهذه الأعداد المربعة، وكتب في طبعته من كتاب أريثماتيكا لديوفنتوس: "من المستحيل أن نجزأ عددا مكعبا إلى مجموع مكعبين، أو عددا مرفوعا إلى القوة 4 إلى مجموع عددين مرفوعين إلى القوة 4 أو أن نجزأ أي عدد مرفوع إلى أي قوة أعلى من القوة 2 إلى عددين مرفوعين إلى نفس القوة"؛ فقد زعم فيرما أن لأي قيمة (n) أكبر من 2 لن يكون ممكنا أبدا إيجاد أعداد صحيحة (x)، (y)، (z) تحقق المعادلة ($x^n + y^n = z^n$)، ثم أكمل كلامه-المشكوك فيه- قائلا: "لقد اكتشفت برهانا رائعا حقا على ذلك إلا أن هذا الهامش أضيق من أن يحتويه".

مبرهنة وايلز Wiles' theorem

عرف إدعاء فيرما الأخير باسم المبرهنة الأخيرة ليس لأنه آخر ما كتب بل لأنه آخر ما تم إثباته، فعلى الرغم من ادعائه إلا أن معظم الخبراء اليوم لا يصدقون احتمال أن فيرما كان لديه حقا برهان كامل (على الرغم من أنه أثبت الحالة الخاصة التي فيها ($n = 4$)، ولم يستطع هو أو غيره إيجاد مثالا مضادا.

كان من الممكن- تحقيقا لمزيد من الدقة- أن يطلق عليه حدسية فيرما ويبقى هذا الإدعاء مفتوحا على مر القرون لولا اهتمامات العديد من عظماء المفكرين الرياضيين؛ حيث أكمل آندرو وايلز عام 1995 وتلميذه الباحث السابق ريتشارد تايلور برهانا رسخ مبرهنة فيرما الأخيرة باعتبارها نتيجة لمبرهنة النمطية (modularity theorem) للمنحنيات الإهليلجية.

حدسية بيل Beal's conjecture

آندرو بيل، رجل الأعمال المقيم بتكساس الذي اشتهر بالملياردير العصامي، كما اشتهر أيضاً بلعب القمار بأعلى المخاطرات كان أيضاً باحثا هاو متحمس في نظرية الأعداد، وقد درس عام 1993 مبرهنة فيرما الأخيرة التي تقول أن المعادلة ($x^n + y^{n=z^n}$) ليس لها حلول صحيحة عندما تكون ($n > 2$). كانت فكرة بيل هي تغيير الصيغة عن طريق السماح

للأسس بأن تأخذ قيما مختلفة: بالتالي، بدلا من ($x^n + y^n = z^n$) وضع هو في الاعتبار ($x^r + y^s = z^t$) حيث يسمح لـ (r)، (s)، (t) بأن تكون أعدادا مختلفة (لكن يجب أن تكون جميعها أكبر من 2). وقد درس فيجو بران حالات مشابهة في بداية القرن العشرين.

الصيغة الجديدة لها حلول: على سبيل المثال ($3^5 = 6^3 + 3^3$)، ($98^3 = 7^7 + 7^6$) إلا أن بيل لاحظ أن في كل الحلول التي وجدها تكون الأساسات (x)، (y)، (z) بينها عامل مشترك (3 في المثال الأول، و 7 في المثال الثاني)، وتقول حدسية بيل أن هذا صحيح دائما. عام 1997 أعلن المجتمع الرياضي الأمريكي أن بيل يعرض جائزة قدرها 50 ألف دولار –التي أصبحت الآن 100 ألف دولار– لمن يقدم برهانا على حدسيته أو مثالا مضادا.

حدسية كاتالان (مبرهنة ميهاليسكو)

Catalan's conjecture(Mihăilescu's theorem)

العددان 8، و9 يمثلان جوارا غريبا؛ فكلاهما قوى لأعداد صحيحة ($3^2 = 8$) و ($3^2 = 9$). أدرك عالم الرياضيات البلجيكي أوجين كاتالان أنه لا يوجد أي أمثلة أخرى لقوى متتابعة من بين الأعداد الصحيحة جميعها (ماعدا 0، 1). كانت حدسية كاتالان عام 1844 أن ذلك هو بالفعل الظهور الوحيد، لكنه كتب أنه لم يستطع بعد إثبات ذلك إثباتا كاملا. وفي حقيقة الأمر فإن هذه المسألة قد سبقته: حيث أن في عام 1320 كان الحبر والعالم ليفي بن جيرسون قد أثبت أنه لا وجود لأمثلة أخرى لقوة 2 بجوار قوة 3. ظلت الحدسية الكاملة مفتوحة حتى عام 2002 عندما قدم بريدا ميهاليسكو (Preda Mihăilescu) البرهان الذي سعى إليه طويلا. بشكل أكثر رسمية، يقول النص أن الحل الوحيد للمعادلة الديفونتية ($x^a - y^b = 1$) (حيث (a)، (b) كلاهما أكبر من 1) هي ($x = 3\ ,\ y = 2$)، ($a = 2\ , b = 3$).

مسألة ويرنج Waring's problem

نعلم من خلال مبرهنة المربعات الأربعة للاجرانج أن جميع الأعداد الصحيحة الموجبة يمكن كتابتها على صورة مجموع أربعة أعداد مربعة، فماذا عن كتابة الأعداد على صورة

مجموع قوى أعلى؟ عام 1909 بين آرثر ويرفرتش أن جميع الأعداد يمكن كتابتها على صورة مجموع تسعة مكعبات. وعام 1986م بين كل من بالاسابرامانين (Balasubramanian)، و ديشولرز(Deshouillers)، و دريس (Dress) أن مجموع 19 عدد مرفوع إلى القوة 4 كاف لذلك أيضاً.

كان إدوارد ويرنج قد وضع حدسية بهذه النتائج عام 1770، وقد أضاف إلى ذلك إشارته إلى أن هذه المسألة لا بد أن يكون لها حل لجميع القوى الموجبة، بمعنى أن لأي عدد صحيح (n) لابد أن يكون هناك عدد آخر (g) بحيث يمكن كتابة أي عدد على صورة مجموع أعداد عددها (g) مرفوعة إلى القوة (n)

وقد أثبت ديفيد هيلبرت هذه النتيجة المهمة عام 1909 وهي معروفة باسم مبرهنة هيلبرت–ويرنج. الأعداد القليلة الأولى من هذه المتتالية هي:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g	1	4	9	19	37	73	143	279	548	1079

لازالت طبيعة هذه المتتالية والمتتاليات المتعلقة بها موضوعا بحثيا نشطا.

حدسية abc The abc conjecture

لحساب أساس العدد نقوم أولا بتفكيكه إلى عوامله الأولية ثم نوجد حاصل ضرب العوامل الأولية المختلفة متجاهلين أي تكرار، وبالتالي ($300 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5$) وأساسها ((300) Rad) يساوي $30 = 5 \times 3 \times 2$، وبالمثل ($16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$) 2=(16) (يسمى الأساس أيضاً بجزء (x) الخالي من المربعات لأنه أكبر عامل من عوامل (x) لا يقبل القسمة على عدد مربع. لاحظ أن المصطلح radical يستخدم بشكل منفصل للإشارة إلى الجذور مثل الجذر التربيعي).

عام 1985 وضع كل من جوزيف أويسترليه، وديفيد ماسر حدسية تعميم مبرهنة فيرما الأخيرة، وحدسية كاتالان (مبرهنة ميهاليسكو) والعديد من المسائل العظيمة النظرية المتعلقة بالأعداد، وأطلق عليها دوريان جولدفيلد "أهم المسائل غير المحلولة في التحليل الديفونتي". وتهتم هذه الحدسية بالحالات التي يكون فيها ثلاثة أعداد (a)، (b)، (c)

أولية فيما بينها وتحقق المعادلة ($a + b = c$). تقارن الحدسية بين (c)، وأساس $Rad(a \times b \times c)(a \times b \times c)$. في معظم الحالات تكون ($c < Rad(a \times b \times c)$)، على سبيل المثال، إذا كانت ($a=3$, $b=4$, $c=7$) بالتالي ($Rad(3 \times 4 \times 7) = 42$) وهي أكبر من 7، لكن أحيانا لا يحدث ذلك، فمثلا عندما ($a = 1$, $b = 8$, $c = 9$)، بالتالي يكون ($Rad(1 \times 8 \times 9) = 6$) وهو أصغر من 9. وقد أثبت ماسر أن هناك عدد لا نهائي من هذه الاستثناءات التي تكون فيها ($c > Rad(a \times b \times c)$). تقول حدسية abc أن تلك الحالات ليست إلا انتهاكا للقاعدة: وأن تعديل بسيط يؤدي إلى الخلاص من معظم تلك الحالات. لأي عدد (d) أكبر من 1 حتى وإن كان ($d=1.0000000001$) تقريبا تختفي جميع الاستثناءات تاركة فقط عدد منته من الثلاثيات حيث ($c > Rad(a \times b \times c)^d$).

