

الفصل الرابع

الجداء الديكارتى

٤٨ - الأزواج المرتبة Ordered pairs : من المعروف أنه إذا كان s فصل النقطة b و c ترتيبها فاننا نرمز لهذه النقطة بـ (s, c) ونقول إن الزوج (s, c) يمثل النقطة b في المستوي حيث نسمي s الاحداثي الأول و c الاحداثي الثاني . كما أن اضافة الاسمين محمد ومصطفى إلى بعضها يعطي اسم شخص معين اسمه محمد واسم أبيه مصطفى ، ويمكن أن نمثل اسم هذا الشخص بالزوج $(محمد, مصطفى)$.

نلاحظ مما تقدم ان الزوج (s, c) مفهوم يختلف عن مفهوم كل من s و c وأن هذا المفهوم يختلف بحسب الترتيب الذي نعطيه لها . فالنقطة (s, c) تختلف بصورة علامة عن النقطة (c, s) ، كما أن الشخص الذي يحمل الاسم $(محمد, مصطفى)$ يختلف عن الشخص الذي يحمل الاسم $(مصطفى, محمد)$.

تعريف : إن الزوج المرتب (s, c) هو كائن رياضي مؤلف من العنصرين s, c مأخوذين بالترتيب s ثم c . نسمي s العنصر لأول أو المركبة الأولى و المسقط الأول للزوج المرتب كما نسمي c العنصر الثاني أو المركبة الثانية أو المسقط الثاني لهذا الزوج .

ينتج عما تقدم :

إذا كان $p \neq b$ فان $(p, b) \neq (b, p)$

$$(s = b) \wedge (p = b) \Leftrightarrow (s, p) = (b, p)$$

$$(s \neq b) \vee (p \neq b) \Leftrightarrow (s, p) \neq (b, p)$$

أمثلة :

$$(2, 3) \neq (2, 1) - 1$$

$$(4 - \sqrt{2}, \sqrt{2}) \neq (4, \sqrt{2}) - 2$$

$$1 = 2\sqrt{2} = s \Leftrightarrow (s, e) = (1, \sqrt{2}) - 3$$

٤٩ - الجداء الديكارتي: Produit cartésien ، Cartisian Product :

لتكن المجموعتان $s = \{1, 3, 5\}$ و $e = \{2, 4\}$. إذا شكلنا جميع الأزواج المرتبة التي تقع مركبتها الأولى في المجموعة الأولى ، s ، والمركبة الثانية في المجموعة الثانية ، e ، نحصل على مجموعة جديدة نسميها الجداء الديكارتي للمجموعة s في المجموعة e ، وهي :

$$\{(4, 5), (2, 5), (4, 3), (2, 3), (4, 1), (2, 1)\}$$

تعريف : الجداء الديكارتي لمجموعة ما s في مجموعة ثانية e هو مجموعة جميع الأزواج المرتبة التي تقع المركبة الأولى لكل منها في المجموعة الأولى s والمركبة الثانية في المجموعة الثانية e .

نكتب هذا الجداء بالشكل $s \times e$ ويقرأ s ضرب e ويكون :

$$s \times e = \{(s, e) : (s \in s) \wedge (e \in e)\}$$

مثال (١) ان الجداء الديكارتي للمجموعة $s = \{0, 1, 3\}$ في المجموعة

$e = \{p, q\}$ ، هو المجموعة :

$$\left\{ (p, 3), (p, 1), (p, 0), (3, 3), (3, 1), (3, 0) \right\} = س \times ع$$

أما الجداء الديكارتي للمجموعة ع في المجموعة س فهو المجموعة :

$$\left\{ (3, p), (1, p), (0, p), (3, 3), (1, 3), (0, 3) \right\} = ع \times س$$

وبلاحظ أن $س \times ع \neq ع \times س$

مثال (٢) : إن الجداء الديكارتي للمجموعة س = { سالم ، قاسم ، زيد } في المجموعة ع = { دمشق ، القاهرة } هو المجموعة :

$$\begin{aligned} س \times ع &= \{ (سالم ، دمشق) ، (سالم ، القاهرة) ، (قاسم ، دمشق) ، \\ &(قاسم ، القاهرة) ، (زيد ، دمشق) ، (زيد ، القاهرة) \} . \end{aligned}$$

أما الجداء الديكارتي ع $\times$ س فهو المجموعة :

$$\begin{aligned} ع \times س &= \{ (دمشق ، سالم) ، (دمشق ، قاسم) ، (دمشق ، زيد) ، \\ &(القاهرة ، سالم) ، (القاهرة ، قاسم) ، (القاهرة ، زيد) \} . \end{aligned}$$

وبلاحظ أيضاً أن $س \times ع \neq ع \times س$

٥٠ - ملاحظة :

إن جدول الانتاء للجداء الديكارتي هو :

س	ع	س $\times$ ع
١	١	١
١	٠	١
٠	١	٠
٠	٠	٠

إن (١) الموجود في العمود الأول يعني أن المركبة الأولى س من الزوج المرتب (س، ع) ينتمي إلى المجموعة س. اما (٠) فإنه يعني أن المركبة الأولى من هذا الزوج لا تقع في س. وكذلك الأمر من أجل العمود الثاني. أما الإشارة (١) التي تقع في العمود الثالث فإنها تعني أن المركبة الأولى من الزوج (س، ع) تنتمي إلى المجموعة الأولى س من الجداء س × ع بينما تقع المركبة الثانية لهذا الزوج في المجموعة الثانية ع من الجداء الديكارتي المذكور.

