الفصل الأول

مبادئ المنطق الرياضي

١ – **المحاكمة الرياضية** : هي مقالة مؤلفة من تتابع اشارات ورموز هي الكلمات والأعداد والأشكال وغيرها وتتكون هذه المقالة من وحدات نسمي كلاً منها جملة مفيدة . واذا علمنا أن علماء اللغة يقسمون الكلام إلى خبر وإنشاء ، وأن الأول ما يجوز أن يوصف قائله بالصدق أو الكذب ، والثاني ما خالف ذلك ، فإن الجمل التي تدخل في المحاكمة الرياضية **هي جمل خبرية حصراً** ولكي نميز هذا النوع من الجمل نسمي كلاً منها **قضية** (Proposition) .

أمثلة :

١ – إن قولنا « ارسم مثلثاً أضلاعه ٢ ، ٣ ، ٥ » ليس بقضية .

٢ – وقولنا « للمعادلة ٢ س^{٢} – ٥ س – ٣ = ٠ أربعة جذور » قضية كاذبة .

٣ – وقولنا « جذرا المعادلة س^{٢} – ٣ س + ٢ = ٠ هما العددان ٢ ، ١ » قضية صادقة .

٤ – « اذا كانت أطوال أضلاع شكل رباعي متساوية فهو مربع » قضية كاذبة .

٥ – « إن القمر سيارة تدور حول الأرض » قضية كاذبة .

٢ – **القضية الرياضية** : القضية الرياضية وهي على أشكال ثلاثة فمنها ما هو صحيح (صادق) دوماً كقولك ٣ $<$ ٥ ، ومنها ما هو خاطىء (كاذب) دوماً مثل $\sqrt{٥}$ = ٢ ، ومنها مـا هو صحيح ضمن شروط معينة وخاطىء حين تنتفي هذه الشروط فإذا قلنا إن المثلث ب حـ ى متساوي الساقين فإننا نكون صادقين من أجل فئة من المثلثات وكاذبين من أجل بقية مجموعة المثلثات .

وكثيراً ما يختلف الحكم على قضية معينة باختلاف الزمان أو المكان أو الأشخاص الذين تتعلق بهم هذه القضية ونحكم على قضية بالصدق أو الكذب مستندين إلى ما اتفق عليه من لهم علاقة بهذه القضية ، فلو قلنا مثلاً « إن مجموع زوايا المثلث قائمتان » فإننا نكون أمام قضية صادقة في الهندسة المستوية ومن أجل أناس يعترفون بصحة الهندسة الأقليدية ، وقد تكون هذه القضية ذاتها كاذبة في هندسة أخرى كالهندسة الكروية ، ومن أجل أناس لا يدينون بالهندسة الأقليدية .

نرمز عادة لكل قضية بحرف فنقول القضية (ب) والقضية (حـ) وهكذا ، وعندما نذكر قضية ما ، نعني تحققها فاذا قلنا القضية (ب) التي تعني « إن المثلث ب حـ ى متساوي الساقين » . فاننا نقصد بذلك أن المثلث ب حـ ى متساوي الساقين . وإذا أردنا نفي القضيـة (ب) كتبنا (لا ب) أو على الأغلب (~ ب) .

أمثلة :

١ – « العدد ٣٥ يقبل القسمة على ٧ » قضية نرمز لها بـ (ب)

و « العدد ٣٥ لا يقبل القسمة على ٧ » نفي للقضية ب نرمز لها بـ (~ ب) .

٢ – « إن العدد $\sqrt{٣} = ١,٧$ » قضية نرمز لها بـ (ب)
و « $\sqrt{٣} \neq ١,٧$ » القضية النافية للقضية السابقة ونرمز لها بـ (~ ب) .

٣ – « إن المثلث ب حـ ى متساوي الأضلاع » قضية نرمز لها بـ (حـ) و « إن المثلث ب حـ ى قـائم الزاوية » قضيـة أخرى لا يمكن تسميتها بالقضية النافية لـ حـ لأن هناك مثلثات ليست بمتساوية الأضلاع ولا قائمة الزاوية .

٣ – **ساحة القضية الرياضية** : تتعلق كل قضية رياضية بفئة معينة من الأشياء . نسمي عادة بمجموعة هذه الأشياء **ساحة القضية** (مجال ، مجموعة تعريف) ونرمز لكل فرد من أفراد هذه الساحة بأحد الحروف (س ، ع ، ف ...) التي تمثل عادة المقادير المجهولة . نسمي هذا الحرف متحول هذه القضية فاذا قلنا « إن س مثلث قائم الزاوية » فإن هذه الجملة لا تمثل قضية ما لم نستبدل بالمتحول س مثلثاً معيناً من مجموعة المثلثات (ساحة القضية) كقولنا « إن المثلث التي تقاس أضلاعه بالأعداد ٣ ، ٤ ، ٥ هو مثلث قائم الزاوية » .

إذا درسنا قضية من هذا النوع عندما يتنقل متحولها ضمن ساحتها فإننا سنتوصل الى تجزئة هذه الساحة إلى أقسام تكون القضية على بعضها صحيحة دوماً وخاطئة دوماً على البعض الآخر ، ونصف هـذه القضية عند تنقل متحولها على أجزاء الساحة التي تكون فيهـا صحيحة بالحرف (ص) ونعطيها الحرف (خ) على أجزاء الساحة التي تكون عليها خاطئة. وقد اتفق أن نسمي كل حرف من هذين الحرفين « قيمة القضية » وأن يستبدل بهذين الحرفين في جبر القضايا ، العددان (٠ ، ١) حيث يمثـل العدد (٠) قيمة القضية الخاطئة ويمثل العدد (١) قيمة القضية الصحيحة.

٤ – **أسس الرياضيات – المفاهيم والمبادىء** : لقد درسنا أقساماً من

الهندسة الاقليدية في السنوات الأولى من المدارس الثانوية ورأينا أن هذا العلم لا يتكون من مجموعة مبعثرة من المعلومات مستقل بعضها عن بعض بل إنها أفكار مترابطة نستنتج كل فكرة من أخرى بمحاكمة متسقة نسميها **المحاكمة المنطقية** وتستند كل قضية على قضيه أخرى حتى نصل إلى نفر قليل من القضايا الأساسية التي نقبلها بدون برهان ونسميها مبادىء الهندسة الاقليدية (مسلمات ، مصادرات ، موضوعات) وتستند الهندسة المستوية الإقليدية إلى المبادىء الأساسية التالية :

١ – يمر من نقطتين مختلفتين مستقيم واحد فقط .

٢ – إذا كان ن مستقيماً و ب نقطة خارجة عنه ، فإنه يمكن إنشاء مستقيم مواز لـ ن من النقطة ب وهذا المستقيم وحيد (مسلمة إقليدس).