الأعداد الأولية PRIME NUMBERS

الأعداد الأولية Prime numbers

يعتبر تعريف العدد الأولي أحد أكثر التعريفات العمية والقديمة الموجودة: هو عدد صحيح لا يمكن تقسيمه إلى أعداد صحيحة أصغر. الأمثلة الأولى هي 2، 3، 5، 7، ومن ناحية أخرى نجد أن العدد 4 ليس أوليا؛ لأنه يساوي (2×2).

ظل العدد 1 مصنفا ضمن الأعداد الأولية حتى بدايات القرن العشرين، لكنه لم يعد كذلك، فاليوم نقول أن العدد الأولي لابد أن يكون له عاملان تماما: نفسه، والواحد، أما الأعداد غير الأولية (ماعدا 1) فتسمى الأعداد المؤلفة (composite). وتخبرنا المبرهنة الأساسية في الحساب أن الأعداد الأولية عند علماء الرياضيات بمثابة الذرات عند علماء الكيمياء: فهي الوحدة البنائية الأساسية التي تبنى منها جميع الأعداد الطبيعية الأخرى. وعلى بساطة تعريف الأعداد الأولية إلا أنها لازالت تشكل غموضا. ومن المسائل الكبرى المفتوحة في هذا الصدد: مسائل لانداو (Landau's problems)، وفرضية ريمان (Riemann hypothesis). ليس هناك صيغة بسيطة لتوليد أعداد أولية، ولا طريقة مباشرة لتحديد ما إذا كان عدد كبيراً أولياً أم لا؛ لا زال اختبار أولية الأعداد مجالا مهماً للبحث.

برهان لانهائية الأعداد الأولية لإقليدس Euclid's proof of the infinity of primes

تبدأ قائمة الأعداد الأولية بـ (2,3,5,7,11,13,17,...)، لكن أين تنتهي؟ في الحقيقة، هي مستمرة إلى الأبد، تلك هي الحقيقة التي عرضها إقليدس في مسألة 9.20 في كتاب العناصر، وكانت طريقته في ذلك تقليدية عن طريق البرهان بالتناقض: حيث بدأ بتخيل أن ما يريد إثباته خاطئ وأن هناك عدد ما يمكن وصفه بأنه أكبر عدد أولي، وليكن (P)، واستنادا لهذا الفرض يكون لديه قائمة بجميع الأعداد الأولية (2,3,5,7,...,P)، ثم أنشأ إقليدس عددا جديدا (Q مثلا) عن طريق ضرب جميع الأعداد الأولية وإضافة 1، وبالتالي:

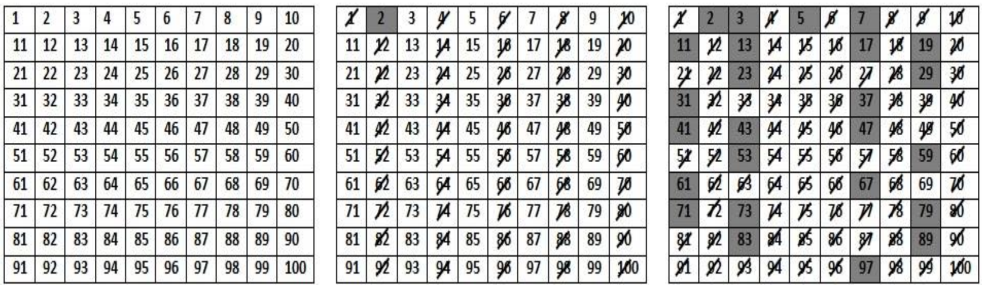
$$Q = (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \ldots \times P) + 1$$

الآن، لا يقبل العدد (Q) القسمة على 2؛ لأن الباقي سيساوي 1، وبالمثل كل من (3,5,7,...,P)، وبالتالي ليس هناك أي عدد أولي يمكن لـ (Q) أن يقبل القسمة عليه، و (Q) نفسه ليس ضروريا أن يكون عددا أوليا (على الرغم من أنه يمكن أن يكون أوليا). بطريقة أخرى، طبقا للمبرهنة الأساسية في الحساب يجب أن يكون للعدد (Q) على الأقل عامل أولي واحد(R)، وهذا العامل لابد أن نكون قد أغفلناه في قائمتنا وبالتالي هو أكبر من (P)، وبذلك يكون الفرض الذي بدأ به إقليدس أن (P) هو أكبر عدد أولي تسبب في إيجاد عدد أولي أكبر (R)، وبما أن هذا تناقض فلابد أن يكون الفرض الأصلي خاطئا: أي أنه ليس هناك ما يسمى أكبر عدد أولي.

غربال إراتوستينس The sieve of Eratosthenes

اشتهر إراتوستينس الذي يرجع تاريخه إلى حوالي عام 250 ق.م بحساباته المميزة الدقيقة لمحيط الأرض بالإضافة إلى اشتهاره بـ "غرباله" المستخدم لتوليد قوائم من الأعداد الأولية. الخطوات مباشرة: اكتب جميع الأعداد الطبيعية حتى عدد معين من اختيارنا (100 مثلا كما بالشكل)، ونقوم أولا بحذف العدد 1 (الذي لم يعد الآن مصنفا ضمن الأعداد الأولية إلا أن إراتوستينس قد يكون اعتقد أنه أحدها)، وبذلك يصبح العدد الأول في القائمة هو العدد 2 وهو عدد أولي فنحوطه بدائرة. بعد ذلك نقوم بحذف جميع مضاعفات العدد 2

(....,4,6,8,10) ، ثم نكرر ما قمنا به: الآن أول عدد في القائمة هو العدد 3 والذي نحدد أنه عدد أولي قبل حذف جميع مضاعفاته (. ...,6,9,12)، وفي كل مرحلة يكون أول عدد في القائمة أوليا، ونحذف جميع مضاعفاته، وبذلك نحصل على العدد الأولي التالي له. أسلوب غربلة الأعداد الطبيعية هذا الذي تطور كثيرا منذ عصر إراتوستينس يلعب دورا عظيما في نظرية الأعداد الحديثة ويشكل أساس برهان مبرهنات تشين من الأولى حتى الثالثة (Chen’s Theorems 1-3).



حدسية جولدباخ Goldbach’s conjecture

نشأت هذه الحدسية عام 1742 من توافق بين كريستيان جولدباخ وليونارد أويلر، وتؤكد على أن جميع الأعداد الزوجية بدءا من 4 فما فوق هي عبارة عن مجموع عددين أوليين، وبالتالي7+5=12 ,5+5=10 ,3+5=8 ,3+3=6 ,2+2=4)، وهكذا ، وعلى الرغم من فحص توماس أوليفيرا عام 2008 لذلك عن طريق استخدام الكمبيوتر للأعداد الزوجية حتى (10^{18}) إلا إن ليس هناك برهان كامل معروف مما يجعل هذه المسألة واحدة من أعظم المسائل المفتوحة في نظرية الأعداد، وأفضل تقدم في هذا الصدد حققته مبرهنة تشين الأولى (Chen’s Theorem 1).

وهناك تعبير آخر مرتبط بهذه الحدسية ألا وهو حدسية جولدباخ الضعيفة التي تقول أن جميع الأعداد الفردية بدءا من 9 فما فوق هي عبارة عن مجموع ثلاثة أعداد أولية . وفي عام 1937 وجد إيفان فينوجرادوف عددا كبيرا (N) وأثبت أن الحدسية صحيحة لجميع القيم الفردية الأكبر من (N)، وبالتالي فإنه نظريا يبقى فقط عدد كبير منته من الأعداد

يجب فحصه لإثبات هذه النتيجة إلا أن هذه البداية لازالت ضخمة جدا (حوالي 10^{43000}) لدرجة تجعل من حدسية جولدباخ الضعيفة مسألة مفتوحة إلى اليوم.

