الهندسة

يرجع تاريخ عديد من المبرهنات الهندسية التي تدرس في المدارس الآن إلى اليونان القديم، وفي الحقيقة معظم هذه المبرهنات موجودة في كتاب واحد: "عناصر إقليدس" (Euclid's Elements) الذي جمع فيه إقليدس (Euclid's) أبحاثه الخاصة، بالإضافة إلى المعرفة المكدسة التي امتلكها العالم القديم لدراسة تقاطع النقط، والخطوط المستقيمة والدوائر. كان هذا الكتاب قيما لأنه اتبع المنهج البدهي كما هو الحال بالنسبة للمبرهنات التي وردت فيه، إلا أنه في القرن التاسع عشر اكتشفت أشكال جديدة من الهندسة غير الإقليدية (non-Euclidean geometry) فلم تعد بدهيات إقليدس صالحة للتعبير عن تلك الأشكال.

منذ ذلك الحين، تشعبت الهندسة إلى عدة مسارات، يمكن توضيحها باستخدام أحد أبسط الأشكال الرياضية وهي: الدائرة ففي الهندسة التفاضلية نجد أن الدائرة هي نتاج التصاق عدة قطاعات منحنية انحناء

سلسا دقيقا. أما في الطوبولوچيا (topology) فمن المسموح للدائرة الخروج عن دائريتها والتحول إلى مربع. وبين الهندسة الإقليدية، والطوبولوچيا هناك الطوبولوچيا التفاضلية (differential topology) التي تتسع للدوائر المشوهة مثل: الأشكال البيضاوية، والمستطيلة الناعمة التي ليس بها أركان كأركان المربع. وتدرس نظرية العُقد (Knot theory) الطرق المختلفة لتضمين الدوائر الناعمة في الفضاء ثلاثي الأبعاد. أما الوصف الجبري للدائرة فهو يمثل وجهة نظر مختلفة من خلال المعادلة ($x^2+y^2=1$)؛ حيث إن الهندسة الجبرية (Algebraic geometry) هي دراسة الأجسام التي يتم توصيفها باستخدام كثيرات الحدود (polynomials) بهذه الطريقة. وهذا المنهج التجريدي يسمح بتطبيق الوسائل الهندسية في إطارات أبعد مما نستطيع رسمه على الورق.

الهندسة الإقليدية EUCLIDEAN GEOMETRY

عناصر إقليدس Euclid’s Elements

يعد مجلد العناصر الذي يتكون من 13 كتابا ركنا بارزا من أركان الكتابات الرياضية؛ فمنذ عام 300 ق.م وهو مصنف على أنه أكثر الكتب نجاحا في كل الأوقات.

لم يضمن إقليدس أعماله الخاصة فقط، بل جمع أعمال العلماء المعاصرين والعلماء السابقين له في تحفة معرفية هائلة، وبقى هذا الكتاب في مكانة عالية حتى أنه بقى لمدة ألفي عام كتابا قياسيا حول العالم. أنتجت الطبعة الأولى منه عام 1482، ثم نشر ما يقرب من ألف نسخة متتالية، ولم يفق عدد طبعات هذا الكتاب إلا الكتاب المقدس.

طور إقليدس نظرية الإنشاءات بالمسطرة والفرجار (ruler and compass constructions)، لكن السبب الرئيسي في شهرة هذا الكتاب هو أعمال إقليدس الهندسية، فهي مشهورة ومحتف بها؛ بسبب المنهج الحديث الذي استخدمه إقليدس وكذلك الحقائق التي أثبتها. وكانت تلك هي المرة الأولى التي يكتب فيها عالم رياضيات بالتفصيل الفروض (أو المسلمات أو البديهيات) التي بدأ بها، ويستنتج النتائج بدقة مستخدما تلك البديهيات.

مسلمات إقليدس Euclid s postulates

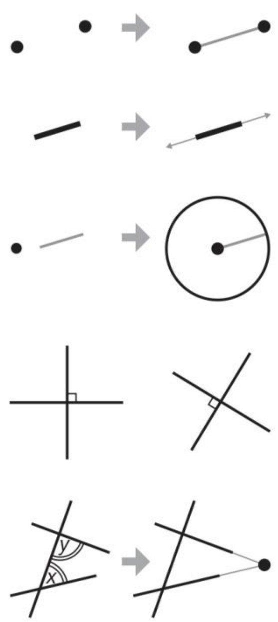
ظل الناس يدرسون النقط والخطوط لآلاف السنين قبل ظهور إقليدس، إلا أن هذا الموضوع (موضوع الهندسة المستوية) أصبح تحت يديه أول مجال في علم الرياضيات يتم فيه استخدام البديهيات، وقد بين إقليدس أن عمله استند إلى خمس فروض أساسية:

1- يمكن رسم قطعة مستقيمة بين أي نقطتين.

2- يمكن مد أي قطعة مستقيمة من طرفيها لا نهائيا.

3- يمكن أن نرسم دائرة طول نصف قطرها أي طول ومركزها أي نقطة.

4- أي زاويتين قائمتين متساويتان.



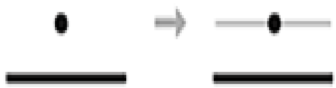
5- إذا قطع مستقيمين مستقيم ثالث وكانت الزوايا الداخلية لأحد الجانبين أقل من مجموع زاويتين قائمتين ($x + y < 180°$) فإن المستقيمين يتقاطعا إذا تم مدهما لا نهائيا.

يحتمل أن إقليدس لم يكن راضيا عن مسلمته الخامسة التي عرفت باسم مسلمة التوازي (Euclid s postulates) والتي وصفت بالإطناب، فقد استخدمت الثمانية وعشرون مثالا الأولى من كتابه المسلمات الأربعة الأولى فقط، لكن في المثال التاسع والعشرين على الخطوط المتوازية لم يكن لديه اختيار سوى الاعتماد على المسلمة الخامسة.

مسلمة التوازي Euclid s postulates

معظم الوقت خلال الألفين وثلاثمائة عام منذ ظهور كتاب العناصر لإقليدس، استخدم المصطلح الهندسة الإقليدية (Euclidean) بكثرة فلم يكن هناك أي نوع من الهندسات الأخرى، فلم يكن معروفا وقتها إلا الأنظمة الهندسية التي تتبع مسلمات إقليدس الخمسة. ومع ذلك، فإن معظم علماء الهندسة شاركوا وجهة نظر إقليدس في أن المسلمة الخامسة كانت إلى حد ما صعبة لأنها كما يتضح أقل المسلمات صوابا. تم التوصل إلى صياغات بديلة أسهل بما فيها تلك التي عرفت باسم مسلمة بلاي فير (playfair's axiom) (على الرغم من أن بلاي فير لم يكن أول من اكتشفها):

إذا كان لدينا خط مستقيم ونقطة لا تنتمي إليه فإنه يوجد على الأكثر خط ومستقيم واحد يمر بهذه النقطة موازيا للخط المستقيم.



"خطان متوازيان" يعني أنهما لا يتقاطعان أبدا إذا تم مدهم لا نهائيا. وقد سبق أن أوضح إقليدس (باستخدام المسلمات الأربعة الأولى فقط) أنه يوجد على الأقل خط واحد فقط كهذا (أي خط واحد يمر بنقطة لا تنتمي للمستقيم الأول) وهو ما يفسر العبارة الغريبة "على الأكثر خط مستقيم واحد".

استقلال مسلمة التوازي The independence of the parallel postulate

استمر علماء الرياضيات الأوروبيين والمسلمين في الجدال حول هذه المسلمة لقرون عديدة. هل من الممكن أن تكون مستنتجة من الأربع مسلمات الأولى؟ لقد كتبت العديد من البراهين الوهمية التي فضح أمرها فيما بعد، وكذلك اكتشفت العديد من الشروط المكافئة منطقيا لهذه المسلمة (بما فيها التأكيد على أن مجموع الزوايا الداخلية للمثلث دائما يساوي 180° درجة). ومؤخرا لاحظ سكوت برودي (Scott Brodie) أن مبرهنة فيثاغورث مكافئة منطقيا لمسلمة التوازي.

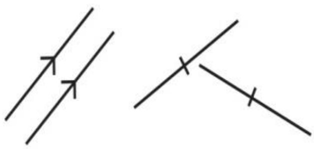
لم يكن حتى القرن التاسع عشر عندما اكتشف كارل فريدريك جاوس (Carl Friedrich Gauss)، ونيكولاي لوباكفيسكي (Nikolai Lobachevsky)، وجانوس بوليا (János Bolyai) نظام الهندسة الزائدية (hyperbolic geometry) الذي توافق مع الأربع مسلمات الأولى ولم يتوافق مع مسلمة التوازي، وبذلك اتضح أخيرا أن مسلمة التوزاي مستقلة عن المسلمات الأربعة الأولى (راجع استقلالية النتائج).

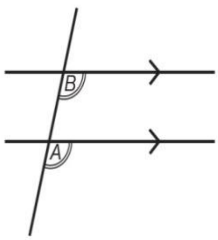
الزوايا Angles

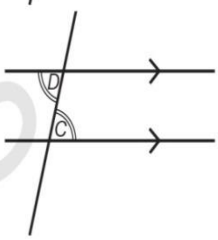
الزاوية هي مقدار الاستدارة، لكن كيف يمكن تحديد ذلك؟ ربما تكون أسهل طريقة لذلك هي بدلالة اللفات، وبالتالي فإن لفة كاملة واحدة تعتبر 1، بينما الزاوية القائمة تعتبر $\frac{1}{4}$ لفة، وهذا ملائم لتوصيف الدورانات الكبيرة، وهذا ما يجعل وحدة قياس السرعة الدورانية باللفة/ ثانية. أما الاستدارات الأصغر يستخدم مقياس أكثر دقة. القياس المعتاد للزوايا يكون بالدرجة (degree) حيث تمثل ال 360 درجة لفة كاملة. وترجع جذور ذلك إلى السنة البابلية القديمة التي كان عدد أيامها 360 يوما.

ومن المعتاد أن تقسم الدرجة إلى 60° دقيقة قوسية، وكل دقيقة قوسية إلى 60° ثانية قوسية. هناك نظام آخر لكنه لم يعد يستخدم كثيرا هو النظام المئوي (the grad) الذي اخترع في فرنسا في محاولة لتضمين الزوايا ضمن النظام المتري. 100° درجة مئوية تمثل زاوية قائمة، مما يجعل اللفة الكاملة تساوي 400° درجة مئوية، وعلى الرغم من أن ذلك مثير للاهتمام من الناحية التاريخية إلا أن هذه الأنظمة اختيارية، ويفضل العلماء استخدام التقدير الدائري وهو نظام مبني على الدوائر؛ حيث تساوي اللفة الواحدة 2 ط بالتقدير الدائري.

الخطوط المتوازية Parallel lines







يقال لخطين مستقيمين أنهما متوازيان إذا كانا يقعان في نفس المستوى ولا يتقاطعا أبدا حتى إذا تم مدهم إلى ما لا نهاية في كلا الاتجاهين مثل خطي سكة حديد لا نهائي الطول. (شرط أن يقعا في مستوى واحد ضروري: ففي الأبعاد الثلاثية يمكن أن يكون الخطان متخالفين؛ أي أنهما ليسا متوازيين أو متقاطعين). وإذا أخذنا في الاعتبار مسلمة التوازي نجد أن من شروطها المكافئة أن المسافة العمودية بين الخطين تكون متساوية دائما مهما اختلف موضع القياس.

يتم تمثيل الخطوط المتوازية باستخدام أسهم متطابقة الشكل على الخطوط، بينما القطع المستقيمة متساوية الطول تمثل برسم شرطتين متطابقتين على كل قطعة.

هناك حقيقتان مهمتان بخصوص ما يحدث عندما يقطع خطين متوازيين مستقيم ثالث، وقد أثبتهما إقليدس في مسألة 1.29 في كتاب العناصر، وتعتمد نتيجته الأولى على مسلمة التوازي.

1- الزوايا المتناظرة متساوية: كما في الرسم، الزاويتان (A) و (B) زاويتان متناظرتان (يطلق عليهما أحيانا زوايا حرف F)؛ لأنها تشغل مواضع متناظرة على خطين متوازيين. الزوايا التناظرة في ذلك الوضع تكون متساوية دائما

2- الزوايا المتبادلة متساوية: الزاويتان (C) و (D) زاويتان متبادلتان (زوايا حرف z) وهما أيضاً متساويتان دائما.

الزوايا القائمة Right angles

مهما اختلفت طرق القياس التي تستخدمها في قياس الزاوية القائمة سواء (°90، أو ط/ 2 أو ربع لفة كاملة) تظل الزاوية القائمة عنصرا أساسيا في الهندسة الإقليدية. وربما يكون أبسط توصيف لها يكون برسم خط مستقيم والذي يصنع زاوية °180 أو ط على كلا الجانبين والتي تصبح بدورها °90 إذا قسمناها إلى زاويتين متساويتين. وتقول مسلمة إقليدس الرابعة أنه متى تقم بهذه الخطوات فإنك ستحصل على نفس النتيجة. يشار إلى الزاوية القائمة بخطين صغيرين يصنعان مربعا ركنيا صغيرا.

المفهوم المعاكس للتوازي هو التعامد: يقال أن خطين متعامدان إذا كانا يصنعان زاوية قائمة مع بعضهما البعض (في بعض الإطارات الأخرى مثل هندسة المتجهات يستخدم المصطلح (orthogonal) للدلالة على التعامد).

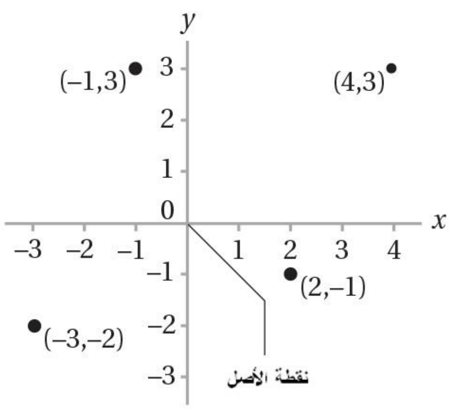
تقدم الزوايا القائمة أيضاً مفهوما للقياس. فقياس المسافة بين نقطتين في مستوى يكون واضحا أما قياس المسافة بين خطين (أو بين نقطة وخط، أو بين خط ومستوى) فيحتاج أن تكون هذه المسافة هي المسافة العمودية: أي طول القطعة المستقيمة الجديدة التي تقطعهما بزاوية قائمة.

الهندسة الديكارتية Cartesian geometry

اشتهر رينيه ديكارت (أو "كارتيسوس" عندما تكتب في اللغة اللاتينية) في الأساس بسبب اختراقه المعرفي الذي ظهر في جملته الشهير "أنا أفكر إذاً أنا موجود". في القرن السابع عشر كانت الحدود الفاصلة بين علم الفلسفة، والعلوم وعلم الرياضيات أقل بروزا مما هي

عليه الآن، وقد كتب ديكارتيه لأول مرة في عمله الشهير "مناقشة حول الوسيلة" (discourse on method) جملة: "أنا أفكر إذاً أنا موجود"، وفي عمل لاحق تحت عنوان "الهندسة" (La Geometrie) قدم ديكارتيه نظام الإحداثيات الذي كان له تأثيرا عميقا مماثلا على الفكر الحديث. لقد وصف ديكارت المستوى الإقليدي (سطح مستو ممتد ثنائي الأبعاد) عن طريق رسم خطين يصنعان مع بعضهما البعض داخل المستوى زاوية قائمة عند نقطة الأصل ويقسمان المستوى إلى أربعة أرباع. اصطلح على تسمية الخط الأفقي محور X، والخط الرأسي محور Y. ويتحدد موضع أي نقطة في المستوى بإحداثي X ، وY.

الإحداثيات الديكارتية Cartesian coordinates



في الهندسة الديكارتية تتحدد كل نقطة في المستوى بمعرفة الربع الذي تقع فيه وبُعدها عن كل محور، وهذا يشبه كثيرا قراءة خريطة؛ ويسمى الرقمان اللذان يحملان هذه المعلومة إحداثيات النقطة.

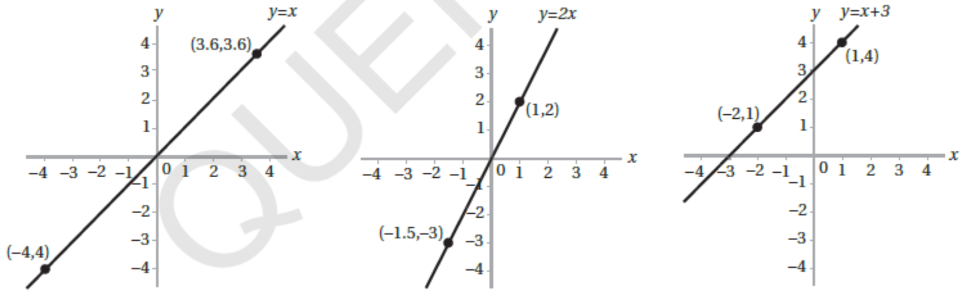
النقطة (4,3) تقع في الربع الأيمن العلوي (لأن كلا الرقمين موجب) وهي عبارة عن 4 وحدات لليمين على طول محور X و 3 وحدات إلى أعلى. (يستخدم بعض الناس جمل مساعدة على التذكر مثل: "بمحاذاة الممر صعودا على الدرج" ليتذكروا ترتيب إحداثيات X و Y، وبالمثل تقع (2- ,3-) في الربع الأيسر السفلي، 3 وحدات لليسار ثم وحدتين إلى أسفل. أما نقطة الأصل فهي (0,0).

رسم الرسوم البيانية Plotting graphs

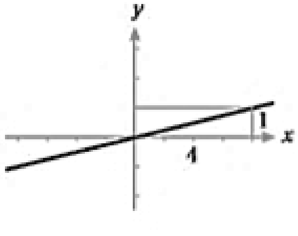
استخدام الأساليب الجبرية في الهندسة قديم قدم البابليين القدماء، لكن الإحداثيات الديكارتية فتحت الباب لوسائل أكثر تطورا في الهندسة؛ فباستخدام الإحداثيات الديكارتية

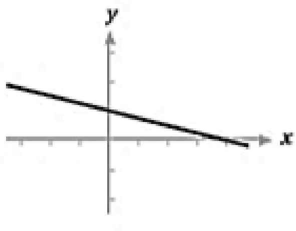
أصبحت النقاط أكثر تحديدا باستخدام الأرقام، و يمكن استخدام العلاقات بين تلك الأرقام في توصيف الأشكال الهندسة.

على سبيل المثال: يمكننا أن ننظر إلى كل النقط التي يكون إحداثييها X، Y متساويين: ((1,1), (0,0), (10- ,10-)) وهكذا، وبتوقيعها على المستوى نجد أن جميعها تقع على خط مستقيم واحد، وبالنظر إلى الأرقام يتضح أن نقطة ما (x, y) تقع على هذا الخط تماما إذا كان الإحداثي X مساويا للإحداثي Y؛ لذلك نقول أن معادلة هذا الخط هي X=Y.



مثال آخر: النقط التي يكون الإحداثي الثاني ضعف الإحداثي الأول: ,(12-,6-) (1,2),(0,0) وهكذا ، وهي تقع أيضاً على خط مستقيم وفي هذه الحالة تكون معادلته y=2x، وبالمثل إذا بدأنا بالمعادلة (y = x+3) وبالتعويض عن قيم X بـ (صفر، -4، 8) نحصل على القيم (1-,4-)، (0,3)، (8,11) على الخط، وجميع هذه النقط إحداثي Y لها أكبر من إحداثي X بمقدار 3.





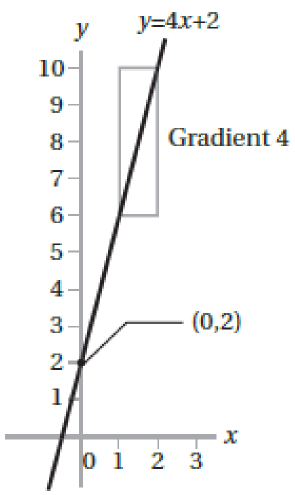
الميل (التدرجات) Gradients

نجد هذه التدرجات مرسومة على العلامات الموضوعة على طريق ما لتشير إلى مقدار وعورة التل؛ حيث أن مقدار 25٪ يعني أنك كلما قطعت مترا واحدا أفقيا تكون قد صعدت بمقدار $\frac{1}{4}$ مترا، ويمكن قول ذلك بطريقة أخرى: في كل النطاقات تكون الزيادة في الارتفاع مقسومة على المسافة الأفقية المقطوعة يساوي دائما $\frac{1}{4}$ ، أما

إذا كنت هابطا من التل فقد تكون العلامة –25٪. بالطبع تكون للتلال الحقيقة بداية ونهاية ويكون الميل بينهما غير منتظم، أما في الخطوط المستقيمة في المستوى فالأمر مختلف. لحساب الميل لخط مستقيم، نختار أي نقطتين على الخط، ونقيس الزيادة الرأسية بينهما ونقسمها على المسافة التي تغطيها النقطتان أفقيا (إذا كان الخط من اليمين إلى اليسار مائلا لأسفل فسيكون الميل سالبا).

ميل المنحنيات الممهدة (smooth curves) غير ثابت بل متغير، فمن المنطقي أن تختار نقطة على المنحنى وتسأل ما هو ميل المماس للمنحنى عند تلك النقطة والذي يمكن حسابه باستخدام التفاضل.

معادلة الخط المستقيم The equation of a straight line



يتحدد الخط المستقيم في المستوى بمعلومتين: الأولى ميله، والثانية إحداثيات أي نقطة يمر بها الخط. ومن النقط الملائمة للاختيار نقطة التقاطع مع محور Y (الموضع الذي يقطع فيه الخط المحور الرأسي (محور Y)) وبما أن النقطة التي اخترناها تقع على المحور فسيكون إحداثيها الأول هو صفر وسنسميها النقطة (0,c).

إذا كان ميل الخط m فإن معادلته تكون $(y = mx + c)$ وبالتالي فإن الخط $(y = 4x + 2)$ يقطع محور الصادات في النقطة وميله 4.

الخط الرأسي حالة استثنائية حيث أنه موازي لمحور Y فهو لا يتقاطع معه في أي نقطة، ويصبح حساب قيمة c ليس له معنى، وبالمثل يكون ميل هذا الخط غير معروف، لأنها لا تغطي أي مسافة أفقية (ويقول البعض أن هناك ميلا نهائيا) وعلى الرغم من ذلك فإن معادلات تلك الخطوط مباشرة؛ لأنها محددة بالإحداثي الأول الذي يظل ثابتا X=3.

الخط الأفقي ميله صفر وهو معرف بالإحداثي الثاني الذي يظل محددا y=4.

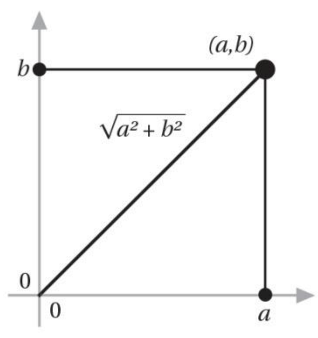
خط الأعداد الحقيقية The real line

يضع كتاب العناصر لإقليدس علم الهندسة للألفية القادمة، فأساسياته، والخطوط المستقيمة ، والمثلثات قائمة الزاوية، والدوائر لازالت مهمة كما كانت، ومع ذلك وبحلول القرن التاسع عشر أصبح علماء الرياضيات مهتمين بعدم اتخاذ الكثير من الأشياء على أنها من الأمور المسلم بها، فكتاب العناصر فتح المجال لبعض التعريفات: "1- النقطة هي ما لا يمكن تجزأته. 2- الخط هو طول ليس له عرض..... 4- الخط المستقيم هو خط يقع بالتساوي بين نقطه 5- السطح هو كل ماله طول وعرض".

خط الأعداد الحقيقية

لن يجد أي عالم رياضيات حديث أي مشكلة في فهم معاني إقليدس، وفي نفس الوقت، ما هو حقا الذي "لا يمكن تجزأته"؟ فقد كان من المهم ترجمة ما قاله إقليدس إلى مصطلحات دقيقة تنتمي للرياضيات الحديثة. ويمكن تعميم هذه الأفكار عن طريق نظام الأعداد الحقيقية (R)، وهو يأتي على صورة هندسية: خط الأعداد الذي يعتبر هو الفضاء الإقليدي الأول من وجهة نظر المصطلحات الحديثة.

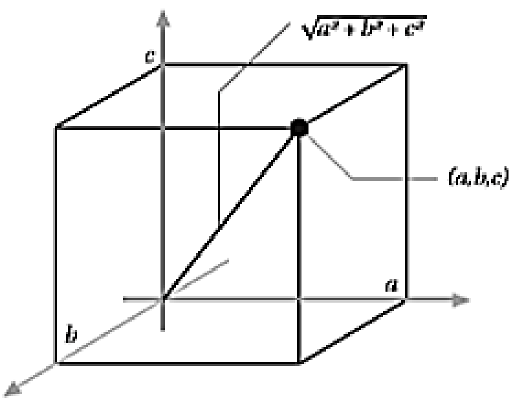
المستوى الإقليدي Euclidean plane



تعرف مجموعة الأعداد الحقيقية أيضاً باسم الخط الحقيقي، وهو يقدم نموذجا مثاليا لخط أحادي البعد، والنقط على هذا الخط هي ببساطة أرقام ، والمسافة بين نقطتين هي النقطة الأكبر مطروح منها النقطة الأصغر، لذلك يكون بعد النقطتين عن بعضهما إما موجب (مع وجود عدد لا نهائي من النقط بينهما)، وإما أن تكون النقطتان هما نفس النقطة؛ أي ليستا متجاورتين حقا بل منطبقتين. وتكون النقط في ترتيب طبيعي يعطى بحجم هذه الأرقام. ويمكن توصيف المستوى عن طريق استبدال أزواج من الأعداد الحقيقية بالأرقام المنفردة، وهذا هو نظام الإحداثيات الديكارتية. ومن

الناحية الرسمية فإن تلك الأزواج ليست مجرد توصيف للاتجاهات المؤدية لنقطة بل هي النقط نفسها. وتعطى المسافة بين نقطة ما (a,b)، ونقطة الأصل من مبرهنة فيثاغورث ($\sqrt{a^2+b^2}$) ويمكن تمديد ذلك ليشمل حساب المسافة بين أي نقطتين). وتلك المجموعة التي تضم جميع أزواج الأعداد الحقيقية يرمز لها بالرمز (R^2) ويطلق عليه الفضاء الإقليدي ثنائي الأبعاد (Euclidean 2-space) أو ببساطة يطلق عليه المستوى، وتكرار هذه العملية يعطي أفضية ذات أبعاد أعلى (Higher dimensional spaces).

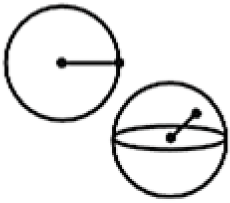
الأفضية ذات الأبعاد الأعلى Higher dimensional spaces



يمكننا تكرار الحيلة التي استخدمناها في الفضاء الإقليدي في الأبعاد الثلاثة حيث: الفضاء الإقليدي ثلاثي الأبعاد هو مجموعة النقط الثلاثية التي تمثل الأعداد الحقيقية (R^2)، والتي يمكن حساب بعدها عن نقطة الأصل (0,0,0,) بالعلاقة ($\sqrt{a^2+b^2+c^2}$). ولسنا بحاجة إلى التوقف هنا والإكتفاء بذلك ؛ فقد لا يكون بإمكاننا تصور فضاء رباعي الأبعاد لكن من الناحية الرياضية فإن الخطوات المؤدية للحصول عليه واضحة: الفضاء الإقليدي رباعي الأبعاد ($\text{Euclidean } 4-\text{space}(R^4)$) هو مجموعة النقط الرباعية التي تمثل الأعداد الحقيقية (a, b, c, d)، ويمكن الاستمرار في ذلك إلى أى بعد نريده، وبصفة عامة يكون الفضاء الإقليدي نوني البُعد $\text{Euclidean } n-\text{space}(R^n)$ هو مجموعة النقط النونية التي تمثل الأعداد الحقيقية $(a, b, \ldots, z)$، والتي تبعد عن نقطة الأصل مسافة تعطى بالعلاقة ($\sqrt{a^2+b^2+\cdots+z^2}$).

الكرات متعددة الأبعاد Multi-dimensional spheres

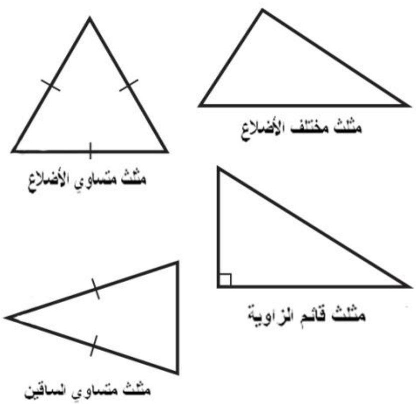
تعرف الدائرة في مستوى على أنها مجموعة النقاط التي تقع على بعد ثابت (يسمى نصف القطر) من نقطة معطاة تسمى المركز.، وللتبسيط نفرض نصف القطر طوله الوحدة، ومركز الدائرة هو نقطة الأصل بالتالي ينتج عن مبرهنة إقليدس صيغة للدائرة كمجموعة من النقط (x, y) حيث $(\sqrt{x^2 + y^2} = 1)$، وبالتالي $(x^y + y^2 = 1)$، وتطبيق نفس الفكرة في الأبعاد الثلاثة يعطي كرة: وهي مجموعة النقط (x, y, z) التي تبعد عن نقطة الأصل مسافة مقدارها الوحدة وبالتالي $(x^2 + y^2 + z^2 = 1)$. وأصبح من الواضح كيف يمكننا التوسع في ذلك وصولًا إلى أبعاد أعلى: في الفضاء الإقليدي نوني الأبعاد تكون الكرة النونية عبارة عن مجموعة من النقط $(x, y, \dots, z)$ التي تبعد عن نقطة الأصل مسافة مقدارها الوحدة، بمعنى أنها مجموعة النقط التي تحقق $(x^2 + y^2 + \cdots + z^2 = 1)$.



على الرغم من العجز البشري عن تخيل الأشكال في الأبعاد العليا، فإنه يمكن الوصول إلى هذه الأشكال بطريقة أخف إرهاقا عن طريق تعميم الأفضية الأكثر شيوعا.

المثلثات TRIANGLES

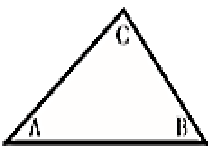
المثلثات Triangles



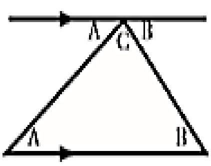
إن أفضل ما يصف عالم الشئون الإنسانية هو نظام الهندسة الإقليدية؛ حيث لا يوجد أشكال ثنائية الزوايا (biangles): وهي الأشكال المكونة من خطين مستقيمين فقط ، وبذلك يكون المثلث البسيط أحد الأشكال الابتدائية وبالتالي أكثرها أهمية. وتأتي المثلثات في أشكال عدة: أولها المضلع

المنتظم وهو المثلث متساوي الأضلاع؛ أي الذي تكون أضلاعه الثلاثة لها نفس الطول، أما المثلث متساوي الساقين فهو المثلث الذي فيه ضلعان لهما نفس الطول، أما المثلث الذي جميع أضلاعه مختلفة الطول فيطلق عليه مثلث مختلف الأضلاع. ثم يأتي عماد الهندسة الإقليدية: المثلث قائم الزاوية والذي هو ببساطة المثلث الذي تكون إحدى زواياه قائمة، أما إذا أصبحت كل زواياه أقل من 90° فسيصبح مثلثا حاد الزوايا. أما إذا احتوى المثلث على زاوية منفرجة (وهي الزاوية التي قياسها أكبر من 90°) فنطلق عليه مثلث منفرج الزاوية.

زوايا المثلث Angles in a triangle



مجموع قياسات زوايا المثلث 180° درجة.



ذلك ما أثبته إقليدس في مسألة 1.32 من كتابه، وكانت هي أول نتيجة مهمة للهندسة المثلثية (triangular geometry). تتبع هذه المبرهنة مبرهنة الزوايا المتبادلة على خطين متوازيين. إذا بدأنا بمثلث ABC ورسمنا خطا يوازي AB ويقطع C، فستكون الزوايا الثلاثة عند C تقع على خط مستقيم وبالتالي تساوى 80°.

لكن الزاويتين الجديدتين عند C تساويان A، وB من مبرهنة الزوايا المتبادلة، ومن بين العديد من النتائج تشير هذه الحقيقة إلى أن جميع زوايا المثلث متساوي الأضلاع متساوية وتساوي 60° درجة.

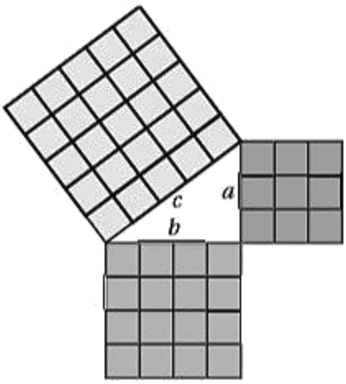
المثلثات قائمة الزاوية Right-angled triangles

المثلث قائم الزاوية هو المثلث الذي تكون إحدى زواياه قائمة، ويكون الوتر في المثلث القائم هو أطول ضلع: المقابل للزاوية القائمة.

المثلثات قائمة الزاوية موجودة في كل مكان حولنا: إنها العناصر الأساسية في الهندسة الإقليدية. وقد مضى أكثر من 3000 سنة منذ وصفت مبرهنة فيثاغورث لأول مرة العلاقة

بين الأضلاع الثلاثة للمثلث القائم. وفي نظام الإحداثيات الديكارتية يكون لكل نقطة (x, y) مثلثها القائم الخاص بها والذي يعطى بالنقط (0,0)، (x,0)، (x, y) لذا فإن مبرهنة فيثاغورث تقدم الوسيلة الأساسية لحساب المسافات في المستوى، كما أن المثلثات قائمة الزاوية بمثابة إطار لعلم حساب المثلثات (trigonometry).

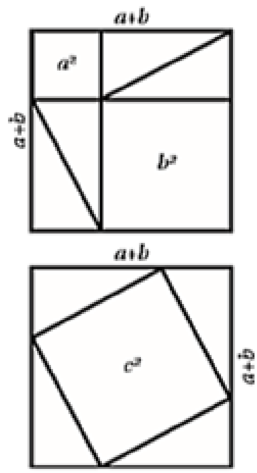
مبرهنة فيثاغورث Pythagoras' theorem



ربما كانت المبرهنة الأشهر على الإطلاق وهي أيضاً من بين أقدم المبرهنات. وعلى الرغم من أن هذه المبرهنة تعزى إلى فيثاغورث عالم الرياضيات اليوناني الغامض(حوالي 475-569 ق م) إلا أن هناك أدلة قوية على أن البابليين القدماء كانوا على معرفة بهذه النتيجة منذ أكثر من ألف عام قبل ذلك. وقد ضمنها إقليدس في مسألة 1.47 في كتابه.

وتتعلق المبرهنة بالمثلث قائم الزاوية، وهي تقول: أن مربع الوتر يساوي مجموع مربعي الضلعين الآخرين (a وb)، ويمكن تصور ذلك هندسيا عن طريق ربط مساحات المربعات المقامة على أضلاع المثلث، أو تصوره تصورا جبريا بحتا: ($a^2+b^2+c^2$).

إثبات مبرهنة فيثاغورث Proof of Pythagoras' theorem



تعد مبرهنة فيثاغورث أكثر مبرهنة مثبتة من بين المبرهنات الرياضية الأخرى، وفي كتاب إيليشا لوميس (Elisha Loomis) تحت عنوان "مسألة فيثاغورث" (the Pythagorean proposition) قامت بتجميع حوالي 367 برهانا.

هذا مثال على البرهان الهندسي الذي وضعه عالم الرياضيات الهندي باسكارا (Bha – skara) في القرن الثاني عشر. مربع أحد أضلاعه (a+b) يمكن تقسيمه بطريقتين

مختلفتين: إحداهما بتقسيمه إلى أربع نسخ من المثلث الذي أضلاعه a ,b ,c. بالإضافة إلى مربع مساحته (a^2) ومربع مساحته (b^2)، والأخرى بتقسيمه إلى أربع نسخ من المثلث ومربع مساحته (c^2)، وبما أن المساحة الكلية متساوية في الحالتين ، فمن المؤكد أن ($a^2+b^2+c^2$).

ثلاثيات فيثاغورث Pythagorean triples

أسهل أطوال يمكن التعامل معها (وخاصة قبل ظهور آلة الجيب) هي الأرقام الصحيحة، وبمجرد أن اتخذت المثلثات قائمة الزاوية موضعها باعتبارها حارسا للهندسة كان لزاما أن نجد بعضا من تلك المثلثات وأن تكون أطوالها ذات قيم صحيحة. لسوء الحظ فإن معظم تلك المثلثات ليس كذلك، فمثلا: إذا جعلت الضلعين الأقصر طولا مساويين الوحدة، فسنجد أن مبرهنة فيثاغورث تبين أن الوتر c لابد أن يحقق ($c^2=1^2+1^2=1+1=2$)، لذلك فإن ($c = \sqrt{2}$) وهو ليس فقط عددا غير صحيح (not a whole number) بل الأسوأ من ذلك أنه أيضاً عدد غير نسبي. ومن المثير للإزعاج أن ذلك يحدث عادة.

أما أول مثلث قائم الزاوية يمكن أن تكون لأضلاعه قيم صحيحة هو المثلث الذي أضلاعه 3، و 4، و 5، وهذا يحقق مبرهنة فيثاغورث ($3^2+4^2=9+16=25=5^2$)؛ لذلك يسمى ثلاثي فيثاغورث (Pythagorean triples)، وتعتبر مضاعفات هذا الثلاثي مثل: (6,8,10)، و (9,12,15) من ثلاثيات فيثاغورث أيضاً.

ويطلق على ثلاثيات فيثاغورث التي ليست مضاعفات لثلاثيات أصغر اسم ثلاثيات فيثاغورث البدائية مثل (5,12,13), (7,24,25), (8,15,17), (9,40,41).

وقد قدم إقليدس في مسألة 10.29 في كتابه صيغة عامة للحصول على تلك الثلاثيات، ويترتب على ذلك أن تصبح قائمة الثلاثيات البدائية ممتدة للأبد.

كان حل مسألة إيجاد ثلاثيات فيثاغورث نتيجة مبكرة في دراسة المعادلات الديفونتية، حيث تنص مبرهنة فيرما الأخيرة على أنه إذا تم تبديل أعداد ذات قوى أعلى ($n \geq 3$) بالمربعات فلن نجد أى قيمة صحيحة للمعادلة ($a^n + b^n = c^n$).

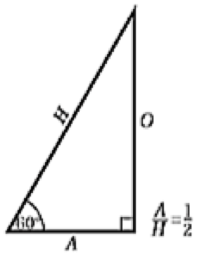
مساحة المثلث The area of a triangle

على مر السنين، اكتشفت الهندسات عددا لا بأس به من الصيغ التي تحسب مساحة المثلث، وأكثرها شيوعا هي (حاصل ضرب نصف طول القاعدة في الارتفاع $(\frac{1}{2}\times b\times h)$ حيث b هي طول أحد الحرفين ولتكن القاعدة، أما h فهي المسافة العمودية بين قاعدة المثلث والنقطة الثالثة في المثلث (وفي الحقيقة فإن هذه الصيغة تعتبر ثلاث صيغ في صيغة واحدة حيث أنها تعتمد على الحرف الذي ستستخدمه كقاعدة للمثلث). باستخدام القليل من علم حساب المثلثات تتحول الصيغة السابقة إلى $(\frac{1}{2}\times a\times b\times \sin C)$ حيث C هي الزاوية المقابلة للضلع c. أما إذا كانت إحداثيات المثلث أعداد صحيحة فستكون أسهل طريقة هي استخدام مبرهنة بيك (Pick's Theorem).

بينما أكثر الطرق تطورا هي استخدام الصيغة (r×s) حيث r هو نصف القطر الدائرة المرسومة داخل المثلث (راجع مراكز المثلثات)، و S هو نصف المحيط $(s = \frac{a+b+c}{2})$، كما أن نصف المحيط مستخدم أيضاً في صيغة هيرو (Heron's Formula) التي أنشأها هيرو السكندري (حوالي عام 50 بعد الميلاد)، وقد تكون أكثر الصيغ المذهلة لإيجاد مساحة المثلث هي $(\sqrt{s(s+a)(s-b)(s-c)})$.

علم حساب المثلثات Trigonometry

في المثلث قائم الزاوية تمثل مبرهنة فيثاغورث العلاقة بين أطوال الأضلاع، في الوقت الذي تمثل فيه حقيقة أن مجموع زوايا المثلث الداخلة °180 درجة العلاقة بين زوايا المثلث: فإذا علمنا أن إحدى الزوايا تساوي 60 درجة فلابد أن تكون الزاوية الثالثة مساوية °30 درجة، مما يعني أن جميع المثلثات القائمة التي تحوي زاوية قياسها °60 درجة لها نفس الشكل الأساسي والاختلاف فقط يكون في مقاساتها (أطوال أضلاعها) (حيث تكون هذه المثلثات متشابهة من الناحية الهندسية)، فنشأ ما يسمى حساب المثلثات (Trigonometry) هذا المصطلح مكون من الكلمتين اليونانيتين (trigonon) وتعني مثلث، و(metron) وتعني قياس فاتحدتا معا وظهر حساب المثلثات الذي يدرس العلاقة بين أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا.