وإن لكل فرع من فروع العلوم الرياضية مبادىء أولية نقبلها بدون برهان ونستند اليها من أجل برهان بقية قضايا هذا العلم .

ولقد عملنا في الهندسة على أشياء هي الأشكال الهندسية وأعطينا لكل منها تعريفاً يربط بين هذا الشيء وشيء آخر سبق أن عرفناه إلى أن نصل إلى أشياء لا نعطيها أي تعريف بل نفهمها كما يفهمها غيرنا ونسميها المفاهيم (Notions) مثل مفهوم النقطة والمستقيم والمستوي في الهندسة ومفهوم العدد الطبيعي في الحساب ومفهوم المجموعة في حساب المجموعات.

٥ – **المحاكمة الرياضية والمنطق** : لقد وصفنا المحاكمة الرياضية بأنها منطقية فما هو دور المنطق بالنسبة للعلم ؟.

إن للمنطق وظيفة يؤديها للعلم وللعلوم الرياضية بصورة خاصة وهي أن يقوم بتحليل المفاهيم والمبادىء التي يستند اليها هذا العلم ويناقش الطرائق التي يستعملها للتوصل إلى الحقيقة وإلتماس الشروط التي تجعل قضية ما صادقة بالنسبة للمبادىء المذكورة .

ويقوم المنطق على قبول قوانين ثلاثة للفكر هي :

١ – **قانون الذاتية (الهوية)** : الذي يحكم الفكر بمقتضاه أن الشيء المعين هو هو بذاته مهما اختلف سياقه ويعبرون عن هذا القانون تعبيراً رمزياً فيقولون :

« ب هي ب »

٢ – **قانون عدم التناقض** : وهو الذي يحكم الفكر بمقتضاه ، أنه لا يمكننا أن نصف شيئاً بصفة وننفيها عنه في آن واحد ، والصورة الرمزية لهذا القانون هي :

لا يكون ب و ~ ب في آن واحد

أي ب و ~ ب خاطىء ، دوماً (مستحيل)

أي أنه إذا تحققت القضية (ب) انتفى نقيضها (القضية النافية لها) فاذا كان العدد الطبيعي س زوجياً فلا يمكن أن يكون في الوقت ذاته غير زوجي .

٣ – **قانون الثالث المرفوع** : وهو الذي يحكم الفكر بمقتضاه بأنه يجب أن يتصف الشيء إما بصفة معينة أو بنقيضها فالشيء اللون مثلاً إما أن يكون أبيض أو لا أبيض ولا ثالث لهذين الإحتمالين وذلك بعد أن نعرف اللون الأبيض كما ان العدد الطبيعي (س) إما أن يقبل القسمة على (٥) أو لا يقبل القسمة على (٥) وليس هناك احتمال ثالث يصلح أن نصف به هذا العدد من حيث قابلية القسمة على العدد (٥) .

والصورة الرمزية لهذا القانون هي :

ب أو ~ ب

حيث (أو) هنا حرف تخيير وهذا يعني إما الأول وإلا فالثاني .

٦ – **جبر القضايا** : من المعروف أنه يمكن ربط جمل ببعضها بواسطة كلمات مثل (و) ، (أو) ، (لأن) ، (مع أن) ، (لكن) ،

(**إلا إذا**) وغيرها من الكلمات التي نسميها بأدوات ربط كقولنا :

« ٥٠ عدد طبيعي **و** يقبل القسمة على ٢ » .

« المثلث ب حـ ى متساوي الأضلاع **أو** قائم الزاوية » .

« **إذا كان** س > ٤ **فان** س > ٠ » .

« زوايا المربع قائمة **مع أن** زوايا المعين قد لا تكون قائمة » .

« لا يكون المثلث متساوي الساقين **إلا إذا** كان له زاويتان متساويتان»

ونقول عن جملة خبرية مفيدة إنها **قضية بسيطة** فيما إذا لم يكن من الممكن توزيعها إلى جملتين خبريتين مفيدتين مرتبطتين بإحدى أدوات الربط كما هي حال الجمل التالية :

« القمر منير » ، « العدد ١٦ زوجي » ، « الشكل ب حـ ى هـ مربع » ، « زوايا المعين غير قائمة » .

وإذا ربطنا مجموعة من القضايا البسيطة بأدوات ربط حصلنا على قضية جديدة نسميها **قضية مركبة** . ونسمي التركيب المؤلف من القضايا البسيطة هذه وأدوات الربط **البنية المنطقية** للقضية المركبة .

إن وظيفة جبر القضايا هي تكوين القضايا المركبة ودراسة تأثير البنية المنطقية على القضية المركبة واستنتاج قيمة هذه القضية انطلاقاً من القيم المختلفة للقضايا البسيطة الداخلة في تركيبها آخذاً بعين الإعتبار أدوات الربط التي يحويها التركيب المذكور .

ومن المعلوم أن بعض أدوات الربط تستخدم في اللغة لأكثر من معنى وهو أمر غير مستساغ في الرياضيات . وقد تم الاتفاق في المنطق الرياضي على اعطاء كل أداة المربط معنىً محدداً لا لبس فيه ولا غموض . ونبين كيف نستخدم أدوات الربط في المنطق الرياضي بدراسة الصور المهمة لتركيب القضايا .

ولما كانت دراستنا للقضايا المركبة ستبدأ بتركيب قضيتين فمن المفيد

أن نذكر أن الحالات المختلفة لقيمتي القضيتين ب ، حـ معاً أربع كما هو مبين في الجدول الآتي :

ب	حـ
١	١
١	٠
٠	١
٠	٠

٧ – القضايا المركبة الأساسية :

١ً – **الاقتضاء** : نستعمل في اللغة الدارجة تراكيب شرطية تتكون من جملة أولى تسمى الشرط وجملة ثانية تدعى جواب الشرط وتربط بينهما أداة ربط تدعى أداة الشرط مثل قولنا « إذا كان المثلث متساوي الساقين فإن منصف زاوية الرأس فيه ينصف القاعدة » .

نلاحظ أن هناك رابطة بين الجملة الأولى والجملة الثانية فالجملة الأولى سبب للثانيـــة وتحقق الأولى شرط لتحقق الثانية كما أن تحقق الثانية لازم عن تحقق الأولى .

نقول « إن تحقق الأولى يؤدي إلى تحقق الثانيـة » أو « إن تحقق الأولي يقتضي تحقق الثانيـة » ونسمي العلاقـة التي تربط القضية الأولى بالقضية الثانية **علاقة اقتضاء** واذا رمزنا للقضيـة الأولى بـ ب وللقضية الثانية بـ حـ فاننا نصور القضية الشرطية المركبة بالشكل :

ب ⇐ حـ

ونقرأ ذلك : ب يؤدي إلى حـ أو ب يقتضي حـ

إن معنى الإقتضاء في المنطق الرياضي يختلف قليلاً عن معناه الدارج

الذي أوردناه أعلاه إذ أن الاقتضاء الرياضي ب ⇐ ح هو بالتعريف القضية المركبة من ب و ح والتي تتحقق دوماً إلا في الحالة التي تكون فيها ب صحيحة و ح خاطئة .

