

الفصل السادس

علاقة التكافؤ والترتيب

٦١ - علاقة التكافؤ :

Relation d'équivalence ، Equivalence relation

لنعرف في S مجموعة سكان مدينة دمشق العلاقة R بخاصة « السكن في شارع واحد » فإذا سكن علي في الشارع الذي يسكن فيه صلاح فإننا نقول إن علياً مكافئاً لصلاح من حيث سكنها في شارع واحد ويلاحظ بسهولة أن هذه العلاقة منعكسة ومتناظرة ومتعدية .

ولنعرف العلاقة R في مجموعة الأعداد الصحيحة بالشكل :

$$R = \{ (p, q) : (p, q) \in S \times S \text{ و } p - q \text{ يقبل القسمة على } 5 \} .$$

من المعروف أن :

« $p - q$ يقبل القسمة على 5 » \Leftrightarrow « باقيا قسمة p و q على 5 متساويان » .

لذا نقول في هذه الحالة إن العددين p ، q متكافئان من حيث باقي قسمتها على 5 . ويبرهن بسهولة أن هذه العلاقة منعكسة ومتناظرة ومتعدية .

تعريف : نقول عن علاقة \sim معرفة في مجموعة ما S إنها علاقة تكافؤ فيما إذا كانت :

١ - منمكسة ٢ - متناظرة ٣ - متعدية

ونقول عن عنصرين a, b مرتبطين بعلاقة التكافؤ \sim إنها متكافئان وفق \sim ونكتب :

$$a \sim b \text{ أو } a \equiv b$$

مثال (١) : إن علاقة التوازي المعرفة في مجموعة مستقيمت المستوي هي علاقة تكافؤ وذلك لأنه إذا كان m, n, p ، m, n ، m, p ثلاثة مستقيمت كيفية من هذه المجموعة فإن :

١ - المستقيم m يوازي نفسه $m \parallel m$ فالعلاقة منمكسة .

٢ - إذا كان $m \parallel n$ فإن $n \parallel m$ أي $m \parallel n \Leftrightarrow n \parallel m$ والعلاقة متناظرة .

٣ - إذا كان $m \parallel n$ و $n \parallel p$ فإن $m \parallel p$ والعلاقة متعدية أي : $m \parallel n$ و $n \parallel p \Rightarrow m \parallel p$

مثال (٢) : إن علاقة التعامد بين مستقيمت المستوي ليست بعلاقة تكافؤ وذلك لأن m كمستقيم من هذه المجموعة لا يمكن أن يكون متعامداً مع نفسه والعلاقة ليست منمكسة وهذا يكفي للبرهان على ان العلاقة المذكورة ليست بعلاقة تكافؤ .

مثال (٣) : إن قولنا « a من عمر b » من أجل طلاب مدرسة يعرف علاقة تكافؤ تجعل كل طالبين ولدا في عام واحد متكافئين من حيث العمر .

مثال (٤) : لنرمز بالزوج (ب ، م) للمعدد العادي م / ب حيث يمثل م صورة (بسط) الكسر و ب مخرج (مقام) الكسر ولنعرّف في مجموعة الأعداد العادية العلاقة :

$$(ب ، م) ر (س ، ع) \Leftrightarrow ب . ع = س . م$$

إن هذه العلاقة علاقة تكافؤ لتمتعها بالخواص التالية .

$$١ - (ب ، م) ر (ب ، م) \text{ لأن } ب . م = م . ب \text{ والعلاقة منعكسة}$$

$$٢ - (ب ، م) ر (س ، ع) \Leftrightarrow (س ، ع) ر (ب ، م) \text{ وذلك لأن :}$$

$$ب . ع = س . م \Leftrightarrow م . ب = ع . س \text{ والعلاقة متناظرة}$$

$$٣ - (ب ، م) ر (س ، ع) \text{ و } (س ، ع) ر (ب ، م) \Leftrightarrow (س ، ع) ر (ب ، م) \text{ وذلك لأن :}$$

$$ب . ع = س . م \text{ و } س . م = ب . ع$$

لأنه إذا ضربنا طرفي المساواة الأولى بـ م واستفدنا من المساواة الثانية نجد :

$$ب . م . ع = م . ب . ع$$

وبالتقسيم على م (الذي لا يساوي الصفر) نجد :

$$ب . م . ع = م . ب . ع \text{ وهو المطلوب}$$

٦٢ - أصناف (صفوف) التكافؤ

Classes d'équivalence . Equivalence Classes

إذا عدنا إلى المثال (١) فسوف نلاحظ أن علاقة التوازي المعرفة في مجموعة مستقيمت المستوي تقسم هذه المجموعة إلى مجموعات جزئية تتكون كل واحدة منها من جميع المستقيمت المتوازية فيما بينها ونقول إن مستقيمت كل من هذه المجموعات الجزئية متكافئة مع بعضها من حيث كونها موازية لواحد منها .

تعريف : إذا عرفنا في المجموعة S علاقة تكافؤ r وإذا كان ρ عنصر كيفي من S فإننا نسمي المجموعة الجزئية من S التي تتكون من العناصر المكافئة لـ ρ وفق r صنف تكافؤ ρ ونرمز له بـ (ρ) وتسمى (ρ) ممثلا لهذا الصنف .

يفتج من هذا التعريف :

- ١ - كل عنصر $s \in S$ ينتمي إلى صنف تكافؤ .
 - ٢ - إذا اشترك صنفا التكافؤ (a) ، (b) ص (c) بعنصر فإنهما متطابقان أي يمثلان مجموعة جزئية واحدة من S .
 - في الحقيقة إذا كان $s \in (a)$ و $s \in (b)$ ص (c) وبما أن علاقة التكافؤ r علاقة متناظرة ومتعدية فانه يكون :
- $$s \in (a) \text{ و } s \in (b) \Leftrightarrow s \in (c) \text{ و } s \in (a) \Leftrightarrow s \in (b)$$
- وإذا كان $s \in (a)$ ص (b) فإن $s \in (b)$ وبما أن $(a) \cap (b) = \emptyset$ فإننا نجد $s \in (a)$ أي $s \in (a)$ ص (b) . فكل عنصر من الصنف الأول هو عنصر من الصنف الثاني .
- وبشكل مماثل نرى العكس فالصنفان متطابقان وهو المطلوب .
- ٣ - إذا كان (a) ، (b) غير متكافئين وفق r فإن المجموعتين الجزئيتين (a) و (b) ص (c) منفصلتان وهذا يعني أنه لا يوجد بين هذين الصنفين أي عنصر مشترك أي :

$$(a) \cap (b) = \emptyset$$

وذلك لأنه إذا كان S مشترك بين هذين الصنفين فإنها سيكونان متطابقين ويكون $S \supseteq R$ خلافاً لما فرضنا .

