الجبــر

كالمفهوم المعتاد: نقطة الانطلاق في الجبر هي استبدال الأعداد بالحروف والغرض الأول من ذلك هو إمكانية التعبير عن القوانين العامة كحقيقة أن a X b=b X a مهما كانت قيمة الأعداد a,b والمثال الأكثر تعقيدا هو نظرية ذات الحدين.

واستخدام الحروف للتعبير عن الأعداد المجهولة، فتح الطريق لعلم حل المعادلة. والمثال البسيط هو إيجاد قيمة العدد x حيث 4+n=6 والسعي إلى حل المعالات الأعلى مثل التكعيبية ومعادلات الدرجة الرابعة والتي كانت الطريق لعلماء الرياضيات في النهضة الإيطالية.

ثم جاء "أبيل" و "جالوا" للعمل على دراسة حل المعادلات من الدرجة الخامسة، والذي رفع علم الجبر إلى آفاق جديدة. في هذه المرحلة كانت عملية استبدال الاشياء المألوفة بأخرى مجردة.

فتم استبدال أنظمة العدد المألوفة بالتركيبات الجبرية العامة وخاصة الزمر. وفي هذا المستوى كانت نظريات التصنيف الرائعة ممكنة ولاسيما تلك الأمور البسيطة المنتهية.

وللجبر المجرد الحديث الكثير من الآليات لبعض المناطق الأخرى من الرياضيات من الهندسة ونظرية العدد إلى نظرية الكم الميداني.

حروف للأعداد LETTERS FOR NUMBERS

حروف للأعداد Letters for numbers

بالنسبة لكثير من الناس تصبح الرياضيات غير مريحة لهم عند ظهور الحروف وذلك لتعودهم على استخدام الأعداد فقط. ترى ما الحكمة من ذلك؟ الغرض الأول من استخدام الحرف للتعبير عن العدد المجهول.

مثل 3Xy=12 وتسمى بالمعادلة، والتي تعني أن y هو العدد الذي إذا ضرب في 3 يصبح الناتج 12 في هذا المثال كان من الممكن أن نضع علامة استفهام بدلا من y: 3X?=12. ولكن هذا غير ممكن عند وجود أكثر من مجهول واحد. على سبيل المثال: عددان إذا جمعا كان الناتج يساوي 5، وإذا ضربا كان الناتج يساوي 6 وإذا استخدمنا الحروف للتعبير عن هاتين المعادلتين: x+y=5 و x x y=6.

عادة لا تستخدم الرمز x عند كتابة المعادلات الجبرية، أو يتم استبداله بنقطة.

وبذلك تصبح المعادة 3y=12 أو 3.y=12 . مع مراعاة كتابة العدد قبل الحرف ليكتب هكذا 3y=12 لا أن يكتب y3=12

المتغيرات والتعويض Variables and substitution

من الممكن استخدام الأعداد المجهولة (الحروف) للتعبير عن المتغيرات مثل: أنا أركض على الطريق، فإن هذا القانون d=4t+5 يعبر عن العلاقة بين المسافة من البيت (d) ، مقاسة بالمتر) والوقت منذ البداية (t ، محدد بالثواني) حيث d ، t هي أعداد مجهولة من الممكن اكتشافها، إذا أردنا معرفة المسافة بعد ثانيتين فإننا نعوض عن قيمة t=2 في القانون، وبالتالي يصبح d=4x2+5=13 وبالسؤال عن المدة اللازمة للانتهاء من طريق طوله 21 meters فإننا نعوض عن d=21 فيكون 21=4t+5 وبحل هذه المعادلة تكون t=4 .seconds

الأقواس Brackets

تستخدم الأقواس لفصل العمليات الحسابية إلى أجزاء وبالتالي فإن 8x(2+3) تعني أن نجمع 3 و 2 أولا ثم نضرب الناتج في 8 ولحل أكثر العمليات الحسابية المعقدة فإننا دائما نبدأ بفك الأقواس

$$((5x(2+1))+1) \div 4 = ((5x3)+1) \div 4 = (15+1) \div 4 = 16 \div 4 = 4$$

ولتجنب كتابة أقواس كثيرة في العملية الحسابية، فإنه توجد طريقة لحل العمليات الحسابية والتي تأتي بدون أقواس وتسعى طريقة بيدماس

بيدماس BIDMAS

ما ناتج 7×3+2 ربما يبدو هذا السؤال تافها ولكن أحد هذين الحلين هو الحل الصحيح

(i) 2+3x7= 5x7=35

(ii) 2+3x7=2+21=23

بيدماس هي طريقة لتجنب الشك في أكثر من حل وذلك بوضع الطريقة الصحيحة لترتيب العمليات الحسابية

(1) الأقواس (2) الأسس (3) القسمة أو الضرب (4) الجمع أو الطرح

ومن هذا الترتيب يتضح أن (i) إجابة خاطئة ، وهنا يتضح أهمية الأقواس لأنه لو كان السؤال على هذا النحو 7x(2+3)، كانت الإجابة صحيحة وبالمثل 1=1-2=1-3 ÷ 6 ولكن 3=2 ÷ 6 = (3-1) ÷ 6.

وبالتالي عند استخدام كثير من الأقواس $((3 \div (6^4)).5 \times 2)$ فإنه لا حاجة لبيدماس ولكن لتجنب كتابة الكثير من الأقواس فإنها طريقة مفيدة.

العوامل المشتركة Common factors and expanding brackets

(i) 3 x (5 + 10) = 3 x 15 = 45

(ii) 3 x 5 + 3 x 10 = 15 + 30 = 45

ليس من قبيل الصدفة أن تكون إجابة كلا من i ‘ ii هي نفس الإجابة، فمثلا إذا كان معي ثلاث ورقات من فئة الخمسة جنيهات وثلاثة ورقات من فئة العشرة جنيهات فإن المجموع لا يتغير سواء تم حسابهم على أنهم ثلاثة ورقات من فئة الخمس عشر جنيه، أو تم حساب مجموع الورقات فئة الخمسة جنيهات وتم جمعهم على الورقات فئة العشر جنيهات. وبالتالي فإن قانون التوزيع يعطي نفس الإجابة في هذه المواقف ومن الممكن استخدام طريقة أخذ العامل المشترك مع وضع الأقواس وبداخل الأقواس أيا من علاقة الجمع أو الطرح مضرورة في رقم خارج القوسين $(10 + 5) \times 3$.

أو استخدام الطريقة العكسية وذلك بضرب العدد خارج القوس في أي عدد داخل القوس ثم جمع كل عملية ضرب

$$3\times(5+10) = 3\times 5+ 3\times10$$

وبطريقة أخرى إذا كان كلا من الأعداد المجموعة تقبل القسمة على عدد معين فإننا نستطيع أن نأخذ هذا العدد كعامل مشترك

$$20+28 = 4\times5+4\times7 = 4\times(5+7)$$

وهذه الطريقة لا تنفع في حساب الأعداد فقط ولكن أيضاً في المتغيرات وتصبح هذه الطريقة أساسية في تبسيط الصيغ . على سبيل المثال:

$ax + 4x = x(a + 4)$ وذلك بأخذ x كعامل مشترك

أو بفك الاقواس $2x(x - y^2)2ax - 2ay^2$

الأقواس التربيعية Squaring brackets

إذا كان لدينا عملية جمع داخل قوسين مضروبة في شئ ما خراجها فأننا نستطيع أن نوجد الناتج بطريقة فك الأقواس مثل: $(1+2)x2=1x2+2x2$

هل نستطيع أن نفعل نفس الشئ عندما تكون الأقواس مرفوعة لأس معين؟

لسوء الحظ فإن $(1 + 2)^2 \neq 1^2 + 2^2$، الأول يساوي $9 = 3^2$، والثاني يساوي $1 + 4 = 5$. ولذلك فإن الأقواس التربيعية أكثر تعقيداً.

ولكن هكذا حولنا التربيع إلى عملية ضرب، فإن قانون ضرب الأقواس يكون كالتالي:

$$(1+2)^2 = (1+2)x(1+2) = 1(1+2) + 2(1+2) = 1+2+2+4$$

وبإستخدام المتغير تكون أكثر إيضاحاً

$$(1+x)^2 = (1+x)x(1+x) = 1(1+x) + x(1+x) = 1+x+x+x^2$$
$$= 1+2x+x^2$$

وإذا كان لدينا متغيرين فإن الإجابة تكون: $(y+x)^2 = y^2 + 2yx + x^2$

نظرية ذات الحدين The binomial theorem

وماذا لو رفعت الأقواس لاس أعلى من التربيع؟

لو استخدمنا طريقة ضرب الأقواس سوف تكون عملية مرهقة ولكن بالنهاية سوف نكتشف أن:

$$(1+x)^3 = 1+3x+3x^2+x^3$$
$$(1+x)^4 = 1+4x+6x^2+4x^3+x^4$$
$$(1+x)^5 = 1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5$$

وعند وجود متغيرين: $(x+y)^4 = y^4 + 4y^3x + 6y^2x^2 + 4yx^3 + x^4$

ولذلك عند حساب $(7+2a)^4$ فلإننا نعوض عن الصورة السابقة

ولكن ما معنى متتابعة الأرقام هذه 1,4,6,4,1 ؟

هذه الاعداد هي معاملات ذات الحدين.

معاملات $(1+x)^4$ هي

$(1+x)^4$ هي ${}^4C_0 = 1,\quad {}^4C_1 = 4,\quad {}^4C_2 = 6,\quad {}^4C_3 = 4,\quad {}^4C_4 = 1$

وينسب اكتشاف نظرية ذات الحدين إلى "بليز باسكال"

وتعتبر الطريقة المثلى لتذكر نظرية ذات الحدين هو مثلث باسكال.

مثلث باسكال Pascal's triangle

في القرن السابع عشر اكتشف عالم الرياضيات الفرنسي بليز باسكال هذا المثلث

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

وهكذا.

كل صف يبدأ وينتهي بالعدد 1 وكل عدد من أعداد الوسط هو عبارة عن مجموع العددين الموجدين فوقه. وقد تم إكتشاف مثلث باسكال خصوصاً لمعرفة معاملات ذات الحدين فمثلاً إذا كنت تريد معرفة معاملات مفكوك $(1 + y)^4$ فإنه سوف تكون موجودة في خامس صف من المثلث $1 + 4y + 6y^2 + 4y^3 + y^4$.

ويوجد أيضاً في هذا المثلث أكثر من نمط عددي ، على سبيل المثال: إذا نظرت إلى الأقطار، فإن الأول لا يوجد به غير العدد 1 والثاني ...1,2,3,4,5, والثالث .....1,3,4,10, وتسمى الأعداد المثلثية، وبعد ذلك الأعداد المضلعة، ثم الأعداد بالنسبة لرباعي السطوح، وبحذف الأعداد الزوجية من هذا المثلث ينتج نمط عددي أقرب لمثلث "سيربينسكي" ، وهكذا .

المعادلات EQUATIONS

المعادلات Equations

على الرغم من أن كثير من الناس تخاف من مصطلح المعادلة، ولكن إذا نظرنا إلى مفهوم المعادلة لا يتعدي كونه شيئا مساوياً لشئ آخر 1+1=2 تسمى معادلة وبالمثل $E = MC^2$ وأي شيء يحتوي على علامة التساوي بين مقدارين وعادة تشتمل المعادلات على كثيرات حدود.

عند دراسة المعادلات فإن فكرتها تكون أقرب إلى كفتي الميزان عند توازنهما وهذا معناه لكي تظل المعادلة صحيحة يجب أن تجري نفس العملية في الطرفين فمثلاً: إذا أضفنا 6 للطرف الأيسر أو ضربناه في 24 فإننا يجب أن نفعل نفس الشئ في الطرف الأيمن، هذا الشئ يكون واضحًا في الأعداد

$$13 - 2 = 11 \Rightarrow (13 - 2) + 6 = 11 + 6$$

$13-2=11$ ، $6+11=6+(13-2)$ وبالمثل: $24\times 11 = 24\times(13-2)$

نفس الشئ عندما تحتوي المعادلة على مجهول، على سبيل المثال $3x + 1 = 16$. فإذا طرحنا 1 من الطرفين ينتج أن $3x = 15$ وإذا قسمنا كلاً من الطرفين على 3 ينتج أن $x = 5$ وهذا هو حل المعادلة الأصلية.