٥١ - تمثيل الجداء الديكارتي :

١ - التمثيل الجدولي : يمكن تمثيل الجداء الديكارتي للمجموعة س = {١، ٣، ٥} في المجموعة ع = {٢، ٤، ٦} بأن نضع عناصر المجموعة س في عمود جدول وعناصر المجموعة ع في سطر ونشكل الجدول :

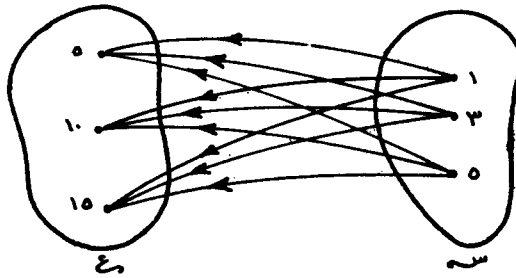
	٢	٤	٦	
١	(٢، ١)	(٤، ١)	(٦، ١)	
٣	(٢، ٣)	(٤، ٣)	(٦، ٣)	
٥	(٢، ٥)	(٤، ٥)	(٦، ٥)	

بصورة عامة : إذا أردنا تشكيل جدول يضم الجداء الديكارتي للمجموعتين س في ع نتخذ جدولاً ذا مدخلين نكتب في مدخله الشاقولي (الرأسي) عناصر المجموعة الأولى س ونكتب في مدخله الأفقي عناصر المجموعة الثانية ع ثم نكتب عند التقاء كل سطر من أسطر هذا الجدول مع عمود من أعمده الزوج المرتب الذي نضع مركبته على الترتيب على السطر والعمود اللذين يتقاطعان في موضع هذا الزوج.

مثال : يمكن تمثيل الجداء الديكارتي للمجموعة $S = \{2, 5, 7\}$ في المجموعة $E = \{p, b, c, s\}$ بالجدول :

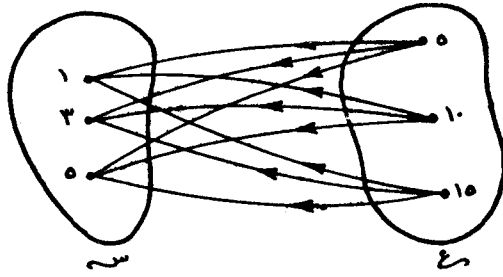
s	c	b	p	
$(s, 2)$	$(c, 2)$	$(b, 2)$	$(p, 2)$	2
$(s, 5)$	$(c, 5)$	$(b, 5)$	$(p, 5)$	5
$(s, 7)$	$(c, 7)$	$(b, 7)$	$(p, 7)$	7

٢- التمثيل السهمي : ويمكن تمثيل الجداء الديكارتي للمجموعة $S = \{1, 3, 5\}$ في المجموعة $E = \{5, 10, 15\}$ بأن نرسم مخطط فين - أولر والممثلتين للمجموعتين S و E ، ومن ثم نرسم أسهماً موجبة تنطلق من عناصر المجموعة S وتنتهي في عناصر E ، فنحصل على المخطط التالي الذي نسميه المخطط السهمي للجداء الديكارتي $S \times E$



الشكل (٩٤)

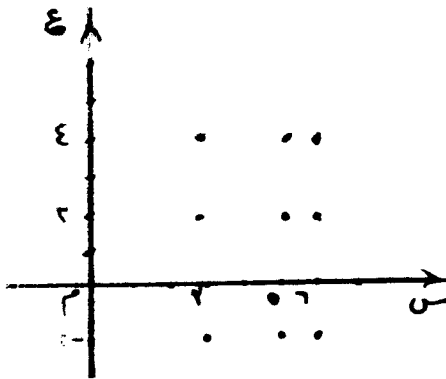
أما المخطط السهمي للجداء الديكارتي $E \times S$ فيعطى بالمخطط التالي :



الشكل (٩٥)

٣ - التمثيل البياني : ويمكن كذلك أن نمثل الجداء الديكارتي

للمجموعة $S = \{3, 5, 6\}$ في المجموعة $E = \{-2, 2, 4\}$ ،



بمجموعة نقاط في المستوي

$S \times E$. تقع فواصل هذه

النقاط في المجموعة S

وترتيبها في المجموعة E .

نحصل على الشكل (٩٦) الذي

نسميه التمثيل البياني للجداء

الديكارتي $S \times E$

الشكل (٩٦)

٥٢ - خواص الجداء الديكارتي :

١ - الجداء الديكارتي لمجموعة ما S في مجموعة خالية $\emptyset$ هو مجموعة خالية أي :

$$S \times \emptyset = \emptyset \quad \emptyset \times S = \emptyset$$

ذلك لأنه لو كان $S \times \emptyset \neq \emptyset$ فهناك على الأقل زوج مرتب واحد ، (س ، ع) مثلاً ، حيث $S \ni S$ و $E \ni \emptyset$ ، ولكن هذا يناقض الفرض لأن $\emptyset$ مجموعة خالية لا تحوي أي عنصر .
ونبرهن بصورة مشابهة أن : $S \times S = \emptyset$.

٢ - إذا كانت المجموعتان S و E غير متساويتين وكانتا غير خاليتين فإن :

$S \times E \neq E \times S$ (الجداء الديكارتي غير تبديلي) .
وبالعكس إذا كان $(S \neq \emptyset) \wedge (E \neq \emptyset)$ فإنه يكون :
 $(S \times E = E \times S) \Leftrightarrow (S = E)$

البرهان :

إذا كانت المجموعتان S و E غير متساويتين فهناك على الأقل عنصر واحد ، p مثلاً ، ينتمي لأحدهما ، ولنفرض أنها S ، ولا ينتمي إلى الثانية ، نستنتج من هذا أن جميع الأزواج المرتبة (p, e) $e \in E$ ، تنتمي إلى المجموعة $S \times E$ ولا تنتمي إلى المجموعة $E \times S$ وبالتالي فإن $S \times E \neq E \times S$.