لنفرض أننا على علم بأن أحد زوايا مثلثنا القائم تساوي 60° درجة، ماهي أطوال الأضلاع الممكنة؟ بالتركيز على كلا الضلعين الواقعين على جانبي الزاوية 60°: المجاور وهو الضلع (A) والوتر وهو الضلع (H). الأطوال الممكنة ($A = 1cm, H = 2cm$)، ($A = 5km, H = 10Km$)، ($A = 8\mu m, H = 16\mu m$)، وكلها حلول مختلفة لكن بينها شيء مشترك؛ حيث نلاحظ أن في كل حالة يكون طول الوتر ضعف طول المجاور.

معرفة أن إحدى زوايا المثلث القائم تساوي 60° درجة ليس كافيًا لمعرفة أطوال أضلاعه لكنه كاف لمعرفة قيمة النسبة ($\frac{A}{H}$) وهي تساوي 1/ 2 في المثال السابق، وبالتالي إذا علمنا أن A=4 فسنعلم مباشرة أن H=8. وإذا بدأنا بمثلث قائم به زاوية قياسها 45 درجة فسنجد ($\frac{A}{H} = \frac{1}{\sqrt{2}}$) أي حوالي (0.707). تسمى الدالة التي تأخذ قياس الزاوية ويكون ناتجها النسبة ($\frac{A}{H}$) بدالة جيب التمام (Cosine function) الجيب، وجيب التمام، وظل الزاوية Sine, cosine and tangent .

إذا كانت X زاوية في مثلث قائم الزاوية، فيمكننا تسمية أضلاع المثلث كما يلي: الوتر H (Hypotenuse)، والمقابل للزاوية O (Opposite the angle)، والمجاورA (Adjacent to the angle)، وعلى الرغم من أن H، و O و A يمكن أن تتغير قيمهم دون تغيير الزاوية X (عن طريق تكبير أو تصغير المثلث) إلا أن هذه الأطوال تبقى دائمًا متناسبة، وبالتالي فإن قيم ($\frac{O}{H}$)، ($\frac{A}{H}$)، ($\frac{O}{A}$) ثابتة ، وتتحدد تمامًا عن طريق الزاوية X، وتحسب هذه النسب من دوال الجيب(sine)، وجيب التمام(cosine)، والظل(tangent) على الترتيب (واختصارها: جا(sin)، جتا(cos)، ظا(tan))، ($\sin x = \frac{O}{H}$) ($\cos x = \frac{A}{H}$) ($\tan x = \frac{O}{A}$). على سبيل المثال: في المثلث (3,4,5) (انظر ثلاثيات فيثاغورث)، إذا كانت الزاوية X تقابل الضلع الذي طوله 3، بالتالي يكون جاX= 3/ 5 ($\sin x = \frac{3}{5}$)، جتا X= 4/ 5 ($\cos x = \frac{4}{5}$)، وظا X =3/ 4 ($\tan x = \frac{3}{4}$).

حساب الدوال لزاوية معينة ولتكن 34.2 صعبة بالتأكيد، لكن هناك مفاتيح مخصصة لهذه المهمة في آلات الجيب، أما في الماضي فكانوا مضطرين إلى خوض غمار الجداول المثلثية أو إلى رسم المثلث بقيمه الحقيقية. لقد تخطت هذه الدوال المهمة أصولها الهندسية المتواضعة، فأصبحت في مظهرها الجديد كمتسلسلات قوى تلعب دورا محوريا في تحليل الأعداد المركبة وفي تحليل فورير (دراسة أشكال الموجات) من بين مجالات أخرى.

قاطع التمام، والقاطع، وظل التمام Cosecant, secant and cotangent

في تعريفنا للجيب وجيب التمام والظل قد تتساءل لماذا تم اختيار النسب($\frac{O}{A}$ و $\frac{A}{H}$,$\frac{O}{H}$) بدلًا من ($\frac{A}{O}$ و $\frac{H}{A}$,$\frac{H}{O}$). على أي حال فهذه النسب جميعها ثابتة لأي مثلث قائم يحتوي زاوية ما X وهناك تعريفات لدوال مثلثية أقل شيوعًا هي: قاطع التمام (Cosecant)، والقاطع(secant) وظل التمام (cotangent) (قتا، قا، ظتا).

وهي تأتي مباشرة من التعريفات $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x,} \sec x = \frac{1}{\cos x} = \cot x = \frac{1}{\tan x}$ لذلك فإن نقل المعلومات عن قاطع التمام، والقاطع، وظل التمام بدلالة الجيب وجيب التمام والظل (أو العكس) ليس عملًا شاقًا مطلقًا.

الخواص المثلثية Trigonometric identities

1- تربط الصيغة ($\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$) الثلاث دوال المثلثية الرئيسة، وهذا يأتي مباشرة من التعريف حيث أن ($\frac{O}{A}$) يساوي خارج قسمة ($\frac{O}{H}$) على ($\frac{A}{H}$).

2- إذا كانت X إحدى زوايا مثلث قائم الزاوية، وبتطبيق مبرهنة فيثاغورث على الوتر H والمقابل O و المجاورA نجد أن ($O^2 + A^2 = H^2$).

وبالقسمة على (H^2) نحصل على ($\frac{O^2}{H^2} + \frac{A^2}{H^2} = 1$) والتي تقول أن ($(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$).

3- والتي جرت العادة على كتابتها ($\sin^2 x + \cos^2 x=1$) وتظهر هذه الصيغة عندما نكون بصدد استخدام sin وcos .

إذا كنا على علم بقيمة (sin x)، (sin y)، فما الذي نعرفه عن (sin (x+y؟ الخطأ

البديهي الذي يحدث هنا هو اعتقاد أن sin (x+y) = sin x + sin y. الأمر هنا أكثر تعقيدا قليلا، لكن لا يزال هناك صيغ تتعامل مع ذلك:

$$(\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y)$$

وبالمثل

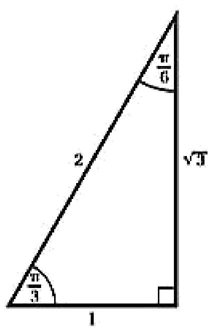
$$(\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y)$$

4- استخدام الصيغ السابقة في الحالة التي تكون فيها ($x = y$) يعطي ما يسمي بصيغ ضعف الزاوية

$$(\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x) \text{ و } (\sin 2x = 2 \sin x \cos x)$$

ويمكن استنتاج ذلك من مبرهنة ديموافر(de Moivre's theorem).

القيم المثلثية Trigonometric values



1- في معظم الحالات يفضل حساب هذه الدوال باستخدام آلة حاسبة، لكن هناك بعض القيم تكون مناسبة للحساب البشري ولا سيما الزوايا: 0°، و 90°، و180°، وبتحويلها إلى القياس الدائري نحصل على :

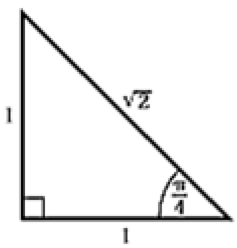
$$(\sin\ 0 = 0 \quad \sin\frac{\pi}{2} = 0 \quad \sin\pi = 0)$$

$$(\cos 0 = 1 \quad \cos\frac{\pi}{2} = 0 \quad \cos\pi = 1)$$

و

$$\tan 0 = \tan\pi = 0$$

وبالمثل ومن القيم المهمة أيضاً: الزاوية 30°، و 60°، و45°، وتحويلاتها الدائرية:



$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \qquad \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

2- في المثلث القائم الزاوية يكون الوتر دائمًا هو الضلع الأطول بالتالي $(H \geq O)$، $(h \geq A)$ وبما أن $(\sin x = \frac{O}{H})$، $(\cos x = \frac{A}{H})$ فلابد أن يكون $(\sin x \leq 1)$، و$(\cos x \leq 1)$.

يمكن توسيع ذلك قليلًا حيث أنه في بعض الحالات تكون لها قيم سالبة أيضاً لكنها تتراوح من 1 إلى -1 (وذلك إلى أن يُسمح باستخدام قيم مركبة لـ X).

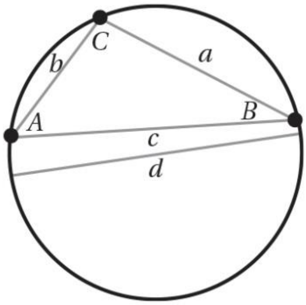
3- دالة الظل في الوقت نفسه يمكن أن يكون ناتجها أي قيمة، لكنها لا تقبل كل قيم X كمدخل: ليس هناك مثلث يحتوي على زاوتين قائمتين معًا (ليس هناك على أي حال أى مثلث إقليدي يحقق ذلك لكن انظر الهندسة الإهليلجية) وبالتالي لن يكون ناتج $(\tan \frac{\pi}{2})$ واضحًا. والأسوأ أنه كلما اقتربت X من 90° تصبح النسبة بين المقابل والمجاور أكبر: $(\tan(89°) = 57)$ ، $(tna(89.9° - 573)$، $(\tan(89.99999°))$ تساوي تقريبًا 6 مليون، وبالتالي لا توجد قيمة معقولة يمكن أن تخصص كقيمة لظل الزاوية 90° $(\tan(90°))$ أو $(\tan \frac{\pi}{2})$، وتبقى الدالة غير معرفة عند هذه النقطة.

قانون الجيوب The law of sines

تتضمن التعريفات السابقة: sin, cos, tan وكذلك مبرهنة فيثاغورث التعامل مع مثلثات قائمة الزاوية، لكن ما الذي يمكن فعله حيال المثلثات غير قائمة الزاوية؟ تقول قاعدة الجيب أو قانون الجيوب أنك إذا أخذت أحد أضلاع مثلث ما وقمت بقسمة طوله على جيب الزاوية المقابلة له فسوف تحصل دائما على نفس الإجابة (d) بغض النظر عن الضلع الذي اخترته. لنفرض مثلث أضلاعه (a)، (b)، (c) والزوايا المقابلة على الترتيب (A)، B (C) فستكون قاعدة الجيب كما يلي

$$(\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = d)$$

الرقم (rd) له تفسير هندسي بارع: إنه طول قطر الدائرة المحيطة بالمثلث (الدائرة الوحيدة التي تمر برؤوس أضلاع المثلث الثلاثة، انظر أيضاً مراكز المثلثات).



ترجع جذور قاعدة الجيب إلى نتيجتي 1.18، 1.19 في كتاب العناصر لإقليدس لكنها كتبت صراحة لأول مرة على يد عالم الرياضيات والفلك الفارسي الذي ظهر في القرن الثالث عشر (ناصر الدين الطوسي) (Nasir al-Din al-Tusi).

قانون جيوب التمام The law of cosines

قانون جيوب التمام هو امتداد لمبرهنة فيثاغورث للمثلثات غير القائمة. على الرغم من أن الدوال مثلثية مثل دالة جيب التمام لم تكن قد ظهرت إلا فيما بعد إلا أنه تم إثبات نسخة هندسية من هذه النتيجة في مسألة 2.12، 2.13 في كتاب العناصر لإقليدس. ويعرف قانون جيوب التمام أيضاً بقاعدة جيب التمام، ويقول: إذا كانت أضلاع مثلث ما (a)، و(b) و(c) وكانت الزوايا المقابلة هي (A) و (B) و(C) على الترتيب بالتالي $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \mathrm{dos}\ A$.

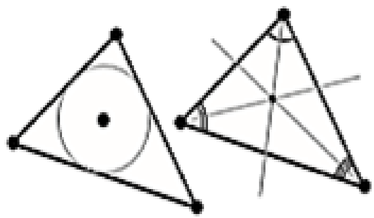
وإذا حدث أن أصبح المثلث قائم الزاوية فإن هذه القاعدة ترجع إلى البيان الأصلي لمبرهنة فيثاغورث لأن ($\cos(90°) = 0$).

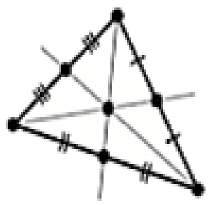
يمكن تقسيم أي مثلث إلى مثلثين قائمي الزاوية: تستنتج قاعدة جيب التمام من تجميع الحسابات المثلثية العادية لمثلث مقسم إلى مثلثين قائمين).

مراكز المثلثات Centres of triangles

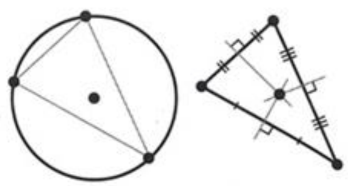
مركز الدائرة أو مركز المستطيل له معنى واضح غير غامض، لكن أين يقع مركز المثلث؟ طبقا لموسوعة مراكز المثلثات التي يحتفظ بها عالم الرياضيات كلارك كيمبرلنج (Clark Kimberling) بجامعة إيفانسفيل فإنه يوجد 3587 إجابة مختلفة لهذا السؤال (وذلك حتى الوقت الذي تمت فيه الكتابة!)، والأسوأ من ذلك أن العدد المحتمل لدوال مركز المثلث لا نهائي، وإليك معظم التعريفات الشائعة:

1- داخل أي مثلث يمكن رسم دائرة وحيدة محوطة تمس أضلاع المثلث الثلاثة في نقطة، ويكون مركز المثلث هو مركز هذه الدائرة، وبالتالي تقع هذه النقطة على نفس البعد العمودي على كل ضلع. ومركز المثلث هو أيضاً نقطة تقاطع منصفات زوايا المثلث الثلاثة.

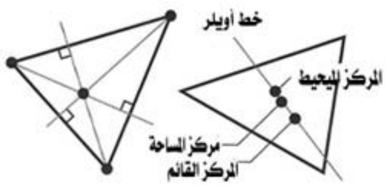


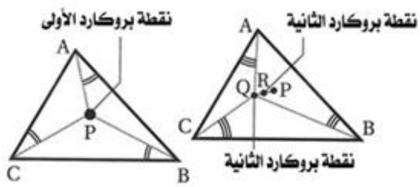


2- إذا قمت بتوصيل كل رأس من رؤوس المثلث بمنتصف الضلع المقابل لها ستتقاطع هذه الخطوط الثلاثة في مركز مساحة المثلث (centroid)، إذا قمت بتشكيل مثلث من صفيحة معدنية سيكون هو مركز الثقل (centre of gravity).



3- لأي مثلث يمكن رسم دائرة خارجة وحيدة تمر برؤوس المثلث الثلاثة فيكون المركز المحيطي (circumcentre) هو مركز الدائرة، وهي أيضاً نقطة تلاقي المنصفات العمودية على الأضلاع (لكنها لاتعتبر نقطة مركز دقيقة لأنها ستقع خارج المثلث إذا كان منفرج الزاوية).





4- إذا قمت بالتوصيل بين كل رأس من رؤوس المثلث والضلع المقابل له بحيث تكون الخطوط متعامدة على الأضلاع فستتلاقى الخطوط الثلاثة (أو الارتفاعات) في نقطة تسمى المركز القائم (Orthocentre) (بالنسبة للمثلث منفرج الزاوية سوف تحتاج إلى مد الأضلاع ويمكن أن تقع نقطة المركز خارج المثلث).

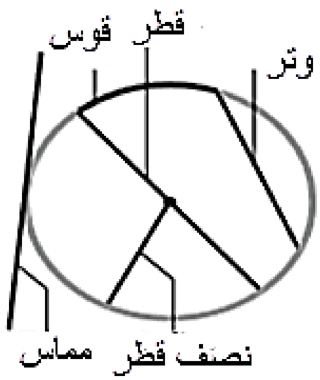
5- تعرف نقطة بروكارد الأولى (The first Brocard point) على أنها النقطة (P) بحيث تكون الزوايا (PAB)، (PBC)، (PCA) متساوية في القياس، وهي لا تعتبر نقطة مركز تماما. وهناك نقطة بروكارد الثانية (The second Brocard point) بحيث تكون الزوايا (QBA)، (QAC)، (QCB) متساوية في القياس. أما نقطة بروكارد الثالثة (the third Brocard point R) فتعرف على أنها النقطة التي تقع في منتصف المسافة بين النقطتين الأولى والثانية وهي إحدى مراكز المثلث.

خط أويلر The Euler line

جميع مراكز المثلث المختلفة السابق ذكرها لا تنطبق على بعضها إلا في المثلث المتساوي الأضلاع، لكن في عام 1765 أثبت العالم السويسري العظيم ليونارد أويلر(Leonhard Euler) أن كل من المركز القائم ، ومركز المساحة، والمركز المحيطي تقع دائما على خط مستقيم واحد يعرف الآن باسم خط أويلر(Euler line)، كما أوضح أيضاً أن المسافة بين المركز القائم ومركز المساحة ضعف المسافة بين مركز المساحة والمركز المحيطي.

الدوائر CIRCLES

الدوائر Circles



ارسم نقطة على الأرض ثم اطلب من عشرة أشخاص الوقوف على بعد متر واحد من تلك النقطة فسيظهر لك شكل تقريبي للدائرة. وهذا هو تعريف إقليدس للدائرة (قد يقل أو يزيد عن ذلك) وهو التعريف الذي ظل قائما بشكل أساسي دون تغيير إلى وقتنا الحالي. وتتحدد الدائرة بمعلومتين: نقطة (o) تكون مركزا لها، وطول (r) يمثل نصف قطرها، ثم تكون الدائرة رسميا هي مجموعة جميع النقط الواقعة في المستوى على بعد (r) عن المركز (نفس التعريف في الأبعاد الثلاثية يكون تعريف الكرة).

أما القرص فهو مجموعة النقط التي تبعد عن المركز مسافة أقصاها (r): بمعنى آخر هو عبارة عن دائرة مصمتة (filled-in circle). من الناحية العملية يكون هذا الفرق (الفرق بين تعريف الدائرة والقرص) مهملا كما حدث في مناقشة مساحة الدائرة (والتي تبدو في وجهة نظر عالم شديد التحذلق أن مساحتها صفر على الرغم من أن مساحة القرص المناظر لها تعطى من العلاقة (πr^2)).

تأتي الدائرة في مجموعة من المصطلحات المصاحبة لها مثل: محيط الدائرة (circumference) هو طول الحدود الخارجية للدائرة، والقوس(arc) وهو جزء من محيط الدائرة يقع بين نقطتين، ونصف القطر(radius) القطعة المستقيمة الواصلة بين مركز الدائرة وأي نقطة على محيطها، والوتر (chord) هو القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطة وأخرى على الدائرة، ويقسمها إلى قسمين، القطر(diameter) وهو الوتر المار بالمركز (وبالتالي يكون طوله ضعف طول نصف القطر)، والمماس (tangent) هو خط مستقيم خارج الدائرة يمسها في نقطة واحدة فقط.

النسبة التقريبية ط (π)

وتساوي تقريبا (3.14159265358979323846264338327950...,)، وتعرف النسبة ط على أنها النسبة بين محيط الدائرة إلى قطرها. وحوالي عام 1500ق م افترض واضعو بردية ريند الرياضية أن حقلا دائريا قطره تسع وحدات له نفس مساحة حقل مربع أطوال أضلاعه 8 وحدات. إذا كان ذلك صحيحا فستكون قيمة ط $\frac{256}{81}$ وفي الواقع فإن ط عدد غير نسبي مما يعني أنه من المستحيل أن تكون قيمته الدقيقة على صورة كسر اعتيادي أو كسر عشري دائر لذلك يمتد تمثيله في صورة كسر عشري إلى ما لا نهاية ودون تكرار. والأدهى من ذلك أنه عدد متساو مما يجعله خارج إطار مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة المألوفة. ربما تفسر هذه الحقيقة بالإضافة إلى تاريخه القديم وتعريفه الموجز سبب اختراق هذا الرقم لما هو أبعد من الدوائر الرياضية. فهذا الرقم الذي أصبح بطلا للعديد من الكتب يتألق أيضاً في العديد من الأفلام والأغاني، ويحتفل بيوم الرابع عشر من مارس باعتباره اليوم العالمي للنسبة التقريبية ط.

وأصبحت ط أيضاً موضع اختبار للعديد من مفاخر المحاولات البشرية. التسجيل الحالي لخانات ط المحسوبة حتى الآن يرجع إلى فريق من علماء الكمبيوتر تحت قيادة فابريك بيلارد (Fabrice Bellard) الذي اكتشف أول (2699999990000) حسب كمبيوتر مكتبي عادي في عام 2009.

ويحكي عالم الرياضيات چون كون واي (John Conway) عن نزهه الرومانسية مع زوجته حين كانا يقرآن خانات العدد ط بالتناوب بحيث يقول كل منهم 20 خانة وهكذا، وبذلك حفظ أول ألف خانة، وهو إلى حد ما أقصر من الرقم القياسي الحالي في موسوعة جينيس وهو (97,890) الذي حققه شاو لو(Chao Lu) عام 2005، ومع ذلك لازال التحقق مستمرا من محاولة أكيرا هارجوشي (Akira Haraguchi) عام 2006 في الوصول إلى 100000 خانة 1.

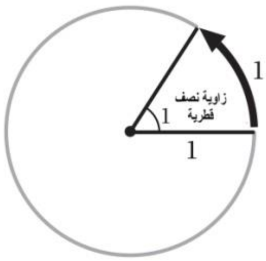
الصيغ الرياضية للدائرة Circle formulas

إن التعريف الأصلي للنسبة التقريبية ط على أنها النسبة بين محيط الدائرة وقطرها قديم قدم الأهرامات، وبالتالي فإن الصيغة الرياضية لحساب محيط الدائرة أثاره رياضية صحيحة: $c = \pi d$ تكافئ ($c = 2\pi r$) حيث (r) نصف قطر الدائرة.

و استنتج أرشميدس صيغة حساب مساحة قرص ((A)) صراحة لأول مرة حوالي عام 225 ق م وهي ($A = \pi r^2$). وهذا يعني أن المربع المرسوم على نصف قطر الدائرة يلاءم الدائرة بمقدار ط من المرات. في بعض الحالات في الإحداثيات الديكارتية تمثل دائرة الوحدة مقياسًا ذهبيًا؛ فمركزها هو نقطة الأصل، ونصف قطرها الوحدة، وبذلك تتكون من كل النقط (x, y) التي تبعد مسافة 1 عن (0,0) والذي يؤول إلى المعادلة ($x^2 + y^2 = 1$) (من نظرية فيثاغورث)، (في الأعداد المركبة يعبر عن ذلك بـ ($|z| = 1$) وبشكل أعم: الدائرة التي مركزها (a, b) ونصف قطرها r يتم توصيفها باستخدام الصيغة ($(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$).

الزوايا النصف قطرية Radians

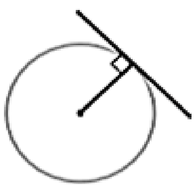
بما أن الزاوية هي مقدار الاستدارة إذا الشكل الهندسي الأوضح لدراسة ذلك هو الدائرة، فبدءا من نقطة على الدائرة يمكننا قياس مقدار الاستدارة خلال المسافة المناظرة حول الدائرة، وبما أن المحيط الكلي لدائرة الوحدة طوله 2ط فيكون هذا هو عدد الزوايا النصف قطرية التي تمثل لفة كاملة ، وبالتالي 1 د = $(\frac{1}{2\pi})$ وهو حوالي (15.9%) من اللفة الكاملة ، وهو ما يكافئ الزاوية التي لها قوس طوله الوحدة.

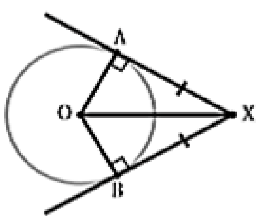


ومن مميزات هذه الطريقة أن حساب طول القوس أصبح مباشرًا، فإذا كان قوس ما له الزاوية ثيتا (θ) مقدرة بالتقدير الدائري حول دائرة نصف قطرها (r) فبالتالي يكون طول القوس rθ. وهذا هو أول مثال على انسجام الزوايا النصف قطرية مع الدوال الرياضية، كما أن حساب المثلثات بالمثل يكون أكثر انسجامًا وسلاسة عند التعامل مع القياسات الدائرية أكثر من غيرها.

مبرهنة المماسات المتساوية The equal tangent theorem

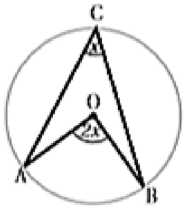
من الحقائق الأساسية حول الدوائر، والتي أثبتها إقليدس فسر مسألة 3.18 من كتابه هي أن المماس للدائرة من نقطة يكون عموديًا على نصف قطرها، وترتب على ذلك ظهور نظرية المماسات المتساوية: خذ أي نقطة خارج الدائرة ولتكن (X) وسيكون هناك مماسان بالضبط يمكن رسمهما بحيث يمران بـ (X). وتقول المبرهنة أن المسافة من (X) إلى الدائرة هي متساوية في المماسين، ولنرى ذلك سنسمي نقط تماس الدائرة : (A)، و(B)، والمركز (O) بالتالي فإن (OA)، (OB) نصفا قطر، وبالتالي لهما نفس الطول، وأيضًا (OA)، و(AX) متعامدان وكذلك (OB)، (BX) متعامدان أيضاً، وبالتالي لدينا مثلثان قائمان هما: (DAX)، (OBX) بحيث





(OX) هو الوتر المشترك، و(OA)، (OB) لهما نفس الطول، وبالتالي من مبرهنة فيثاغورث تكون (AX)، و(BX) متساويتين في الطول.

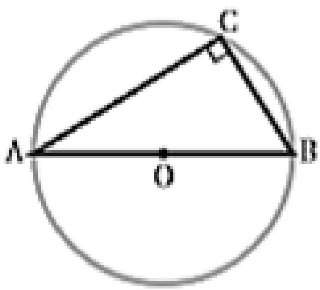
مبرهنة الزاوية المحيطية The inscribed angle theorem



قياس الزاوية المركزية يساوي ضعف قياس الزاوية المحيطية المرسومة على نفس القوس.

تتضمن هذه المبرهنة الأساسية التي جاءت في مسألة 3.20 من كتاب العناصر لإقليدس عديدا من النتائج الأخرى المفيدة، وبشكل رسمي تقول المبرهنة أنك إذا أخذت نقطتين (A)، (B) على محيط الدائرة ووصلت بين كل نقطة منهما وبين مركز الدائرة (O) فستكون الزاوية الناتجة مساوية لضعف الزاوية الناتجة عن التوصيل بين كل نقطة منهما ونقطة ثالثة تقع على محيط الدائرة (C) (يجب أن نكون حذرين قليلا؛ لأن هناك بالطبع زاويتان عند (O): زاوية كبيرة وزاوية أصغر، وتهتم المبرهنة دائما بتلك التي تكون مناظرة للزاوية عند (c) وليست الزاوية العكسية لها. وينتج عن هذه المبرهنة نتائج مهمة عدة منها مبرهنة طاليس (the theorem of Thales)، ومبرهنة الزوايا المشتركة في القوس(the theorem on angles in the same segment)، وخصائص الأشكال الرباعية الدائرية (cyclic quadrilaterals).

مبرهنة طاليس The theorem of Thales

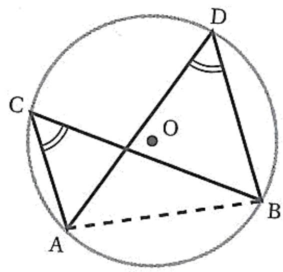


الزوايا المحيطية المرسومة في نصف دائرة تكون قائمة لتوضيح هذه النتيجة قليلا: إذا رسمت قطرا في الدائرة وقمت بالتوصيل بين كل نقطة من نهايتيه (A) و(B) وأى نقطة (C) على المحيط فستكون الزاوية الناتجة (ACB) دائما قائمة، ويتبع ذلك مبرهنة الزاوية المحيطية:

حيث أن (A) و(B) تصنعان زاوية 180° عند المركز، وبالتالي لابد أن يكون قياس الزاوية المحيطة المناظرة يساوي النصف؛ أي يساوي 90°. وقد ضمن إقليدس هذه النتيجة في

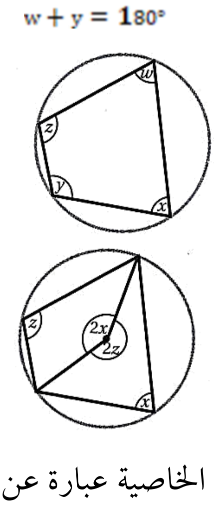
مسألة 3.31 في كتاب العناصر، لكن أثبتها لأول مرة "أبو الهندسة" الفيلسوف المتأثر بالبيئة المصرية طاليس الملطي (Thales of Miletus) حوالي 600 ق م.

الزوايا المحيطية المشتركة في نفس القوس Angles in the same segment



إذا أخذت نقطتين على محيط الدائرة ووصلت بينهما بوتر، ستكون قد قسمت الدائرة إلى قطاعين. الزاوية المرسومة في قطاع هي تلك الزاوية التي تنشأ من توصيل كل من نهايتي الوتر(A) و(B) بنقطة ثالثة (C)على محيط الدائرة. وقد أثبت إقليدس في مسألة 3.21 في كتاب العناصر أن أي زاويتين مرسومتين في نفس القطاع متساويتان في القياس، لذلك، كما يتضح من الرسم الزاوية (ACB) تساوي الزاوية (ADB) في لقياس وفي الحقيقة تعتبر تلك نتيجة لمبرهنة الزوايا المحيطية؛ حيث أن كل من (ACB)، (ADB) لابد أن تكون نصف الزاوية المركزية AOB وبالتالي تكونا متساويتين في القياس.

الأشكال الرباعية الدائرية Cyclic quadrilaterals

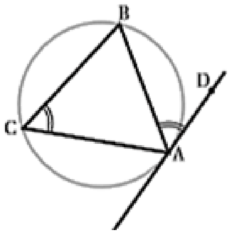


يمكن رسم أي مثلث محاط بدائرة، بمعنى أنك يمكنك أن ترسم دائرة بحيث تقع جميع رؤوس المثلث على محيطها، لكن هذا ليس صحيحا دائما بالنسبة للأشكال الرباعية (الأشكال المكونة من أربعة أضلاع) فمثلا لا يمكن رسم دائرة محيطة بمعين (إلا إذا كان هذا المعين مربعا). والأشكال الرباعية الدائرية هي تلك الأشكال التي يمكن رسم دائرة محيطة بها، وفي مسألة 3.22 أثبت إقليدس الخاصية المحددة لهذه الأشكال، وهي أن:

كل زاويتين متقابلتين مجموعهما 180°، وفي الحقيقة نجد أن هذه الخاصية عبارة عن نتيجتين في نتيجة واحدة؛ حيث تقول الأولى أن الأشكال الرباعية الدائرية بها تلك الخاصية وهي نتيجة لمبرهنة الزاوية المحيطية: قم بالتوصيل بين المركز ورأسين متقابلين من رؤوس

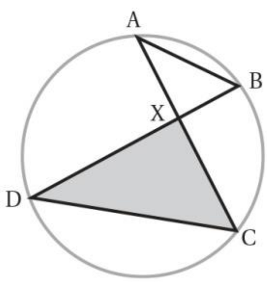
الشكل الرباعي الدائري،ومن الواضح أن مجموع الزاويتين المركزيتين يساوي 360° ($2x + 2z = 360°$)، وبالتالي يكون مجموع الزاويتين الباقيتين يساوي نصف ذلك: ($x + z = 180°$)، والجزء الثاني من المبرهنة يقول أن كل الأشكال الرباعية التي لها هذه الخاصية يمكن رسم دائرة محيطة لها (أي أنها أشكال رباعية دائرية).

مبرهنة القطاع المتبادل The alternate segment theorem



نفرض أن هناك ثلاث نقط (A)، (B)، (C) تقع على محيط دائرة، وهناك مماس للدائرة عند (A). خذ نقطة (D) على خط التماس الذي يقع في الجهة المقابلة للخط (AB) من (C) بين إقليدس في مسألة 3.32 من كتاب العناصر أن قياس الزاوية (ACB) يساوي قياس الزاوية (BAD) (الزاوية (ACB) هي الزاوية الناشئة عند (C) نتيجة توصيلها بـ (A)، و(B)) وتعرف هذه المبرهنة أيضاً باسم مبرهنة المماس والوتر. (the Tangent–Chord theorem) من الناحية النفسية، تقول هذه المبرهنة أن الزاوية (ACB) تساوي في القياس الزاوية المحصورة بين الوتر (AB) والقوس من(A) إلى (B) لكن الخطوط المنحنية والزوايا لا تتلاءم معا بشكل جيد؛ لذلك يستخدم المماس المستقيم بغرض الدقة.

مبرهنة الأوتار المتقاطعة Intersecting chords theorem

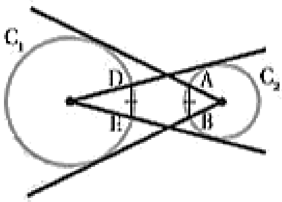


إذا كانت النقط (A)، (B)، (C)، (D) أربعة نقط تقع على دائرة وكانت (X) هي نقطة تقاطع (AC)، (BD) فإن المثلثين (ABX)، (DCX) يكونان متشابهين، وستظل هذه المبرهنة محققة حتى إذا كانت النقطة (X) موجودة خارج الدائرة.

مبرهنة كرة العين Eyeball theorem

لم يتوقف تحليل الدائرة عند إقليدس بل تم اكتشاف العديد من الحقائق الغريبة والرائعة منذ وضع إقليدس حجر الأساس في هذا الصدد، ومن أمثلة تلك الحقائق:

مبرهنة كرة العين. خذ دائرتين (C_1)، (C_2) (ليس شرطًا أن تكونا منطبقتين) ثم ارسم مماسين لـ(C_1) بحيث يلتقيان في مركز (C_2) ولنقل أنهما يقطعان الدائرة (C_2) في (A)، (B)، وبالمثل ارسم مماسين لـ (C_2) يتلاقيان في مركز (C_1) ويقطعانها في النقطتين (D)، (E)، وبالتالي ستكون المسافة من (A) إلى (B) (على امتداد الخط) هي نفس المسافة من (D) إلى (E).



المضلعات والمجسمات ثلاثية الأبعاد
POLYGONS AND POLYHEDRA

المضلعات Polygons

تندرج المثلثات، والأشكال الرباعية، والخماسية تحت فئة أوسع من المضلعات: وهي أشكال ثنائية الأبعاد محددة بخطوط مستقيمة تتلاقى فيما يسمى بالرؤوس (الأركان).

لقد ظلت المضلعات موضعا للدراسة منذ القدم، وأسهل المضلعات من حيث التحليل هي المضلعات المحدبة (الأشكال النجمية مثال على المضلعات غير المحدبة).

المضلع المنتظم أضلاعه كلها متساوية الطول، وزواياه كلها متساوية في القياس. من الأمثلة الأولى على المضلعات المنتظمة: المثلثات متساوية الأضلاع، والمربعات ثم يأتي بعد ذلك الخماسي المنتظم... وهكذا.

يمكن أن يوجد مضلع منتظم محدب له أي عدد من الأضلاع بدءا من ثلاثة أضلاع، وكلما زاد عدد الأضلاع أصبح المضلع أقرب إلى الدائرة. في عام 1796 أثبت كارل فريدريك جاوس (Carl Friedrich Gauss) عندما كان في التاسعة عشر من عمره أن ليس كل المضلعات المنتظمة يمكن رسمها باستخدام التشييدات الأولية البسيطة بالمسطرة والفرجار (ruler and compass constructions).

التحدب Convexity

يقال لشكل (X) أنه محدب إذا كان يمكنك التوصيل بين أي نقطتين داخله بخط مستقيم بحيث يقع الخط كاملا داخل الشكل؛ فالخماسي المنتظم محدب، أما النجمة فليست كذلك؛ لأن من الممكن إيجاد نقطتين يقع الخط الواصل بينهما خارج الشكل. ويمكن تطبيق نفس التعريف على الأبعاد الأعلى، وبالتالي فإن الكرة محدبة بينما شكل الموزة المنحنية ليس كذلك.

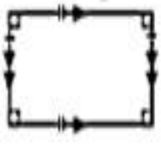
يعتبر التحدب معيار أساسي في تصنيف الأشكال الهندسية في الأبعاد المختلفة، وبصفة عامة فإن الأشكال المحدبة يسهل التعامل معها وتصنيفها على عكس الأشكال غير المحدبة التي تعتبر أكثر وعورة. يفترض عادة أن المضلعات المنتظمة محدبة إلا أن هناك أيضاً إمكانية لوجود مضلعات غير منتظمة على هيئة مضلعات نجمية مثل: النجمة الخماسية.

مجسمات أفلاطون (Platonic solids) محدبة لكن لها نظائر ذاتية التقاطع غير محدبة على هيئة مجسمات كيبلر- بوينسوت ثلاثية الأبعاد (Kepler–Poinsot polyhedra).

الأشكال الرباعية المحدبة Convex quadrilaterals

أبسط الأشكال الرباعية هو المربع؛ حيث ينشأ من أربعة أضلاع متساوية الطول، وأربع زوايا قائمة. الأشكال الرباعية: هي أشكال ثنائية الأبعاد تنشأ من أربعة أضلاع مستقيمة، ويعتبر المربع هو الرباعي المنتظم الوحيد. وبالتخلي عن بعض هذه الخصائص تظهر أنواع أخرى من الأشكال الرباعية:

- المستطيل (rectangle) يحتوي على أربع زوايا قائمة (وبالتالي يكون كل ضلعين متقابلين متساويين في الطول).



مستطيل

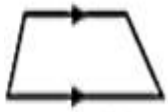
- المعين (rhombus): له أربع أضلاع متساوية، وكل ضلعين متقابلين متوازيين، وزواياه ليست قائمة. (إلا إذا أصبح المعين مربعا).

معين

- متوازي الأضلاع (parallelogram): يحتوي على زوجين من الأضلاع المتوازية (ولابد أن يكون كل زوج له نفس الطول).

متوازي أضلاع

- شبه المنحرف (trapezium أو trapezoi): له زوج واحد من الأضلاع المتوازية، ويندرج تحته: شبه المنحرف متساوي الساقين (isosceles trapezia) (حيث يكون الزوج المتبقي من الأضلاع متساوي الطول)، وشبه المنحرف القائم (right trapezia) (الذي يحتوي على زاويتين قائمتين).



شبه منحرف

الطائرة الورقية

- شكل الطائرة الورقية (Kite) أو (Deltoid): الذي فيه زوجان من الأضلاع متساوية الطول مثل متوازي الأضلاع لكن كل ضلعين متساويين متلاقيين في نقطة، بدلا من أن يكونا متقابلين.

إذا لم يكن بالشكل الرباعي أضلاع متساوية الطول، ولا أضلاع متوازية، ولا زوايا قائمة فإنه يحكم عليه بأنه رباعي غير منتظم؛ على سبيل المثال: معظم الأشكال الرباعية الدائرية غير منتظمة.

الأشكال الرباعية غير المحدبة Non-convex quadrilaterals

يمكن أن يتحقق تعريف شكل الطائرة الورقية بواسطة الأشكال المحدبة وغير المحدبة على حد سواء ، وغالبا ما يطلق اسم (chevron)[1] على شكل الطائرة الورقية غير المحدب، وهو أكثر الأشكال الرباعية المنعكسة (التي تحتوي على زاوية قياسها أكبر من 90°). تماثلا، ومن الأشكال التي تقع على حافة القبول

(1) شكل أشبه ما يكون بحرف الـ V.

الإنشاءات المكونة من أربعة خطوط مستقيمة حيث يتقاطع خطان معا: الأشكال الرباعية ذاتية التقاطع، وأكثر ما يشبهها شكل ربطة القوس (bow-tie).

المجسمات ثلاثية الأبعاد Polyhedra

لقد تغير تعريف المجسم بمرور الزمن، لكن التعريف الأساسي هو أنه سطح مكون من أوجه مستوية ثنائية الأبعاد تتلاقي في حواف مستقيمة ورؤوس يمكن أن نسميها أركانا. والمجسمات هي النظائر ثلاثية الأبعاد للمضلعات وتنقسم إلى مجسمات محدبة، ومجسمات غير محدبة وهي الأكثر تعقيدا.

قصة المجسم عبارة عن تتابعات من التصنيفات الرياضية المبنية على مفاهيم عن التماثل أكثر شمولا، وتبدأ القصة بأكثر المجسمات انتظاما على الإطلاق ألا وهي المجسمات الأفلاطونية (The Platonic solids)، ويلي ذلك مجسمات أرشميدس (the Archimedean solids) والمنشور (prisms)، والمنشور المضاد (antiprisms)[1] والتي تتميز بقدر عال من التماثل في أن جميع رؤوسها متطابقة، كما أن أوجهها عبارة عن مضلعات محدبة منتظمة، على عكس المجسمات الأفلاطونية التي قد تكون أوجهها مكونة من أشكال مختلفة.

ومن المجسمات الجذابة أيضاً مجسمات كاتالان (Catalan solids) التي يتكون منها حجر النرد المنتظم (لأن كل أوجهها متطابقة، ولكنها ليست مضلعات منتظمة)، ومجسمات جونسون: وهي تضم جميع المجسمات المحدبة التي أوجهها مضلعات منتظمة.

يمكن تصنيف المجسمات غير المحدبة أيضاً: وأكثرها تماثلا مجسمات كيبلر–بوينسوت المنتظمة (Kepler–Poinsot polyhedra)، ويطلق على المجسمات ذات الرؤوس المتطابقة اسم متساويات الزوايا (isogonal)[2].