مثال : إن قولنا « إذا كان اليوم صحواً فسنذهب إلى الحديقة » قضية شرطية تمثل اقتضاء وهي غير كاذبة إلا في الحالة التي يكون فيها الجو صحواً ولا نذهب إلى الحديقة ويكون هذا الاقتضاء صادقاً في الحالات الثلاث التالية :

١ً « اذا كان اليوم صحواً » و « ذهبنا الى الحديقة »

٢ً « إذا لم يكن اليوم صحواً » و « ذهبنا إلى الحديقة »

٣ً « إذا لم يكن اليوم صحواً » و « لم نذهب الى الحديقة ».

ويمكن تلخيص تعريف الاقتضاء في جدول يبين الحالات التي تكون فيها هذه القضية المركبة صحيحة أو خاطئة . ويسمى هذا الجدول جدول الحقيقة لقضية الاقتضاء .

ب	ح	ب ⇐ ح
١	١	١
١	•	•
•	١	١
•	•	١

ملاحظة :

نقول عن القضية ب إنها غير منسجمة مع ح فيما إذا كان (ب ⇐ ~ ح) .

٢ً – **التكافؤ** : نقول ، تعريفاً ، إن القضيتين ب ، حـ متكافئتان فيما إذا اقتضت كل واحدة منهما الأخرى أي اذا كان :

(ب ⇐ حـ) و (حـ ⇐ ب)

ونرمز لذلك بالشكل :

$\boxed{\text{ب} \Leftrightarrow \text{حـ}}$

ونذكر ذلك بقولنا : « إن الشرط اللازم والكافي لتحقق حـ هو تحقق ب » . أي أنه يكفي لتحقق حـ أن تتحقق ب كما أنه يلزم لتحقق حـ أن تتحقق ب فلا تتحقق حـ إلا إذا تحققت ب وإذا تحققت ب فسوف تتحقق حـ .

ويمكن تعريف تكافؤ قضيتين بجدول الحقيقة التالي :

ب	حـ	ب ⇔ حـ
١	١	١
١	٠	٠
٠	١	٠
٠	٠	١

الذي يبين أن القضية ب ⇔ حـ صحيحة إذا كانت ب ، حـ صحيحتين معاً أو خاطئتين معاً .

مثال (١) : (المثلث ب حـ ى متساوي الأضلاع) ⇔ (المثلث ب حـ ى متساوي الزوايا) .

مثال (٢) : (ب حـ ى هـ مربع) ⇔ (أضلاع وزوايا ب حـ ى هـ متساوية)

٣ – **الربط بـ (و)** : إذا كانت ب ، حـ قضيتان وقلنا (ب و حـ) فاننا نعني بذلك قضية تتحقق إذا تحققت ب وتحققت حـ معاً وتكون هذه القضية خاطئة في الحالات الأخرى أي في الحالات الثلاث التالية :

١ – إذا تحققت ب وانتفت حـ
٢ – إذا انتفت ب وتحققت حـ
٣ – إذا انتفى كل من ب و حـ

ويرمز عادة للقضية (ب و حـ) بالشكل ب ∧ حـ .

مثال (١) : اذا كانت ب هي القضية : (المثلث ب حـ ى متساوي الساقين)

و حـ القضية : (المثلث ب حـ ى قائم الزاوية)

فان ب ∧ حـ هي القضية : (المثلث ب حـ ى قائم ومتساوي الساقين) .

مثال (٢) : اذا كانت ب القضية « ٥ تقسم ٢٥ » ونكتبها رمزاً بالشكل (٥ | ٢٥)

و حـ القضية : (٥ | ٣٠)

فان ب ∧ حـ هي القضية : (٥ | ٢٥ و ٣٠)

ويمكن تلخيص تعريف القضية ب ∧ حـ في جدول الحقيقة الآتي :

ب	حـ	ب ∧ حـ
١	١	١
١	٠	٠
٠	١	٠
٠	٠	٠

خاصة (١) :

يبرهن في التمرين المحلول رقم (٩) المبين في نهاية هذا البحث أن :

ب ∧ حـ ⟺ حـ ∧ ب

ونقول إن الربط بـ (و) **تبديلي** .

مثال : إن قولنا : [(٥ | ٢٥) و (٥ | ٣٠)]
يكافىء قولنا : [(٥ | ٣٠) و (٥ | ٢٥)]

خاصة (٢) :

يتم بالتدريج ربط ثلاث قضايا ب ، حـ ، ى بـ (و) بأحد الشكلين التاليين :

(ب ∧ حـ) ∧ ى ، ب ∧ (حـ ∧ ى)

والشكل الأول يعني أننا نربط القضية (ب ∧ حـ) بالقضية ى ،
والشكل الثاني يعني أننا نربط القضية ب بالقضية (حـ ∧ ى) .

ويبرهن في التمرين المحلول رقم ١٢ المبين في نهاية هذا البحث أنّ :

(ب ∧ حـ) ∧ ى ⟺ ب ∧ (حـ ∧ ى)

ونقول إن (الربط بـ و) **تجميعي** :

مثال : إن قولنا: [(« ٥ | ٢٥ » و « ٥ | ٣٠ ») و (٥ | ١٥)] يكافىء
قولنا : [(٥ | ٢٥) و (« ٥ | ٣٠ » و « ٥ | ١٥ »)] .

خاصة (٣) :

يتمتع الربط بـ (و) بالخاصة :

ب ∧ ب ⟺ ب

وهذا واضح لأن القضية ب ∧ ب تتحقق فيما إذا تحققت ب وتحققت ب

٤ -- الربط بـ (أو) : استخدمنا في الفقرة (٦) **أو التخيير** التي تعني إمـا الأول وإلا فالثـاني ، كقولنا « ان المثلث ب حـ ء قائم الزاوية أو متساوي الأضلاع » . ولحرف العطف (أو)[1] معنى آخر يتضح في قولنا (جالس العلماء أو الزهاد) حيث يمكنك أن تجالس من كان عالماً فقط أو من كان زاهداً فقط أو من كان عالماً وزاهداً معاً . وتسمى (أو) في مثل هذه الحالة (أو الإباحة) .

