

## الفصل السابع

### التوابع - التطبيقات

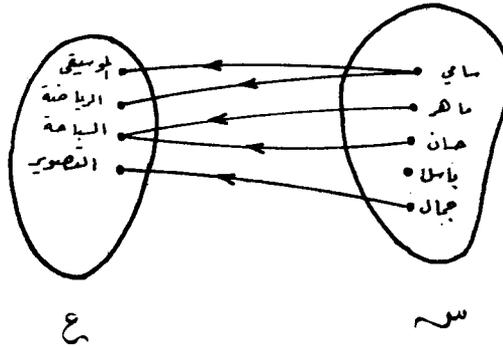
درسنا في الفصل الخامس العلاقات بين عناصر مجموعتين متباينتين أو متساويتين ، وسندرس في هذا الفصل نوعاً خاصاً من العلاقات هي التوابع ، ويمدُّ مفهوم التابع من المفاهيم التي لها تطبيقاتها العديدة في الحياة .

٦٦ - أمثلة توضيحية :

مثال (١) : ليكن :  $S = \{ \text{سامي ، ماهر ، حسان ، باسل ، جمال} \}$   
 و  $E = \{ \text{الموسيقى ، الرياضة ، السباحة ، التصوير} \}$

والعلاقة من  $S$  إلى  $E$  المعرفة بالخاصة (  $S$  يمارس  $E$  )

حيث (  $S$  ،  $E$  )  $\ni S \times E$  والممثلة سهمياً بالشكل (١٢٦) .



الشكل (١٢٦)

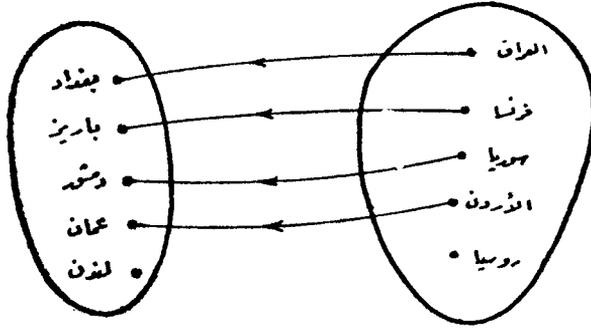
مثال (٢) : لتكن مجموعة الدول

$S = \{ \text{العراق ، فرنسا ، سورية ، الأردن ، روسيا} \}$

ومجموعة المدن  $E = \{ \text{باريز ، بغداد ، دمشق ، عمان ، لندن} \}$

والعلاقة من  $S$  إلى  $E$  المعرفة بالخاصة (س عاصمتها ع)

حيث  $(S, E) \ni S \times E$  والمثلة سهمياً بالشكل (١٢٧) :



الشكل (١٢٧)  $E$   $S$

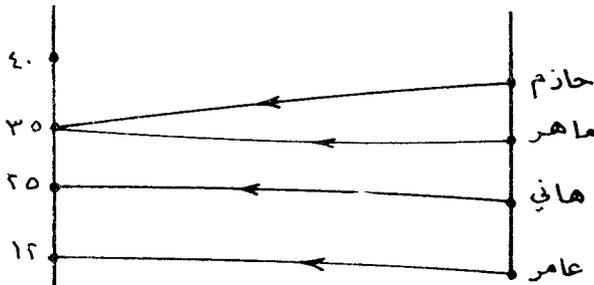
مثال (٣) : لتكن مجموعة الأشخاص

$S = \{ \text{عامر ، هاني ، ماهر ، حازم} \}$

ومجموعة الأعمار  $E = \{ ٢٥ ، ٤٠ ، ١٢ ، ٣٥ \}$

والعلاقة من  $S$  إلى  $E$  المعرفة بالخاصة (س عمره ع)

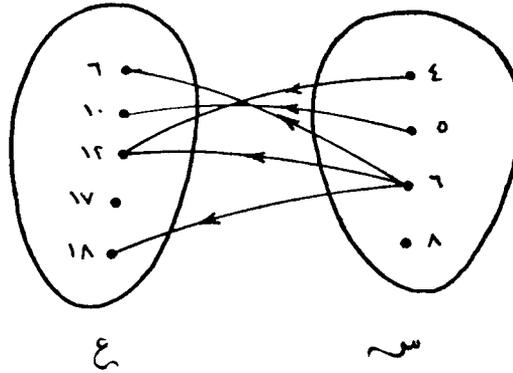
حيث  $(S, E) \ni S \times E$  والمثلة سهمياً بالشكل (١٢٨) :



الشكل (١٢٨)  $E$   $S$

مثال (٤) : لتكن مجموعة الأعداد  $S = \{٤، ٥، ٦، ٨\}$   
 $E = \{٦، ١٠، ١٢، ١٧، ١٨\}$

والعلاقة من  $S$  إلى  $E$  المعرفة بالخاصة (  $S$  يقسم  $E$  )  
 حيث (  $S، E$  )  $\ni S \times E$  والمثلة سهمياً بالشكل (١٢٩) :



الشكل (١٢٩)

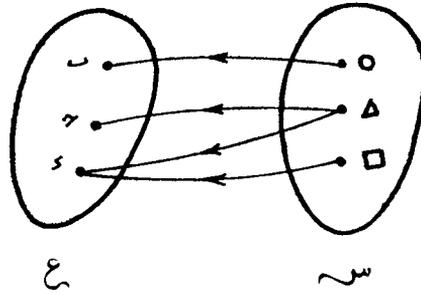
### ٦٧ - مفهوم التابع :

بتدقيق المخططات السهمية الأربعة السابقة نرى في المثالين (٤،١) أن بعض العناصر من  $S$  ينطلق منها سهم واحد فقط ، والبعض الآخر ينطلق منها أكثر من سهم ، بينما نرى في المثالين (٣، ٢) أنه ينطلق من كل عنصر من  $S$  سهم واحد على الأكثر ( أي صفر من الأسهم أو سهم واحد فقط ) .

تسمى العلاقتان في المثالين ٣، ٢ ومثيلاتها علاقات تابعة أو توابع .  
 ومنه :

التابع : نقول عن علاقة ثنائية من  $S$  إلى  $E$  إنها تابع  
 Function . Function إذا كان لكل عنصر من  $S$  مقابل واحد  
 على الاكثر من  $E$  .

مثال (٥) : العلاقة التي يبينها الشكل (١٣٠) ليست تابعة لأن العنصر  $\Delta$  له مقابلان هما  $s, e$  .



الشكل (١٣٠)

مثال (٦) : العلاقة التي يبينها  $\{(١٠,٥), (٤,٢), (٩,٣), (٦,٣)\}$  ليست تابعة لأن العنصر ٣ من منطلقها له مقابلان هما ٩,٦ من المستقر .

مثال (٧) : لتكن المجموعة  $S = \{-٢, -١, ٠, ١, ٢, ٣\}$  .  
والعلاقة في  $S$  المعرفة بالخاصة  $s$  يليه العدد  $e$  مباشرة حيث  
 $(s, e) \in S \times S$

إن بيان هذه العلاقة هو :

$$S = \{(٣,٢), (٢,١), (١,٠), (٠, -١), (-١, -٢)\}$$

ونلاحظ أن كل عنصر من  $S$  له مقابل واحد على الأكثر من  $S$  وفق العلاقة المفروضة . ( فالعنصر ٣ ليس له مقابل ولكل من بقية العناصر مقابل واحد فقط ) فالعلاقة المفروضة هي تابع .

### ٦٨ - تعاريف واصطلاحات :

١ - إذا كانت لدينا علاقة تابعة  $R$  منطلقها  $S$  ومستقرها  $E$  فإننا نستعمل الرمز  $T$  ( بدلاً من  $R$  ) ونكتب :

تا : س ← ع      أو س ← ع<sup>تا</sup>

ونقرأ : ( تا تابع منطلق س ← مستقره ع ) ، أو ( تا تابع من س ← إلى ع ) .

٢ - العنصر الوحيد ع من المستقر الذي يرتبط بالعنصر س من المنطلق وفق التابع تا يسمى صورة س وفق تا أو قيمة التابع الموافقة للعنصر س من المنطلق .

ويرمز له بالرمز تا (س) ويكون تا (س) = ع

٣ - يقال عن تابع إنه معرف من أجل عنصر من المنطلق إذا ارتبط بهذا العنصر عنصر من المستقر وفق هذا التابع وبمجموعة عناصر المنطلق التي يرتبط كل منها بمقابل وحيد من مجموعة المستقر تسمى مجموعة تعريف التابع ( قاعدة التابع ) وعلى هذا فمجموعة تعريف التابع في المثال (٧) هي { ٢ - ، ١ - ، ٠ ، ١ ، ٢ } لأن التابع غير معرف من أجل العنصر ٣ .

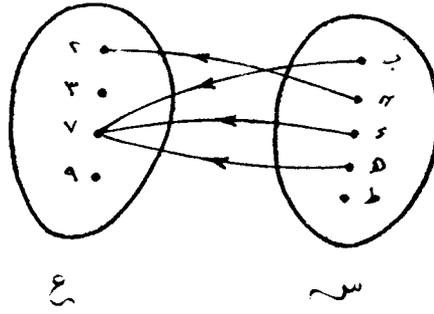
ومجموعة تعريف التابع في المثال (٢) هي { للعراق ، فرنسا ، سورية ، الأردن } والتابع غير معرف من أجل العنصر (روسيا) .

مثال : العلاقة من المجموعة : س ← = { ب ، > ، s ، ه ، ط }

إلى المجموعة : ع ← = { ٢ ، ٣ ، ٧ ، ٩ }

التي يمثلها الشكل (١٣١) هي تابع .

لأن كل عنصر من مجموعة المنطلق س ← يقابله عنصر واحد فقط من مجموعة المستقر ع ← .



الشكل (١٣١)

ولذا نكتب :  $\tau : S \rightarrow E$  ونعني بذلك التابع الذي :

$$\{ب، ح، د، هـ، ط\} = S \text{ ومنطقه } E = \{٢، ٣، ٧، ٩\}$$

إن صورة  $\tau$  وفق هذا التابع هي  $\tau(ب) = ٢$  أي  $\tau(ب) = ٢$

وصورة  $\tau$  هي نفسها صورة كل من العنصرين  $\tau(ح) = ٣$  و  $\tau(د) = ٧$

فالعناصر الثلاثة  $\tau(ب) = ٢$ ،  $\tau(ح) = ٣$ ،  $\tau(د) = ٧$  قيمة واحدة وفق التابع المفروض

$$\tau(ب) = \tau(ح) = \tau(د) = ٧$$

ونلاحظ أن التابع غير معرف من أجل العنصر  $\tau(هـ)$  من  $S$

فمجموعة تعريف هذا التابع هي  $\{ب، ح، د، هـ\}$

٦٩ - طرق تعيين تابع : يمكن تعيين تابع بعدة طرق منها :

أولاً - بمخططة :

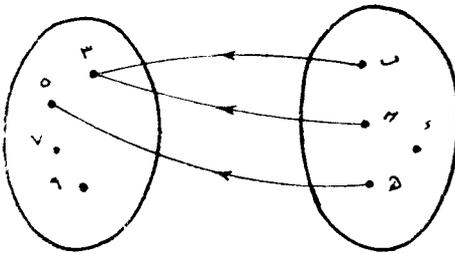
مثال (١) : التابع

$$\tau : S \rightarrow E$$

المعين بالتمثيل

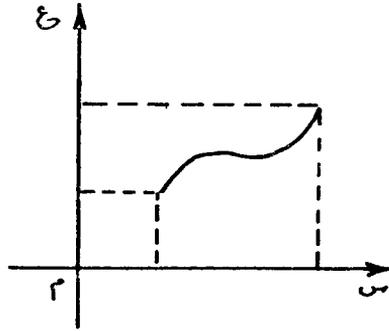
السهمي في الشكل

(١٣٢)



الشكل (١٣٢) ع

مثال (٢) : التابع  $\tau$  :  $\sigma$  ←  $\epsilon$  المعين بالتمثيل البياني في الشكل (١٣٣) .