نلخص الخاصتين (٢) ، (٣) بقولنا :

إن كل صنف تكافؤ للعلاقة R إما أن يكونا منفصلين وإلا فإنها متساويان

٤ - نقول إن أصناف التكافؤ تجزئة المجموعة S ونعني بذلك أن أصناف التكافؤ مجموعات جزئية من S غير خالية ومنفصلة مثنى مثنى واجتماعها يساوي المجموعة S نفسها أي :

$$\emptyset \neq (P) \text{ ص } \Leftrightarrow S \ni P \text{ ص}$$

$$P \text{ ص } \cap Q \text{ ص } = \emptyset \text{ ، } P \text{ ص } \cup Q \text{ ص } = S \text{ ، } P \text{ ص } \cap Q \text{ ص } = \emptyset \text{ ، } P \text{ ص } \cup Q \text{ ص } = S$$

$$S = P \text{ ص } \cup Q \text{ ص } \cup \dots \cup R \text{ ص}$$

نسمي مجموعة أصناف تكافؤ المجموعة S وفق R ناتج قسمة S على R ونرمز لذلك بالشكل S/R .

مثال (١) : إن علاقة التوازي المعرفة في مجموعة مستقيمت المستوي تجزيء هذه المجموعة إلى أصناف تكافؤ نسمي كل صنف منها منحنى في هذا المستوي وهو مجموعة جزئية من مجموعة مستقيمت هذا المستوي مكونة من كل المستقيمت المتوازية فيما بينها .

مثال (٢) : إن التساوي المعرفة في المجموعة S هو علاقة تكافؤ تجزيء هذه المجموعة إلى أصناف تكافؤ يتألف كل صنف منها من عنصر واحد أي :

$$\{s\} \text{ ص } = S/R$$

مثال (٣) : إذا عرفنا علاقة r في مجموعة الأعداد الطبيعية T بقولنا :
« إن العددين الطبيعيين a ، b زوجيان أو فرديان معاً »

فإن r علاقة تكافؤ تجزئ المجموعة T إلى صنفين تكافؤ هما مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية ومجموعة الأعداد الطبيعية الفردية .

٦٣ - علاقة الترتيب ' Ordered relation ، Relation d'ordre :

إذا عرفنا في سكان مدينة ما العلاقة (a سلف لـ b) فيما إذا كان a هو a أو أحد والديه أو أحد أجداده فإننا نلاحظ أن هذه العلاقة :

١ - منعكسة لأن a سلف لـ b منها كان a من سكان المدينة .
٢ - متعدية لأنه إذا كان a سلفاً لـ b ، و b سلفاً لـ c ، فإن a سلف لـ c .

٣ - لاتناظرية لأنه إذا كان a سلفاً لـ b ، و b سلفاً لـ a ، فإن a هي a نفسها .

وإذا عرفنا في المدن الواقعة على نهر الفرات علاقة بقولنا (a أخفض من b) فيما إذا مر الماء في المدينة a بعد مروره في المدينة b أو في الوقت ذاته ، فعمدئذ نلاحظ أن هذه العلاقة تتمتع كذلك بالصفات الثلاث المذكورة قبل قليل .

(لقد أعطينا ، كما يلاحظ ، لكلمتي سلف وأخفض في هذين المثالين معنى أوسع من المعنى المألوف حيث اعتبرنا الإنسان سلفاً لنفسه واعتبرنا المدينة أخفض من نفسها) .

وبصورة عامة :

نقول عن علاقة r معرفة في مجموعة S إنها علاقة ترتيب فيما إذا كانت :

١ - منعكسة ٢ - لاتناظرية ٣ - متعدية .

وإذا كان $b \succ r$ وفق علاقة ترتيب فاننا نرمز لذلك عادة بالشكل :

$$b \succ r \text{ أو } b \prec r$$

ونقرأ ذلك بقولنا : إن b سابق لـ r أو واقع قبل r كما نقول إن r لاحق لـ b أو واقع بعد b .

مثال (١) : إن علاقة الاحتواء \supseteq المعرفة في \mathbb{R} (س) مجموعة أجزاء المجموعة S هي علاقة ترتيب . لأنه إذا كان $b \supseteq a$ ، $c \supseteq b$ ، و ثلاث مجموعات جزئية من S فإنه يكون حسب تعريف الإحتواء :

$$1 - b \supseteq a \text{ علاقة الاحتواء منعكسة}$$

$$2 - \text{إذا كان } b \supseteq a \text{ و } a \supseteq b \text{ و } a \neq b \text{ ، العلاقة لاتناظرية}$$

$$3 - \text{إذا كان } b \supseteq a \text{ و } c \supseteq b \text{ و } c \supseteq a \text{ ، العلاقة متعدية}$$

مثال (٢) : أن علاقة « يقسم » المعرفة في مجموعة الأعداد الطبيعية الموجبة \mathbb{N}^* هي علاقة ترتيب. وذلك لأنها :

$$1 - \text{منعكسة : } a \mid b \text{ و } b \mid a \text{ ، } a \neq b$$

$$2 - \text{لاتناظرية : } a \mid b \text{ و } b \mid a \text{ ، } a \neq b$$

$$3 - \text{متعدية : } a \mid b \text{ ، } b \mid c \text{ ، } a \mid c$$

مثال (٣) : ان العلاقة المألوفة \leq المعرفة في مجموعة الأعداد العادية هي علاقة ترتيب لأنها ، كما هو واضح ، منعكسة و لاتناظرية و متعدية .

٦٤ - الترتيب الكلي والترتيب الجزئي

Ordre total . Ordre partiel . Total ordre . Partial ordre

إذا درسنا علاقة الترتيب المعرفة في مجموعة الأعداد العادية \mathbb{R} والتي نرمز لها بـ \leq فإننا نستنتج بسهولة أنه مهما كان العدادان العاديان a, b

فإنها يحققان واحدة على الأقل من العلاقتين $b \leq c$ ، $b \geq c$ أي
 إنها يحققان العلاقة المركبة :

$$b \leq c \text{ أو } b \geq c$$

نقول إن العلاقة \leq المعرفة على E هي علاقة ترتيب كلي وإن E
 مرتبة كلياً بالعلاقة \leq .

أما إذا عدنا إلى دراسة علاقة الإحتواء المعرفة في E (S) مجموعة
 أجزاء المجموعة S فإننا نجد أزواجاً من عناصر هذه المجموعة لا تحقق
 علاقة الإحتواء بالشكل \subseteq ولا العلاقة المعاكسة ذات الشكل \supseteq نقول
 في هذه الحالة إن علاقة الإحتواء المعرفة في مجموعة أجزاء المجموعة S
 هي علاقة ترتيب جزئي وإن المجموعة E (S) مرتبة جزئياً بهذه العلاقة.

نقول عن عنصرين s ، h من مجموعة عرفنا فيها علاقة ترتيب إنهما
 متقارنان فيما إذا كان :

$$s \leq h \text{ أو } h \leq s$$

وإلا فإننا نقول إنها غير متقارنين .

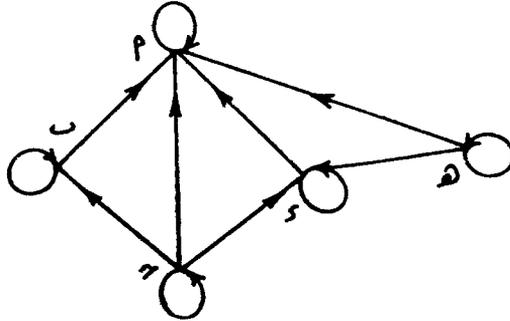
يرمز عادة لمجموعة S معرف عليها علاقة r بالرمز (S, r) .
 فإذا كانت r علاقة ترتيب كلي قلنا ان (S, r) مرتبة كلياً وإلا
 قلنا إن (S, r) مرتبة جزئياً .