كثيرات الحدود Polynomials

كثيرة الحدود هي عبارة عن مقدار يحتوي على أعداد مجهولة (وتمثل بحروف مثل y , x) مثل : $3x^2 + 15y + 7$ هي كثيرة حدود في مجهولين $y,\ x$ والأعداد 15 , 3 تسمى معاملات. معامل x^2 هو 3 ومعامل y هو 15 والعدد 7 يسمى بالحد الثابت وهو الذي لا يحتوي على x أو y .

وتعتبر كثيرات الحدود مهمة جداً في الهندسة، وذلك بوضع كثيرة الحدود تساوي صفر فإنها تعرف بالشرط اللازم لإحداثيات نقطة على المستوى (x, y) .

ولذلك فإن مجموعة النقاط التي تحقق هذا الشرط تنتج شكلاً هندسيًا كخط مستقيم، أو في هذه الحالة يسمى قطعًا مكافئاً.

إذا كانت كثيرة الحدود تحتوي على مجهول واحد فإنها تنتج معادلة $x^2 + 3x + 2 = 0$ وحل هذه المعادلة هو عبارة عن إيجاد قيم x التي تجعل المعادلة صحيحة وتسمى بجذور كثيرة الحدود.

ودرجة كثيرة الحدود هي عبارة عن أعلى أس تحتوي عليه فمثلاً. $x^2 + 3x + 2$ من الدرجة الثانية وتسمى معادلة تربيعية. وكثيرات الحدود من الدرجة الأولى تعتبر أبسط

كثيرات الحدود وتسمى بكثيرة الحدود الخطية. وعموماً فالنظرية الأساسية للجبر تقول أن كثيرة الحدود من الدرجة ن يكون لها ن من الجذور في الأعداد المركبة.

المعادلات الخطية Linear equations

عرف البشر أهمية . المعادلات سريعاً عند حل الأسئلة المقالية مثل: ماهو العدد الذي إذا أضيف ضعفه إلى العدد 3 كان الناتج 9 ؟ وذلك بتحويل هذا السؤال إلى معادلة $2x + 3 = 9$ وتعتبر هذه المعادلة من النوع البسيط لها مجهول واحد x ليست تربيعية ولا تحتوي على جذر تربيعي ولا أي شئ معقد وتسمى بالمعادلات الخطية، وذلك لانها عرفت من معادلة الخط المستقيم: $Y = 2X + 3$ ومفتاح حل هذه المعادلة هو إجراء نفس العملية في طرفي المعادلة حتى نحصل على قيمة X.

أولاً نطرح 3 من الطرفين: $2X = 6$ ثم قسمة الطرفين على 2 لنتيج أن $X = 3$ ولكن ماذا عن هذه المعادلات $4x + 20 = 4$؟ اعتبر "جيوفانتس الإسكندري" أن هذه المعادلات ليس لها حل في الأعداد وقتها ولذلك فقد انتظر للقرن السابع الميلادي لإكتشاف الأعداد السالبة بواسطة "براهما جوبتا" وبنفس الطريقة تم حل أي معادلة خطية في مجهول واحد فعند حل هذه المعادلة: $4x + 20 = 4$ نقوم بطرح 20 من الطرفين لينتج $4x = -16$ ثم قسمة الطرفين على 4 ليصبح $x = -4$.

تحليل كثيرات الحدود Factorizing polynomials

إذا حاولنا حل معادلة من هذا النوع $x^3 + 7x + 6 = 0$ فإننا سوف نبحث عن قيم x التي تجعل هذه المعادلة صحيحة، على سبيل المثال: 2 هو حل للمعادلة لأن $2^3 - 7x2 + 6 = 0$ ولكن 3 ليس حل لأن $3^3 - 7x3 + 6 = 12 + 0$ وتحول إلى:

$$x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x^2 + x - 6)$$

(ويمكن التأكد من ذلك عن طريق فك الأقواس) وإذا لم نستطع تعرُّف قيمة x من المعادلة الأصلية فإننا يجب أن نضعها على هذا الشكل $(x-1)(x^2 + x - 6) = 0$ فلو عوضنا عن قيمة x بـ 1 فإن القوس الأول يساوي 0 وبالتالي فإن $x=1$ هو أحد حلول

المعادلة. وإذا كان حاصل ضرب عددين يساوي 0 فإن أحد هذين العددين يساوي 0 ولذلك فإذا كان $(x-1)(x^2+x-6)=0$ فإن إما x=1 أو $x^2+x-6=0$.

وبالنسبة لكثيرة الحدود الثانية فإنها تحلل إلى $(x-3)(x-2)$ وبذلك تكون المعادلة الأصلية $(x-1)(9x-2)(x+3)=0$ وهذا هو شكل التحليل وتكون حلول المعادلة هي 1,2,-3 هل يوجد أي حلول أخرى؟ الإجابة لا. لأنه لأي قيم أخرى لـ x يكون المقدار $(x-1)(x-2)(x+3)$ لا يساوي 0.

نظرية العامل The factor theorem

تحسم نظرية العامل الجدل حول تحليل كثيرات الحدود فمثلاً العدد a هو جذر كثيرة الحدود p فقط إذا كان $(x-a)$ تقسم P وهذا بوجود كثيرة حدود أخرى Q بحيث $P=(x-a)\times Q$ ولكي نستطيع حلها فإننا نقسمها بالشكل $(x-c)$ ... $(x-b)$ $(x-z(x-b)$ وبذلك يكون حلها هي الأعداد a,b,……,c وفي المثال السابق تكون 1,2,-3.

المعادلات التربيعية Quadratic equations

تختلف المعادلات التربيعية عن المعادلات الخطية في إنها تحتوي على الحد x^2 وتم دراستها بواسطة البابليون القدماء في حساب أبعاد ومساحات معينة، على سبيل المثال: شكل مستطيل أحد أبعادة أكبر من الأخر بمقدار 5 أمتار ومساحته 36م^2 ولحساب أبعاد نحل المعادلة $x\times(x+5)=36$ والتي تكون على الشكل $x^2+5x-36=0$.

ونشأت طريقة حل المعادلات التربيعية في القرن السابع بواسطة العالم الهندي "براهما جوبتا" وفي القرن التاسع بوساطة عالم الرياضيات الفارسي "محمد ابن موسى الخوارزمي" في كتابه "حساب الجبر والمقابلة".

الصيغة التربيعية The quadratic formula

في العصر الحديث تمت إعادة ترتيب أي معادلة تربيعية على الشكل $ax^2+bx+c=0$ لبعض a,b,c ويكون لها حلان يمكن إيجادهما عن طريق الصيغة العامة $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

ويكون الحلان مختلفين بواسطة $\pm$ ويكون حل المعادلة $x^2 + 5x - 36$ هو $\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times1\times(-36)}}{2\times1}$ وتساوي $\frac{5\pm13}{2}$ وتكون 4, 9 .

إكمال المربع Completing the square

تعتبر بعض المعادلات التربيعية أسهل في حلها من معادلات أخرى فأحيانا يكون أخذ الجذر التربيعي كافي لحل المعادلة مثل $x^2 = 9$ حلها هو $x = 3, -3$ أو $(x+1)^2 = 9$ وبأخذ الجذر التربيعي يكون $x + 1 = \pm 3$ والحل هو $x = -4$ و $x=2$.

وتعتبر إكمال المربع هو أحد طرق حل المعادلة التربيعية وتكون الخطوة الأولى هي ترتيب المعالة بحيث يكون معامل الحد الذي يحتوي على x^2 هو 1 فمثلاً، $2x^2 + 12x - 320$ وبقسمة الطرفين على 2 تصبح $x^2 + 6x - 16 = 0$. وبالنظر إلى الحد الثاني الذي يحتوي على x وبقسمة معاملة على 2 ثم تربيعه يصبح الناتج 9 وهو العدد الذي يكمل المربع، وبمعرفة هذا العدد يصبح هو الثابت الوحيد في الطرف الأيسر x^2+6x+9 ولذلك فإننا سوف نغير الطرف الأيمن للحافظ على توازن المعادلة لتصبح: $x^2 + 6x + 9 = 25$.

وبتحليل الطرف الأيسر يصبح $(x+3)^2$ وتحل المعادلة بأخذ الجذر التربيعي لتصبح $x + 3 = \pm 5$ ويكون حل المعادلة $x = -8$ و $x = 2$

وبتطبيق هذه الطريقة على المعادلة العامة $ax^2 + bx + c = 0$ ينتج الصيغة العامة $\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

المعادلات التكعيبية Cubic equations

المعادلات التكعيبية هي المعادلات القادمة في التسلسل الهرمي للمعادلات في مجهول واحد وهي التي تحتوي على x^3 مثل $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ وتعتبر أولى المحاولات الجدية لحل هذه المعادة كانت في القرن الحادي عشر عن طريق الشاعر الفارس ومتعدد جوانب الثقافة "عمر الخيام" بإستخدام القطع المخروطي.

وفي القرن السادس عشر أصبحت المعادلات التكعيبية من أكبر المشاكل في هذا العصر. وبالنسبة لعلماء الرياضيات مثل "جيرولاموكاردانو" و "نيكولوفونتانا" و "لودوفيكوفيل ري" فقد راهنو بسمعتهم على حل هذه المعادلات. ولذلك فقد نشر "كاردانو" في كتابة "1545" "Ars magna" الحل العام للمعادلة التكعيبية وكان له أثر كبير في اكتشاف الأعداد السالبة وتطوير الأعداد المركبة، وعموماً فإن للمعادلة التكعيبية ثلاثة حلول ويوجد منهم حل حقيقي على الأقل.

الصيغة التكعيبية The cubic formula

تعتبر الصيغة العام لحل المعادلة التكعيبية $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ أكثر تعقيداً من المعادلة التربيعية ، يجب أولاً معرفة $q = \frac{a3}{27} + \frac{ab}{6} - \frac{c}{2}$ وأيضاً $p = q^2 + (\frac{b}{3} - \frac{a^2}{9})^3$ ويكون الحل الأول هو

$$x_1 = \sqrt[3]{q + \sqrt{p}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{p} - \frac{a}{3}}$$

والثاني هو

$$x_2 = (\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2})\sqrt[3]{q + \sqrt{p}} + (\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2})\sqrt[3]{q - \sqrt{p} - \frac{a}{3}}$$

وتعطي $\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ الجذرين تكعيبين للواحد الصحيح

المعادلات من الدرجة الرابعة Quartic equations

يأتي بعد ذلك المعادلة من الدرجة الرابعة وهي التي تحتوي على x^4 مثل $x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6 = 0$ بدون أعداد مركبة. طرحت هذه المعادلات تساؤلات كثيرة بالنسبة لعلماء العصر الحديث أمثال "لودوفيكوفراري" بعض هذه المعادلات مثل $x^4 + 1 = 0$ لا يوجد لها حل في الأعداد الحقيقية وبعضها لها أربعة حلول، ومع ذلك فقد أعدوا طرقاً بسيطة لاستخدام الأعداد السالبة والمركبة في حلها.

في عام 1545 قدم "جيرولاموكاردانو" كتابة "Ars magna" والذي يحتوي على 40 فصل وقدم فيه طريقة فيراري لحل المعادلات من الدرجة الرابعة

صيغة حل المعادلات من الدرجة الرابعة The quartic formula

لحل المعادلة $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

نفرض أولاً: $e = ac - 4d$ و $f=4bd-c^2-a^2d$ ثم نستخدم الصيغة لحل المعادلة $y^3 - by^2 + ey + f = 0$

هذه المعادلة يجب أن يكون لها حل في الأعداد الحقيقية ، نفرض أن

$$G=\sqrt{a^2-4b+4y} \quad و \quad h = \sqrt{y^2 + 4d}$$

ويمكن إيجاد الأربعة حلول عن طريق حل المعادلين التربيعيتين:

$$x^2+\frac{1}{2}(a+g)x+\frac{1}{2}(y+h)=0 \quad و \quad x^2 + \frac{1}{2}(a - g)x + \frac{1}{2}(y - h) = 0$$

المعادلات من الدرجة الخامسة Quintic equations

مما سبق نستنتج أن الصيغ العامة لحل المعادلات التكعيبية والمعادلات من الدرجة الرابعة تعتبر صعبة جداً وفي الفترة من 1600 إلى 1800م اكتشف العلماء أن طرق حل المعادلات من الدرجة الخامسة والسادسة والسابعة أكثر تعقيداً وقد بذل العلماء مجهوداً كبيراً في اكتشاف طرق حلها. واعترف "ليونارد أويلر" أن كل المحاولات المبذولة كل هذه المعادلات قد باءت بالفشل.