الشكل (١٣٣)

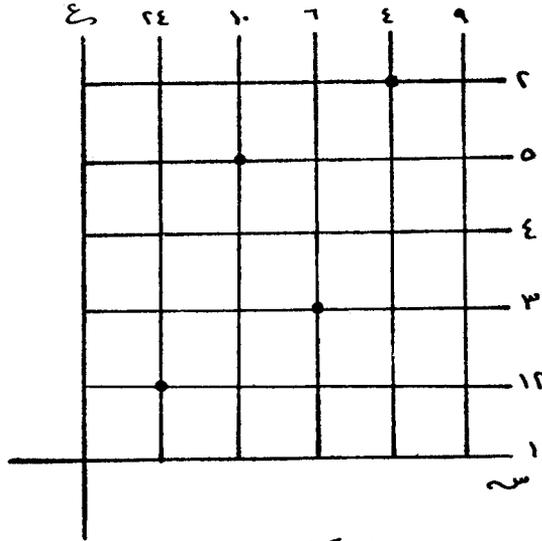
مثال (٣) : التابع  $\tau$  :  $\sigma$  ←  $\epsilon$  المبين بالجدول الآتي :

$\sigma$	$\rho$	$\tau$	$\epsilon$
١	٣	٣	٥

مثال (٤) : التابع  $\tau$  :  $\sigma$  ←  $\epsilon$  المعين بالجدول الآتي :

س/ع	درجة	درجة	درجة	درجة
حسان		×		١٥
غازي	×			٩٠
رامي			×	٣٠

مثال (٥) : التابع  $\tau$  :  $\sigma$  ←  $\epsilon$  المعين في الشكل (١٣٤) .



الشكل (١٣٤)

ثانياً - بيانه :

مثال : التابع تا : س ← ع الذي بيانه :

$$\{(2, 2), (4, 4), (6, 6)\} = \exists$$

وواضح أن : تا (٢) = ٦ ، تا (٣) = ٩ ، تا (٧) = ٢١

ثالثاً - بقاعدة ربط أو أكثر :

مثال (١) : التابع تا : س ← ع من س = {٢، ٤، ٥} إلى ع = {١، ٣، ٥، ٦، ٧} وفق قاعدة الربط ع = س + ١

حيث (س، ع)  $\exists$  س = ع × ع ويكتب التابع في هذه الحالة بالشكل :

$$\text{تا : س ← ع}$$

$$\text{س ← س + ١}$$

أو بالشكل : تا : س ← ع : س ← س + ١

$$\text{مثال (٢) : التابع } \tau : \mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E} \leftarrow \mathcal{S} \leftarrow \frac{1-s}{1+s}$$

حيث  $\mathcal{E}$  مجموعة الأعداد العادية .

وواضح أن هذا التابع معرف من أجل جميع قيم  $s$  عدا القيم التي تعدم المخرج أي إذا كان  $s + 1 = 0$  . إن مجموعة تعريف هذا التابع هي  $\mathcal{E} - \{1\}$  ويكون لدينا مثلاً :

$$\tau(0) = 1 \quad \tau(1) = 0 \quad \tau(2) = \frac{1}{3} \quad \dots$$

مثال (٣) : ليكن التابع  $\tau : \mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E}$  ( حيث  $\mathcal{E}$  مجموعة الأعداد الحقيقية ) والمعرف وفق قاعدتي التقابل الآتيتين :

$$\begin{aligned} s \leftarrow -s & \quad \text{إذا كان } s > 0 \\ s \leftarrow s & \quad \text{إذا كان } s \leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{أي أن : } \tau(0) = 0 & \quad \tau(1) = -1 & \tau(2) = 2 & \tau(-1) = -1 \\ \tau(0) = 0 & \quad \tau(7) = 7 & \tau(20) = 20 & \dots \end{aligned}$$

ونعبر عن هذا التابع بالشكل الآتي :

$$\tau : \mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E} \quad \left\{ \begin{array}{l} s \leftarrow -s \\ s \leftarrow s \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{إذا كان } s > 0 \\ \text{إذا كان } s \leq 0 \end{array}$$

ملاحظة :

نرى مما تقدم أن التابع يتعين تماماً بمعرفة :

١ - مجموعة المنطلق : وهي المجموعة التي يأخذ المتحول قيمه فيها .

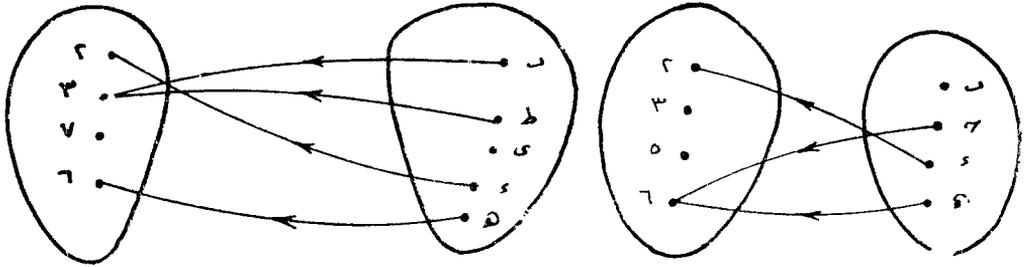
٢ - مجموعة المستقر : وهي المجموعة التي يأخذ التابع قيمه فيها .

٣ - القاعدة أو القواعد التي يتم وفقها التقابل بين عناصر المنطلق والمستقر .

٧٠ - انطباق تابعين « Coincidence, Coincidence » :

إذا كان لدينا تابعان  $f: S \rightarrow E$  ،  $g: S \rightarrow E$  ،  
 ووجدت مجموعة  $V$  بحيث  $V \subseteq S$  ،  $V \subseteq E$  ،  
 وإذا اتفق أنه من أجل كل عنصر  $s \in V$  يكون  $f(s) = g(s)$  ،  
 فإننا نقول إن التابعين  $f$  ،  $g$  منطبقان في المجموعة  $V$  .

مثال : بملاحظة التابعين الممثلين في الشكل (١٣٥) :



$f: S \rightarrow E$

$g: S \rightarrow E$

الشكل (١٣٥)

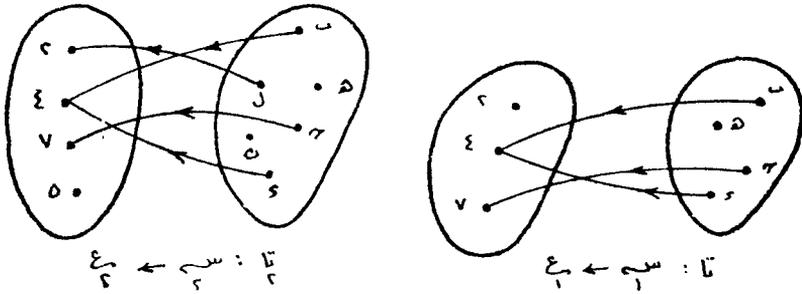
نرى أن المجموعة الجزئية  $V = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\} \subseteq S$  ،  
 ونلاحظ أنه :  $\forall s \in V \Rightarrow \{2, 3, 4, 5, 6, 7\} \subseteq E$  ،  
 لأن :  $f(2) = 1 = g(2)$  ،  $f(3) = 2 = g(3)$  ،  $f(4) = 3 = g(4)$  ،  
 $f(5) = 4 = g(5)$  ،  $f(6) = 5 = g(6)$  ،  $f(7) = 6 = g(7)$  .  
 فالتابعان  $f$  ،  $g$  منطبقان في المجموعة  $V = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  .

٧١ - تساوي تابعين :

نقول عن تابعين  $f$  ،  $g$  ،  $f: S \rightarrow E$  ،  $g: S \rightarrow E$  ،  
 إنهما متساويان ونكتب  $f = g$  ، إذا كانت  
 مجموعة تعريف الأول هي نفسها مجموعة تعريف الثاني ، وكان  
 $f(s) = g(s) \forall s \in S$  من مجموعة تعريفهما المشتركة .



مثال (١) : في الشكل (١٣٧) التابع  $T_1$  ممدد التابع  $T_2$  (لماذا؟)



الشكل (١٣٧)

مثال (٢) : لقد وجدنا أن التابعين الواردين في الشكل (١٣٥) منطبقان في المجموعة  $\{s, h\}$  ، ولكن ليس أي منهما ممدداً للآخر لأسباب عدة :

فهما ليسا منطبقين في مجموعة تعريف أحدهما وليكن  $T_1$  ،  
ومجموعة تعريف  $T_2$  ليست محتواة في مجموعة تعريف  $T_1$   
كما أن مجموعة المستقر للتابع  $T_1$  ليست محتواة في مجموعة مستقر  $T_2$

### ٧٣ - مقصور تابع Restriction :

إذا كان لدينا تابعان  $T_1 : S_1 \rightarrow E_1$  ،  $T_2 : S_2 \rightarrow E_2$  حيث  $S_2 \subseteq S_1$  . وكنا منطبقين في  $S_2$  سمي التابع  $T_2$  مقصور التابع  $T_1$  في  $S_2$  .

مثال : التابع  $T_1$  في المثال (١) من الفقرة السابقة هو مقصور التابع  $T_2$  في  $\{b, c, s\}$  .