العكس : إن $S \times E = E \times S$ يعني :

$$\forall (p, b) \ni S \times E \Leftrightarrow (p, b) \ni E \times S$$

ان الطرف الأول من العلاقة السابقة يؤدي إلى أن :

$$(p \ni S) \wedge (b \ni E)$$

بينما يؤدي الطرف الثاني إلى أن : $(p \ni E) \wedge (b \ni S)$ أي أن :

$$S = E \Leftrightarrow \begin{cases} p \ni S \Leftrightarrow (p \ni E) \\ b \ni E \Leftrightarrow (b \ni S) \end{cases}$$

أما اذا كان $\emptyset = \text{سـ} = \text{سـ} \times \text{ع} = \text{ع} \times \text{سـ} = \emptyset$ فإن

وكذلك اذا كان $\text{ع} = \emptyset = \text{سـ} \times \text{ع} = \text{ع} \times \text{سـ} = \emptyset$

مثال (١): لتكن المجموعتان $\text{سـ} = \{٠, ١, ٢\}$ و $\text{ع} = \{٣, ٥\}$.

الجداء الديكارتي: $\text{سـ} \times \text{ع}$

$$= \{ (٣, ٠) \} \cup \{ (٥, ٠) \} \cup \{ (٣, ١) \} \cup \{ (٥, ١) \} \cup \{ (٣, ٢) \} \cup \{ (٥, ٢) \}$$

والجداء الديكارتي: $\text{ع} \times \text{سـ}$

$$= \{ (٠, ٣) \} \cup \{ (١, ٣) \} \cup \{ (٢, ٣) \} \cup \{ (٠, ٥) \} \cup \{ (١, ٥) \} \cup \{ (٢, ٥) \}$$

ونلاحظ أن: $\text{سـ} \times \text{ع} \neq \text{ع} \times \text{سـ}$

مثال (٢): لتكن المجموعتان $\text{سـ} = \{١, ٣\}$ و $\text{ع} = \{٣, ١\}$

الجداء الديكارتي $\text{سـ} \times \text{ع}$

$$= \{ (٣, ١) \} \cup \{ (١, ١) \} \cup \{ (٣, ٣) \} \cup \{ (١, ٣) \}$$

والجداء الديكارتي: $\text{ع} \times \text{سـ}$

$$= \{ (١, ٣) \} \cup \{ (٣, ٣) \} \cup \{ (١, ١) \} \cup \{ (٣, ١) \}$$

ونلاحظ أن: $\text{سـ} \times \text{ع} = \text{ع} \times \text{سـ}$ وهذا بالفعل ناتج من كون

أن $\text{سـ} = \text{ع}$.

٣ -

الجداء الديكارتي توزيعي بالنسبة للاجتماع أي أن:

$$\text{سـ} \times (\text{ع} \cup \text{صـ}) = (\text{سـ} \times \text{ع}) \cup (\text{سـ} \times \text{صـ})$$

حيث سـ و ع و صـ ثلاث مجموعات كيفية.

البرهان:

يجب أن نثبت أن كل عنصر ينتمي إلى $\text{سـ} \times (\text{ع} \cup \text{صـ})$

ينتمي إلى $(س \times ع) \cup (س \times ص)$ وبالعكس .

$$(ب، پ) \Rightarrow س \times (ع \cup ص)$$

$$\Leftrightarrow [(ب \Rightarrow س) \wedge (پ \Rightarrow س)] \quad (\text{حسب التعريف})$$

$$\Leftrightarrow [(ب \Rightarrow س) \wedge (پ \Rightarrow س)] \quad (\text{حسب التعريف})$$

$$\Leftrightarrow [(ب \Rightarrow س) \wedge (پ \Rightarrow س)] \quad (\text{حسب التعريف})$$

$$\Leftrightarrow [(ب، پ) \Rightarrow س \times (ع \cup ص)]$$

$$\Leftrightarrow (ب، پ) \Rightarrow س \times (ع \cup ص)$$

يمكن برهان هذه الخاصة بطريقة جدول الحقيقة بالشكل التالي :

ب	پ	ع	ص	$س \times (ع \cup ص)$	$س \times ع$	$س \times ص$	$(س \times ع) \cup (س \times ص)$
١	١	١	١	١	١	١	١
١	١	١	٠	٠	١	٠	١
١	٠	١	١	١	٠	٠	٠
٠	١	١	٠	٠	٠	٠	٠
٠	٠	١	١	٠	٠	٠	٠
٠	١	٠	١	٠	٠	٠	٠
٠	٠	٠	١	٠	٠	٠	٠
٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠

الواحد يمثل انتماء العنصر إلى المجموعة البسيطة أو مجموعة الجداء .
 أما الصفر فانه يمثل نفي هذا الانتماء مع ملاحظة أن الانتماء للجداء لا
 يكون محققاً إلا إذا تحقق انتماء المركبة الأولى للمجموعة الأولى والمركبة
 الثانية للمجموعة الثانية .

مثال : لتكن المجموعات :

$$\begin{aligned} \{1, 1-\} &= ص \quad \{5, 3, 1\} = ع \quad \{1\} = س \\ \text{ان الجداء الديكارتي } س \times ع &= \{(5, 1) \quad (3, 1) \quad (1, 1)\} \\ \text{والجداء الديكارتي } س \times ص &= \{(1, 1) \quad (1-, 1)\} \\ \text{وبالتالي يكون : } (س \times ع) \cup (س \times ص) &= \{(5, 1) \quad (3, 1) \quad (1, 1) \quad (1-, 1)\} . \end{aligned}$$

ونرى من جهة ثانية أن :

$$\begin{aligned} ع \cup ص &= \{1-, 5, 3, 1\} \quad \text{وبالتالي الجداء الديكارتي :} \\ س \times (ع \cup ص) &= \{(1-, 1) \quad (5, 1) \quad (3, 1) \quad (1, 1)\} \\ \text{ذن : } س \times (ع \cup ص) &= (س \times ع) \cup (س \times ص) . \end{aligned}$$

٤ -

الجداء الديكارتي توزيعي بالنسبة للتقاطع أي :

$$\begin{aligned} س \times (ع \cap ص) &= (س \times ع) \cap (س \times ص) \\ \text{حيث } س \text{ و } ع \text{ و } ص &\text{ ثلاث مجموعات كيفية .} \end{aligned}$$