إن (P, \supseteq) مرتبة ترتيبياً كلياً، بينما (E, \supseteq) مرتبة ترتيبياً جزئياً.

٦٥ - التمثيل السهلي لعلاقة الترتيب : لقد اصطلح أن تمثل علاقة

ترتيب معرفة على مجموعة منتهية S بأن نرسم لعناصر هذه المجموعة
 بنقاط ونصل بين كل زوج يحقق لعلاقة الترتيب المفروض بسهم ينطلق
 من المركبة الأولى لهذا الزوج ليستقر في المركبة الثانية . ولكي نبين أن
 هذه العلاقة منمكسة نرسم من كل نقطة من هذه النقاط منحنيًا مغلقًا
 يبدأ من هذه النقطة وينتهي فيها .

مثال (١) : إن العلاقة المعرفة بالمخطط السهمي المرافق في المجموعة
 $\{p, b, s, c, h\}$



الشكل (١١٧)

هي علاقة ترتيب جزئي تحققها الأزواج :

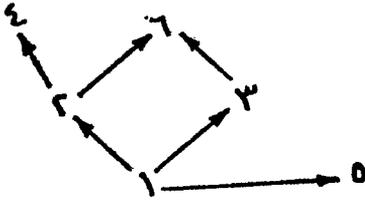
(b, p) (c, p) (c, s) (p, c) (p, b) (c, b)
 (h, s) (p, h) (p, p) (p, s) (p, h) (s, h)
 (s, s) (h, h)

وغير محققة من قبل الأزواج :

(s, p) (p, b) (c, p) (c, s) (h, p) (c, b)
 (s, b) (s, c) (h, c) (h, s) (h, b) (h, c)
 (s, c) (h, s) (c, s) .

لسهولة الرسم يرى بعض المؤلفين أن تمثل علاقة ترتيب (معروفة مقدماً) بمجموعة من النقاط يصل بين مركبتي كل زوج مرتب بهذه العلاقة سهم باتجاه الترتيب أو عدة أسهم متلاحقة من الاتجاه ذاته تمر بنقاط أخرى .

مثال (٢) : إن علاقة الترتيب المعرفة بـ (يقسم) على المجموعة $\{١, ٢, ٣\}$ ،
 $\{٤, ٥, ٦\}$ تمثل بالمخطط السهمي المرافق وهي علاقة ترتيب جزئي
لأن المخطط يحوي أزواجاً لا تتصل مركباتها ببعضها بسهم واحد أو



الشكل (١١٨)

بأكثر من سهم من اتجاه
واحد مثل : (٣٦٥) 6
(٦٥٥) 6 (٣٦٢) 6
(٦٥٤) .

تعريف :

١ - إذا وجد في مجموعة S مرتبة عنصر b بحيث :

$$b > s \quad \forall s \in S$$

فإننا نسميه العنصر الأول في هذه المجموعة .

وإذا وجد في S عنصر b بحيث :

$$b < s \quad \forall s \in S$$

فإننا نسميه العنصر الأخير في هذه المجموعة .

مثال (١) : إن الصفر هو العنصر الأول في مجموعة الأعداد الطبيعية وفق علاقة الترتيب $>$. ليس لهذه المجموعة عنصر أخير وفق علاقة الترتيب هذه .

مثال (٢) : ان الصفر هو العنصر الأخير في مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة والصفر ، وليس لهذه المجموعة عنصر أول وفق علاقة الترتيب $<$.

مثال (٣) : نلاحظ في المجموعة $\{ ١, ٢, ٣, ٤, ٥, ٦ \}$ التي عرفنا فيها علاقة ترتيب « يقسم » أن العدد (١) هو عنصر أول في هذه المجموعة لأنه يقسم كل عنصر من عناصر هذه المجموعة وليس لها عنصر أخير لأنه لا يوجد أي عدد من هذه المجموعة يقبل القسمة على كل واحد منها .

٢ - لتكن المجموعة المرتبة (س، م) وليكن μ ، ب عنصريين متقارنين وفق العلاقة μ بالشكل $\mu > \text{ب}$. تعطى عادة التعاريف التالية :

١ - المجال المفتوح الذي يبدأ بـ μ وينتهي بـ ب هو المجموعة الجزئية في س، المكونة من العناصر س المحققة للعلاقة :

$$\mu > \text{س} > \text{ب} ، \text{س} \neq \mu ، \text{س} \neq \text{ب} \dots (*)$$

نرمز لهذا المجال المفتوح بـ $[\mu ، \text{ب}]$.

٢ - المجال المغلق الذي مبدؤه μ ونهايته ب هو المجموعة الجزئية في س، المكونة من العناصر س المحققة للعلاقة (*) بالإضافة الى العنصرين μ ، ب ونرمز له بـ $[\mu ، \text{ب}]$.

٣ - المجال المفتوح من اليمين الذي مبدؤه μ ونهايته ب هو المجموعة الجزئية في س، المكونة من العناصر المحققة للعلاقة (*) بالإضافة إلى ب ونرمز له بـ $[\mu ، \text{ب}]$.

٤ - المجال المفتوح من اليسار الذي مبدؤه μ ونهايته ب هو المجموعة الجزئية في س، المكونة من العناصر المحققة للعلاقة (*) بالإضافة إلى μ ونرمز له بـ $[\mu ، \text{ب}]$.

مثال : إذا عرفنا في المجموعة س = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩} علاقة الترتيب « يقسم » فإنه يكون :

$$\begin{aligned} \{٤\} &= [٨، ٢[\\ \{٩، ٣\} &= [٩، ٣[\\ \{٣، ٢، ١\} &= [٦، ١[\\ \{٩، ٣\} &= [٩، ١[\end{aligned}$$

تمارين محلولة

علاقة التكافؤ :

٢٠٣ - نعرف في مجموعة الأعداد الصحيحة ص علاقة ثنائية r بما يلي :

$$a r b \Leftrightarrow (a \in \mathbb{E} \vee b \in \mathbb{N}, a - b = 6k) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

برهن أن هذه العلاقة علاقة تكافؤ وعيّن أصناف تكافؤ هذه العلاقة.

الحل :

إن هذه العلاقة علاقة تكافؤ لأنها :

١ - منعكسة : $a r b$ لأن $a - b = 6k \Rightarrow b - a = 6(-k) \Rightarrow b r a$

٢ - متناظرة : $a r b \Leftrightarrow b r a$ لأن :

$$[a - b = 6k \Leftrightarrow b - a = 6(-k)] \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}$$

٣ - متعدية : $(a r b \text{ و } b r c) \Rightarrow a r c$ وذلك لأن :

$$[a - b = 6k \text{ و } b - c = 6s] \Rightarrow a - c = 6(k + s) \Rightarrow a r c$$

أصناف تكافؤ هذه العلاقة هي ما يلي حيث $a \in \mathbb{N}$:

$$\{a \in \mathbb{N} : a - 6 = 6k\} = \{a \in \mathbb{N} : a = 6k + 6\} = \{6, 12, 18, \dots\}$$

$$\{a \in \mathbb{N} : a - 6 = 6k\} = \{a \in \mathbb{N} : a = 6k + 3\} = \{3, 9, 15, \dots\}$$

$$\{a \in \mathbb{N} : a - 6 = 6k\} = \{a \in \mathbb{N} : a = 6k + 0\} = \{0, 6, 12, \dots\}$$

٢٠٤ - نعرف في \mathbb{R}^* ، مجموعة الأعداد الحقيقية غير المدومة ، علاقة ثنائية r بالشكل :

$s r e \Leftrightarrow s \cdot e < 0$ أي s و e من إشارة واحدة .
برهن أن هذه العلاقة علاقة تكافؤ . ما هي أصناف تكافؤ هذه العلاقة .
إذا عرفنا في \mathbb{R} العلاقة v بالشكل :

$$s v e \Leftrightarrow s \cdot e \leq 0$$

هل هذه العلاقة علاقة تكافؤ ؟

الحل :

إن العلاقة : $s r e \Leftrightarrow s \cdot e < 0$ المعرفة في \mathbb{R}^* هي علاقة تكافؤ لأنها تتمتع بالخواص الثلاث التالية :

١ - منمكسة : $s r e \Leftrightarrow e r s$ ، $s \cdot e < 0$.