ملاحظة :

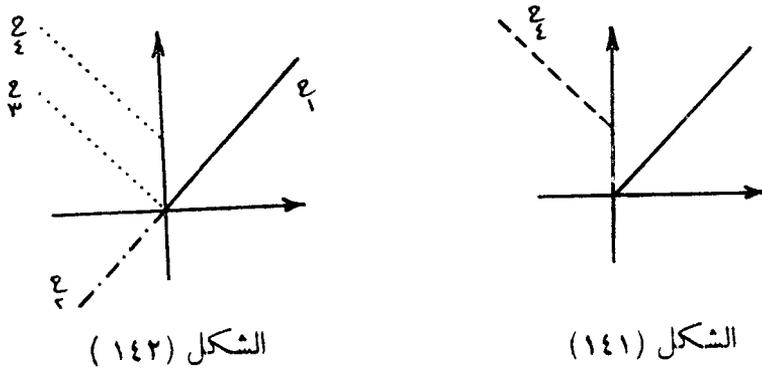
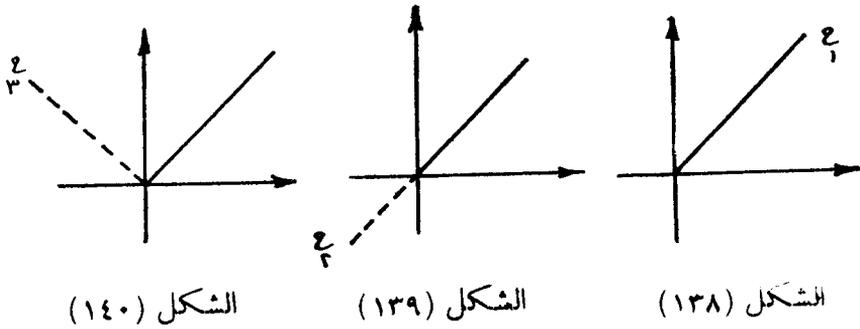
واضح أن للتابع الواحد ممددات عديدة على مجموعة مفروضة .

مثال : التابع  $\tau_1 : \tau_1 + \tau_1 \leftarrow \tau_1 + \tau_1$  : س  $\leftarrow$  س شكل (١٣٨)  
 يقبل تابعاً ممدداً له التابع  $\tau_1 : \tau_1 \leftarrow \tau_1$  : س  $\leftarrow$  س شكل (١٣٩)  
 والتابع  $\tau_1 : \tau_1 \leftarrow \tau_1$  : س  $\leftarrow$  س | س شكل (١٤٠)  
 كما يقبل ممدداً له كلا من التابعين المعرفين كما يلي :

$\tau_1 : \tau_1 \leftarrow \tau_1$  : س  $\leftarrow$  س إذا كان س  $\ni \tau_1 + \tau_1$   
 س  $\leftarrow$  س تركيب جبري ما إذا كان س  $\ni \tau_1 - \tau_1$  - {٠}

$\tau_1 : \tau_1 \leftarrow \tau_1$  : س  $\leftarrow$  س إذا كان س  $\ni \tau_1 + \tau_1$   
 س  $\leftarrow$  س - س + ١ إذا كان س  $\ni \tau_1 - \tau_1$  - {٠}

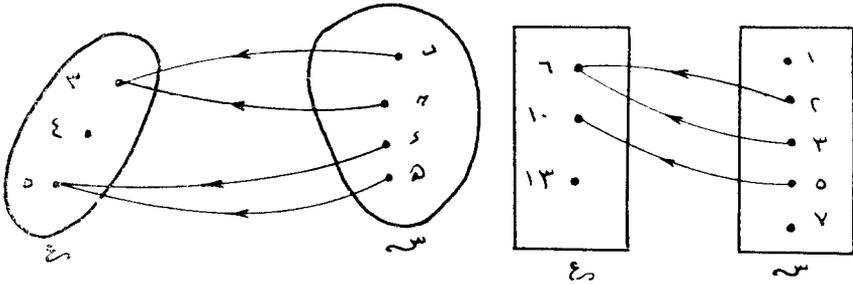
كما في الشكل (١٤١) ، ولو مثلنا التتابع الأربعة في شكل واحد  
 حصلنا على الشكل (١٤٢) .



ونلاحظ أن هذه التوابع منطبقة في المجال  $[\infty + \infty]$  وأن  $ح_1$  هو مقصور كل من  $ح_2$ ،  $ح_3$ ،  $ح_4$  في هذا المجال .  
 وأن كلا من  $ح_2$ ،  $ح_3$ ،  $ح_4$  هو ممدد للتابع  $ح_1$  على مجموعة الأعداد الحقيقية  $ح$  .

## ٧١ - التطبيق ، Mapping ، Application :

مثال : الشكلان (١٤٣ ، ١٤٤) يمثل كل منهما تابعا ولكننا نلاحظ في التابع الممثل سهمياً بالشكل (١٤٣) أنه توجد عناصر من منطلقه لا يرتبط بها أي عنصر من المستقر كالعنصر ٧ مثلا بينما نرى في التابع الممثل سهمياً بالشكل (١٤٤) أنه يرتبط بكل عنصر من مجموعة منطلقه عنصر من مجموعة مستقرة .



الشكل (١٤٤)

الشكل (١٤٣)

فللتمييز بين النوعين نسمي كل تابع من النوع الثاني تطبيقاً ، ومنه :

**تعريف :** إذا كانت مجموعة تعريف تابع هي مجموعة منطلقه نفسها فاننا نسمي هذا التابع تطبيقاً أي أن التطبيق علاقة يرتبط بكل عنصر من منطلقها عنصر واحد من مستقرها .

وسنستعمل للتطبيق الرمز  $\tau$  نفسه الذي استعملناه للتابع ، فالتطبيق من المجموعة  $S$  إلى المجموعة  $E$  يكتب بالشكل  $\tau : S \rightarrow E$  ومن الواضح أن التطبيق يكون معرفاً على جميع عناصر المنطلق  $S$  في حين أن التابع يكون معرفاً على مجموعة جزئية من  $S$  .

### ٧٥ - التطبيق المقترن بتابع :

ليكن التابع  $\tau : S \rightarrow E$  المعروف على المجموعة  $S$  ،  $\tau \subseteq S$  إن هذا التابع يسمح لنا أن نربط بكل عنصر من  $S$  ، عنصراً واحداً على الأكثر من  $E$  . أي أنه يعين التطبيق  $\tau : S \rightarrow E$  الذي نسميه التطبيق المقترن بالتابع  $\tau$  . ونلاحظ أنه من أجل كل عنصر  $s$  من  $S$  ، يكون للتابع  $\tau$  والتطبيق  $\tau$  الصورة نفسها ، ولذا فإن دراسة التوابع يمكن أن ترد إلى دراسة التطبيقات .

مثال : إذا كان لدينا التابع  $\tau : E \rightarrow E$  :  $S \rightarrow \frac{1+S}{1-S}$  حيث  $E$  مجموعة الأعداد الحقيقية فإن مجموعة التعريف لهذا التابع هي  $E - \{1\}$  .  
فالتطبيق المقترن به هو :

$$\tau : E - \{1\} \rightarrow E : S \rightarrow \frac{1+S}{1-S}$$

### ٧٦ - أنواع هامة من التطبيقات :

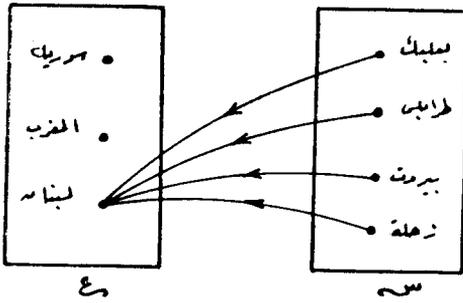
التطبيق الثابت ، Constant mapping ، Application Constante

مثال (١) : بفرض  $S = \{2, 3, 5, 10\}$  ،  $E = \{17, 30, 43\}$

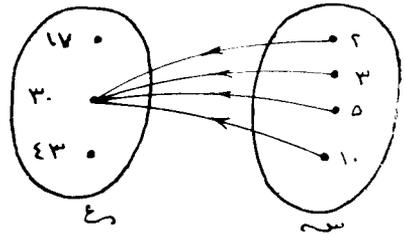
فالعلاقة المعرفة بالشكل (س يقسم ع) حيث  $s \equiv s$  ،  $e \equiv e$  ع  
 تعين التطبيق الممثل في الشكل (١٤٥) ونلاحظ أن لجميع  
 عناصر منطلقه مقابلاً ثابتاً من المستقر هو العنصر ٣٠ لذلك  
 ندعو هذا التطبيق تطبيقاً ثابتاً .

مثال (٢) : بفرض  $s \equiv s = \{ \text{بعلبك ، طرابلس ، بيروت ، زحلة} \}$  ع  
 $e = \{ \text{سورية ، المغرب ، لبنان} \}$  .

فالعلاقة المعرفة كالاتي ( س مدينة في القطر ع ) حيث  
 $s \equiv s$  ،  $e \equiv e$  ع تعين التطبيق الممثل سهمياً في الشكل  
 (١٤٦) ونلاحظ أيضاً أن لجميع عناصر منطلق هذا التطبيق  
 مقابلاً واحداً لا يتغير هو العنصر لبنان من المستقر فهذا  
 التطبيق هو تطبيق ثابت أيضاً ومنه :



الشكل (١٤٦)



الشكل (١٤٥)

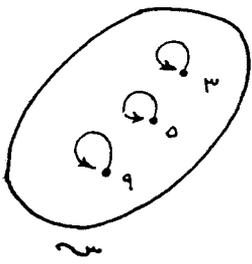
تعريف : نقول عن تطبيق  $\tau$  :  $s \equiv s \leftarrow e$  إنه تطبيق ثابت  
 إذا كان :  
 $(s \equiv s) \leftarrow e$  ،  $\tau(s) = s$  حيث  $s$  عنصر معين من  $e$

التطبيق المطابق « Application identique ، Identity mapping » :

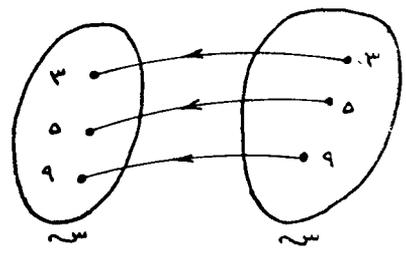
مثال (١) : بفرض  $S = \{3, 5, 9\}$  فالعلاقة  $S \times S$  حيث  $S \sim S$   
 تعين التطبيق الممثل سهمياً في الشكلين (١٤٧، ١٤٨) ونلاحظ  
 في هذا التطبيق أن :

تا  $3 = (3)$  تا  $5 = (5)$  تا  $9 = (9)$  اي ان تا  $(S) = S$

نسمي مثل هذا التطبيق تطبيقاً مطابقاً ونرمز له بالشكل  $S \sim S$   
 أو  $M$  ويقرأ التطبيق المطابق في  $S$  .