مسائل لانداو وحدسية n^2+1 Landau's problems and the n^2+1 conjectur

سلط إدموند لانداو أربع مسائل حول الأعداد الأولية في مؤتمر دولي بكامبردج عام 1912، وصفها بأنها "لا يمكن مهاجمتها بالوضع الذي عليه العلم الآن" والتي ستظل مفتوحة إلى ما يقارب 100 عام قادمة:

1- حدسية جولدباخ
2- حدسية العددين الأولين التوأم.
3- حدسية لجاندر
4- حدسية $n^2 + 1$

تدرس الحدسية الأخيرة الأعداد الأولية التي تزيد بمقدار الواحد عن عدد مربع، على سبيل المثال ($5 = 2^2 + 1$)، ($17 = 4^2 + 1$) والحدسية تقول أنه لابد أن يكون هناك عدد كبير لا نهائي من الأعداد الأولية التي تشبه ذلك.. ومن المعروف، كنتيجة لمبرهنة مربعي فيرما، أنه يوجد عدد كبير لا نهائي من الأعداد الأولية على الصورة ($n^2 + m^2$) ، وكما هو الحال في مبرهنات تشن، تأتي النتائج الواعدة إلى الآن من إرخاء معايير الأعداد الأولية إلى أعداد شبه أولية: وهي الأعداد التي تكون تماما حاصل ضرب عددين أولين ($15 = 3 \times 5$ or $9 = 3 \times 3$). عام 1978 أثبت هينريك إيوانيك أن هناك عدد كبير لا نهائي من الأعداد الأولية على الصورة ($n^2 + 1$)، ونجد إجابة بالإيجاب على حدسية n^2+1 ضمنا في فرضية إتش (Hypothesis H).

مبرهنة مربعي فيرما Fermat's two square theorem

جميع الأعداد الأولية باستثناء 2 هي أعداد فردية، وبالتالي عند قسمة كل عدد أولي فردي على 4 لابد أن يكون الباقي إما 1 أو 3، وهذا من شأنه تقسيم الأعداد الأولية الفردية إلى عائلتين، وفي القرن السابع عشر لاحظ بيير دي فيرما فرقا مذهلا بين هاتين

العائلتين، فالأعداد على الصورة $(4n + 1)$ يمكن كتابتها جميعا على صورة مجموع مربعين مثل $(5 = 2^2 + 1^2)$ و$(13 = 3^2 + 2^2)$ ، الأكثر من هذا أن ذلك يحدث بطريقة وحيدة، لكن ليس من بين الأعداد الأولية على الصورة (4n+3) مثل (7، 11) ما يمكن التعبير عنه بالطريقة السابقة.

يعرف ذلك أيضاً باسم مبرهنة فيرما كريسماس؛ لأنها كتبت للمرة الأولى في خطاب إلى "مارين ميرسين" في الخامس والعشرين من ديسمبر عام 1640، وكعادة فيرما، أعطى فقط أقل القليل من الحجة على أن ما قاله صحيح. أما أول من نشر برهانا على ذلك هو ليونارد أويلر عام 1749. وهذا يرتبط ارتباطا وثيقا بمبرهنة التبادل التربيعي وكما لاحظ جيه إتش هاردي "إن من العدل تصنيفها على أنها واحدة من أنقح المبرهنات في الحساب".

وترتب على ذلك أن إذا كان هناك عددا يمكن كتابته على صورة مجموع مربعين بطريقتين مختلفتين مثل $(50=7^2+1^2=5^2+5^2)$ فإنه لا يمكن أن يكون أوليا.

وقد امتدت نتيجة فيرما لتصبح تحليلا كاملا عن أي الأعداد يمكن كتابته على صورة مجموع مربعين.

فجوات الأعداد الأولية Prime gaps

يمكن لدراسة الأعداد الأولية أن تنقلب رأسا على عقب إذا نظرنا إلى الفجوات بينها بدلا من دراستها هي: أي الفرق بين عددين أوليين متتاليين. إذن أول فجوة أولية هي تلك الواقعة بين العددين 2 و3 وهي بالتحديد 1، ثم الفجوة بين العددين 3 و 5، ونجد أنها 2، وهكذا. هل يمكن لفجوات الأعداد الأولية أن تصبح كبيرة اعتباطيا؟ يتضح أن ذلك ممكن؛ بذلك يكون شأنها شأن الأعداد الأولية فهي لا نهائية، لكن مكان ظهور الفجوة الكبرى الأولى، وعلاقة حجمها المحتمل بالعددين الأولين الذين يقعان على جانبها يبقى موضوعا محل بحث. تعد حدسيتي العددين الأوليين التوأم (The twin primes)، دوبوليجناك (de Polignac’s conjectures) من أكثر المسائل الصامدة التي بقيت مفتوحة لفترة طويلة حول فجوات الأعداد الأولية. تتضمن مسلمة برتراند (Bertrand’s postulate) أن العدد الأولي لا يمكن أن تتبعه فجوة أكبر منه، وحدسية آندريكا-في حال تم إثباتها- سوف تؤدي إلى تدعيم هذه النتيجة تدعيما ملحوظا.

مسلمة برتراند Bertrand's postulate

ما المسافة الممكنة بين عددين أوليين متتاليين؟ كان هذا هو السؤال الذي جال بخاطر جوزيف برتراند عام 1845م عندما وضع مسلمة تقول أن بين أي عدد طبيعي (n)، وضعفه (2n) لابد أن تجد على الأقل عددا أوليا واحدا. وبصياغة ذلك، لأي عدد (n) (أكبر من 1) هناك عددا أوليا (P) بحيث ($n < p < 2n$). بعد خمس سنوات من ذلك الوقت أثبت بافنوتي تشيبيشيف هذه المسلمة، ثم جاءت إعادة إثبات هذه المسلمة على يد بول إيردوس والتي خلدت في بيت شعر قاله ناثان فاين: "قالها تشيبيشيف وها أنا ذا أعيدها؛ لابد أن يوجد عدد أولي بين العدد وضعفه".

حدسية آندريكا Andrica's conjecture

عام 1986 صاغ عالم الرياضيات الروماني آندريكا دورين ما وصفه بأنه "مسألة بالغة الصعوبة في نظرية الأعداد". إنها تدرس الفرق بين الجذور التربيعية للأعداد الأولية المتتالية. وكانت حدسيته هي أن هذا الفرق أقل من 1 دائما. بصفة أكثر رسمية، إذا كان (P)، و(q) عددين أوليين متتابعين فإن $\sqrt{q} - \sqrt{p} < 1$.

إذا كان ذلك صحيحا، فتربيع الطرفين سيحول هذه المتباينة إلى قاعدة تخص فجوات الأعداد الأولية العادية: إذا كان (P) عددا أوليا إذن تكون الفجوة التالية لـ (P) أصغر من ($2\sqrt{p} + 1$). وهذا يمكن أن يكون تضييقا مهما لمسلمة برتراند. وعلى الرغم من عدم وجود برهان على حدسية آندريكا إلا أن الدلائل التجريبية تشير إلى أنها على الأرجح صحيحة.

حدسية لاجندر Legendre's conjecture

كان – ماري لاجندر نشطا في العديد من مجالات علم الرياضيات، وقد أدى عمله على نظرية الأعداد إلى صراع مع جاوس الذي اتهمه لاجندر بالتبجح المفرط وذلك لفرضه اكتشاف قانون التبادل التربيعي بدون تقديم دليل. ثم جاء عمل لاجندر في الهندسة

مشوبا بمحاولاته إثبات مسلمة التوازي لإقليدس، وكانت هذه المحاولات محكوما عليها بالفشل.

وقد قاده بحثه حول الأعداد الأولية إلى أن يضع حدسية تقول أن بين أي عددين مربعين سيكون هناك دائما أعداد أولية.، بمعنى أن لأي عدد طبيعي (n) هناك عدد أولي (P) حيث ($n^2 < p < (n+1)^2$). تشبه بنية هذه الحدسية مسلمة برتراند إلا أن مسلمة برتراند استسلمت للإبداع الرياضي بينما ظلت حدسية لاجندر مقاومة بعناد. والتقدم الواعد بالنسبة لحدسية لاجندر حتى اليوم هو مبرهنة تشن الثالثة.