أخذت القصة منحنى آخر في القرن التاسع عشر على يد عالم الرياضيات "نيلزابيها" الذي أثبت في "مخطوطة الصفحة السادسة" أنه لا يوجد صيغ حل للمعادلات من الدرجة الخامسة وما فوق. هذه المعادلات لها دائما حلول وهذه هي النظرية الأساسية للجبر ولكن لا توجد طريقة لايجاد هذه الحلول.

المعادلات الغير قابلة للحل Insoluble equations

خلال عصور التاريخ المختلفة ساعد اكتشاف أنظمة الاعداد الجديدة في حل معظم المعادلات السابقة والتي لم يكن لها حل وقتها فمثلاً اكتشاف الأعداد السالبة ساعدت في حل المعادلات مثل $x + 6 = 4$ والتي اعتبرها "ديوفانتس" غير قابلة للحل، وتحل بنفس طريقة حل المعادلات الخطية.

وتحتوي الاعداد الحقيقية على الأعداد الغير نسبية مثل $\sqrt{2}$ والتي تساعد في حل معادلات مثل $x^2 = 2$، وساعد اكتشاف الأعداد المركبة على حل معادلات مثل $x^2 = -1$ ومع هذه الاكتشافات يبقى السؤال: هل توجد معادلات باقية ليست لها حل؟ أعطت النظرية الأساسية للجبر الاجابة وهي: لا.

النظرية الأساسية للجبر The fundamental theorem of algebra

أثبت "كارل فريدريتش جاوس" في رسالة الدكتوراه الخاصة به عام 1799م أن الأعداد المركبة لا تعطي فقط حل للمعادلة $x^2 = -1$ كل كثيرة حدود تحتوي على أعداد مركبة لابد أن يكون لها حل في الأعداد المركبة فمثلاً $x^5 + 2ix = -4$ لابد أن يكون لها حل في الأعداد المركبة.

وغالباً فإن كل كثيرة حدود من الدرجة n لها عدد n من الحلول المختلفة على الرغم من أن هذه الحلول من الممكن أن تتضاعف كما في حالة $(x - 1)^2 = 0$ والتي تحتوي على حل واحد فقط $x = 1$ تحتوي النظرية الأساسية للجبر على العديد من الاثباتات أربعة منهم تم اكتشافهم بواسطة "جاوس".

المعادلات المتزامنة Simultaneous equations

من الممكن حل معادلة في مجهول واحد x مثل $3x + 4 = 10$ ولكن لايوجد حل محدد لمعادلة واحدة في مجهولين مثل $x + y = 4$ بل يوجد لها عدد لا نهائي من الحلول :

$x = 2$ and $y = 2$ و $y=2.5$ و $x=1.5$ و $x=1001$ and $y= 997$

وهكذا. وتمثل هذه المعادلة بخط مستقيم وإحداثيات كل نقطة على المستقيم تعطي حل للمعادلة الأصلية. وإذا وجدت معادلة أخرى $x - y = 2$ فإننا نستطيع أيضاً أن نوجد لها عدد لانهائي من الحلول ولكن هل نستطيع إيجاد قيم لـ x، y والتي تحققان المعادلتان معاً $x - y = x , x + y = 4$ ؟

من الممكن إيجاد الحل بيانياً عن طريق إيجاد نقطة تقاطع المستقيمان معاً. يوجد طريقتان لحل المعادلتان معاً. الأولى عن طريق الحذف بإضافة أو طرح المعادلين لكي نتخلص من أحد المجهولين ففي هذا المثال عند جمع المعادلتين سيتم التخلص من y ويتبقى $2x=6$ ونستكمل حل المعادلة لنحصل على $x=3$ وبعد ذلك نوعض في أحد المعادلتين السابقتين عن قيمة x لنحصل على قيمة $y=1$ ليصبح الحل $x=3$ ، $y=1$.

نبدأ من جديد في حل المعادلتين بطريقة التعويض $x+y=4 , x-y=2$أولاً نغير أحد المعادليتن لنحصل على أحد المجهولين بدلالة الآخر فمثلاً نغير المعادلة $x+y=4$ لتصبح $x=4-y$ ثم نعوض عن ذلك في المعادلة الآخرى لتصبح $(4 - y) - y = 2 \Leftarrow 4-2y=2$ لنحصل على $2y = 2$ ومنها $y=1$ وبالتعويض من قيمة y في أحد المعادلتين الأصليتين نحصل على $x = 3$.

أنظمة أكبر من المعادلات Larger systems of equations

وكالعادة في القاعدة العامة فإنه لحل نظام من ثلاث مجاهيل فإننا نحتاج إلى ثلاث معادلات وبالمثل للأعداد الأعلى، ولذلك فلحل المعادلات $x + y + z = 0$ و $x - y - z = 2, x - 2y + 7 = 3$ فإننا نستخدم نفس طرق حل المعادلات المتزامنة ولكن لحل الأنظمة الأكبر من ذلك فإننا نحتاج إلى استخدام المصفوفات.

إذا بدأنا في حل المعادلتين الأثنين $x + y = 1 , 2x + 2y = 2$ فسوف نكتشف أنها نفس المعادلة وهذه الظاهرة من الممكن أن تحدث مع الأنظمة الأعلى مثل: $x + y + z = 6 , 2x - y + z = 3 , x + 4y + 17 = 15$ فإن هذه المعادلات لن تحل بالطريقة العادية، وذلك بسبب أن المعادلة الثالثة ليست جديدة ولكنها تأتي من المعادلتين

التي قبلها (بضرب الأولى في 3 وطرح الثانية من الناتج) وتسمي مثل تلك الأنظمة بالتابع ويكون لهم عدد لانهائي من الحلول مثل $x = 1 , y = 2, z = 3$.

نأتي بعد ذلك لأنظمة المعادلات التي ليس لها حل مثل $x + y = 1 , x + y = 2$ وتحل المعادلتين عن طريق مستقيمين متوازيين (وبالتالي فإنه لا يوجد لهما نقطة تقاطع) وفي النظام ثلاثي الأبعاد فإننا نحصل على مستويان متوازيان كما في المعادلتين $x + y + z = 1 , x + y + z = 2$.

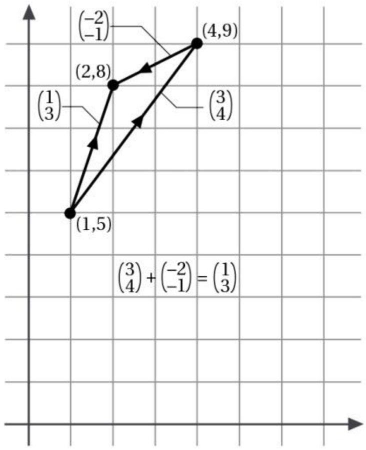
وفي الأنظمة الأكثر تعقيداً فإنها تمثل بمستقيمات منحرفة مثل $z = x + y = 1 , z = x - y = -1$ وتكون مستقيمان غير متوازيين وغير متقاطعين ولكن عبارة عن مستقيمن يمران في مستوى ثلاثي الأبعاد دون أن يتقاطعا.

حلقات كثيرات الحدود Polynomial rings

تعتبر الأعداد في الصل أداة لتعداد الأشياء وساعدت البشر كثيراً في عمليات أخرى. وفي القرن العشرين حدث تحول بشأن كثيرات الحدود قبل ذلك كانت تعتبر كثيرة الحدود طريقة مناسبة لبعض المشكلات التي تحتوي على عدد مجهول فقط ولكن في الوقت الحالي فإن كثيرات الحدود من الممكن أن تجمع وتطرح وتضرب ولذلك فإن مجموعة كثيرات الحدود ذات المعاملات الصحيحة وفي متغيرا واحد x تكون حلقات تسمى $z(x)$ وبالمثل فإننا نستطيع أن نسمى حلقات كثيرات الحدوث ذات المعاملات المركبة وفي متغيرين $c(x, y)$ ويوجد أنظمة عديدة أخرى مثل أنظمة العدد المختلفة وهذه الأنظمة لها عمق خفي ودراستها لها أهمية كبيرة في علم الجبر المعاصر ونظرية العدد والهندسة.

المتجهات والمصفوفات VECTORS AND MATRICES

المتجهات VECTORS

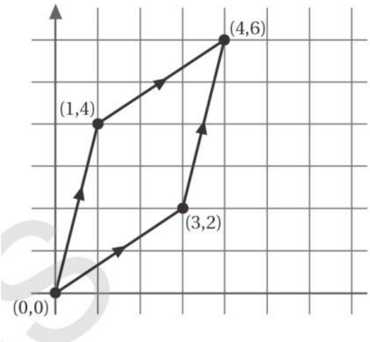


في هندسة المستويات تعرف الأشياء مثل $\binom{3}{4}$ بالمتجهات وهي عبارة نظام لإعطاء اتجاه من نقطة لأخرى.

ويعتبر العدد في الصف العلوي هو المسافة في اتجاه اليمين، والصف السفلي هو المسافة في الاتجاه الأعلى، ولذلك فإن $\binom{3}{4}$ تمثل بثلاث وحدات في اتجاه اليمين وأربعة وحدات لأعلى. والعدد السالب في الصف العلوي تعني اتجاه اليسار وفي الصف السفلي تعني الاتجاه لأسفل ولذلك فإن $\binom{-2}{-1}$ قفز بوحدتان في اتجاه اليسار ووحدة واحدة لأسفل وبداية من النقطة (1,5) في اتجاه المتجه $\binom{3}{4}$ سوف نصل إلى النقطة (4,9) وإذا أخذنا بعد ذلك المتجه $\binom{-2}{-1}$ قفز بوحدتان في اتجاه اليسار ووحدة واحدة لأسفل وبداية من النقطة (1,5) في إتجاه المتجه $\binom{3}{4}$ سوف نصل إلى النقطة (4,9) وإذا أخذنا بعد ذلك المتجه $\binom{-2}{-1}$ فسوف نصل للنقطة (2,8) بواسطة المتجه $\binom{1}{3}$ وذلك بواسطة جمع المتجهين $\binom{1}{3} = \binom{3}{4}+\binom{-2}{-1}$ تطبق نفس الطريقة على المتجهات في المستوى ثلاثي الأبعاد مثل $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ وبالمثل رباعي وخماسي الأبعاد.

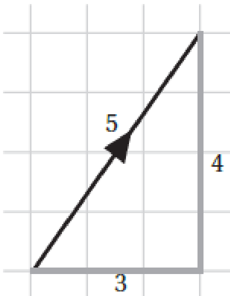
قانون متوازي الأضلاع Parallelogram law

لأي متجه مسافة واتجاه ويكتب عن طريق سهم مستقيم لطول معين وليس له نقطة بداية ولا نهاية. فإذا بدأنا المتجه $\binom{1}{4}$ من نقطة الأصل (0,0) فسوف نصل للنقطة (1, 4) وإذا أخذنا بعد ذلك المتجه $\binom{3}{2}$ فسوف نصل للنقطة (4, 6) وإذا أخذنا المتجهين بترتيب معاكس فسوف نصل لنفس النقطة (4, 6) ولذلك فإنه لأي متجهين u, v $u+v = v+u$.