الشكل (١٤٨)

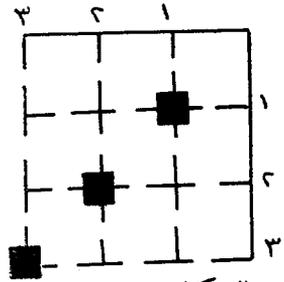


الشكل (١٤٧)

مثال (٢) : الأشكال (١٤٩، ١٥٠، ١٥١) تمثل تطبيقاً مطابقاً واحداً  
 في  $\{3, 2, 1\}$  :

٣	٢	١	
		×	١
	×		٢
×			٣

الشكل (١٥١)



الشكل (١٥٠)

٣	٢	١	$S$
٣	٢	١	تا $(S)$

الشكل (١٤٩)

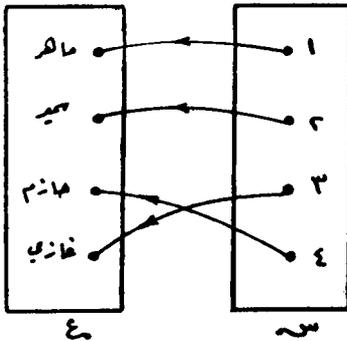
تعريف : التطبيق من  $S$  الى  $S$  الذي نربط وفقه بكل عنصر  $s$  من  $S$  العنصر  $s$  نفسه أي  $(s) = s$  يسمى تطبيقاً مطابقاً في  $S$  ونرمز له بالشكل  $s \rightarrow s$  بدلاً من  $\tau$  ويكون :

$$s \rightarrow s \quad (s \in S) \quad s \rightarrow s$$

أي  $m : s \rightarrow s : s \rightarrow s$

المتتالية « Suite ، Sequence » :

مثال (١) : لتكن  $S = \{1, 2, 3, 4\}$  مع  $\{ \text{ماهر ، سمير ، حازم ، غازي} \}$



الشكل (١٥٢)

وليكن التطبيق من  $S$  إلى  $E$  الممثل سيميأ بالشكل (١٥٢) :

مثال (٢) : إذا تقدم لاحدى المسابقات ٧٩ شخصاً وأعطينا لكل واحد منهم رقماً واحداً معيناً خاصاً به من مجموعة الأعداد  $S = \{1, 2, 3, \dots, 79\}$  فإن لكل عنصر من هذه المجموعة مقابلاً واحداً من مجموعة الأشخاص المتسابقين .

مثال (٣) : ليكن التطبيق  $\tau : S \rightarrow S$  :  $s \rightarrow s + 3$  ولنرمز للتطبيق بالرمز  $\tau$  بدلاً من  $\tau$  ولنرمز لقيم هذا التطبيق بالرمز  $\tau$  أي  $\tau : s \rightarrow s + 3$  فيكون :

$$1 = 1C, 5 = 2C, 11 = 3C, 19 = \dots, 29 = 4C, 3 + 29 = 32$$

بتدقيق كل من هذه التطبيقات الواردة في الأمثلة الثلاثة نلاحظ أن المنطلق في كل منها هو مجموعة الأعداد الطبيعية أو مجموعة جزئية منها والمستقر هو مجموعة ما. نسمي هذا النوع من التطبيقات متتالية ومنه :

**تعريف :** المتتالية هي تطبيق منطلقة مجموعة الأعداد الطبيعية أو مجموعة جزئية منها ومستقره مجموعة ما عددية أو غير عددية .

وسنرمز للمتتالية بالرمز  $C$  بدلاً من  $T$  فنكتب  $C : T \leftarrow E$  حيث  $T \ni T$  كما نكتب  $C$  بدلاً من  $T$  (  $\ni$  ) وتعطى المتتالية في أكثر الأحيان بالشكل :

(  $1C, 2C, 3C, \dots, 29C, \dots$  ) ويسمى الحد  $29C$  الحد العام للمتتالية أو الحد الذي رتبته  $\ni$  .

**ملاحظة (١) :**

إذا كانت  $T$  مجموعة منتهية قلنا إن المتتالية منتهية وإلا فهي غير منتهية.

**ملاحظة (٢) :**

في الحالة الخاصة التي يكون فيها مستقر المتتالية مجموعة عددية نسمي المتتالية عندئذٍ متتالية عددية .

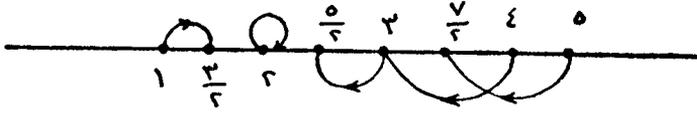
**مثال (١) :** اكتب المتتالية غير المنتهية التي حدها العام  $C = 1 + \frac{2}{3}$

ثم مثل الحدود  $1C, 2C, 3C, 4C, 5C, \dots$  من هذه المتتالية على محور .

**الحل :**

نبدل  $\ni$  بالأعداد  $1, 2, 3, \dots$  على الترتيب فنجد :

$$\dots, \frac{7}{2} = {}_2\text{ح}, \frac{5}{2} = {}_2\text{ح}, 2 = {}_2\text{ح}, \frac{3}{2} = {}_2\text{ح}, \dots$$



الشكل (١٥٣)

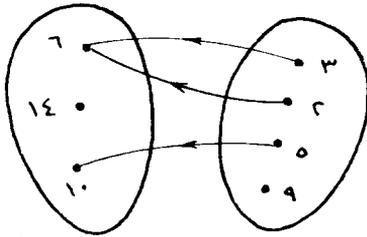
مثال (٢): اكتب الحدود ح<sub>١</sub>، ح<sub>٢</sub>، ح<sub>٣</sub>، ح<sub>٤</sub>، ح<sub>٥</sub> من المتتالية التي حددها العام: ح<sub>٢</sub> = ٢ + ح<sub>١</sub>

الحل :

$$\text{ح}_١ = ٧, \text{ح}_٢ = ٩, \text{ح}_٣ = ١١, \text{ح}_٤ = ١٣, \text{ح}_٥ = ١٥$$

٧٧- التابع العددي « Fonction numérique . Numerical Function » :

إذا نظرنا الى الشكلين ( ١٥٤ ، ١٥٥ ) نجد أن كلا منهما يمثل تابعاً ونلاحظ أن المستقر في كل منهما مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية ح ( أي مجموعة عددية ) .

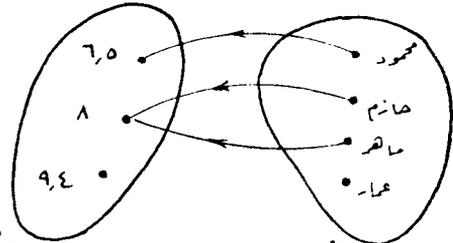


مجموعة عددية

مجموعة عددية

(أعداد)

الشكل (١٥٥)



مجموعة من المستقر

الشكل (١٥٤)

نسمي كلا من هذين التابعين وأمثالهما تابعاً عددياً ، ومنه :

تعريف : كل تابع مستقره مجموعة عددية يسمى تابعاً عددياً .

## ٧٨ - التطبيق العددي

«Application numérique . Numerical mapping»

بالمثل كل تطبيق مستقره مجموعة عددية يسمى تطبيقاً عددياً .

٧٩ - التابع العددي ذو المتحول الحقيقي :

إذا كان منطلق التابع العددي مجموعة عددية حقيقية سمي تابعاً عددياً لمتحول حقيقي .

مثال (١) : بفرض  $s$  مجموعة من الطلاب تقدم بعضهم للامتحان وتقبب البعض الآخر .

فالتابع  $T: s \rightarrow E$  : درجته في الامتحان هو تابع عددي .

مثال (٢) : بفرض  $s$  مجموعة من الأشكال الهندسية المستوية التي لها مساحات ، فإن :

التطبيق  $T: s \rightarrow E$  : قياس مساحته هو تطبيق عددي .

مثال (٣) : التابع  $T: s \rightarrow E$  :  $s \rightarrow \frac{s}{3-s}$

هو تابع عددي ذو متحول حقيقي .

مثال (٤) : التطبيق  $T: [2, 3] \rightarrow E$  :  $s \rightarrow \frac{1-s}{1+s}$

هو تطبيق عددي ذو متحول حقيقي  $s \in \text{المجال الحقيقي } [2, 3]$

مثال (٥) : التابع  $T: s \rightarrow E$  :  $s \rightarrow \sqrt{(s-2)(s-5)}$

هو تابع عددي ذو متحول حقيقي .

ويكون  $T: [-2, 5] \rightarrow E$  :  $s \rightarrow \sqrt{(s-2)(s-5)}$

هو التطبيق العددي ذي المتحول الحقيقي المقترن بالتابع المفروض .

مثال (٦) : التابع تا :  $\mathcal{E}_1 \leftarrow \mathcal{E}_2$  : س  $\leftarrow \frac{س٣ - ٢}{س٤ - ٢}$  هو تابع عددي ذو متحول حقيقي .

ويكون تا :  $\mathcal{E}_1 - \{٢, ٢\} \leftarrow \mathcal{E}_2$  : س  $\leftarrow \frac{س٣ - ٢}{س٤ - ٢}$  هو التطبيق العددي ذو المتحول الحقيقي المقترن بالتابع المعطى .

مثال (٧) : التابع تا :  $\mathcal{E}_1 \leftarrow \mathcal{E}_2$  : س  $\leftarrow ١$  إذا كان س عدداً عادياً س  $\leftarrow ٠$  إذا كان س عدداً غير عادي هو تابع عددي ذو متحول حقيقي .

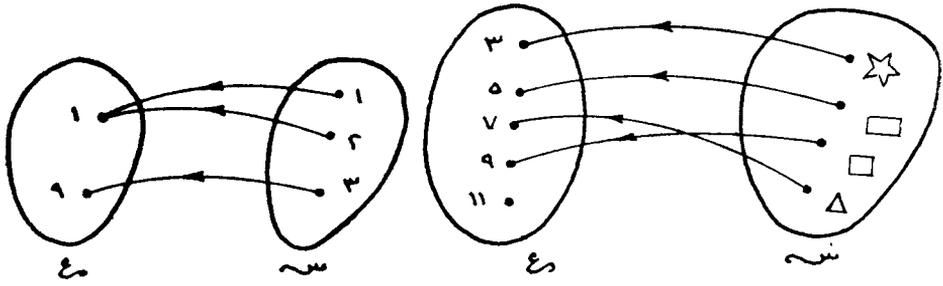
#### ٨٠ - أنواع التطبيقات بالنسبة إلى مستقرها :

عندما نصنف العلاقات إلى علاقات تابعة وأخرى غير تابعة نحصر اهتمامنا فقط في عناصر المنطلق التي يرتبط بها عناصر من المستقر ونبحث فيما إذا كان لكل عنصر من عناصر المنطلق هذه مقابله وحيد من المستقر . وعندما نميز من بين العلاقات التابعة تلك التي دعوناها تطبيقات نحصر اهتمامنا في منطلق العلاقة ونبحث فيما إذا كانت ، يجمع عناصر المنطلق ، ترتبط عناصر من المستقر .

هذا ولو درسنا بالإضافة لذلك شكل ارتباط عناصر المستقر بعناصر المنطلق في التطبيقات فاننا نحصل على الأنواع التالية من التطبيقات :

#### التطبيق المتباين « Injection . One - One mapping » :

مثال : في التطبيق المثل سهماً بالشكل (١٥٦) نلاحظ أن أي عنصر من مستقره هو صورة لعنصر واحد على الأكثر من منطلقه أي أن العنصرين المتباينين من المستقر يقابلان عنصرين متباينين من المنطلق ،



الشكل (١٥٧)

الشكل (١٥٦)

بينما في التطبيق الممثل في الشكل (١٥٧) نجد أن أحد العناصر من مستقره هو صورة لأكثر من عنصر من المنطلق ، لذا نسمي التطبيق من النوع الأول تطبيقاً متبايناً ، ومنه :

تعريف : نسمي التطبيق متبايناً إذا كان كل عنصر من مجموعة مستقره هو صورة لعنصر واحد على الأكثر من مجموعة منطلقه . أي أن كل عنصر من المستقر إما أن يرتبط بعنصر واحد من المنطلق أو لا يرتبط بأي عنصر .