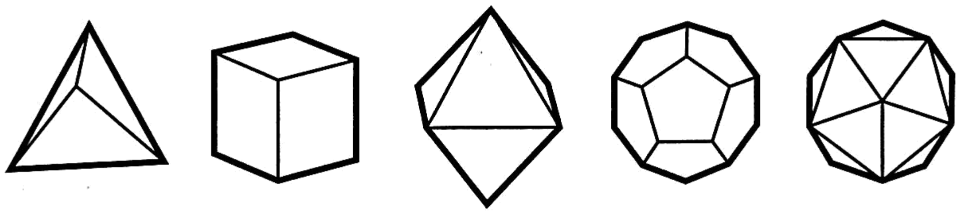
(1) نقيض المنشور هو شكل يتكون من نسختين متوازيتين من نفس المنشور.

(2) شكل هندسي زواياه متساوية.

المجسمات الأفلاطونية The Platonic solids

تضم المجسمات الأفلاطونية خمس مجسمات جميلة ومهمة:

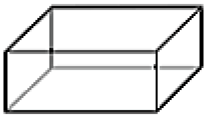
- رباعي الوجوه (tetrahedron): ويتكون من أربعة مثلثات متساوية الأضلاع.
- المكعب (سداسي الوجوه) (cube) الذي تتلاقى أوجهه المربعة الستة في زوايا قائمة.
- ثماني الوجوه (octahedron) الذي ينشأ من ثمان مثلثات متساوية الأضلاع.
- اثنا عشري الوجوه (dodecahedron) الذي يتكون من 12 وجها على شكل خماسي منتظم.
- عشريني الوجوه (icosahedron): فيه يلتقى 20 مثلثا متساوي الأضلاع عند كل رأس خمسة خمسة.



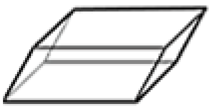
أولى الفيلسوف أفلاطون هذه الأشكال الخمسة عالية التماثل الاهتمام الأكبر، وحوالي عام 350 ق م كتب أن رباعي الوجوه، والمكعب، وثماني الوجوه، وعشريني الوجوه جميعها تتوافق مع العناصر الأربعة: النار، والتراب، والهواء والماء على الترتيب، كما اعتبر أن الإله استخدم المجسم الاثني عشري الوجوه لترتيب كوكبة الكون كله.

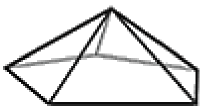
من الناحية الرياضية فهذه الأشكال محدبة ومنتظمة، حيث إن كل وجه عبارة عن مضلع منتظم مطابق للآخرين، وبالمثل لا يمكن التفرقة بين الحواف ، ولا الرؤوس. وقد قدم أفلاطون إثباتا في واحدة من أول مبرهنات العالم في التصنيف أن تلك الأشكال هي جميع المجسمات المحدبة المنتظمة؛ أي إنه لن يكون هناك مجسما سادسا يحمل تلك الصفات. وكرس آخر كتاب من سلسلة العناصر لإقليدس لدراسة هذه الأشكال.

المجسم ثلاثي الأبعاد غير المنتظم Irregular polyhedra



يمتلئ العالم بالمجسمات و (الجوامد) ومعظمها لا يتصف بقدر عال من التماثل الذي يرغب فيه علماء الرياضيات، فقالب البناء على سبيل المثال ليس مجسما أفلاطونيا.بل متوازي مستطيلات(cuboid) الذي تكون أوجهه ذات ثلاثة أشكال مستطيلة مختلفة، وهو حالة خاصة من متوازي السطوح (parallelpiped) وهو ينشأ من ثلاثة أزواج من متوازيات الأضلاع.



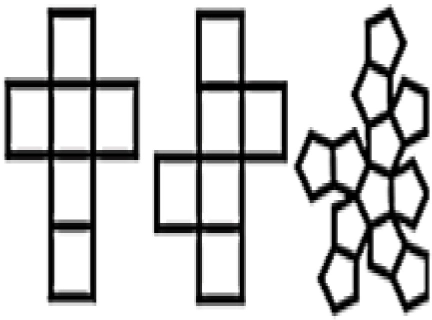


أما الأهرامات فهي عائلة أخرى مهمة من المجسمات غير المنتظمة : الأهرامات التي قاعدتها مربع أو خماسي، يمكن أن تكون جوانبها مثلثات متساوية الأضلاع (كما يمكن أن يكون الهرم الذي قاعدته مثلث أو رباعي سطوح. والأهم من ذلك كله أن جميع الأهرامات لابد أن تكون لها جوانب مثلثية غير منتظمة.

حالما نسمح بمجسمات ذات مضلعات غير منتظمة، فسنجد أكثرها تماثلا تلك التي تشكل أحجار نرد منتظمة بحيث تكون كل الأوجه متطابقة، وما أكثر من ذلك أنه ليس هناك حد للقائمة التي تضم المجسمات غير المنتظمة الممكنة. ومجسمات جونسون تقدم على الأقل معجما تاما للمجسمات ثلاثية الأبعاد المحدبة التي يمكن تشييدها من المضلعات المنتظمة، أما ملفات ستيوارت الحلقية (Stewart toroids) فتزود تلك القائمة بأشكال غير محدبة.

الشبكات Nets

كان الفنان الألماني ألبرخت دورر (Albrecht Dürer) عالم رياضيات أيضاً، وكان يولي اهتماما خاصا بالمجسمات، وفي عمله تعليمات القياس (Instruction on Measurement) عام 1538 قدم وسيلة لا تقدر بثمن لفهم المجسمات. الشبكة (net) هي عبارة عن ترتيب مستو من المضلعات بعضها موصول ببعض من خلال الحواف، وعند طيها ولصقها يمكنك الحصول على نموذك من المجسم.



جميع المجسمات يمكن توصيفها بشبكة، وفي الواقـع نجـد أن المكعـب لـه 11 شـبكة مختلفة. لقد حدا ولع دورر بالمجسمات بـه إلى إعادة اكتشاف إثنين من مجسمات أرشـميدس (the truncated cuboctahedron)، والمكعـب الأفطس (snub cube) وإلى أن يصمم شكلا بنفســه: هــو ثــماني الوجــوه الســوداوي (melancholy octahedron).

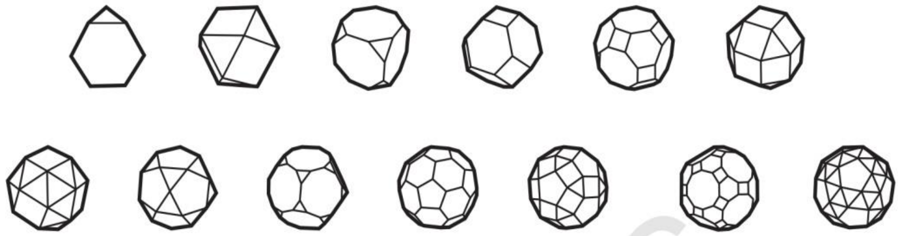
ازدواجية المجسمات Polyhedral duality

المكعب له ستة أوجه، وثمان رؤوس، بينما ثماني الوجوه له ثمانية أوجه، وست رؤوس، وكلاهما له 12 حافة (حرف)، ويأتي هذا التماثل من حقيقة أن المكعب وثماني الوجوه مجسمات مزدوجة، ولإيجاد المجسم الذي يحقق الازدواجية مع مجسم ما: ارسم نقطة في منتصف كل وجه،ووصل بينهما إذا كان الوجهان المرسومتان فيهما النقطتان يتلاقيا وسيكون الهيكل الناتج من النقط والخطوط وصفا للمجسم الجديد: الذي يمثل مزدوج الآخر، وتكرار ذلك؛ أي إيجاد مزدوج المزدوج يعيدنا إلى المجسم الأصلي مرة أخرى. من بين المجسمات الأفلاطونية هناك رباعي الوجوه الذي له أربعة وجوه، وأربعة رؤوس يكون هو مزدوج نفسه، أما اثنا عشري الوجوه وعشريني الوجوه فهما يكونان زوجا مزدوجا، ومجسمات أرشميدس هي ازدواج لمجسمات كاتالان.

مجسمات أرشميدس The Archimedean solids

ليست هناك مجسمات أخرى لها نفس التماثل التام الذي تحققه مجسمات أفلاطون، لكن إرخاء المتطلبات قليلا يفتح الباب لسلسلة مثيرة من الأشكال الجديدة، زود عالم رياضيات القرن الرابع ببس (Pappus) أرشميدس باكتشاف 13 مجسم محدب أوجهه مضلعات منتظمة (لكنها ليس جميعها نفس المضلعات) ومتماثلة في الرؤوس بمعنى أن

ترتيب الأوجه والحواف عند كل رأس يكون متطابق لجميع الرؤوس، وبالتالي تحريك أي رأس مكان الأخرى هو تماثل للشكل.

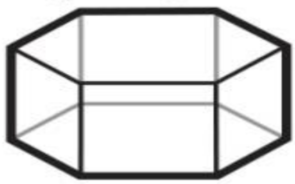


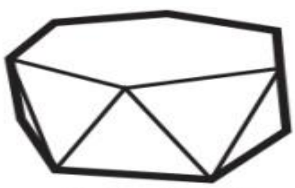
عشروني الوجوه المقطوع يشتبه بكون كرة القدم الشهيرة تأخذ شكله ، وكذلك جميع بنى جزئ بكمنستر (60 ذرة كربون).

المنشور والمنشور المضاد Prisms and antiprisms

تعرف مجسمات أرشميدس بأنها مجسمات محدبة أوجهها منتظمة ولها رؤوس متماثلة لكن تلك الثلاثة عشر شكلا لا تمثل الإمكانيات كلها؛ حيث أن هناك أيضاً عائلتان من المجسمات المنتهية التي تحقق هذه المعايير.

المنشور السداسي





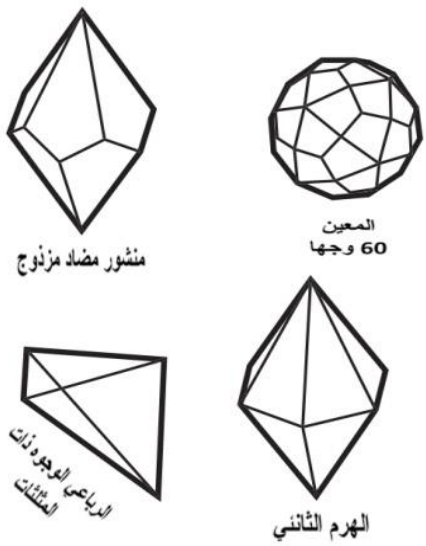
مضاد المنشور السداسي

يشكل المنشور بأخذ مضلعين منتظمين متماثلين (شكلين سداسيين متطابقين مثلا) ثم توصيل حوافهما معا بواسطة مربعات، وبصفة عامة المنشور مجسم يشكل باستخدام مضلعين منتظمين لهما عدد (n) من الأضلاع موصلين معا عن طريق حلقة مكونة من عدد (n) من المربعات. (أحيانا يطلق على المجسم الذي يحل فيه المستطيلات محل المربعات اسم منشور لكن لا تكون كل الأوجه مضلعات منتظمة)

لتكوين مضاد المنشور السداسي، يتم لي اثنين من السداسي المنتظم ثم توصيلهما باستخدام مثلثات متساوية الأضلاع، وبصفة عامة يتكون المنشور المضاد من اثنين من

المضلعات التي عدد أضلاعها (n)، والتي ترتبط ببعضها عن طريق حلقة مكونة من عدد (2n) من المثلثات المتبادلة متساوية الأضلاع.

حجر النرد المنتظم Fair dice



ما الأشكال التي يمكن أن تكون حجر نرد منتظم؟ لعمل ذلك، لابد أن يكون المجسم محدبا، وجميع أوجهه متطابقة، وبالطبع فإن المجسمات الأفلاطونية تحقق تلك المعايير إلا أنها ليست الوحيدة، ففي عام 1865 نشر أيوجين كاتالان (Eugène Catalan) قائمة من ثلاثة عشر مجسما رائعا يحمل نفس هذه الخاصية، لكن ذلك لم يقلل من شأن تصنيفات أفلاطون.؛ لأن الأوجه هنا ليست مضلعات منتظمة بل هي على شكل معين هندسي، أو مثلثات مختلفة الأضلاع، أو أشكال الطائرة الورقية، أو أشكال خماسية غير منتظمة.

نحصل على مجسمات كاتالان بإيجاد المجسمات التي تحقق خاصية الازدواج مع مجسمات أرشميدس. ولهذه الأشكال الأنيقة أسماء غريبة خرقاء مثل المعين الإثنيعشري (rhombic dodecahedron) الذي له إثنا عشر وجها على شكل معين، و strombic hexecontahedron الذي يحتوي على 60 وجه على شكل طائرة ورقية.

وهناك أيضاً ثلاث عائلات من الأشكال المنتهية تحقق هذه المعايير :

1- الهرم الثنائي (bipyramids): حيث تلتصق قاعدتا هرمين عدد أضلاعهما (n) معا (يمكن الحصول عليه كشكل يحقق خاصية الازدواجية مع المنشور)

2- trapezohedra حيث يلتصق مخروطان مكونان من أشكال الطائرة الورقية معا (وهي إزدواجات المنشور المضاد).

3- (disphenoids) وهي عبارة عن عدد من رباعي الوجوه أوجهها الأربعة مثلثات غير متساوية الأضلاع متطابقة.

مجسمات كيبلر-بوينسوت Kepler – Poinsot polyhedra

الإثنيعشري

الإثنيعشري الصغير

الإثنيعشري الكبير الممدد

□عشروني الوجوه الكبير

هل المجسمات الأفلاطونية هي فقط تلك التي لها أوجه متطابقة من المضلعات المنتظمة؟ كما هو شائع في علم الرياضيات فإن الإجابة تتوقف على التعريفات.

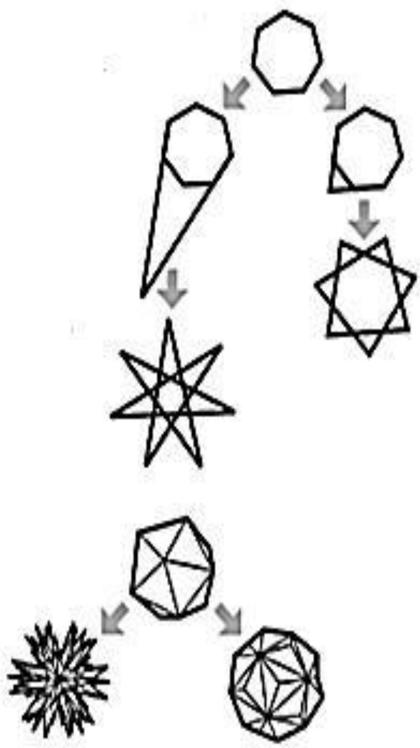
عام 1619 لاحظ يوهان كيبلر (Johannes Kepler) مجسمين غير محدبين لهما أيضاً نفس تلك الخواص، وقد استغل الفنانون أمثال باولو أوشيلو (Paolo Uccello) جمالهما بينما لم يعرهما علماء الرياضيات السابقون أي اهتمام ربما لأن أوجه هذين الشكلين لا تتلاقى فقط من خلال حواف بل أن تلك الأوجه تمر عبر بعضها البعض مكونة حواف خادعة (false edges).

إذا كنا مهتمين حقا بالمجسمات ثلاثية الأبعاد، فمن المحتمل أننا يجب أن نستبعد منها هذه المجسمات إلا أنها في العادة تصنف على أنها مجسمات مقبولة، وقد قام لويس بوينسيت (Louis Poinsot) عام 1908 بوضع تعريف مجسمين آخرين فصارت مجسمات كيبلر-بوينسوت الأربعة - جدلا - تكملة لقائمة المجسمات المنتظمة التي بدأها أفلاطون، وهذه المجسمات الأربعة هي: الإثنيعشري الصغير الممدد (small stellated dodecahedron)، والإثنيعشري الكبير (great dodecahedron)، والإثنيعشري الكبيرالممدد (great stellated dodecahedron)، وعشروني الوجوه الكبير (the great icosahedron).

المضلعات النجمية star polygons ، والمجسمات النجمية star polyhedra

يندرج اثنين من مجسمات كيبلر-بوينسوت تحت فئة المجسمات النجمية، وهما: الإثنعشري الصغير الممدد (small stellated dodecahedron)، والإثنعشري الكبير

الممدد (great stellated dodecahedron) وكلاهما نحصل عليه من إثني عشري الوجوه (dodecahedron) عن طريق عملية التمديد (stellation): أي تمديد الحواف والأضلاع حتى تتلاقى. ويمكن تصور الفكرة الأساسية من خلال المضلعات، فعلى سبيل المثال: النجمة الخماسية (Pentagram) هي تمديد للمضلع الخماسي (Pentagon)، وغالبا يكون الاختيار بين الأضلاع التي يمكننا تمديدها متاحا: المضلع السباعي (heptagon) يمكن تمديده بطريقتين فيعطي شكلين سباعيين مختلفين.



تم توثيق الطرق المختلفة لتمديد عشريني الوجوه في كتاب المجسمات العشرينية التسعة وخمسون (The Fifty-Nine Icosahedra) الذي كتبه كل من كوكسيتر (Coxeter)، ودوفال (Du Val)، وفلازر (Flather)، وبيتري (Petrie) عام 1938، وبعض مجسمات أرشميدس لها مئات الملايين من التمديدات المختلفة.

هناك سبعة عشر مجسم منتظم (Uniform polyhedra) عبارة عن مجسمات نجمية مشتقة من مجسمات أرشميدس. المجسمات النجمية عادة ليست كروية من الناحية الطوبولوچية بسبب الطريقة التي تمر بها الأوجه عبر بعضها البعض؛ لذلك فإنها لا تحقق صيغة أويلر للمجسمات (Euler's polyhedral formula).

المجسمات المركبة Compound Polyhedra

اكتشف يوهان كيبلر - بالإضافة إلى اكتشافه أول مجسمين من مجسمات كيبلر- بوينسوت- أول مجسم مركب وهو: الثماني الممدد(the stella octangula) الذي نحصل

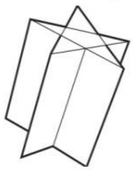
عليه بإدخال اثنين من رباعي الوجوه (tetrahedron) في بعضهما البعض بحيث يصبح مركزهما مشتركا (ويمكن الحصول عليه أيضاً بتمديد مضلع ثماني(octahedron))، وكما هو حال المجسمات النجمية الأخرى، فإن هذا الشكل غير محدب كما أنه ذاتي التقاطع مما يؤدي إلى تكون حواف ورؤوس خادعة.

تلك الأشكال التي يمكن فصلها عن بعضها البعض والحصول على مجسمين منفصلين لا تصنف دائما على أنها مجسمات في حد ذاتها، لكنها ذات وجوه متطابقة، وكذلك حوافها ورؤوسها؛ مما يجعلها مجسمات مركبة منتظمة، وهناك أربعة أشكال أخرى من هذه المجسمات تكونت بطريقة مشابهة من خمسة أو عشرة من رباعي الوجوه (tetrahedron)، وخمسة مكعبات (cubes)، وخمسة مضلعات ثمانية (octahedra).

المجسمات المنتظمة Uniform Polyhedra

فتح اكتشاف المجسمات النجمية الباب لتصنيف جديد من المجسمات المنتظمة: وهي المجسمات التي أوجهها مضلعات منتظمة (بما فيها المضلعات النجمية)، والتي رؤوسها متطابقة. الأمثلة المحدبة على هذا التصنيف كانت معروفة منذ زمن بعيد: إنها المجسمات الأفلاطونية، ومجسمات أرشميدس، والمنشور، والمنشور المضاد. أما الغير محدبة فأولها: مجسمات كيبلر-بوينسوت، والمجسمات ذاتية التقاطع، و 53 شكل وضعها كل من كويستر (Coxeter)، ولونجيت هيجز (Longuet Higgins)، وميلر (Miller) في قائمة عام 1954، بدأت هذه القائمة بـ (tetrahemihexahedron) الذي ينشأ من تقاطع ثلاثة مربعات، وأربعة مثلثات متساوية الأضلاع، وآخرها (dirhombicosidodecahedron) أو كما يطلق عليه وحش ميلر (Miller’s monster) له ستون رأس يتلاقى عند كل منها أربعة مربعات، ومثلثان، ونجمتان خماسيتان (pentagram) مما يجعل عدد أوجهه الكلية 124 وجه.

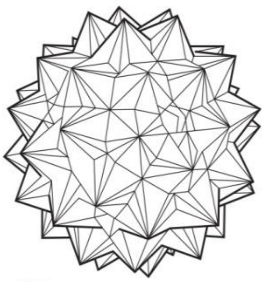
وتأتي عائلتان غير منتهيتان لتكملا قائمة المجسمات المنتظمة، وهما:



منشور نجمي

منشور نجمي مضاد

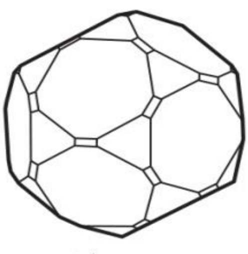
المناشير النجمية (star prisms) (حيث يرتبط مضلعان منتظمان عدد أضلاعهما (n) بحلقة من المربعات المتقاطعة)، والمناشير النجمية المضادة (star antiprisms (حيث يرتبط مضلعان منتظمان عدد أضلاعهما (n) بحلقة من المثلثات متساوية الأضلاع المتقاطعة). انظر إلى الرسم.



مجسم سكيلينج

عام 1970 أثبت (S.P. Sopov) أن هذه القائمة أصبحت مكتملة، لكن عام 1975 اكتشف (جون سكيلينج) اكتشافا مثيرا. لقد وجد إمكانية واحدة إضافية إذا سمح للحواف أن تطابق بعضها البعض (بمعنى أن يصبح بإمكان حافة واحدة أن تكون مشتركة بين أربعة وجوه) وهي مجسم سكيلينج (Skilling's figure) (the great disnub dirhombidodecahedron) الذي له 204 أوجه تتلاقى في ستين رأس كما بالشكل.

المجسمات متساوية الزوايا Isogonal Polyhedra



مجسمات متساوية الزوايا

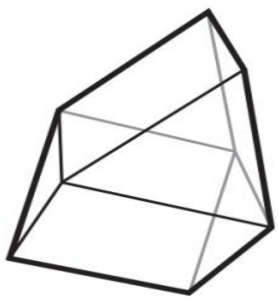
لتعريف المجسم المنتظم جزءان:جميع الرؤوس متطابقة (أي أن ترتيب الوجوه والحواف عند كل رأس يطابقها عند كل الرؤوس الأخرى)، وجميع الوجوه منتظمة (يمكن أن تكون غير محدبة) فإذا أسقط الشرط الثاني سيصبح عدد الأشكال الممكنة غير منته، وتلك الأشكال هي ما يطلق عليه المجسمات متساوية الزوايا (Isogonal Polyhedra)

يمكن تصور ذلك من خلال الأمثلة الأولى: رباعي السطوح حاد الزوايا (disphenoid tetrahedra) (انظر حجر النرد المنتظم). خذ أي متوازي المستطيلات (cuboid)، واختر أربعة رؤوس لا تشترك في نفس الحواف فإذا وصلت بينها تحصل على

(disphenoid)، وليس هناك تصنيف مكتمل للمجسمات متساوية الزوايا (Isogonal Polyhedra) حتى الآن.

مجسمات جونسون Johnson solids

عام 1966 تجاهل نورمان جونسون (Norman Johnson) كل الأسئلة التي تدور حول التماثل، وسأل ببساطة: ما المجسمات المحدبة التي يمكن تكوينها من المضلعات المنتظمة (ليس ضروريا أن تكون جميعها نفس الشكل)؟ فأخرج كتيبا يحتوي على 92 مجسما محدبا. وعام 1969م أثبت فيكتور زالجالير (Victor Zalgaller) أن قائمة مجسمات جونسون، بالإضافة إلى مجسمات أفلاطون، وأرشميدس، والمناشير، ومضاداتها هي بالفعل كل المجسمات الموجودة.



مجسمات رباعي المثلثات والمربعات

أول مجسم من مجسمات جونسون هو الهرم الذي قاعدته مربعة، وجوانبه مثلثة، (J_1) ومن مجسماته أيضاً المجسم (J_{26}) المكون من أربعة مربعات، وأربعة مثلثات متساوية الأضلاع ويسمى (gyrobifastigium).

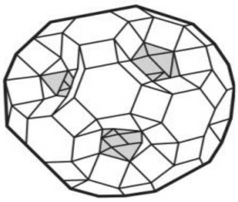
ملفات ستيوارت الحلقية Stewart toroids

كتاب "مغامرات بين الملفات الحلقية" (adventures among the toroids) كتاب مغمور كتبه بوني ستيوارت بخط اليد، ونشره بشكل شخصي عام 1970، وتحول إلى عمل كلاسيكي بين أولئك المهتمين بالمجسمات، وفيه درس ستيوارت المجسمات التي تتكون من المضلعات المنتظمة، لكن ليبتعد عن مجسمات جونسون لم يحصر نفسه في دراسة الأشكال المحدبة فقط.

ربما كان الآخرون ليتخلوا عن هذا الأمر باعتباره قضية خاسرة؛ فلا يوجد حد لعدد مجسمات جونسون التي يمكن لصقها معا إلا أن بعض هذه الأشكال يحمل قدرا عاليا من التماثل، مثل ثمانية من المجسمات الثمانية التي يمكن لصق أوجهها معا لتكوين حلقة. إن

الحلقة الثمانية الأضلاع

أكثر مجسمات ستيوارت المدهشة لا تأتي من فكرة لصق المجسمات معا بل تأتي من الفلسفة العكسية: لقد أخذ نماذج كبيرة للعديد من مجسمات جونسون وأرشميدس ودرس جميع الإمكانيات المتاحة لثقب هذه النماذج وتبطينها بمضلعات منتظمة.



في وجهة نظر الطوبولوچيا فإن هذه الأشكال ليست كرات بل تارات نونية (n) انظر السطوح القابلة للتدوير (orientable surfaces1) عدد ثقوبها (n) يعطى بما يسمى الطراز، وبالتالي هذه الترتيبات يجب أن تحقق شكلا مجسما مناسبا (Polyhedral formula).

المجسمات رباعية الأبعاد Polychora

ولما أثمرت دراسة المجسمات ثلاثية الأبعاد ثمارا رائعة فكر علماء الرياضيات مباشرة في تعميم ذلك. وتماما كما كانت المجسمات ثلاثية الأبعاد نظائر للمضلعات في الأبعاد الثلاثية، فإن المجسمات رباعية الأبعاد هي نظائر للمضلعات أيضاً لكن في الأبعاد الرباعية. وتبني هذه المجسمات الرباعية عن طريق تلاقي خلايا مجسمة ثلاثية الأبعاد في أوجه مضلعة ثنائية الأبعاد وحواف مستقيمة أحادية البعد، ورؤوس صفرية الأبعاد.

وتماما كما صنف أفلاطون المجسمات ثلاثية الأبعاد المحدبة المنتظمة صنف عالم الهندسة السويسري لودويج شليفلي (Ludwig Schläfl i) المجسمات رباعية الأبعاد المحدبة المنتظمة، وقد وجد أن :

- الشكل الخماسي رباعي الأبعاد (pentachoron) يتكون من خمسة من رباعي الوجوه وهو المناظر لرباعي الوجوه.

(1) الأجسام التي تعود إلى نقطة البداية بنفس الاتجاه بعد التحرك في مسار مغلق

- الشكل المكعب الرباعي الأبعاد (the tesseract) أو المكعب الفوقي الرباعي (4-hypercube): ويتكون من ثمانية مكعبات.
- المجسم السداسي عشر رباعي الأبعاد (hexadecachoron)أو((4-orthoplex) أو (4-cross-polytope) ويتكون من ستة عشر سحطا رباعي، وهو المناظر للمجسم الثماني ثلاثي الأبعاد.
- ((the icositetrachoron (octaplex) ويتكون من 24 مجسم ثماني ثلاثي الأبعاد، وهو شكل جديد وليس له مناظر ثلاثي الأبعاد.
- (hecatonicosachoron) ويتكون من 120 (dodecahedra) وهو المناظر لـ (dodecahedron).
- (hexacosichoron) ويتكون من 600 رباعي وجوه، وهو المناظر لـ (icosahedron).

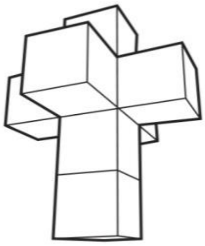
وقد وضع شليفلي وإيدموند قائمة بعشرة مجسمات رباعية الأبعاد منتظمة غير محدبة: إن مجسمات شليفلي- هيس رباعية الأبعاد هي نظائر مجسمات كيبلر- بوينسيت ثلاثية الأبعاد.

المكعب الزائدي Hypercube

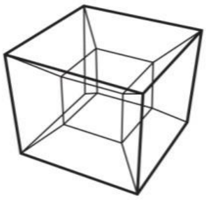
يمكن توصيف رؤوس المربع تماما باستخدام الإحداثيات الديكارتية: ((0,0), (0,1), (1,0), and (,1,))، وبالمثل الرؤوس الثمانية للمكعب نحصل عليها من: ((0,0,0,), (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0), (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0), and(1,1,1),)). ولسنا بحاجة إلى رؤى عميقة لندرك أن الرؤوس الستة عشر للمكعب رباعي الأبعاد (المكعب الزائدي) يجب أن تكون : ((0,0,0,0), (0,0,0,1), (0,0,1,0), (0,1,0,0), (1,0,0,0), (0,0,1,1), (0,1,0,1), (0,1,1,0), (1,0,0,1), (1,0,1,0), (1,1,0,0), (0,1,1,1), (1,0,1,1), (1,1,0,1), (1,1,1,0), (1,1,1,1),)).

وهذه بداية وسائل المتبعة هي الشبكة، تماما كما تبنى المكعبات من ستة مربعات مطبقة معا يمكن بناء مكعب رباعي الأبعاد من ثمانية خلايا مكعبة "مطبقة معا"، وقد وضع

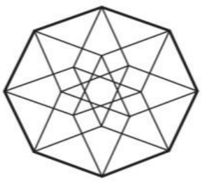
سلافور دايلي تصور هذه الشبكة في لوحة الصلب (Corpus Hypercubus)، كما تأملها روبرت هينلين عام 1941 في القصة القصيرة "وقد بنى منزلا معوجا" (And He Built – A Crooked House) التي فيها يبني مهندس معماري منزلا على شكل تلك الشبكة ثم يأتي زلزال ليطبقه ويصبح منزلا على هيئة مكعب رباعي الأبعاد.



والبديل لوسيلة الشبكة هو استخدام الإسقاط (Projection): حيث يرسم مكعب ثلاثي الأبعاد على صفحة ثنائية الأبعاد كمربع داخله مربع آخر ورؤوسيهما متصلة عن طريق الحواف، بالمثل فإن أحد الإسقاطات ثلاثية الأبعاد الممكنة للمكعب رباعي الأبعاد تتكون من مكعب داخله مكعب ورؤوسيهما متصلة عن طريق الحواف، وبالتالي تكون الخلايا الثمانية المكعبة هي المكعب الخارجي، والمكعب الداخلي والستة الباقية (المشوهة بسبب المنظور) تربط أوجه المكعبين الداخلي والخارجي.



هناك إمكانية ثالثة هي إسقاط بيتري (Petrie projection) للمكعب رباعي الأبعاد، وهي مكافئة لرسم مكعب عن طريق توصيل رؤوس أحد المربعات برؤوس مكعب آخر من نفس الحجم لكنه مزاح قطريا.



المجسمات المنتظمة رباعية الأبعاد Uniform polychora

يمكن طرح الأسئلة التي قادت إلى الرؤى المثيرة حول المجسمات ثلاثية الأبعاد مرة أخرى لكن في سياق المجسمات رباعية الأبعاد. عام 1965 أكمل كل من جون هورتون كون واي، ومايكل جاي باستخدام الكمبيوتر تصنيف المجسمات رباعية الأبعاد المناظر لمجسمات أرشميدس، والتي بدأتها عام 1910، العصامية المعجزة إليسيا بول ستوت (Alicia Boole Stott).

هذه المجسمات الأرشميدية رباعية الأبعاد محدبة ذات رؤوس متطابقة، وجميع أوجهها

مضلعات منتظمة، وبالتالي فإن خلاياها لابد أن تكون إما مجسمات أفلاطون، أو مجسمات أرشميدس أو مناشير أو مناشير مضادة، وإجمالا هناك 64 شكل منفرد في قائمة، بالإضافة إلى عائلتين منشوريتين غير منتهيتين.

والبحث مستمر لتوسيع هذا العمل ليتضمن النظائر غير المحدبة في تصنيف مكتمل للمجسمات المنتظمة رباعية الأبعاد

متعددات الأبعاد المنتظمة Regular polytopes

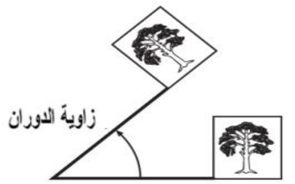
متعدد الأبعاد(polytope) هي كلمة عامة تصف المضلع، أو المجسم ثلاثي الأبعاد، أو المجسم رباعي الأبعاد أو نظائرها في أبعاد أعلى. الأجسام الأكثر تماثلا تستأثر اهتماما خاصا ألا وهي متعددات الأبعاد المنتظمة(Regular polytopes). في الأبعاد الثنائية هناك عدد غير منته من المضلعات المنتظمة، ومنها : المثلث متساوي الأضلاع، والمربع، والخماسي المنتظم، وهكذا، أما في الأبعاد الثلاثية: فهناك خمسة مجسمات من مجسمات أفلاطون، وفي الأبعاد الرباعية هناك ستة مجسمات أفلاطونية رباعية الأبعاد.

أثبت لوديج شليفلي أن هناك شيئا مميزا يحدث عندما ننظر إلى الأبعاد الأعلى من أربعة، وهي أنه لا يوجد أبدا سوى ثلاثة مجسمات منتظمة، وهي: (simplex)، والمكعب الزائدي (hypercube)، و(orthoplex) وهي نظائر رباعي الوجوه، والمكعب، وثماني الوجوه ثلاثي الأبعاد على الترتيب.

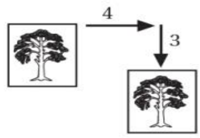
وهناك أيضاً متعددات الأبعاد المزعجة المتقاطعة ذاتيا، وغير المحدبة التي يجب أن تفسر. وهي في الأبعاد الثنائية: المضلعات النجمية، وأولها النجمة الخماسية، أما في الأبعاد الثلاثية فنجد مجسمات كيبلر- بوينست، وفي الأبعاد الرباعية 10 مجسمات من مجسمات شلفلي-هيس رباعية الأبعاد، ونذكر مرة أخرى أن في الأبعاد الأعلى تصبح أبسط، وابتداء من الأبعاد الخماسية فأعلى لا يوجد أي مجسمات منتظمة على الإطلاق، وهذا مثال على ظاهرة معروفة جدا بين أوساط علماء الهندسة: هي أن الحياة في الأبعاد الثلاثية أو الرباعية أعقد في نواحي كثيرة منها في الأفضية ذات الأبعاد الأعلى.

التحويلات TRANSFORMATIONS

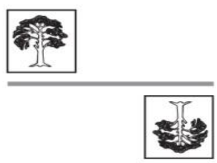
تقايسات المستوى Isometries of the plane



هناك العديد من الطرق المختلفة لتحريك صورة ما إلى موضع جديد بعد رسمها في مستوى دون أن يحدث لها التواء أو تشويه، ويسمى ذلك تقايسات المستوى، وعلميا يمكن تعريف ذلك بأن أي خط في الصورة سيكون له نفس الطول قبل وبعد التحريك.



- الدوران (rotation): يعطي بمعلومتين نقطة تكون مركزا للدوران، وزاوية تحدد مقدار الدوران (ودائما يعرف في الرياضيات أن الزاوية الموجبة تكافئ الدوران عكس عقارب الساعة، والزاوية السالبة تكافئ الدوران مع عقارب الساعة).



- النقل(translation): تحريك الشكل خلال المكان ويعبر عنه بمتجه بحيث يعبر الصف العلوي عن الحركة ناحية اليمين (أو اليسار إذا كان رقما سالبا)، والصف السفلي عن إزاحة الشكل لأعلى أو أسفل، بالتالي على سبيل المثال تكافئ $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ تحريك الجسم أربع وحدات يمينا، وثلاث وحدات لأسفل.
- الانعكاس (reflection): يعرف على أنه خط مستقيم يعمل كمرآة فيحرك كل نقطة إلى موضع على الجهة المقابلة وتبعد نفس المسافة عن الخط.
- الإنزلاق (glide): هو انعكاس يتبعه نقل بمحاذاة نفس الخط (انظر التماثل الانزلاقي).

يمكن التعبير عن الدورانات والانعكاسات باستخدام مصفوفات التحويل.

التماثل Symmetry

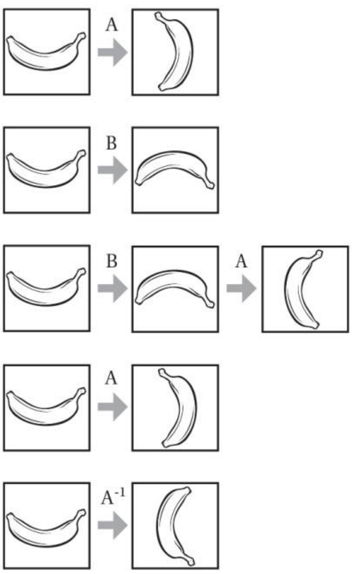
لأي شكل مرسوم في المستوى، التماثل هو تقايس يجعل الشكل يبدو كما هو، على سبيل المثال: المربع له تماثل دوراني وانعكاسي، فاعتبار مركز المربع هو مركز الدوران، وتدوير المربع °90 درجة يتركه على نفس الشكل، وتكرار تلك المناورة ينتج عنه نوعان آخران من التماثل: دورانات °180، و°270 قبل أن يعود المربع ثانية لموضعه الابتدائي، لذلك يقال أن المربع له تماثل دوراني من الرتبة الرابعة.

وللمربع أيضاً أربعة خطوط من التماثل الانعكاسي: القطران، والخط الأفقي والرأسي، وبجمع ما سبق نجد أن المربع له ثمانية تماثلات (بما فيها التماثل التافه (ترك المربع كما هو)، وهذه المعلومة متضمنة فيما يسمي بمجموعة تماثل المربع.

يمكن أن يكون للأشكال تماثل دوراني فقط، أو انعكاسي فقط، أو كلاهما. الأنماط غير المنتهية مثل الفيسفاء (التبليط) قد يكون لها تماثل انتقالي أو تماثل إنزلاقي.

مجموعات التماثل Symmetry groups

التماثل عند علماء الرياضيات هو حدث ينتج عنه شكل يبدو كما كان يبدو في السابق، وكان لهذا المنهج العملي أثرا رائعا، فإذا كان كل من (A)، و(B) متماثلين فإن من الممكن دمجهمها لنحصل على عنصر ثالث. في حالة المربع: إذا كان (A) هو دوران 90 درجة عكس عقارب الساعة حول المركز، (B) هو انعكاس في المحور الأفقي فإن (A o B) هو ناتج تنفيذ (B) أولا ثم (A)، وهو ما يتضح أنه انعكاس على خط القطر (the diagonal line y = x').



بالطبع يوجد تماثل واحد يكون عديم التأثير عند دمجه مع أي تماثل أخر: وهو التماثل التافه

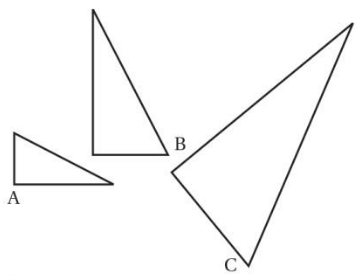
الذي يترك المربع كما هو. لكل تماثل معكوس: إذا كان (A) هو تدوير المربع °90 درجة عكس عقارب الساعة فسيكون معكوسه، والذي يرمز له بالرمز (A^{-1})هوالتدوير °90 درجة مع عقارب الساعة ، وتشير هذه الحقائق إلى أن مجموعة تماثلات المربع تشكل مجموعة - (زمرة)(group).

وهذا صحيح بالنسبة لتماثلات أي شكل. بالنسبة للأشكال ثنائية الأبعاد توجد عائلتان من المجموعات اعتمادًا على إذا ما كان الشكل له أي تماثل إنعكاسي أم لا، فإذا لم يكن له تماثل إنعكاسي كما هو الحال في شكل الصليب المعقوف (swastika) فستكون المجموعة دائرية مما يعني أنها تشبه الجمع بنمط معين (4 في هذه الحالة)، وإذا كان هناك أيضاً تماثل إنعكاسي كما هو الحال في المربع تكون المجموعة ثنائية السطح (dihedral).

أما في الأبعاد الثلاثة فحجم مجموعة تماثل المكعب يساوي 48، وتكون مجموعات تماثل المجسمات ثلاثية الأبعاد ومتعددة الأبعاد أكثر تعقيدًا من ذلك. وفي حالة أكثر الأشكال تماثلًا مثل الدائرة والكرة تكون مجموعات التماثل هي مجموعات لاي غير المنتهية للفيسفاء أيضاً مجموعات تماثل غير منتهية، تحديدًا: مجموعات النسيج(frieze groups)، ومجموعات ورق الحائط (wallpaper groups).

التشابه Similarity

يقال لمثلثين أنهما متشابهان إذا كانت زواياهما متطابقة، إذا المثلثات: (A)، (B)، (C) جميعا زواياها 30،60،90 على سبيل المثال فيقال إنهم مثلثات متشابهة (ليس ضروريا أن تكون الأضلاع متساوية). يسمح التشابه للمثلث بأن يحدث له انعكاس، وهذه طريقة سريعة لإدراك ظاهرة أوسع.