البرهان :

نبرهن أن كل عنصر ينتمي إلى $س \times (ع \cap ص)$ ينتمي إلى $(س \times ع) \cap (س \times ص)$ وبالعكس .

$$(ب, م) \in س \times (ع \cap ص)$$

$$\Leftrightarrow [(ب \in ع \wedge ب \in ص) \wedge م \in س]$$

$$\Leftrightarrow [(ب \in ع \wedge م \in س) \wedge (ب \in ص \wedge م \in س)]$$

$$[(p, b) \wedge (b, p) \Rightarrow (b, p)] \Leftrightarrow$$

$$(b, p) \Rightarrow (b, p) \wedge (b, p) \Rightarrow (b, p) \Leftrightarrow$$

ويمكن أيضاً إثبات هذه الخاصة بطريقة جدول الحقيقة بالشكل التالي:

ص	ع	ص × ع	ع × ص	ص × ع × ص	ع × ص × ع	ص × ع × ص × ع
١	١	١	١	١	١	١
١	٠	٠	١	٠	١	٠
٠	١	١	٠	٠	٠	٠
٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠
٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠
٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠
٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠

مثال : لنأخذ المجموعات :

$$\{1\} = ص \text{ و } \{5, 3, 1\} = ع \text{ و } \{1, -1\} = ص \times ع$$

$$\{ (5, 1), (3, 1), (1, 1) \} = ع \times ص$$

$$\{ (1, 1), (-1, 1) \} = ص \times ص$$

$$\{ \{ (1, 1) \} \} = (ص \times ع) \cap (ع \times ص)$$

ومن جهة ثانية نلاحظ أن $ع \cap ص = \{1\}$ وبالتالي نجد أن :

$$ص \times (ع \cap ص) = (ع \times ص) \cap (ع \times ص)$$

$$\text{إذاً : } ص \times (ع \cap ص) = (ع \times ص) \cap (ع \times ص)$$

٥ -

إذا كان عدد عناصر المجموعتين $ص$ و $ع$ هو ٣ و ٣ على الترتيب فإن عدد عناصر مجموعة الجداء الديكارتي $ص \times ع$ هو ٣×٣ .

وذلك لأن كل عنصر ينتمي إلى المجموعة S يشترك كمركبة أولى في 2 زوجاً مرتباً في كل منها المركبة الثانية عنصر ينتمي إلى المجموعة E . ويمكن توضيح ذلك بالتمثيل الجدولي .

$1E$	$2E$		$2E$
$(1E, 1S)$	$(2E, 1S)$		$(2E, 1S)$
$(1E, 2S)$	$(2E, 2S)$		$(2E, 2S)$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$(1E, nS)$	$(2E, nS)$		$(2E, nS)$

مثال : لتكن المجموعتان $S = \{3, 2\}$ و $E = \{5, 4, 1\}$

إن مجموعة الجداء الديكارتي $S \times E = \{(1, 2), (1, 4), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 5)\}$ تتألف من $6 = 3 \times 2$ عناصر .

٥٣ - الجداء الديكارتي لمجموعة في نفسها .

يتألف الجداء الديكارتي لمجموعة S في نفسها من جميع الأزواج المرتبة التي تكون فيها المركبتان الأولى والثانية عنصرين في S ونكتب ذلك بالشكل $S \times S$ أو S^2 ويكون ،

$$S \times S = \{(s, e) : s \in S, e \in S\}$$

مثال : إن الجداء الديكارتي للمجموعة $S = \{1, 5\}$ في نفسها هو :

$$S \times S = \{(1, 1), (1, 5), (5, 1), (5, 5)\}$$

٥٤ - الجداء الديكارتي لثلاث مجموعات :

لتكن المجموعات الثلاث S ، E ، V ، المختلفة او المتساوية ولنشكل كائناً رياضياً نسميه ثلاثية مرتبة ونرمز لها بالشكل (S, E, V) حيث العنصر الأول S من هذه الثلاثية هو عنصر كيفي من المجموعة الأولى S ، والعنصر الثاني E من هذه الثلاثية هو عنصر كيفي من المجموعة الثانية E ، والعنصر الثالث V من هذه الثلاثية هو عنصر كيفي من المجموعة الثالثة V .

نسمي بالجداء الديكارتي للمجموعات الثلاث S ، E ، V الواردة بهذا الترتيب ، مجموعة جميع الثلاثيات المرتبة (S, E, V) حيث $S \in S$ ، $E \in E$ ، $V \in V$.

ويكتب هذا الجداء بالشكل $S \times E \times V$ (ويقرأ S ضرب E ضرب V) .

مثال (١) : يمكن تمييز كل شخص في قرية ما باسمه واسم أبيه واسم جده بهذا الترتيب فنكتب مثلاً (محمد ، سعيد ، خالد) .

حيث محمد ينتمي الى مجموعة أبناء القرية وينتمي سعيد الى مجموعة الآباء في هذه القرية بينما ينتمي خالد الى مجموعة الجدود في القرية .

مثال (٢) : يعطى تاريخ كل يوم بثلاثية من الشكل ١٢/٥/١٢٧٠ والتي يمكن كتابتها بالشكل (١٢ ، ٥ ، ١٢٧٠) .

حيث ١٢ عنصر من مجموعة الأعداد الطبيعية من ١ الى ٣٠ (اذا اعتبرنا أن عدد أيام كل شهر ثلاثين يوماً) والعدد ٥ عنصر من مجموعة الأعداد الطبيعية من ١ الى ١٢ .