وهذا يعني أنه في التطبيق المتباين إذا كان س ، س' عنصرين متباينين من المنطلق فصورتهما تا (س) ، تا (س') وفق التطبيق تا متبايزتان أيضاً .

$$\text{أي أن: } س \neq س' \Rightarrow \text{تا (س)} \neq \text{تا (س')}$$

$$\text{وهذا يكافئ القول } \text{تا (س)} = \text{تا (س')} \Rightarrow س = س'$$

$$\text{مثال (١) : التطبيق } تا : ط \leftarrow س + ٢$$

حيث ط مجموعة الأعداد الطبيعية هو تطبيق متباين لأن :

$$س \neq س' \Rightarrow س + ٢ \neq س' + ٢ \Rightarrow \text{تا (س)} \neq \text{تا (س')}$$

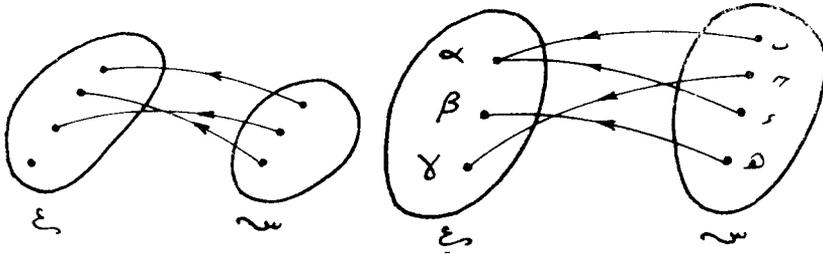
أو بطريقة ثانية ، لأن :

$$\text{تا} (س) = \text{ثا} (س) \text{ أو } س + ٢ = س + ٢ = س = س'$$

مثال (٢) : التطبيق  $\pi$  :  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  :  $\pi(x) = 2x$  ، حيث  $\mathbb{R}$  مجموعة الأعداد الحقيقية هو تطبيق غير متباين (لماذا؟)

التطبيق الغامر « Surjection , Onto mapping » :

مثال : في التطبيق الممثل سهمياً بالشكل (١٥٨) نلاحظ أن كل عنصر من مجموعة مستقره هو صورة لعنصر على الأقل من مجموعة منطلقه، بينما في التطبيق الممثل سهمياً بالشكل (١٥٩) نجد أن بعض العناصر من مستقره ليست صوراً لأي عنصر من المنطلق .



الشكل (١٥٩)

الشكل (١٥٨)

لذا نسمي التطبيق من النوع الأول تطبيقاً غامراً ، ومنه :

**تعريف :** نسمي التطبيق غامراً إذا كان كل عنصر من مجموعة مستقره هو صورة لعنصر على الأقل من مجموعة منطلقه .

وهذا يعني أنه في التطبيق الغامر من  $S$  إلى  $E$  يكون :

$$\forall e \in E, \exists s \in S : e = \text{تا} (س)$$

ويقال أيضاً إن التطبيق الغامر هو تطبيق من  $S$  على  $E$  .

ملاحظة :

التطبيق المتباين في الشكل (١٥٦) ليس غامراً (لماذا؟)  
والتطبيق غير المتباين في الشكل (١٥٧) هو غامر (لماذا؟)

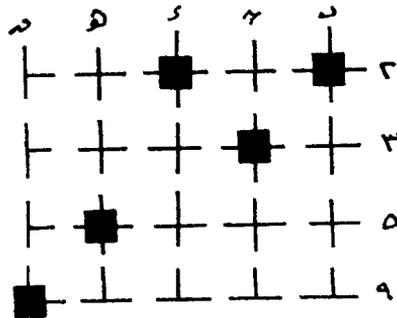
مثال (١) : التطبيق تا : ط ← ط : س ← ٢ س

حيث ط مجموعة الأعداد الطبيعية ليس غامراً .

لأنه حتى يكون غامراً يجب أن يكون أي عدد طبيعي من مجموعة  
المستقر ط هو صورة وفق هذا التطبيق لعنصر على الأقل من مجموعة  
المنطلق ط .

أي أن يكون للمعادلة  $٢س = ع$  حل في ط مهما كانت  $ع \in ط$  .  
وهذا غير صحيح لأن المعادلة  $٢س = ٣$  مثلاً لا تقبل حلاً في ط  
أي لا يوجد عدد طبيعي ضعفه يساوي ٣ .

مثال (٢) : العلاقة المثلة شبكياً في الشكل (١٦٠) حيث المنطلق هو  
المجموعة  $\{٢، ٣، ٥، ٦، ٩\}$  والمستقر هو المجموعة  
 $\{٢، ٣، ٥، ٦، ٩\}$  هو تطبيق غامر (لماذا؟)



الشكل (١٦٠)



مثال (٢) : التناظر الذي مركزه نقطة ن في مستوي والتناظر بالنسبة لمستقيم في هذا المستوي هما تقابلان من المستوي إلى المستوي نفسه.

مثال (٣) : ليكن التطبيق  $\tau$  :  $S \rightarrow E$  وليكن  $\tau$  عدد عناصر  $S$  ،  
 $\tau'$  عدد عناصر  $E$  حيث  $S \rightarrow E$  مجموعتان منتهيتان ، والمطلوب

١ - قارن بين  $\tau$  ،  $\tau'$  إذا كان  $\tau$  متبايناً .

٢ - قارن بين  $\tau$  ،  $\tau'$  إذا كان  $\tau$  غامراً .

٣ - قارن بين  $\tau$  ،  $\tau'$  إذا كان  $\tau$  تقابلاً .

الحل :

إذا كان  $\tau$  متبايناً فإن  $\tau \geq \tau'$

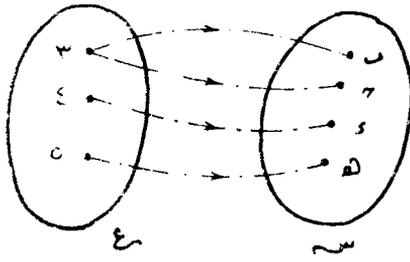
وإذا كان  $\tau$  غامراً فإن  $\tau \geq \tau'$

وإذا كان  $\tau$  تقابلاً فإن  $\tau = \tau'$

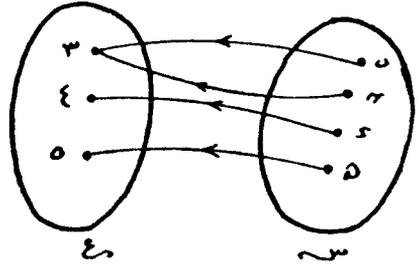
٨١ - العلاقة العكسية للتطبيق :

لتكن التطبيقات الممثلة في الأشكال ( ١٦٢ ، ١٦٤ ، ١٦٦ ) ، من الواضح أن العلاقة العكسية لعلاقة التطبيق في الشكل (١٦٢) والممثلة في الشكل (١٦٣) ليست تطبيقاً حتى أنها ليست تابعة وذلك لأنه ينطلق سهران من المنصر ٣ .

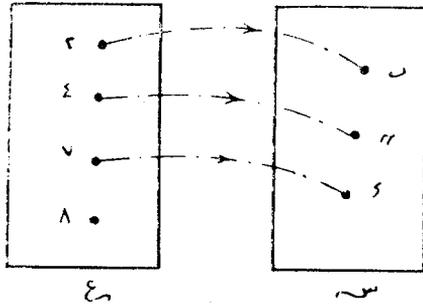
كما أن العلاقة العكسية لعلاقة التطبيق المتباين في الشكل (١٦٤) والممثلة في الشكل (١٦٥) هي تابع وليست تطبيقاً . أما العلاقة العكسية للتقابل من  $S$  إلى  $E$  في الشكل (١٦٦) والممثلة في الشكل (١٦٧) فهي تقابل من المجموعة  $E$  إلى المجموعة  $S$  .



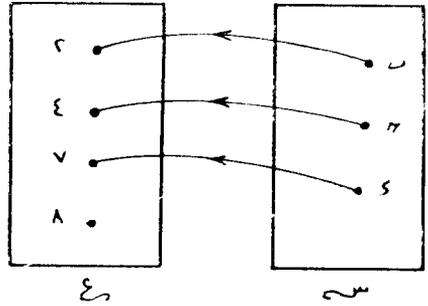
الشكل (١٦٣)



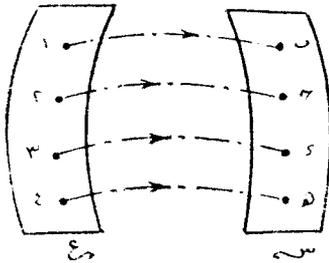
الشكل (١٦٢)



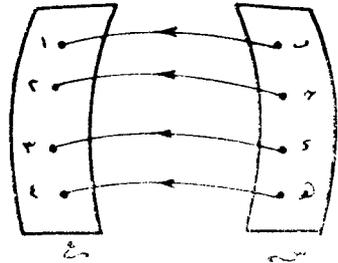
الشكل (١٦٥)



الشكل (١٦٤)



الشكل (١٦٧)



الشكل (١٦٦)

### التطبيق العكسي :

مما تقدم نلاحظ أن العلاقة العكسية لتطبيق مفروض لا تكون تطبيقاً إلا عندما يكون التطبيق المفروض تقابلاً وفي هذه الحالة نسمي العلاقة

العكسية للتطبيق المفروض تطبيقاً عكسياً أو تقابلاً عكسياً له .

ويبرهن بسهولة أن كل تقابل نا : سم ← ع له تقابل عكسي من

ع إلى سم رمز له بالرمز نا<sup>١</sup> فنكتب نا<sup>١</sup> : ع ← سم

مثال (١) : التطبيق نا : ع ← ع : س ← س + ١

هو تقابل ولذا فإن له تقابلاً عكسياً هو :

نا<sup>١</sup> : ع ← ع : س ← س - ١

مثال (٢) : التطبيق نا : ع ← ع : س ← س - ٣

هو تقابل ولذا فإن له تقابلاً عكسياً هو :

نا<sup>١</sup> : ع ← ع : س ←  $\frac{س + ٢}{٣}$

مثال (٣) : التطبيق نا : ص ← ص : س ← س + ٥

متباين وغير غامر فليس له تطبيق عكسي .

مثال (٤) : التطبيق نا : ع ← ع : س ← س<sup>٢</sup>

غير متباين لأن نا (٢-) = نا (٢) = ٤ مثلاً فليس له تطبيق معاكس .

مثال (٥) : التطبيق نا : ع ← ع : س ← س<sup>٢</sup>

هو تقابل ولذا فإن له تقابلاً عكسياً هو :

نا<sup>١</sup> : ع ← ع : س ←  $\sqrt{س}$

مثال (٦) : التطبيق نا : ع ← ع : س ← س<sup>١</sup> تقابل

ولذا فإن نا<sup>١</sup> : ع ← ع : س ← س<sup>١</sup> هو التقابل

المعاكس .