وهذا المعنى هو المتفق عليه في الرياضيات عند ربط القضايا بالحرف (أو) ، فاذا كانت لدينا القضيتان ب ، حـ وقلنـا (ب أو حـ) فإننـا نكون أمـام قضية تتحقق إذا تحققت واحدة على الأقـل من القضيتين ب ، حـ . وتكون هذه القضية خاطئة في الحالة الوحيدة التي لا تتحقق فيها ب ولا تتحقق فيها حـ . وتكون محققة في الحالات الثلاث التالية:

١ – اذا تحققت ب وانتفت حـ

٢ – اذا انتفت ب وتحققت حـ

٣ – اذا تحقق كل من ب و حـ

ويرمز عادة للقضية (ب أو حـ) بالرمز (ب $\vee$ حـ) .

مثال : **(إن س عدد طبيعي يقبل القسمة على ٢ أو ٣) قضية محققة من أجل الأعداد التي تقبل القسمة على ٢ ولا تقبل القسمة على ٣ ، ومن أجل الأعداد التي تقبل القسمة على ٣ ولا تقبل القسمه على ٢ ، ومن أجل الأعداد التي تقبل القسمة على ٢ و ٣ أي الأعداد التي تقبل القسمة على ٦ . وتنتفي هذه القضية من أجل كل الأعداد التي لا تقبل القسمة على ٢ ولا تقبل القسمة على ٣ .**

ويمكن تلخيص تعريف القضية ب $\vee$ حـ في جدول الحقيقة التالي :

(١) راجع كتاب جامع الدروس العربية للشيخ مصطفى الغلاييني الجزء الثالث .

ب	حـ	ب ∨ حـ
١	١	١
١	٠	١
٠	١	١
٠	٠	٠

خاصة (١) :

يبرهن في التمرين المحلول رقم (١٠) المبين في نهاية هذا البحث أنّ :

ب ∨ حـ ⇔ حـ ∨ ب

ونقول (إن الربط بـ أو) تبديلي .

مثال : إن قولنا : [(عمر يدرس الأدب) أو (عمر يدرس القانون)]

يكافىء قولنا : [(عمر يدرس القانون) أو (عمر يدرس الأدب)]

خاصة (٢) :

ويبرهن في التمرين رقم (١١) المبين في نهاية هذا البحث أنّ :

(ب ∨ حـ) ∨ ى ⇔ ب ∨ (حـ ∨ ى)

ونقول (إن الربط بـ أو) تجميعي .

مثال : إن قولنا : [(عمر يدرس الأدب أو عمر يدرس القانون) أو (عمر يعمل مدرساً)]

يكافىء قولنا :[(عمر يدرس الأدب) أو (عمر يدرس القانون أو عمر يعمل بمدرساً)] .

خاصة (٣) :

يتمتع الربط بـ (أو) بالخاصة :

ب ∨ ب ⟺ ب

وهذا واضح لأن القضية ب ∨ ب **تكون محققة في كل من الحالات** الثلاث التالية :

١ – إذا تحققت ب وانتفت ب وهذا مستحيل
٢ – إذا انتفت ب وتحققت ب وهذا مستحيل أيضاً
٣ – إذا تحققت ب وتحققت ب

ويمكن توضيح ما سبق بجدول الحقيقة التالي :

ب	ب	ب ∨ ب
١	١	١
٠	٠	٠

وبمقارنة العمودين الأخيرين نتأكد من صحة هذه الخاصة .

٨ – **خواص هامة للربط بـ (و) والربط بـ (أو) :**
إذا كانت ب ، حـ ، ى ثلاث قضايا كان لدينا :

أولاً :

ب ∧ (حـ ∨ ى) ⟺ (ب ∧ حـ) ∨ (ب ∧ ى)

ويقال إن (الربط بـ و) **قابل للتوزيع على الربط بـ أو .**

مثال : إن القضية [«٥ | ١٠» و («٥ | ٣٠» أو «٥ | ٣٥»)] ⟺
القضية [(«٥ | ١٠» و «٥ | ٣٠») أو
(«٥ | ١٠» و «٥ | ٣٥»)]

ثانياً :

ب ∨ (ح ∧ د) ⇔ (ب ∨ ح) ∧ (ب ∨ د)

ويقال (إن الربط بـ أو) قابل للتوزيع على (الربط بـ و) .

مثال : القضية [« ٥ | ١٠ » أو (« ٥ | ٣٠ » و « ٥ | ٣٥ »)] ⇔
القضية [(« ٥ | ١٠ » أو « ٥ | ٣٠ ») و (« ٥ | ١٠ »
أو « ٥ | ٣٥ »)] .

٩ – **الرموز التقديرية** : لقد رأينا أنه قد يكون للقضية ب متحول وأن هذه القضية قد تتحقق من أجل كل قيمة لهذا المتحول أو من أجل بعض قيم هذا المتحول (قيمة واحدة على الأقل) أو أنها لا تتحقق من أجل أي قيمة لهذا المتحول . وقد اتفق من أجل الإختصار في الكلام أن يمثل كل من الحالتين الأولى والثانية برمز خاص ، فيرمز للحالة الأولى بالشكل :

∀ (س) ب (س)

ونقرأ ذلك بقولنا **« مهما كانت قيمة س فان القضية ب محققة »**

أما الحالة الثانية فيرمز لها بالشكل :

∃ (س) ب (س)

ونقرأ ذلك بقولنا : **« تتحقق القضية ب من أجل قيمة واحدة على الاقل لـ س »** .

نسمي ∀ **بالرمز الكلي** كما نسمي ∃ **رمز الوجود** .

مثال ١ – اذا رمزنا بـ س لمثلث متساوي الأضلاع وذكرنا القضية ب التالية :

« إذا كان س مثلثاً متساوي الأضلاع فان س مثلث متساوي

الزوايا » فان هذه القضية صحيحة من أجل كل س ونرمز لذلك بالشكل :

$\forall$ (س) ب (س)

مثال ٢ – إذا رمزنا بـ س لمثلث كيفي من مجموعـة المثلثات وذكرنا القضية التالية :

« إن س مثلث قائم »

فان هذه القضية محققة من أجل بعض المثلثات أي من أجل بعض قيم س فنرمز لذلك بالشكل :

$\exists$ (س) ب (س)

إن كلا من الشكلين $\forall$ (س) ب (س) ، $\exists$ (س) ب (س) يمثل قضية وليست إحداهما نافية للأخرى بل إن القضية الأولى حالة خاصة من الثانية .

يمكن نفي كل من هاتين القضيتين فننفي قولنا « مهما كانت س فان ب محققة » بقولنا « يوجد على الأقل قيمة واحدة لـ س تكون من أجلها ب غير محققة » .

وننفي القضية « يوجد على الأقل قيمة واحدة لـ س تكون فيها القضية محققة » بقولنا « من أجل كل قيمة لـ س تكون القضية ب غير محققة » .