حدسية العددين الأوليين التوأم Twin prime conjecture

أزواج الأعداد الأولية التي تكون عبارة عن عددين الفرق بينهما 2 مثل (5)، و(7) أو (17) و (19) تعرف بالأعداد الأولية التوائم. وعلى الرغم من أن لا نهائية الأعداد الأولية معروفة منذ عصر إقليدس إلا أن كون عدد الأعداد الأولية التوائم نهائي أم لا مازال مسألة مفتوحة.

في وقت الكتابة هذه، أكبر عددين أوليين توأم هما العددان على جانبي العدد ($2{,}003{,}663{,}613 \times 2^{195{,}000}$) اكتشفه إيريك فوتير عام 2007 كجزء من مشروع برايم جريد (Primegrid)[1]، والبحث عن العددين الأولين التؤام عبر الإنترنت (the internet Twin Prime Search). عممت كل من حدسيتي دو بوليجناك (de Polignac's conjecture) وهاردي ليتلوود الأولى (The first Hardy–Littlewood conjecture) هذه الحدسية، وكانت أول محاولة من بين محاولات عديدة لتحليل الكوكبات المختلفة الموجودة بين الأعداد الأولية.

حدسية دو بوليجناك de Polignac's conjecture

اقترحها ألفونس دو بوليجناك عام 1849م، وهي تؤكد على أن كل عدد زوجي يظهر

(1) أحد مشروعات الرياضيات الموزعة التي تدرس الأعداد الأولية.

كفجوة بين عددين أوليين متتابعين، بشكل لا نهائي في كثير من الأحيان، إذن يجب أن يكون هناك عدداً كبيراً لا نهائي من أزواج الأعداد الأولية المتتابعة والتي تبعد عن بعضها بمقدار 4، و 6 وهكذا، وهذا يعمم حدسية العددين الأولين التوأم التي توافق الحالة الخاصة التي يكون فيهم حجم الفجوة 2 وهي حالة خاصة من حدسية هاردي ليتلوود الأولى (The first Hardy–Littlewood conjecture). لازالت حدسية دو بوليجناك مفتوحة إلا أن مبرهنة تشن الثانية خطت خطوة مهمة نحو إثباتها.

مبرهنة تشن الأولى Chen's theorem 1

أثبت تشن جينجران بين عامي 1966 و 1975 ثلاث مبرهنات سجلت تقدما عظيما نحو العديد من المسائل البارزة المفتوحة حول الأعداد الأولية. جاءت فكرة العدد شبه الأولي في قلب عمل تشن: وهو عبارة عن حاصل ضرب عددين أوليين مثل ($2 \times 2 = 4$) أو $3 \times 2 = 6$. أخذت مبرهنة تشن الأولى اتجاه حدسية جولدباخ، وهي تقول أن بعد بداية معينة (عتبة) يمكن كتابة أي عدد زوجي على صورة إما مجموع عددين أوليين (كما قال جولدباخ) أو مجموع عدد أولي وشبه أولي.

مبرهنة تشن الثانية Chen's theorem 2

أخذت مبرهنة تشن الثانية خطوة نحو حدسية دو بوليجناك، وهي تنص على أن أي عدد زوجي يظهر كثيرا بشكل لا نهائي كفرق بين عددين أوليين(وهذا يأتي من حدسية دو بوليجناك) أو كفرق بين عددين أحدهما أولي والآخر شبه أولي.

نتيجة لمبرهنة تشن الثانية هي أن يكون هناك عدد لا نهائي من الأعداد الأولية (p) حيث ($p + 2$) إما عدد أولي (كما تنص حدسية العددين الأوليين التوأم) أو عدد شبه أولي.

مبرهنة تشن الثالثة Chen's theorem 3

عام 1975 أثبت تشن مبرهنة استهدفت حدسية لاجندر. تقول مبرهنة تشن الثالثة أن بين أي عددين مربعين يوجد إما عدد أولي أو شبه أولي.

كوكبات الأعداد الأولية Constellations of primes

تدرس حدسيتي العددين التوأم، ودو بوليجناك أزواجا من الأعداد الأولية تقع على مسافة معينة من بعضها البعض، لكن ماذا عن الأنماط الأطول: ثلاثيات ورباعيات الأعداد الأولية الموجودة في عينة معينة؟ ينبغي توخي الحذر؛ لأن ليس جميع الترتيبات المحتملة من الأعداد الأولية تكون ممكنة، فعلى سبيل المثال، لماذا تبحث حدسية العددين التوأم في أزواج الأعداد الأولية على الصورة (n)، و(n + 2) بدلا من (n)، (n + 1)؟ الإجابة هي أن أحد العددين (n) أو(n + 1) لابد أن يكون دائما قابلا للقسمة على 2، وبالتالي لا يمكن أن يكونا أولين معا (الاستثناء الوحيد هو الزوج 2 و 3).

تحدث نفس الظاهرة في الأنماط الأطول، فلا طائل من البحث عن ثلاثيات الأعداد الأولية التي على الصورة (n)، (n + 1)، (n + 4): لأن أحدها سيكون دائما قابلا للقسمة على 3، وبالتالي لن يكون أوليا (ماعدا الثلاثي 3، 5، 7). هذه الأنماط المحظورة يمكن وصفها بصورة منظمة باستخدام الحساب النمطي.

الأنماط الباقية المسموح بها مثل: (u)، (n + 2)، (n + 6) تعرف باسم الكوكبات. الكوكبات الخطية مثل هذه هي موضوع حدسية هاردي –ليتلوود الأولى، أما الكوكبات الأكثر تعميما مثل $(n^2 + 1)$، $(2n^2 - 1)$، $(n^3 + 3)$ هي موضوع فرضية إتش (Hypothesis H).

حدسية هاردي ـ ليتلوود الأولى The first Hardy–Littlewood conjecture

عام 1923 عالج هاردي و ليتلوود مسألة كوكبات الأعداد الأولية الأطول. تماما مثلما تعطي مبرهنة العدد الأولي قاعدة لمتوسط عدد الأعداد الأولية المنفردة في مدى معين كانت فكرتهم هي التنبؤ بعدد مرات ظهور كوكبة معينة في المتوسط.، وقد حسبا تقديرا دقيقا، وسيترتب على ذلك–إن كان صحيحا– أن تظهر جميع الكوكبات الخطية المسموحة بين الأعداد الأولية كثيرا بشكل لا نهائي، وبالتالي، بما أن (n)، (n + 2)، (n + 6) ليست محظورة، إذن يجب أن يكون هناك عدد لا نهائي من ثلاثيات الأعداد الأولية على هذه الصيغة (بدءا من (11,13,17) ثم (17,19,23)، و(41,43,47)).إذا أثبتت هذه الحدسية

فستصبح تعميما واسعا لكل من مبرهنة دركليه (Dirichlet’s theorem)، ومبرهنة جرين–تاو (the Green–Tao theorem)، وستعمم فرضية إتش هذه الحدسية أكثر.

فرضية إتش Hypothesis H

كانت الرحلة من حدسية العددين الأوليين التوأم (التي لازالت غير مثبتة!) إلى حدسية هاردي–ليتلوود رحلة طويلة على طريق التعميم، لكن في عام 1959 اقترح كل من آندريه شانزل (Andrzej Schinzel)، و واكلو سيربنيسكي(Wacław Sierpiński) خطوة أخرى. حدسية هاردي–ليتلوود الأولى تهتم فقط بكوكبات الأعداد الأولية التي نحصل عليها بالجمع مثل (n)، (n + 2)، (n + 6). وكل شكل من هذه الأشكال يحتاج إلى (n) مناسبة ثم إضافة أعداد ثابتة محددة إليها ، وهذا لا يشمل حدسية n2+1 حيث فيها يكون الشرط المتعلق بالعدد الأولي محتويا على عملية ضرب، وللحصول على حدسية واحدة تتسع للإثنين احتاجا إلى لغة كثيرات الحدود، وكانت الفكرة أن أي مجموعة مناسبة مثل $(n^2 + 1)$، $(2n^2 - 1)$، $(n^3 + 3)$ لابد أن تكون نواتجها أعداد أولية في الوقت نفسه لعدد لا نهائي من قيم (n). وهنا نضع في اعتبارنا كثيرات الحدود غير القابلة للتحليل إلى رتب أقل (irreducible) فقط والتي لا يمكن فصلها (على سبيل المثال $(\mathbf{n^2})$ يمكن تحليلها إلى $(\mathbf{n \times n})$، وبالتالي لا يمكن أن تعطي نتيجة أولية) وقد قدما– تقليدا لمبرهنة الأعداد الأولية– تقديرا مفصلا لعدد المرات التي يتوقعا أن يكون نظامهما أوليا في الوقت ذاته.