أما العدد ١٢٧٠ فهو عنصر من مجموعة الأعداد الصحيحة

وينتج عن التعريف السابق أن :

$$((s = v) \wedge (c = e) \wedge (u = s)) \Leftrightarrow (b, c, d) = (v, e, s) \\ \text{يكتب الجداء } s_1 \times s_2 \times \dots \times s_n \text{ بالشكل } s_1 \times s_2 \times \dots \times s_n.$$

وبصورة عامة إذا كان لدينا عدد من المجموعات : $s_1, s_2, \dots, s_n$ المختلفة أو المتساوية فإنه يمكننا أن نشكل كائناً رياضياً من الشكل $(s_1, s_2, \dots, s_n)$.

$$\text{حيث } s_1 \times s_2 \times \dots \times s_n \ni s_1 \times s_2 \times \dots \times s_n \ni s_1 \times s_2 \times \dots \times s_n$$

إن مجموعة جميع هذه الكائنات الرياضية التي يمكن تشكيلها كما سبق هي الجداء الديكارتي

$$s_1 \times s_2 \times \dots \times s_n$$

تمارين محلولة

الازواج المرتبة :

١٥٤ - اكتب الأزواج المرتبة التي يكون المسقط الأول في كل منها ٢ ويكون المسقط الثاني أحد الأعداد ٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥.

الحل :

ان هذه الأزواج المرتبة هي (٠، ٢) ٦ (١، ٢) ٦ (٢، ٢) ٦ (٣، ٢) ٦ (٤، ٢) ٦ (٥، ٢) ٦ .

١٥٥ - اكتب الأزواج المرتبة التي يكون المسقط الثاني في كل منها ٢ ويكون المسقط الأول أحد العناصر ٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥ .

الحل :

ان هذه الأزواج المرتبة هي (٠، ٢) ٦ (١، ٢) ٦ (٢، ٢) ٦ (٣، ٢) ٦ (٤، ٢) ٦ (٥، ٢) ٦ .

١٥٦ - أوجد قيمة س إذا علمت أن الزوجين المرتبين (٣س، ٢) و (٢س + ١، ٢) متساويان .

الحل :

لكي يتساوى الزوجان المرتبان يجب أن تتساوى المركبتان (المسقطان) المتقابلتان . اذن يجب أن يكون :

$$٣س = ٢س + ١ \Leftrightarrow س = ١$$

١٥٧ - أوجد قيمة كل من س و ع إذا علمت أن الزوجين المرتبين (س، ٢) و (٣، ٢ - س - ع) متساويان .

الحل :

ينتج عن تساوي الزوجين المفروضين أن :

$$\left\{ \begin{array}{l} ٣ = س \\ ٢ = ٢ - س - ع \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} ٣ = س \\ ٤ = ع \end{array}$$

١٥٨ - لتكن المجموعتان :

$$س = \{ سالم، قاسم، فريد \} \text{ و } ع = \{ سعيد، يونس \}$$

أوجد الجداء الديكارتي $س \times ع$. والجداء الديكارتي $ع \times ع$ ثم مثل كلا منها سهمياً .

الحل : الجداء الديكارتي

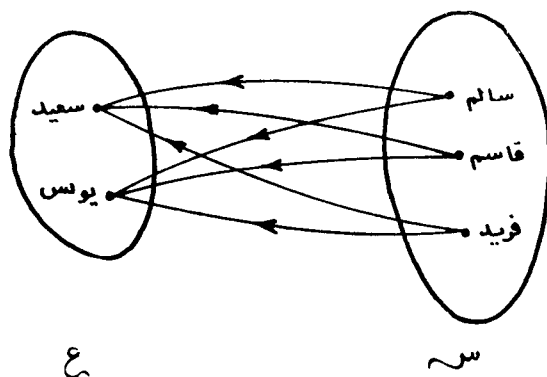
$$س \times ع = \{ (سالم، سعيد) ، (سالم، يونس) ، (قاسم، سعيد) ، (قاسم، يونس) ،$$

$$(فريد، سعيد) ، (فريد، يونس) ، (قاسم، فريد) ، (قاسم، يونس) \}$$

$$\text{والجداء الديكارتي: } ع \times ع =$$

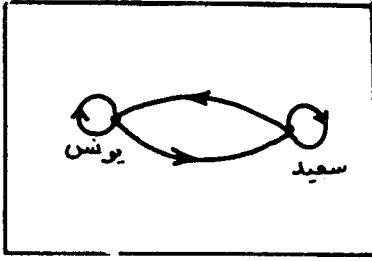
$$\{ (سعيد، سعيد) ، (سعيد، يونس) ، (يونس، سعيد) ، (يونس، يونس) ، (يونس، سعيد) \}$$

ان التمثيل السهمي للجداء $س \times ع$ هو :



الشكل (٩٧)

والتمثيل السهمي للجداء
ع × ع هو :



ع الشكل (٩٨)

١٥٩ - ينظم مكتب سياحي رحلات تقوم من إحدى المدن دمشق ، بيروت ، بغداد وتصل إلى إحدى المدن التالية : القاهرة ، طرابلس ، الجزائر . مثل هذه الرحلات بشكل جداء ديكراتي . ما هو عدد هذه الرحلات ؟ مثل ذلك جدولياً .

الحل :

لنأخذ المجموعة س = { دمشق ، القاهرة ، بيروت ، بغداد } . والمجموعة ع = { القاهرة ، طرابلس ، الجزائر } . يمكن أن تمثل كل رحلة بزواج مرتب مركبته الأولى المدينة التي تبدأ بها الرحلة والمركبة الثانية المدينة التي تصل إليها الرحلة . وتكون مجموعة الرحلات هذه هي مجموعة الجداء الديكراتي س × ع وهي :

$$\begin{aligned} \text{س} \times \text{ع} = & \{ (\text{دمشق} ، \text{القاهرة}) ، (\text{دمشق} ، \text{طرابلس}) ، (\text{دمشق} ، \\ & \text{الجزائر}) ، (\text{بيروت} ، \text{القاهرة}) ، (\text{بيروت} ، \text{طرابلس}) ، \\ & (\text{بيروت} ، \text{الجزائر}) ، (\text{بغداد} ، \text{القاهرة}) ، (\text{بغداد} ، \\ & \text{طرابلس}) ، (\text{بغداد} ، \text{الجزائر}) \} . \end{aligned}$$

إن عدد هذه الرحلات هو تسع وهو يساوي عدد عناصر س ، وهي ثلاثة ، مضروبة بعدد عناصر ع وهي ثلاثة .