نكتب ما تقدم بشكل رمزي :

$\sim \forall$ (س) ب (س) $\Leftrightarrow$ $\exists$ (س) $\sim$ ب (س)

$\sim \exists$ (س) ب (س) $\Leftrightarrow$ $\forall$ (س) $\sim$ ب (س)

تمارين محلولة

القضايا

١ – أوضح أي التراكيب الآتية يمثل قضية :

١ – إن الشكل ب حـ ى هـ معين .

٢ – هل الشكل ب حـ ى هـ معين ؟

٣ – إذا كان المستقيم ب حـ ماراً من النقطة م فهو المطلوب .

٤ – هلا رسمنا مستطيلاً .

٥ – إن القمر كوكب سيار .

٦ – دمشق عاصمة الجمهورية العربية اليمنية .

٧ – $(٢^{٥})^{٣} = ٢^{١٥}$

٨ – أوجد ناتج ما يلي ٣ (س + ٥)

٩ – للمعادلة من الدرجة الثانية جذران .

١٠ – أوجد على الضلع حـ ى من المثلث ب حـ ى نقطة متساوية البعدين عن ضلعيه ب حـ و ب ى .

الحل :

إذا تذكرنا أن القضية هي الكلام الذي يمكن وصفه بالصدق أو بالكذب فاننا نستنتج بسهولة أن التراكيب ذات الأرقام (١ ، ٣ ،

٥ ، ٦ ، ٧ ، ٩) تمثل قضايا ، بينما لا تمثل التراكيب (٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٠) قضايا .

٢ – بيّن فيما إذا كانت القضايا الواردة أعلاه صحيحة أم خاطئة :

الحل :

استناداً الى المعلومات التي قبلنا صحتها نتيجة لدراستنا وخبرتنا العامة يمكننا أن نقرر ان القضيتين (٧ ، ٩) صحيحتان وان القضيتين (٥ ، ٦) خاطئتان ، أما القضيتان (١ ، ٣) فلا يمكننا ان نقرر شيئاً بحقهما ما لم يكن الشكل والمسألة المتعلقتين بهما واقعتين أمام أعيننا .

٣ – اكتب القضايا النافية للقضايا التالية :

١ – يقبل العدد ٧٠ القسمة على ١٤

٢ – يقبل العدد الزوجي القسمة على ٢

٣ – ١٧ قاسم مشترك للعددين ٥١ و ٩٢

٤ – إن المثلث الذي أطوال أضلاعه (٣ ، ٤ ، ٥) مثلث قائم

٥ – $(ب + حـ)^٢ = ب^٢ + ٢ ب حـ + حـ^٢$

٦ – منصف زاوية الرأس في المثلث المتساوي الساقين ينصف القاعدة .

٧ – قطرا متوازي الأضلاع متناصفان .

الحل :

القضايا النافية للقضايا السابقة هي على الترتيب القضايا الآتية :

١ – لا يقبل العدد ٧٠ القسمة على ١٤

٢ – لا يقبل العدد الزوجي القسمة على ٢

٣ – ليس العدد ١٧ قاسماً مشتركاً للعددين ٥١ ، ٩٢

٤ – ليس المثلث الذي أطوال أضلاعه (٣ ، ٤ ، ٥) قائماً .

٥ – (ب + حـ)^{٢} ≠ ب^{٢} + ٢ ب حـ + حـ^{٢}

٦ – منصف زاوية الرأس في المثلث المتساوي الساقين لا ينصف القاعدة .

٧ – قطرا متوازي الأضلاع غير متناصفين .

تمرين : بين أنه إذا كانت قضية من القضايا الواردة في التمرين السابق صحيحة فإن نفيها سيكون خاطئاً وعلى العكس إذا كانت خاطئة فان نفيها سيكون صادقاً .

٤ – إذا كان مجال س ، متحول القضايا التالية ، هو مجموعة الأعداد الصحيحة ، عين القضايا الصادقة والقضايا الكاذبة من مجموعة القضايا التالية :

١ – ٣ س – ٩ = ٠

٢ – ٥ س – ٣ = ٠

٣ – ٢ س = $\sqrt{٢}$

٤ – س^{٢} – ٥ س + ٦ = ٠

٥ – (س – ١)^{٢} = س^{٢} – ٢ س + ١

٦ – $\frac{\text{٢ س – ٤}}{\text{س – ٢}}$ = ٢ ، س ≠ ٢

الحل :

نلاحظ بسهولة أن القضيتين (٥ ، ٦) صحيحتان دوماً وان القضيتين (٢ ، ٣) خاطئتان دوماً ، أما القضية (١) فهي صحيحة من أجل س = ٣ وخاطئة من أجل بقية الأعداد الصحيحة وكذلك فان القضية (٤) صحيحة من أجل القيمتين (٢ ، ٣) وخاطئة من أجل بقية القيم المأخوذة من مجموعة الأعداد الصحيحة .

٥ – برهن أن (ب ⇐ ~ حـ) ⇔ (حـ ⇐ ~ ب)

الحل :

يتحقق الفرض دوماً إلا في الحالة التي تتحقق فيها ب وتنتفي (~حـ) أي في الحالة (ب و حـ) أما المطلوب (حـ ⇐ ~ ب) فهو محقق دوماً إلا في الحالة التي تتحقق فيها حـ وتنتفي (~ ب) أي في الحالة (ب و حـ) وهذا ما يبرهن تكافؤ قضيتي الفرض والطلب أي :

(ب ⇐ ~ حـ) ⇔ (حـ ⇐ ~ ب)

ويمكننا أن نحل هذه المسألة بطريقة جدول الحقيقة :

ب	حـ	~ ب	~ حـ	ب ⇐ ~ حـ	حـ ⇐ ~ ب
١	١	٠	٠	٠	٠
١	٠	٠	١	١	١
٠	١	١	٠	١	١
٠	٠	١	١	١	١

نملىء العمودين الأول والثاني كما فعلنا في دراسة قيم قضيتين مع بعضها. أما العمود الثالث المتعلق بنفي القضية ب فهي مخالفة للقيم الموجودة في العمود الأول والقيم التي يحويها العمود الرابع مخالفة للقيم التي يحويها العمود الثاني . أما قيم العمود الخامس الذي يمثل قيم الإقتضاء فهي دوماً (١) إلا في الحالة ب و ~ (~ حـ) وكذلك الأمر من أجل قيم العمود الأخير فهي دوماً (١) إلا في الحالة حـ و ~ (~ ب) وبسبب تطابق قيم القضيتين (ب ⇐ ~ حـ) و (حـ ⇐ ~ ب) تقرر أن هاتين القضيتين متكافئتان .

٦ ــ اكتب القضايا المركبة التالية بأشكال رمزية مستعيناً بأدوات الربط وبالحروف ب ، حـ ، ... التي نرمز بها لقضايا بسيطة ثم اعط قيمة لكل من هذه القضايا :

١ ــ القمر سيارة وهو مصنوع من الحديد .

٢ ــ القمر سيارة وهو أصغر من الأرض .