٢ - متناظرة : إذا كان $s \cdot e < 0$ ، فإن $e \cdot s < 0$ أي :

$$s r e \Leftrightarrow e r s$$

٣ - متمدية : إذا كان $s \cdot e < 0$ و $e \cdot v < 0$ ، فإن :

$$s \cdot v < 0$$

أي إذا كان s و e من إشارة واحدة وكان e و v من إشارة واحدة فإن s و v من إشارة واحدة هي الإشارة المشتركة بين (s, e, v) ونكتب ذلك :

$$s r e \text{ و } e r v \Leftrightarrow s r v$$

لهذه العلاقة صنفا تكافؤ فقط هما مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة ومجموعة الأعداد الحقيقية السالبة .

أما إذا عرفنا في المجموعة \mathcal{C} كاملة بما فيها الصفر العلاقة $s \leq e$ فإن هذه العلاقة :

$$1 - \text{منعكسة لأن } s \leq s \text{ و } s \leq v \text{ و } v \leq e$$

$$2 - \text{متناظرة لأن إذا كان } s \leq e \text{ و } e \leq s \text{ فإن } e \leq s$$

$$3 - \text{غير متعدية دوماً لأن علاقة الاقتضاء :$$

$$s \leq e \text{ و } e \leq v \text{ و } v \leq s$$

غير محققة مثلاً من أجل $s = 3$ ، $e = 0$ ، $v = 3$ إذ أن الزوج $(3, 0)$ يحقق العلاقة الأولى $s \leq e$ والزوج $(3, 3)$ يحقق العلاقة الثانية $e \leq v$ بينما لا يحقق الزوج $(3, 3)$ العلاقة $s \leq v$.

إن ما تقدم يبرهن على أن العلاقة $s \leq e$ المعرفة في المجموعة \mathcal{C} ليست بعلاقة تكافؤ لأنها علاقة غير متعدية .

٢٠٥ - نعرف في \mathcal{C} (س) مجموعة أجزاء s العلاقة :

$$b \sim r \Leftrightarrow (b \cap h = b \cap h \text{ و } h > \Delta) \text{ حيث } h \text{ عنصر معين من } \mathcal{C} \text{ (س)}$$

١ - برهن أن العلاقة \sim علاقة تكافؤ وعين أضاف التكافؤ .

٢ - برهن صحة العلاقة التالية :

$$b \sim r \Leftrightarrow (b \cap h = b \cap h \text{ و } h > \Delta) \Leftrightarrow b \cap h = \emptyset$$

٣ - ماذا يصبح شكل العلاقة \sim إذا كان $b \cap h = \emptyset$ أو $h = s$ ؟

الحل :

ان العلاقة \sim علاقة تكافؤ لأنها :

١ - منعكسة : $b \sim r \Leftrightarrow h \cap b = h \cap b$ وهذا صحيح .

٢- متناظرة: $b r > \Leftrightarrow c r >$ لأن:

$$b n h = c n h \Leftrightarrow c n h = b n h$$

٣- متعدية: $b r >$ و $c r >$ $\Leftrightarrow b r >$ وذلك لأن:

$$[b n h = c n h] \text{ و } [c n h = b n h] \Leftrightarrow [b n h = b n h]$$

لأن علاقة تساوي المجموعات علاقة متعدية.

أصناف تكافؤ هذه العلاقة:

$$b \approx c \text{ (وفق } r) \Leftrightarrow b n h = c n h = h$$

(h مجموعة جزئية من h).

$$\text{وبما أن: } h n h = b n h = c n h = h$$

فإن المجموعات الثلاث h ، b ، c وكل مجموعة مكافئة لواحدة منها متكافئة (وفق r) وهي تكوّن صنف تكافؤ تمثله h نرسم له b ص (h) إذا بدلنا b كل مجموعة جزئية من h فسوف نحصل على أصناف تكافؤ هذه العلاقة لأن:

١- هذه الأصناف غير خالية لأن كل واحد منها يحوي ممثله على الأقل.

٢- هذه الأصناف منفصلة لأنه إذا كان $h \neq h_p$ وحوى الصنفان $ص (h)$ و $ص (h_p)$ عنصراً مشتركاً مثلاً فسوف يكون:

$$h n h = b n h = c n h = h_p$$

وهذا يؤدي $h = h_p$ خلافاً لما فرضنا.

٣- كل عنصر s من h (س) ينتمي إلى واحد من هذه الأصناف وذلك لأنه إذا كان $h n s = h_p$ (قد تكون h_p مجموعة خالية) فإن:

$$h n s = h_p = h_p \text{ وهذا يعني أن } s \in ص (h_p) .$$

٢- إن هذه العلاقة صحيحة لأن :

$$\emptyset = (h \succ n) \Delta (h \succ n) \Leftrightarrow \emptyset = h \succ n (\succ \Delta) (\text{خاصة توزيع } n \text{ على } \Delta)$$

$$\Leftrightarrow (h \succ n) \Delta (h \succ n) = \emptyset \text{ (من خواص } \Delta \text{)}$$

$$\Leftrightarrow h \succ n \approx h \succ n \text{ (وفق } r \text{)}$$

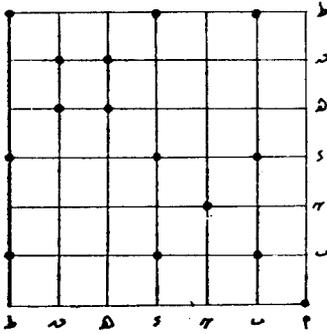
٣- إذا كان $\emptyset = h$ فإن العلاقة $\emptyset = h \succ n = h \succ n$ محققة دوماً .
ونقول في هذه الحالة إن العلاقة r محققة دوماً فهي مطابقة .
أما إذا كان $h = s$ فإنه تكون :

$$s \succ n = h \succ n \Leftrightarrow s = h$$

أي $s \succ r = h \succ r \Leftrightarrow s = h$ والعلاقة r هي علاقة التساوي .

٢٠٦- برهن أن العلاقة المعرفة في المجموعة $\{ \rho, \sigma, \tau, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \theta, \iota \}$ بالتمثيل الديكارتي التالي هي علاقة تكافؤ :

الحل :



الشكل (١١٩)

إن هذه العلاقة علاقة تكافؤ لأنها :

١- منعكسة إذ أنها تحوي جميع العناصر القطرية .