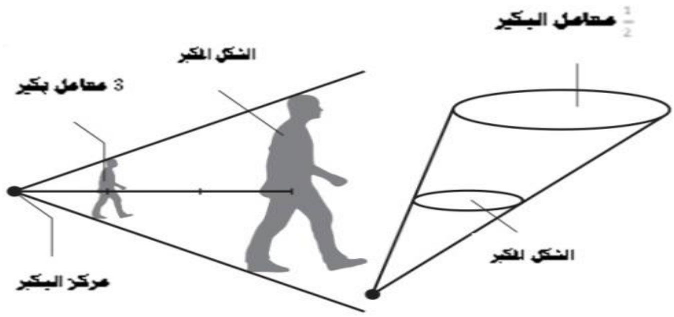


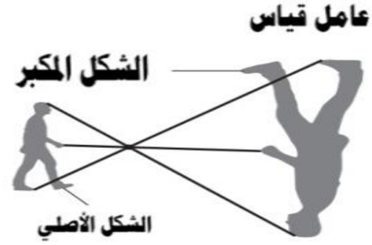
بصفة عامة، يكون شكلان متشابهين إذا كان لهما نفس الشكل ولكن ليس بالضرورة نفس الأبعاد، ولا نفس الموضع (إذا كان لهما نفس الشكل والأبعاد يقال أنهما متطابقان، وسيكون

هناك تقايس بنقل أحدهما إلى الآخر)، كما هو الحال فإن هذا التعريف غير دقيق إلى حد غير مرض، لكن يمكن جعله أكثر دقة من خلال فكرة التكبير (Enlargement).

التكبير Enlargement

يتحدد التكبير بمعلومتين: نقطة (يطلق عليها مركز التكبير)، ورقم (عامل التحجيم). أي شكل في المستوى يمكن تحويله كما يلي: اختر نقطة تنتمي لهذا الشكل، ومد خطا بينها وبين مركز التكبير. إذا كان عامل التحجيم يساوي 2، فإن النقطة المناظرة على الجسم المكبر ستكون واقعة على الخط بحيث تكون المسافة بينها وبين مركز التكبير ضعف المسافة بين مركز التكبير والنقطة الأصلية على الجسم، وإذا كان عامل التحجيم 3 فستكون المسافة ثلاثة أمثال وهكذا. تكرار هذه العملية لعدة نقط سوف يحدد موضع الجسم المكبر.



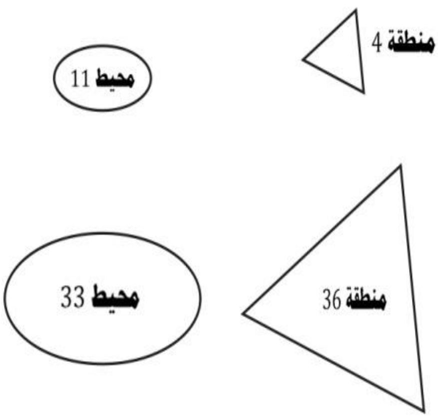


من العواقب المؤسفة للمصطلحات أن "التكبير" يمكن أن يجعل الأشياء أصغر حجما!، فإذا كان عامل التحجيم يقع بين صفر ، و 1 فإن الشكل الناتج سيكون نسخة مصغرة من الشكل الأصلي، وإذا كان سالبا فإن خطوط الإنشاء سوف تنقل الشكل إلى

الجهة الأخرى من المركز ولكنها ستجعله مقلوبا حول نفسه خلال العملية (ويسمى أحيانا الانعكاس حول نقطة).

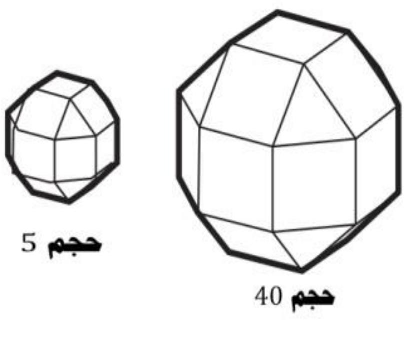
ونفس الخطوات تنطبق على الأجسام في الأبعاد الأعلى ، ويقال للأجسام التي تكون نسخة مكبرة من أجسام أخرى أنها متشابهون.

عوامل التحجيم Scale factors



الجسمان المتشابهان لهما نفس الشكل، والنسب لكن بأبعاد مختلفة، وهذا الاختلاف في الأبعاد يقاس بها يسمى عامل التحجيم. إذا كان طول شكل ما 3 وحدات، وكان عامل التكبير 2 فسيكون طول الشكل المكبر $3\times2=6$ وحدات، ولا ينطبق ذلك على الخطوط المستقيمة فقط، فإذا كان هناك قطع ناقص محيطه 11 وحدة، وتم تكبيره بعامل تحجيم 3 فسيكون محيط القطع الناقص الجديد 33 وحدة.

إلا أن ذلك لا يمكن تطبيقه على المساحة، إذا كانت مساحة مثلث 4، وتم تكبيره بعامل تحجيم 3 فإن مساحة المثلث الجديد لن تكون 3×4 بل تحسب عن طريق ضرب المساحة الأصلية في مربع عامل التحجيم $4\times3^2=36$، ومرة أخرى نؤكد أن هذا الأسلوب صالح للتطبيق على أي شكل وهو مفيد عندما يكون حساب المساحة بالطرق المباشرة غير متاح.



في الأبعاد الثلاثية إذا كان مجسم ما حجمه 5، وتم تكبيره بعامل 2 فلإيجاد حجم المجسم الجديد سنوجد حاصل ضرب الحجم القديم في مكعب معامل التحجيم: $40=2^3\times5$.

الفسيفساء TESSELLATIONS

الفسيفساء Tessellations

لطالما افتتن الناس بتلك الأنماط المكونة من تكرار الأشكال البسيطة بداية بتلك الموجودة على مقابر الفراعنة وصولا إلى نقوش الفنان موريتس كورنيليس إيشر (M.C Escher وكان فن التبليط واسع الانتشار في العالم الإسلامي حيث حدا النهي الديني عن الفن التشكيلي بالفنانين إلى استكشاف الإمكانيات الجمالية للفن المجرد كتلك التي تزين قصر الحمرا بإسبانيا. وقد استغرق الأمر وقتا أطول بالنسبة لعلماء الرياضيات حتى اكتشفوها.والفكرة الأولى هي أن شكل ثنائي الأبعاد يزين الأرضية إذا كان يمكنه أن يؤدي وظيفة القرميدة (البلاطة): أي أنه يمكن رص نسخ منه جنبا إلى جنب بحيث يمكن تغطية مساحة كبيرة حسب إراداتك، دون تداخل ولا فراغات.

أبسط أنواع التبليط هو الفسيفساء المنتظم على الرغم من شيوع غير المنتظم وشبه المنتظم في التصميمات بنفس القدر. ولما أصبح هناك مجموعة أكبر من البلاط ، فكان لابد من إعطاء قدر أكبر من الاهتمام للتماثلات الممكنة وقد حدث ذلك من خلال مجموعات ورق الحائط، ومجموعات النسيج، ولاشك أن علماء الرياضيات أيضاً يستكشفون هذه الظاهرة من وجهة نظر الأبعاد الأعلى.

الفسيفساء المنتظمة Regular tessellations

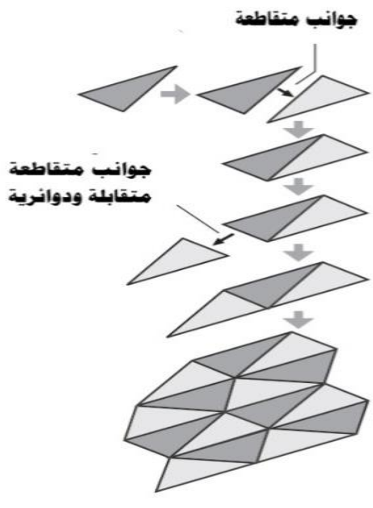
إن أبسط أنواع التبليط هو ذلك الذي يستخدم مضلعا واحدا منتظما: وهذه التغطية المنتظمة مكافئة لمجسمات أفلاطون. المثال الأكثر شيوعا هو مثال الشبكة: التغطية بمربعات بحيث تتلاقى أربعة منها عند كل رأس، وكذلك يمكن استخدام مثلثات متساوية الأضلاع

إذا كانت مرتبة بحيث تتلاقى ستة منها عند كل رأس، لكن ما هي المضلعات المنتظمة الأخرى التي يمكن استخدامها؟ ليس من الممكن استخدام المضلع الخماسي: فإذا حاولت استخدامه فسوف ينتهي بك الأمر إلى وجود مضلعات خماسية غير مكتملة (pentaflakes) (الزاوية الداخلة للمضلع الخماسي 108° درجة؛ أي أنه ليس من مضاعفات العدد 360). والمضلع السداسي المنتظم هو المضلع الوحيد الآخر الذي يمكن استخدامه، وهي حقيقة يستغلها النحل.

أما المضلعات السباعية، والمضلعات التي عدد أضلاعها (n) حيث (n) أكبر من ذلك لا يمكن استخدامها؛ حيث أنك إذا وضعت اثنين منهما جنبا إلى جنب فستكون الزاوية المتبقية أصغر بكثير من أن تتسع لمضلع ثالث.

الفسيفساء غير المنتظمة Irregular tessellations

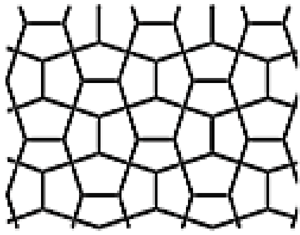
ليست فقط المضلعات المنتظمة هي التي تستخدم في التبليط، بل إن أي مثلث يمكن استخدامه أيضاً، ولرؤية ذلك، ارسم أي مثلث، ثم قم بقصه واستخدمه كقالب لرسم مثلث آخر، ثم قم بتحريك القالب بحيث تنطبق إحدى أضلاعه على الضلع المناظر له في المثلث المرسوم (كن حذرا، قم فقط بتدوير القالب في المستوى دون أن تقلبه) واستخدمه في رسم مثلث آخر مرة أخرى وكرر ذلك لتحصل على نمط يغطي المستوى.



ينطبق الأسلوب نفسه على الأشكال الرباعية: كل الأشكال التي لها أربع أضلاع مستقيمة يمكن استخدامها في التبليط، أما التبليط الخماسي فهو أكثر تعقيدا؛ فبعض المضلعات الخماسية يمكن استخدامها إلا أن المنتظم منها لا يمكن استخدامه بينما

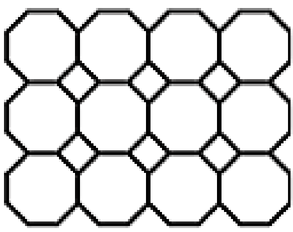
المضلعات السداسية المنتظمة تستخدم في التبليط، وقد بين كارل ريندهارت عام 1918 أن هناك بالضبط ثلاثة تصنيفات من المضلع السداسي المحدب غير المنظم التي يمكن استخدامها في التبليط أيضاً، ولكل $(n \geq 7)$ فلن يكون هناك مضلعات محدبة عدد أضلاعها (n) تصلح للتبليط.

التبليط الخماسي Pentagonal tilings



المضلعات الخماسية المنتظمة لا يمكن استخدامها في التبليط، لكن هناك بعض المضلعات الخماسية المحدبة غير المنتظمة يمكن استخدامها في ذلك. هناك أربعة عشرة طريقة مختلفة معروفة للتبليط، إحداها فسيفساء القاهرة كما في الشكل، والذي يزين الأرصفة في شوارع القاهرة ، وطرق أخرى مثل الأربع طرق التي اكتشفها الرياضي الهاو مارجوري رايس عام 1977، وآخرها اكتشافا تلك التي اكتشفها رولف ستين عام 1985. ولم يثبت بعد أن تلك القامة التي تضم ال 14 طريقة هي كل الطرق الممكنة في التبليط الخماسي.

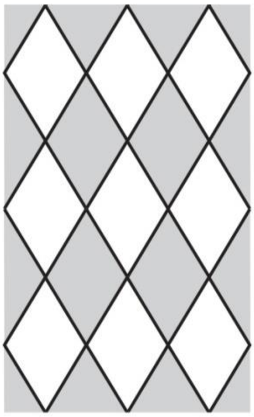
الفسيسفاء شبه المنتظمة Semiregular tessellations



يستخدم هذا النوع مضلعات منتظمة مثل الفسيفساء المنتظمة إلا أن هذا النوع يسمح بأكثر من نوع واحد من البلاط، ويتطلب أن تكون جميع الرؤوس متطابقة، وهناك ثمانية أنواع من هذا التبليط كل منها يتكون من اثنين أو ثلاثة من المثلثات متساوية الأضلاع، والمربعات، والأشكال السداسية المنتظمة، والمضلعات الثمانية، والمضلعات الثنيعشرية، وبعض هذه التبليطات يأتي في نسخ يسارية أو يمينية.

وأحيانا يطلق على هذا النوع اسم الفسيفساء الأرشميدية؛ لأنها تتوافق مع مجسمات أرشميدس، وقد شكلت هذه الأنواع الثمانية أساس الأنماط التزينية في القصور والمعابد لآلاف السنين.

التماثل الانتقالي Translational symmetry

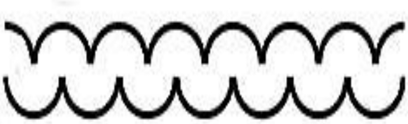


الأشكال المنتهية مثل المضلعات والمجسمات ثلاثية الأبعاد يمكن أن يكون لها نوعين من التماثل على أقصى تقدير: تماثل انعكاسي، وتماثل دوراني، بينما التبليط غير المنته يتيح نوعا ثالثا من التماثل، ألا وهو التماثل الانتقالي؛ فإزاحة تبليط بمعين هندسي إلى يمين الصفحة مقدار الوحدة لا يغير من شكله شيئا وهذا يسمى تماثلا، وبالطبع فإن إزاحته وحدتين أو 3 أو 4 ... إلخ يسمى تماثلا أيضاً، مما يعني أن النمط المتماثل انتقاليا له تلقائيا عدد لا نهائي من التماثلات.

التماثل الإنتقالي لنمط ما هو الخطوة الأولى نحو التصنيف، والعديد من الأنماط الشائعة له نوعان من التماثل الانتقالي هما: يسار- يمين، و أعلى- أسفل، وهذا بشكل أساسي يسمح بوجود 17 نمطا مختلفا مصنفة بمجموعات ورق الحائط ، وبعض أنواع التبليطات لها نوع واحد فقط من التماثل الانتقالي: إما يسار-يمين، أو أعلى - أسفل (وليس كلاهما معا)، وهذا يندرج تحت ما يسمى مجموعات النسيج أو مجموعات فريز.

أما التبليط اللادوري بما فيه تبليطي بينروز وأمان ويتميز بأن له تماثل دوراني وانعكاسي لكن ليس له تماثل انتقالي على الإطلاق

التماثل الانزلاقي Glide symmetry



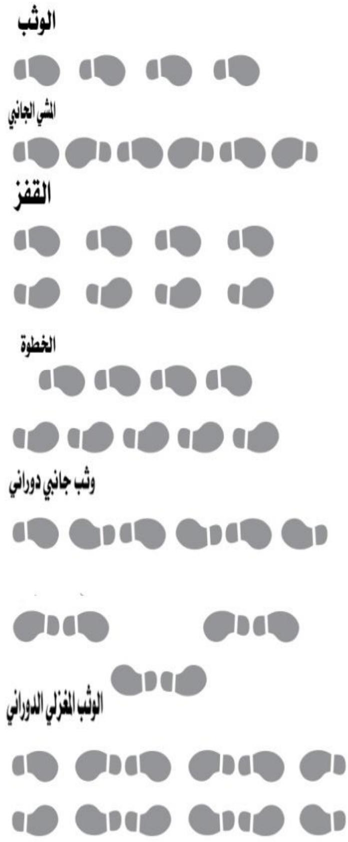
بالإضافة إلى التماثل الدوراني، والانعكاسي والانتقالي هناك نوع أخير ممكن من التماثل في الأنماط ثنائية الأبعاد ألا وهو التماثل الإنزلاقي.

التماثل الإنزلاقي هو مزيج من الانتقال والانعكاس، كما يتضح من الشكل، يمكن أن يتم إيجاد الصورة بالانعكاس حول محور أفقي ثم نقلها بمحاذاة نفس المحور فيكون التماثل الناتج ليس انعكاسيا ولا انتقاليا بل إنزلاقيا (أو إنزلاق- انعكاس)، على عكس المزج بين

الدوران والانتقال الذي ينتج عنه دائما دوران آخر (على الرغم من أن تحديد مركزه لا يتم بطريقة مباشرة دائما). العديد من التبليطات والأنماط لها تماثلات إنزلاقية، ولذلك برزت أهميتها في مجموعات النسيج وورق الحائط.

مجموعات النسيج Frieze groups

في فن العمارة تطلق كلمة فريز (Frieze) على الشريط الضيق الممتد على طول أعلى الحائط. ومنذ العصور القديمة، زينت هذه الفريزات بأنماط هندسية متكررة، وفي هذا السياق سنجد أن هناك تماثل إنتقالي لكن فقط تماثل انتقالي من النوع يسار-يمين. والأنماط من هذا القبيل تأتي في سبعة أنواع تصف أسماؤها -التي أطلقها عليها جون هورتون كون واي- آثار خطوات الأقدام بالتماثلات الصحيحة:



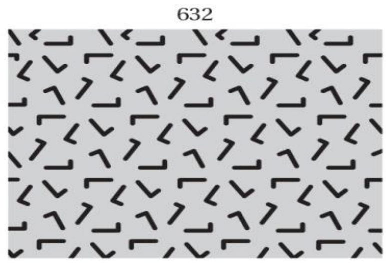
- الوثب (The hop): هو أبسط المجموعات، وهو عبارة عن انتقالات فقط.
- المشي الجانبي (The sidle): انتقالات مصحوبة بانعكاسات حول محاور رأسية.
- القفز (The jump): انتقالات وانعكاس أفقي
- الخطوة (The step): إنتقالات وإنزلاقات.
- الوثب الدوراني (The spinning hop): إنتقالات مع تماثلات دورانية بـ 180° درجة.
- المشي الجانبي الدوراني (The spinning sidle): إنتقالات، وإنزلاقات، وانعكاسات حول محاور رأسية، وتماثلات دورانية بـ 180° درجة.
- القفز الدوراني (The spinning jump): هو أكبر المجموعات، وفيه إنتقالات، وانعكاسات حول محاور رأسية، وانعكاس أفقي وحيد، وتماثل دوراني بـ 180° درجة.

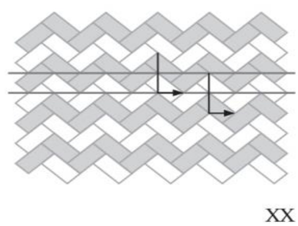
كونواي أوربيفولد Conway's orbifolds[1]

تصنف المجموعات الفريزية الأنماط التي لها تماثلات من النوع يمين – يسار، أو أعلى – أسفل، لكن ما الأنماط الناتجة إذا استخدمنا كلا النوعين معا؟ أبسط نمط يمثل ذلك هو فكرة ال (orbifolds) التي ابتكرها جون كون واي ويرمز لها بالرمز (o).

على عكس المضلعات، يمكن للتبليطات أن يكون لها أكثر من مركز دوران، فإحدى الإمكانيات لها مراكز دوران من الرتبة السادسة، وإمكانيات أخرى تكون مراكزها من الرتبة الثالثة، ومجموعة أخيرة مركزها من الرتبة الثانية. المثال الموضح له مراكز الدوران تلك، وليس له تماثل انعكاسي، ويرمز لهذه المجموعة بـ (632).

أما الأنماط التي لها تماثلات إضافية انعكاسية فتحدد بـ (*).





وللدورانات نوعان: المشكال (kaleidoscopes) التي تقع مراكزها على محور انعكاس، والتقلبات (gyrations) التي لا تقع مراكزها على محور انعكاس.

توضع التقلبات (gyrations) قبل *، وتوضع المشكال (kaleidoscopes) بعدها. نمط رقعة الشطرنج له المجموعة (442^*) أي ثلاثة مشكالات من الرتبة الرابعة، والرابعة، والثانية، وليس لها تقلبات (gyrations)، أما النمط الذي يرمز إليه بـ(4^*2) فله تقلب من الرتبة الرابعة، ومشكال من الرتبة الثانية.

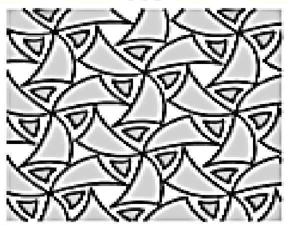
(1) هو مصطلح صاغه العالم ثورستون في سياق هندسة المتشعبات الثلاثية (https://en.wikipedia.org/wiki/Orbifold)

النوع الأخير الذي يؤخذ في الاعتبار هو الإنزلاق الذي يرمز له بالرمز (x)، وإمكاناته هي (xx) الذي له نوعان من الإنزلاق (وليس له انعكاسات أو دورانات)، و (x^*) التي لها إنزلاق واحد، وانعكاس واحد، و (22x) التي ليس لها أي انعكاسات بل دورانين من الرتبة الثانية، وانزلاق.

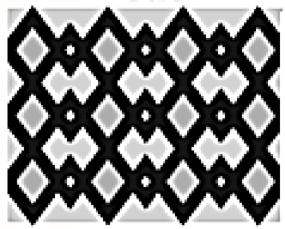
مجموعات ورق الحائط Wallpaper groups

تصنف مجموعات ورق الحائط تلك الأنماط التي تحتوي على نوعين من التماثل الانتقالي. عام 1891 أثبت إيفجراف فيدوروف أن هناك بالضبط 17 إمكانية مختلفة. هنا سنستخدم طريقة تسمية الأوربيفولد. نقطة بداية التصنيف هي الحقيقة التالية: الأنماط التي لها نوعين من الإنتقال يمكن أن يكون لها تماثل دوراني فقط من الرتبة الأولى، أو الثانية، أو الثالثة، أو الرابعة، أو السادسة، ويسمى ذلك بمبرهنة التقيد البلوري (Crystallographic restriction theorem).

333



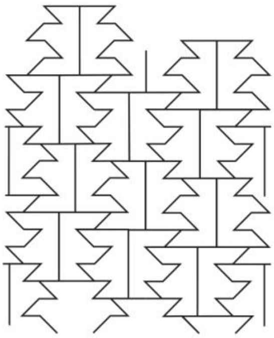
*2222



أبسط نمط هو النمط الذي له تماثل إنتقالي فقط: ويرمز له بالرمز (o). وإمكانيات وجود نمط له دورانات، لكن دون أن يكون له انعكاسات أو تماثلات إنزلاقية هي: (632, 442, 333 and 2222)، أما في وجود تماثلات دورانية، وانعكاسية فالإمكانيات هي (,22* ,4*2 ,442* ,3*3 ,333* ,632* ** and 2*22 ,2222*). (الأخيرة لها محوري انعكاس متوازيين، وليس لها تماثل دوراني). وأخيرا الأنماط التي لها إنزلاقات هي (xx, *x and 22x).

تبليط هيسش Heesch's tile

أحد الأسئلة التي طرحها ديفيد هيلبرت في مسألته رقم 18 كان متعلقا بالأشكال التي يمكنها أن تستخدم في التبليط بمفردها لكن بطريقة إلى حد ما غريبة. على الرغم من

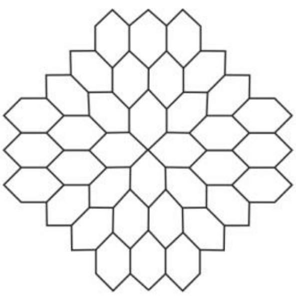

بلاط هيسش

أن كل البلاطات متطابقة إلا أنها تكون في مواضع غير متطابقة، مما يعني أنك ستكون دائما قادرا على إيجاد بلاطتين لا يمكن تنسيقهما في تماثل؛ لأن ترتيبات البلاط حولها مختلفة، وليس صعبا أن تشيد تبليط كهذا (أي تبليط لا دوري يحقق هذا الوصف).

كان سؤال هيلبرت عما إذا كان هناك أي شكل يمكن أن يستخدم في التبليط بهذه الطريقة.

في الواقع، طرح هيلبرت هذا السؤال في سياق التبليط ثلاثي الأبعاد(ملأ الفراغ بالمجسمات ثلاثية الأبعاد) من المحتمل أنه أعتقد أنه ليس هناك شيء كهذا في الأبعاد الثنائية، لكن عالم الرياضيات العظيم تغاضى عن إمكانية، واكتشف هينريك هيسش عام 1935 أول بلاطة متعددة الأوجه، كما أن هناك تبليط ثلاثي الأبعاد يحقق معايير هيلبرت اكتشفه كارل رينهاردت عام 1928.

التبليط غير الدوري Aperiodic tiling


تبليط شعاعي

يمكن أن يكون للتبليط نوعان من التماثل الإنتقالي (مصنف بمجموعات ورق الحائط)، أو نوع واحد منه تصفه مجموعات مجموعات فريز. هناك أيضاً تبليط ليس له تماثل إنتقالي على الإطلاق، والذي يسمى تبليط غير دوري وهو لا يكرر نفسه أبدا، حتى إذا كنت سترصف مترا مربعا، فسيكون من المستحيل أن تكرر النمط بحيث ينطبق على نفسه، ولأن لها تماثل دوراني، وانعكاسي فقط فإن مجموعات تماثلهم الممكنةهي نفس مجموعات تماثل المضلع. الأمثلة الشائعة هي التبليط النصف قطري (بمجموعات تماثل ثنائية السطح)، والتبليط الحلزوني الجميل (بمجموعات تماثل دائرية) مثل تبليط فودربرج، أما الإمكانيات الأكثر غرابة هي تبليطات بنروز وآمان.

التبليط غير القابل للحساب Uncomputable tilings

نفرض أنني قدمت لك مجموعة من الأشكال ووضعت لك تحد أن تستخدمها في تبليط المستوى، ولست مهتما بالتماثل؛ كل ما هو مطلوب أن تغطي أكبر مساحة ممكنة كما طلبت دون وجود فجوات أو تداخلات، ولديك أي عدد ترغب به من كل شكل. إذا أعطيتك مربعات، ومثلثات متساوية الأضلاع فلن تواجه صعوبة، أما إذا كانت مضلعات خماسية منتظمة، ومضلعات سباعية، وعشرية فلن يمكنك تنفيذ المطلوب، لكن إذا أعطيتك مجموعة من 100 من المضلعات المعقدة غير المنتظمة فسيكون عليك أن تفكر.

السؤال الذي وجهه هاو وانج كان عما إذا كان هناك خطوات معينة يمكنك اتباعها لمعرفة إذا كانت مجموعتي يمكنها رصف هذا المستوى أم لا، بمعنى آخر: كان يبحث عن خوارزمية. عام 1961م ظن أنه وجد واحدة لكن ليثبتها اضطر لوضع فرض أن ليس هناك مجموعة يجب أن تبلط المستوى بشكل لا دوري فقط. اكتشاف تبليط بنزوري وأمان محى هذا الفرض، ومعها خوارزمية وانج، في الحقيقة ليس هناك خوارزمية تحل هذا المسألة: إنها غير قابلة للحساب.

تبليط بنروز وأمان Penrose and Amman tilings

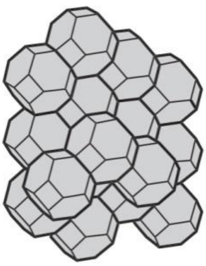
كان التبليط اللا دوري معروفا عند صناع الفسيفساء في روما القديمة، وبدا أن كل مثال له نظير دوري. إذا كانت هناك مجموعة من البلاطات تغطي المستوى فإنه يمكن إعادة ترتيبها بحيث تغطي المستوى في تماثل إنتقالي. عام 1961 وضع هاو وانج حدسية مفادها أن هذا لابد أن يتحقق دائما: ليس هناك مجموعة منتهية تعطي أنماطا لا دورية. فقط، لكن هذه الحدسية التي وضعها هاو دحضها تلميذه روبرت بريجر عام 1964 عندما كون مجموعة من 20426 مربع محزز يمكنها تغطية المستوى بأنماط لا دورية فقط.

وفي فترة السبعينيات اكتشف كل من عالم الفيزياء الرياضية روجر بنروز، والرياضي الهاوي روبرت أمان كل على حدة تبسيطات جميلة لهذه النتيجة، ففي عام 1974م وجد بنروز مجموعة لا دورية من بلاطتين فقط: كلاهما على شكل معين هندسي، وأضلاعهما متساوية، أحدهما منفوخ، والآخر نحيف، وهي تبلط المستوى لكن عن طريق تحزيز الحواف (أو تلوينها

مع التأكيد على أن الحواف المتماسة متماثلة)، وقد أكد بينروز أنها لا يمكن أن تغطي المستوى بشكل دوري، وأطلق عليها اسم "rhombs"، كما أنه عثر على مجموعتين أخرتين لا دوريتين من البلاط: "الطائرات الورقية والسهام" (kites and darts)، والتي تستخدم أيضاً نوعين مختلفين من البلاط، والخماسيات (pentacles) التي تستخدم أربعة أنواع مختلفة من البلط. أما أمان ومعه فرانك بنكير فقد اكتشف أمثلة أخرى بما فيها تبليط أمان - بنكير الذي يتكون من مربعات ومعينات هندسية.

من الأسئلة البارزة في نظرية التبليط: هل هناك بلاطة واحدة يمكنها تغطية المستوى لكن بطريقة لا دورية فقط؟

أقراص العسل والبلورات Honeycombs and crystals



قرص العسل هي فسيفساء في أكثر من بعدين؛ فبدلا من تغطية المستوى ببلاطات مضلعة، تغطي أقراص العسل الثلاثية الفضاء ثلاثي الأبعاد بخلايا ثلاثية الأبعاد.

ويطلق على المجسم الذي يغطي المستوى مجسم ثلاثي الأبعاد مالئ الفضاء (space-filling polyhedron)، ولا يحقق ذلك من مجسمات أفلاطون إلا مجسم واحد هو المكعب (اعتقد أرسطو عن طريق الخطأ أن رباعي الوجوه يمكن استخدامه في التبليط؛ ربما لأن الشكل الناتج من دمجه مع ثماني الوجوه ثلاثي الأبعاد يمكن استخدامه).

ومع ذلك هناك أيضاً مجسمات أخرى مالئة الفضاء، أحدها يندرج تحت مجسمات أرشميدس، وثماني الوجوه المقطوع يمكن استخدامه أيضاً وكذلك المناشير المثلثة، والسداسية، وأحد مجسمات جونسون وهو (gyrobifastigium). أما بالنسبة للمجسمات ثلاثية الأبعاد ذات الوجوه غير المنتظمة فإن أحد أجسام كاتالان وهو المجسم الأثنعشري (dodecahedron) يملأ الفراغ وكذلك يفعل أكثر من 300 مجسم ثلاثي الأبعاد متنوع آخر.

أما الأنماط التي تحتوي على أكثر من مجسم فإن النتيجة الأساسية هي مبرهنة التقيد

البلوري التي تقول أن تبليط الفضاء ثلاثي الأبعاد والذي له تماثل إنتقالي يمكن أن يكون له دورانات فقط من الرتبة 2 أو 3 أو 4، أو 6. ونظائر مجموعات ورق الحائط هي المجموعات البلورية ال 230 ، وتلك نتيجة أساسية في علم المواد حيث أنها تقيد الترتيبات الممكنة للجزيئات في المجسمات البلورية.

أقراص العسل في الأبعاد التي عددها n (n-dimensional (honeycombs

في الأبعاد الرباعية، هناك ثلاثة مجسمات رباعية الأبعاد يمكنها تغطية المستوى: المكعب الزائدي (hypercube)، والسداسي رباعي الأبعاد (hexadecachoron)، والمجسم ذو الأربعة وعشرون وجها رباعي الأبعاد (icositetrahedron)، أما في الأبعاد الخماسية فأعلى فإن المكعب الزائدي فقط هو الذي يمكن استخدامه، إلا أنه يمكن تكوين أنماط أكثر تعقيدا من دمج أكثر من نوع من البلاط، ولتحليل ذلك وتحليل هذه الأنماط كما يلي: تلعب مجموعات الفضاء دور مجموعات ورق الحائط السبعة عشر، والمجموعات البلورية التي عددها 230.

طرح ديفيد هيلبرت في مسألته الثامنة عشر سؤالا أساسيا: ألا يوجد سوى عدد محدود من مجموعات الفضاء في كل بعد؟ وفي عام 1911 استطاع لودفيغ بيبربيش الإجابة عن هذا السؤال بالإيجاب (قدم بيبربيش مساهمات بارزة أخرى في الرياضيات لكن هذه الإسهامات لم تحظ بالاحترام بسبب سياسته النازية). وفي عام 1978م، أظهر هارولد براون (Harold Browen) ورولف بيلون (Rolf Bulow) وجوكيم نيبسر (Joachim Neubuser) أن هناك 4,895 مجموعة فضاء في أربعة أبعاد. وفي عام 2001 استخدم كل من فيلهلم بليكسين (Wilhelm Plesken) وتيلمان شولز (Tilman Schulz) الكمبيوتر لتسجيل 222,097 مجموعة فضاء في خمسة أبعاد و 28,934,974 في ستة أبعاد.

أشباه البلورات Quasicrystals

تأتي المجسمات في شكلين علي المستوي الجزيئي: الشكل اللابلوري (amorphous) حيث يتم ترتيب الجزيئات بشكل عشوائي كما هو حالة السؤال (مثل الزجاج)، والشكل البلوري حيث يتم ترتيبها في أشكال هندسية ثابتة (مثل الماس).

في عام 1982 اكتشف دان سيتشمينت (Dan Schechtment) سبيكة من الألومنيوم والمنجنيز وكانت فيها خاصية غير متوقعة: وهي أن لها تماثل دوراني من الرتبة 5. كان الأساس العلمي لذلك مرفوضا؛ لأنه متعارض مع مبرهنة التقيد البلوري الأساسية، والتي تنص علي عدم السماح بدوران البلورات الصلبة إلا بدورانات من الرتبة 2 و 3 و 4 و 6 فقط. إلا أن بالتدقيق في الأمر بدا بعد كل هذا أن المادة ليست بلورية؛ لأنها ليس لها تماثل إنتقالي، لكن أيضاً المجسمات اللابلورية ليست مرتبة بما يكفي لتظهر تماثلا دورانيا، فماذا كانت تلك السبيكة إذا؟

لقد قابل علماء الرياضيات أبنية مماثلة من قبل في التبليط اللادوري لبنروز، وأمان، وقد اكتشف سيتشمينت (Schechtment) نظائر ثلاثية الأبعاد لها؛ لذلك أطلق عليها اسم شبه البلورة (quasicrystal)، ومنذ ذلك الحين تم العثور علي العديد من أشباه البلورات في الطبيعة، والتي احتلت مكانا بين المواد الصلبة غير البلورية والبلورية، وهذه التطورات حثت على المزيد من الدراسات الرياضية. وتفسر العديد من التبليطات اللادورية الآن على أنها شرائح (القطاعات المخروطية هي شرائح من السطوح المخروطية)

ويمكن تفسير المجموعة التي أسماها بنروز (rohmbs) على إنها شريحة مأخوذة من بلورة مكعب زائدي خماسي الأبعاد.

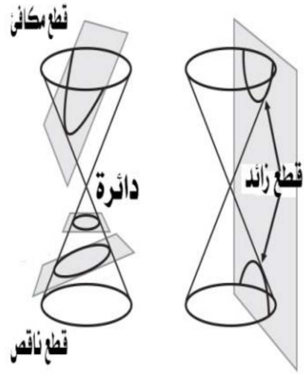
المنحنيات والسطوح CURVES AND SURFACES

المنحنيات Curves

المنحني هو شكل هندسي أحادي الأبعاد وأبسط أمثلته هي تلك الأشكال غير المنحنية على الإطلاق ألا وهي الخطوط المستقيمة وهي الأبسط من الناحية الجبرية أيضاً؛ فالخطوط المستقيمة توصف في الإحداثيات الديكارتية بمعادلات مثل ($x + y + 1 = 0$)، أو($3x - y - 7 = 0$) أو بصفة عامة معادلات على الصورة ($Ax + By + C = 0$) (حيث (A) و(B) و(C) لا تساوي الصفر) وتسمى معادلات كثيرة حدود من الدرجة الأولى.

أما معادلات الدرجة الثانية فتحتوي بالإضافة إلى ذلك على الحدود x^2, y^2 أو (xy)، وهذه المنحنيات التربيعية لها وصف راق حيث توصف بالقطوع المخروطية، ويأتي بعد ذلك المنحنيات المكعبة وهي من الدرجة الثالثة، ومن بينها المنحنيات الإهليلجية التي تلعب دورًا مركزيًا في نظرية الأعداد الحديثة، وهناك منحنيات أخرى مثل حلزون أرشميدس الذي يمكن توصيفه بشكل أفضل في الإحداثيات القطبية.

القطوع المخروطية Conic sections



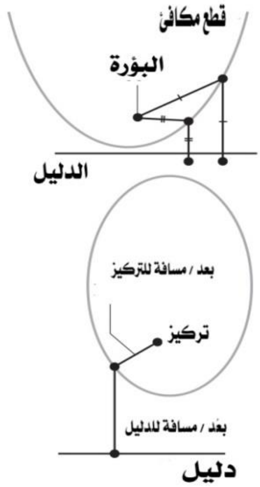
ما المنحنيات التي توصف بمعادلات الدرجة الثانية؟ كان معظم علماء الهندسة الإغريق ولاسيما (أبلونيوس البرغاوي) حوالي 220ق م قادرين على حل هذه المسألة حتى 1800 عام قبل اختراع ديكارت لنظام الإحداثيات الديكارتية، وكان لها حلا ممتازا: أولا نعتبر أن لدينا زوجا من المخاريط اللانهائية متصلين من طرفيهما. القطاعات المخروطية هي المنحنيات التي تنتج عن أخذ شرائح من هذا السطح، وهي تشكل عائلة من المنحنيات تعطى بمعادلات من الدرجة الثانية. أخذ شريحة أفقية ينتج عنه دائرة (وتعطي بالمعادلة $(x^2 + y^2 - 1 = 0)$، أما أخذ شريحة رأسية تمر بالمركز يعطي زوجًا من الخطوط المستقيمة المتقاطعة (يعطى بالمعادلة $(x^2 - y^2 = 0)$ على سبيل المثال).

المنحنيات التربيعية Quadratic curves

الأنواع الرئيسة الثلاثة للقطاعات المخروطية هي: القطوع الناقصة (الإهليلجية)، والقطوع المكافئة، والقطوع الزائدية. أي معادلة من الدرجة الثانية تكون على الصورة $(Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0)$ حيث (A)،(B)،(C)،(D)،(E)،(F) أرقام الرقم $(B^2 - 4AC)$ يحدد نوع المنحنى، فإذا كان صفرًا يكون المنحنى قطعًا مكافئًا (أو في

حالات أخرى قد يكون خط مستقيم، أو مستقيمين متوازيين)، وإذا كان سالبًا فيكون المنحنى قطعًا ناقصًا (أو نقطة منفردة أو لا شيء على الإطلاق)، وإذا كان موجبًا فيكون المنحنى قطعًا زائديًا (أو زوج من الخطوط المستقيمة المتقاطعة).

البؤرة والدليل Focus and directrix



يمكن إنشاء قطاعات مخروطية بطريقة أخرى بالإضافة إلى تقاطع مخروط مع مستوى. اختر نقطة في المستوى وخطا مستقيما لا يمر بها. يطلق على هذه النقطة اسم البؤرة ويطلق على الخط اسم الدليل. لأي نقطة تنتمي إلى المستوى يمكننا السؤال عن بعد هذه النقطة عن البؤرة، وبعدها عن الدليل (يقصد بالبعد دائما أقصر مسافة؛ أي المسافة العمودية)، ما الشكل الذي ستكونه مجموعة النقط التي تبعد نفس المسافة عن البؤرة والدليل؟ الإجابة هي: القطع المكافئ

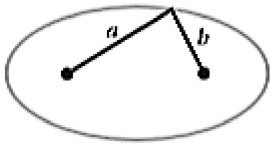
بتغيير السؤال نحصل على منحنيات مختلفة: إذا أردنا أن تكون المسافة بين النقطة والبؤرة نصف المسافة بين النقطة والدليل فسيكون المنحنى الناتج هو القطع الناقص، وإذا أردنا أن تكون هذه المسافة ضعف المسافة بين النقطة والدليل سوف نحصل على قطع زائد.

في كل الإنشاءات السابقة، الكمية المؤثرة هي النسبة بين بعد النقطة عن البؤرة وبعدها عن الدليل، وسنعطي على هذه النسبة الرمز (e)، السمة المميزة للقطوع المخروطية هي أن تكون النسبة (e) ثابتة لأي نقطة على المنحنى ، وهي تسمى الابتعاد المركزي أو الاختلاف المركزي للمنحنى ، فإذا كان $(1 > e > 0)$ يكون المنحنى قطعًا ناقصًا ، وإذا كان $(e = 1)$ فإنه يكون قطعًا مكافئًا ، أما إذا كان$(1 < e)$ فهو قطع زائد.