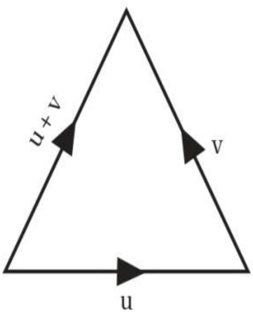
ولذلك فإن جميع المتجهين تبادلي ويعرف ذلك بقانون متوازي الأضلاع وعلى الرغم من أن المتجهان لم تكن تعرف قبل القرن التاسع عشر إلى أن قانون متوازي الأضلاع ق عرف في القرن الأول الميلادي بواسطة "هيسروالسكندري"

طول المتجه Length of a vector



يوجد المتجه طول واتجاه وطريقة إيجاد طول المتجه هي "نظرية فيثاغورث" ولذلك فإن طول المتجه $\binom{3}{4}$ هو $5 = \sqrt{3^2 + 4^2}$ ويرمز لطول المتجه بالرمز $\|V\|$ ويخضع طول المتجه لقوانين تباين المثلث أبعد من الطريق باستخدام الضلع الثالث وتعرف هذه الطريقة في الرياضيات بتباين المثلث ومن البديهي، فإن أي فكرة متعلقة بالمسافة يجب أن تنتج هذه القاعدة.

تباين المثلث The triangle inequality

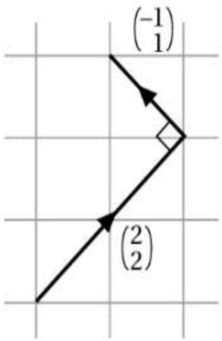


ويعتبر تباين المثلث ذات أهمية كبيرة في دراسة المتجهات فإذا كان u,v متجهان فليس من الصحيح أن طول u+v يساوي طول v مضافا إليه طول u. فمثلا إذا كان

$v=\binom{3}{4}$ و $u=\binom{0}{-4}$ فإن $\|V\| = 5$ و $\|u\| = 4$

ولكن $\|v+u\| = 3$ ولذلك فإننا لا نستطيع أن نقول أن $\|u\| + \|V\| = \|v+u\|$ ونستنتج من ذلك أن $\|V+u\| < \|V\|$ $\|V\|+$ والتي تعني أن طول الضلع الثالث في المثلث أصغر من مجموع طولي الضلعين الآخرين.

ضرب المتجهات The dot product

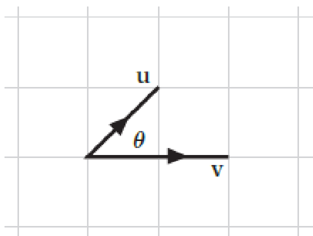


يوجد طريقة لدمج متجهين لا للحصول على متجه ثالث ولكن للحصول على عدد يوصف هذه العلاقة وذلك عن طريق ضرب الأعداد المتناظرة في كل متجه ثم جمع الناتج فمثلا $\binom{1}{2}.\binom{3}{4} = 1x3 + 2x4 = 3 + 8 = 11$ ونستفيد من ضرب المتجهات في معرفة طول المتجه فمثلا $\|v\| = \sqrt{v.v}$ وأيضا في معرفة ما إذا كان المتجهان عموديان وذلك إذا كان $u.v = 0$ فمثلا $\binom{-1}{1}.\binom{2}{2} = -1 \times 2 + 1 \times 2 = 0$ وتساعد أيضاً في إيجاد الزاوية بين متجهين.

الزاوية بين متجهين The angle between two vectors

إذا كانت θ هي الزاوية بين المتجهين u,v إن

$$\cos\theta = \frac{u.v}{\|u\|\|v\|}$$



فعلى سبيل المثال إذا كانت $u - \binom{1}{1}$, $v = \binom{2}{0}$ فإن:

أيضاً $u.v = 1x2 + 0x1 = 2$

$\|v\| = \sqrt{2^2} = 2$ و $\|u\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

وبالتالي فإن:

$$\cos 0 = \frac{2}{\sqrt{2} \times 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 0 = 45^0$$

متباينة كوشي شوارز Cauchy-Schwarz inequality

تعرف المتباينة في الرياضيات بأنها علاقة بين كميتين أحدهما أكبر من الأخرى وأشهر المتباينات قد اكتشفت عن طريق " أوجستن كوشي" عام 1821م وطورها بعد ذلك "هيرمان شوارز" ونص هذه المتباينة. لأي أربعة أعداد a,b,x,y

$$(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$$

وبالتالي فإن:

$$\left|ax + by\right| \leq \sqrt{(a^2 + b^2)\ (n^2 + y^{2)}}$$

ويمكن التعبير عن هذه المتباينة بواسطة المتجهات بحيث $u - \binom{a}{b}, v = \binom{x}{y}$ لتصبح

$$" \left|u.v\right| = \| u \| \|V\|$$

ويمكن تطبيق هذه المتباينة في المجموعات الأكبر

$$(ax + by + \cdots + CZ)^2 \leq (a^2 + b^2 + \cdots + c^2)(x^2 + y^2 + \cdots + z^2)^1$$

الضرب الاتجاهي لمتجهين The cross p roduct

استنتجنا مما سبق أن حاصل الضرب القياس لمتجهين ليس بمتجه ولكنه عد معين ويوجد طريقة أخرى لضرب متجهين u, v لتعطي متجه ثالث $u \times v$ وتسمى بالضرب الاتجاهي. جبرياً هي أقل دقة وتعمل فقط في المستوى ثلاثي الابعاد فعلى سبيل المثال $u \times v \neq v \times u$ ولكن $u \times v = -v \times u$ وتعرف بالقانون

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bz - cy \\ cx - az \\ ay - bx \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

هندسيا فإن $u \times v$ عمودي دائماً على كل من المتجهين u و v ويعطي الاتجاه طبقاً لقاعدة اليد اليمنى. وبالنسبة لـ $u \times v$ يعطي بالعلاقة

$$\| u \times v \| = \| u \| \| v \| \ \sin\ 0$$

حيث 0 هي الزاوية بين المتجهين $u \times v$ إذا كان المتجهان متوازيان فإن الزاوية بينهما صفر وبالتالي فإن طول $u \times v$ يساوي صفر.

وعموما فإن الضرب الاتجاهي له أهمية كبيرة في دراسة الفيزياء لمعرفة المحالات الكهرومغناطيسية.

المصفوفات Matrices

المصفوفة هي عبارة عن مجموعة من الأعداد ممثلة كالتالي: $\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$ أو $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ وتأتي المصفوفات بشكل مستطيلي أو مربعي ولكن لا نستطيع جمع مصفوفتين إلا إذا كانوا بنفس الحجم وذلك بجمع الأعداد المتناظرة $\begin{pmatrix}6 & 9\\9 & 12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & 7\\6 & 8\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$.

ضرب متجه مصفوفة Multiplying a vector by a matrix

لنبدأ بمثال بسيط. عند ضرب مصفوفة بسيطة (3 2) بمتجه $\binom{4}{5}$ فإننا نحصل على مصفوفة 1×1 وذلك بضرب الأعداد المتناظرة ثم جمع النواتج.

$$(23)\binom{4}{5} = (2 \times 4 + 3 \times 5) = (23)$$

وهذه هي الطريقة الأساسية في المصفوفات الأعلى

$$\begin{pmatrix}2 & 3\\6 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 \times 4 + 3 \times 5\\6 \times 4 + 7 \times 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}23\\59\end{pmatrix}$$

وتعلم هذه الطريقة مع كل أنواع المصفوفات

$$\begin{pmatrix}1 & 2\,3\\3 & 2\,1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6\\3 \times 4 + 2 \times 5 \ + 1 \times 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}32\\28\end{pmatrix}$$

تعتبر مصفوفة الوحدة $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ من أهم المصفوفات وعند ضربها في أي متجه لا تغير شكل المتجه فعلى سبيل المثال $\binom{a}{b} = \binom{a}{b}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ ومصفوفة الوحدة 3×3 هي $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ ويرمز لها دائماً بالرمز I ومصفوفة الوحدة هي المحايد الضربي فهي تلعب نفس دور العدد 1 في الأعداد.

ضرب المصفوفات Multiplying matrices

من السهل جداً ضرب مصفوفتين فمجرد معرفتك ضرب متجه بمصفوفة تستطيع أن تحسب $\begin{pmatrix}5 & 6\\7 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$ فقط تقسم المصفوفة $\begin{pmatrix}5 & 6\\7 & 8\end{pmatrix}$ إلى متجهين $\binom{6}{8}, \binom{5}{7}$ ونحسب حاصل ضرب كل متجه منهم بالمصفوفة الأولى

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19\\43\end{pmatrix} \text{ and } \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}22\\50\end{pmatrix}$$

ثم نكتب المصفوفة على الشكل $\begin{pmatrix}19 & 22\\43 & 50\end{pmatrix}$.

وبعد ذلك نستطيع أن نضرب مصفوفتين بدون فصلها لمتجهين. مع مراعاة أنه عند إيجاد حاصل ضرب مصفوفتين نستخدم الصف من المصفوفة الأولى معغ العمود المناظر من المصفوفة الثانية. وعموماً فإنه في ضرب المصفوفات ليس صحيحاً أن AB=BA ولذلك فإن ضرب المصفوفات ليس تبادلية.

المحددات Determinants

المحدد لمصفوفة مربعة هو عدد مرتبط به مكتوب بطريقة خفية على شكل المحدد. فمثلاً المصفوفة 2×2 $\begin{pmatrix}a & b\\c & D\end{pmatrix}$ والمحدد هو $ad - bc$ يمكن كتابة المحدد على الشكل $\det A$ أو $|A|$

$$\det\begin{pmatrix}a & b & c\\d & e & f\\g & h & i\end{pmatrix}=a.\det\begin{pmatrix}e & f\\h & i\end{pmatrix}-b.\det\begin{pmatrix}d & f\\g & i\end{pmatrix}+c.\det\begin{pmatrix}d & e\\g & h\end{pmatrix}$$

وبنفس الطريقة يمكن حساب المصفوفات الأعلى. ويمكن ضرب المحددات بنفس طريقة المصفوفات. لأي مصفوفتين A, B

$$\det(AB) = \det A \det B$$

ولذلك بمجرد معرفة المحدد A, B نستطيع معرفة المحدد AB. إذا كان $\det = 0$ فإن A ليس له معكوس. بمعنى أنه لا توجد مصفوفة B. بحيث أن $AB = I$ حيث I هي مصفوفة الوحدة . وإذا كان $\det A \neq 0$ فإن A لها معكوس.

قلب المصفوفات Inverting matrices

إذا كان لدينا المصفوفة A فإن السؤال الأساسي هو هل لديها معكوس أم لا ؟ إذا وجدت المصفوفة B بحيث أن AB=I فهذا يعني أن أي عملية تتم في المصفوفة A تكون غير مفعلة في المصفوفة B.

وإذا لم توجد المصفوفة B فهذا يعني خسارة كبيرة في العمليات بالنسبة لـ A ولقلب المصفوفة "A" 2×2بحث $A\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ فإننا نتبع الخطوات الآتية:

1- توجد محددها $\det A = ad - bc$ إذا كان يساوي صفر فإننا يجب أن نتوقف لأن A ليست لها معكوس

2- كون مصفوفة جديدة وتسمى المصفوفة المصاحبة لـ A بحيث

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

3- نقسم كل عدد في المصفوفة المصاحبة على $\det A$ لنحصل معكوس المصفوفة A A^{-1}

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{d}{ad - bc} & \dfrac{-b}{ad - bc} \\ \dfrac{-c}{ad - bc} & \dfrac{a}{ad - bc} \end{pmatrix}$$

وبشكل آخر فإن $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj} A$. ويمكن هذا أيضاً في المصفوفات الأعلى ولكنه يكون من الصعب إيجاد كل من المحدد والمصفوفة المصاحبة بسهولة.

المصفوفة المصاحبة The adjugate of a matrix

يمكن إيجاد مقلوب المصفوفة 3×3 بنفس طريقة المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

نتبع الآتي:

1- نكون مصفوفة جديدة بتبديل الصفوف لأعمدة فالصف الأول يكون العمود الأول وهكذا وتسمى بدور المصفوفة A $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} A^{T}$.

2- نحدد أحد الأعداد في المصفوفة A^{T} ونحذف الصف والعمود الموجود به هذا العدد لتصبح المصفوفة 2×2 فمثلاً بحذف الصف والعمود الخاص بالعدد 3 الموجود بالصف الأول $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ لتصبح على الشكل $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ وفي هذه الحالة يكون $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = 3$.