والتمثيل الجدولي لهذه الرحلات هو :

الجزائر	طرابلس	القاهرة	
دمشق (الجزائر)	دمشق، طرابلس (دمشق)	دمشق، القاهرة (دمشق)	دمشق
بيروت (الجزائر)	بيروت، طرابلس (بيروت)	بيروت، القاهرة (بيروت)	بيروت
بغداد (الجزائر)	بغداد، طرابلس (بغداد)	بغداد، القاهرة (بغداد)	بغداد

١٦٠ - لتكن s و e و v ثلاث مجموعات اختيارية . برهن صحة العلاقة التالية :

$$s \times (e - v) = (s \times e) - (s \times v) \\ \text{(الجداء الديكارتى توزيعي بالنسبة للفرق) .}$$

الحل :

بالاستناد إلى تعريف الجداء الديكارتى والفرق نكتب :

$$s \times (e - v)$$

$$\begin{aligned} &= \{ (p, q) : p \in s \wedge (q \in e \wedge q \notin v) \} = \\ &= \{ (p, q) : (p, q) \in s \times e \wedge (p, q) \notin s \times v \} = \\ &= \{ (p, q) : (p, q) \in [(s \times e) - (s \times v)] \} = \\ &= (s \times e) - (s \times v) . \end{aligned}$$

ويمكن البرهان على صحة العلاقة السابقة بطريقة جدول حقيقة بالشكل التالي :

سـ عـ صـ	عـ - صـ	سـ × (عـ - صـ)	سـ × عـ	سـ × صـ	(سـ × عـ) - (سـ × صـ)
٠	٠	٠	٠	٠	٠
١	١	٠	١	٠	١
٠	٠	٠	٠	١	٠
١	١	٠	١	١	٠
٠	٠	٠	٠	٠	٠
١	١	٠	١	٠	١
٠	٠	٠	٠	١	٠
١	١	٠	١	١	٠

حيث ١ يمثل انتماء العنصر للمجموعة بينما ٠ يمثل عدم انتمائه .

١٦١ - لتكن سـ و ع و صـ ثلاث مجموعات كيفية . برهن صحة العلاقة التالية :

$$سـ \times (ع \Delta ص) = (سـ \times ع) \Delta (سـ \times ص)$$

(الجداء الديكارتى توزيعي بالنسبة للفرق التناظري) .

الحل :

بالاستناد إلى تعريف الفرق التناظري نكتب :

$$سـ \times (ع \Delta ص)$$

$$= \{ (ب، ب) : ب \ni سـ \text{ و } (ب \ni ع \text{ فقط أو } ب \ni ص \text{ فقط}) \}$$

$$= \{ (ب، ب) : (ب \ni ب) \ni سـ \times ع \text{ فقط} \}$$

$$\text{أو } \{ (ب، ب) \ni سـ \times ص \text{ فقط} \}$$

$$= \{ (ب، ب) : (ب، ب) \ni (سـ \times ع) \Delta (سـ \times ص) \}$$

$$= (سـ \times ع) \Delta (سـ \times ص) .$$

هذا ويمكن البرهان على صحة العلاقة السابقة بجدول الحقيقة على الشكل الآتي :

س	ع	ص	س × ع	س × ص	ع × ص	Δ (س × ع)	Δ (س × ص)
١	١	١	١	١	١	٠	٠
١	١	٠	١	٠	١	١	٠
١	٠	١	٠	١	١	٠	١
٠	١	٠	٠	٠	٠	٠	٠
٠	١	١	٠	١	١	٠	١
٠	٠	١	٠	٠	٠	٠	٠
٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠

الرمز ١ يدل على انتماء العنصر إلى المجموعة بينما الرمز ٠ يدل على عدم الانتماء .

١٦٢ - لتكن س ع و ص و ٧ أربع مجموعات كيفية . برهن صحة العلاقة :

$$(س \times ع) \cap (س \times ص) = (س \times ٧) \cap (ع \times ص)$$

الحل :

حسب تعريف الجداء الديكارتي والتقاطع يمكن أن نكتب :

$$(س \times ع) \cap (س \times ص)$$

$$= \{ (٧, س) : (٧, ع) \wedge (٧, ص) \}$$

$$= \{ (٧, س) : (٧, ع) \wedge (٧, ص) \}$$

$$= \{ (٧, س) : (٧, ع) \wedge (٧, ص) \}$$

$$= \{ (٧, س) : (٧, ع) \wedge (٧, ص) \}$$

$$= \{ (٧, س) : (٧, ع) \wedge (٧, ص) \}$$

$$= (س \times ٧) \cap (ع \times ص) .$$

هذا ويمكن برهان العلاقة السابقة بطريقة جدول الحقيقة .

١٦٣ - لتكن المجموعات :

$$\{٧,٥,٣,١\} = \text{ص} \text{ و } \{٥,٣,٢\} = \text{ع} \text{ و } \{٣,٢,١\} = \text{س}$$

أوجد المجموعات التالية :

$$١ - \text{س} \times \text{س} \quad ٢ - \text{س} \times (\text{ع} - \text{ص})$$

$$٣ - \text{ع} \times (\text{س} \Delta \text{ص})$$

$$٤ - (\text{س} \times \text{ع}) \cap (\text{ع} \times \text{س})$$

$$٥ - (\text{س} - \text{ع}) \times (\text{س} - \text{ص})$$

$$٦ - (\text{ع} \Delta \text{س}) \times (\text{ع} \Delta \text{ص})$$

الحل :