٣ ــ القمر سيارة أو تابع للأرض .

٤ ــ القمر تابع للارض وهو أصغر منها .

٥ ــ العدد ٣٦ يقبل القسمة على العدد ٢ وعلى العدد ٣

٦ ــ العدد ٥ | ٢٥ أو ٥ | ٣١

٧ ــ $\sqrt{\text{-٩}} = \text{٣}$ و $\sqrt{\text{٩}} = \text{٣}$

٨ ــ $\sqrt{\text{٣}} = \text{١٫٧}$ أو $\sqrt{\text{٣}} = \text{١٫٨}$

٩ ــ $\text{ب}^{\text{د}} : \text{ب}^{\text{هـ}} = \text{ب}^{\text{د}-\text{هـ}}$ أو $\text{ب}^{\text{د}} . \text{ب}^{\text{هـ}} = \text{ب}^{\text{د}.\text{هـ}}$

١٠ ــ $\text{ب}^{\text{٢}} - \text{حـ}^{\text{٢}} = (\text{ب} + \text{حـ})(\text{ب} - \text{حـ})$

و $(\text{ب} + \text{حـ})^{\text{٢}} = \text{ب}^{\text{٢}} + \text{٢ ب حـ} + \text{حـ}^{\text{٢}}$

الحل :

اذا رمزنا بـ ب للقضية الاولى وبـ حـ للقضية الثانية الواردتين في كل واحدة من القضايا المركبة السابقة فانه يمكننا أن نكتب هذه التراكيب بالاشكال الرمزية التالية :

١ – ب ∧ حـ ، ٢ – ب ∧ حـ

٣ – ب ∨ حـ ، ٤ – ب ∧ حـ

٥ – ب ∧ حـ ، ٦ – ب ∨ حـ

٧ – ب ∧ حـ ، ٨ – ب ∨ حـ

٩ – ب ∨ حـ ، ١٠ – ب ∧ حـ

ويمكننا إستناداً إلى ما يقبله العلم في هذا العصر ، أن نقرر ان القضايا (١ ، ٢ ، ٧ ، ٨) خاطئة وأن القضايا (٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ١٠) صحيحة.

٧ – اكتب القضايا النافية للقضايا المركبة الواردة في التمرين السابق :

الحل :

إذا عدنا إلى تعريف القضية المركبة بـ (و) والقضية المركبة بـ (أو) وتذكرنا متى تتحقق كل من هاتين القضيتين ومتى تنتفي فاننــا سنجد بسهولة أن القضايا النافية المطلوبة هي :

١ – ليس القمر سيارة أو ليس مصنوعاً من الحديد .

٢ – ليس القمر سيارة أو ليس هو أصغر من الارض .

٣ – ليس القمر سيارة ولا هو تابع للأرض .

٤ – ليس القمر تابعاً للأرض أو ليس هو أصغر منها .

٥ – إن العدد ٣٦ لا يقبل القسمة على ٢ أو لا يقبل الفسمة على ٣

٦ – لا يقسم العدد ٥ العدد ٢٥ ولا العدد ٣١

٧ – $\sqrt{\text{٩–}} \neq \text{٣}$ أو $\sqrt{\text{٩}} \neq \text{٣}$

٨ – $\sqrt{\text{٣}} \neq \text{١,٧}$ و $\sqrt{\text{٣}} \neq \text{١,٨}$

٩ – $ب^{ن} : ب^{هـ} \neq ب^{ن-هـ}$ و $ب^{ن} . ب^{هـ} \neq ب^{ن.هـ}$

١٠ – $ب^{٢} - حـ^{٢} \neq (ب + حـ)(ب - حـ)$

او $(ب + حـ)^{٢} \neq ب^{٢} + ٢ ب حـ + حـ^{٢}$

٨ – اكتب القضية النافية لـ ب ∧ حـ وبرهن صحة دستور « دو مورغان » الاول :

$$\sim (ب \wedge حـ) \Leftrightarrow (\sim ب) \vee (\sim حـ)$$

الحل :

تتحقق ب ∧ حـ في الحالة الوحيدة التي يتحقق فيها كل من القضيتين ب ، حـ وتنفي في الحالات الثلاث الباقية وهي :

١ – إذا تحققت ب وانتفت حـ
٢ – إذا انتفت ب وتحققت حـ
٣ – إذا انتفى كل من ب و حـ

ويمكننا أن نتأكد بسهولة أن هذه الحالات هي الحالات الوحيدة التي تتحقق فيها القضية :

$$(\sim ب) \vee (\sim حـ)$$

يمكننا أن نبرهن دستور (دو مورغان) الاول الذي يمثل هذا التمرين بجدول الحقيقة التالي :

ب	حـ	~ ب	~ حـ	ب ∧ حـ	~ (ب ∧ حـ)	(~ ب) ∨ (~ حـ)
١	١	٠	٠	١	٠	٠
١	٠	٠	١	٠	١	١
٠	١	١	٠	٠	١	١
٠	٠	١	١	٠	١	١

إن التطابق الظاهر في هذا الجدول بين قيم القضية $\sim$ (ب $\wedge$ حـ) الموجودة في العمود السادس وقيم القضية ($\sim$ ب) $\vee$ ($\sim$ حـ) الموجودة في العمود السابع يؤكد لنا التطابق بين هاتين القضيتين ويسمح لنا بأن نكتب :

$$\sim (\text{ب} \wedge \text{حـ}) \Leftrightarrow (\sim \text{ب}) \vee (\sim \text{حـ})$$

ملاحظة :

يبرهن بالطريقة السابقة نفسها دستور « دو مورغان » الثاني :

$$\sim (\text{ب} \vee \text{حـ}) \Leftrightarrow (\sim \text{ب}) \wedge (\sim \text{حـ})$$

ثم يستنتج ما يلي :

قاعدة : لنفي قضية مركبة من قضيتين بواسطة أداة الربط (و) ننفي كلاً من القضيتين ونستبدل بالأداة (و) الأداة (أو) والعكس بالعكس .

٩ – من أجل أي قضيتين ب ، حـ أثبت أنّ :

$$\text{ب} \wedge \text{حـ} \Leftrightarrow \text{حـ} \wedge \text{ب}$$

البرهان : بطريقة مماثلة لما رأينا في التمرين السابق وبالاعتماد على تعريف (الربط بـ و) نشكل جدول الحقيقة التالي :

ب	حـ	ب $\wedge$ حـ	حـ $\wedge$ ب
١	١	١	١
١	٠	٠	٠
٠	١	٠	٠
٠	٠	٠	٠

وبملاحظة العمودين الأخيرين نجد أن القضيتين ب $\wedge$ حـ و حـ $\wedge$ ب صحيحتان معاً أو خاطئتان معاً فهما متكافئتان .