٢- متناظرة إذ إن النقاط المحققة لهذه العلاقة متناظرة بالنسبة للقطر . يقابل كل زوج من

الشكل (س،ع) محقق للعلاقة الزوج (ع،س) المناظر للقطر يحقق العلاقة المفروضة .

٣- متعدية لأن الأزواج المثلة للنقاط الواقعة على هذا الشكل تحقق العلاقة :

(س،ع) و (ع،ص) من الشكل \Leftrightarrow (س،ع) من الشكل
 فمثلا (ب،س) و (س،ط) من الشكل \Leftrightarrow (ب،ط) من الشكل

٢٠٧ - نقول عن علاقة r معرفة في المجموعة S إنها دائرية فيما إذا حققت :

$$a r b \text{ و } b r c \Leftrightarrow a r c$$

برهن أنه إذا كانت علاقة منمكسة دائرية فإنها تكون علاقة تكافؤ وعلى العكس كل علاقة تكافؤ هي علاقة دائرية .

الحل :

بما أن العلاقة r منمكسة فإنه $a r b \Leftrightarrow b r a$ ، $a r c$

وبما أن العلاقة دائرية فإنه :

$$a r b \text{ و } (b r c) \Leftrightarrow a r c$$

وهذا يعني ان العلاقة r متناظرة .

وبما أن العلاقة r متناظرة فإن :

$$(a, b) \Leftrightarrow (b, a) \text{ و } (a, c) \Leftrightarrow (c, a)$$

والعلاقة r علاقة متعدية وبذلك يبرهن المطلوب .

العكس : إذا كانت العلاقة r علاقة تكافؤ فإنها منمكسة ومتناظرة ومتعدية أي :

$$a r b \text{ و } b r c \Leftrightarrow a r c$$

أي أن العلاقة دائرية .

٢٠٨ - لتكن r علاقة معرفة في المجموعة S وليكن Δ بيان هذه العلاقة ولترمز بـ Δ للعناصر القطرية في الجداء $S \times S$ و Δ^{-1} بيان العلاقة العكسية .

١ - برهن أن قولنا : العلاقة $\bar{1}$ - منعكسة . $\bar{2}$ - متناظرة .
 $\bar{3}$ - متعدية ، تكافئ على الترتيب :

$$\bar{1} - \Delta \supseteq \bar{2} - \bar{3} \supseteq \bar{1} - \bar{2} \supseteq \bar{3} - \bar{2} \supseteq \bar{1} - \bar{3}$$

٢ - برهن أن الشرطين $(\bar{1})$ ، $(\bar{3})$ يؤديان الى $\bar{2} = \bar{3}$

الحل :

$\bar{1}$ - ان قولنا $\forall x \exists y \supseteq x$ ، $\forall x \supseteq y \Leftrightarrow x$ ، $\forall x (x \supseteq y)$ وبالعكس إذا كان $\Delta \supseteq \bar{2}$ فان $\forall x (x \supseteq y)$ ، $\forall x \exists y \supseteq x$ أي $\forall x \supseteq y$ ، $\forall x \exists y \supseteq x$

$\bar{2}$ - اذا كان $\forall x (x \supseteq y)$ فان $\forall x (x \supseteq y)$ (حسب تعريف العلاقة العكسية) .

وبما أن العلاقة متناظرة :

$$\forall x (x \supseteq y) \Leftrightarrow \forall x (y \supseteq x) \Leftrightarrow \forall x (x \supseteq y) \supseteq \bar{1}$$

$$\forall x (x \supseteq y) \supseteq \bar{1} \Leftrightarrow \forall x (x \supseteq y) \supseteq \bar{1}$$

وبصورة مماثلة $\forall x (x \supseteq y) \supseteq \bar{1} \Leftrightarrow \forall x (x \supseteq y) \supseteq \bar{1}$

وهذا يعني أن $\bar{1} = \bar{2}$

وعلى العكس اذا كان $\bar{1} = \bar{2}$ فانه يكون .

$$\forall x (x \supseteq y) \supseteq \bar{1} \Leftrightarrow \forall x (x \supseteq y) \supseteq \bar{1}$$

ولكن $\forall x (x \supseteq y) \supseteq \bar{1} \Leftrightarrow \forall x (x \supseteq y) \supseteq \bar{1}$

وهذا ما يبرهن على أن العلاقة $\bar{1}$ علاقة متناظرة .

$\bar{3}$ - إذا كانت العلاقة متعدية فإنه يكون :

$$\forall x (x \supseteq y) \supseteq \bar{3} \supseteq \bar{3} \supseteq \bar{3} \supseteq \bar{3} \supseteq \bar{3}$$

إذا حقق (ب، ح) العلاقة \forall وحقق (ح، د) العلاقة \forall فإن (ب، د) يحقق العلاقة المركبة \forall أي أن (ب، د) \supseteq \forall وهو ينتمي بالوقت ذاته إلى \forall وهذا يؤدي إلى العلاقة $\forall \supseteq \forall$

وعلى العكس إذا كان $\forall \supseteq \forall$ وكان (ب، ح) $\supseteq \forall$ و (ح، د) $\supseteq \forall$ فإن (ب، د) $\supseteq \forall$ وهذا ما يفسر قولنا إن العلاقة متعدية .

٢ - إذا تحقق الشرط الأول فهذا يعني $\forall \supseteq \forall$ فإن (ب، ب) $\supseteq \forall$ لقد برهنا أن $\forall \supseteq \forall$ ولنبرهن الآن أن كل عنصر من \forall يقع في \forall لنفرض (ب، ح) $\supseteq \forall$ واستناداً إلى الشرط (١) يكون أيضاً (ح، د) $\supseteq \forall$ وينتج عن هذا أن (ب، د) $\supseteq \forall$ وهذا ما يبرهن على أن :

$$\forall \supseteq \forall$$

وبالإضافة إلى الشرط (٣) يكون :

$$\forall = \forall$$

٢٠٩ - لتكن المجموعة $S = \{p, b, c, d, e, h, v\}$. برهن أن المجموعات الجزئية $\{p, b, c\}$ و $\{c, d, e, h\}$ و $\{v\}$ تشكل تجزئة للمجموعة S وأنها تعرف علاقة تكافؤ \sim في المجموعة S معطاة بالشكل :

$S \sim S \iff S, S$ ينتميان إلى المجموعة الجزئية نفسها .

الحل :

$$\emptyset = \{p, b, c\} \cap \{c, d, e, h\} \quad \text{لدينا :}$$

$$\emptyset = \{v\} \cap \{p, b, c\}$$

$$\emptyset = \{v\} \cap \{c, d, e, h\}$$

$$S = \{a, b, c, d, e, f, g, h\} \cup \{i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}$$

وإذا لاحظنا أن هذه المجموعات الجزئية ليست خالية فإننا نستطيع القول إن هذه المجموعات الجزئية تشكل تجزئة لـ S .