3- وبعمل تلك الخطوة لكل عدد في المصفوفة A^T تنتج المصفوفة $\begin{pmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 7 & -3 & -8 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

4- الخطوة الأخيرة هي تغيير الإشارات طبقاً للقاعدة $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$ والتي تعني أن + تعني عدم تغيير الإشارة و - تعني تغييرها.

لنصف أخيراً للمصفوفة $\text{adj } A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 7 & -3 & -8 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

إذا أردنا استخدام ذلك لايجاد معكوس A فإننا نطبق القاعدة $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\text{adj } A$ لتصبح

$$A^{-1}\begin{pmatrix} \frac{-5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{12} & \frac{1}{4} & \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{12} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

تحويلات المصفوفات Transformation matrices

التحويلات مثل الدوران والإنعكاس هي عبارة عن أخذ إحداثيات نقطة وإعادة توحيدها بطريقة أخرى فمثلاً إنعكاس نقطة على المستقيم $y = x$ تتعين بتغيير إحداثيات النقطة فمثلاً (1,2) تصبح (2,1) .

والإنعكاس في محور السينات تغير إشارة الإحداثي الصادي (1,2) تصبح $(1,-2)$ والدوران بزاوية $90°$ حول نقطة الأصل تجعل النقطة (1,2) تصبح $(-2,1)$ هذه الطريقة تتم عن طريق ضرب المصفوفات ولفعل ذلك فإنه من السهل أن تفعلها بدلالة المتجهات فبدلاًمن النقطة (1,2) سوف نعمل على المتجه التي يعطي إتجاه هذه النقطة من نقطة الأصل وهي. $\binom{1}{2}$ وإنعكاس هذا المتجه في المستقيم $y = x$ يعطي عن طريق ضربه بالمصفوفة $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

وبالمثل إنعكاس في محور السينات يعطي عن طريق ضربة بالمصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

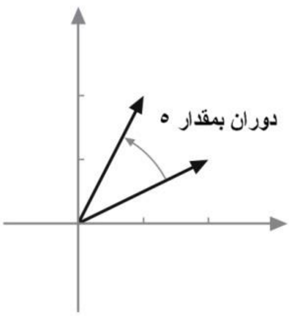
والدوران بزاوية 90° حول نقطة الأصل يعطي بالضرب في $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

دوران المصفوفات Rotation matrices

أشهر أنواع الدوران هي بزاوية 90° و 80° و 270° حول نقطة الأصل ويعطي كلاً منهم بالضرب في المصفوفات $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

يعطي دوران المصفوفة حول نقطة الأصل فقط (الدوران حول أي نقطة أخرى يحول إلى دوران حول نقطة الأصل وإنتقال). وتعتبر القاعدة العامة لدوران المصفوفات بزاوية θ هي:



$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ فمثلاً الدوران بزاوية 30° تعطي بـ $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$

ومحدد دوران المصفوفة دائما يساوي 1 حيث $\cos 0 + \sin 0^2 = 1$.

انعكاس المصفوفات Refl ection matrices

يمكن انعكاس المصفوفة حول أي مستقيم يمر بنقطة الأصل وأشهر الأمثلة هي المستقيات x=0, y=0, y=-x, y = x ويوصف كلاً منهم بالمصفوفات $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ على الترتيب.

وللدورانات الأخرى كل مستقيم يمر بنقطة الأصل يعرف عن طريق حيلة، فمثلا

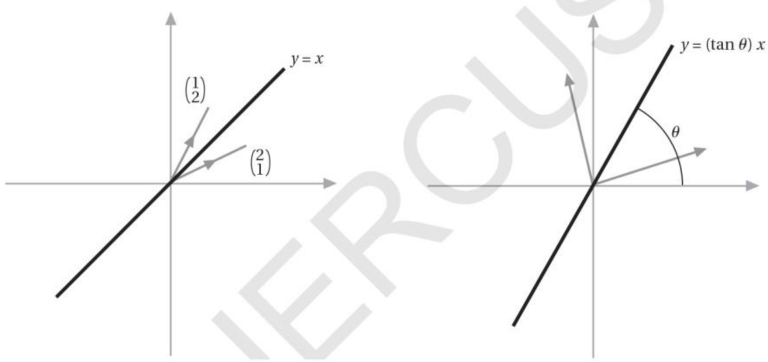
إذا كانت زاويته مع محور السينات هو محور السينات (المستقيم y=0) وتكون الزاوية 0° والمستقيم $y = x$ زاويته 45° ومحور الصادات زاويته 90° والمستقيم $y = -x$ زاويته 135° والزاوية 180° نرجع إلى محور السينات فإذا كانت زاوية مع محور السينات هي θ فإن ميله هو $\tan\theta$ ولذلك فإن معادلة المستقيم تعطى بالعلاقة $y = (\tan\theta)\,x$ والإنعكاس في هذا المستقيم يوصف بالمصفوفة

$$\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

فالمستقيم $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ زاوتيه 30° ويكون الإنعكاس حول هذا المستقيم يعطي بالضرب في المصفوفة

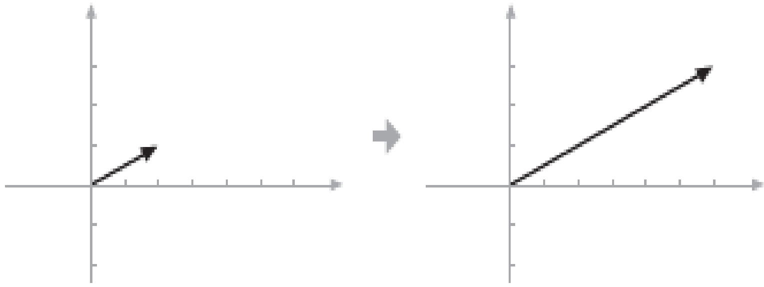
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

ومحدد أي إنعكاس مصفوفة يساوي دائماً 1-.



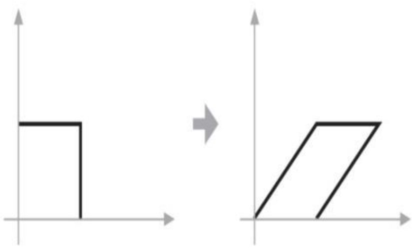
تكبير وقص المصفوفات Enlargement and shearing matrices

كل التكبيرات بالنسبة لنقطة الأصل يمكن كتابتها على شكل مصفوفات بصورة بسيطة، فلتكبير المتجه $\binom{2}{1}$ بمقياس 3 نضرب كل إحداثي في العدد 3 لتعطي $\binom{6}{3}$ وهو نفس الشيء عند ضربه بالمصفوفة $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ حيث $\binom{6}{3} = \binom{2}{1}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.



وعموما فإن التكبير بمقياس a يعطي بالمصفوفة $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

وتوجد طريقة مختلفة للتحويل تعطي بالمصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.



وهذا مثال على القص. فالقفص دائما يحافظ على مستقيم واحد بدون تغيير (وفي هذه الحالة هو محور السينات) وتغير النقاط الأخرى لتوازي هذا المستقيم متناسبة في المسافات بينها. هذا التناسب يسمى عامل القص (في هذه الحالة 1) مع ملاحظة أن القص دائما يحافظ على مساحة الشكل.

مجموعات المصفوفات Groups of matrices

من السهل ضرب المصفوفات عندما تكون المصفوفة مربعة ويوجد مصفوفة خاصة لكل حجم وهي المصفوفة المحايدة والتي لا تغير أي شيء في المصفوفة الأصلية فبالنسبة للمصفوفة 3×3 لا تكون مرة، والمشكلة أنه ليس لكل مصفوفة معكوس، فإذا كان محدد المصفوفة A يساوي صفى فإن A ليس لها معكوس وهذه هي العقبة الوحدية، فإذا استثنينا المصفوفات التي محددها صفر، فإن بقية المصفوفات تكون زمرة وتسمى الزمرة الخطية العامة من الجردة الثالثة. توجد أيضاً. صغيرة أخرى بداخلها. وبالنسبة للمصفوفات التي محددها يساوي 1 تنتج زمرة أخرى وهي الزمرة الخطية الخاصة.

وبالنسبة للمصفوفات 2×2 فإن تجميع كل من دوران وانعكاس المصفوفات يكون زمرة وتسمى الزمرة العمودية من الدرجة الثانية. وفي الأبعاد الأعلى فإن مدى التحويلات الممكنة يزداد. ولكن تبقى الزمرات العمودية مهمة.

وهكذا فإن زمرات المصفوفة المختلفة هي أمثلة مبدئية زمرات "lie groups" وعند تحليلهم بدقة ينتج التصنيف البسيط لـ "lie groups" وعند استبدال الأعداد في المصفوفات بالعناصر من المجال المنتهي، ونستطيع إيجاد العائلات التي تميز في التصنيف البسيط المنتهي للمجموعات.

المصفوفات والمعادلات Matrices and equations

بالإضافة إلى استخدام المصفوفات في الهندسة فإن لها أهمية كبيرة في حل المعادلات المتزامنة وتحويلها إلى معادلة واحدة.

فبأخذ المعادلتين 2x+y=7 , 3x-y=3 فإنه يمكن التعبير عنهما معا كالتالي:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ويكون معكوس المصفوفة $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ هو $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{-2}{5} \end{pmatrix}$

فإذا ضربنا طرفي المعادلة في هذه المصفوفة فإن المصفوفتين على الطرف الأيسر سوف يتم حذفهما ويتبقى $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{-2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ وبضرب المصفوفتين ينتج أن $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ويكون الحل هو $y = 3 , n = 2$ وهذه الطريقة تصلح لحل المجموعات الأعلى من المعادلات في أكثر من مجهول.

نظرية الزمرة GROUP THEORY

بديهيات الزمرة The group axioms

إذا جمعنا عددان صحيحان فانه يوجد شيئان واضحان:

1- يوجد عدد مميز وهو الصفر والذي لا يغير أي شيء إذا تم إضافته لأي عدد.

2- إذا جمعت العدد n مع العدد السالب n- فإن الناتج يساوي صفر والشيء الثالث يوضح بهذا المثال $23 = 6 + 16 = 6 + (5 + 12)$ والتي تعطي نفس الإجابة عندما $23 = 11 + 12 = (6 + 5) + 12$ ولذلك فإن طريقة اختيار القوس لا تؤثر في الناتج لأن هذه الطريقة تسمى الدمج.

هذه الحقائق البسيطة وعلماء التجريد أعطوا فكرة واضحة عن الجبر المجرد والي يسمى الزمرة وهو تجمع عدد من الأشياء والتي يمكن كتباتها في أزواج ولها ثلاث بديهات:

1- يوجد شيء مميز وهو المحايد والذي لا يغير شيء عند جمعه مع آخر.

2- كل شيء له معكوس وهو الذي إذا جمعه مع آخر يعطي المحايد.

3- عملية جمع الزمر دامجة.

الزمر Groups

توجد الزمر في كل أنواع الجبر المجرد، والزمرة هي تجمع من الأشياء بطريقة معينة بحيث تحقق بدهيات الزمرة ويعتبر جمع الأعداد الصحيحة مثال على ذلك كما بينا في الأعلى.

عملية ضرب الأعداد أيضاً تكون زمرة وفي هذه الحالة يكون المحايد 1 ومعكوس العدد q يكون $\frac{1}{q}$ ولكن معكوس 2 هو $\frac{1}{2}$ وهو ليس عد صحي ولذلك فإن الأعداد الصحيحة لا تكون زمرة بالنسبة لعملية الضرب ولكن غذا مدت إلى الأعداد النسبية فإنها تكون زمرة ولكن يوجد مشكلة لان العدد 0 ليس له معكوس لأنه لا يوجد عدد إذا تم ضربه في العدد 0 يعطي 1 ولذلك فسوف نستبعده لنصل إلى الأعداد النسبية الغير صفرية وهي تكون زمرة في عملية الضرب.

هذه الأمثلة لانهائية ولكن توجد أيضاً الزمر المنتهية والتي تحتوي على بعض الزمر المتماثلة والزمر التبادلية.