١٠ – من أجل أي قضيتين ب ، حـ أثبت أن :

ب ∨ حـ ⟺ حـ ∨ ب

البرهان : نشكل جدول الحقيقة التالي :

ب	حـ	ب ∨ حـ	حـ ∨ ب
١	١	١	١
١	٠	١	١
٠	١	١	١
٠	٠	٠	٠

وقد سجلنا في العمودين الأول والثاني الحالات المختلفة لقيم القضيتين ب ، حـ معاً. وسجلنا في العمودين الأخيرين قيم القضيتين ب ∨ حـ ، حـ ∨ ب المقابلة لكل حالة من حالات العمودين الأول والثاني وذلك اعتماداً على تعريف عملية الربط بـ (أو) . وبالتدقيق في العمودين الأخيرين نلاحظ أن القضيتين ب ∨ حـ ، حـ ∨ ب صحيحتان معاً أو خاطئتان معاً أي أنهما متكافئتان .

١١ – برهن صحة العلاقة : ب ∨ (حـ ∨ د) ⟺ (ب ∨ حـ) ∨ د
(خاصة الدمج في الربط بـ أو) .

الحـــل :

تتحقق القضية ب ∨ (حـ ∨ د) فيما إذا تحققت ب أو (حـ ∨ د) أي في الحالات الثلاث :

١ً – ب و (حـ ∨ د) ، ٢ً – (~ ب) و (حـ ∨ د)

٣ً – ب و ~ (حـ ∨ د)

وبما ان القضية (حـ ∨ د) تتحقق في الحالات : (حـ) و (د) ، (~ حـ) و (د) ، (حـ) و (~ د) وتنتفي في الحـالة الوحيـدة (~ حـ) و (~ د) فإن القضية المركبة ب ∨ (حـ ∨ د) تتحقق في

الحالات التالية وفي هذه الحالات فقط :

١ – (ب) و (حـ) و (ى) ، ٢ – (ب) و (حـ) و (~ ى)

٣ – ب و (~ حـ) و (ى) ، ٤ – (~ب) و (حـ) و (ى)

٥ – (~ ب) و (~حـ) و (ى) ، ٦ – (~ ب) و (حـ) و (~ى)

٧ – ب و (~ حـ) و (~ ى)

نستنتج بالطريقة ذاتها أن القضية (ب ∨ حـ) ∨ ى تتحقق في الحالات التالية وفي هذه الحالات فقط :

١ – (ب) و (حـ) و (ى) ، ٢ – (~ ب) و (حـ) و (ى)

٣ – (ب) و (~ حـ) و (ى) ، ٤ – (~ ب) و (~حـ) و (ى)

٥ – (ب) و (حـ) و (~ ى) ، ٦ – (~ ب) و (حـ) و (~ى)

٧ – (ب) و (~ حـ) و (~ ى)

يتضح المطلوب من تطابق الحالات السبع الأول مع الحالات السبع الأخيرة

يمكن حل هذا التمرين بواسطة جدول الحقيقة التالي :

ب	حـ	ى	ب ∨ حـ	(ب ∨ حـ) ∨ ى	حـ ∨ ى	ب ∨ (حـ ∨ ى)
١	١	١	١	١	١	١
١	١	٠	١	١	١	١
١	٠	١	١	١	١	١
٠	١	١	١	١	١	١
١	٠	٠	١	١	٠	١
٠	١	٠	١	١	١	١
٠	٠	١	٠	١	١	١
٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠

وبملاحظة العمودين الأخيرين من هذا الجدول نستنتج المطلوب .

١٢ – من أجل أي ثلاث قضايا ب ، حـ ، ى أثبت أن :

ب ∧ (حـ ∧ ى) ⇔ (ب ∧ حـ) ∧ ى

البرهان : بطريقة مماثلة لما رأيناه في التمارين السابقة وبالاعتماد على تعريف (الربط بـ و) نشكل جدول الحقيقة التالي :

ب	حـ	ى	ب ∧ حـ	(ب ∧ حـ) ∧ ى	(حـ ∧ ى)	ب ∧ (حـ ∧ ى)
١	١	١	١	١	١	١
١	١	٠	١	٠	٠	٠
١	٠	١	٠	٠	٠	٠
١	٠	٠	٠	٠	٠	٠
٠	١	١	٠	٠	١	٠
٠	١	٠	٠	٠	٠	٠
٠	٠	١	٠	٠	٠	٠
٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠

وبملاحظة العمودين الخامس والسابع نجد أن القضيتين ب ∧ (حـ ∧ ى) ، (ب ∧ حـ) ∧ ى صحيحتان معاً أو خاطئتان معاً فهما متكافئتان .

١٣ – إذا كانت ب ، حـ ، ى ثلاث قضايا بسيطة اكتب نفي كل من القضايا التالية :

١ – ب ∧ ~ حـ ، ٢ – ~ ب ∨ ~ حـ ، ٣ – ~ ب ⇐ حـ

٤ – ب ⇐ ~ حـ ، ٥ – (ب ∨ حـ) ∧ حـ

الحـــل :

استناداً إلى القاعدة المبينة في التمرين (٨) السابق يمكننا أن نكتب بالتدرج :

١ – ~ (ب ∧ ~ حـ) ⇔ ~ ب ∨ ~ (~ حـ) ⇔ ~ ب ∨ حـ

٢ – ~ ~ ب ∨ ~ حـ ⟺ ~ (~ ب) ∧ ~ (~ حـ) ⟺ ب ∧ حـ

٣ – بما ان الإقتضاء ينتفي في الحالة الوحيدة التي يتحقق فيها الفرض، وتنتفي النتيجة فانه يمكننا أن نكتب :

~ (~ ب ⇐ حـ) ⟺ ~ ب ∧ ~ حـ

٤ – بطريقة التمرين السابق يمكننا أن نكتب :

~ (ب ⇐ ~ حـ) ⟺ ب ∧ حـ

٥ – ~ [(ب ∨ حـ) ∧ حـ] = ~ (ب ∨ حـ) ∨ ~ حـ

= (~ ب ∧ ~ حـ) ∨ ~ حـ

ونجد بذلك تعميماً لدستوري « دو مورغان »

~ [(ب ∨ حـ) ∧ حـ] ⟺ (~ ب ∧ ~ حـ) ∨ ~ حـ

قاعدة : لنفي قضية مركبة من عدد من القضايا بالأداتين (∧) و (∨) تنفي كل قضية داخلة في هذا التركيب وتستبدل بالأداة (∧) الأداة (∨) وبالأداة (∨) الأداة (∧) .