القطوع الناقصة Ellipses

يعرف القطع الناقص على أنه شريحة من مخروط، أو يعرف بطريقة البؤرة/ الدليل. في

الحقيقة، القطع الناقص شكل متماثل وله بؤرتان تقعان في جهتين مختلفتين من المركز، وهاتين البؤرتين توفران طريقة أخرى لتعريف القطع الناقص: لنفرض أن المسافتين بين نقطة ما وبين البؤرتين هما (a)، و(b) فيمكن تعريف القطع الناقص باستخدام الشرط الذي يقول أن (a+b) رقم ثابت دائما.



وهذا يقدم طريقة رائعة لرسم القطع الناقص: اغرس دبوسين في قطعة من الورق مربوطين ببعضهما البعض عن طريق خيط مرتخ، وبتتبع الأماكن التي يكون فيها الخيط مسحوبا نحصل على قطع ناقص.

المحور الرئيسي للقطع الناقص هو أطول قطعة مستقيمة داخله تكون مارة بالبؤرتين والمركز ويصل بين نقطتين من نقاطه، والمحور الثانوي هو العمودي على المحور الرئيسي: أقصر خط مستقيم يمر بالمركز ويصل بين نقطتين على القطع. يمكن حساب الاختلاف المركزي (e) عن طريق قسمة المسافة بين البؤرتين على طول المحور الرئيسي.

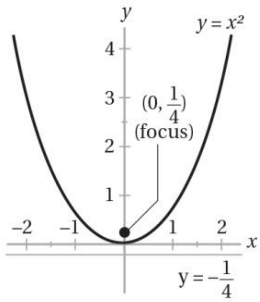
الدائرة حالة خاصة من القطع الناقص حيث تنطبق البؤرتان: قطع ناقص اختلافه المركزي صفر.

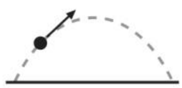
عام 1609 وضع يوهان كيبلر قانونه الأول للحركة الكوكبية (Planetary motion) ويقول إن : مدار أي كوكب هو قطع ناقص إحدى بؤرتيه الشمس.

القطوع المكافئة Parabolas

بخلاف القطع الناقص، القطع المكافئ ليس منحنى مغلق بل له طول لا نهائي. القطع المكافئ هو أحد القطوع المخروطية، ويعرف على أنه شريحة من مخروط مأخوذة على طول مستوى مواز لحافة المخروط، أو بدلا من ذلك يمكن تعريفه على أنه مجموعة من النقط تبعد عن خط ما (الدليل) مسافة تساوي بعدها عن نقطة معينة (البؤرة).

من القطوع المكافئة الشائعة القطع الذي يعطى بالمعادلة ($y = x^2$) (أو المكافئة لها ($x^2 - y = 0$)، وبؤرته هي $\left(0, \frac{1}{4}\right)$، ودليله ($y = -\frac{1}{4}$).

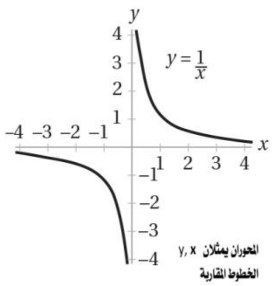


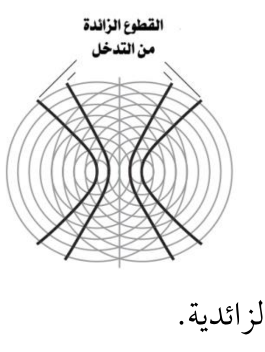


لم تكن فيزياء الحركة مفهومة جيدا خلال العصور الوسطى، فاعتقد الناس أن بصفة عامة عند إطلاق قذيفة مدفعية فإنها تسلك مسارا مستقيما حتى تفقد قوة الدفع وتسقط أرضا إلا أن جاليلو في القرن السابع عشر مزج معرفته الرياضية بمهاراته التجريبية وتحدى هذا الفرض، وأجرى سلسلة من الاختبارات بينت أن المقذوفات تتحرك في مسارات على هيئة قطوع مكافئة (بإهمال تأثير مقاومة الهواء)، ولم يفهم العلماء صحة ذلك إلا بظهور أعمال إسحاق نيوتن.

تفرق وكالة ناسا بين المذنبات الدورية التي لها مدارات قطعية ناقصة (وبالتالي تظهر مجددا كما في حالة المذنب هالي الذي يظهر مرة كل 75 سنة، لكن بعض المذنبات طويلة الدورة تظهر كل 10 ملايين سنة)، والمذنبات أحادية الظهور (Single-apparation comet) التي تتحرك في مدارات قطعية مكافئة أو زائدية والتي لا تمر بالنظام الشمسي إلا مرة واحدة.

القطوع الزائدية Hyperbolas





القطع الزائد هو القطع المخروطي الوحيد الذي له فرعان منفصلان وهو ينتج من أخذ شريحة من نصفي المخروط المزدوج. القطوع الزائدية- مثل أبناء عمومتها: القطوع الناقصة- لها بؤرتان ودليلان، وأيضا تقدم البؤرتان وصفا بديلا. إذا كانت المسافتين بين نقطة على المنحنى والبؤرتين هما (a) و(b)، فإن الرقمين (a-b)، و (b-a) ثابتين لأي نقطة على المنحنى (التبديل بينهما يسمح بنقلنا بين الفرعين)، ولهذا السبب تظهر القطوع الزائدية في أنماط تداخل الموجات. إذا أسقط حصاتين في بركة فستتداخل مجموعتا التموجات الدائرية مكونة عائلة من القطوع الزائدية.

جميع القطوع الزائدية لها خطان تقارب. في حالة أشهر قطع زائد (yx = 1) (الذي يكافئ yx = 1) يكون خطي التقارب هما المحوران (x) و(y).

وبلا شك فإن هذين المحورين متعامدان مما يجعل القطع الزائد قطعًا مستطيلًا(مركز اختلافه دائمًا =($\sqrt{2}$).

خطوط التقارب Asymptotes

الخط التقاربي لمنحنى هو خط مستقيم يقترب منه المنحنى اختياريًا لكننه لا يصل إليه أبدًا. من الأمثلة التقليدية القطع الزائد (yx = 1)، حيث تزداد (x) أكثر و أكثر بينما (y) تقترب إلى الصفر أكثر وأكثر دون أن تصل إليه أبدًا؛ بالتالي يسمى (y=0) خط تقارب للمنحنى، وبالمثل كلما زادت (y) اقتربت (x) للصفر أكثر مما يجعل الخط (x=0) خط تقاربي أيضاً.

ليست كل المنحنيات لها خطوط تقاربية؛ فالقطوع الناقصة، والمكافئة على سبيل المثال ليس لها خطوط تقاربية.

تكعيبات نيوتن Newton's cubics

الأنواع الثلاثة من القطوع المخروطية هي منحنيات توصف بمعادلات تربيعية، أما المنحنيات ذات الدرجات الأعلى فتأتى على هيئة مجموعات متنوعة أكثر كثيرا من ثلاثة، بعضها يمكن التعبير عنه بشكل أفضل في الإحداثيات القطبية.

عام 1710 اهتم إسحاق نيوتن بمنحنيات تعرف بمعادلات تحتوي على الحدود (x^3) (xy^2)(x^2y): المنحنيات التكعيبية، وعلى عكس القطوع المخروطية فإن هذه المنحنيات يمكن أن تقطع بعضها البعض، وبعض المنحنيات التكعيبية تأتي على هيئة جزأين، وبعضها قد يكون له نتوءات: مواضع لا تكون فيها المنحنيات ملساء بل تكون لها نقطة حادة.وقد توصل نيوتن إلى 72 نوعا مختلفا من المنحنيات التكعيبية، ثم توصلت الأبحاث التالية له إلى 6 أنواع إضافية. المنحنيات التكعيبية تندرج بشكل كامل تحت تلك العائلات الثمانية وسبعين.

أكثر المنحنيات التكعيبية أهمية هي المنحنيات الإهليلجية (القطعية الناقصة) التي لازالت تحتل مركزا مهما في علم الرياضيات إلى يومنا هذا، لكن ليس كل منحنى تكعيبي يكون إهليلجيا، لكن نيوتن أوضح أن كل المنحنيات التكعيبية يمكن إنشاؤها عن طريق تقليص أو تمديد منحنى إهليلجي بطريقة مناسبة.

السطوح من الدرجة الثانية Quadric surfaces

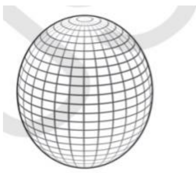
في الفضاء ثنائي الأبعاد، أبسط المنحنيات هي الخطوط المستقيمة (وتعطي بمعادلات خطية)، وتتبعها القطوع المخروطية: المنحنيات الواقعة في المستوى المعرف بمعادلات الدرجة الثانية. بالنظر إلى السطوح في الفضاء ثلاثي الأبعاد نجد أن الصيغ الخطية تعرف المستويات المسطحة، والصيغ التربيعية (الدرجة الثانية) تنتج عائلة من سطوح الدرجة الثانية التي نحصل عليها أساسا من ترقية القطوع المخروطية إلى الأبعاد الثلاثية بطرق مختلفة، وأبسط صور ذلك هي الأسطوانات المكونة من قطوع ناقصة، ومكافئة وزائدية والتي نحصل عليها من إنشاء جدران مستقيمة أعلى هذه المنحنيات، وتكون معادلاتها نفس معادلات المنحنيات الأصلية مصحوبة بالبعد (z) الذي يأخذ أي قيمة.

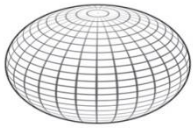
بعد تدوير ومركزة السطح، نحصل على العديد من سطوح الدرجة الثانية التي توصف بمعادلة على الصورة ($Ax^z + By^z + Cz^z = 1$)، فإذا كانت (A)،و(B)،و(C) قيم موجبة فإن المعادلة تكون معادلة سطح ناقص، أما إذا كانت قيمتان منهما موجبتين وواحدة سالبة فإن المعادلة تكون معادلة سطح زائد ذو طية واحدة،وإذا كانت قيمتان منهما سالبتين وواحدة موجبة فإن المعادلة تكون معادلة مجسم دوراني زائد ذو طيتين، بينما المعادلة ($z = Ax^2 + By^2$) تعرف السطح المكافئ: إهليلجي إذا كانت (A)،و (B) متماثلتين في الإشارة، وزائدي إذا كانتا متعاكستين في الإشارة.

أما الحالات المتبقية فهي المخاريط الإهليلجية (مخاريط لها مقاطع إهليلجية)، وأزواج المستوى.

السطح الناقص Ellipsoid

يشبه كرة منبعجة و/ أو ممددة مقاطعها قطوع ناقصة، والحالة الخاصة منه هو السطح الكروي حيث يكون مقاطعه في اتجاه واحد جميعها دوائر، وقد علمنا أن الأرض تقريبا كروية منذ عمل إسحاق نيوتن على الجاذبية الكونية، إلا أن في القرن الثامن عشر دار بعض الجدال حول ما إذا كانت كرة ممدة (كروي متطاول مثل كرة الرجبي أو كرة القدم الأمريكية) كما اعتقد عالم الفلك الفرنسي جيوفاني، وجاسك كاسيني أم كرة منبعجة (كروي مفلطح) كما اعتقد نيوتن نفسه، وأثبتت القياسات فيما بعد أن نيوتن كان على صواب على الرغم من أن الأجرام السماوية الأخرى قد تكون على شكل كروي متطاول وإحداها : الكوكب القزم هاوميا.

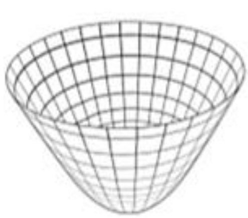


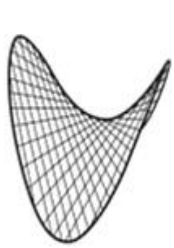


توصف السطوح الناقصة بالمعادلة $(Ax^2 + By^2 + Cz^{2=1})$. حيث (A)، (B)، (C) أرقام موجبة إذا كانت (A)و(B)و(C) جميعها قيم مختلفة فسيكون الناتج سطح ناقص مختلف الأطوال، أما إذا تساوى اثنان منهما وليكن (A=B) سوف يكون لدينا سطح كروي (مفلطح إذا كان (C > A)، ومتطاول إذا كان (C < A).. أما إذا كانت (C)=(B)=(A) فيكون الشكل كرة.

السطوح المكافئة Paraboloids

منها نوعان: سطوح مكافئة إهليلجية وهي على شكل كؤوس مكافئة مقاطعها إهليلجية، إذا كانت هذه القطوع الإهليلجية دوائر فسيكون الناتج سطح مكافئ دائري، وهو واسع الاستخدام في مجال الاتصالات في تصميمات أطباق الأقمار الصناعية، والتليسكوبات الراديوية؛ حيث أن لها خاصية مفيدة وهي أن جميع الأشعة العمودية على القاعدة تنعكس مباشرة إلى البؤرة، وبعكس

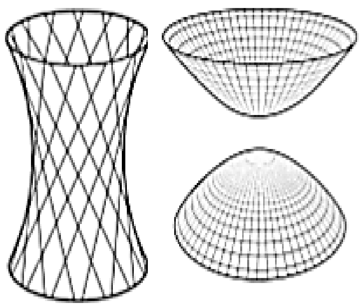




هذه العملية، نجد أن السطوح المكافئة الدائرية تستخدم أيضاً كعواكس في إضاءة المسارح، والإضاءة التجارية، فعند وضح مصباح في البؤرة يعكس السطح المكافئ الضوء على هيئة أشعة متوازية.

الشكل الثاني هو السطح الكافئ الزائدي على شكل سرج الحصان، يشبه رقائق برنغل الشهيرة، كما أنها تستخدم في التسقيف في فن العمارة الحديثة، ويوصف السطح المكافئ الزائدي الأصلي بالمعادلة (z=xy).

السطوح الزائدية Hyperboloids

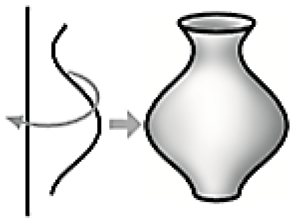


السطح الزائدي اسم يطلق على نوعين من السطوح: ذو الطية الواحدة، وذو الطيتين. السطح الزائدي ذو الطيتين يشبه سطحين زائديين إهليلجيين مواجهين لبعضهما البعض وبينهما فجوة (على الرغم من أن هذا ليس هو الوصف الدقيق، فالإنحناء مختلف قليلا). أما ذو الطية الواحدة فهو مشهور بأنه يشبه أبراج التبريد، وبأخذ شرائح رأسية من كلا النوعين ينتج قطوع زائدة، أما مقاطعها الأفقية فهي قطوع ناقصة.

معظم التطبيقات تتضمن وجود السطوح الزائدة الدورانية ذات الطية الواحدة حيث تكون القطوع الناقصة دوائر. (غالبا يفهم مصطلح سطح زائدي على أنه اختصار للسطح الزائدي الدوراني ذي الطية الواحدة). وبما أن هذه السطوح سطوح مسطرة فبالتالي يمكن إنشاؤها بسهولة. خذ حلقتين دائريتين متطابقتين ووصل النقط المتناظرة عن طريق أسلاك يؤدي شدها إلى تكوين إسطوانة، أما ليها يؤدي إلى تكون سطح زائدي، وبما أن السطح مزدوج التسطر فإن هناك مجموعتان من الأسلاك يمكن جعلها مستقيمة آنيا، ولأن هذه السطوح يمكن إنشاؤها من أشعة مستقيمة فقد اشتهرت في الفنون والعمارة منذ قام فلاديمير شوكهوف ببناء برج مائي على سطح زائد عام 1896م.

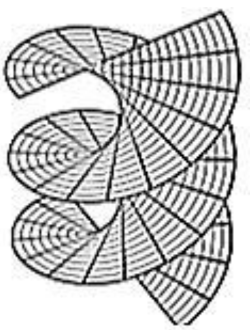
السطوح الدورانية Surfaces of revolution

هناك طريقة لطيفة تستخدم لبناء سطوح دورانية ثنائية الأبعاد من المنحنيات أحادية البعد، وهي التدوير. لنبدأ بالدائرة، ارسم خطا مستقيما يمر بمركز الدائرة كقطر لها. أثناء دوران هذه الدائرة حول هذا المحور في الأبعاد الثلاثة فإنها تمسح سطحا، تحديدا هو الكرة، وهذه الخدعة صالحة لأي منحنى على الرغم من أن السطح الناتج لا يعتمد فقط على اختيار المنحنى بل على موضع المحور؛ فتدوير دائرة حول محور لا يمر بها على سبيل المثال ينتج طارة.



تدوير خط مستقيم حول محور موازي ينتج أسطوانة دائرية، أما إذا كان الخطان غير متوازيين ينتج المخروط المزدوج الذي يضم القطوع المخروطية. أما إذا بدأنا بخطين متخالفين (ليسا متوازيين أو متقاطعين) في الفضاء ثلاثي الأبعاد سيكون السطح الممسوح هو السطح الزائد الدائري ذو الطية الواحدة. وتدوير قطع ناقص حول أحد محوريه ينتج عنه سطح كروي، بينما تدوير القطع المكافئ يعطي سطح مكافئ دائري، والقطع الزائد يعطي سطح زائد دائري. والمزيد من المنحنيات المعقدة تعطي سطوح دورانية جميلة للغاية، وطالما استخدم صانعو الفخار والنحاتون هذه الحقيقة.

السطوح المسطرة Ruled surfaces

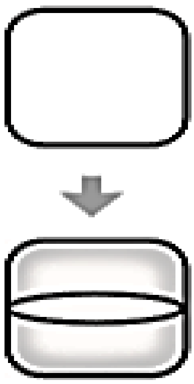


ينشأ المستوى بالكامل من خطوط مستقيمة: الخطوط المستقيمة على السطح تغطيه بالكامل. والمثير للدهشة أكثر من ذلك هو أن هناك مستويات تبدو أكثر انحناء وتحمل نفس الخاصية. الأسطوانات تنشأ فقط عن طريق بناء حوائط مستقيمة بمحاذاة مسارات منحنية. والمخاريط أيضاً سطوح مسطرة، ومن الأمثلة المشهورة أيضاً السطح الحلزوني الذي يتكون عن طريق سطح مستقيم يدور بشكل حلزوني على طول محور رأسي لأسفل ، وهو يذكرنا بالرصيف المنحدر الموجود في موقف السيارات متعدد الطوابق (الجراج).

هناك ثلاثة أسطح مزدوجة التسطير حيث تقع كل نقطة على خطين مستقيمين وهي: المستوى، السطح الزائد الدوراني ذو الطية الواحدة، والسطح المكافئ الزائدي.

السطوح ذات الأبعاد الأعلى Surfaces of higher degree

السطوح التربيعية تعطى بكثيرات حدود من الدرجة الثانية، فإذا قام بزيادة الدرجة، فسنحصل على ثروة من السطوح الأكثر تعقيدا، ومن أمثلة ذلك السطح على شكل جرس، (ding-dong surface) وهو سطح مكعبي الذي نحصل عليه كسطح دوراني لمنحنى تكعيبي قاطع لنفسه.

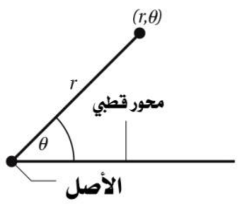


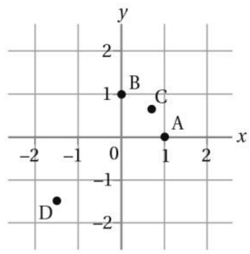
ومن تصنيفات السطوح المثيرة السطوح التربيعية الفائقة (superquadrics)، وهي تحاكي السطوح من الدرجة الثانية، باستبدال حدود من رتب أعلى بالحد (x^2). على سبيل المثال السطح الكروي هو سطح دوراني للقطع الناقص، ومعادلة القطع الناقص هي ($\left|\frac{x}{a}\right|^2 + \left|\frac{y}{b}\right|^2 = 1$)، وبوضع حدود من درجات أعلى (n) محل حدود الدرجة الثانية نحصل على قطع ناقص فائق يعطى بالمعادلة ($\left|\frac{x}{a}\right|^n + \left|\frac{y}{b}\right|^n = 1$) (إذا كانت (a)=(b) فسنحصل على دائرة تربيعية (squircle))، وهي لا تمت لمسألة تربيع الدائرة القديمة بصلة). المثال الموضح في الشكل معادلته ($|x|^7 + |y|^7 = 1$)، وإذا أخذنا السطح الدوراني له سنحصل على بيضاوي فائق (superegg). والخاصية المثيرة في هذا الشكل أن مقدر انحناء أطرافه يساوي صفر؛ لذلك يمكنه أن يقف معتدلا تماما على عكس السطح الدائري، وقد استغل عالم الرياضيات والنحات بت هين هذه الحقيقة.

الإحداثيات القطبية POLAR COORDINATES

الإحداثيات القطبية Polar coordinates

يحدد نظام الإحداثيات الديكارتية موضع نقطة على المستوى من خلال المسافة بينها وبين زوج من المحاور المتعامدة، وبديل هذا النظام هو نظام الإحداثيات القطبية، وهو يعرف بمعلومتين أيضاً: مسافة وزاوية ، ويرمز لهما بـ (r) و (θ) على الترتيب. المسافة تحدد بعد النقطة عن نقطة الأصل، وبالتالي من الرسم نجد أن كل من (A) و (B) (اللتان إحداثياتهما الديكارتية (1,0) و (0,1) على الترتيب) تبعد عن نقطة الأصل وحدة واحدة ، وكذلك النقطة (C) إحداثياتها الديكارتية $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ (وهذا يستنتج من مبرهنة فيثاغورث $(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$)





إذا المسافة وحدها لا تصلح للتمييز بين النقط في الإحداثيات القطبية، لذلك نذكر أيضاً الزاوية التي تصنعها النقطة عند نقطة الأصل مقاسة من المحور القطبي، وهو الخط الأفقي الذي يبدأ من نقطة الأصل ويمتد يمينا (هو الجزء الموجب من محور (X) في الإحداثيات الديكارتية) بالتالي فإن النقطة (A) التي تقع على هذا الخط قياس زاويتها صفر. في علم الرياضيات تكون الزاوية الموجبة دائما في اتجاه عكس عقارب الساعة؛ لذلك فإن النقطة (C) لها زاوية قياسها 45°، و(B) لها زاوية قياسها(90°).

إلا أننا عادة نقيس الزاوية بالقياس الدائري: لذلك - بكتابة المسافة قبل الزاوية- فإن الإحداثيات القطبية للنقط: (A) و (B) و(C) هي

$$(1,0), \left(1, \frac{\pi}{2}\right), \text{and } \left(1, \frac{\pi}{4}\right)$$

النقطة (D) تقع على بعد وحدتين من نقطة الأصل بزاوية قياسها 270 درجة؛ لذلك تكون إحداثياتها القطبية $(2, \frac{2\pi}{2})$.

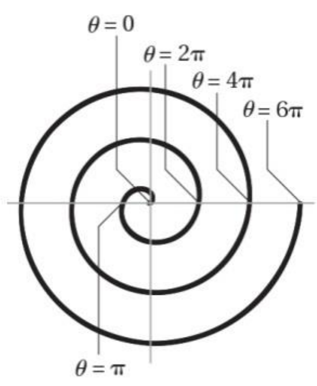
الهندسة القطبية Polar geometry

الإحداثيات القطبية والديكارتية لغتان مختلفتان للتحدث عن نفس الأجسام، فما يقال في واحدة يمكن ترجمته إلى الأخرى، إلا أن الإحداثيات القطبية تصف بعض الأشكال الهندسية في المستوى بكفاءة أكثر، على سبيل المثال: الدائرة التي نصف قطرها 1 لها صيغة بسيطة هي (r=1) وهذه الصيغة تصف مجموعة النقط (1,0) التي تبعد كل منها مسافة الوحدة عن نقطة الأصل، ومن ناحية أخرى فإن تثبيت الزاوية ولتكن ($\frac{\pi}{4}$)، والسماح بتغيير (r) ينتج عنه خط مستقيم بقيمة هذه الزاوية عن المحور الأفقي، وهو مايوصف بالمعادلة ($0 = \frac{\pi}{4}$).

من الأمثلة الأخرى للأشكال التي توصف وصفا جيدا في الإحداثيات القطبية: حلزونات أرشميدس، والحلزونات اللوغارتمية والدويريات.

الإحداثيات القطبية مهيمنة في تحليل الأعداد المركبة: فجميع الأعداد المركبة (z) تأتي مصحوبة بمسافة (r) (مقدار العدد المركب) وزاوية (e) إزاحته الزاوية، وهما مرتبطان معا في الصيغة ($z = re^{10}$).

حلزونات أرشميدس Archimedean spirals



الإحداثيات القطبية مثالية تماما لوصف الأشكال الحلزونية التي تكون فيها بعد النقطة عن نقطة الأصل يعتمد على إحدى خواص الدوران، وأبسط هذه الحالات هي حلزون أرشميدس الذي يعطى بالمعادلة ($r = 0$)، وهو يتكون من كل النقط التي يتساوى فيها كل من الإحداثيين القطبيين: تلك التي على الشكل (0,0). عندما ($0 = \frac{\pi}{4}$ (that is 45°)) يكون الطول ($\frac{\pi}{4}$) أيضاً (حوالي (0.8))، عندما ($0 = \frac{\pi}{2}$ (or 90°)) ، يكون الطول ($r = \frac{\pi}{2}$ (around 1.6)) وهكذا. وبمجرد أن تصبح (2π) يكون الحلزون قد أكمل لفة كاملة ويعبر المحور القطبي، لكن

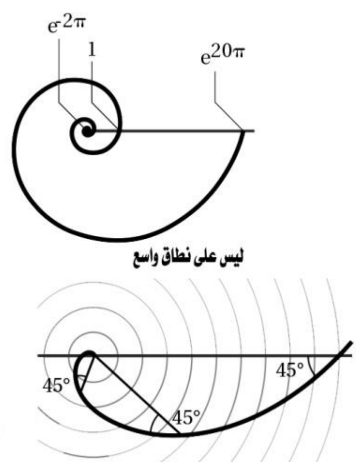
لايزال يمكننا رسم قيم أكبر لـ (0) حتى تعبر المحور مرة أخرى عند ($4\pi(720°$)، ومرةأخرى عند (6π)،و (8π)،و (10π) وهكذا.

يمكن جعل الحلزون يتمدد أو ينكمش بتمضين ثابت ضربي: ($r = 20$) تحدد تشتت ضعف التشتت السابق، و ($r = \frac{1}{2\pi}0$) تصف حلزون يعبر المحور عند القيم (0,1,2,3,...). السمة المحددة لهذه الحلزونات (على عكس الحلزونات الزائدية أو اللوغارتمية) أنها اللفات المتتابعة تبعد عن بعضها مسافات متساوية (مثل الأخاديد على شريط من الفينيل).

حلزون باركر هو حلزون أرشميدي تكونه المجالات المغناطيسية للشمس ويتغلغل في الفضاء.

الحلزونات اللوغاريتمية Logarithmic spirals

الشكل الذي أطلق عليه جيكوب بيرنولي اسم Spiral Mirabilis (‘the miraculous spiral’) (الحلزون المعجزة) معادلته في الإحداثيات القطبية (($r = e^0$)، يكافئها $0 =$ (in r) بدءًا من $1 = 0 = 0, e^0$ يقطع المنحنى المحور القطبي عند 1، ويقطعه مرة أخرى عند ($e^{2\pi(\text{around } 535.5}$)، وعند ($e^{4\pi}(\text{around } 586751.3$) وهكذا. وأيضًا هناك معنى لأن تنعكس الحركة الحلزونية وذلك بإعطاء الزاوية قيم سالبة، وبالتالي يقطع المحور أيضاً عند ($e^{2\pi}(\text{about } 0.002$)، و($e^{-4\pi}(\text{around } 0.000003$) أحيانًا كثيرة بشكل غير منته حيث يقترب أكثر من نقطة الأصل(على الرغم من أنه على عكس الحلزون الزائدي، حيث تقل المسافات بسرعة لدرجة أن الطول بمحاذاة المنحنى من أى نقطة إلى نقطة الأصل يصبح نهائيًا).



لقد ذهل جيكوب بيرنولي من التشابه الذاتي

الذي يشبه الكسريات الموجود في الحلزون اللوغاريتمي: فإذا قمت بتكبيره أو تقليصه بعامل ($e^{2\pi}$) فسينتج نفس المنحنى تمامًا، بل علاوة على ذلك أنك إذا أخذت معكوس الحلزون (الذي يعطى بالمعادلة $r = e^{-0}$) فستكون النتيجة نفسها أيضاً. لقد كان بيرنولي مفتونًا بهذا المنحنى إلى الحد الذي جعله يوصي بنقشه على قبره. (لكن من المؤسف أن النحات لم يكن عالم هندسة فنقش حلزون أرشميدس بدلا منه).

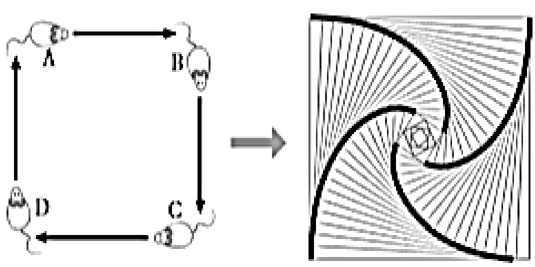
يعرف الحلزون اللوغاريتمي أيضاً باسم الحلزون متساوي الزوايا؛ لأن من ضمن الخواص المحددة له: أن الزاوية بين المماس له ونصف قطره ثابتة وقياسها ($\frac{\pi}{4}$) (أي 45 درجة).

تعطى حلزونات لوغاريتمية بزوايا مختلفة بالمعادلة($r = e^{co}$) و لقيم مختلفة من (c) تنتج زاوية مختلفة ($\tan^{-1}\left(\frac{1}{c}\right)$).

الحلزونات اللوغاريتمية وتقريباتها مثل حلزونات فيبوناتشي شائعة في الطبيعة بدءا من المجرات الحلزونية والتكوينات السحابية، وحتى أصداف حيوان النوتر البحار.

مسألة الفئران الأربعة The problem of the four mice

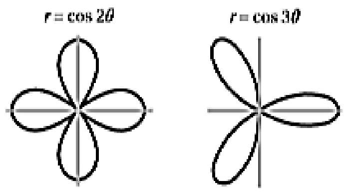
عام 1871 وضع عالم الفلك والرياضيات روبرت كالي ميلر مسألة صعبة في امتحان الحصول على درجة الشرف في علم الرياضيات بجماعة كامبردج الذي عرف عنه سوء السمعة لقد تضمن أربعة فئران (A)، و(B)، و(C)، و(D) تبدأ من الأركان الأربعة لغرفة مربعة الشكل، ويطلق سراحها في نفس الوقت وتركض جميعها بنفس السرعة بحيث يطارد الفأر A الفأر B، يطارد الفأر B الفأر C ، يطارد الفأر C الفأر D، ويطارد الفأر D الفأر A وكان المطلوب في المسألة التنبؤ بالمسار الذي تسلكه هذه الفئران.



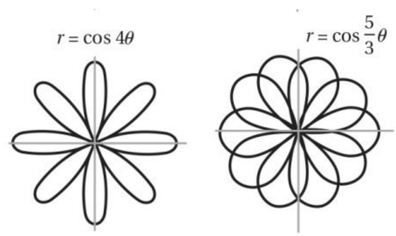
مبدئيا، يركض كل فأر بمحاذاة الحائط، لكن بما أن هدفه يتحرك أيضاً، فسينحرف

عن ذلك المسار. الإجابة هي أن مساراتهم سوف تنتج شكل أربعة حلزونات لوغاريتمية متشابكة تتقارب عند مركز الغرفة، يمكن تعميم ذلك على الغرف مضلعة الشكل. عام 1880 وضع بيير بروكارد في الاعتبار ثلاثة فئران في غرفة على شكل مثلث غير منتظم، فتلاقت الحلزونات الثلاثة في نقطة بروكارد الأولى أو الثانية في المثلث على حسب اتجاه الفئران (انظر مراكز المثلثات).

الزهور Roses



ما الذي قد يجعل عالم رياضيات مؤمن بالخرافات يعتقد أن المعادلة (r = cos 20) سعيدة الحظ؟ في الإحداثيات القطبية تصف هذه المعادلة زهرة برسيم ذات أربع ورقات: رباعية الورقة (quadrifolium)، وهي إحدى أفراد عائلة منحنيات الزهور التي تعطى بالمعادلات (r = cos k0 (or r = sin k0) لقيم مختلفة من (K).

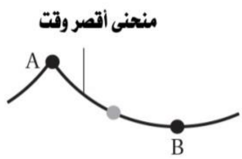


درس هذه المنحنيات لأول مرة الكاهن الإيطالي ليجو جيدو جراندي في مطلع القرن الثامن عشر. ويعتمد المنحنى على الرقم (K): فإذا كان فرديا فسيكون للوردة عدد من البتلات يساوي (K)، بالتالي فإن المعادلة (r = cos 30) تصف زهرة ذات ثلاث بتلات أو ثلاثية الورقة (trifolium)، وإذا كان زوجيًا فسيكون للوردة ليس عدد (K) من البتلات بل ضعف (K)، وفي هذه المرة تتداخل البتلات. وإذا كان (K) عددا نسبيًا وليكن ($k = \frac{a}{b}$) حيث (a) و(b) في أبسط صورة فسيكون لدينا أيضاً حالتان: (a) و(b) كلاهما فردي فسيكون للزهرة عدد بتلات يساوي (a) وسيكرر النمط نفسه عندما تصل (bπ) إلى القيمة (فترة (bπ) وإلا فسيكون للزهرة عدد بتلات (2a) وفترة (2bπ). أما إذا كان (k) غير نسبي مثل ($k = \sqrt{2}$) فإن الزهرة لا تكرر نفسها أبدا ويكون لها عدد لا نهائي من البتلات.

مسألة الوقت الموحد The tautochrone problem

عام 1659 كان كريستيان هوجينز يدرس الخرزات المنزلقة على المنحدرات. بفرض عدم وجود قوى احتكاك، اكتشف منحنى بارز يتميز بأنه (tautochronous) أي "موحد الزمن" فليس مهم الارتفاع الذي يضع عليه الخرز في البداية، فدائما يستغرق نفس الزمن لينحدر إلى القاع، لقد كان المنحنى الذي اكتشفه هوجينز هو الدويري. إذا رسمت نقطة على إطار دراجة فسيكون الدويري هو المسار الذي تسلكه النقطة أثناء سيرك بالدراجة مع اختلاف أن الدويري موحد الزمن يكون مقلوبا كما لو كنت تقود دراجتك نحو السقف

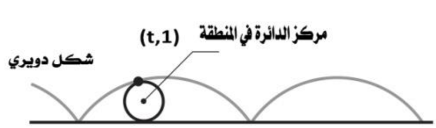
مسألة أقصر وقت The brachistochrone problem



عام 1696 وضع يوهان بيرنولي تحديا لقراء المجلة العلمية (Acta Eruditorum). لنفرض أن لدينا نقطتين (A)، و(B) حيث (A) أعلى من (B) (لكنها ليست فوقها رأسيا) الفكرة هي أن ترسم منحنى من (A) إلى (B) وتسمح لخرزة بالانزلاق عليه. ما المنحنى الذي يجب رسمه إذا كنا نريد للخرزة أن تصل إلى (B) في أقصر وقت ممكن؟ هذه هي مسألة أقصر زمن.

تمكن العديد من علماء الرياضيات من تقديم إجابة لهذا السؤال بما فيهم: نيوتن، وليبنيز، وبرنولي نفسه، بالإضافة إلى أخيه جيكوب. كانت الإجابة هي نفسها إجابة مسألة الوقت الموحد: المنحنى هو الدويري.

الدويريات Cycloids



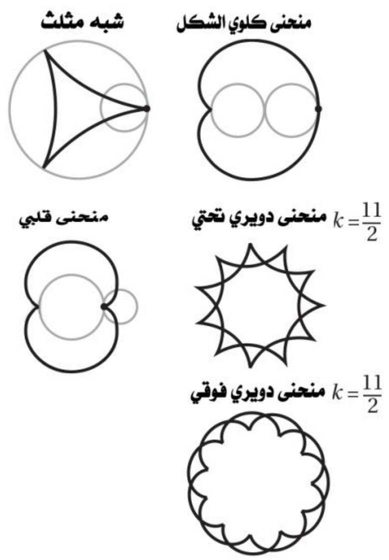
ارسم خطا أفقيا ودحرج دائرة على طول هذا الخط. إذا حددت نقطة على الدائرة، فإن المنحنى المار بها هو الدويري، وهو الشكل المشهور في مسألتي الزمن الموحد، وأقصر زمن، ويوصف في الإحداثيات الديكارتية بالمعادلات الحدودية.

$$x = t - \sin t$$
$$y = 1 - \cos t$$

بزيادة (t) يتحرك مركز الدوائر أفقيّا على طول الخط (y=1)، بالتالي عند زمن (t) يكون المركز عند (t,1) ويكون المنحنى متحركا. الدويريات الزائدية والناقصة تشبه ذلك مع استبدال دوائر بالخط الأفقي.

الدويريات الزائدية والناقصة Hypocycloids and epicycloids

إذا دارت دائرة صغيرة داخل أخرى كبيرة يمكننا تحديد نقطة على الدائرة الصغيرة ونتتبع مسارها، وسيكون المنحنى الناتج دويريّا زائدا. إذا كان طول نصف قطر الدائرة الخارجية ضعف الداخلية، فإن ذلك يسمى ازدواجا طوسيّا؛ حيث أدرك ناصر الدين الطوسي في القرن الثالث عشر أن هذا الدويري الزائد ليس إلا قطعة مستقيمة. أما إذا كان نصف قطر الدائرة الكبيرة ثلاثة أضعاف الصغيرة نحصل على منحنى به أربعة نتوءات (أركان حادة)، وهكذا.

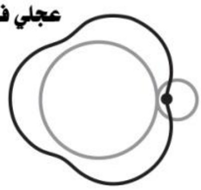


الإنشاء المشابه هو الدويري المكافئ عندما تدور دائرة حول أخرى من الخارج. من الدويريات المكافئة الملاحظة الدويري الذي تكون فيه الدائرتان من نفس الحجم، في هذه الحالة يكون الناتج هو الشكل القلبي (cardioid)، أما إذا كان طول نصف قطر الدائرة الخارجية نصف الداخلية فإن الناتج (nephroid) (شكل الكلية).

بالنسبة لهذين الشكلين، فالأساس هو معرفة النسبة بين نصف قطر الدائرة الكبيرة إلى نصف قطر الدائرة الصغيرة ولتكن هذه النسبة (k)، إذا كانت (k) عددا صحيحا نحصل على منحنى به عدد (k) من النتوءات، أما إذا كان نسبيا وليكن ($k = \frac{a}{b}$) حيث

(a)، و(b) في أبسط صورة سيتقاطع المنحنى مع نفسه ويكون له عدد a) من النتوءات، أما إذا كان (K) غير نسبي، فإن المنحنى لا يتقارب أبدا، وستنتج فوضى خلاقة.

العجلات الدوارة Roulettes



(The spirograph) هي لعبة رياضية اخترعها ديني فيشر في الستينيات لرسم أشكال جميلة وصعبة، ربما تستحوذ هذه اللعبة علماء الهندسة أكثر من الأطفال، وهي تعتمد على مبدأ يشبه مبدأ الدويريات اهتمام، والدويريات الزائدية والدويرات الناقصة: قرص صغير من البلاستيك يلف حول خط، أو دائرة ثابتة أكبر منه، والاختلاف يكون في موضع القلم (بدلا من أن يكون على محيط الدائرة الأصغر، يمكنه أن يناسب ثقبا صغيرا على القرص)، وتسمى المنحنيات الناتجة (trochoids)، و (hypotrochoids) و (epitrochoids) (مشتقة من الكلمة الإغريقية (trochos) التي تعني عجلة)

يمكن توسيع الفكرة بحيث نسمح لسن القلم أن يكون خارج القرص الأصغر على بعد مسافة معينة من المركز (كما يكون عود ثقاب ملتصقا بالقرص).

العجلات الدوارة (Roulettes) هي أعم تلك المنحنيات التي ترسم بهذه الطريقة حيث نحصل عليها بإرفاق نقطة بمنحنى(ليس ضروريا أن تكون واقعة على المنحنى) وتدوير هذا المنحنى حول آخر وتتبع مسار النقطة، على سبيل المثال: تدوير قطع مكافئ حول خط مستقيم وتتبع مسار بؤرته ينتج تسلسلا (سلسال).

السلسال Catenary

ثبت طرفي سلسلة في حائط واسمح بتدلي السلسلة بين طرفيها، ما المنحنى الناتج؟ هذا هو السؤال الذي طرحه

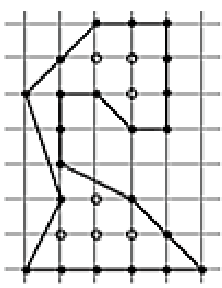
جيكوب برنولي في المجلة العلمية (Acta Eruditorum) عام 1690م (إننا نفترض أن السلسلة مرنة تماما وكثافتها زوجية) وقد سبق أن درس جاليليو ذلك عام 1638، وقال إن المنحنى الناتج هو قطع مكافئ لكنه كان مخطئا كما وضح جوكيم جونجيس عام 1669.