توضيح آخر بخصوص الأعداد الصحيحة فحيث أن 17+89 :89+17 فإن ترتيب العملية غير مهم وتسمى هذه الزمر "Abelian" نسبة إلى عالم الجبر النرويجي "نيلس أبل"، يوجد أيضاً عدد من الزمر "non-abelian" مثل زمر المصفوفات في عملية الضرب.

زمر التبديل Permutation groups

كم عدد الطرق المختلفة التي نستطيع بها ترتيب المجموعة {1,2,3} ؟ يمكن معرفتها عن طريق $3!=3\times2\times1=6$ والطرق الستة هم 1,2,3;1,3,2; 2,1,3;2,3,1;3,1,2;3,2,1

لكل ترتيب يوجد دالة مناظرة تسمى التبديل والتي تبين طريقة إعادة ترتيب الأرقام من 1,2,3 إلى الترتيب الجديد

1	→	1
2	→	3
3	→	2

or

1	→	2
2	→	3
3	→	1

وهذا التبديل يمكن تنفيذه واحدا بعد الآخر وبوضعهما معا تعطي:

1	→	2	→	3
2	→	3	→	2
3	→	1	→	1

⇒

1	→	3
2	→	2
3	→	1

والتبديل المحايد لا يغير أي شيء

1	→	1
2	→	2
3	→	3

ولكل تبديل معكوس

1	→	3
2	→	1
3	→	2

or

1	→	2
2	→	3
3	→	1

لأنه عند وضعهم معا يعطي المحايد

1	→	2	→	1
2	→	3	→	2
3	→	1	→	3

ولذلك فإن الست تبديلات تكون زمرة وتسمى الزمرة المتماثلة في ثلاثة عناصر أو 3ـs وبالمثل نستطيع إنشاء الزمرة المتماثلة لأي عدد ومن العناصر

الدورة Cycle notation

الدورة هي طريقة مناسبة لوصف التبديل بدلا من كتابته في جدول

1	→	2
2	→	3
3	→	1

فإننا نستطيع استخدام (3 2 1) للإشارة إلى التبديل فبأخذ 2 to 3,1 to 3,2 لتكمل الدورة إلى 1 .

وبالمثل الدالة الآتية:

1	→	1
2	→	3
3	→	2

يمكن كتابتها على صورة (3 2) (1) حيث دورة 1 هي نفسها وكل من 3 and 2 يكون دورة طولها 2 وغالبا لا يكتب 1 ويكتب التبديل على الشكل (3 2) .

نظرية الكابوس Librarian’s nightmare theorem

إذا استعار أحد العملاء كتب من مكتبة ما وأعادها على يمين أو يسار مكانهم الأصلي، ما عدد الترتيبات الناشئة عن ذلك؟

الجواب هو أنه بعد مرور بعض الوقت كل ترتيب يكون ممكن وأبسط التباديل هي التبديلات التي تترك كل شيء كما هو باستثناء تبديل النقطتين المجاورتين والسؤال هو ما أكثر التبديلات المعقدة التي يمكن أن تبنى من التبديلات المتلاحقة؟

والجوب هو لكل تبديل يمكن عمل ذلك.

الدورة (3 2 1) ليست تحويل لأنها تحرك ثلاث عناصر 3 to 1 , 2 to 3 , 1 to 2 ولكنها لها نفس التأثير لتعديل 2 and 1 ثم تبديل 3 and 2.

لتكتب (3 2) (2 1) = (3 2 1) لتضمن نظرية الكابوس أن لكل تبديل يمكن التعبير عنه في صورة ضرب تحويلات.

تحويلات الزمن التبادلية Alternating groups

تقول نظرية الكابوس أن كل تبديل يمكن أن يقسم إلى تحويلات وهذا التمثيل ليس وحيدا فعلي الرغم من أنه يوجد عدة طرق لإنشاء تبديل جزئي من التحويلات على سبيل المثال: في الزمرة المتماثلة "S_3" (3 2) (2 1) = (2 3 1) .

وأيضا (2 1) (3 2) (2 1) (3 2) = (2 3 1) من خلال كل التمثيلات الممكنة يبقى شيء ما هو الثابت إذا كان التبديل عبارة عن حاصل ضرب أعداد زوجية من التحويلات فإن كل تمثيل يجب أن يشتمل على عدد زوجي وبالمثل إذا كان التبديل عبارة عن حاصل ضرب لعدد فردي من التحويلات فإنه يمكن أن يكتب على شكل تركيب لعدد فري وهذه الحقيقة تقسم التبديل إلى فردي وآخر زوجي.

يعتبر تجمع التبديلات الزوجية مهم جدا لأنه يكون زمرة جئية تسمى زمرة تبادلية عدد عناصرها n أو An فعندما $n \geq 5$ تسمى هذه الزمرة بالزمرة البسيطة وحقيقة أن A_5 هي أول زمرة بسيطة يعود إلى نظرية جالوا.

جداول كايلي Cayley tables

ينشأ الأطفال عادة على حفظ جدول الضرب

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

وبالطبع هذا الجدول غير مكتمل لوجود عدد لانهائي من الأعداد، في وحدة الضرب 5 تختفي هذه العقبة لان كل القيم تصبح موجودة

×	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

في القرن التاسع عشر سمي هذا الجدول باسم عالم الرياضيات البريطاني "آرثر كايلي"، هذا الجدول يعرف مجموعة الأعداد الغير صفرية تحت وحدة الضرب S (لاحظ أن كل عنصر في المجموعة يظهر مرة في كل صف وكل عمود).

مثال آخر: بأخذ مجموعة متماثلة من مثلثات متساوية الأضلاع. طالما المحايد يكتب بالشكل 1 وهذا يحتوي على دوران بزاوية 120° يسمي R ودوران آخر بزاوية 240° الناتج عن تضاعف R ويسمي R^2 يوجد أيضاً انعكاس في الخط الرأسي يسمى T والإنعكاسين المتبقيين هما إنتاج تتابع T بـ R أو R^2 لذلك فإننا نسميهم TR وTR^2 ولذلك فإن كل جدول الضرب يظهر كيف تتفاعل هذه العناصر الستة.

كل زمرة منتهية يمكن كتابتها في جدول كايلي بهذه الطريقة.

	I	R	R^2	T	TR	TR^2
I	I	R	R^2	T	TR	TR^2
R	R	R^2	I	TR^2	T	TR
R^2	R^2	I	R	TR	TR^2	T
T	T	TR	TR^2	I	R	R^2
TR	TR	TR^2	T	R^2	I	R
TR^2	TR^2	T	TR	R	R^2	I

التماثل Isomorphisms

فهم آرثر كايلي أن النمط بواحدة من جداوله يحتوي على خلاصة مجردة لزمرة. أسماء العناصر والسيناريوهات الهندسية لها أهمية ثانوية. ولكي نقول أن زمرتين متماثلتين يجب أن يكونا نفس الشيء (حتى لو ظهروا في حالات مختلفة تماما) كل ذلك مطلوب لتحويل واحدة لأخرى لها تغير منهجي من التسميات.

في الدورة يكون للزمرة المتماثلة على {0,1,2} جدول كايلي كالتالي:

	ι	(0 1 2)	(0 2 1)	(0 1)	(0 2)	(1 2)
ι	ι	(0 1 2)	(0 2 1)	(0 1)	(0 2)	(1 2)
(0 1 2)	(0 1 2)	(0 2 1)	ι	(1 2)	(0 1)	(0 2)
(0 2 1)	(0 2 1)	ι	(0 1 2)	(0 2)	(1 2)	(0 1)
(0 1)	(0 1)	(0 2)	(1 2)	ι	(0 1 2)	(0 2 1)
(0 2)	(0 2)	(1 2)	(0 1)	(0 2 1)	ι	(0 1 2)
(1 2)	(1 2)	(0 1)	(0 2)	(0 1 2)	(0 2 1)	ι

$$\begin{array}{ccc} 1 & \rightarrow & 1 \\ (0\,1\,2) & \rightarrow & R \\ (0\,2\,1) & \rightarrow & R^2 \\ (0\,1) & \rightarrow & T \\ (0\,2) & \rightarrow & TR \\ (1\,2) & \rightarrow & TR^2 \end{array}$$

وهذا التعديل يسمي قاتل وبديهيا فإنه يقال لزمرتين أنهما متماثلتان إذا كان لهما نفس عدد العناصر لكن هذا ليس كافيا فوحدة الجمع 6 أيضاً تنتج زمرة من ستة عناصر ولكنها مختلفة عن الزمرة السابقة.

	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

وحد التماثل يمكن أن ينطبق على بنية جبرية أخرى غير الزمر (مثل الحلقات والحقول) ولكنها تحمل أيضاً نفس المعنى. وهذان البنيتان مطابقان مع إعادة تسمية العناصر التي تحتاج إلى ذلك فقط للتحويل من واحدة لأخرى.

الزمر البسيطة Simple groups

بما أن العدد الأولى هو العدد الذي لا يقسم إلى أعداد صغيرة فإن الزمر البسيطة لا تقسم أيضاً إلى زمر صغيرة فض حالة الزمر المنتهية يوجد أيضاً نظير للنظرية الأساسية للحساب (نظرية جوردن هولدر 1889م) والتي تقول أن كل زمرة منتهية تبني من زمر بسيطة بطريقة وحيدة. يعطي تصنيف الزمرة البسيطة المنتهية وصفا كاملا لهذه اللبنات الأساسية.

وفي حالة الزمر الغير منتهية تكون غير واضحة، حيث أنه ليست كل زمرة يمكن أن تقسم إلى قطع قابلة للتجزئة بهذه الطريقة وعلى الرغم من أن بعض الحالات الخاصة يمكن معالجتها فإن الحالة الأكثر أهمية هي "تصنيف زمر لاي البسيطة".

تصنيف الزمر البسيطة المنتهية The classifi cation of fi nite simple groups

يعتبر من أهم الاكتشافات الرياضية في القرن العشرين تصنيف الزمر البسيطة المنتهية وهو تتويج لفريق المشروع الضخم والمنشور في حوالي 500 صفحة بمجهود أكثر من 100 عالم من علماء الرياضيات والجهد المبذول لإنشاء "إثبات الجيل الثاني" ومستمرون في مكان واحد، وسوف تمتد إلى 12 مجلدا (تم نشر ستة منهم في وقت كتابة هذا الكتاب) والنظرية الأخيرة تعطي وصف دقيق لـ 18 عائلة غير منتهية من الزمر المنتهية.

أول هذه العائلات هي عائلة الزمر الدائرية: وحدة الجمع P حيث P عدد أولي ثم بعد ذلك الزمر التبادلية والعائلات الباقية هي الزمر المتماثلة لبعض الهياكل الهندسية المنتهية. توصف النظرية أيضاً 26 زمرة فردية مثل الزمر المنقطعة وأكبرهم هي الوحش " The monster".

وأخيرا فإن هذه النظرية الرائعة تنص على أن الـ 18 عائلة والـ 26 زمرة فردية تضم معا المجموعة الكاملة للزمر البسيطة المنتهية.

الوحش The monster

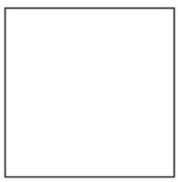
تأتي في 808, 017, 424, 794, 512, 875, 886, 459, 904, 961, 710, 757, 005, 754, 368, 000, 000, 000 عنصر، ويعتبر الوحش أكبر الزمر البسيطة المنتهية من الـ 26 زمرة المتقطعة. يوجد بالطبع زمر منتهية غير محددة الحجم ولكن الممتع في زمرة الوحش هي أنها وحيدة بذاتها وليست جزء من أي عائلة أكبر أو نمط واكتشفت عام 1973م وأنشئت بواسطة "برند فيشر وروبرت جريس" عام 1980م وظهر الوحش في البداية باعتباره صفة غريبة: احتمال اندماجي عجيب.