إن العلاقة R علاقة تكافؤ لأنها:

- ١- منعكسة $S \times S$
- ٢- متناظرة $S \times S \subseteq R \subseteq S \times S$
- ٣- متعدية $(S \times S) \cap (S \times S) \subseteq S \times S$

٢١٠- لتكن المجموعة $S = \{1, 2, 3, 4\}$. بين فيما إذا كانت كل من جماعة المجموعات الجزئية التالية تجزئة للمجموعة S :

- (١) $\{ \{1, 2, 3\}, \{4\} \}$
- (٢) $\{ \{1, 2\}, \{3\}, \{4\} \}$
- (٣) $\{ \{1, 2, 3\}, \{4\} \}$
- (٤) $\{ \{1\}, \{2, 3\}, \{4\} \}$

الحل:

كي تكون جماعة مجموعات جزئية لمجموعة ما، تجزئة لهذه المجموعة، يجب أن تحقق ثلاثة شروط: أولاً أن تكون عناصر هذه الجماعة ليست خالية. ثانياً: المجموعات الجزئية منفصلة فيما بينها. ثالثاً: أن يكون اجتماعها هو المجموعة الأصلية. لنطبق هذا على المجموعات المعطاة فمن أجل:

(١) المجموعات الجزئية منفصلة ولكن اجتماعها لا يساوي المجموعة S إذن لا تشكل تجزئة للمجموعة S .

(٢) إن عناصر هذه الجماعة ليست خالية كما أن المجموعات الجزئية منفصلة واجتماعها يساوي المجموعة S إذن تشكل تجزئة للمجموعة S .

(٣) إن المجموعتين الجزئيتين غير منفصلتين اذن لا تشكلان تجزئة .

(٤) إن عناصر الجماعة ليست خالية والمجموعات الجزئية منفصلة واجتماعها يساوي المجموعة S فهي تشكل تجزئة للمجموعة S .

٢١١ - لتكن المجموعتان S_1 و S_2 غير الخاليتين ولنفرص أن المجموعات الجزئية S_1, S_2, S_3 في S تشكل تجزئة للمجموعة S .
 برهن أن المجموعات الجزئية $S_1 \times E, S_2 \times E, S_3 \times E$ ،
 $S_1 \times E$ تشكل تجزئة للمجموعة $S \times E$.

الحل :

بما أن S_1, S_2, S_3 تشكل تجزئة لـ S فهي تحقق العلاقات التالية :

$$S_1 \cap S_2 = S_2 \cap S_3 = S_3 \cap S_1 = \emptyset$$

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$$

لكي تشكل المجموعات الجزئية غير الخالية $S_1 \times E, S_2 \times E, S_3 \times E$ ،
 $S_1 \times E$ تجزئة للمجموعة $S \times E$ ، يجب أن تكون منفصلة فيما بينها واجتماعها يساوي $S \times E$. لنتحقق من هذه الأشياء :

$$(S_1 \times E) \cap (S_2 \times E) = (S_1 \cap S_2) \times E = \emptyset \times E = \emptyset$$

(الخاصة التوزيعية للجداء الديكارتي مع التقاطع)

$$\emptyset = \emptyset \times E = \emptyset$$

(حسب الفرض)

$$(S_1 \times E) \cap (S_3 \times E) = (S_1 \cap S_3) \times E = \emptyset \times E = \emptyset$$

كذلك

$$(S_2 \times E) \cap (S_3 \times E) = (S_2 \cap S_3) \times E = \emptyset \times E = \emptyset$$

وأخيراً :

$$\begin{aligned} & (س_١ \times ع) \cup (س_٢ \times ع) \cup (س_٣ \times ع) \\ & = (س_١ \cup س_٢ \cup س_٣) \times ع \\ & \text{(الخاصة التوزيعية للجداء الديكارتي مع الاجتماع)} \\ & = (س_١ \cup س_٢ \cup س_٣) \times ع \quad (\text{بحسب الفرض}) \\ & = س \times ع \quad \text{وهو المطلوب} \end{aligned}$$

علاقة الترتيب :

٢١٢ - إذا كانت r علاقة ترتيب في المجموعة S . هن أن العلاقة العكسية ، r^{-1} ، علاقة ترتيب على S .

الحل :

إن العلاقة r ، باعتبارها علاقة ترتيب ، منعكسة ولامتناظرة ومتعدية وتكون العلاقة r^{-1} .

- ١ - منعكسة وذلك لأن $(p, p) \in r \Leftrightarrow (p, p) \in r^{-1}$
- ٢ - لامتناظرة لأنه إذا كان $(p, b) \in r$ و $(b, p) \in r$ $\Leftrightarrow p = b$ فإن $(p, b) \in r^{-1}$ و $(b, p) \in r^{-1} \Leftrightarrow p = b$
- ٣ - متعدية لأنه إذا كان

$$\begin{aligned} & (p, b) \in r \text{ و } (b, c) \in r \Leftrightarrow (p, c) \in r \\ & \text{فإن } (p, b) \in r^{-1} \text{ و } (b, c) \in r^{-1} \Leftrightarrow (p, c) \in r^{-1} \\ & \text{فهي علاقة ترتيب .} \end{aligned}$$

٢١٣ - r علاقة معرفة في المجموعة S . و f مجموعة جزئية في S لنرمز بـ $r|_f$ للعلاقة المعرفة بمجموعة الأزواج المرتبة :

سوى n (ف × ف) برهن صحة العلاقة :
 ر علاقة ترتيب في سوى \Leftrightarrow ر علاقة ترتيب في ف .

الحل :

ان بيان العلاقة سوى محوى في مجموعة الجداء الديكارتي ف × ف .
 فالعلاقة سوى علاقة معرفة في المجموعة ف .
 إن العلاقة سوى هذه علاقة ترتيب لأنها :

١ - منمكسة لأن $\forall - \exists$ ف فإن :

$$(b, a) \in R \wedge (a, b) \in F \times F \Leftrightarrow (b, a) \in S$$

٢ - لامتناظرة لأن إذا كان $(b, a) \in F$ و $[(b, a) \in S \wedge (a, b) \in S]$ سوى

$$\text{فإن } (b, a) \in R \Leftrightarrow (a, b) \in R \Leftrightarrow b = a .$$

٣ - متعدية لأنه إذا كان (b, a) و $(a, c) \in S$ سوى فإن :

$$(b, c) \in S \text{ و } (a, c) \in S \Leftrightarrow (b, a) \in R \text{ ومن جهة ثانية لدينا } (b, a) \in S \Leftrightarrow (a, b) \in F \times F \text{ وبالتالي فإن } (b, a) \in S .$$

ملاحظة :

نسمي علاقة الترتيب سوى المعرفة في التمرين السابق علاقة الترتيب
 المستنتجة من العلاقة ر في المجموعة الجزئية ف .

٢١٤ - إذا كانت ر علاقة ترتيب معرفة في مجموعة الأعداد الطبيعية ،
 ط ، بخاصة « يقسم » فالمطلوب :

١ - وضع الرمز المناسب $>$ أو $<$ بين أزواج الأعداد التالية :

$$. 3 \dots 5 , 6 \dots 3 , 17 \dots 35 , 4 \dots 16 .$$

٢ - بيان فيما إذا كانت علاقات الترتيب المستنتجة في المجموعات الجزئية التالية ، علاقات ترتيب كلي أم جزئي :

١ - مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية .

ب - مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية .

ج - المجموعة $\{ ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ \}$.

الحل :

١ - إن ٣ و ٥ عددان غير متقارنين وفق r إذن $٣ * ٥$ و $٥ * ٣$ ولكن وأن ٦ قابلة القسمة على ٣ أي ٦ يلي ٣ ومنه $٦ < ٣$ ولكن ١٧ و ٣٥ غير متقارنين وفق r إذن $١٧ * ٣٥$ و $٣٥ * ١٧$ أما ٤ فهي تقسم ١٦ أي ٤ يسبق ١٦ ومنه $٤ > ١٦$.