وقد تلقى بيرنولي ثلاث إجابات صحيحة من: جوتفريد ليبنيز، وكريستيان هوجينز، وأخيه يوهان بيرنولي، وكانت نتائجهم ضمن الانتصارات المبكرة التي حققها التحليل التفاضلي. المنحنى الذي يجيب عن هذا السؤال هو السلسال (منحنى السلسلة) الذي يعطى بالمعادلة ($y = \frac{e^x+e^x}{2}$) أو بشكل أدق ($y = \cosh x$)حيث (soch) هي دالة جيب التمام الزائدية.

الهندسة المتقطعة DISCRETE GEOMETRY

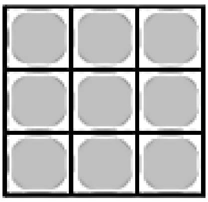
مبرهنة بيك Pick's theorem

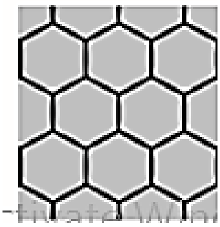
هناك العديد من الطرق لحساب مساحة شكل ما في المستوى. وبصفة عامة كلما ازدادت تعقيد الشكل، ازداد تعقيد الصيغة المستخدمة في حساب مساحته. وقد وجد عالم الرياضيات الاسترالي جورج بيك عام 1899 طريقة أنيقة لحساب المساحات.



ارسم شبكة من النقط بوضع نقطة عند جميع نقاط المستوى التي كلا إحداثييها رقم صحيح. تصلح طريقة بيك لأي شكل يمكن تكوينه عن طريق توصيل هذه النقط معا بخطوط مستقيمة. هناك فقط مكونان: عدد النقط المكونة لحدود الشكل، ولتكن (A)، وعدد النقط المحوطة به وليكن (B). تقول مبرهنة بيك أن المساحة تساوي ($\frac{A}{2} + B - 1$). في المثال الذي في الصورة ($A = 22$)، و(B=7) لذلك تكون المساحة $\frac{22}{2} + 7 - 1 = 17$. وهذا يوفر وسيلة سريعة لحساب مساحات الأشكال المعقدة التي قد تضمن بطريقة أخرى تقسيم الشكل إلى مثلثات، وهي طريقة فيها شيء من الإسهاب.

التعبئة الدائرية لثو Thue's circle packing





لنفرض أن لديك منضدة وحقيبة من العملات المعدنية، وأنك أمام تحدي بأن تقوم برص أكبر عدد ممكن من العملات على هذه المنضدة علما بأن جميعها لها نفس الحجم، ولا يمكن رصها فوق بعضها البعض، لا يمكن سوى أن ترص بشكل مستو على المنضدة، ما هي الاستراتيجية المثلى لعمل ذلك؟

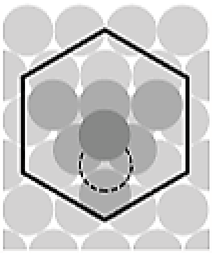
هناك احتمالان واضحان: التعبئة المربعة حيث ترص العملات في صفوف وأعمدة، وكل عملة تمس أربع عملات أخريات. والتعبئة السداسية حيث تمس كل عملة ست عملات أخريات (تؤدي إلى صفوف متداخلة).

للمقارنة بين هذين الأسلوبين نستخدم ما يسمى كثافة التعبئة: نسبة المساحة المغطاة بالعملات من المنضدة. كثافة التعبئة للبلورة المربعة تساوي ($\frac{\pi}{4}$) (حوالي 79٪) وللبلورة السداسية ($\frac{\pi}{\sqrt{12}}$) (حوالي 91٪)، لذلك يبدو الأمر كما لو كانت التعبئة السداسية هي الأفضل، لكن هل نحن متأكدون أننا لم ننس طريقة أخرى تحقق ترتيبا أفضل؟

عام 1831 أثبت كارل فريدريك جاوس أن التعبئة السداسية هي الأكثر إحكاما من بين أنواع التعبئة المنتظمة وهي تلك التعبئات المتماثلة التي تكون على شكل بلورات: أنماط لها تماثل إنتقالي مزدوج، لكن هل من الممكن لبعض الترتيبات الغريبة غير المنتظمة أن تكون أفضل؟ عام 1890 أثبت أكسل ثو أخيرا أنه ليس هناك ترتيبات كهذه. مبرهنة التعبئة الدائرية لثو هي النظير ثنائي الأبعاد لحدسية كيبلر.

حدسية كيبلر (مبرهنة هيل الأولى) The Kepler conjecture (Hales' theorem 1)

عام 1661 تصور يوهان كيبلر نسخة ثلاثية الأبعاد من مبرهنة التعبئة الدائرية لثو: ما هي أفضل طريقة لتعبئة كرات فوق بعضها البعض بحيث تشغل أقل حجم ممكن من الفضاء؟ يمكن لبائعو الفاكهة حول العالم تقديم إجابة لهذا السؤال: أولا إذا قمت برص



طبقة واحدة من الكرات مرتبة بالطريقة السداسية استنادا لتعبئة ثو الدائرية، ثم وضعت طبقة أخرى فوقها بشكل متدرج بحيث تكون الكرات موضوعة في أكثر النقط الممكنة انخفاضا، ثم كرر ذلك.

أكد كيبلر فيما يعرف بحدسية كيبلر أن هذه هو أكثر الترتيبات الممكنة إحكاما بحيث أنه ليس هناك ترتيبات أخرى بنفس الحجم يمكن فيها تعبئة كرات أكثر. لكن بالنظر إلى الأمر بشكل أعمق نجد أن هذا الحل ليس وحيدا: هناك اختياران اعتمادا على ما إذا كنت وضعت الثالثة فوق الأولى مباشرة (التعبئة السداسية) أو بشكل متدرج (تعبئة المكعب متمركز الوجه) على الرغم من أن كلتا الطريقتين لها نفس كثافة التعبئة ($\frac{\pi}{\sqrt{18}}$) (حوالي 74٪).

من ناحية الحدس يبدو واضحا وضوحا كافيا أن هذه الحلول هي الحلول المثلى، إلا أنه قبل عام 1900 لم يكن قد تم التوصل إلى برهان بعد، وألقى ديفيد هيلبرت الضوء على هذا التحدي في مسألته الثامنة عشرة. ولم يحدث قبل عام 1998 أن تم إثبات ذلك، وكان ذلك على يد توماس هيل وتلميذه المتخرج صمويل فيرجوسون، على الرغم من أن هذا البرهان امتد في 250 صفحة، واعتمد في أجزاء كثيرة منه على أكواد كمبيوتر، وبيانات تصل إلى أكثر من 3 جيجابايت، والتي شكلت صعوبة بالغة في فحصها؛ فقد ترك الفريق الذي كان منوطا بمراجعة البرهان بعد أربع سنوات من العمل مصرحين بأنهم على الرغم من تأكدهم بنسبة 99٪ أن البرهان صحيح لا يمكنهم التصديق على ذلك. أما الآن فيعمل هيلز على جيل ثان من البرهان ينوي أن يتحقق من صحته باستخدام البرامج التي تفحص صحة البراهين.

تعبئة الكرات في الأبعاد العليا Hypersphere packing

حلت حدسية كيبلر عام 1998 (على الأقل بنسبة تأكيد 99٪)، لكن نفس المسألة في الأبعاد الأعلى لازالت مفتوحة. فلم يتم التأكد حتى من أن التعبئة الأقرب الكرات في الأبعاد العليا تعطي بلورات منتظمة أكثر من الترتيبات الأقل تماثلا. التعبئة المنتظمة على الأقل يمكن فهمها جيدا حتى البعد الثامن. على الرغم من أننا لا نعرف أفضل طريقة لتعبئة

الكرات في الأبعاد، العليا إلا أنه بفضل مبرهنة مينكوسكي – هلاوكا؛ إذ لدينا فكرة عن كثافة التعبئة التي ستنتج عنها، فهي تحدد التعبئة المثلى في البعد (n)، وستحقق دائما كثافة على الأقل $(\frac{\xi(n)}{2^{n-1}})$ حيث (ξ) هي دالة ريمان – زيتا.

في البُعد الـ 24، يحدث شيئا ملفتا، تظهر طريقة جديدة كليا لتعبئة الكرات تعرف باسم بلورات ليتش نسبة إلى مكتشفها عام 1965. ليس من المؤكد تماما أن هذه هي الطريقة المثلى للتعبئة، إلا أن كلا من هنري كون، وآبرياف كومار عام 2004 وضحا أنه إذا كان من الممكن لأي ترتيب آخر أن يحسن من هذه الطريقة فسيكون ذلك بنسبة ضئيلة، حيث ستزيد كثافة التعبئة فقط (2×10^{-30}) على الأكثر.

حدسية أقراص العسل السداسية (مبرهنة هيلز الثانية)

Hexagonal honeycomb conjecture (Hales theorem 2)

لنفرض أنك تود تقسيم صحيفة كبيرة من الورق إلى خلايا مساحة كل منها 1 سم مربع باستخدام أقل كمية حبر ممكنة لرسم الخطوط. ربما ستكون المحاولة الأولى هي رسم مربعات 1×1 لكن هناك إمكانيات أخرى: مستطيلات، أو مثلثات التبليط، أو مضلعات خماسية غير منتظمة، أو تبليط هيسش أو أي تبليط يستخدم بلاطة واحدة.

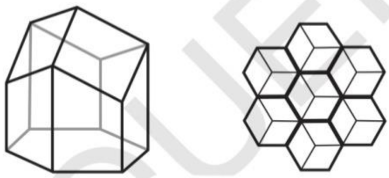
كان من المعتقد لسنوات عديدة أن الطريقة التي تتضمن أقل طول كلي ممكن من الخطوط هي البلورة السداسية، وفي واقع الأمر كان ذلك يعتبر أحيانا بمثابة حقيقة مفترضة ضمنيا على الرغم من أن أحدا لم يثبتها. في عام 1999 قدم توماس هيلز برهانا: نمط المضلع السداسي هو حقا أكثر الأنماط كفاءة، وهذا ما يفسر سبب تخزين النحل للعسل في أنابيب سداسية بدلا من المربعة أو التي مقطاعها على شكل بلاطة هيستش على سبيل المثال.

هذه الخلايا تتطلب أقل كمية شمع من أي أنظمة أخرى لها تبليط مطابق بالنسبة إلى أحجامها . و لهذه القصة بقية مثيرة تتعلق بما لا يعرفه النحل.

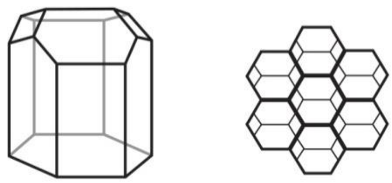
ما لا يـعرفه النحل What bees don't know

عام 1953 نشر لازولو فيجيه توث مقالة بحثية تحت عنوان "ما يعرفه، ومالا يعرفه

النحل" وضح فيها أن تصميم أقراص العسل التي يصنعها النحل ليست مثلى تماما على الرغم من استخدامهم لحدسية أقراص عسل النحل السداسية.



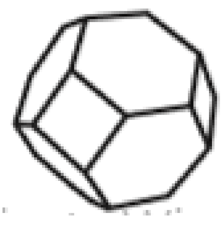
خلية النحل



خلية Fejes Toth

خلايا العسل مفتوحة من أحد الجانبين، وفي الناحية المغلقة هناك طبقتان من الأنابيب السداسية يفصلهما تقسيم شمعي يتكون من أربعة معينات هندسية تغلق كل أنبوب. أوضح فيجيه أنه كمية الشمع المطلوبة للتقسيم قد تكون أقل إذا كانت مكونة من مضلعين سداسيين، ومربعين صغيرين إلا أن تصميم فيجيه استخدم شمعا أقل من ذلك الذي يستخدمه النحل بنسبة (0.35%) فقط. الفوائد التي تعود على النحل من حيث الراحة في الإنشاء وتحقيق استقرار الخلية قد يفسر سبب الاختيار الذي اختاره النحل.

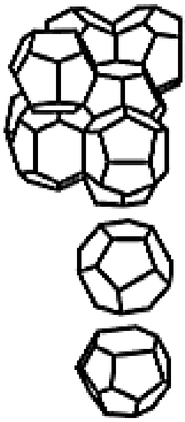
حدسية كيلفن Kelvin's conjecture



أي الأشكال ثلاثية الأبعاد له أقل نسبة بين مساحته السطحية إلى حجمه؟ الإجابة هي الكرة، وهذا ما يفسر سبب كون فقاعات الصابون دائرية.

أصبح هذا السؤال أكثر تعقيدا عندما أردنا أكثر من خلية، وهذا هو السؤال الذي أخذه السيد كيلفن في الاعتبار عام 1887: كيف تقسم فضاء ثلاثي الأبعاد إلى خلايا من نفس الحجم باستخدام تقسيمات لها أقل مساحة سطحية؟ وهذا هو النظير ثلاثي الأبعاد لحدسية قرص العسل السداسي، وقد اعتقد كيلفن أنه وجد الترتيب الأمثل وهو ما يعرف الآن بخلية كيلفن وهي في الأساس ثماني سطوح مقطوع (مجسم أرشميدي مالئ للفضاء) ذو أوجه منحنية قليلا.

رغوة وير- فيلان Weaire-Phelan foam



عام 1993 دحض كل من عالم الفيزياء الإيرلندي دينيس وير وروبرت فيلان حدسية كيلفن، حين اكتشفا بنية جديدة محسنة تفوق خلية كيلفن بنسبة (0.3%). كانت وحدتهم التكرارية مكونة من ثمان مجسمات ثلاثية الأبعاد غير منظمة منحنية قليلا: اثنين من إثني عشري الوجوه (فيه 12 وجه خماسي)، وستة من مجسم له أربعة عشر وجها كل منهما فيه وجهان سداسيان، و 12 وجها خماسيا. احتفي بهذا الاكتشاف في بناء مركز السباحة الوطني للأولمبياد ببكين عام 2008، وقد شرح المعماري كورت واجنر أنهم أنشأوا حجما كبيرا من شكل رغوة وير- فيلان ثم نحتوا الشكل الأساسي للمبنى على هيئة بنية الرغوة. وليس معروفا إذا كانت رغوة وير- فيلان تمثل الحل النهائي لمسألة كيلفن أم لا .

مسألة تلوين الخريطة The map colouring problem

كم عدد الألوان التي تحتاجها لتلوين خريطة بحيث لا تقع دولة على حدود دولة أخرى لها نفس اللون؟ كان هذا هو السؤال الذي طرحه المحامي البريطاني وعالم الرياضيات السيد ألفريد كيمب عام 1879 لم يكن هذا السؤال يهم جغرافيا العالم الحقيقي: أي ترتيب من الأشكال تكون الدول فيه قطعة واحدة متصلة (على عكس الولايات المتحدة الأمريكية التي تمثل فيها كل من آلاسكا وهاواي أجزاء منفصلة) صنف على أنه خريطة. أما الدول التي تتلاقى في نقطة واحدة فيسمح لها أن تأخذ نفس اللون، ولا يستثنى من ذلك إلا الدول التي تفصل بينها خطوط حدودية.

كان حل كيمب أن جميع الخرائط المرسومة على كرة والتي يمكن تصورها يمكن في جميع الحالات أن تلون بأربعة ألوان. ولسوء حظه وجد بيرسي هيود عام 1890 مشكلة:لم يعن ذلك أن الألوان الأربعة غير صالحة بل تحدد فجوة عميقة في حجة كيمب. مع ذلك استطاع هيود عن الطريق التوسع في أفكاره أن يثبت أن خمسة ألوان دائما كافية لذلك.

نظرية الألوان الأربعة The four colour theorem

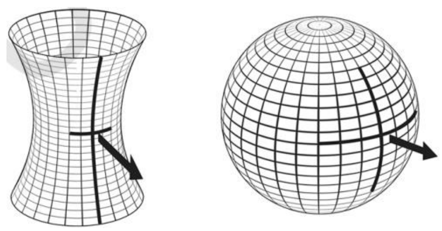
ظلت مسألة تلوين الخريطة مفتوحة لأكثر من 80 عاما: لم يستطع أحد أن يثبت أن أربعة ألوان دائما كافية، ولم يستطع أحد أيضاً أن يبني خريطة تحتاج خمسة ألوان. لم يكن حتى عام 1976 عندما نشر كل من كينيس آبيل، وولفجانج هاكن بجامعة إلينوي برهانهما أن أربعة ألوان حقا كافية دائما.

لم يعتمد برهانهما على البراعة الرياضية فحسب بل تطلب جهدا جبارا، واستغرق ما يقرب من 1000 ساعة من وقت الكمبيوتر، واشتمل على أكثر من 1000 رسم بياني. وقد فسر آبيل قائلا: "ليس هناك إجابة أنيقة بسيطة وعلينا أن نقوم بتحليل حالة هائل لكل إمكانية ممكنة."

الهندسة التفاضلية DIFFERENTIAL GEOMETRY

انحناء جاوس Gaussian curvature

إذا كان لدينا سطح ونريد طريقة ما لقياس مدى انحنائه، فبالطبع قد يكون فيه بعض الأجزاء المستوية، وبعض الأجزاء الأخرى شديدة الانحناء، إذاً فالانحناء ظاهرة محلية.



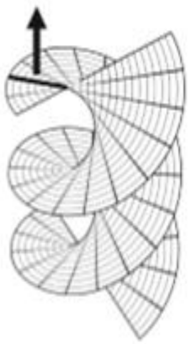
انحناء جاوس هو وسيلة تستخدم التحليل التفاضلي لقياس الانحناء عند نقطة معينة(x)، وينتج عنها رقم ((k(x))، وتعمل عن طريق وضع سهم خارج من السطح عموديّا عند النقطة (x)، وهذا السهم هو متجه عمودي.

إذا كان (if k(x) < 0) فإن السطح ينحني باتجاه المتجه العمودي في اتجاه واحد وبعيدا عنه من الاتجاه الآخر، بمعنى آخر فإن السطح عند (X) يكون على شكل سرج الحصان، ومن الأمثلة على ذلك السطح الزائد ذو الطية الواحدة الذي لديه انحناء سالب في كل المواضع. أما الكرة فهي مثال على سطح له انحناء موجب في كل المواضع (لذلك (k(x) > 0) عند كل نقطة).

إذا بدأنا عند النقطة (x) التي اخترناها ستكون كل النقط منحنية في اتجاه واحد نسبة إلى المتجه العمودي على السطح.

وكما هو متوقع، يمكن أن يكون للسطح انحناء موجب في مواضع وسالب في مواضع ، وصفري في مواضع أخرى إلا أن هناك حدودا لهذه الحالات، وهي تعطى بما يسمى بمبرهنة جاوس- بونيت.

السطوح القابلة للبسط Developable surfaces



إذا كان انحناء جاوس عند نقطة (x) يساوي صفر بمعنى أن ($k(x) = 0$)، فهذا لا يعني أن السطح مستو بالكامل بل يعني أن هناك على الأقل اتجاه واحد يكون فيه السطح مستويا. الاسطوانة لها انحناء صفري عند كل النقط ومثلها جميع الأسطح التي يمكن بسطها في المستوى دون أن تتشوه، وهذا ما يطلق عليه السطوح القابلة للبسط، ومن الأمثلة الأخرى المخروط، والحلزون القابل للبسط.

مبرهنة إجريجوم Theorema Egregium

إذا رسمت خطا مستقيما على ورقة، وتساءلت عما إذا كان الخط الذي رسمته أفقيا أم لا، فستجد أن الإجابة لا تعتمد فقط على الخط بل يتوجب عليك الأخذ في الاعتبار موضع الخط بالنسبة للورقة أو أرضية الحجرة، فالخواص مثل كون الشكل الهندسي أفقيًا أم لا ليست خاصية أصيلة فيها، بل تعتمد على علاقتها بالفضاء المحيط. تقول مبرهنة إجريجوم لجاوس أن انحناء جاوس لا ينطبق عليه ما سبق بل إنه خاصية أصيلة للسطح ولا تعتمد على الفضاء المحيط، وقد اعتقد جاوس أن هذه نتيجة بارزة لأن تعريفه الأصلي كان مفرطا في مراعاة الظروف المحيطة.

الهندسة المحلية والعامة Local and global geometry

هناك عدة طرق لرؤية سطح هندسي، إحداها أن تعير اهتماما شديدا لهندسته التفصيلية

في نطاقات صغيرة. ينتمي الانحناء إلى العالم المحلي، بينما من ناحية أخرى ينتمي مميز أويلر إلى مملكة أخرى ألا وهو الطوبولوچيا ، والتي فيها ينظر للعنصر الهندسي نظرة عامة، ولا يكون لتغيراته في النطاقات الصغيرة علاقة بالموضوع

وفي ظل التطور المذهل ، ارتبطت هاتان الظاهرتان–مع ذلك– ارتباطا وثيقا عن طريق نتيجة أساسية لهندسة القرن التاسع عشر، والتي تعزى إلى كارل فريدريك جاوس وبيير بونيت ألا وهي: مبرهنة جاوس–بونيت.

مبرهنة جاوس-بونيت Gauss–Bonnet theorem

إذا كنا نعمل على سطح (S) له مساحة منتهية، وليس له حواف فبالتالي سيمدنا التكامل بطريقة لأخذ البيانات المحلية عند كل نقطة من نقط (S)، وإيجاد متوسطها للحصول على معلومة واحدة عامة عن السطح كله. تقول مبرهنة جاوس–بونيت أنك عندما تقوم بإجراء التكامل لانحناء جاوس (K) فإن ما سيظهر لن يكون إلا مميز أويلر (مضروبا في الثابت (2π))

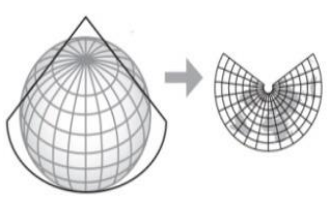
$$\int_s k = 2\pi \times x(S)$$

ولأن مميز أويلر خاصية طوبوبوجية، فهي لا تتأثر بأي قدر من التمديد أو اللي، وهذا يعني أن الانحناء الإجمالي للسطح ثابت كذلك. إذا قمت بحني السطح ودفعه فسيمكنك تغيير انحناء كل نقطة تغييرا كبيرا، إلا أن هذه التغييرات تلاشى بعضها بعضا.

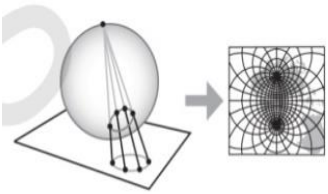
جميع السطوح الملساء التي تتصف بأنها كرة طوبولوچية (مثل سطح الموزة، أو المقلاة) لها مميز أويلر قيمته 2، لذلك عندما تقوم بإجراء التكامل لانحناء جاوس على السطح كله فستكون النتيجة دائما (4π).

المساقط الخرائطية Cartographic projections

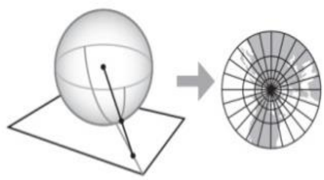
الخريطة الجغرافية مثال جيد لدالة رياضية تحول النقطة من نقطة على الكوكب إلى نقطة على ورقة، لكننا نرغب في ألا تفسد هذه الدالة جغرافية الأرض، وبالتالي هناك متطلبات إضافية عديدة يمكن إضافتها.



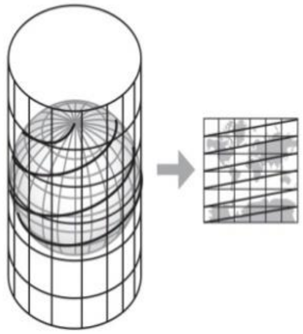
1- الخرائط متساوية الأبعاد يجب أن تحافظ على المسافة بين أي نقطتين، وللأسف الخريطة المستوية لا يمكن أن توفر ذلك.



2- الدوال متساوية المساحة تحافظ على نسب المساحات، ومن أمثلة ذلك مسقط ألبيرس الذي يتكون عن طريق أخذ مخروط من الكرة الأرضية، وإسقاط النقط عليه.



3- الدوال التشكيلية تحافظ على الزوايا بالتالي فإن الخطين المتلاقيين على الأرض يتلاقيان بنفس الزاوية على الخريطة، ومن الممكن رسم خريطة تشكيلية للأرض باستخدام على سبيل المثال الإسقاط المجسمي.

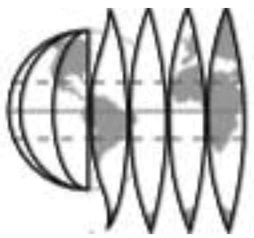


4- المسقط المزولي: يحافظ على المسار الأقصر بين أي نقطتين (لكن ليس طول المسار)، وهذا يعني أنه يمثل الدوائر الكبيرة الموجوة على السطوح الكروية بخطوط مستقيمة في الصفحة (يمكن تمثيل أنصاف الكرات فقط)

5- الخط الثابت: هو مسار حلزوني حول الكرة يتحدد فقط بالاتجاه الزاوي الابتدائي، وقد كانت مهمة تاريخيا في الملاحة. إسقاطات ميركاتور هي خرائط تمثل هذه الخطوط الثابتة كخطوط مستقيمة، وهي تتكون بلف الكرة الأرضية داخل اسطوانة وإسقاط النقط للخارج.

ليس هناك خريطة يمكنها أن تحتوى على أكثر من سمة من السمات السابقة، وهناك بعض التشوهات الحتمية، والسؤال الذي يسأله راسم الخريطة يكون عن الأولويات التي يراعيها.

الخرائط المتساوية الأبعاد للأرض Isometric maps of the earth



تكون الخريطة الأرضية متساوية إذا كانت المسافة بين أي نقطتين على الأرض هي نفسها المسافة بين أي نقطتين على الخريطة (بالطبع بعد تحجيمها بشكل مناسب)، إلا أن هذه الخرائط حتى ولو كانت لأجزاء من الكرة الأرضية يستحيل رسمها على ورقة مسطحة، وهذه إحدى نتائج مبرهنة إجريجوم. لأن الانحناء خاصية أصيلة فلابد أن يحافظ عليه بأي دالة متساوية (مثل تلك التي تحول النقطة من نقطة على الكوكب إلى نقطة على الخريطة)، بالتالي فإن الخريطة متساوية الأبعاد للأرض لابد أن تكون منحنية مثل الكرة الأرضية وليست مستوية. بالنسبة لنطاق صغير مثل مدينة مثلا لن يكون هناك مشكلة لأن الأرض تكون تقريبا مسطحة

هناك طرق لتقريب الخرائط المتساوية للكرة الأرضية كلها مثل خريطة قشرة البرتقال، لكن بشكل أساسي العقبة ليست ثابتة.

الإسقاط المجسمي Stereographic projection

الإسقاط المجسمي هو وسيلة لرسم خريطة كرة على مستوى مسطح، والفكرة كالآتي: ضع الكرة على المستوى، ثم بمعلومية النقطة (x) على الكرة ارسم شعاعا من القطب الشمالي خلال الكرة ويمر بـ (x). المكان الذي يقطع فيه الشعاع المستوى هو موقع (x) على الخريطة، أما النقطة الوحيدة التي لا تظهر على الخريطة ستكون نقطة القطب الشمالي، وستكون الخريطة الناتجة خريطة تشكيلية بمعنى أن الزوايا الموجودة على الخريطة تساوي نظيراتها على الكرة.

بالإضافة إلى علم رسم الخرائط، يستخدم الإسقاط المجسمي في علم الرياضيات أيضاً، بدءا من مستوى الأعداد المركبة ، وبإجراء الخطوات العكسية للخطوات السابقة نحصل على كرة ريمان التي تمثل فيها نقطة القطب الشمالي نقطة جديدة تعرف باسم (النقطة عند مالانهاية) (وهذا يقدم وسيلة مرضية لعرض الخرائط التشكيلية للأعداد المركبة، والتي تعرف باسم تحويلات موبيوس).

الطوبولوجيا TOPOLOGY

الطوبولوجيا Topology

تركز الهندسة التقليدية على الأجسام الجاسئة مثل الخطوط المستقيمة، والزوايا، والمنحنيات التي تعطى بمعادلات دقيقة، بينما تدرس الطوبولوچيا بنيًّا على مستوى أعلى من التجريد. الخواص الطوبولوچية لشكل ما هي تلك الخواص التي تتحمل أي كمية من التمديد أو اللي (ليس القطع ولا اللصق). على سبيل المثال:يمكن للمكعب أن يهرس حتى يصبح كرويا بينما الطارة (التي على شكل الكعك المحلى) لا يمكنها ذلك؛ لذا طوبولوچيا الدائرة والمكعب متكافئان بينما الطارة مختلفة عنهما، بالمثل الحرف (c)، والحرف (L) متكافئان طوبولوچيا لكنهما يختلفان عن الحرف (B).

كما سميت "الهندسة المطاطية" rubber sheet geometry وتحولت الطوبولوچيا إلى موضوع مستقل بذاته في بدايات القرن العشرين، على الرغم من أن جذورها ترجع إلى حل ليونارد أويلر لمسألة جسور كونسبيرج السبعة عام 1763، أما الآن فتتضمن الطوبولوچيا العديد من الأجسام الكبيرة محل البحث، وخريطة مترو أنفاق لندن هي مثال على التمثيل الطوبولوچي حيث إنها تهمل الهندسة الدقيقة للمسافات والاتجاهات، لكنها تمثل بدقة العوامل، مثل: ترتيب المحطات، وتقاطعات خطوط قطارات المترو.

شريط موبيوس Möbius strip

خذ شريطا مستطيلا من الورق، وقم بليه نصف لي قبل لصق طرفيه معا وسوف تحصل على شريط موبيوس الذي اكتشفه أوجست فيرديناند موبيوس عام 1858، والشيق في هذا السطح أنه ليس له إلا جانب واحد (أو في لغة المصطلحات الرياضية: سطح غير قابل للتوجيه)، وقد ظهر كثيرا في أعمال الفنان موريتس كورنيليس إيشر (M.C Escher). ويستمد هذا الشريط أهميته الرياضية من اعتماد الكثير من الإنشاءات الطوبولوچية تعتمد عليه، ولا سيما المستوى الإسقاطي

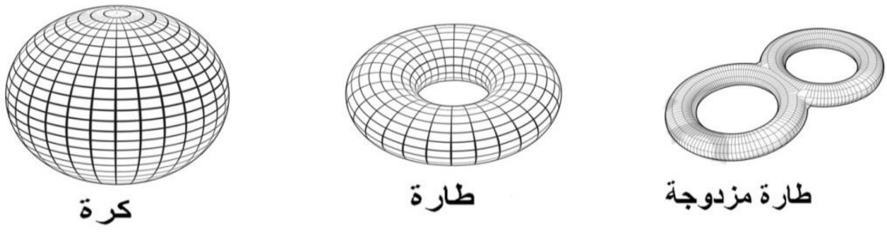
الحقيقي وزجاجة كلاين، حيث إن كليهما يمكن إنشاؤه عن طريق لصق حافة الشريط بنفسها بإحدى طريقتين.

السطوح القابلة للتوجيه Orientable surfaces

إذا نظرت فقط إلى جزء صغير من كرة، فستجد أنها تشبه كثيرا المستوى ثنائي الأبعاد (بالفعل هذا هو منظور معظم البشر في معظم حياتهم)، ولا تتضح طبيعتها الكروية العامة إلا بالتصغير. وهذا في الأساس هو تعريف السطح: حول جميع النقط هناك رقعة من مستوى (ربما منحني قليلا)، والسؤال هو ما هي الأشكال العامة الممكنة الأخرى التي يمكن ترقيعها معا بهذه الطريقة؟ المستوى الكامل نفسه هو أحد هذه الأمثلة، لكن التركيز الأكبر من نصيب السطوح المغلقة التي لها مساحة منتهية (وتكون على هيئة قطعة واحدة).

في الطوبولوجيا نهتم فقط بالسطوح الطوبولوجية المختلفة: السطح على شكل ثمرة الموز على سبيل المثال سوف يصنف على أنه كرة، بينما الطارة (التي على شكل الكعك المحلى) هي سطح جديد لا كروي، كما أن الطارة المزدوجة مختلفة أيضاً، بالتالي هناك طريقة للحصول على سطوح مختلفة طوبولوجيا بشكل حقيقي: ابدأ بكرة واستمر في عمل ثقوب (وهو ما يكافئ عمل عرى handles).

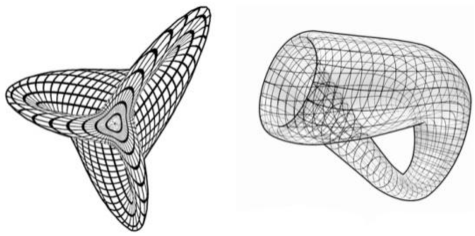
عدد الثقوب يطلق عليه طراز السطح ، لكن هذه الطريقة لا تمثل كل الإمكانات: هناك أيضاً السطوح غير القابلة للتوجيه.



السطوح غير القابلة للتوجيه Non-orientable surfaces

تعريف السطح هو تعريف محلي: هو شيء يبنى من رقعتين من مستوى ثنائي الأبعاد، وأحيانا يخرج علماء الرياضيات بإمكانيات غير متوقعة. فيمكن ترقيع جزأين من المستوى

معا بطريقة مترابطة داخليا، لكن لا يمكن تمثيلها تمثيلا دقيقا في الفضاء ثلاثي الأبعاد، وتلك هي السطوح غير القابلة للتوجيه.

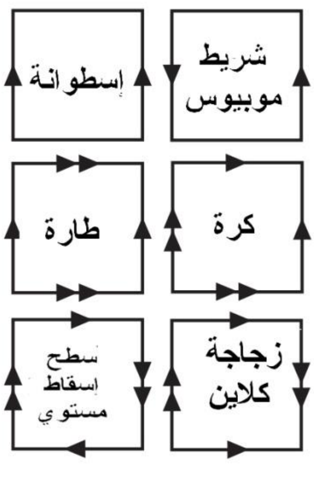


من الناحية العلمية تعريف السطح غير القابل للتوجيه كالتالي: إذا وضعت علامة مائية على سطح فسيمكنها الإنزلاق حتى تعود إلى موضع البداية، لكن كصورة معكوسة للصورة الأصلية، وهذا يعني أن السطح لابد أن يحتوي على شريط موبيوس في مكان ما.

للحصول على السطوح غير القابلة للتوجيه، نبدأ بكرة ، ونقوم بقطع شرائح طولية نخيطها على هيئة شرائط موبيوس بمحاذاة حوافها. أول سطحيين غير قابليين للتوجيه، نحصل عليها بهذه الطريقة هما: المستوى الإسقاطي الحقيقي وزجاجة كلاين.

المستوى الإسقاطي الحقيقي وزجاجة كلين

Real projective plane and Klein bottle



ابدأ بمربع من الورق وارسم أسهم بمحاذاة الحواف اليمنى واليسرى بحيث تشير إلى الأعلى، فإذا لصقت هذه الحواف معا جاعلا الأسهم تنطبق فستحصل على اسطوانة.

ابدأ مجددا لكن هذه المرة بجعل الأسهم في اتجاهات متعاكسة، ولصق الحواف جاعلا الأسهم رؤوس الأسهم تتلامس الآن فينتج شريط موبيوس.

للحصول على سطح بلا حواف، فستحتاج أيضاً إلى توصيل الضلعين الباقيين: خذ ترتيب الاسطوانة، وأضف زوجا من الأسهم في الأعلى والأسفل كلاهما يتحرك من اليسار إلى اليمين وسوف يكون لديك نمط الطارة. يمكن

أيضاً الحصول على دائرة بهذه الطريقة (بالطبع، من وجهة نظر الطوبولوچيا فإن مخروطين متصلين من ناحية قاعدتيهما يكونان كرة).

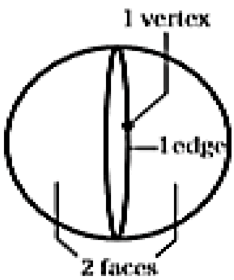
أما الترتيبان الممكنان الباقيان فيمثلان المستوى الإسقاطي الحقيقي، وزجاجة كلاين. إذا حاولت الحصول على هذه الأشكال باستخدام ورقة فستجد أنها لا يمكن أن تتكون في فضاء ثلاثي الأبعاد دون أن تقطع الورقة نفسها.. في زجاجة كلاين الصحيحة لا يحدث ذلك، إلا أن السماح به يتيح ببناء نماذج جميلة جدا من زجاجة كلاين والمستوى الإسقاطي الذي يمثل مثالا مهماً للفضاء الإسقاطي.

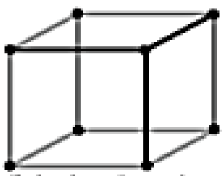
تصنيف السطوح المغلقة The classification of closed surfaces

1- يمكن إنشاء السطوح القابلة للتوجيه عن طريق إضافة عرى (handles) للكرة للحصول على طارة ثم طارة مزدودة و.. هكذا.

2- يمكن تشكيل السطوح غير قابلة للتوجيه عن طريق البدء بكرة وتخييط شرائط موبيوس: أولا ينتج مستوى إسقاطي حقيقي ثم زجاجة كلاين و.. هكذا.

ماذا يحدث إذا بدأنا بطارة وقمنا بتخييط شريط موبيوس بها؟ في سحر الرياضيات، لا يبدو أن هذا يعطينا شيئا جديدا: هذا سطح غير قابل للتوجيه مثله كمثل كرة فيها 3 شرائط من شرائط موبيوس مخيطة فيها.





Cube has 8 vertices, 12 edges, and 6 faces

إحدى أهم النتائج الأولى للطوبولوچيا تصنيف السطوح المغلقة (الذي جعله برهانا رسميا اعتمادا على أعمال آخرين قبله) تقول أنه ليس هناك سطوح أخرى. جميع الأسطح تنتمي إلى عائلة من العائلتين السابقتين.

يمكن جعل هذه النتيجة أكثر دقة باستخدام مميز أويلر.

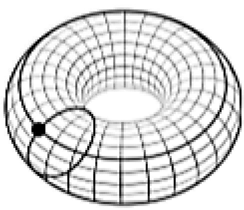
صيغة أويلر للمجسمات Euler's polyhedral formula

ابدأ بكرة، وقم بتحديد علامات بعض النقط (أو رؤوس) عليها وليكن عددها (V) الآن وصل بينهم ببعض الحواف وليكن عدد (E) من الحواف. (المعلومات المختفية هنا: أن جميع الرؤوس يجب أن يتفرع منها مسارين على الأقل، والحواف لا يمكن أن تنتهي أو تتلاقى إلا عند الرؤوس). تلك العملية تقسم الكرة إلى مناطق (أوجه) مختلفة، وليكن عددها (F)، أبسط مثال هنا به رأس واحدة، وحافة واحدة تمر حول الكرة مرة واحدة وتقسمها إلى وجهين (V=1, E=1 and F=2).

عام 1750 لاحظ ليونارد أويلر أن أعداد الرؤوس والحواف والأوجه في جميع الأمثلة يحقق العلاقة (V-E+F=2). (وهو ما يعرف أحيانا بصيغة أويلر: كان أويلر صاحبا لصيغ كثيرة) لكنه لم يستطع أن يقدم دليلا على أن هذا هو ما يحدث دائما لكن آندرين ماري ليجندر تمكن من ذلك عام 1794.

ولابد أن ينطبق هذا على جميع الأسطح التي تكافئ الدائرة من الناحية الطوبولوچية: لذا لابد أن تتبع رؤوس وحواف وأوجه جميع المجسمات ثلاثية الأبعاد هذه الصيغة).

صيغ المجسمات على السطوح Polyhedral formulas on surfaces



لا تصلح صيغة أويلر للمجسمات للتطبيق على السطوح غير الكروية طوبولوچيا مثل الطارة، لكن يمكننا تطبيق نفس الأسلوب مع الانتباه إلى أن الحواف تقسم السطح فعليا إلى أوجه لا يمكن فردها بحيث تكون مستوية بدلا من الأنابيب. بالنسبة للطارة يحدث ذلك برأس واحدة وحافتين، وهو ما ينتج عنه سطح واحد؛ لذلك في هذه الحالة (V-E+F=0). وهذه الصيغة الجديدة صحيحة لأي ترتيب من الرؤوس والحواف والأوجه في الطارة، وبالقيام بشيء نفسه لطارة مزدوجة نجد أن (V-E+F=-2).

هناك نتائج مشابهة تصلح للسطوح غير القابلة للتوجيه أيضاً، ففي المستوى الإسقاطي الحقيقي نحصل دائما على (V-E+F=1)، وفي زجاجة كلاين نحصل على (V-E+F= 0).

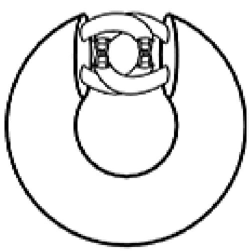
خصائص أويلر Euler characteristic

تقول صيغ المجسمات على السطوح أنه إذا كان لديك سطح ما وقمت بتقسيمه إلى رؤوس وحواف فإن الرقم (V-E+F) سيكون دائما نفس الرقم، وهذا الرقم الثابت يسمى مميز أويلر للسطح، ويرمز له بالرمز الإغريقي (X)؛ لذا إذا كان (S) كرة، و(T) طارة، و(D) طارة مزدوجة فسيكون $X(S) = 2, X(T) = 0 \text{ and } X(D) - 2$.

بالنسبة للسطوح قابلة التوجيه، إذا كانت (X) كرة ولها مقابض عددها (g) (بمعنى أن طراز (x) هو (g))، بالتالي $(X(X) = 2 - 2g)$، وللسطوح غير قابلة التوجيه، إذا كانت (Y) كرة ولها عدد (n) من شرائط موبيوس فسيكون $(X(Y) = 2 - n)$.