ويمكن اجراء الدراسة السابقة في جدول الحقيقة التالي :

ب	حـ	ب ∨ حـ	(ب ∨ حـ) ∧ حـ	~ [(ب ∨ حـ) ∧ حـ]	~ ب	~ حـ	(~ ب) ∧ (~ حـ)	[(~ ب) ∧ (~ حـ)] ∨ (~ حـ)
١	١	١	١	٠	٠	٠	٠	٠
١	٠	١	٠	١	٠	١	٠	١
٠	١	١	١	٠	١	٠	٠	٠
٠	٠	٠	٠	١	١	١	١	١

إن التطابق بين قيم القضية ~ [(ب ∨ حـ) ∧ حـ] وقيم القضية [(~ ب) ∧ (~ حـ)] ∨ (~ حـ) الواقعتين في العمودين الخامس والتاسع يؤكد التطابق بين هاتين القضيتين .

تمارين غير محلولة

١٤ – عيّن فيما يلي التعابير التي تمثل قضايا . اذكر الصحيح منها والخاطىء :

١ – إن هذا المثلث متساوي الساقين ٢ – س^{٢} + ٣ س + ٢ = ٠

٣ – ٥ = ٣ + ٢ و ٧ = ٢ + ٦ ٤ – الثلج أبيض

٥ – يا بني قم وحضّر درسك ٦ – لا تكذب

٧ – زوايا المربع حادة ٨ – ١ > ٣

٩ – $\frac{٣}{٥}$ عدد عادي ١٠ – ٧ > $\frac{٣}{٥}$

١١ – القاهرة عاصمة لبنان ١٢ – بغداد تقع على نهر دجلة

١٥ – انظر في كل قضية من قضايا العمود الثاني وبين فيما اذا كانت نافية للقضية المقابلة لها من العمود الأول :

١ – كل الطلاب مجدون ، **كل الطلاب غير مجدين**

٢ – كل زاوية في المثلث تساوي ٦٠° ، **كل زاوية في المثلث لا تساوي ٦٠°**

٣ – كل السيارات تدور حول الشمس ، **كل السيارات لاتدور حول الشمس**

٤ – المثلث ب حـ ى قائم الزاوية ، **ليس المثلث ب حـ ى بقائم الزاوية**

٥ – الزاويتان ب ، حـ متساويتان ، **الزاويتان ب ، حـ غير متساويتين**

٦ – يقبل س القسمة على (٢) او (٣) ، **لايقبل س القسمة على (٢) ولا على (٣)**

٧ – **يقسم ب كلا من حـ و ى ، ب لا يقسم حـ ولا يقسم ى**

١٦ – اكتب القضايا النافية للقضايا التالية :

١ – ٧ عدد أولي ٢ – ١٦ مربع تام

٣ – المستقيمان ل ، لَ متوازيان ٤ – قطرا المربع متساويان ومتناصفان

٥ – الارتفاع في المثلث المتساوي الساقين ينصف زاوية الرأس وينصف القاعدة .

٦ – إن المثلث ت ح ى قائم الزاوية أو متساوي الساقين .

٧ – (ب و ح) أو (ى) ٨ – (ب او ح) و (ى)

٩ – (ب ⇐ ح) و (ى) ١٠ – (ب ⇐ ح) او (ى)

١٧ – عيّن قيمة كل من القضايا التالية :

١ – س = ١ ⇔ س = – ١

٢ – س > ٠ ⇐ س > ٣

٣ – ٣ س = ٧ ⇐ ٣ س + ٢ = ٩

٤ – س – ٣ = ٠ ⇐ س^{٢} – ٩ = ٠

٥ – س = ٠ ⇔ (س – ٥) (س – ٣) = ٠

٦ – س^{٢} = ١ ⇔ س = ١

٧ – س^{٢} – ١ = ٠ ⇔ (س = ١) ∨ (س = – ١)

٨ – ٣ س = ٩ ⇔ ٣ س + ٢ = ١١

١٨ – برهن أن القضايا الآتية صحيحة دوما :

١ – (ب ⇐ ح) ⇔ [(~ ب) ∨ ح]

٢ – ب ∨ ~ ب

٣ – [ب ∧ (ب ⇐ ح)] ⇐ ح

٤ – ~ (ب ∧ ~ ب)

٥ – ~ (ب ⇐ ح) ⇔ ب ∧ ~ ح

٦ – (ب ⇐ ح) ∧ (~ ح) ⇐ (~ ب)

٧ – [ب ⇐ (ح ⇐ د)] ⇐ [(ب ∧ ح) ⇐ د]

٨ – ب ∧ (~ ب ∨ ح) ⇐ ب ∨ ح

٩ – ب ⇔ ~ (~ ب)

١٠ – ~ (~ ب ∧ ~ ح) ⇔ ب ∨ ح

١١ – ~ (~ ب ∨ ~ ح) ⇔ ب ∧ ح

١٢ – [(ب ∧ ح) ⇐ د] ⇐ [ب ⇐ (ح ⇐ د)]

١٣ – ~ (ب ⇔ ح) ⇔ (ب ⇔ ~ ح)

١٤ – [ب ⇐ (ح ∧ د)] ⇔ [(ب ⇐ ح) ∧ (ح ⇐ د)]

أجوبة وارشادات

١٤ – (٥ ، ٦) ليستا قضيتين ، (٤ ، ٨ ، ٩ ، ١٢) قضايا صحيحة ، (٣ ، ٧ ، ١٠ ، ١١) قضايا خاطئة ، (١) قضية لا نعرف صحتها من خطأها إلا اذا عرفنا المثلث ، (٢) قضية صادقة من أجل س = – ١ و س – ٢ وكاذبة فيما عدا ذلك .

١٥ – (١ ، ٢ ، ٣ ، ٧) لا ، (٤ ، ٥ ، ٦) نعم .

١٦ – ١ – ٧ ليس بعدد اولي

٢ – ١٦ ليس مربعاً تاماً

٣ – ل ، لَ غير متوازيين

٤ – قطرا المربع غير متساويين أو غير متناصفين

٥ – الإرتفاع في المثلث المتساوي الساقين لا ينصف القاعدة أو لا ينصف زاوية الرأس .

٦ – المثلث ب حـ ى غير قائم الزاوية ولا متساوي الساقين .

٧ – (~ ب أو ~ ى) و (~ ى)

٨ – (~ ب و ~ حـ) أو (~ ى)

٩ – (ب ⇐ ~ حـ) أو (~ ى)

١٠ – (ب ⇐ ~ حـ) و (~ ى)

١٧ – ١ – (٠) ، ٢ – (٠) ، ٣ – (١) ، ٤ – (١)
٥ – (٠) ، ٦ – (٠) لأنه يمكن كتابة هذه القضية بالشكل (س = ١ أو س = – ١) ⇔ س = ١ ، ٧ – (١) ، ٨ – (١)

١٨ – ١ – استعمل جدول الحقيقة ٠ ٣ ، ٥ ، ٧ ، ١٠ ، ١٣ ، ١٤ :
استفد من (١)