مبرهنة دركليه Dirichlet’s theorem

لا شك في أن الأعداد الأولية تشكل أكثر المتواليات غموضا من بين جميع الأعداد الطبيعية: (2,3,5,7,11,13,...)، والأكثر منها ضعفا هي المتواليات الحسابية: ابدأ بعدد طبيعي (3 على سبيل المثال) ثم اجمع عددا آخر وليكن 2 بشكل متكرر لتحصل على المتوالية (3,5,7,9,11,13,...). ولازال فهم العلاقة بين هذه المتواليات البسيطة، ومتواليات الأعداد الأولية الأكثر دهاء مجالا مستمرا للبحث.

والسؤال الأساسي الذي يجب أن يسأل: هل المتوالية السابقة تضم عدد لا نهائي من الأعداد الأولية؟

ليس بإمكان كل المتواليات الحسابية أن تضم أعدادا أولية: فالمتوالية التي تبدأ ب4 وفرقها العام 6 تكون (4,10,16,22,....) وبالتالي لا يمكنها أن تصل إلى عدد أولي: فكل حدودها أعداد زوجية وبالتالي تقبل القسمة على 2. وحتى نتمكن من أن نأمل في وجود عدد لا نهائي من الأعداد الأولية فلابد أن يكون الحد الأول من المتوالية وكذلك الفرق العام عددين أوليين فيما بينهما (أي عاملهما المشترك الأعلى يساوي 1)، وبالتالي فإن هذه المتوالية تفشل في تحقيق ذلك؛ لأن هناك عامل مشترك بين 4، 6 هو العدد 2.

عام 1837 أثبت يوهان دركليه نتيجته الأشهر والأكثر إثارة للدهشة على المستوى العلمى: لقد بين أن هذه هي حقا العقبة الوحيدة. فكل متوالية حسابية تحتوي على عدد لانهائي من الأعداد الأولية طالما كان الحد الأول والفرق العام عددين أوليين فيما بينهما؛ أي أن إذا كان (a)، و(b) عددين أوليين فيما بينهما، إذن هناك عدد لا نهائي من الأعداد الأولية على الصورة (a + bn). كان برهان دركليه هو أول من استخدم الدالة اللامية (L-functions)، ولذلك تعتبر في أغلب الأحيان أنها معلم على طريق بداية نظرية الأعداد التحليلية.

مبرهنة جرين ـ تاو Green–Tao theorem

أظهرت مبرهنة دركليه أن معظم المتواليات الحسابية تحتوي على عدد لا نهائي من الأعداد الأولية. عكس هذا السؤال يقودنا إلى البحث عن متواليات حسابية متضمنة في الأعداد الأولية، على سبيل المثال (3,5,7) هي متوالية حسابية من الأعداد الأولية وطولها 3 (وفرقها العام 2)، وأيضا (41,47,53,59) كذلك وطولها 4 (وفرقها العام 6).

هناك حدسية قديمة جذورها مفقودة في تاريخ الرياضيات إلا أن من المرجح أن تاريخها يرجع إلى عام 1770م تقول أن هناك متوالية حسابية من الأعداد الأولية بأي طول تحدده. في وقت الكتابة، أطول متوالية حسابية لأعداد أولية وجدها بينوت بيرشون (Benoãt Perichon) كجزء من مشروع بريم جرايد، وطولها 26 وتبدأ بالعدد (43142746595714191)

وفرقها العام (5283234035979900). كان التقدم المحرز على طريق إيجاد حدسية معممة بطيئا خلال القرن العشرين إلا إنها برهنت عام 2004 على يد تيرينس تاو، وبن جرين وساهمت في حصول تاو على ميدالية فيلدز عام 2006. ويمكن تعميم هذه الحدسية باستخدام حدسية هاردي- ليتلوود الأولى وفرضية إتش.

أعداد فيرما الأولية Fermat primes

كان بيير دي فيرما مهتما بالأعداد الأولية من نوع بسيط محدد، وهي تلك التي تفوق قوى العدد 2 بمقدار 1: $(2^n + 1)$ على سبيل المثال $(3 = 2^1 + 1)$، $(17 = 2^4 + 1)$. لكن ليس كل عدد على هذه الصورة يكون أوليا على سبيل المثال $9 = 2^3 + 1$، وكذلك ليس كل عدد أولي يمكن أن يكتب على هذه الصورة (7 لا يمكن كتابتها على هذه الصورة)، وقد لاحظ فيرما أن جميع الحالات التي تكون فيها الأعداد على الصورة $(2^n + 1)$ أولية، تكون (n) نفسها قوة للعدد 2 لذلك بدأ دراسة الأعداد على الصورة $(2^{2^n}+1)$ والتي يطلق عليها الآن أعداد فيرما، وقد وضع فيرما حدسية تقول إن كل الأعداد على هذه الصورة أولية. تتزايد قيم هذه الأعداد بسرعة لذلك كان من الصعب اختبار هذه الحدسية لقيم كثيرة إلا أن عام 1953 بين جيه إل سلفريدج (J.L.Selfridge) أن العدد $(2^{2^n}+1)$ ليس أوليا، وبذلك دحض حدسية فيرما، وفي الحقيقة في معظم قيم فيرما لم تكن أولية، وحتى يومنا هذا غير معروف لدينا سوى خمسة أعداد من أعداد فيرما الأولية وهي: $(3,5,17,257(= 2^{2^3}+1),65537(=2^{2^4}+1))$ وبعد ذلك يتوقف التتابع عن توليد أعداد أولية ($2^{2^3}+1=4,294,967,297=641\times 6,700,417$ على سبيل المثال) ويبقى وجود أعداد أولية أخرى لفيرما من عدمه مسألة مفتوحة . أحد النتائج المترتبة على ذلك تخص نظرية المضلعات القابلة للإنشاء.

أعداد مرسين الأولية Mersenne primes

أعداد مرسين هي تلك الأعداد التي تقل بمقدار 1 عن أحد قوى العدد 2: أي أنها على الصورة $(2^n - 1)$. وليست جميع الأعداد على هذه الصورة أولية، على سبيل المثال $(15 = 2^4 - 1)$، وكذلك ليست جميع الأعداد الأولية تنتمي إلى أعداد مرسين (5، 11

ليست من أعداد مرسين) أما الأعداد مثل ($3 = 2^2 - 1$)، ($7 = 2^3 - 1$) فهي تشكل فئة أعداد مرسين المهمة والتي سميت بهذا الاسم نسبة إلى الراهب الفرنسي مارين مرسين الذي بدأ في وضع قائمة بها في عام 1644.

كما هو الحال، نجد أن ($2^n - 1$) يمكن أن تكون أولية فقط إذا كانت (n) نفسها أولية إلا أن هذا أيضاً لا يضمن أولية هذه الصيغة، وعلى سبيل المثال ($2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$) لكن هذا يمثل أفضل نقطة بداية في البحث القائم عن أعداد أولية كبيرة. حتى وقت الكتابة هناك 47 عدد معروف من أعداد مرسين الأولية، ولازال السؤال مفتوحا حول ما إذا كان هناك عدد لا نهائي منها أم لا.