لكن مميز أويلر بمفرده لا يمكنه تحديد السطح المغلق (كل من الطارة وزجاجة كلاين معامل أويلر لها يساوي صفر)، لكن تصنيف السطوح المغلقة ينص ضمنا على أن جميع السطوح تحدد تماما بمعلومتين: ما إذا كانت قابلة للتوجيه أم لا، ومميز أويلر لها.

كرة ألكساندر القرنية Alexander's horned sphere



من الناحية الطوبولوچية يتضح أن عددا كبيرا من الأشكال المختلفة ظاهريا متكافئة: الموزة تكافئ الكرة، وفنجان الشاي يكافئ الطارة، وحرف (M) يكافئ الرقم (8). في عام 1924 قام عالم الطوبولوچيا جيمس ألكسندر ببذل أقصى جهده باكتشافه للكرة القرنية. يعتبر هذا الشكل من الناحية الطوبولوچية كرة، لكنه حقا مثالا عن باثولوچيا الفصائل، وهو يتكون من طارة مأخوذ منها شريحة، وترتيب غير منته من القرون المتشابكة على جانبي الشريحة، وتظل القرون مقسمة ومتشابكة حتى أطرافها النهائية وهو ما يكون غبار كانتور. وقد كان ذلك صادما لعلماء الطبولوجيا في بدايات القرن العشرين والذين اعتقدوا أن أي كرة لابد أن تقسم الفضاء ثلاثي الأبعاد بشكل هش إلى جزأين بسيطين: داخلي وخارجي، لكن الجزء الخارجي للكرة القرنية معقد بشدة؛ حيث يمكن رسم حلقات عديدة مختلفة غير منتهية لا يمكنها الوصول من جهة إلى أخرى.

متعددات الشُعب Manifolds

السطح هو عبارة عن عنصر يمكن تقسيمه إلى رقع تشبه جميعا جزء من مستوى (بشكل آخر: يعرف باسم الفضاء الإقليدي ثنائي الأبعاد)، وفكرة متعدد الشعب ترفع ذلك إلى أبعاد أعلى، فمتعدد الشعب (Manifold) هو عنصر يمكن تقسيمه إلى رقع تشبه فضاء إقليدي من البعد (n)). (مدى قرب التشابه بين ذلك هو ما يفرق بين الطوبولوچيا البسيطة والطوبولوچيا التفاضلية)؛ لذا فإن: المتشعب أحادي البعد هو منحنى ، وثنائي الأبعاد سطح، وهناك مثالا واضحا على متعدد الشعب ثلاثي الأبعاد : هو الفضاء الثلاثي الأبعاد نفسه، لكن هناك أمثلة أخرى أيضاً، فالكرة الثلاثية هي النظير ثلاثي الأبعاد للكرة الثنائية، وهي الموضوع الذي تتناوله حدسية بوانكارية الشهيرة والتي حلت عام 2003. هناك ثلاثة متشعبات مغلقة يمكن تصنيفها تماما بمبرهنة.

مبرهنة التركيبات الهندسية لثلاثة من متعدد الشُعب

The geometrization theorem for 3-manifolds

تماما كما يصف تصنيف السطوح المغلقة كل متشعب – ثنائي، مغلق، فإن مبرهنة التركيبات الهندسية الحديثة تصنف بشكل كامل المتشعبات–الثلاثية المغلقة (مغلق يعني أن له حجم منته وليس له حواف).

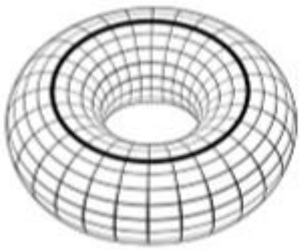
عام 1982 وضع ويليام ثورستون الحاصل على ميدالية فيلدز قائمة بثمانية أنواع خاصة من المتشعب 3 التي اعتقد أنها يجب أن تكون الأشكال الأولية التي تتكون منها الأشكال الأخرى، وقد وصف كيفية تقطيع أي متشعب 3 مغلق إلى قطع اعتقد هو أن كل منها يجب أن يكون واحدا من أنواعه الثمانية الخاصة. متشعبات ثورستون الثمانية تتوافق مع مفاهيم مختلفة للمسافة، وأشهرها: المستوى الإقليدي، والمستويات الزائدية، وكذلك الهندسة الكروية، وتأتي الخمسة الباقية من مجموعات معينة من مجموعات لاي.

أوضح ثورستون أن العديد من المتشعبات–الثلاثية تحقق حدسية التركيبات الهندسية لكنه لم يستطع إثبات ذلك على الإطلاق. عام 2003 استطاع بيرلمان أن يقدم برهانا

باستخدام طرقه عالية التطور من الأنظمة التحريكية وتكملة على عمل ريتشارد هاميلتون، ثم ظهر حدسية بوانكارية المشهورة كنتيجة لذلك.

الاتصال البسيط Simple connectedness

إذا رسمت حلقة على سطح كروي عادي، فإنها سوف تنكمش تدريجيا حتى تصبح نقطة واحدة، وهذا هو تعريف الاتصال البسيط، وهذه الخاصية تميز بين الكرة والطارة حيث أن الحلقة المحيطة بثقب لا تنكمش حتى تصبح نقطة.

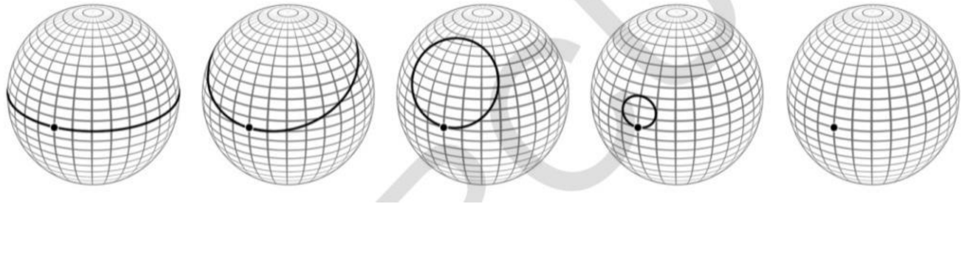


وبعض السطوح الأخرى مثل المكعبات متصلة اتصال بسيط أيضاً، وكنها مكافئات للكرة، وبالتالي فإن من الناحية الطوبولوچية الكرة هي السطح ثنائي الأبعاد الوحيد المتصل، وقد عالجت حدسية بوانكارية التساؤل عما إذا كان ذلك صحيحا أيضاً للمتشعبات الثلاثية بدلا من السطوح.

حدسية بوانكاريه (مبرهنة بيرلمان)

Poincaré conjecture (Perelman's theorem)

أول من وضع هذه الحدسية عام 1904 جولز هنري بوانكاريه (الآن ترقت إلى درجة المبرهنة)وهي تحتل مكانا بارزا في الطوبولوچيا الحديثة. لقد كان معروفا لعدة سنوات قبل ذلك أن الكرة هي السطح الوحيد المتصل اتصالا بسيطا، وكان سؤال بوانكارية عما إذا كان ذلك سيظل صحيحا إذا نظرنا إلى بعد واحد أعلى. كان من المعروف أن الكرة الثلاثية (الكرة ثلاثية الأبعاد المناظرة للكرة العادية) متصلة اتصالا بسيطا، وينقص ذلك أن نعرف ما هي ثلاثيات التشعب الأخرى غير المكتشفة التي يمكن أن تكون كذلك أيضاً لنستبعدها.



تقول حدسية بوانكارية أن الكرة الثلاثية هي حقا ثلاثي التشعب الوحيد المتصل اتصالا بسيطا، وقد استرعت اهتماما واسعا في علم الرياضيات، وتحدت محاولات عديدة لإثباتها خلال القرن العشرين، وكذلك في علم الفيزياء حيث يمكن تفسيرها على أنها تضع حدودا للشكل الممكن للعالم. عام 2000 وضعت هذه الحدسية ضمن مسائل المليون دولار لمعهد كلاي، وأثبتها أخيرا عام 2003 جريجوري بيرلمان كنتيجة لمبرهنة التركيبات الهندسية. وقد رفض بيرلمان الجائزة النقدية وكذا ميدالية فيلدز.

مثلية التوضع Homotopy

في الأبعاد الأخرى غير الثلاثية، يحتاج سؤال بوانكارية إلى إعادة الصياغة قليلا؛ فالاتصال البسيط لم يعد كافيا، ونظيره المناسب هو ما يسمى مثلية التوضع، وهي ما يحدد ما إذا كان متشعبا ما به أي ثقوب. تهتم مثلية التوضع بما يحدث عندما تدرج قشرة كروية -بدلا من رسم حلقة- داخل المتشعب، والسؤال المهم هو ما إذا كان بإمكان هذه القشرة أن تنكمش إلى نقطة أم سيعرقلها ثقب ما كما حدث للحلقة على سطح الطارة. ويمكن استخدام كرات مختلفة الأبعاد لاكتشاف الثقوب مختلفة الأنواع.

المتشعب الذي لا يحتوي على أي ثقوب استنادا إلى هذه الطريقة يطلق عليه كرة مثلية التوضع، واستنادا إلى حدسية بوانكارية المعممة، فإن الكرة العادية هي الكرة الوحيدة مثلية التوضع في كل بُعد.

حدسية بوانكارية المعممة The generalized Poincaré conjecture

قد نعتقد بسذاجة أنه كلما زادت الأبعاد التي ننظر فيها أصبحت الرياضيات أكثر إبهاما، لكن ذلك غير صحيح؛ ففي نواحي عديدة نجد أن الفضاء ثلاثي ورباعي الأبعاد أكثر صعوبة في تحليله من الأفضية ذات الأبعاد الأعلى.

تقول حدسية بوانكارية المعممة أن في كل بعد تكون الكرة العادية هي الكرة الوحيدة مثلية التوضع، وقد أجاب تصنيف السطوح المغلقة بالفعل عن هذا السؤال بالإيجاب في حالة الأبعاد الثنائية، وعام 1961 أثبت ستيفن سامبل أن حدسية بوانكارية المعممة صحيحة

في كل الأبعاد بدءا من البُعد الخامس فأعلى تحت فرضيات إضافية، وقد منحه هذا الإنجاز ميدالية فيلدز عام 1966م. في نفس السنة استطاع ماكس نيومان أن يبين أن تلك الفرضيات الإضافية ليست ضرورية وبذلك أكمل الإثبات، وتبقت الأبعاد الثلاثية والرباعية، وقد حل مايكل فريدمان (الذي حصل على ميدالية فيلدز عام 1986م) الأبعاد الرباعية، وبالتالي كانت حدسية هنري بوانكارية في الأبعاد الثلاثية هي آخر ما تم حله، وكان ذلك على يد جيورجي بيرلمان عام 2003.

الطوبولوجيا التفاضلية Differential topology

التعريف الطوبولوچي للمتشعب يسمح بالوجود العادل لبعض العناصر الغريبة. لكن في الطوبولوچيا التفاضلية تصبح هذه المتطلبات أكثر إحكاما، فلا يسمح إلا بالمتشعبات الناعمة؛ لذلك لم تعد الاعتلالات مثل ندفة ثلج كوخ، ولا كرة ألكسندر القرنية موجودة، وبالمثل الفكرة الطوبولوچية لمتشعبين متكافئين هي إلى حد ما خشنة؛ حيث تتيح لأحدهما السحب واللي؛ ليتحول إلى الشكل الآخر بطرق عنيفة. المفهوم الأفضل إذا هو التكافؤ التفاضلي: حيث يعتبر متشعبين ناعمين أنهما متشعب واحد إذا كان أحدهما يمكنه أن يتحول إلى الآخر بنعومة (أساسا بطريقة يمكن تفاضلها)، لكن هذا يضيف إمكانية بارعة: قد يتضح أن المتشعبين الناعمين متطابقين طوبولوچيا ومختلفين تفاضليا، أو يمكن القول بطريقة أخرى أن متشعب طوبولوچي ضمني واحد يمكنه دعم بنيتين ناعمتين متعارضتين، وهذه ظاهرة يصعب تخيلها ليس فقط؛ لأنها لا تحدث فعلا في الأبعاد الأحادية أو الثنائية أو الثلاثية (لذلك يبقى تصنيف السطوح المغلقة ومبرهنة التركيبات الهندسية للمتشعبات الثلاثية المغلقة صالحا على مستوى المتشعبات الناعمة) بل إنها تحدث في الأبعاد الرباعية بأسلوب مثير.

الفضائيون من البُعد الرابع Aliens from the fourth dimension

جميع هواة الخيال العلمي يعلمون أن البُعد الرابع هو مكان جنوني. في الثمانينيات اكتشف علماء الطوبولوچيا التفاضلية أن الحقيقة أغرب من الخيال العلمي. في الأبعاد الأحادية والثنائية والثلاثية الفرق بين المتشعب، والمتشعب الناعم ليس مهم بوجه خاص: فكل متشعب طوبولوچي يمكن تحويله إلى متشعب طوبولوچي ناعم، والمتشعبات

الناعمة المتكافئة طوبولوچيا تكون متكافئة تفاضليا أيضاً. أما بدخول البُعد الرابع ينهار هذا النظام المريح بشدة.عام 1983 اكتشف سيمون دونالدسون باستخدام أفكار من نظرية ينج- ميل مجموعة كبيرة من المتشعبات الرباعية التي لا يمكن جعلها ناعمة: فهي لا تسمح بأي بنية تفاضلية على الإطلاق، والأسوأ من ذلك أن أبسط متشعب رباعي، وهو الفضاء رباعي الأبعاد نفسه، قد وقع تحت هذه الطائلة حيث اكتشف مايكل فريدمان متشعبا يطابق الفضاء الرباعي الأبعاد طوبولوچيا لكنه مختلف عنه تفاضليا، وفي عام 1987 بين كليفورد تاوبس أن هذا الوضع أكثر ضراوة من ذلك: حيث يوجد عدد غير منته بشكل لا يحصى من المتشعبات التي ينطبق عليها ذلك حيث أن جميعها غير متكافئة تفاضليا ، وأطلق عليها الأفضية رباعية الأبعاد العجيبة.

الكرات العجيبة Exotic spheres

الأفضية رباعية الأبعاد العجيبة حقا شاذة: في كل الأبعاد الأخرى هناك نسخة واحدة ناعمة من الفضاء الإقليدي.

أما في الأبعاد الأعلى من 4 وكذلك في الأبعاد الرباعية تبقى فكرة أن المتشعبات الناعمة لا يمكن التمييز بينها طوبولوچيا لكنها مختلفة تفاضليا صحيحة (مع ذلك، على عكس أدغال البُعد الرابع، ففي الأبعاد الأعلى يمكن أن يوجد فقط عدد منته من المتشعبات العديدة المتعارضة)، وهذا يحدث حتى مع الكرات: عام 1956 اكتشف جون ميلنور عن طريق التجارب باستخدام الكواترينون quaternions[1] متشعب سباعي الأبعاد غريب الأطوار، ولكنه تذكر فيما بعد قائلا: "في أول الأمر اعتقدت أنني سوف أعثر على مثال مضاد لحدسية بوانكارية المعممة في البُعد السابع". لكن بمزيد من الفحص، لم يكن ذلك صحيحا؛ فقد كان متشعبه قابلا للتحول إلى كرة ولكنه لا يفعل ذلك بنعومة، فمن الناحية الطوبولوچية كان كرة ، أما من الناحية التفاضلية لم يكن كذلك، وكانت هذه هي أول كرة عجيبة.

(1) عدد مركب على الصيغة $w + xi + yj + zk$ حيث w , x , y , z أرقام حقيقية بينما i , j , k وحدات تخيلية تحقق شروطا معينة.

حدسية بوانكارية الملساء في الأبعاد الرباعية

The smooth Poincaré conjecture in four dimension

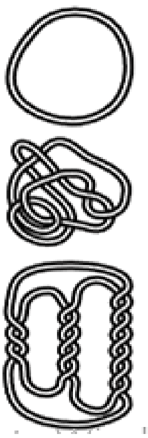
في الأبعاد الأحادية والثنائية والثلاثية ليس هناك كرات عجيبة: هي تلك المتشعبات الناعمة التي تعتبر كروية من وجهة النظر الطوبولوچية، ولكنها ليست كذلك من وجهة النظرالتفاضلية. عام 1963 طور كل من جون ميلنور، ومايكل كيرفير نظرية (surgery theory): هي طريقة فعالة لمعالجة المتشعبات الأعلى في الأبعاد عن طريق القطع واللصق، وقد كان ذلك طفرة تكنولوجية مكنتهم من تحديد عدد الكرات العجيبة الموجودة في كل بعد – خمسة أبعاد– على الأقل بدقة، والإجابة هي أنه لا يوجد أي كرات عجيبة في الأبعاد الخماسية أو السداسية، لكن ما اكتشفها ميلنور في الأبعاد السباعية كانت واحدة ضمن عائلة مكونة من 27، أما في الأبعاد الأعلى فتتراوح الإجابة بين عدم وجود كرات عجيبة إلى وجود عدد اعتباطي لا نهائي من العائلات.

لكن كما في حالة الأفضية العجيبة رباعية الأبعاد، فالفضاء رباعي الأبعاد غريب بشكل فريد، فحتى الوقت الذي نكتب فيه ليس معروفا بعد إذا كان هناك أي كرات عجيبة في البُعد الرابع أم لا، ومن المتصور حتى أنه يمكن أن يكون هناك عدد لا نهائي التأكيد على عدم وجود كرات عجيبة في الفضاء رباعي الأبعاد (بمعنى أن كل كرة من الناحية الطوبولوچية تكون كذلك من الناحية التفاضلية أيضاً) تعرف باسم حدسية بوانكارية الملساء في الأبعاد الرباعية، وتعتبر مسألة بالغة الصعوبة.

نظرية العُقد KNOT THEORY

العُقد الرياضية Mathematical knots

كانت نظرية الدوامة الخاصة بالذرة فكرة في فيزياء القرن التاسع عشر، وجاء فيها أن الذرات عبارة عن عُقد في الإيثير السائد، على الرغم من أن عمر هذه النظرية كان قصيرا إلا أنها حدت بالسيد كيلفن، وبيتر تيت إلى بدء أبحاث رياضية حول العُقد والتي لا تزال تشكل مجالا قائما للبحث إلى يومنا هذا.



في وجهة نظر عالم الرياضيات، العُقدة هي قطعة معقودة من خيط لابد أن تكون نهايتيه مربوطتين لتكوين حلقة معقودة. عندما يكون هناك أكثر من خيطين يسمى رابطا ، وطبقا لنظرية الدوامة فإن عقدتين تمثلان مركبا كيميائيا إذا كانتا في الأساس نفس الشيء، وعلى الرغم من أن هذه الفكرة ظلت لمدة طويلة غير محتفى بها إلا أن السؤال الذي تطرحه سؤال طبيعي جدا. أن تكونا "في الأساس نفس الشيء" هو مفهوم طبولوچي : يقال لعقدتين أنهما متكافئتان إذا كان يمكن جذب ومد إحداهما بحيث تتحول إلى شكل الأخرى (بالطبع دون قطع أو لصق).

الهدف الأساسي لهذه النظرية هو إيجاد وسيلة لتحديد ما إذا كانت عُقدتان متكافئتين أم لان وهي مسألة عميقة خادعة. يشرح زوج بيركو مدى صعوبة هذه المسألة حتى في حالة العُقد سهلة المقارنة، فحتى أبسط عقدة على الإطلاق، العُقدة المحلولة، وهي حلقة بسيطة غير معقودة يمكن أن تكون مموه بمهارة، ويسمى ذلك مسألة حل العُقد. تقدم خوارزمية (هاكن) حلا نظريا لمسألة العُقد، لكن مازال البحث قائما لإيجاد ثوابت عقدية أكثر فعالية.

جداول العُقدة Knot tables

في القرن التاسع عشر بدأ بيتر بيت في وضع قائمة بجميع العُقد الممكنة طبقا لأعداد التقاطع فيها، وبحلول عام 1877 كان تيت قد وضع في هذه القائمة عقد تصل عدد التقاطعات فيها إلى 7 تقاطعات، وقد شاركه في هذا المشروع ريفرند توماس كيركمان وهو كاهن إنجليزي، وشارلز ليتيل من ولاية نبراسكا بالولايات المتحدة الأمريكية الذين تواصلا معه عن طريق البريد الإلكتروني وتمكنوا جميعا من تصنيف عقد ذات ثمانية وتسعة وعشرة تقاطعات، وقطعوا شوطا في العُقد ذات أحد عشر تقاطع، واستمرت المجهودات خلال القرن العشرين إلا أن بزيادة هذه القائمة وزيادة تعقيد تلك العُقد أصبح تحديد العُقد التي هي في الحقيقة نفس الشيء تحديا هائلا.

عام 1998 نشر كل من هوستي، وذيستليثوايت وويكس مقالة تحت عنوان "العُقد

المليون وسبعمائة وواحد ألف وتسعمائة وست وثلاثون الأولى" والتي اشتملت على التصنيفات كاملة حتى 16 تقاطع. وعلى الرغم من أنه حتى الآن ليس هناك قائمة مكتملة أكثر من ذلك معروفة بعد إلا أن بعض العائلات الفرعية تم تصنيفها حتى 24 تقاطع مما جعل الجداول الحالية تصل إلى أكثر من (500,000,000,000) عُقدة ورابطة مختلفة.

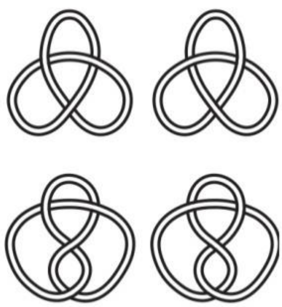
زوج بيركو The Perko pair

10_{161}

10_{162}

من أقدم جداول العُقد التي وضعت الجدول الذي وضعه شارلز ليتل عام 1885، وقد عرض قائمة من 166 عقدة ذات 10 تقاطعات وكان من بينها الثنائي (10_{161})، و(10_{162}). الأجيال التالية من منظرين العُقد بنوا على هذا الأساس، ولمدة 100 عام تقريبًا ظل (10_{161})، و(10_{162}) جنبا إلى جنب في كل كتالوج وكتاب لم يكن حتى عام 1974 عندما استطاع المحامي بمدينة نيويورك والرياضي الهاوب كينيث بيركو أن يضع يده على موطن الخطأ: العُقدتان هما في الواقع نفس العُقدة ولكن بشكل مختلف.

العُقد اللا انطباقية chiral knots



تأتي عُقدة البرسيم ذات التقاطعات الثلاثة (trefoil) كأبسط العُقد بعد العُقدة المحلولة (unknot)، وهي في الواقع تأتي على صورتين: اليسارية، واليمينية، وكذلك تأتي العُقدة التي على شكل الرقم 8 في شكلين معاكسين لبعضهما كصورة المرآة، إنه ليس واضحا بأي حال من الأحوال لكن هاتين العُقدتين يتضح أنهما متكافئان.، فبالقليل من المط يمكن أن تتحول العُقدة اليسارية التي على شكل الرقم 8 إلى يمينية. هل الأمر كذلك أيضاً بالنسبة لعُقدة البرسيم؟ الإجابة هي لا؛ فعُقدة البرسيم عُقدة لا انطباقية مما يعني أن الصورتين مختلفتين بينما العُقدة على شكل الرقم 8 عُقدة

انطباقية، وبالنسبة للعُقد الأكثر تعقيدا يصبح من الصعب جدا تحديد ما إذا كانت انطباقية أم لا.

ولنظرية العُقدة العديد من التطبيقات الأوسع في مجال العلوم كما أن الانطباقية لها أهمية فيزيائية. وفي مجال الكيمياء تكون بعض المركبات لا انطباقية مما يعني أن جزيئاتها تأتي على شكلين يساري ويميني، ويكون لهما خصائص كيميائية مختلفة.

ثوابت العُقدة Knot invariants

عام 1923 وجد جيمس ألكسندر طريقة لتعيين تعبيرات جبرية لكل عقدة. الخاصية المهمة هي أنه إذا كانت عُقدتان متكافئتين (مهما بدتا مختلفتين) فستعبر عنهما نفس كثيرة الحدود، وكانت كثيرة حدود ألكسندر هي أول ثابت لعقدة، أما عقدة البرسيم فكثيرة الحدود المعبرة عنها هي $(t^{-1} - t)$، والعقدة على شكل الرقم 8 $(-t^{1} + 3 - t)$، وهذا يوضح أنهما مختلفتان قطعيا؛ ليس هناك أي مناورات تؤدي إلى تحويل أحدهما إلى الأخرى، ومع ذلك فإن هذا الأسلوب لم يكن مثاليا، (-3,5,7) فعقدة بريتزل لها كثيرة حدود 1، وهي نفسها كثيرة الحدود المعبرة عن العُقدة المحلولة على الرغم من أنهما ليستا متكافئتين.

كثيرة حدود جونز The Jones polynomial

كانت كثيرة حدود ألكسندر هي أفضل وسيلة جبرية للتمييز بين العُقد لمدة 50 عاما، لكن عام 1984 لاحظ فوغان جونز صلة غير متوقعة بين عمله في التحليل وبين نظرية العُقدة، وقد تبلورت رؤيته في ثابت عقدة جديد، وعلى الرغم من أنه لم يكن مثاليا بعد إلا إنه فاق ثابت ألكسندر في العديد من المميزات، ولاسيما أنه بإمكانه تمييز الانطباقية دائما، عُقدة فكثيرة الحدود المعبرة عن عُقدة البرسيم اليمينية هي $(s + s^{3} - s^{4})$، بينما اليسارية لها كثيرة الحدود $(s^{-1} + s^{-3} - s^{-4})$.

لقد شق اكتشاف جونز طريقه سريعا في تطبيقات أوسع في مجال العلوم ولا سيما بين جزيئات الحمض النووي العقدية في مجال الكيمياء الحيوية. وقد بنى على كثيرة حدود جونز منذ عمله بحثا عن ثوابت أكثر فعالية، وفي عام 1993 صاغ ماكسيم كونتسيفيتش كيانا

رياضيا جديدا يعرف باسم تكامل كونتسيفيتش، وهو عنصر معقد جدا (حتى تكامل كونتسيفيتش للعُقدة المحلولة يصعب تدوينه). ومن المسائل المهمة التي لا تزال مفتوحة في نظرية العُقدة هي حدسية فاسيليف (Vassiliev's conjecture) التي تفترض ضمنا أن تكامل كونتسيفيتش يمكنه بالفعل التمييز بين أي عقدتين.

خوارزمية هاكن The Haken algorithm

عام 1970 حل ولفجانج هاكن مسألة تحديد ما إذا كانت العُقدتان متكافئتين أم لا، وكانت خطته في ذلك هي قلب المسألة كلها رأسا على عقب؛ فبدلا من مقارنة عقدتين تطفوان في الفضاء نظر إلى مكملات تلك العُقد: الأشكال ثلاثية الأبعاد التي تتبقى عند إزالة العُقد من المواد المحيطة تاركة ثقوب على شكل العُقد (كما لو كان قد وضع خيوط معقودة بارتخاء في صندوق من الزجاج ثم أزال الخيوط)، وبتحديد إذا كان الشكلان طبولوجيا هما نفس الشيء، فسيسري ذلك على العُقد أيضاً، وقد طور هاكن طريقة لتحليل المكملين إلى مراحل قبل تحديد إذا ما كانا نفس الشيء أم لا، وقد كانت فكرة نيرة إلا أن خوارزمية هاكن لازال بها بعض الفجوات عندما انتقل إلى اهتمامات أخرى (لاسيما مبرهنة الألوان الأربعة) إلا أن سيرجي ماتفيف عام 2003 استطاع أن يسد الفجوة الأخيرة.

على الرغم من أن خوارزمية هاكن انجاز رائع لكنها قد تكون صعبة جدا لدرجة أنها لا يمكن تنفيذها على كمبيوتر في العالم الحقيقي؛ لذا تستخدم الآن خوارزميات أكثر عملية في جدولة العُقد، وفي وسائل نحو مسائل حل العُقد.

ومن المساوئ الأخرى لهذه الخوارزمية أنها ليس لها أي بصمات؛ فهي من الناحية النظرية بإمكانها تقديم إجابة بنعم أو لا على التساؤل عما إذا كانت عُقدتان محددتان هما نفس الشيء لكنها لا تعرف أو تصف عقد منفردة؛ لذلك نحتاج إلى ثوابت العُقد.

مسألة حل العُقد The unknotting problem

الهدف العام لنظرية العُقدة هو معرفة ما إذا كانت عُقدتان متكافئتين أم لا، والسؤال الأبسط هو تحديد ما إذا كانت عُقدة معطاة مكافئة للعُقدة المحلولة (الحلقة المسطحة غير

المعقودة) أم لا. وقد اكتشفت خوارزميات أكثر سهولة من خوارزمية هاكن تحديدا من أجل تعرُّف ترتيبات العُقد المحلولة، لكن حتى هذه الخوارزميات ليس معروفا إذا كان يمكن تسريعها بدرجة كافية ليصبح لها استخدامات عملية في العالم الواقعي بمعنى، ما إذا كان يمكن إجابة هذا السؤال في وقت كثير الحدود (راجع أطروحة كوبهام). من المعروف أن مسألة حل العُقد تندرج تحت المسائل التي صعوبتها من التصنيف (NP)، لذلك فإن إجابة إيجابية لمعادلة (P=NP) ستحسم الأمر.

الهندسة اللاإقليدية NON-EUCLIDEAN GEOMETRY

هندسة زائدية Hyperbolic geometry

في القرن التاسع عشر اكتشف كارل فريدريك جاوس، ونيكولاي لوباشفسكي و جانوس بوليا كل على حدة نظاما هندسيا جديدا ممكنا وغير مألوف يسمى الهندسة الزائدية، وهو يحافظ على مكونات الهندسة الإقليدية مثل: المسافات، والزوايا، والمساحات لكنها تتحد بطرق جديدة وغير متوقعة. أما مسلمة التوازي فتفشل في هذا النظام بشكل حاسم، وكانت تاريخيا هي القوة الدافعة وراء هذا الاكتشاف. وأصبح مجموع زوايا المثلث أقل من ط (180)، والأكثر غرابة من ذلك أن معرفة زوايا المثلث (A,B,C) فقط تمكنك من حساب المساحة: ($\pi - (A + B + C)$) (وهو شيء لا يمكن تصوره في الفضاء الإقليدي حيث توجد مثلثات متشابهة ، وبأي مساحة ترغب فيها).

كيف لنا أن نتخيل فضاء غريب كهذا؟ تم إنشاء نماذج مختلفة من المستويات الزائدية؛ لاسيما قرص بوانكاريه. أما نموذج مينكوسكي فهو هندسة زائدية على أحد نصفي سطح زائدي ذي طيتين. إن هذا يلعب دورا مركزيا في النسبية الخاصة في الفيزياء، فمعظم الموضوعات المهمة في الهندسة الإقليدية لها نظائر في الهندسة الزائدية. هناك أيضاً سطوح زائدية، ومتشعبات، وحساب مثلثات زائدي (فيه دالة جيب التمام الزائدية ودالة الجيب الزائدية)، ونظرية متطورة للتبليط في الأفضية الزائدية على سبيل المثال.

قرص بوانكاريه Poincaré disc

قرص بوانكاريه هو نموذج للهندسة الزائدية لم يكتشفه هنري بوانكاريه بل أوجينو بيلترامي عام 1868، وهو إنشاء لمستوى زائدي مصمم ليكون سهل الفهم بالنسبة لنا – نحن أهل الهندسة الإقليدية– وهو يقع في دائرة تمثل الحج غير المنته للمستوى، وبالنسبة للمراقب من الداخل تبدو حافة الدائرة بعيدة بشكل غير منته، أما من الخارج تبدو المسافات أكثر انضغاطا كلما اقتربت من الحافة. "الخطوط المستقيمة" في هذا النموذج هي أقواس الدائرة التي تتلاقى مع الحد في زوايا قائمة، بالإضافة إلى الأقطار التي تمر مباشرة خلال الدائرة. وقد تحرى الفنان موريتس كورنيليس إيشر نموذج القرص للهندسة الزائدية في العديد من رسوماته.

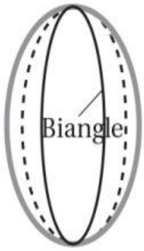
الهندسة الإهليلجية Elliptic geometry

بمجرد اكتشاف الهندسة الزائدية ضربت هيمنة الهندسة الإقليدية في مقتل، وتعالت الأصوات التي تتساءل:هل يوجد أي هندسات ممكنة أخرى؟ في حقيقة الأمر نحن نعيش على واحدة من أربع هندسات لمدة الأربعة بلايين سنة الأخيرة. الهندسة الزائدية تخترق مسلمة التوازي عن طريق وجود أكثر من خط واحد يمر خلال أي نقطة بحيث يكون موازيا لخط معلوم أما الهندسة الإهليلجية فهي تقول أنه ليس هناك خطوط متوازية على الإطلاق؛ فكل خطين يتلاقيان (مسلمات إقليدس الأخرى يجب أن تعدل قليلا لتسمح بذلك لكن ثوابتها لازالت متحققة).

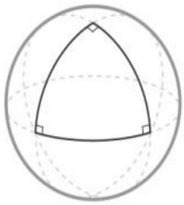
هناك أشكال رائعة مختلفة من الهندسة الإهليلجية إلا أن أكثرها شيوعا هي المجموعة الكروية التي يكون فيها الفضاء عبارة عن سطح كرة، وتلعب الدوائر الكبيرة دور الخطوط المستقيمة: أكبر دوائر تستوعبها الكرة (وهي تنشأ من مستويات تمر بمركز الكرة، وهي الخطوط الجيوديسية للكرة).

في الهندسة الإهليلجية مجموع قياسات زوايا المثلث أكبر من 180 (لكن أصغر من 540)، ومنها المثلث ثلاثي الزاوية القائمة.

الزوايا الثنائية Biangles



في الهندسة الإهليلجية لا توجد خطوط متوازية؛ فكل خطين لابد أن يتلاقيا. في هذا السياق تكون قمة المثلث كأكثر المضلعات الأساسية مستولى عليها بوساطة زاوية ثنائية ذو وجهين

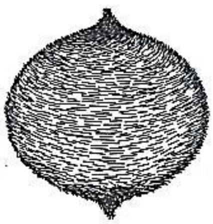


في الهندسة الكروية لابد أن تكون زاويتي ثنائي الزاوية متساويتين، وتتحدد مساحته ببساطة عن طريق جمع الزاويتين

يفسر ثنائي الزاوية أن في الهندسة الإهليلجية لم تعد نقطتان تحددا خطا وحيدا بل إن هناك عدد لا نهائي من الخطوط التي يمكنها ربطهما معا، بالمثل على كوكب الأرض ليس هناك مايسمى أقصر مسار بين القطبين الشمالي والجنوبي.

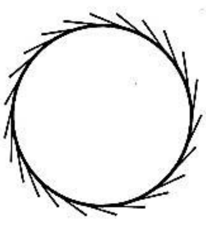
الطوبولوجيا الجبرية ALGEBRAIC TOPOLOGY

نظرية الكرة المشعرة Hairy ball theorem



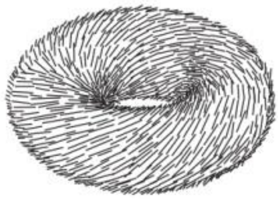
لا يمكنك تمشيط كرة

في أواخر القرن التاسع عشر اكتشف هنري بوانكاريه ما أصبح معروفا بمودة باسم مبرهنة الكرة المشعرة.



بفرض أن لديك كرة ينبت فيها الشعر عند كل نقطة، ونريد أن نمشطه بشكل مستو وناعم حول الكرة (بمعنى آخر لدينا حقل متجه على الكرة) تقول مبرهنة بوانكاريه أنك مهما حاولت تحقيق ذلك فسوف تترك دائما على الأقل شعرة وهذه نظرية طوبولوچية لذلك فإن أي سطح مكافئ للكرة طوبولوچيا (مثل كلب على سبيل المثال) لا يمكن أبدا أن يمشط تمشيطا مثاليا.

الطارات المشعرة وزجاجات كلاين Hairy tori and Klein bottles



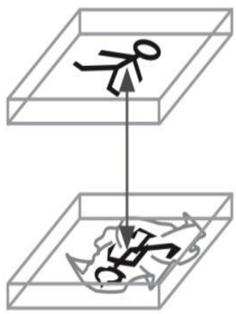
تثير نظرية الكرة المشعرة تساؤلا: ما الأشكال التي يمكن تمشيطها؟ بالنزول إلى البعد الأقل مقدار بعدا واحدا نجد أنه من السهل تمشيط دائرة مشعرة دون ترك شعرة. وعلى الرغم من أن الكرة لا يمكن تمشيطها إلا أن هناك سطحايان ثنائيا الأبعاد يمكن تمشيطهما، والمثال الوحيد القابل للتوجيه هو الطارة المشعرة أما الطارة المزدوجة والطارة الثلاثية فلا يمكن. زجاجة كايلن المشعرة هي السطح غير القابل للتوجيه الوحيد الذي يمكن تمشيطه، لذلك فإن المستوى الإسقاطي الحقيقي على سبيل المثال لا يمكن تمشيطه.

ويتغير ذلك تماما عند زيادة الأبعاد مقدار بعد واحد؛ حيث يمكننا تمشيط كرة مشعرة ثلاثية الأبعاد(النظير ثلاثي الأبعاد للكرة المألوفة)، وبالمثل يمكننا تمشيط كرة خماسية الأبعاد، وسباعية الأبعاد، وبصفة عامة أي كرة لها في الأبعاد (n) حيث (n) عددا فرديا، أما الكرات في الأبعاد (n) لا يمكن تمشيطها أبدا إذا كانت (n) عددا زوجيا.

النقط الثابتة هندسيا Geometric fixed points

لنفرض أن لديك ورقة موضوعة بشكل مستوى في أرضية صندوق وقمت بسحقها، أو طيها، أولفها ثم ألقيت بها في الصندوق مرة أخرى فإن مبرهنة النقطة الثابتة لبراور تؤكد أن لا بد أن تكون هناك نقطة واحدة على الأقل على الورقة تقع مباشرة فوق موضعها الأصلي، وهناك مثال آخر هو الذي ألهم براور بملاحظة ما لاحظه: إذا قمت بتقليب القهوة الموجودة في فنجان بأي مقدار فسيكون هناك جزيء من المشروب يقع تماما في موضعه الأصلي، وتسمى تلك النقط نقط ثابتة هندسيا، وتؤكد مبرهنة براور أن في العديد من الأحوال سوف يكون هناك نقطة كهذه.

مبرهنة النقطة الثابتة لبراور Brouwer's fixed point theorem



تقوم فكرة مبرهنة النقطة الثابتة لبراور على أنك إذا أخذت جسما هندسيا وقمت بتشويهه بطريقة ما، فسوف يكون هناك على الأقل نقطة ما موقعها لم يتغير. إلا أن هناك بعض المحاذير.

أولا في مثال الورقة التي في الصندوق، لا يمكنك تمزيقها، فالمبرهنة سوف تنتهك إذا مزقت الورقة نصفين وقمت بتبديليهما، يعني ذلك رياضيا أن الدالة لابد أن تكون متصلة.

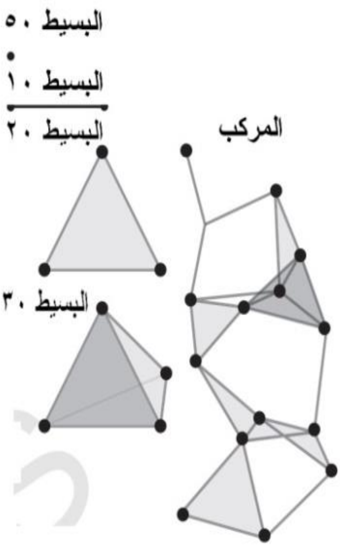
ثانيا يجب أن تعيد الورقة كلية إلى الصندوق (وألا تسكب القهوة). مثال آخر: إذا كنت تحمل خريطة متجولا في المدينة فسوف يكون هناك دائما نقطة على الخريطة تحتل تماما الموقع الذي تمثله، أما إذا أخذت الخريطة خارج المدينة لن يبقى ذلك صحيحا؛ لأنه يعني أن من المؤكد أننا نتحدث عن دالة من الفضاء (X) في نفسها.

النقطة الأخيرة أكثر براعة. إذا وضعنا في اعتبارنا المستوى غير المنته كليا، وقمنا بإزاحته وحدة لليمين فلن تكون هناك أي نقطة ثابتة، فالمبرهنة تتحقق فقط إذا كان (X) طوبولوجيا قرصا أو كرة ، وهذا قد يكون خط مستقيم في الأبعاد الأحادية، أو قرص في الأبعاد الثنائية، أو كرة في الأبعاد الثلاثية فأكثر، وفي كل حالة لابد أن يتم تضمين حدود (X)، فإزالة الحافة يجعل المبرهنة لا تتحقق.

وما سبق معا نجد أن: إذا كان لدينا دالة متصلة ($f: X \longrightarrow X$) من كرة في نفسها، فلابد أن يكون هناك نقطة ما ثابتة أي نقطة بحيث تكون ($f(x) = x$).