٢ - إذا نظرنا في مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية فإننا نجد عناصر فيها مثل ٣ و ٥ غير متقارنين وفق r . إذن فالعلاقة المستنتجة علاقة ترتيب جزئي . كذلك لو نظرنا في مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية فإننا نجد عناصر فيها مثل ٤ و ٦ غير متقارنين وفق r وبالتالي فالعلاقة المستنتجة علاقة ترتيب جزئي .

أما علاقة الترتيب المستنتجة في المجموعة $\{ ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ \}$ فهي علاقة ترتيب كلي لأن $٢ > ٤ > ٨ > ١٦$.

٢١٥ - لتكن المجموعتان S و E - ترتيبين وفق العلاقة (\geq) .

تعرف علاقة r على المجموعة $S \times E$ من الشكل :

$$(s_1, e_1) r (s_2, e_2) \Leftrightarrow (s_1 \geq s_2 \wedge e_1 \geq e_2)$$

برهن أن هذه العلاقة علاقة ترتيب .

الحل :

إن العلاقة r علاقة ترتيب لأنها :

١ - منعكسة لأن :

$$(s \geq e) \wedge (e \geq s) \Leftrightarrow (s, e) \in r \wedge (e, s) \in r$$

٢ - لامتناظرة لأن :

$$(s_1 \geq e_1) \wedge (s_2 \geq e_2) \wedge (e_1 \geq e_2) \Leftrightarrow (s_1, e_1) \in r \wedge (s_2, e_2) \in r \wedge (e_1, e_2) \in r$$

$$(s_2 \geq e_2) \wedge (s_1 \geq e_1) \wedge (e_2 \geq e_1) \Leftrightarrow (s_2, e_2) \in r \wedge (s_1, e_1) \in r \wedge (e_2, e_1) \in r$$

ومن الواضح أن المتراجحات الأخيرة تؤدي إلى :

$$s_1 = s_2 \wedge e_1 = e_2 \text{ ومنه : } (s_1, e_1) = (s_2, e_2)$$

٣ - متعدية لأن :

$$(s_1 \geq e_1) \wedge (s_2 \geq e_2) \wedge (e_1 \geq e_2) \Leftrightarrow (s_1, e_1) \in r \wedge (s_2, e_2) \in r \wedge (e_1, e_2) \in r$$

$$(s_2 \geq e_2) \wedge (s_3 \geq e_3) \wedge (e_2 \geq e_3) \Leftrightarrow (s_2, e_2) \in r \wedge (s_3, e_3) \in r \wedge (e_2, e_3) \in r$$

وأن المتراجحات الأخيرة تؤدي إلى :

$$(s_1 \geq e_1) \wedge (s_3 \geq e_3) \wedge (e_1 \geq e_3) \Leftrightarrow (s_1, e_1) \in r \wedge (s_3, e_3) \in r \wedge (e_1, e_3) \in r$$

٢١٦ - إن الشكل (١٢٠) هو التمثيل السهمي لعلاقة معرفة في مجموعة

النقاط $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. برهن أن

هذه العلاقة علاقة ترتيب.

الحل :

تتصف هذه العلاقة بالخواص التالية :

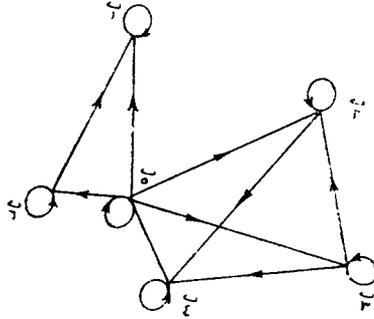
١ - منعكسة وذلك لأن كل نقطة من نقاط المجموعة تقع في عقدة

تشير إلى أن هذه النقطة مرتبطة مع نفسها .

٢ - لاتناظرية لأنه لا يوجد أي زوج من هذه النقاط مرتبط بسهمين من اتجاهين مختلفين .

٣ - متعدية لأن الشكل مؤلف من مجموعة مثلثات من الشكل $\triangle P_1 P_2 P_3$ تحقق علاقة التمدي :

$$P_1 P_2 P_3 \text{ و } P_2 P_3 P_1 \Leftrightarrow P_3 P_1 P_2$$



الشكل (١٢٠)

تمارين غير محلولة

٢١٧ - لتكن S مجموعة مثلثات المستوي ولتكن r علاقة معرفة في S بخاصة «التشابه» .
برهن أن هذه العلاقة علاقة تكافؤ .

٢١٨ - لتكن S مجموعة مستقيجات المستوي . لتكن r علاقة معرفة في S بخاصة «التعامد» .
هل العلاقة r علاقة تكافؤ ؟

٢١٩ - لتكن T مجموعة الأعداد الطبيعية . لتكن r علاقة معرفة في المجموعة $T \times T$ بالشكل التالي :

$$(p, q) r (s, t) \Leftrightarrow p + q = s + t$$

حيث (p, q) و (s, t) $\in T \times T$.

(١) برهن أن r علاقة تكافؤ .

(٢) أوجد أصناف تكافؤ العناصر $(2,1)$ و $(3,1)$ و $(5,3)$

٢٢٠ - لتكن r علاقة معرفة في مجموعة ما . برهن صحة ما يلي :
 r علاقة تكافؤ $\Leftrightarrow r \cap r^{-1}$ علاقة تكافؤ .

٢٢١ - لتكن T مجموعة الأعداد الطبيعية . ولتكن r علاقة معرفة في T بالشكل $S r E \Leftrightarrow S \cap E$ حيث $S, E \in T$.

(١) بيّن خواص العلاقة r وأوجد العلاقة العكسية r^{-1} .

(٢) برهن أن العلاقة $r \cup r^{-1}$ علاقة تكافؤ .

٢٢٢ - لتكن المجموعة $S = \{p, b, >, d, h, l, k\}$.
 يتبين فيما إذا كانت المجموعات الجزئية التالية تشكل تجزئة
 للمجموعة S :

- (١) $\{ \{p, >, l\} \cup \{b\} \cup \{d, k\} \}$
- (٢) $\{ \{p, h, k\} \cup \{d, >\} \cup \{b, d, l\} \}$
- (٣) $\{ \{p, b, h, k\} \cup \{>\} \cup \{d, l\} \}$

٢٢٣ - لتكن المجموعتان S و E . يتبين فيما إذا كانت المجموعات
 الجزئية التالية تشكل تجزئة للمجموعة $S \cup E$:

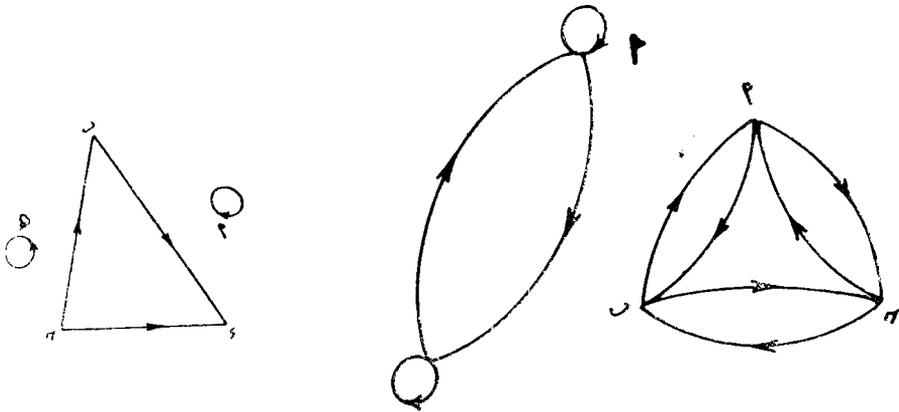
- (١) $\{ S \cap E, S - E, E - S \}$
- (٢) $\{ S \cap E, S - E, S \Delta E \}$
- (٣) $\{ S \cap E, S \Delta E \}$

٢٢٤ - تعريف في E ، مجموعة الأعداد الحقيقية ، العلاقة :

$$s \sim e \iff s^3 - e^3 = s - e$$

قرر فيما إذا كانت هذه العلاقة علاقة تكافؤ وإذا كان الأمر كذلك
 فما هي أصناف التكافؤ ؟

٢٢٥ - عيّن علاقات التكافؤ من بين العلاقات المعرفة بالأشكال التالية :



الشكل (١٢٣)

الشكل (١٢٢)

الشكل (١٢١)

٢٢٦ - ادرس العلاقات التالية المعرفة في مجموعة نقاط المستوي . عيّن أصناف التكافؤ عندما تكون العلاقة المذكورة علاقة تكافؤ .

- ١- $b > a$ على بعد واحد من نقطة ثابتة m .
- ٢- $b > a$ يقعان في نصف مستوي واحد محدود بمستقيم معين l .
- ٣- $b > a$ لا يقعان في نصف واحد من نصفي المستوي اللذين يفصل بينهما مستقيم معين l .

٢٢٧ - نعرف في S ، مجموعة الأعداد الصحيحة ، العلاقاتين :

$$(s, e) \Leftrightarrow s - e \text{ مضاعف لـ } 2 \text{ و } 3$$

$$(s, e) \Leftrightarrow s' - e' \text{ مضاعف لـ } 2 \text{ أو } 3$$

هل العلاقة r علاقة تكافؤ؟ وإذا كان ذلك ما هي أصناف التكافؤ؟
هل العلاقة r' علاقة تكافؤ؟

٢٢٨ - لتكن المجموعة $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

لتكن r علاقة ترتيب معرفة في S بخاصة « يقسم » .

(١) ضع الرمز المناسب بين أزواج الأعداد التالية :

$$1 \dots 3, 4 \dots 8, 9 \dots 3, 7 \dots 9, 8 \dots 2, 8 \dots 2$$

(٢) اكتب جميع المجموعات الجزئية في S والمرتبة ترتيباً كلياً وفق العلاقة المستنتجة من العلاقة r .

٢٢٩ - هل يمكن لعلاقة r على مجموعة S ، أن تكون علاقة ترتيب وتكافؤ في وقت معاً؟

٢٣٠ - لتكن r علاقة معرفة في المجموعة S . برهن صحة ما يلي:

- (١) r علاقة ترتيب $\Leftrightarrow r \cup r^{-1}$ علاقة ترتيب في S .
- (٢) r علاقة ترتيب $\Leftrightarrow r$ علاقة ترتيب في كل مجموعة جزئية في S .

٢٣١ - لتكن المجموعتان S و E المرتبتان وفق العلاقتين r_1 و r_2 على الترتيب . نعرف علاقة r في المجموعة $S \times E$ من الشكل :

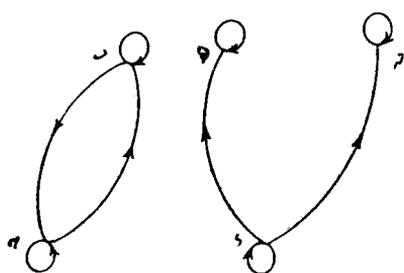
$$(s_1, e_1) r (s_2, e_2) \Leftrightarrow (s_1, s_2) r_1 s_2 \text{ و } (e_1, e_2) r_2 e_2$$

برهن أن r علاقة ترتيب ثم برهن أنه إذا كانت r_1 و r_2 علاقتي ترتيب كلي فإن r علاقة ترتيب كلي .

٢٣٢ - لتكن المجموعتان S و E مرتبتين وفق العلاقتين r_1 و r_2 على الترتيب . نعرف علاقة r في المجموعة $S \times E$ من الشكل :

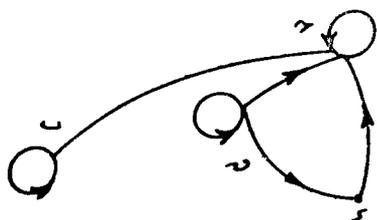
$$(s_1, e_1) r (s_2, e_2) \Leftrightarrow \text{إما } (s_1, s_2) r_1 s_2 \text{ و } e_1 \neq e_2 \text{ أو } (s_1, s_2) r_1 s_2 \text{ و } e_1 = e_2$$

برهن أن هذه العلاقة علاقة ترتيب (الترتيب المعجمي) .



الشكل (١٢٤)

٢٣٣ - أضيف الى البيان في الشكل (١٢٤) سهماً واحذف آخر ليصبح بيان علاقة ترتيب .



الشكل (١٢٥)

٢٣٤ - هل العلاقة التي بيانها كما في الشكل (١٢٥) هي علاقة ترتيب؟ برر قولك .

٢٣٥ -- نعرف في المجموعة : $\{١٠٠٩٠٨٠٧٠٦٠٥٠٤٠٣٠٢٠١\}$ علاقة بينها : $\{١٢٠١١\}$

$$\begin{aligned} & \{٦(٤٠٤) ٦(٦٠٥) ٦(٤٠٣) ٦(٢٠٣) ٦(٢٠١)\} = \supset \\ & \{٦(٩٠١١) ٦(٩٠١٠) ٦(٩٠٨) ٦(٦٠٦) ٦(٧٠٦)\} \\ & \cdot \{(١٢٠١١)\} . \end{aligned}$$

مثل هذا البيان ديكراتياً وسهياً واتمه ليصبح بيان علاقة ترتيب جزئي.

أجوبة وإرشادات

- ٢١٨ - كلا .
- ٢٢١ - علاقة ترتيب .
- ٢٢٢ - (٣) تجزئة .
- ٢٢٣ - (١) و (٣) تجزئة .
- ٢٢٤ - علاقة تكافؤ .
- ٢٢٥ - شكل (١٢٢) علاقة تكافؤ .
- ٢٢٦ - (١) و (٢) علاقتا تكافؤ .
- ٢٢٧ - علاقة تكافؤ .
- ٢٢٨ - (١) $١ < ٣$ ٦ $٤ < ٨$ ٦ $٣ < ٩$ ٦ $٢ < ٨$.
(٢) $\{٦٠٣٠١\}$ ٦ $\{٦٠٢٠١\}$ ٦ $\{٨٠٤٠٢٠١\}$ ٦ $\{١٠٠٥٠١\}$ ٦ $\{٩٠٣٠١\}$.
- ٢٢٩ - نعم إذا كانت العلاقة علاقة تناظر ولامتناظر في نفس الوقت .
- ٢٣٤ - ليست علاقة ترتيب لان $s \overline{s}$.