دراسة أعداد مرسين لها اتصال وثيق بدراسة الأعداد المثالية؛ لأن الأعداد المثالية الزوجية تكون على الصورة ($\frac{M\times(M+1)}{2}$) حيث (M) أحد أعداد مرسين الأولية، وأول مثاليين هما ($\frac{3\times4)}{2} = 6$)، و ($\frac{7\times8}{2} = 28$)

الأعداد الأولية الكبيرة Large primes

كون الأعداد الأولية لا نهائية أصبح أمرا معروفا منذ عصر إقليدس الذي أثبت بما لا يدع مجالا للشك أنه لا وجود لما يسمى أكبر عدد أولي، ومع ذلك ترجع الرغبة في تحديد أعداد أولية أكبر إلى مئات السنين. أكبر أعداد أولية معروفة هي أعداد مرسين الأولية مع وجود بعض الاستثناءات. في عام 1588 بين بيترو كاتالدي أن عدد مرسين ($2^{19} - 1 = 524{,}287$) هو عدد أولي، وتوقف التسجيل مائتي عام، وفي القرن ال 20 تسارعت خطوات البحث ليس فقط من خلال التقنيات المحسنة لاختبار أولية الأعداد مثل اكتشاف اختبار لوكاس – ليهمر (Lucas-Lehmer test) بل أيضاً من خلال القوة المطلقة للكمبيوتر، فمنذ عام 1951 أصبح اصطياد أعداد أولية أكبر يعتمد على أجهزة كمبيوتر أعلى سرعة من ذي قبل، ومنذ عام 1996 أصبح خاضعا للبحث العظيم عن أعداد مرسين الأولية باستخدام الإنترنت the Great Internet Mersenne Prime Search (GIMPS)، الذي يستخدم الوقت غير النشط على أجهزة كمبيوتر آلاف المتطوعين حول العالم. أكبر عدد أولي معروف إلى وقت الكتابة هو عدد مرسين الذي

اكتشف عام 2008 من خلال (GIMPS) (اكتشفه كل من سميث، ووالتمان، وكيروسكي، وزملاء لهم) وهو $(2^{43,112,609} - 1)$. وعند كتابته كاملا يبلغ عدد خاناته (12,978,189) خانة.

اختبار أولية الأعداد The primality testing

أبسط وسيلة لمعرفة ما إذا كان عدد ما أوليا أم لا هي فقط تجريب قسمته على جميع الأعداد الأصغر منه. (في الحقيقة يكفي فقط تجريب الأعداد الأصغر منه حتى العدد الذي قيمته $(\sqrt{n})$)، إلا أن بالنسبة للأعداد الكبيرة حقا يصبح هذا بطيئا بشكل غير عملي: اختبار عدد طوله 100 خانة قد يستغرق أكثر من عمر الكون.

غربال إراتوستينس (The sieve of Eratosthenes) هو أقدم الطرق المعروفة لتوليد قوائم من الأعداد الأولية ، ولا يزال مستخدما إلى اليوم. أما اختبارات الأولية الأخرى مثل اختبار فيرما لأولية الأعداد (Fermat's primality test)، واختبار ميلر-رابن اختبارات احتمالية: تجتازهم الأعداد الأولية الحقيقية إلا أن الأعداد التي تجتاز هذه الاختبارات هي فقط "أعداد أولية محتملة" (لمزيد من الدقة يمكن إطلاق مصطلح اختبارات الأعداد المؤلفة (compositeness) على هذه الاختبارات). جميع الاختبارات الحديثة لابد أن تؤسس في الحساب النمطي من أجل الحصول على الأعداد المتضمنة حتى حجم معقول. أما حاليا فيعتمد البحث عن أعداد أولية كبيرة على اختبار لوكاس-ليهمر غير الاحتمالي. عام 2002 أظهر (اختبار أ.ك.أس لأولية عدد ما) لأول مرة أن اختبار أولية الأعداد العامة يمكن أن يتم بكفاءة نسبيا.

اختبار فيرما لأولية الأعداد Fermat's primality test

كانت الفرضية الصينية وسيلة خاطئة لتحديد الأعداد الأولية، فقد قالت أن العدد (q) يكون أوليا إذا وإذا فقط كان العدد $(2^4 - 2)$ يقبل القسمة عليه. لا عجب في أن الناس قد صدقوا ذلك: فالعدد $(2^3 - 2 (= 6))$ يقبل القسمة على 3، والعدد $(2^4 - 2 (= 14))$ لا يقبل القسمة على 4، والعدد $(2^5 - 2 (= 30))$ يقبل القسمة على 5 ويظل ذلك متحققا

لبعض الوقت، وأول مثال مضاد هو العدد غير الأولي $(31 \times 11 = 341)$ والذي لا يقبل العدد $(2^{341} - 2)$ القسمة عليه.

على الرغم من أن هذه الحدسية كانت غير صحيحة إلا أنها احتوت على بذور اختبار أولية مبني على مبرهنة فيرما الصغرى، ونتيجة ذلك أنه إذا كانت (q) عددا أوليا محتملا، ووجدنا عددا ما $(n^q - n)$ بحيث لا يقبل هذا العدد القسمة على (n) إذن لا يمكن أن يكون (q) أوليا. تتوافق الفرضية الصينية مع الحالة التي تكون فيها $(n = 2)$: بالتالي فهي تمثل شرطا ضروريا ليكون العدد أوليا ولكنه ليس شرطا كافيا.

يجرب اختبار فيرما لأولية الأعداد عددا أوليا وهميا (q) الأساس (n). إذا لم يتحقق استنتاج المبرهنة (بالتالي $(n^4 - n)$ لا يقبل القسمة على (q)) فسيتبع ذلك أن تكون (q) ليست عددا أوليا فعليا في النهاية، إلا أن هذا الاختبار ليس مثاليا حيث توجد أعداد شبه أولية قد تجتاز هذا الاختبار عند قيم معينة للأساس: 341 هو عدد شبه أولي للأساس 2، وأسوأ الحالات تحدث عندما يجتاز عدد غير أولي هذا الاختبار عند جميع قيم الأساس (n) حيث (n) و(q) عددان أوليان فيما بينهما. وتسمى تلك الأعداد باسم أعداد كارمايكل (Carmichael numbers) نسبة إلى مكتشفهم روبرت كارمايكل عام 1910، وأول هذه الأعداد هو العدد (561). وفي عام 1994 أثبت كل من ألفورد، وجرانفل، و بومرانس أن هناك عددا لا نهائيا من أعداد كارمايكل.

اختبار لوكاس ـ ليهمر Lucas-Lehmer test

يرجع تاريخ اختبار لوكاس–ليهمر إلى عام 1930، ولازال البحث العظيم عن أعداد مرسين الأولية باستخدام الإنترنت the Great Internet Mersenne Prime Search (GIMPS) يستخدمه إلى اليوم لاختبار أعداد مرسين الأولية. إذا كان (p) عددا أوليا كبيرا فإن السؤال الذي يجب إجابته هو ما إذا كان العدد الهائل $(2^p - 1)$وليكن (k) عددا أوليا أيضاً أم لا.

أساس هذا الاختبار هو متوالية لوكاس- ليهمر المعروفة بشكل متكرر: $(S_e = 4)$،

و $(S_{n+1} = S_{n^2} - 2)$. تقول مبرهنة ليهمر أن (k) يكون أوليا إذا، وإذا فقط كان العدد (S_{p-2}) يقبل القسمة عليه. وتكمن الصعوبة في أن متوالية لوكاس-ليهمر تتزايد تزايدا كبيرا حقا: الحدود القليلة الأولى هي $S_n = 4, S_1 = 14, S_3 = 37{,}634\ S_4 =$ 1,416,317,954 وقبل (S_8) تكون المتوالية قد وصلت إلى عدد أكبر من عدد ذرات الكون مما يجعل أي حسابات أخرى بشكل مباشر مستحيلة. نحتاج إلى طريقة تستخدم الحساب النمطي تحسب فيها قيم (S_n) بمقياس (k): وهذه العملية هي التي تستغرق وقت الحوسبة.كله والخطوة الأخيرة هي حساب (S_{p-2}) بمقياس (k) فإذا كان الناتج صفرا، إذن (S_{p-2}) تقبل القسمة على (k) وبالتالي يكون العدد (k) أوليا.