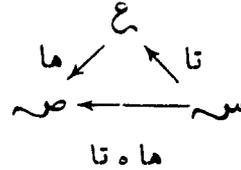
## ٨٢ - تركيب التطبيقات :

بما أن كل تطبيق هو علاقة فإن تركيب تطبيقين من الشكل :

تا : س ← ع ، ها : ع ← ص

يتم بالطريقة ذاتها التي مرت معنا في تركيب العلاقات في الفقرة ٦٠ .  
ولكننا سنبرهن فيما يلي أن تركيب كل تطبيقين هو تطبيق أي أنه إذا  
كان ما وها تطبيقين فإن هاء ما تطبيق منطلقه س ← مستقره ص .  
في الحقيقة إذا كان س عنصراً كينافياً من س ← فإن له صورة وحيدة  
ع ← وفق تا . وبما أن ها تطبيق فإن لع صورة وحيدة ص ← وفق  
وفق ها وبالتالي تكون ص هي الصورة الوحيدة لـ س وفق التركيب  
هاء تا الأمر الذي يؤكد أن هذا التركيب تطبيق .

يرمز لعملية التركيب كذلك بالشكل :



أو بالشكل : س ← ما (س) ← ها [ ما (س) ] .

أي أن : ( هاء تا ) (س) = ها [ ما (س) ] .

وقد وضعنا هاء تا بين قوسين للدلالة على أن التطبيق الذي ندرسه  
هو التطبيق المركب ، فلو رمزنا للتطبيق المركب بالرمز كا لكان  
كا = هاء تا وعندما نكتب كا (س) بدلاً من ( هاء تا ) (س) .

ملاحظة :

٦ - للبحث عن صورة العنصر س من س ← وفق هاء تا نبحث أولاً

عن صورة س وفق تا ولتكن ع = تا (س) ثم عن صورة ع من مع وفق ها ولتكن ها (ع) .

والمساواة ها (ع) = ها [ تا (س) ] تبين السبب الذي يجعلنا نكتب ها ها تا بدلاً من تا ها ها .

٢- التطبيق ها ها تا لا يكون معرفاً إلا إذا كان مستقر التطبيق تا هو منطاق التطبيق ها ها . ومن أجل التطبيقات من س<sup>١</sup> إلى س<sup>٢</sup> يمكن تعريف كل من ها ها تا ، تا ها ها .

مثال (١) : لتكن المجموعة س<sup>١</sup> = { ب ، ح ، د } والتطبيقان تا ، ها من س<sup>١</sup> إلى س<sup>٢</sup> المعرفين كما يلي :

وفق تا : ب ← ب	وفق ها : ب ← ح
ح ← د	ح ← ب
د ← ح	د ← د

فإن : ها ها تا يكون :

ها	تا
س <sup>٢</sup> ← س <sup>١</sup>	س <sup>٢</sup> ← س <sup>١</sup>
ب ← ح	ب ← ب
د ← ح	د ← د
د ← ح	د ← ب

أي أن (ها ها تا) (ب) = ح ، (ها ها تا) (ح) = د ، (ها ها تا) (د) = ب .

مثال (٢) ليكن تا : ط ← ط : س ← س + ٢  
ها : ط ← ط : س ← س + ١

احسب (ها ها تا) (س) ، ثم (تا ها ها) (س) وقارن النتيجةين.

الحل :

$$(ها \text{ تا} ) (س) = ها [ \text{تا} (س) ] = ها (س + ٢)$$

$$= ١ + ٢(س + ٢)$$

ويمكن تلخيص ذلك بالشكل الآتي :

$$\begin{array}{c} ها \quad تا \\ ط \leftarrow ط \leftarrow ط \end{array}$$

$$س \leftarrow س + ٢ \leftarrow ١ + ٢(س + ٢)$$

$$\text{لنحسب (تا ها) س} = \text{تا} [ \text{ها} (س) ] = \text{تا} (س + ٢)$$

$$= ٢ + (١ + ٢س) = ٣ + ٢س$$

ونلاحظ في هذا المثال أن : ها تا  $\neq$  تا ها

٨٣ - خواص التطبيقات :

خاصة (١) : بفرض التطبيق تا : س  $\leftarrow$  ع ، والتطبيق المطابق م  $\leftarrow$  س

في س والتطبيق المطابق م في ع فإن :

$$\boxed{\text{تا} \circ \text{م} = \text{ع} \circ \text{تا}}$$

$$\text{تا} = \text{تا} \circ \text{م} \circ \text{س} \left\{ \begin{array}{l} \text{في الحقيقة : س} \leftarrow \text{م} \leftarrow \text{تا} \leftarrow \text{ع} \\ \text{س} \leftarrow \text{س} \leftarrow \text{تا} (س) \end{array} \right.$$

$$\text{تا} = \text{تا} \circ \text{م} \circ \text{ع} \left\{ \begin{array}{l} \text{س} \leftarrow \text{ع} \leftarrow \text{تا} \\ \text{ع} \leftarrow \text{ع} \leftarrow \text{س} \end{array} \right.$$

$$\text{إذن : تا} \circ \text{م} \circ \text{س} = \text{ع} \circ \text{تا} = \text{تا}$$

خاصة (٢) : بفرض تا ، ها ، ما تطبيقات معينة بالشكل الآتي :

تا      ها      ما  
س ← ع ← ص ← ف

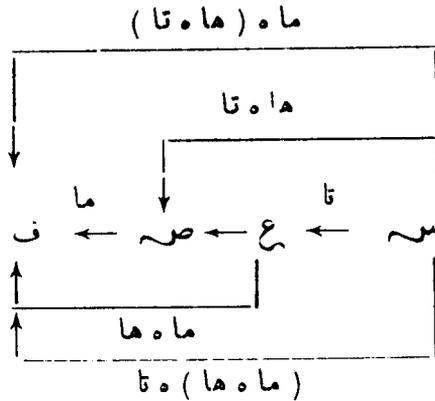
فإن :  $(\text{ما هـ ها}) \circ \text{تا} = \text{ما هـ (ها تا)}$

أي أن التركيب الناتج وحيد ولذا يكتب بالشكل ما هـ ها تا وهذا يعني أن تركيب التطبيقات يتمتع بالخاصة التجميعية (خاصة الدمج) .

في الحقيقة :  $\forall s \ni s \circ s \circ s$  نكتب :

$[(\text{ما هـ ها}) \circ \text{تا}] \circ (\text{س}) \equiv (\text{ما هـ ها}) \circ [(\text{تا س})] \equiv \text{ما} \circ [(\text{ها تا س})]$   
 $[(\text{ما هـ ها}) \circ (\text{ها تا})] \circ (\text{س}) \equiv \text{ما} \circ [(\text{ها هـ تا س})] \equiv \text{ما} \circ [(\text{ها تا س})]$

إذن :  $(\text{ما هـ ها}) \circ \text{تا} \equiv \text{ما هـ (ها تا)}$  . وهو المطلوب .



خاصة (٣) : التطبيق الناتج من تركيب تطبيقين غامرين هو تطبيق غامر ومن تركيب تطبيقين متباينين هو تركيب متباين ، ومن تركيب تقابلين هو تقابل .

باستطاعة القارىء برهان هذه النظرية بسهولة بالاستناد إلى التعاريف .

خاصة (٤) : إذا كان التطبيق  $\tau_a : S \rightarrow S$  مع تقابلا فإن :

$$\tau_a^{-1} \circ \tau_a = \text{id}_S \quad \text{و} \quad \tau_a \circ \tau_a^{-1} = \text{id}_S$$

في الحقيقة إن بيان التطبيق  $\tau_a^{-1} \circ \tau_a$  هو مجموعة الثنائيات  $(s, s)$  أي  $\text{id}_S$ .

وبيان التطبيق  $\tau_a \circ \tau_a^{-1}$  هو مجموع الثنائيات  $(e, e)$  أي  $\text{id}_S$ .

وبشكل خاص إذا كان التطبيق  $\tau_a : S \rightarrow S$  مع تقابلا فإن :

$$\tau_a^{-1} \circ \tau_a = \text{id}_S = \tau_a \circ \tau_a^{-1}$$

\* \* \*

## تمارين محلولة

لتوابع والتطبيقات :

٢٣٦ - عيّن مجموعة تعريف كل من التوابع الآتية :

$$١ - \text{آ} - \text{تا} : \text{ط} \leftarrow \text{ط} : \text{س} \leftarrow \text{س} + ١$$

$$٢ - \text{آ} - \text{ها} : \text{ع} \leftarrow \text{ع} : \text{س} \leftarrow \sqrt{١ - \text{س}}$$

$$٣ - \text{آ} - \text{لا} : \text{ع} \leftarrow \text{ع} : \text{س} \leftarrow \frac{\text{س}}{١ - \text{س}^٢}$$

$$٤ - \text{آ} - \text{جا} : \text{ع}^* \leftarrow \text{ع} : \text{ز} \leftarrow \frac{١ + \text{ز}^٢}{\text{ز}}$$

الحل :

$$١ - \text{آ} - \text{س} \ni \text{ط} \text{ (المنطق) } \leftarrow \text{س} + ١ \ni \text{ط} \text{ (المستقر)}$$

اذن تا معرف على ط بكاملها .

$$٢ - \text{آ} - \text{ها} : \text{ع} \leftarrow \text{ع} : \text{س} \leftarrow \sqrt{١ - \text{س}} \text{ لا ينتمي إلى } \text{ع} \text{ إلا إذا كان } \text{س} \leq ١ .$$

أي  $\text{س} \leq ١$  . اذن التابع ها معرف من أجل قيم  $\text{س} \ni \text{ع}$  حيث

$\text{س} \leq ١$  أي أن مجموعة تعريف ها هي المجال  $[-١, \infty)$  .

$$٣ - \text{آ} - \text{لا} : \text{ع} \leftarrow \text{ع} : \text{س} \leftarrow \frac{\text{س}}{١ - \text{س}^٢} \text{ عدداً عادياً إذا كان } \text{س} \neq ١$$

أي إذا كان  $s \neq \frac{1}{p} \mp$  ، وعليه فالتابع معرف من أجل

جميع قيم  $s \in \mathbb{C}$  ( المنطلق ) عدا  $s = \frac{1}{p} \mp$  وبالتالي فإن

بمجموعة تعريف هذا التابع هي المجموعة  $\mathbb{C} - \left\{ \frac{1}{p} - , \frac{1}{p} \right\}$  .

٤- بما أن  $\frac{1+z^2}{z} \in \mathbb{C} \Leftrightarrow z \in \mathbb{C}^*$  فالتابع حامعرف  $\forall z \in \mathbb{C}^*$

وبالتالي فإن  $\mathbb{C}^*$  هي مجموعة تعريف حا .

٢٣٧ - ميّز التطبيقات من بين التوابع التالية :

١-  $T_1 : z \mapsto p^* : s \leftarrow$  عدد أشقائه بفرض  $j$  مجموعة الناس .

٢-  $T_2 : A \mapsto p : s \leftarrow$  عدد أولاده بفرض  $A$  مجموعة الآباء .