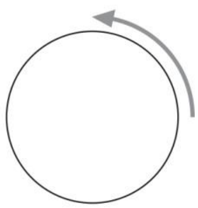
في عام 1979م وعلى الرغم من تفاجؤ "جون كونوي وسيمون نورتين: من إيجاد منطقة

غير مترابطة من الأشكال النمطية ووصف ظاهرة الوحش الغير متوقعة بالعبث وجعلوا التخمين لهذين العالمين وثيق الصلة، وفي سباق القوة عام 1992م أثبت "ريتشاردبورشروس" التخمين العبثي باستخدام أفكار عميقة من نظرية الكم الميداني وبعد إكمال الإثبات وصف شعود حينها بأنه over the moon.

زمر لاى Lie groups

الزمرة المتماثلة لمربع تحتوي على أربعة دورنات بـ °0 ,°90 ,°180 ,°270 وفي المقابل يمكن دوران الدائرة بزاوية °1 ,°197.8 أو أي زاوية وهذا يعني أن الزمرة المتماثلة للدائرة تكون غير منتهية، ومن المنطقي أن نتحدث عن دوراناِن قريبان من بعضهما فالدوران بزاوية °1 يجعل الدائرة ثابتة بدون تغيير كذلك الدوران بزاوية °0.1 ,°0.001 ولذلك فإن هذا الدوران يعتبر أقرب للدوران المحايد فهذا التماثل الطفيف لا يغير شيء. وتسمح هذه الزمرة بالتدرج والتغييرات المستمرة عوضا عن الزمر المتماثلة المنفصلة للمضلعات.





في الحقيقة تبدو زمرة التماثل للدائرة أشبه بالدائرة نفسها فمثلا الدوران بزاوية °360 يرجعنا لنقطة البداية ويوجد أيضاً بعض الانعكاسات الغير منتهية المتناظرة مع اختيار أقطاره مختلفة للدائرة كما في خطوط المرآة. ويمكن لانعكاسين أن يكونا أقرب لبعضهما (إذا كان خطوطهما هي نفسا تقريبا) ولكن لا يمكن لانعكاس أن يكون أقرب للمحايد ولذلك فإن هذه الزمرة المتماثلة تأتي في عنصرين بارزين: الدورنات التي يمكن أن تصل إلى المحايد والانعكاسات التي لا يمكن أن تصل إليه.

وهذه تسمى الزمرة العمودية الثانية. (الثالثة تناظر تماثلات الكرة وهكذا) الزمر العمودية هي أولى الأمثلة لزمر لاي والتي اكتشفت بواسطة النرويجي (سوفوس لاى) والتماثلات لأي مضاعف سلس ينتج زمرة لاى مما يجعل هذا ذا أهمية كبيرة في الفيزياء وغالبا كما في الزمر العمودية فإن زمرة لاى يمكن كتابتها على أنها زمرة مصفوفات.

تصنيف زمر لاى البسيطة The classifi cation of simple Lie groups

في عام 1989م كتب عالم الكم (جون كمولمان) مقالا بعنوان "أعظم ورقة رياضية في كل العصور" واقتبس هذا العنوان المهيب من أعمال العالم (فيلهلم كيلينج) ومن بين كل الاختراقات التكنولوجية وصل كيلينج إلى تصنيف كامل لزمر لاى البسيطة.

تلعب زمر لاى اليوم دوراً أساسياً في علم الفيزياء، ودورا عميقا رياضيا بالطريقة التي ترتبط بها مع علم الجبر عن طريق نظرية الزمرة مع أفكار عميقة من الهندسة التفاضلية وزمر لاى البسيط لها أهمية خاصة : فهي التي لا يمكن تمسيمها إلى زمر لاى الاصفر أكمل (إيلى كارتان) المشروع المهم الذي بدأه كيلينج وكتبه (جين ديودوني) والتي جعله ممكنا فقط بواسطة فطنته الجبرية والهندسية الخارقة والتي صنعت جيليين من الرياضيين وكان نتاج مجهودات كيلينج وكارتان أربع عائلات غير منتهية من زمر لاى البسيطة مستمرة من زمر المصفوفة.

أطلس زمر لاى The atlas of Lie groups

منذ اكتشاف كيلينج وكارتان تصنيف زمر لاى البسيطة فقد عرفنا أن كل زمرة من زمر لاى البسيطة يجب أن تكون واحدة من القائمة وإنجازا هائلا كهذا لم يكن النهاية، لأننا لم نعرف ما بداخل هذه الزمر، وأفضل طريقة لفهم هذا المشروع الضخم والأشياء المجردة هي تقريبهم لاشياء نعرفها جيدا ألا وهي زمر المصفوفات، وهذا هو موضوع نظرية التمثيل. أطلب زمر لاى هو مشروع لتجميع نظرية التمثيل لكل زمر لاى.

E_8

أكثر زمر لاى البسيطة تقعيدا هي E_8 وتصف تماثلات شيء ما في مساحة 57 من الاعباد. وتعتبر E_8 نفسها في مساحة 248 من الأبعاد وتم الانتهاء من تحليل تمثيل المصفوفة E_8 في عام 2007م من قبل فريق من علماء الرياضيات والمبرمجين بقيادة (جيفرى أدمز) في جامعة ماريلاند والمعلومات الموجودة تصف E_8 على أنها تحتل ضخامة 60 جيجا بايت وبالمقارنة فإن الجينوم البشري أقل من حجم جيجا بايت واحد.

مشكلة التمديد The extension problem

في الكيمياء يتم دمج عناصر مثل الكربون والهيدروجين إلى مركبات فصيغة مثل C_5H_{12} تخبرنا أن كل جزئ من المركب يحتوي على خمسة ذرات كربون واثنا عشر ذرة من الهيدروجين. هذه المعلومات ليست كافية لإثبات مركب كيميائي جديد ويمكن الجمع بين العناصر بطرق مختلفة تسمى isomers "الايزومرات" فتجمع ايزومرين معا يعطي الصيغة C_5H_{12} ولأن هذه الذرات ترتبط بطرق مختلفة فالناتج يمكن أن يكون مركبين غير متشابهين في الخصائص الكيميائية.

ينطبق نفس الشيء على نظرية الزمرة. وفهم الزمرة ليس كافيا لمعرفة بنيتها بدلالة الزمر البسيطة ويمكن الدمج بين زمرتين ببعض الطرق المختلفة فعلى سبيل المثال يمكن البدأ بزمرة من وحدة الجمع 2:

	0	1
0	0	1
1	1	0

بأخذ نسختين من هذا ودمجهما معا يعطي احتمالين. أولهما أنه لإضافة زوجين من الزمرة فإن هذا ينتج ما يسمى بزمرة كلاين 4:

	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
(0,0)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
(0,1)	(0,1)	(0,0)	(1,1)	(1,0)
(1,0)	(1,0)	(1,1)	(0,0)	(0,1)
(1,1)	(1,1)	(1,0)	(0,1)	(0,0)

وبالتبادل ينتج وحدة الجمع 4:

	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

وفهم الاحتمالات المختلفة لدمج زمرتين يسمى بمشكلة التمديد وبشكل عام فهو صعب نسبيا ولكن يوجد حالات خاصة مثل الزمر المنتهية من الحجم الأولى وهي من المواضيع المكثفة الدراسة والأسلوب الوحيد تم نشرة بواسطة (ماركوس دي سوتوى) والآخرين وهو استخدام دوال L "L-functions" لترميز المعلومات حول الزمر.

الزمر القابلة للحل Solvable groups

أسهل الزمر فهما هي زمر ابليان حيث أنها صحيحة دائما عند $x4 = 4x$ وجميع أنظمة العدد المألونة تحقق ذلك وليست كل زمرة هي ابليان زمر المصفوفة والزمر التبادلية والزمر المتماثلة ليست زمر ابليان. ثاني أفضل الزمر هي ليست زمر ابليان نفسها ولكنها بنيت من أجزاء بسيطة لميست ابلين مثل A وهي ليست قابلة للحل. وكان لـ (ايفارستي جالويس) نظرة عظيمة لفائدة الزمر في دراسة المعادلات. والسؤال هنا هل الزمر الناتجة قابلة للحل؟ نعرف هذا في (نظرية جالويس).

الجبر المجرد ABSTRACT ALGEBRA

الجبر المجرد Abstract algebra

يختلف الجبر الأعلى عن العادي المكون من تشكيلة الأرقام والحروف لاسيما في تلك الحسابات التي تتم في الإعدادات. الأكثر تجريدا من أنظمة عائلات الأعداد الصحيحة أو الأعداد النسبية. وتلعب أنظمة العدد (مثل الأعداد الصحيحة) دورا في بناء تجمع من الأشياء (تسمى عناصرها) والتي تأخذ مكان الأعداد المفردة ونخضع كل ذلك لبعض البديهيات كبدهيات الزمرة. وكل تلك التركيبات يمكن دراستها بعمق عن طريق التحقيق في النتائج المنطقة من البديهيات.

التركيبات الجبرية Algebraic structures

درست التركيبات الجبرية المجردة على نطاق واسع ومذهل بواسطة علماء الرياضيات والأمثلة الأكثر أهمية هي الزمر والحلقات والحقول فالأول وهلة قد يبدو النهج الرسمي

منقطع كليا عن أي نوع من الواقع ولكن بعض الأشياء الرياضية مثل الأعداد الصحيحة والأعداد المركبة والمصفوفات مناسبة لواحدة أو أكثر من هذه التركيبات، ولذلك فإن دراسة التركيبات المجردة يعتمد أيضاً على دراسة هذه الأنظمة الشائعة.

وأبعد من ذلك فإن هذه التركيبات لديها عادة الظهور في أماكن غير متوقعة وهذا النهج يسمح بحل مساحات واسعة من المشكلات وبدلا من تكرار نفس العمل في سياقات مختلفة فالأفضل من ذلك هو تصنيف هذه التركيبات المجردة وهذا يعني أن مجموعة كل التركيبات تحقق البديهيات التي يمكن أن تعطي صراحة. والأمثلة هي تصنيف الزمر البسيطة المنتهية وتصنيف زمر لاى البسيطة.

الحلقات Rings

توفر الزمر طريقة رائعة لدراسة كل من الجمع والضرب المجردين ولكن بالنسبة للأرقام العادية فإن كلا العمليتين يستمرا في نفس الوقت ودعت الحاجة أيضاً إلى ابتكار طريقة جديدة لتجريد هذا النظام، وكان الحل في توصل مجموعة من علماء الرياضيات في القرن العشرين إلى مفهوم الحلقة وهي تجمع من الأشياء التي يمكن أن تجمع أو تطرح أو تضرب معا متبوعة ببعض البديهيات الدقيقة التي تحكم كيفية تفاعل هذه العملية والمثال الأكثر أهمية هو Z حلقة الأعداد الصحيحة ويوجد أيضاً حلقة المصفوفات وكثيرات الحدود والتي تظهر في جميع دراسات الجبر والهندسة وحلقة الدوال والتي تلعب دورا مهما في التحليل.

جميع الحقول تعتبر حلقات وبالمثل جميع الحلقات تعتبر زمر (عند إهمال عملية الضرب بها والتركيز على الجمع والطرح).

الحقول Fields

لدينا في الحلقة كل من الجمع والطرح والضرب ولكن ينقصنا شيء ألا وهو عملية القسمة وهذا واضح في حلقة الأعداد الصحيحة. فقسمة عدد صحيح 5 على عدد صحيح آخر 7 لا يعطي الناتج عدداً صحيحاً ولذلك فإننا لا يمكنتا أن نأمل في إمكانية القسمة دون ترك التركيب.

الحقل هو المكان الذي يسمح بعملية القسمة (مع استثناء أنه حتى في الحقل لا يمكن القسمة على 0) والحقل الأكثر شيوعا هو حقل الأعداد النسبية والأعداد الحقيقية والأعداد المركبة. يوجد أيضاً حقول مهمة ألا وهي الحقول المنتهية أي الحقل ذو العنصر الواحد و The quaternions و The octionions

الحقـول الأوليـة Prime fi elds

في وحدة الحساب 4 لا يمكن قسمة العدد 1 على 2 والسبب هو أن مضاعفات 2 هي ....,0,2,4,6,8,10 ولك عدد من تلك الأعداد عند قسمته على 4 يترك باقي 0 أو 2 ولذلك فإنه لا يوجد عدد صحيح عند ضربة في 2 يعطي إجابة مطابقة لـ 4 1 mod وهذا يعني أن الأعداد { 3 , 2 , 1 , 0} تحت وحدة الحساب 4 يمكن جمعهم وطرحهم وضربهم ولكن لا يمكن قسمتهم ولذلك فإن هذا التركيب يعتبر حلقة وليس حقلا.