دالة عد الأعداد الأولية The prime counting function

بالطبع هناك عدد لا نهائي من الأعداد الأولية، إذن ما معنى أن نقوم بعد الأعداد الأولية؟ ستجيب الدالة (π) عن هذا السؤال (يجب ألا تخلط مع العدد (π)). لأي عدد طبيعي (n) تعرف $(\pi(n))$ على أنها عدد الأعداد الأولية حتى العدد (n) بما فيها (n) نفسه، بالتالي يكون $(\pi(7) = 4)$؛ لأن هناك أربعة أعداد أولية حتى 7 (تحديدا 2، 3، 5، 7)، وبالمثل $\pi(8) = 4, \pi(11) = 5, \pi(100) = 25, \pi(1000) = 168$ فهم هذه الدالة هو أحد الأهداف العظمى لنظرية الأعداد. بفحص هذه الدالة خلال مدى كبير (انظر الرسم في الأسفل) يصبح عدم التنبؤ بأولية الأعداد المنفردة أخف لتكشف عن الاتجاه العام.

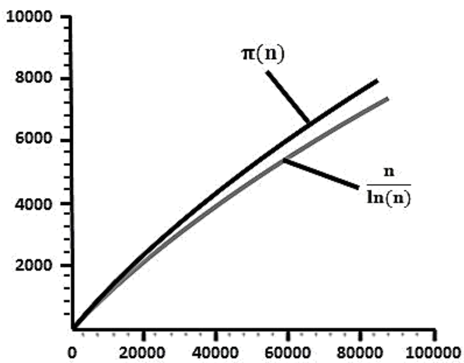
معدل النمو العام للدالة (n) يوصف في مبرهنة العدد الأولي بمعلومات أدق قادمة من فرضية ريمان (في حالة كونها صحيحة).

حدسية هاردي- ليتلوود الثانية The second Hardy-Littlewood conjecture

كانت الشراكة بين جي إتش هاردي، و جيه إي ليتلوود واحدة من أهم الأعمال التعاونية في مجال علم الرياضيات. كانت حدسيتهما التي وضعاها عام 1923 تقول أن دالة عد الأعداد الأولية قابلة لتجزئة الجمع (subadditive): أي أنه لأي عددين (x) و(y)

يكون $\pi(x+y) \leq \pi(x) + \pi(y)$. يترتب على ذلك أنه لن يكون هناك أي مجموعة من أعداد متتالية عددها (n) بإمكانها أن تحتوي على أعداد أولية أكبر من الأعداد (n) الأولى. وقد أثبت إيان ريتشارد عام 1974 - في تطور مدهش- أن حدسيتي هاردي-ليتلوود الأولى والثانية ليستا كاملتين، واستنتج أن الحدسية الثانية من المحتمل أن تكون خاطئة.

المبرهنة الأولى للعدد الأولى The prime number theorem 1



أبدى كارل فريدريك جاوس في الرابعة عشرة من عمره ملاحظة بارزو حول دالة عد الأعداد الأولية؛ حيث لاحظ أن النسبة $(n:\pi(n))$ كانت تساوي تقريبا اللوغاريتم الطبيعي للعدد (n) وهو (ln n). هذا يعني أنك إذا اخترت رقما بين 1و (n) بشكل عشوائي فسيكون احتمال أن يكون العدد أوليا يساوي تقريبا $\frac{1}{\ln n}$، وبالتالي يكون عدد الأعداد الأولية الواقعة بين 1، وn هو $\frac{n}{\ln n}$، وقد وضع جاوس الصغير حدسية يقول فيها أنه حتى عند قيم كبيرة (n) سيظل ذلك صحيحا بمعني أن الدالتين $(\pi(n))$ و $(\frac{n}{\ln n})$ لابد أن تبقيا متساويتين تقاربيا، ويكتب ذلك على الصورة $(\pi(n) - \frac{n}{\ln n})$. ولمزيد من الدقة، نقول أن ذلك يعني أن بزيادة (n) ستقترب خارج قسمة أحداهما على الأخرى إلى 1.

المبرهنة الثانية للعدد الأولى The prime number theorem 2

قام جاوس فيما بعد بتنقيح تقديره لعدد الأعداد الأولية من $(\frac{n}{\ln n})$ إلى دالة تكاملية لوغاريتمية أدق (Lin). علميا $(\mathrm{Lin} = \int_2^n \frac{dx}{\ln(x)})$. واعتقد جاوس مرة أخري-لكنه لم يبرهن على ذلك- أن $(\pi(n) - \mathrm{Lin})$. وهذا التأكيد هو مبرهنة العدد الأولي وهي أيضاً تتضمن النتيجة الأضعف التي تقول أن $(\pi(n) - \frac{n}{\ln n})$.

عام 1896 أثبت كل من جاكس هادمارد(Jacques Hadamard) وتشارلز دو لا فاليه بوسي(Charles de la Vallée Poussin)- كل على حدة عن طريق دراسة دالة زيتا ريمان- مبرهنة العدد الأولي التي تصف النمط العام – وليست القيم الفعلية – لـ (($\pi(n)$))، كما أنها تتنبأ بأن عدد الأعداد الأولية حتى العدد (10,000,000,000) يجب أن يكون تقريبا (455,055,614). في الحقيقة هناك فعليا (455,052,511) ، أي أن نسبة الخطأ تساوي (0.0007%). وإذا أثبتت صحة فرضية ريمان فسوف تملأ تفاصيل هذه الأخطاء، وبالتالي ستحول مبرهنة العدد الأولي إلى وسيلة لوصف (($\pi(n)$)) على أفضل مستوى ممكن من الدقة.

دالة ريمان زيتا The Riemann zeta function

لم ينشر بيرنارد ريمان سوى مقالة واحدة عن نظرية الأعداد: "عن عدد الأعداد الأولية الأقل من كمية معطاة" وكانت في عام 1859، لكنها حملت بين طياتها إدعاء قويا بأنها الأكثر تأثيرا من بين ما تم كتابته ، وقد تناولت المقالة دالة معينة عرفت بمتسلسلة القوة (power series)

$$\zeta(s) = \sum_{n=1} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \cdots$$

لم تكن هذه الدالة جديدة: فقد تصورها ليونارد أويلر عام 1737 وأدرك علاقتها بالأعداد الأولية عن طريق إلقاء الضوء على الطرق المختلفة لكتابتها ، وهي معروفة الآن باسم صيغة حاصل الضرب لأويلر

$$\zeta(s) = \prod_{p\ \mathrm{prime}} \frac{p^s}{p^s - 1} = \frac{2^s}{2^s - 1} \times \frac{3^s}{3^s - 1} \times \frac{5^s}{5^s - 1} \times \frac{7^s}{7^s - 1} \times \ldots$$

حيث، تتم عملية الضرب على الأعداد الأولية (P) بينما عملية الجمع تتم على جميع الأعداد الطبيعية (n).

كانت رؤية ريمان الأولى هي أن دالة زيتا أعطت معنى للدوال المركبة: حيث يمكنه إدخال قيم مركبة لـ (s) والحصول على قيم مركبة لـ (($\zeta(s)$)). وفي الحقيقة، الصيغة

المذكورة في الأعلى صالحة في نصف المستوى المركب فقط (فهي تتقارب فقط عندما يكون الجزء الحقيقي لـ (s) أكبر من الواحد)، وكان عمله الفذ التالي هو إيجاد صيغة ثالثة لـ (ζ) متحققة في جميع الأماكن (ماعدا عند النقطة ($s = 1$) والتي تتطابق تماما مع نسخ أويلر).

الحصول على قيم صريحة من دالة زيتا أمر صعب للغاية: دراسة التمثيل الجديد لريمان بين أن ($\zeta(0) = -\frac{1}{2}$)، وأن ($\zeta(2n)$) عدد متسامي لجميع القيم الموجبة لـ (n)، ولم يتمكن روجر آبيري من إثبات أن($\zeta(3)$) عدد غير نسبي قبل حتى عام 1978. أما طبيعة ($\zeta(s)$) بالنسبة للقيم الفردية الأخرى لـ (n) لازالت غامضة، وينصب تركيز فرضية ريمان الشهيرة حول سلوك دالة زيتا عند حد أبعد.