الطوبولوجيا الجبرية Algebraic topology

توصل علماء الطوبولوچيا في مطالع القرن العشرين إلى لغة جديدة مبسطة للهندسة مبنية على المبسطات (simplices) حيث:



- المبسط صفر هو نقطة منفردة.
- المبسط الأحادي هو قطعة مستقيمة محدودة بنقطتين.
- المبسط الثنائي هو مثلث محدود بثلاث قطع مستقيمة، وثلاث نقط.
- المبسط الثلاثي هو رباعي سطوح محدود بأربعة مثلثات، وست قطع مستقيمة، وأربع نقط.
- المبسط الرباعي هو خماسي رباعي الأبعاد (راجع المجسمات رباعية الأبعاد) محدود بخمسة من رباعي السطوح، وعشرة مثلثات، وعشر قطع مسقيمة، وخمس نقط وهكذا.

هذه التسلسلات من الأرقام يمكن قراءتها من مثلث باسكال).

أما المجمع (complex) فهو شكل يتكون من لصق أي عدد من المبسطات معا بطول حوافها، وما لاحظه سولمون ليفستشز ، وآخرون هو أن البيانات المطلوبة هنا تكون أقل ما يمكن، بالتالي تظهر قواعد جبرية ضمنية معينة، وبجمع وطرح المبسطات تنتج مجموعات تماثل، ومجموعات التماثل(homology groups) هذه تحمل تشفيرا لقدر كبير من البيانات عن الشكل.

التثليث Triangulation

لا تبنى الكرة من الأجزاء الأساسية مثل المبسطات، وبالسماح للمبسطات بالانحناء، والتمدد عند إنشائها تنشأ مجموعة متسعة جدا من الأشكال، وعندما يمكن تفكيك شكل ما إلى هذه المبسطات الممدة نقول أن هذا الشكل تم تثليثه. يمكن تثليث الكرة إلى أربعة مثلثات، وفي حقيقة الأمر كل متشعب في الأبعاد الثنائية والثلاثية يمكن تثليثه، ولهذا السبب نجد أن مجموعات التماثل أداة فعالة جدا في مسائل الهندسة العملية مثل التصوير

الطبي بينما الفضاء رباعي الأبعاد مكان غريب، وبعض المتشعبات الرباعية لا يمكن تثليثها على الإطلاق، أما في الأبعاد الأعلى فالإجابة غير معروفة.

مميز أويلر هو أحد أمثلة البيانات القيمة التي تنشأ من التثليث.

الهندسة الجبرية ALGEBRAIC GEOMETRY

المتغيرات varieties

الطريقة القياسية لوصف منحنى هي استخدام معادلة تتضمن عادة كثيرة حدود، وهذا يمدنا مباشرة بوجهتي نظر: المنحنى الهندسي، وكثيرة الحدود الجبرية، فمعادلة الدائرة هي ($x^2 + y^2 = 1$)، فإذا كتبنا ($p(x, y)$) لترمز إلى كثيرة الحدود ($x^2 + y^2 - 1$) بالتالي فإن الدائرة هي مجموعة من النقط حيث تتلاشى (p) بمعنى أن الدائرة هي مجموعة جميع الأزواج المرتبة (x, y) بحيث تكون ($p(x, y) = 0$)، وهذه هي الفكرة الأساسية للمتنوعة التي هي عبارة عن مجموعة من النقط التي تتلاشى عندها كثيرة حدود ما (أو مجموعة من كثيرات حدود). والعمليات الهندسية مثل لصق المتنوعات معا، أو البحث عن مناطق تداخلها تناظر عمليات جبرية معينة على كثيرات الحدود، وهذه هي نقطة بداية موضوع الهندسة الجبرية التي هدفها الأساسي هو فهم المتنوعات باعتبارها ظواهر عامة بدلا من التركيز على أمثلة فردية (مثل القطوع المخروطية).

الهندسة الجبرية Algebraic geometry

كل متنوعة هندسية تؤدي إلى بنية جبرية مناظرة، تسمى حلقة كثيرة حدود (polynomial ring)، وفهم الهندسة فهما جيدا يتطلب معرفة بعلم الجبر والعكس صحيح، فهذا الهجوم ذو الحدين قد أثمر عن نتائج خصبة خلال القرن العشرين.

الإطار الابتدائي للهندسة المعاصرة هو الأعداد المركبة، حيث تؤكد المبرهنة الأساسية في الجبر أن كل متنوعة لها نصيب كامل من النقط، إلا أن الهندسة الحديثة تطبق هذه التقنيات في مدى واسع من الإطارات الأخرى.

موضوع المعادلات الديفونتية القديم يبحث عن حلول صحيحة لكثيرات الحدود، وقد أدخلت الهندسة الجبرية وسائل جديدة إلى هذا البحث فنتج عن ذلك الهندسة الديفونتية، وكان إثبات ويل لمبرهنة فيرما الأخيرة ناتجا بارزا لهذا التجارب الرائع مابين الهندسة ونظرية الأعداد.

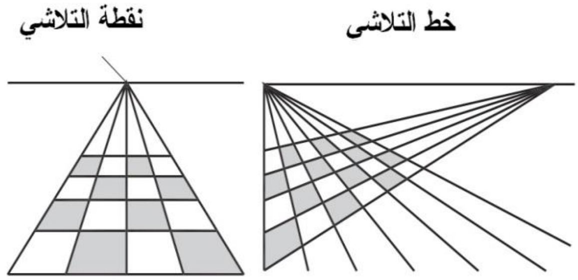
كثيرات الحدود لها معنى في كل مكان يمكن فيه القيام بعملية الجمع، والطرح، والضرب مما يفتح أسئلة هندسية في مواضع غير متوقعة مثل الحقول المنتهية. وقد كشفت حدسيات ويل أسرار الهندسات المنتهية. أما كيفية تداخل الهندسة الجبرية، والطوبولوچيا الجبرية فهذا هو الموضوع الذي تتناوله حدسية هودج، وهو من أعمق الأسئلة المتعلقة بهذا الموضوع.

الهندسة الجبرية نظرية فعالة للغاية لكنها تعمل على مستويات عالية من التجريد لدرجة مخيفة، والتي طورت في عناصر جروتينديك للهندسة الرياضية الجبرية (Grothendieck's Éléments de Géométry Algébrique).

المنظور Perspective

كيف يمكنك تمثيل فضاء ثلاثي الأبعاد في مستوى ثنائي الأبعاد؟ يرجع تاريخ هذه المسألة إلى رسامين الكهف في العصر الحجري. بالطبع هناك العديد من العقبات الفنية في طريق التمثيل الطبيعي تماما، ومن الأشياء التي يهتم بها علم الرياضيات هي الطريقة التي تبدو عليها الأشياء البعيدة أصغر من الأشياء القريبة، وقد كانت هناك محاولات بسيطة لاستيعاب هذه الظاهرة بصفة عامة لكنها بدت غريبة وخاطئة مثل المنظور الملتوي في الفن المصري القديم. وقد حقق فنانو النهضة الإيطالية أمثال جيوتو، وبرانليستشي باكتشاف طريقة استخدام نقط التلاشي لرسم الأجسام القصيرة.

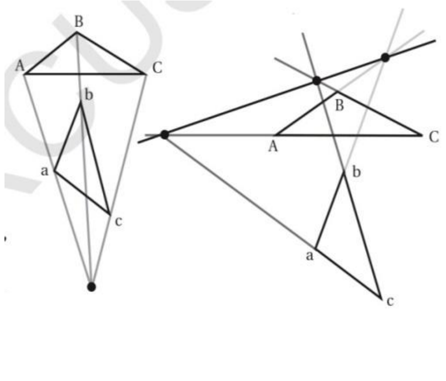
نقط التلاشي وخطوط التلاشي Vanishing points and vanishing lines



تضمن الاستخدام الأولي للمنظور على يد الفنانيين أمثال ماساكو نقطة تلاشي وحيدة، وكانت عادة في مركز اللوحة. إذا تخيلنا أن الأرضية في الرسم رقعة شطرنج غير منتهية، فستكون الخطوط المتوازية المبتعدة عن المشاهد متقاربة في هذه النقطة الوحيدة.

جرب الفنانون الذين جاءوا بعد ذلك مثل فيتوري كارباكيو وضع نقطة التلاشي تلك في مواضع مختلفة، أحيانا حتى خارج اللوحة إلا أن هذا التعديل قدم مسألة أخرى. عندما كانت نقطة التلاشي في المركز كانت خطوط رقعة الشطرنج المبتعدة عن المشاهد تتقارب، وكانت الخطوط العمودية عليها تبدو أفقية، أما تغيير موضع النقطة يعنى أن هذه الخطوط لم تعد تبدو أفقية، وفي الحقيقة فإن هذه الخطوط تتقارب لتتجمع في نقطة تلاشي ثانية، أما الخطوط المستقيمة المرسومة في الرقعة بزوايا متوسطة تتقارب عند نقط تلاشي تقع بين هاتين النقطتين، والخط الذي يصل بين نقطتي التلاشي يسمى خط التلاشي.

مبرهنة ديساركو Desargues' theorem



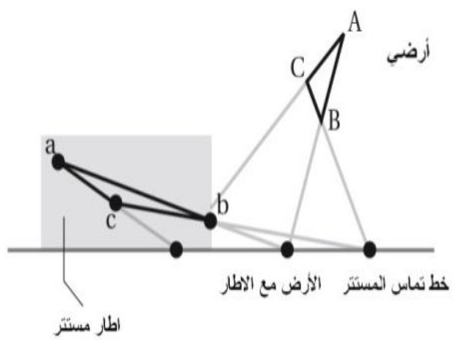
خذ مثلثين (abc)، (ABC). جاءت تسمية هذه المبرهنة بهذا الاسم تكريما لأبي هندسة المنظور جيرارد ديساركو وهي تربط بين فكرتين مختلفتين:

1- المثلثان في منظور من نقطة واحدة إذا كانت الخطوط (Aa)، و(Bb)، و (Cc) تتقارب جميعا إلى نقطة.

2- المثلثان في منظور خط إذا كانت نقط التلاقي الثلاثة لـ (AB, ab)، (BC, bc)، (AC, ac) تقع جميعا على خط مستقيم واحد.

تقول مبرهنة ديساركو أن هاتين الحالتين متكافئتان حيث أن: المثلثين يكونان في منظور من نقطة واحدة إذا وإذا فقط كانا في منظور خط.

كيف ترسم مثلثا How to draw a triangle



تعد مبرهنة ديساركو نتيجة مهمة للفنان التشكيلي، فهي تمحو الحاجة إلى القلق حيال نقط التلاشي، والنقطة الرئيسة هي أنه ليس من الضروري أن يقع المثلثان في نفس المستوى، والحالة الوثيقة بذلك هي عندما يكون المثلث (ABC) واقعا على الأرضية بينما المثلث (abc) هو صورته على لوحة الرسام.

نتخيل أن اللوحة تقف على الأرضية بزاوية 90، وهدف الرسام أن يجعل المثلثين في منظور من نقطة واحدة، لكن أين يجب أن يرسم (abc)؟ تقول مبرهنة ديساركو أن المثلثين لابد أن يكونا في منظور من خط، وهذا الخط يجب أن يكون حيث تتلاقى الأرضية باللوحة.

يمكن للرسام أن يبدأ بالنقطة (a) أينما أراد ثم يتأكد ن كل حافة من (abc) تمتد لتقطع الأرضية في نفس المكان الذي يقطع فيه الضلع المناظر من (ABC) ال اللوحة.

الهندسة الإسقاطية Projective geometry

أي نقطتين على المستوى الإقليدي تحددان خطا مستقيما، والعكس، من الصحيح تقريبا أن أي خطين يتقابلان في نقطة، وهذه الازدواجية بين النقط والخطوط تشكل مبدأ رائعا وفعالا، إلا أنها للأسف لا تكون إلى حد ما صحيحة: لأن الخطين المتوازيين لا يلتقيان.

في الرسم يحدث عكس ذلك، فالخطوط المتوازية يمكنها أن تتلاقى، أو على الأقل تظهر على أنها تتلاقى، فالخطوط المتوازية المبتعدة عن المشاهد تتقارب في النهاية

ما يسميه الرسامون نقطة التلاشي يناظر الفكرة الرياضية لنقطة عند ما لا نهاية. الفكرة هي توسيع المستوى بإضافة نقط إضافية جنبا إلى جنب في الموضع الذي يفترض أن تتلاقى الخطوط المتوازية.فيه.

بمجرد فعل ذلك، تبدأ الهندسة في أن تبدو مختلفة، وبطرق عديدة أبسط، على سبيل المثال: القطوع المخروطية الثلاثة تتحد مرة أخرى كرؤى مختلفة للقطع الناقص (الإهليلجي)، وبالطبع فإن الهندسة الإسقاطية ليست هندسة إقليدية، حيث إنها مصممة بحيث لا تتحقق مسلمة التوازي، لكنها ليست لاإقليدية بنفس معنى الهندسة الزائدية بل إن أفضل تصور لها يكون على إنها تقارب (من الناحية العلمية: ضغط) للهندسة الإقليدية، فلا يزال كل نطاق صغير ينتمي للهندسة الإقليدية تماما: ولا نكشف طبيعته اللاأقليدية الكلية إلا عندما ننظر إلى الفضاء ككل).

الإحداثيات المتجانسة Homogeneous coordinate

لا يفضل علماء الرياضيون المراوغة والتحايل بشأن مفهوم "اللانهاية": لقد كتب الذين يتلاعبون بهذا المبدأ بحرية الكثير من الهراء خلال القرون. لذلك إذا كانت الهندسة الإسقاطية بحاجة إلى "نقاط عند اللانهاية" إضافية، فإننا نحتاج إلى نظام إحداثيات يكون للمالانهاية فيه معنى، وقد قدمت إحداثيات موبيوس المتجانسة حلا أنيقا.

تعطى الإحداثيات على المستوى الحقيقي بزوج من الإحداثيات الديكارتية مثل (2,3) أو (x, y) بينما النقط على المستوى الإسقاطي فتعطى بثلاثة إحداثيات: [2,3,1] أو [x,y,z]، والاختلاف أن بعض الإحداثيات تمثل نفس النقطة تماما كما يمكن التعبير عن الرقم بعدة كسور متكافئة، على سبيل المثال: [2,3,1]، [4,6,2]، [-10,-15,-5] مثل نفس النقطة الإسقاطية، وبصفة عامة: ضرب أي عدد ثابت في كل الإحداثيات لا يغير النقطة.

يمكن تضمين جميع نقط المستوى العادي عن طريق ربط (x,y) بـ [x,y,1]. لكن

هناك المزيد من النقط عند مالا نهاية أيضاً، وتكون على الصورة [x,y,0] لذلك يمكن كتابة معادلة خط التلاشي عن الرسام على الصورة : (Z=0).

الهندسة المنتهية Finite geometry

منهج الهندسة الجبرية هو دراسة الأشكال خلال كثيرات الحدود التي تعرفها، وقد بدأ هذا المنهج في الأعداد الحقيقية مع دراسة القطوع المخروطية على سبيل المثال.

بمجرد أن أصبح نظام الأعداد المركبة متطورا تطلب ذلك مرحلة مركزية لكن فلسفة الهندسة الجبرية لها معنى في أي سياق يمكن فيه القيام بعملية الجمع والطرح والضرب والقسمة، بشكل خاص يمكننا الأخذ في الاعتبار هندسة المجالات المنتهية. وأبسط مثال على ذلك هو الحساب النمطي بأساس أولي. يمكننا البدء بكثيرة حدود مثل ($x^2+2=0$)، وبدلا من إيجاد حلول لها تنتمي إلى الأعداد الحقيقية، نحاول حلها في مجموعة الأعداد الصحيحة، حالة 3.

هنا

$$1^2 + 2 = 3 = 0 \qquad \text{(الحالة 3)}$$

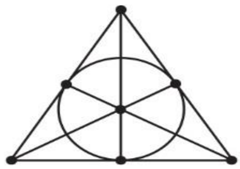
أيضاً

$$y^2 + 2 = 6 = 0 \qquad \text{(الحالة 3)}$$

لذلك، في الحالة 3، يكون لكثيرة الحدود x^2+2 حلان هما تحديدا القيمة 1، والقيمة 2. ونفس كثيرة الحدود في حالة 5 ليس لها حل. يعتبر ذلك مثالا للبدء بدالة كثيرة حدود وعد النقط التي تحققها في المجالات المنتهية (Finite fields)، لكن الآن ما هو النمط؟ عندما نعمل على مجالات منتهية أكبر كثيرا هل يمكن لعدد الحلول أن يظهر لنا فجأة عشوائيا، أم أنه توجد قواعد أساسية تحكم ذلك؟ أجيب عن هذا السؤال في أحد أبرز معالم الهندسة في القرن العشرين وهو إثبات پيير ديلين (Pierre Deligne’s) لحدسيات ويل (Conjectures Weil).

الهندسة الإسقاطية لها معنى في هذا السياق أيضاً، وقد نتجت عنها أشكال مثل مستوى فانو.

مستوى فانو Fano plane



المستوى الإسقاطي هو مجموعة من نقاط وخطوط منظمة بحيث:

- أي نقطتين تقعان على خط وحيد.
- أي خطين يتلاقيان في نقطة واحدة.
- يوجد أربع نقاط ثلاثة منها لا تقع على خط واحد.

الطريقة القياسية لعمل مستويات إسقاطية تكون من خلال الإحداثيات المتجانسة مما ينتج عنه مستويات إسقاطية حقيقة ومركبة يمكننا تنفيذ نفس الخدعة بدءا بمجال منته وأصغر تلك المجالات هو المجال ثنائي العنصر (F_2) (حيث لا يوجد مجال منته صحيح ذو عنصر واحد)، وفي هذه الحالة فإن النتيجة هي مستوى فانو، الذي يتألف من سبع نقاط فقط، متصلة بسبعة خطوط وتم تسميتها بهذا الاسم نسبة إلى عالم الهندسة الإيطالي جينو فانو.

دالة زيتا لويل Weil's Zeta function

تأتي المجالات المنتهية على شكل أبراج قاعدتها عدد أولي. البرج الأول يرتكز على العدد 2، ويتكون من المجالات ... $F_2, F_4, F_8, F_{16},$ (مجال حجمه2,4,8,16 وهكذا).

البرج الذي قاعدته العدد 3 يتكون من ... $F_3, F_9, F_{27}, F_{81},$ و لأي عدد أولي P.

هناك برج ... $F_p, F_{p^2}, F_{p^3},$ بحيث تكون الطوابق الأولى التي عددها m تشكل f_{p^m}. المتنوعة (Variety) هي كيان هندسي معرف بدوال كثيرة الحدود، على سبيل المثال ، يتم تعريف الدائرة بواسطة $x^2 + y^2 = 1$، فعندما نكون على علم بكثيرة الحدود تلك أو المتنوعة V, يمكننا التساؤل عن عدد النقاط التي تحقق المتنوعة عند كل مستوى F_{p^m}، فلنسمي هذا العدد N_m، وبالتالي تصبح V لها عددN_1 من النقاط في المجال F_p ، وكذلك عددN_2 من النقاط في المجال F_{p^2}، وأيضا عدد N_3من النقاط في المجال F_{p^3} وهكذا.

بالتأكيد لا يمكن للمتنوعة أن تفوت نقاطًا في طريقها صعودًا إلى قمة البرج، لذلك... $N_1 \leq N_2 \leq N_{3\leq}$ فتكون المتسلسلة ... $N_1, N_2, N_3,$ هي أساس هندسة المجالات

المنتهية، وهذا ما بدأ أندريه ويل (Andre Weil) في فهمه .وكانت فكرته هي وضع المتسلسة في دالة لامية (L-Function) على الشكل ζ فيما عرف باسم دالة زيتا لويل (Weil's Zeta Function).

حدسيات ويل (نظرية ديلينن) The Weil's conjectures (Deligne's theorem)

دالة زيتا لويل (Weil's Zeta Function) عبارة عن تكوين صعب، إلا أن حدسيات ويل تؤكد أنها أسهل كثيرا مما تبدو عليه في الوهلة الأولى.

في الحدسية الأولى لويل (The first Wail's conjecture) قال أن ζ يتم تحديدها عن طريق عدد كبير منته من البيانات وهذه حقيقة مهمة، لأنها تعني أن المتسلسلة $N_1, N_2, N_3, \ldots$ لا تضم أعدادا عشوائية، بل تأتي في نمط ثابت يمكن التنبؤ به.

الفرضيتان المتبقيتان وضحتا هذا النمط بدقة؛ حيث تعين الفرضية الثانية المواقع التي تصبح فيها $\zeta = 0$ ، فهي ببساطة تقول أن كل أصفار ζ تقع على الخط الحرج $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}$ مما يذكرنا بفرضية ريمان (Riemann hypothesis) .

لقد كانت حدسيات ويل (The Weil's conjectures) هي القوة الدافعة وراء التوسع الكبير الذي حدث في الهندسة الجبرية خلال القرن العشرين، وقد أثبت ألكسندر جروثيندك (Alexander Grothendieck) الحدسية الأولى عام 1960م، بينما أثبت بيير ديلين (Pierre Deligne) الحدسيات الأخرى عام 1974م.

نظرية هودج Hodge theory

بحلول منتصف القرن العشرين قطعت الهندسة شوطا طويلا أبعد ما يكون عن أي شيء عرفه إقليدس. وفي نفس الوقت ظلت اهتمامات علماء الهندسة التقليدية قائمة مثل: ما أنواع الأشكال التي يمكن أن تكون موجودة ؟

وقد أثرى علم الجبر هذا السؤال إثراء ضخما وفي اتجاهين مختلفين: أولهما المعادلات كثيرة الحدود في الهندسة الجبرية، والثاني مجموعات الطوبولوجيا الجبرية، وقد حقق لنا

الأول مجموعات متنوعة كأفكار أساسية للأشكال وتوسعة ذلك قليلا يؤدي بنا إلى الدورات الجبرية التي تبنى أساسا عن طريق إضافة المجموعات المتنوعة معا أو ضربهم في أعداد نسبية.

وعلى جانب آخر يقع البناء الطوبولوچي للمبسطات (Simplices) والفرق الجوهري هنا هو أن هذه البنى تنشأ من أعداد حقيقية بدلا من الأعداد المركبة، والاختلاف الآخر هو أنها بنى طوبولوچية مرنة غير مقيدة بمعادلات كثيرة حدود. نذكر ثانية أن هذه المبسطات تضاف إلى بعضها البعض مكونة دورات طوبولوچية

وكان الإطار الذي تلاقت فيه هاتين النظريتان تحديدا هو الهندسة الإسقاطية خلال الأعداد المركبة، أما السؤال الذي طرحه ويليام هودج (William Hodge) أثناء خطابه في المؤتمر الدولي لعلماء الرياضيات عام 1950م هو: متى تؤدي هاتان الفكرتان إلى نفس النتيجة؟ متى تصبح الدورات الجبرية والدورات الطوبولوچية متكافئة؟.

حدسية هودج The Hodge conjecture

يعتبر الوصول إلى الحل الجزئي للمسألة الرئيسة في نظرية هودج أمرا سهلا. عند النظر إلى الأعداد المركبة خلال الأعداد الحقيقية نجد أن الأعداد المركبة لها بعدان (وهو ما يفسر سبب تشابه الرسم البياني لأرجاند (Argand diagram) مع المستوى ثنائي الأبعاد)، وبالمثل فإن أي متنوعة من الأعداد المركبة يجب أن تحتوي على أبعاد زوجية،من خلال منظور حقيقي. لذا فإن المعيار الأول لكي تكون الدورة جبرية أن تكون لها عددا زوجيا من الأبعاد إلا أن هذا ليس كافيا.

لقد كان هودج (Hodge) متمكنا من علم التفاضل والتكامل، كما أن عمله على معادلة لابلاس (Laplace's equation) زوده باللغة التي مكنته بشكل خاص من توصيف الدورات الطبولوجية المستقرة، والتي تعرف الآن باسم دورات هودج (Hodge cycles).

افترض هودج (Hodge) أنه تمكن من الوصول إلى الوصف الطوبولوچي الصحيح للدورات الجبرية وبالتأكيد أي دورة جبرية الآن يمكن وصفها بدورة هودج (Hodge's cycles).

ويعتبر سؤال المليون دولار (منذ أعلن معهد كلاي (Clay institute) عنها في عام 2000م) هو إثبات ما إذا كان عكس الحدسية صحيح أيضاً.

لا أحد يشك في مدى أهمية نظرية هودج (Hodge) إلا أن التساؤل حول ما إذا كانت تقدم الإجابة الصحيحة مازال قائما. وفي عام 1962م، أفاد الثنائي عطية وهيرزبرج (Atiyah and Hirzebruch) أن هذه الحدسية غير صحيحة عند تقييدها إلى الدورات على الأعداد الصحيحة بدلا من الأعداد النسبية.

أما آندريه ويل (Andre Weil) فلم يؤمن بصحة حدسية هودج (Hodge)، واعتقد أن علماء الهندسة عليهم أن يبحثوا عن مثالا مضادا لها. وحتى يتم العثور على برهان أو مثال مضاد ستظل حدسية هودج كما قال ألكسندر غروتينديك (Alexander Grothendieck): "إنها أعمق حدسية في النظرية التحليلية للمتنوعات الجبرية."

عناصر غروتينديك للهندسة الجبرية

Grothendieck's Éléments de Géométrie Algébrique

نجحت الإحداثيات الديكارتية في فتح الهندسة الرياضية على الطرق الجبرية بشكل كبير كما اتضح من تصنيفات القطوع المخروطية و تكعيبات نيوتن.

الجبر الحديث هو موضوع مجرد بحت كما أن ظهور المتنوعات الجبرية مكن هذا التجريد من الدخول إلى الهندسة، مما جعله أكثر عرضة لهجوم التعميم بدلا من التركيز على الأمثلة الفردية.

في الستينات من القرن الماضي، تعرض هذا الموضوع لانقلاب هائل آخر، وكان مفجر الثورة هذه المرة ألكسندر غروتينديك (Grothendieck) الذي ربما كان الخبير التجريدي الأعظم، ودراسته المطروحة في أربعة مجلدات تحت اسم Éléments de Géométrie Algébrique) أعادت صياغة موضوع الهندسة الجبرية برمتها على نحو أعمق، وارتكز عمله على استبدال المتنوعات بمخططات.

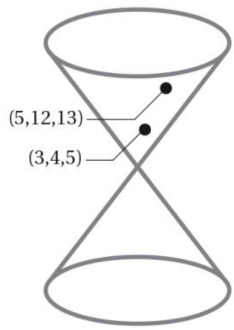
المخططات Schemes

كان الدافع الأكبر لنهج غروتيندیك (Grothendieck) هو اختلاف بين لغتي الجبر والهندسة، حيث أن العناصر الهندسية الأساسية كانت هي المتنوعات التي يتم تعريفها بكثيرات حدود تشكل في الوقت نفسه عنصرا جبريا ألا وهو الحلقة كثيرة الحدود (polynomial ring). أدرك غروتيندیك (Grothendieck) أن نوعا محدودا جدا من الحلقات يمكن أن ينشأ بهذه الطريقة، وأكثرهم شيوعا حلقة الأعداد الصحيحة الحلقة (Z)، ولكن لا توجد أي متنوعة محتوية على (Z) كحلقة لها. وقد كانت فكرته الجريئة أن الأساليب الهندسية التي تم تطويرها لابد أن تعمل مع أي حلقة، حتى ولو لم يكن لها متنوعة تابعة، وقد سميت البنى الجديدة بالمخططات (Schemes).

تعتبر المخططات تجريدية للغاية، والعديد منها ليس له تفسير هندسي واضح، واستخدامها يشكل تحديا تقنيا هائلا، إلا أن تصنيف المخططات بالمقابل أفضل بكثير من المتنوعات،وهذا يؤدي بدوره إلى جعل النظرية أكثر تماسكا وقوة في المجمل والذي ظهر جليا من خلال حدسيات ويل.

الهندسة الديفونتية DIOPHANTINE GEOMETRY

الهندسة الديفونتية Diophantine geometry



على الرغم من أن دراسة المعادلات الديفونتية موضوع متعلق بنظرية الأعداد، إلا أن لها جذورا في علم الهندسة في ثلاثيات فيثاغورث.

في الأربعينات من القرن الماضي أدرك عالم الهندسة أندريه ويل (Andrea Wail) أن الأساليب المتطورة في الهندسة الجبرية مرتبطة بشدة بهذا الموضوع، وكان ذلك بداية الجمع الذي حدث في القرن العشرين بين نظرية الأعداد والهندسة.

فإذا نظرنا من ناحية هندسية للمعادلة ($x^2 + y^2 = z^2$) تحدد سطحا (هو بالتحديد المخروط المزدوج)، أما من وجهة نظر نظرية الأعداد هذه المعادلة هي شرط ثلاثيات فيثاغورث وما وضحه إقليدس فيما بعد أن هذا المخروط به عدد لانهائي من النقط التي إحداثياتها أرقام صحيحة. بصفة عامة: أي معادلة رياضية كثيرة الحدود مثل كثيرة حدود فيرما ($x^n + y^n = z^n$) تحدد متنوعة، لكن السؤال الذي يطرحه منظرو نظرية الأعداد هو ما إذا كانت هذه المتنوعة تحتوى على أي نقطة (x, y, z) إحداثياتها أعداد صحيحة أم لا.

في العادة يكون من الكافي أن تبحث فقط عن النقط التي إحداثياتها أعداد نسبية، بالتالي فإن البحث عن متنوعات فيها نقط نسبية هو ما يشغل منظري نظرية الأعداد الحديثة.

النقاط النسبية على متنوعة جبرية

المتنوعة: هي عنصر هندسي معرف بمعادلات كثيرة حدود.

مثال: المنحنيات: وهي متنوعات أحادية الأبعاد في الواقع المنحنيات تعتبر كذلك المفتاح لأبعاد أعلى، لأن أي متنوعة يمكن تشكيلها بمجموعة من المنحنيات.

يتم تقسيم المنحنيات حسب درجة تعقيدها أو طرازها فالمنحنيات البسيطة مثل القطوع المخروطية من الطراز صفر وقطعا تحتوى على عدد لانهائي من الأعداد النسبية (مثال : الدائرة ($x^2 + y^2 = 2$))، أو لا تحتوى على أي أعداد نسبية على الإطلاق مثل ($x^2 + y^2 = 3$).

الآن يمكننا اكتشاف حالة كل منحنى بدون صعوبة كبيرة ومن جهة أخرى فإن المنحنيات الأخرى الأكثر تعقيدا من الطراز 2 أو أكثر تحتوى على عدد منته من الأعداد النسبية وهذا ما استشعره العالم لويس مورديل (Louis Mordell) عام 1922م، وأثبته أخيرا العالم جيرد فلاتينجس(Gerd Flating's) عام 1983م.

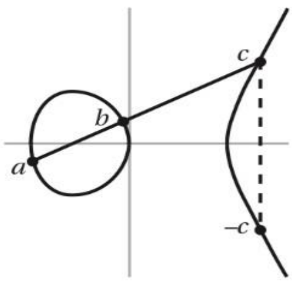
كانت مبرهنة فلاتينج (Flating's) خطوة كبيرة للأمام، ولكنها لم تغلق الباب بعد في موضوع الأعداد النسبية على المنحنيات. وبين النوع السهل والمعقد، تبقى المنحنيات

الإهليلجية المبهمة من الطراز1والتي يمكن أن تشتمل على عدد منته أو غير منته من النقاط النسبية، وتحديد الفرق بين هاتين الحالتين هو السؤال الذي طرح في أحد أهم الأسئلة المهمة المفتوحة المتعلقة بهذا الموضوع: حدسية بيرخ وسويناتون – داير (the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture).

المنحنيات الإهليلجية Elliptic curves

سنجد شيئا مثيرا للانتباه فيما يتعلق بالمعادلة ($y^2 + x^3 - x$) فهي تصف منحنى، ولكنه من نوع غير مألوف لنا؛ حيث يمكنك أن تجمع نقاطه حسب القاعدة التالية:

إذا كان (a) (b) نقطتين على ذلك المنحنى ارسم خط مستقيم يربط النقطتين، وبالتالي ذلك الخط سيقطع المنحنى في نقطة ثالثةc فنقول أن وبالتالي تصبح $z + b + c = 0. \text{so } a + b = -c$ (صفر المجموعة يمثل كنقطة إضافية عند ما لانهاية وهي تناظر خطوط رأسية؛ راجع الهندسة الإسقاطية)



فقط في المنحنيات الإهليلجية (يجب ألا يتم الخلط بين هذا وبين مفهوم القطع الناقص) يمكن تطبيق هذه القاعدة بسهولة لدرجة تجعل المنحنى يصبح مجموعة. وبما أن المجموعات الناتجة صعبة التكهن بها فهي تعتبر الدعامة الأساسية لعلم التشفير الحديث (cryptography).

بصفة عامة، معادلة المنحنى الإهليلجي على الشكل ($y^2 = x^3 + Ax + B$)

هذه المنحنيات بسيطة نسبيا ولكنها لازالت صعبة الاستيعاب. المنحنيات الإهليلجية تلعب دورا رئيسا في نظرية الأعداد الحديثة ولاسيما إثبات ويل لمبرهنة فيرما الأخيرة وبرنامج لانج لاند (Lang land's programme)، وخواص هذه المنحنيات هي موضوع حدسية بيرخ وسوينارتون – داير (the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture).

الحلول النسبية للمنحنيات الإهليلجية Rational solutions of elliptic curves

بداية بالمعادلة ($y^2 = x^3 + 1$)، فإن فطرة المنظر ستقوده إلى التساؤل عما إذا كان هناك أرقام صحيحة تحقق هذه المعادلة. مثل ($3^2 = 2^3 + 1$). مؤخرا أصبح من المتفق عليه أن يمتد البحث عما إذا كان هناك كذلك أعداد نسبية تحقق هذه المعادلة، والسؤال الأساسي لهذه المعادلة هو ما إذا كانت المعادلة لها حلول نسبية كثيرة غير منتهية أم أن لها عدد محدود منته.

أكثر المعادلات الأساسية التي لم يفهم فيها هذا السؤال بشكل كامل هي معادلات المنحنى الإهليلجي مثل ($y^2 = x^3 + 1$)، حل معادلة مثل $y^2 = x^3 + 1$ للمنحنيات الإهليلجية الشكل أصبح الهدف الأسمي لنظرية الأعداد الحديثة. فخلال عام 1960 قدم كل من بريان بيرخ وبيتير سوينارتون حدسية قد تحدد عدد الحلول النسبية لهذه المعادلات المهمة.

حدسية بيرخ وسوينارتون ـ داير Birch and Swinnerton-Dyer conjecture

لأي منحنى وليكن (E) هناك إجراء متبع لتحديد دالة اللامية (L- Function)، فقد ادعى بيرخ وسوينارتون – داير أن هذه الدالة تقوم بترميز تفاصيل الحلول النسبية للمعادلة ، واعتقدوا بشكل خاص أن الدالة يمكنها اكتشاف ما إذا كانت (E) لها عدد محدود أو غير محدود من الحلول النسبية . تفترض حدسيتهم ضمنيا أنه إذا كانت $L(1) = 0$ ، فإن المنحنى له عدد لانهائي من الحلول النسبية أما إذا كانت $L(1) \neq 0$ فإن الأمر ليس كذلك.

أما أفضل تقدم حتى الآن في هذه المسألة يرجع إلى فيكتور كوليفاجن عام 1988، فمبرهنة كولفاجن – عند دمجها مع النتائج التالية لويلز و آخرين– تثبت نصف الحدسية تحديدا أن $L(1) \neq 0$، وبالتالي يكون لـ (E) عدد منته من النقط النسبية. والنصف المتبقي مخصص لحله 1000000 دولار كجائزة من مؤسسة كلاي.

الأشكال النمطية Modular forms

يبدو عالم التحليل المركب الحديث أبعد ما يكون عن مسائل المعادلات الديفونتية العتيقة، إلا أنه بسبب أن نظرية الأعداد والهندسة قد توحدتا خلال القرن العشرين، فقد تم تقديم تحليل مركب أحدث يتناول هذا المزيج، والمفهوم الأساسي هو مفهوم الشكل النمطي، وهو دالة تقوم بإدخال أعداد مركبة من النصف العلوي لمستوي فينتج عنها أعداد مركبة، ومن الملاحظ أن الأشكال النمطية تتمتع بدرجة عالية من التماثل.

الدالة الجيبية (The sine function) دالة دورية أي تقوم بتكرار نفسها ، فلو تحركنا يمينا خطوة مقدارها 2π سنجد إن الدالة لم تتغير، الأشكال النمطية تحقق تماثل كهذا لكن من خلال قواعد أكثر تعقيدا؛ حيث لا يتم تحديد التماثل بأعداد مفردة مثل 2π بل يجب أن يكون عن طريق مصفوفات 2×2 من الأعداد المركبة.

يمكن القول أن هناك سببان جعلا الأشكال النمطية لها هذا البريق في عالم الرياضيات الحديثة، أولهما إثباتها نظرية فيرما الأخيرة (من خلال مبرهنة النمطية modularity theorem)، والثاني هو البحث العملاق (the monster) (كما وصف بواسطة تصنيف المجموعات المنتهية البسيطة).

مبرهنة النمطية Modularity theorem

قام يوكاتا تانياما (Yukata Taniyama) وغورو شيمورا (Goro Shimura) في الخمسينيات من القرن الماضي بوضع حدسية تهدف إلى الربط بين مجاليين رياضيين مختلفين تماما، لقد وضعت في الاعتبار عنصرين مختلفين كلية: الأول هو المنحنيات الإهليلجية أكثر ما يهم منظري الأعداد، والثاني يأتي من عالم التحليل المركب وهو الأشكال النمطية. زعم تانياما وشيورا أن المنحنيات الإهليلجية والأشكال النمطية يعتبرا أساسا شيئا واحدا، حتى وإن كان التعبير عنهم يكون بلغات مختلفة، وكذلك أن الدالة اللامية يجب أن تكون بمثابة قاموسا يترجم بين اللغات المستخدمة في التحليل ونظرية الأعداد.

بدت حدسية تانياما وشيورا (Taniyama–Shimura) صعبة صعوبة لا يمكن

تذليلها، مع ذلك أصبحت مركز اهتمام مكثف في الثمانينيات، عندما وضح كلا من جيرهارد فراي وكينيث ريبيت (Gerhard Frey and Kenneth Ribet) كيف أن إثبات هذه الحدسية قد يتضمن مبرهنة فيرما الأخيرة. في عام 1995م، أثبت أندريه ويلز ، وريتشارد تايلور (Richard Taylor) جزءا كبيرا من المبرهنة ، وكان ذلك كافيا لويلز ليستنتج مبرهنة فيرما الأخيرة أما إثبات المبرهنة كليا كان في برويل وكونراد ودياموند ، وتايلور عام 2001. مبرهنة النمطية كما تعرف الآن أصبحت أساس التصميم الشامل المعروف ببرنامج لانجلاند (Langlands' program).

برنامج لانجلاند Langlands' program

تقوم الرياضيات على مجموعة من الحدسيات: هي تأكيدات يعتقد بعض علماء الرياضيات أنها صحيحة لكن لم يستطع أحد إثباتها بعد، بعضها مثل حدسية بوانكاريه ارتقت إلى مبرهنة، والبعض الآخر دحض وأهمل (على الرغم من أن حتى الحدسيات الخاطئة مثل برنامج هيلبرت (Hilbert's program) يمكن أن تشكل دافعا فعالا نحو التقدم). فقط بعض علماء الرياضيات تألقوا في هذا الموضوع، مثل الرؤية الموحدة (unifying vision) . كتب روبرت لانجلاند إلى آندريه ويل موجها له سؤالا إبداعيا عام 1976م: ماذا سيحدث إذا تم التوافق بين كل من عالم الرياضيات الجبرية وعالم التحليل.

تظهرمبرهنة النمطية (modularity theorem) أن بعض العناصر من العالمين ترتبط ارتباطا وثيقا، وقد كان ذلك ما توقعه لانجلاند (Langlands) إلا أن برنامجه يخطو إلى ما هو أبعد من ذلك بكثير فكان في حاجة إلى تخطي الأشكال النمطية إلى أشكال تشكيلية، ودوال مركبة يوصف تماثلها من خلال المصفوفات الكبيرة.

تعتبر الدالة اللامية (L-function) التي تحول بيانات نظرية جالوا(Galois) الجبرية إلى دوال تحليلية في أعداد مركبة هي أساس مشروع لانجلاند ، ويعتقد انغلاندز (Galois) أنه بمجرد تجاوز هذه الفجوة سيتم تحقيق الشمل بين العالمين.

حدسيات لانجلاند لمجالات الأرقام Langlands' number field conjectures

بالإضافة إلى إثبات المبرهنة النمطية (modularity theorem) ، أحرز تقدم ملحوظ في إثبات رؤية لانجلاند (Langlands)، ويأتي الجانب الجبري في ثلاثة أجزاء، المجالات المحلية (local field)، ومجالات الدوال (function fields)، ومجالات الأعداد (number fields)، والتي لها أهمية خاصة في التحليل، والهندسة، ومجالات الأعداد (number fields). على الترتيب. بحلول عام 2000 تم التحقق من اثنين من أصل ثلاث حدسيات وضعها لانجلاد بواسطة لورانت لافورج (Laurent Lafforgue) الذي حاز على ميدالية فيلدز لتمكنه من التوصل إلى حل من 300 صفحة لمجالات الدوال.

بقت فقط حدسية واحدة من حدسيات لانجلاد بلا إثبات وهي حدسيته عن مجال الأعداد ولكنها بالفعل صعبة، ومازالت تقف صامدة أمام محاولات منظري نظرية الأعداد إلى اليوم.