في الوحدة 5 فإن أي عدد يمكن قسمته على آخر (ماعدا 0 كالعادة) فعلى سبي المثال 5 MOD 123 لأن 5 MOD 231 وهذا يعني أن مجموعة الأعداد {0,1,2,3,4} تكون حقلا ويسمى F_5 ويمكن في هذا التركيب إجراء عمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة والسبب في ذلك أن 5 عدد أولى ولكن 4 ليست كذلك. وبنفس الطريقة، فإن وحدة الحساب لأي عدد أولي P تنتج حقلا منتهيا يسمى F_p ليست الحقول المنتهية الوحيدة فيما أنه يمكننا امتداد الأعداد الحقيقية لتصل إلى الأعداد المركبة عن طريق إضافة الجذر التربيعي للعدد 1- فإننا يمكننا امتداد الحقل F_p من خلال دمج بعض العناصر الجديدة. لأي N يوجد حقل جديد F_p بعدد عناصر P فمثلا يوجد حقل F_4 عدد عناصر 4 ولكنه ليس {0,1,2,3} تحت وحدة الحساب 4 تلك الحقول المنتهية هي أشياء مفيدة بشكل ملحوظ على الأقل في الترميز.

الحقـل ذو العنـصر الواحد The ‘fi eld’ with one element

طبقا للبديهيات فإن كل حقل يجب أن يحتوي على العنصر الذي لا يغير شرع عند ضربه بآخر وهو 1 والعنصر الذي لا يغير شيء عند جمعه بآخر وهو 0 ولذلك فإن 1.0

واحدة من أهم الحقائق الأساسية في الحقول وهي تحتوي على عنصرين على الأقل (في الحقيقة أصغر حقل F2 يحتوي على عنصرين).

ولذلك لا يوجد حقل يحتوي على عنصر واحد فقط ومع ذلك فإن هذه الاستحالة المنطقية لم توقف "جاك تيتس" من فتح المناقشات حول هذا الموضوع عام 1957م كما أنها لم تمنع العديد من علماء الرياضيات من تطوير مجموعة من المعارف حول الكيان المعدوم والذي يعرف بـ F_1 (أور بما من الأنسب أن يعرف بـ un والتي تعني one بالفرنسية).

كانت رؤية علماء الرياضيات في F_1 ككائن الحد النظري للحقول كما في مالانهاية الأعداد الطبيعية والمبدأ الموجه هو أن F_1 تحول الأجسام الاندماجية إلى أخرى هندسية ووفقا لهذه الفلسفة فإن مجموعة الأعداد الصحيحة يمكن تخيلها على أنها منحني على F_1 ومجموعات عادية غير منظمة من الأشياء المتشابهة الأصناف.

نظرية جالوا Galois theory

كل من الأعداد النسبية والأعداد الحقيقية والأعداد المركبة هي أمثلة للحقول وعلى الرغم من أن كل منها مستقل بذاته إلا أن كل نظام من أنظمة هذه الأعداد له علاقة بالآخر فكل الأعداد النسبية هي أعداد حقيقية وكل الأعداد الحقيقية أعداد مركبة ويوجد شيء مهم يمكن حدوثه عند الانتقال من حقل أصغر إلى حقل أكبر ألا وهي المعادلة التي كانت سابقا ليس لها حل في نظام أعداد معين فمثلا $x^2 - 2 = 0$ ليس لها حل في الأعداد النسبية ولكن عند الانتقال إلى الأعداد الحقيقية وعند الانتقال إلى الأعداد المركبة فيوجد لها حل I.

بناء على مجهودات " أبيل" في حل معادلات الدرجة الخامسة في أوائل القرن التاسع عشر وضع مع "إيفاريست جالوا" عدة محاور مركزية في الجبر وبتاء على هذه المجهودات فقد تطورت نظرية جالوا تطورا عظيما. وفي المصطلحات الحديثة فإن نظرية جالوا هي الدراسة لكيفية معيشة حقل داخل آخر. وثمة جانب بالغ الأهمية وهو أن تقرر ما هي المعادلات الجديدة التي يمكن حلها في الحقل الأكبر ولا يمكن حلها في الحقل الأصغر؟

التماثلات والمعادلات Symmetries and equations

عند الانتقال من حقل أصغر (الأعداد الحقيقية) إلى آخر أكبر (الأعداد المركبة) فإن الحقل الجديد يجلب معه تماثلات جديدة.

فعلى سبيل المثال فإن الاقتران المركب هو تماثل للأعداد المركبة ولا يمكن هذا في الأعداد الحقيقية. وهذا التماثل يقلب على I , I- وهما الحلان للمعادلة $x^2 + 1 = 0$ ونظرية جالوا يمكن اعتبارها دراسة لتماثلات حلول هذه المعادلات. هذه التماثلات تكون زمرة. وأدرك إيفاريست جالوا أن السؤال الأهم هو، هل الزمرة الناتجة قابلة للحل أم لا؟

ومثل أبيل كانت حياة جالوا مذهلة وقصيرة ومأساوية وثورية ملتزمة.

ألقى القبض عليه مرة واحدة لتهديده حياة الملك (على الرغم تبرئته في وقت لاحق) وفي سن الـ 21 قتل في مبارزة في ظروف غامضة.

نظرية جالوا Galois' theorem

تناول جالوا مسألة متى يمكن حل معادلة الجذور. والصيغة التربيعية هي صيغة تحتوي على $+, -, \times, \div, \sqrt{\ }, \sqrt[3]{\ }, \sqrt[4]{\ }, \ldots\ldots$ والتي سوف تعطي حلول لأي معادلة تربيعية والصيغ التكعيبية والدرجة الرابعة بالمثل.

وتقول نظرية جالوا أن هذه الصيغة موجودة إذا كانت الزمرة المناظرة قابلة للحل.

الزمر الماثلة S_1, S_2, S_3, S_4 هي زمر قابلة للحل وهو ما يفسر لماذا المعادلات الخطية والتربيعية والتكعيبية كلها لها صيغ لحلها ومن ذلك فإن الزمر .... $S_5, S_6, S_7, \ldots$ غير قابلة للحل وعند تقسيم S_n إلى قطع بسيطة فإنك تواجه زمرة non abelian البسيطة A_n (انظر الزمر المتبادلة). وبالتالي فإن المعادلات من الدرجة الخامسة والدرجات الأعلى ليست قابلة للحل.

نظرية التمثيل Representation theory

المشكلة في الجبر هي أنها غالبا يعتقد أنها مجردة كثيرا وهذا ليس اعتقاد الطلاب فقط

بل هي مشكلة علماء الرياضيات أيضاً فعلى سبيل المثال تعتبر الزمرة شيء مجرد للغاية. للزمر المنتهية يمكننا الحصول على ترتيب لها عن طريق كتابة جدول كايلي (طالا أنها ليست كبيرة جدا) وبفعل ذلك فإن هذا العمل يجعل الزمرة مجردة. وللزمر الغير منتهية لا يوجد طريقة أسهل من ذلك. فتعتبر أكثر الزمر المادية أسهل كثيرا للعمل عليها. زمر المصفوفات هي أمثلة رئيسة. فكل ما عليك القيام به هو أن تتعلم قوانين ضرب المصفوفة وتصبح الزمرة أكثر استيعابا تعتبر نظرية التمثيل طريقة مناسبة لفهم الجبر المجرد وأفضل طريقة هي عندما يمكننا تحديد أن زمرتنا هي في الواقع زمرة مصفوفة (وهذا يعني أنها متماثلة لأخرى) وحتى عندما لا يكون ذلك صحيحا فإنه يمكننا إيجاد زمر مصفوفة تقريبية لزمرتنا. وهذا يسمى بتمثيل الزمرة. وتهدف نظرية التمثيل إلى تجميع الزمرة الأصلية من المعلومات المقدمة من تمثيلها. بدأت نظرية التمثيل في دراسة الزمر ولكن دراسة الحلقات والتركيبات الأخرى بهذه الطريقة هي الموضوع الرئيسي للجبر الحديث.

نظرية الفئة Category theory

قال الشاعر "جون دون" "لا يوجد رجل مثل الجزيرة" وينطبق هذا أيضاً على التركيبات الجبرية فإذا أردنا دراسة زمرة معينة فإنها غالبا تكون منتجة لبحث علاقتها مع الزمر الأخرى. والمثال التقليدي هو تقسيم الزمرة إلى زمر أصغر وللزمر الأخرى تكون العلاقات ممكنة أيضاً.

ومن الأفضل التعبير عن هذه العلاقات كدوال بين الزمر ولذلك فإن كمية معينة من المعلومات لا تبقى مع الزمرة الفردية ولكن مع الدرجات الأعلى. وتجمع كل هذه الزمر والدوال بينها هو مثال للفئة.

يمكن حدوث شيء رائع وجدير بالملاحظة وهو إمكانية إثبات أشياء باستخدام تقنيات عامة والتي لا يبدو أنها تعتمد على خصائص الزمر ولكن فقط على فئة من الموضوعات مع دوالها. وحول علماء التوبولوچي "سوندرس ماك لين وصموئيل إلينبرج" ما وصفوه بالسابق بالهراء المجرد إلى موضوع في مساره الصحيح وأدت أبحاثهم في هذا المجال على

تطور علم التوبولچي الجبري والذي يربط بين الزمر وعلم التوبوجلي. وأفضل وسيلة لتخيل هذا هو إدراك أنها كفئة من المساحات التوبولوچية والزمر.

ومع تفكير علماء الرياضيات بطريقة أكثر تجريدا في الأشياء الغامضة (وتعتبر مخططات الهندسة الجبرية الحديثة مثال رئيس على ذلك) بدأت أهمية طرق نظرية الفئة تنمو سريعا.

متى يصبح شيئان هما نفس الشيء؟ When are two things the same?

يعتبر هذا السؤال هو السؤال العميق والمفاجئ وله عدة إجابات تعتمد تحديدا على معنى "نفس الشيء" واقتراب الهندسة لتقديم إجابات مختلفة ويعتبر السؤال أيضاً مهم في الجبر.

وأقوى مفهوم للتشابه هو مفهوم التساوي: يقال لشيئين أنهما نفس الشيء إذا كانوا واحد في كل شيء وليس اثنين (في اللغة الغير رياضية التساوي له معاني مختلفة كالرجال والنساء يمكن أن يتساويا ولكنها ليسا نفس الشيء) التساوي هي فكرة صحيحة من التشابه لنظرية الزمرة. في الجبر تكون أكثر تقييدا وفي نظرية الزمرة يفضل التماثل فكرة أنهما متطابقان فمثلا لا يمكن لزمرتين أن يكونا نفس الشيء ولكن إذا كانا متماثلان فإن لديهم نفس جدول كايلي ويكونا متطابقان في كل شيء مهم.

في بعض السياقات ولاسيما الهندسة الجبرية أعتبر (كيتي موريتا) أن حلقتين هما نفس الشيء إذا كان لهما نفس التمثيل وهذا الا يعني أنهما متماثلان ولكن حاول موريتا معادلة ما يكفي لضمان وجود العديد من الخواص المهمة.

الفئة المشتقة The derived category

أفضل طريقة للتصدي إلى مسألة متى يصبح شيئان هما نفس الشيء هي نظرة الفئة حتى تم اكتشاف فكرة أكثر عمقا من التشابه عن طريق (جان لويس فيردر وألكسندر جورثنديك) وتسمى الفئة المشتقة مع تعميم مرويتا للتكافؤ فإذا أنتج شيئان نفس الفئة المشتقة فهذا يعني تجاهل التفاصيل السطحية داخلها واعتبارهما نفس الشيء وتعتبر الفئة المشتقة مكونا مهمّا لبرنامج (لانجلان) فضلا عن الجبر الحديث والهندسة الجبرية.