صيغة حاصل الضرب لأويلر Euler's product formula

تطبيق مبرهنة ذات الحدين المعممة على ($(1-\frac{1}{2})^{-1}$) يعطي

$$(1-\frac{1}{2})^{-1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots$$

$$(1-\frac{1}{3})^{-1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots$$

وبالمثل

بضربهما معا نجد أن:

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{-1} \times \left(1-\frac{1}{3}\right)^{-1} \\ &= 1\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots\right) + \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots\right) \\ &+ \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots\right) \\ &+ 1\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\cdots\right)\end{aligned}$$

بفك الأقواس وإعادة الترتيب، يصبح الطرف الأيمن:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\cdots$$

جميع الأعداد التي لها عوامل أولية 2 و 3 ستظهر في هذا التعبير الرياضي مرة واحدة بالضبط. بالمثل:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)^{-1}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)^{-1}\times\left(1-\frac{1}{5}\right)^{-1}$$
$$=1\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\cdots\right)$$

حتى تظهر جميع الأعداد الطبيعية في الطرف الأيمن من المعادلة ، لابد أن تظهر جميع الأعداد الأولية في طرفها الأيسر ، وهذا يدفعنا إلى أخذ حاصل الضرب اللانهائي

$$\prod_{\text{p prime}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}$$

والمشكلة هي أن المتسلسلة المناظرة $(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots)$ لا تتقارب: إنها تتزايد فقط، لكن إذا كانت $(s > 1)$ بالتالي ستصبح المتسلسلة المعطاة بواسطة دالة زيتا ريمان $(\xi(s)1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{6^s}+\frac{1}{7^s})$ متقاربة، ونفس الحجة تشير إلى أن هذا لابد أن يساوي:

$$\prod_{\text{p prime}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

هذه هي الفكرة الأساسية وراء صيغة حاصل الضرب لأويلر التي هي بمثابة الإشارة الأولى إلى أن دالة زيتا ريمان مرتبطة ارتباطا وثيقا بالأعداد الأولية

$$\zeta(S)=\prod_{\text{p prime}}\left(\frac{P^S}{P^S-1}\right)$$

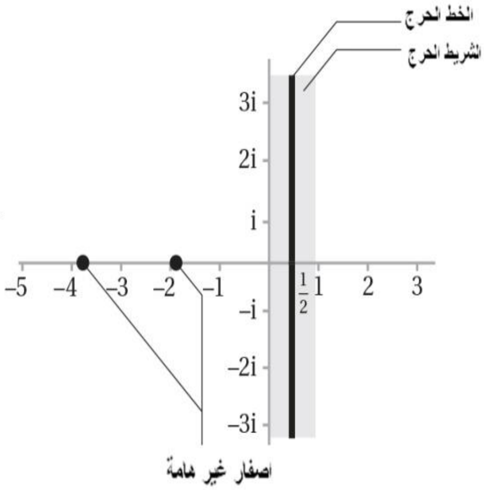
أو ما يكافئه:

$$\zeta(S)=\prod_{\text{p prime}}\left(1-\frac{1}{P^S}\right)^{-1}$$

فرضية ريمان The Riemann hypothesis

لو استيقظت بعد ثبات عميق دام ألف سنة لكان أول سؤال أسأله: "هل أثبتت فرضية ريمان؟" هذا هو ما قاله العالم ديفيد هيلبرت.

استطاع ريمان باستخدام دالة زيتا وبعض الرؤى المذهلة حول التحليل المركب الوصول إلى صيغة دقيقة لدالة عد الأعداد الأولية: يمكن القول بأنها الكأس المقدس لنظرية الأعداد إلا أن صيغته تعتمد على معرفة مكان تلاشي دالة زيتا : قيم (s) التي عندها ($\zeta(s) = 0$). من السهل نسبيا التأكد من أن $\zeta(-2), \zeta(-4), \zeta(-6)$ جميعها تساوي صفرا : وتسمى جميعها أصفار بديهية (trivial zeroes) لكن هناك عدد لا نهائي أيضاً من الأصفار غير البديهية. أوضح ريمان أن جميع هذه الأصفار غير البديهية تقع على شريط حرج بين Re(s)= 0 and Re(s)=1 (انظر الرسم) وأنهم لابد أن يكونوا في وضع تماثل حول الخط الحرج ($\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$)



فرضية ريمان هي الزعم بأن جميع الأصفار غير البديهية لدالة زيتا تقع على الخط الحرج. كتب ريمان أنه يعتقد أن هذا "محتمل جدا" لكن "تركت البحث حول ذلك مؤقتا بعد بعض المحاولات العابرة غير المجدية". وبعد 150 عاما، وبعد الجهود المركزة لمئات العقول العظيمة، لازال البرهان صعب المنال.

أصفار ريمان Riemann's zeroes

لقد تسببت مخطوطة ريمان في إثارة مباشرة للعالم الرياضي ولا زالت تلهم علماء الرياضيات الهاو منهم والمحترف منذ ذلك الحين. عام 1896 استطاع كل من هادامارد ودو لا فاليه بوسي كل على حدة من إثبات أنه لا يوجد أي صفر من أصفار ريمان على

حافة الشريط عند الخط (Re(s)=0) أو (Re(s)=1). وكانت إزالة هذا الشريط الفضي المتناهي في الصغر كافية لاستنتاج مبرهنة العدد الأولي.

عام 1914 أثبت ج.هـ. هاردي وجود عدد لا نهائي من الأصفار على الخط الحرج (على الرغم من أن هذا لا ينفي وجودهم عند نقط أخرى خارج الخط)، وفي عام 1974 أثبت نورمان ليفنسون أن على الأقل نسبة (34.74%) من الأصفار غير البديهية تقع على الخط الحرج وقد حسن بريان كونري هذه النسبة إلى (40.1%) عام 1989.

بالطبع تنطوي فرضية ريمان على أن النسبة الصحيحة هي 100٪ وحتى الآن تدعم الأدلة التجريبية ذلك. عام 2004 سخر زافير جوردون وباتريك ديمايكل قوة الحوسبة الموزعة للتحقق من أن أول 10 تريليون صفر غير بديهي تقع بالفعل على الخط الحرج.

الدوال اللامية L-functions

كان تعريف أويلر الأصلي لدالة زيتا:

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \cdots$$

لاحظ أن جميع الكسور بسطها 1. ويمكن تكوين دوال أخرى عن طريق استبدال أعداد مركبة (مختارة بعناية) بالقيمة 1، وهذه هي عائلة الدوال اللامية بالغة الأهمية، وهي دوال تسلك إلى حد ما سلوكا مشابها لدالة زيتا (بما فيها عنادها في إفشاء أسرارها). وتأتي كل منها مع نسختها الخاصة من صيغة حاصل الضرب لأويلر، ومع توسعها الخاص في الأعداد المركبة، وكذلك مع شكلها المختلف من فرضية ريمان، وهو ما يمكن جمعه معا فيما يسمى فرضية ريمان المعممة.

ظهرت الدوال اللامية لأول مرة في البرهان الأصلي لمبرهنة دركليه، ومنذ ذلك الحين احتلت مكانة رئيسة في موضوع نظرية الأعداد التحليلية على الرغم من الصعوبات العلمية الهائلة التي تفرضها. وتعد حدسيات ويل المحورية التي أثبتها بيير ديلين عام 1980 هي نظير فرضية ريمان للدوال المرتبطة إلى حد بعيد، ثم في عام 1994 استخدم آندرو وايلز الدوال اللامية لإثبات مبرهنة فيرما الأخيرة، وهناك عائلات أخرى من الدوال اللامية

تمسك بمقاليد كنوز كثيرة من كنوز العالم الرياضي بما فيها : حدسية بيرخ وسوينارتون – داير، و برنامج لانجلاند.

فرضية ريمان المعممة The generalized Riemann hypothesis

برهان فرضية ريمان هام جدا لأنه سيلقي الضوء على الأعداد الأولية، وبصفة خاصة، إذا كانت هذه الفرضية صحيحة سيكون من الممكن استيعاب سلوك دالة عد الأعداد الأولية بشكل أدق من ذلك الشكل الذي تقدمه مبرهنة الأعداد الأولية حتى الآن، لكن الآثار تذهب مذهبا أبعد من ذلك: دالة زيتا هي فقط الأولى من بين عائلة الدوال اللامية اللانهائية التي غزت نظرية الأعداد الحديثة، والتقنيات التي ساعدت على فهمها قد يكون لها آثار عميقة على باقي الدوال اللامية.

تقول فرضية ريمان المعممة أن الأصفار غير البديهية لجميع الدوال اللامية تقع على الخط الحرج $Re(s)=\frac{1}{2}$. وبصفة خاصة لم يتم إثبات أو دحض أي مثال على ذلك بعد.