٣-  $T_3 : [ -1 , 1 ] \mapsto \mathbb{C} : s \leftarrow \frac{s}{1-s}$

٤-  $T_4 : [ -1 , 1 ] \mapsto \mathbb{C} : s \leftarrow \frac{s}{1+s}$

الحل :

١- بما أنه يوجد بعض الأشخاص الذين لا أشقاء لهم ، فإن كل

شخص من هؤلاء الأشخاص لا يرتبط به أي عنصر من المستقر  $p^*$

ولذا فإن  $T_1$  ليس تطبيقاً .

٢- إذا لم يكن لبعض الآباء أولاد فكل منهم يرتبط به العدد  $0 \in p$  ،

أما الأب الذي له أولاد فيرتبط به من  $p$  العنصر الذي يمثل

عدد أولاده . ولذا فإن كل عنصر من  $\bar{A}$  يرتبط به عنصر من  $\bar{P}$  وبالتالي فإن  $\bar{A}$  تطبيق من  $\bar{A}$  إلى  $\bar{P}$  .

٢٣- إن  $\frac{s}{1-s}$  لا معنى له من أجل  $s=1$  أي أن العنصر ١ من المنطلق لا يرتبط به أي عنصر من  $\bar{P}$  (المستقر) ولذا فإن  $\bar{A}$  ليس تطبيقاً .

٢٤- إن  $\frac{0}{1+s} \ni \bar{P}$  من أجل جميع قيم  $s$  من المنطلق  $[1-، 1+]$  ولذا فإن  $\bar{A}$  هو تطبيق .

٢٣٨- لدينا التابع  $\bar{A} : \bar{P} \leftarrow \bar{P} : \bar{A} \leftarrow \sqrt{s}$   
عين التطبيق ها المقترن بالتابع  $\bar{A}$  :

الحل :

يكون لعدد  $s \ni \bar{P}$  جذر تربيعي اذا كان  $s \leq 0$  . ولذا فان مجموعة تعريف  $\bar{A}$  هي المجموعة  $\bar{P} +$  . والتطبيق المطلوب هو التطبيق :  
ها :  $\bar{P} + \bar{P} \leftarrow \bar{P} : \bar{A} \leftarrow \sqrt{s}$

٢٣٩- لدينا التابع  $\bar{A} : \bar{P} \leftarrow \bar{P} : \bar{A} \leftarrow (s)$

حيث :  $\bar{A} (s) = \left. \begin{array}{l} s \text{ من أجل } s > 0 \\ 0 \text{ من أجل } 0 > s \geq -1 \\ 1 \text{ من أجل } s < -1 \end{array} \right\}$

١- عين مجموعة تعريف  $\bar{A}$  .

٢- أوجد  $\bar{A}(-3)$  ،  $\bar{A}(\frac{1}{2})$  ،  $\bar{A}(1)$  ،  $\bar{A}(0)$  ،  $\bar{A}(100)$



إن الدائرة على المخطط الديكارتي تشير إلى عدم انتهاء النقطة ( مركز الدائرة ) إلى بيان التابع . فالنقطتان ( ٠ ، ٠ ) ، ( ٠ ، ١ ) لا تنتميان إلى بيان التابع السابق .

ومن الواضح أن الجزء I من المخطط هو جزء المستقيم الذي معادلته  $s = c$  الموافق لقيم  $s$  السالبة . وأن الجزء II هو جزء المستقيم  $c = 0$  الموافق لقيم  $s$  حيث  $0 < s \leq 1$  ، وأما الجزء III فهو جزء المستقيم  $c = 1$  الموافق لقيم  $s < 1$  .

٢٤٠ - لدينا التابع  $c : s \leftarrow c \leftarrow s$  :  $c \leftarrow s$  (س)

$$\left. \begin{array}{l} s > 1 \text{ لما } s + 1 \\ s > 1 \text{ لما } 1 \\ s \geq 1 \text{ لما } s + 2 \end{array} \right\} = \text{ حيث : } c \leftarrow s$$

١ - أوجد مجموعة تعريف  $c$  .

٢ - ارسم المخطط الديكارتي للتابع  $c$  .

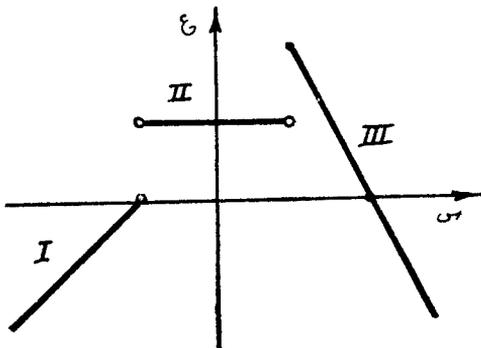
الحل :

١ - إن العدد  $1 \ni c$  (المنطلق) لا يقابله أي عنصر من  $c$  (المستقر)

وفق  $c$  ولذا فإن

مجموعة تعريف  $c$  هي

المجموعة  $c - \{1\}$



٢ - أما المخطط

الديكارتي فهو كما في

الشكل (١٦٩) :

الشكل (١٦٩)

$$٢٤١ - \text{لدينا المجموعتان } س = \{٧٠٥، ٣٠١\}$$

$$ع = \{٦٠٤، ٢\}$$

والعلاقات من س إلى ع التي بياناها :

$$١س = \{(٢٠١) ٦ (٢٠٣) ٦ (٤٠٥)\}$$

$$٢س = \{(٢٠٣) ٦ (٢٠٥) ٦ (٦٠٣) ٦ (٦٠٧)\}$$

$$٣س = \{(٢٠١) ٦ (٤٠١) ٦ (٦٠١) ٦ (٦٠٧)\}$$

$$٤س = \{(٢٠١) ٦ (٢٠٣) ٦ (٤٠٥) ٦ (٦٠٧)\}$$

أي العلاقات السابقة تابع وأي التابع منها تطبيق؟

الحل :

يلاحظ في البيان ١س أن المركبات الأولى في الأزواج المرتبة مختلفة مثنى مثنى، أي أن كل عنصر من س يرتبط به على الأكثر عنصر واحد من ع وبالتالي فالعلاقة التي بياناها ١س هي تابع ٠ والعلاقة التي بياناها ٣س ليست تابعاً وذلك لوجود زوجين مرتبين (٢٠٣) ، (٦٠٣) المركبة الأولى واحدة في كل منها، أي أن العنصر ٣ من المنطلق يرتبط بعنصرين من المستقر .

وكذلك العلاقة التي بياناها ٢س ليست تابعاً لوجود ثلاثة أزواج مرتبة في البيان، المركبة الأولى واحدة فيها جميعاً .

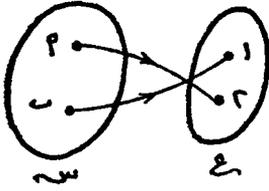
أما العلاقة التي بياناها ٤س فهي تابع وهي بالإضافة لذلك تطبيق من س إلى ع لأن كل عنصر من المنطلق يرتبط بعنصر واحد من المستقر .

$$٢٤٢ - \text{لدينا المجموعتان } س = \{١، ٢\} \text{ ٦ } ع = \{٢٠١\}$$

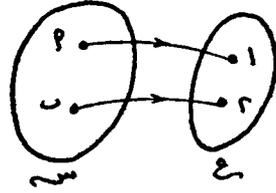
ما هي التطبيقات الممكنة من س إلى ع ؟

الحل :

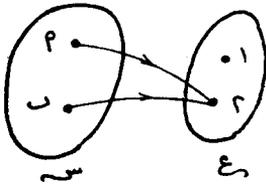
إن التطبيقات الممكنة هي المثلة بالخططات الآتية :



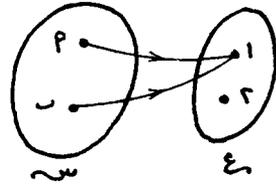
الشكل (١٧١)



الشكل (١٧٠)



الشكل (١٧٣)



الشكل (١٧٢)

ويلاحظ في جميع هذه الخططات أن كل عنصر من  $S$  يرتبط به عنصر واحد من  $E$ .

٢٤٣ - ليكن  $S$  عنصراً من  $T^*$  والعبارة :

$$S \leftarrow S = \{ u : u \in T^* \text{ و } u | S \}$$

علماً أن  $(u | S)$  يعني  $(u \text{ تقسم } S)$ .

١ - عيّن  $S$  من أجل  $S = 1$  ،  $S = 2$  ،  $S = 8$

٢ - هل يمكن استخدام العبارة المفروضة في تعريف تابع ؟ ما منطلقه وما مستقره ؟

الحل :

١ - من أجل أي عنصر  $S \in T^*$  تكون  $S$  مجموعة جميع قواسم

س وعلى ذلك فان :

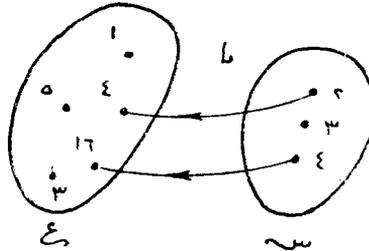
$$\begin{aligned} 1 = س &\leftarrow س = \{1\} \\ 2 = س &\leftarrow س = \{2, 1\} \\ 8 = س &\leftarrow س = \{8, 4, 2, 1\} \end{aligned}$$

٢- إن كل عنصر س  $\in$  ط\* له قاسم واحد على الأقل وبالتالي فان كل عنصر س  $\in$  ط\* تقابله وفق العبارة المفروضة مجموعة وحيدة هي مجموعة جميع قواسم س . وبما أن مجموعة قواسم س ليست إلا مجموعة جزئية من ط\* أي ليست سوى عنصر من المجموعة  $\mathcal{P}(ط^*)$  مجموعة جميع أجزاء ط\* ، فيمكننا باستخدام العبارة المفروضة الحصول على التابع :

$$تا : ط^* \leftarrow \mathcal{P}(ط^*) : س \leftarrow س$$

نساوي تابعين ، مقصور تابع ، عدد تابع

٢٤٤ - هل التابع تا الممثل بالشكل (١٧٤) :



الشكل (١٧٤)

والتابع ها ،  $\{2, 4\} \leftarrow \mathcal{P}(س) : س \leftarrow س$  متساويان ؟

الحل :

التابعان تا ، ها متساويان لأن لهما مجموعة التعريف نفسها ولأن قيمتهما

عند كل عنصر من مجموعة التعريف متساويتان أي أن :

$$\begin{aligned} \text{تا} (٢) = ٤ \text{ و ها } (٢) = ٢ = ٤ \text{ ومنه تا } (٢) = \text{ها } (٢) \\ \text{و تا } (٤) = ١٦ \text{ و ها } (٤) = ٤ = ١٦ \text{ ومنه تا } (٤) = \text{ها } (٤) \end{aligned}$$

٢٤٥ - هل التابع :

$$\begin{aligned} \text{تا} : \mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E} : \text{س} \leftarrow \text{س} + ٢ - \text{س} - ٥ \\ \text{تا} : \mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E} : \text{ز} \leftarrow \text{ز} + ٢ - \text{ز} - ٥ \\ \text{تا} : \mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E} : \text{ع} \leftarrow \text{ع} + ٢ - \text{ع} - ٥ \\ \text{متساوية ؟} \end{aligned}$$

الحل :

$$\begin{aligned} \text{تا} = \text{تا} = \text{تا} \text{ لأنها معرفة على المجموعة } \mathcal{E} \text{ نفسها ولأن :} \\ \text{تا} (\text{س}) = \text{تا} (\text{س}) = \text{تا} (\text{س}) \quad \text{س} \in \mathcal{E} \end{aligned}$$

٢٤٦ - هل التابعان :

$$\begin{aligned} \text{تا} : \{ ١, ٢, ٣, ٤ \} \leftarrow \mathcal{E} : \text{س} \leftarrow \text{س} + ٣ + ١ \\ \text{تا} : \{ ١, ٢, ٣, ٤, ٥ \} \leftarrow \mathcal{E} : \text{س} \leftarrow \text{س} + ٣ + ١ \\ \text{متساويان ؟} \end{aligned}$$

الحل :

$\text{تا} \neq \text{تا}$  بالرغم من كون قاعدة التقابل نفسها في التابعين وذلك لأن مجموعتي التعريف لهما مختلفتان .