استناداً إلى تعريف الجداء الديكارتي نجد :

$$١ - \text{س} \times \text{س} = \{ (١,١) \text{ } 6 (٢,١) \text{ } 6 (٣,١) \text{ } 6 (١,٢) \text{ } 6 (٢,٢) \text{ } 6 (٣,٢) \text{ } 6 (١,٣) \text{ } 6 (٢,٣) \text{ } 6 (٣,٣) \}$$

$$٢ - \text{س} \times (\text{ع} - \text{ص}) = \{ (٢,٢) \text{ } 6 (٣,٢) \}$$

وبالاستناد إلى تعريف الفرق نجد أن :

$$\text{ع} - \text{ص} = \{ ٢ \} \text{ وبالتالي فإن :}$$

$$\text{س} \times (\text{ع} - \text{ص}) = \{ (٢,١) \text{ } 6 (٢,٢) \text{ } 6 (٢,٣) \}$$

٣ - بالاستناد إلى تعريف الفرق التناظري نجد أن :

$$\text{س} \Delta \text{ص} = \{ ٧,٥,٢ \} \text{ وبالتالي فإن :}$$

$$\text{ع} \times (\text{س} \Delta \text{ص}) = \{ (٢,٢) \text{ } 6 (٢,٣) \text{ } 6 (٣,٢) \text{ } 6 (٢,٥) \text{ } 6 (٣,٥) \text{ } 6 (٥,٢) \text{ } 6 (٥,٣) \}$$

$$\text{و } \{ (٧,٢) \text{ } 6 (٧,٣) \}$$

٤ - هذا وإن الجداء الديكارتي :

$$\text{س} \times \text{ع} = \{ (٢,١) \text{ } 6 (٣,١) \text{ } 6 (٥,١) \text{ } 6 (٢,٢) \text{ } 6 (٣,٢) \text{ } 6 (٥,٢) \text{ } 6 (٢,٣) \text{ } 6 (٣,٣) \text{ } 6 (٥,٣) \}$$

$$\{ (2,3) \ 6 \ (1,3) \ 6 \ (3,2) \ 6 \ (2,2) \ 6 \ (1,2) \} = \text{سـ} \times \text{عـ} \\ \{ (3,5) \ 6 \ (2,5) \ 6 \ (1,5) \ 6 \ (3,3) \}$$

وبالتالي فان :

$$\{ (3,3) \ 6 \ (2,3) \ 6 \ (3,2) \ 6 \ (2,2) \} = (\text{سـ} \times \text{عـ}) \cap (\text{سـ} \times \text{عـ})$$

$$\{ 2 \} = \text{سـ} - \text{عـ} \quad \{ 1 \} = \text{عـ} - \text{سـ} \quad \text{والفرق سـ} - \text{صـ} = \{ 2 \}$$

وبالتالي فان :

$$\{ (2,1) \} = (\text{سـ} - \text{صـ}) \times (\text{عـ} - \text{سـ})$$

$$\{ 5, 1 \} = \Delta \text{سـ} \quad \text{ان الفرق التناظري عـ} \Delta \text{سـ} \\ \Delta \text{صـ} = \{ 7, 1, 2 \} \quad \text{وبالتالي فان :}$$

$$\{ (7,1) \ 6 \ (1,1) \ 6 \ (2,1) \} = (\Delta \text{عـ} \Delta \text{صـ}) \times (\Delta \text{عـ} \Delta \text{سـ}) \\ \cdot \{ (7,5) \ 6 \ (1,5) \ 6 \ (2,5) \}$$

$$164 - \text{لتكن المجموعات : سـ} = \{ 2, 1 \} \ 6 \ \text{عـ} = \{ 5, 1 \} \\ \text{صـ} = \{ 1, 0 \}. \text{اكتب مجموعة الجداء الديكارتية سـ} \times \text{عـ} \times \text{صـ} \\ \text{وكذلك مجموعة الجداء الديكارتية سـ} \times \text{صـ} \times (\text{سـ} - \text{صـ})$$

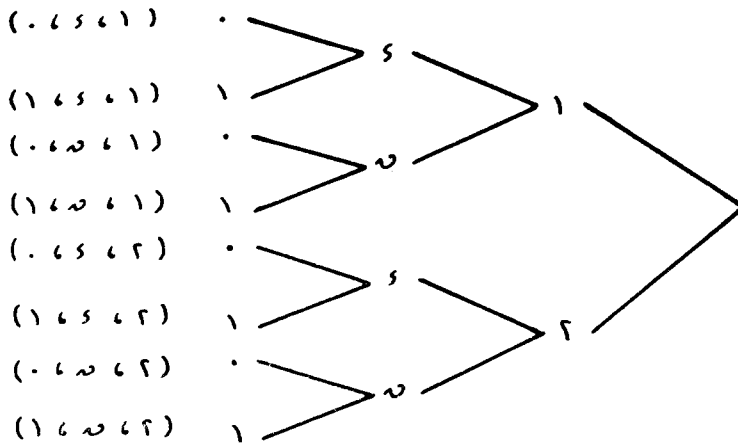
الحل :

استناداً إلى التعريف نجد أن :

$$(1) \text{ مجموعة الجداء الديكارتية سـ} \times \text{عـ} \times \text{صـ هي :}$$

$$\{ (0,5,1) \ 6 \ (0,1,1) \ 6 \ (1,5,1) \ 6 \ (1,1,1) \} \\ \{ (0,5,2) \ 6 \ (0,1,2) \ 6 \ (1,5,2) \ 6 \ (1,1,2) \}$$

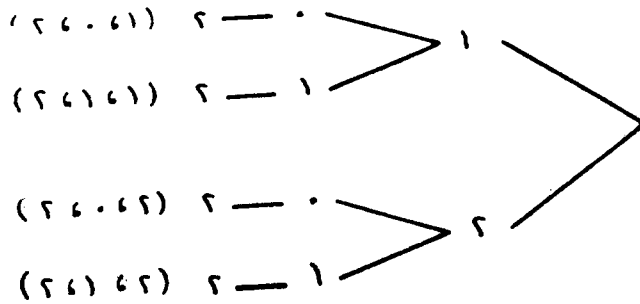
ويمكن كتابة مجموعة الجداء سـ $\times$ عـ $\times$ صـ هذه بالمخطط التالي:



الشكل (٩٩)

(نسمي هذا المخطط مخطط الشجرة للجداء $س_هـ \times ع \times ص_هـ$)

(٢) ان مجموعة الفرق $س_هـ - ص_هـ = \{2\}$ وبالتالي فان مجموعة الجداء الديكارتي $س_هـ \times ص_هـ \times (س_هـ - ص_هـ)$ تعطى بمخطط الشجرة التالي :



الشكل (١٠٠)

تمارين غير محلولة

١٦٥ - اكتب الأزواج المرتبة التي يكون المسقط الاول في كل منها كرة والمسقط الثاني أحد العناصر : طائرة ، سلة ، قدم .

١٦٦ - اكتب الأزواج المرتبة التي يكون المسقط الثاني في كل منها $\sqrt{3}$ والمسقط الاول أحد العناصر : س ، ب ، ١٥ .

١٦٧ - أوجد قيمة كل من p و b إذا علمت أن الزوجين المرتبين $(p, 2+b)$ و $(1-b, 2+p)$ متساويان .

١٦٨ - أوجد قيمة كل من s و c إذا علمت أن الزوجين المرتبين $(s, c+1)$ و $(7, s-c)$ متساويان .

١٦٩ - لتكن المجموعتان $S = \{p, b\}$ و $E = \{b, c, d\}$.
أوجد كلا من المجموعات التالية :

$$1) S \times (S \Delta E) \text{ ومثل ذلك سهمياً .}$$

$$2) (S - E) \times (S \cap E) .$$

$$3) (S \cup E) \times E \text{ ومثل ذلك جدولياً .}$$

١٧٠ - لتكن المجموعات :

$$S = \{3, 4, 5\} \text{ و } E = \{1, 2, 3, 4\} \text{ و } V = \{1, 2, 3, 4, 5\} .$$

أوجد المجموعات التالية :

$$2) S \times E$$

$$1) S \times S$$

$$\begin{aligned}
& \textcircled{3} \quad (س \times س) \cap (ع \times ع) \\
& \textcircled{4} \quad (س \times س) \cup (ع \times ع) \\
& \textcircled{5} \quad س \times (ع - س) \\
& \textcircled{6} \quad (ع - س) \times (س \Delta ص) \\
& \textcircled{7} \quad (س - س) \times ص \\
& \textcircled{8} \quad (س \Delta ع) \times (ص - س)
\end{aligned}$$

١٧١ - لتكن س و ع و ص و و أربع مجموعات كيفية . برهن
 صحة العلاقتين التاليتين :

$$\begin{aligned}
(س \times ع) \cup (ص \times و) & \supseteq (س \cup ص) \times (ع \cup و) \\
(س \supseteq ص \text{ و } ع \supseteq و) & \Leftrightarrow س \times ع \supseteq ص \times و
\end{aligned}$$

١٧٢ - لتكن س و ع و ص ثلاث مجموعات كيفية . برهن صحة
 العلاقات التالية :

$$\begin{aligned}
(س \cup ع) \times ص &= (س \times ص) \cup (ع \times ص) \\
(س \cap ع) \times ص &= (س \times ص) \cap (ع \times ص) \\
(س - ع) \times ص &= (س \times ص) - (ع \times ص) \\
(س \Delta ع) \times ص &= (س \times ص) \Delta (ع \times ص)
\end{aligned}$$

(الخواص التوزيعية للجداء الديكارتي من اليسار) .

١٧٣ - لتكن المجموعات :

$$س = \{٣، ٢\} \text{ و } ع = \{١، ٣، ٥\} \text{ و } ص = \{٣، ٤\} .$$

اكتب كلاً من المجموعات التالية :

$$\begin{aligned}
& \textcircled{1} \quad س \times ع \times ص \\
& \textcircled{2} \quad (س - ع) \times (س \Delta ص) \\
& \textcircled{3} \quad س^٢ \times ع \quad \textcircled{4} \quad س \times ص^٢
\end{aligned}$$

أجوبة وإرشادات

$$١٦٥ - (كرة، طائرة) \in (كرة، سلة) \in (كرة، قدم) .$$

$$١٦٦ - (\sqrt[3]{3}, 3) \in (\sqrt[3]{3}, 1) \in (\sqrt[3]{3}, 10) .$$

$$١٦٧ - 3 = 1 \in 2 = 1 .$$

$$١٦٨ - 3 = 3 \in 4 = 3 .$$

$$١٦٩ - ١ - \{(p, 1) \in (p, p) \in (p, 3) \in (3, p) \in (1, p) \in (p, 1)\} .$$

$$٢ - \{(1, p)\} .$$

$$٣ - \{(1, p) \in (3, p) \in (3, 1) \in (1, 3) \in (1, p)\} .$$

$$(3, 1) \in (1, 3) \in (3, 3) \in (3, 3)$$

$$. \{(3, 3) \in (3, 1) \in (1, 3) \in (3, 3)\} .$$

$$١٧٠ - استنفد مما يلي في حساب الجداءات الديكارتية المطلوبة :$$

$$\{2, 1\} = \Delta \text{ ص } \text{ و } \{5, 2, 1\} = \Delta \text{ ع }$$

$$\{2, 1\} = \text{ ص } - \text{ س } \text{ و } \emptyset = \text{ ص } - \text{ س } - \text{ ع }$$

$$\{5\} = \text{ ع } - \text{ ص } \text{ و } \emptyset = \text{ ص } - \text{ ع } .$$

$$١٧٣ - استنفد مما يلي في حساب الجداءات الديكارتية المطلوبة :$$

$$\{2\} = \text{ ع } - \text{ س } \text{ و } \{4, 2\} = \Delta \text{ ص } .$$