٢٤٧ - لدينا التابع : تا :  $\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E} : \text{س} \leftarrow \text{س} + ٢$

عَيِّن مقصوره على المجال المغلق [ ٢, ٣ ] . وأوجد مجموعة قيم هذا المقصور .

الحل :

إن مقصور تا على المجال [ ٣،٢ ] هو التابع

$$\text{ها : } [ ٣،٢ ] \leftarrow \text{ع} : \text{س} \leftarrow ٢ + \text{س}$$

وبما أن : ها (٢) = ٢ + ٢ = ٤ ، ها (٣) = ٢ + ٣ = ٥

فمجموعة قيم ها هي المجال المنلق [ ٥،٤ ]  $\geq$  ع (المستقر) .

$$٢٤٨ - \text{لدينا التابع تا : ع} \leftarrow \text{ع} : \text{س} \leftarrow \frac{١ + \text{س}}{\text{س}}$$

عيّن أوسع مجموعة جزئية من المنلق ع يكون مقصور تا

عليها تطبيقاً . عيّن قيم هذا المقصور من أجل

$$\text{س} = ١ - ، \text{س} = ١ ، \text{س} = ٥$$

الحل :

إن مجموعة تعريف تا هي المجموعة ع\* وهي أوسع مجموعة يكون مقصور تا عليها تطبيقاً .

ويكون المقصور هو التطبيق :

$$\text{ها : ع}^* \leftarrow \text{ع} : \text{س} \leftarrow \frac{١ + \text{س}}{\text{س}}$$

ويكون : ها (١-) = ٠

ها (١) = ٢

ها (٥) = ١,٢

٢٤٩ - إذا كان م هو التطبيق المطابق في مجموعة سـ ، فإن مقصور

م على أية مجموعة جزئية ع  $\geq$  سـ يسمى التطبيق القانوني

لمجموعة ع في المجموعة سـ . ما هو التطبيق القانوني

للأعداد الأولية في مجموعة الأعداد الطبيعية ط . وما هي صور  
الأعداد ٢، ٣، ٥، ٦ بواسطة هذا التطبيق .

الحل :

بفرض ل هي مجموعة الأعداد الأولية فان التطبيق القانوني المطلوب  
هو التطبيق :

$$\text{تا : ل} \leftarrow \text{ط} : \text{س} \leftarrow \text{س}$$

ونجد في هذا التطبيق :

$$\text{تا (٢) = ٢} \quad \text{تا (٣) = ٣} \quad \text{تا (٥) = ٥}$$

في حين أنه ليس للعدد ٦ مقابل لأن  $٦ \neq \text{ل}$  .

٢٥٠ - لدينا التابعان :

$$\text{تا} : \{ ١, ٢, ٣ \} \leftarrow \text{ع}_١ : \text{س} \leftarrow \frac{1}{\text{س}}$$

$$\text{ها} : [ ١, ٣ ] \leftarrow \text{ع}_٢ : \text{س} \leftarrow \frac{1}{\text{س}}$$

بيّن أن ها هو ممدد تا على المجال [ ١, ٣ ] .

الحل :

إن ها هو ممدد تا على المجال [ ١, ٣ ] لأن تا هو مقصور ها على المجموعة  
 $\{ ١, ٢, ٣ \} = [ ١, ٣ ]$  .

٢٥١ - ليكن التابع  $\text{تا} : \text{ع}_١ + \text{ع}_٢ : \text{س} \leftarrow \text{س}$   
اذكر أي التوابع الآتية يكون ممدداً للتابع تا وأنها ليس كذلك ؟

$$\text{ها}_١ : \text{ع}_١ \leftarrow \text{ع}_٢ : \text{س} \leftarrow | \text{س} |$$

$$\text{ها}_٢ : [ -١, ١ ] \leftarrow \text{ع}_٢ : \text{س} \leftarrow \text{س}$$

$$\text{هاٲ} : \text{ع} \leftarrow \text{ع} : \text{س} \leftarrow \frac{\text{س} + |\text{س}|}{٢}$$

$$\text{هاٲ} : \text{ع} \leftarrow \text{ع} : \text{س} \leftarrow \text{س}$$

بما أن  $|\text{س}| = \text{س}$  من أجل  $\text{س} \leq ٠$  . فان مقصور هاٲ على  $\text{ع} +$  هو التابع تا . إذن هاٲ هو ممدد للتابع تا .

وبما أن  $\text{ع} +$  ليست جزءاً من  $[-١, ١]$  فلا يمكن أن يكون هاٲ ممدداً للتابع تا .

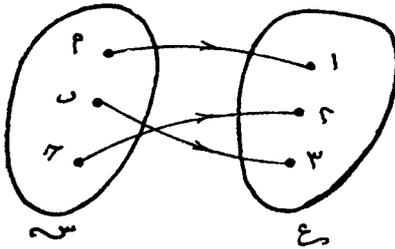
$$\text{وبما أنه من أجل } \text{س} \leq ٠ \text{ يكون } \frac{\text{س} + |\text{س}|}{٢} = \frac{\text{س} + \text{س}}{٢} = \text{س}$$

فان مقصور هاٲ على  $\text{ع} +$  هو التابع تا . إذن هاٲ هو ممدد للتابع تا .

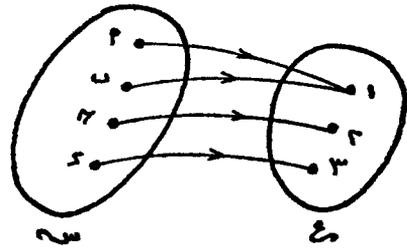
وأخيراً من الواضح أن هاٲ هو أيضاً ممدد للتابع تا .

التطبيق المتباين ، التطبيق الغامر ، التقابل :

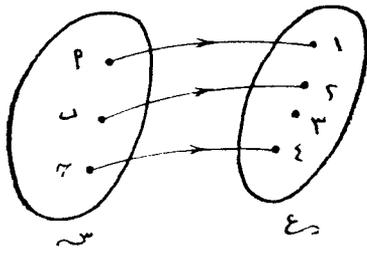
٢٥٢ - أيُّ التطبيقات الممثلة في الأشكال الآتية تطبيق متباين ؟



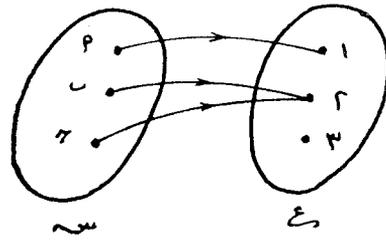
الشكل (١٧٦)



الشكل (١٧٥)



الشكل (١٧٨)



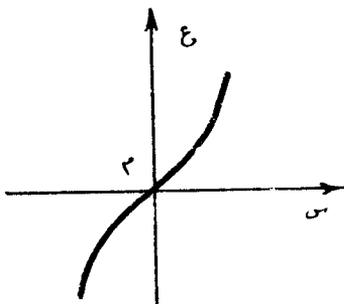
الشكل (١٧٧)

الحل :

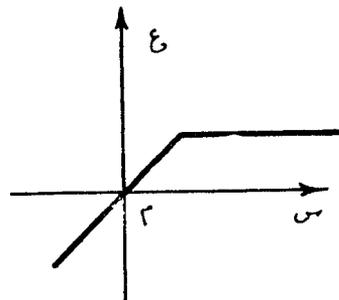
كل من الشكلين (١٧٦) ، (١٧٨) فقط يمثل تطبيقاً متبايناً ، فالسهمان المنطاقان من عنصرين مختلفين في  $S$  يستقران في عنصرين مختلفين في المستقر  $E$  .

أما الشكل (١٧٧) فهو تطبيق غير متباين لأنه يستقر في العنصر (٢) سهمان وكذلك فان الشكل (١٧٥) تطبيق غير متباين لأنه يستقر في العنصر (١) سهمان .

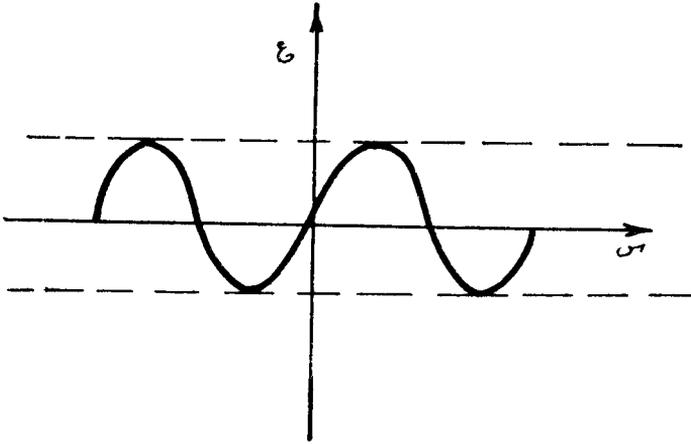
٢٥٣ - ما خاصة المخطط الديكارتي لتطبيق متباين ؟ أي المخططات الديكارتيّة الآتية هي مخطط تطبيق متباين لـ  $E$  في  $S$  .



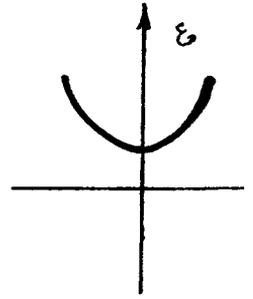
الشكل (١٨٠)



الشكل (١٧٩)



الشكل (١٨٢)



الشكل (١٨١)

الحل :

بفرض  $١ع = (١س)$  و  $٢ع = (٢س)$  تا  
 فالشرط  $٢س \neq ١س \Leftrightarrow (١س) \neq (٢س)$   
 يعني أن  $٢س \neq ١س \Leftrightarrow ٢ع \neq ١ع$  أو  $٢ع = ١ع \Leftrightarrow ٢س = ١س$   
 ومعنى هذا عدم وجود نقطتين مختلفتين من المخطط الديكارتي على مستقيم  
 يوازي م س . وعلى ذلك فان الشكل (١٨٠) فقط هو مخطط تطبيق  
 متباين .

٢٥٤ - ما هي خاصية بيان التطبيق المتباين؟

لتكن المجموعتان  $س = \{١، ٢، ٣، ٤، ٥\}$

$ع = \{١، ٢، ٣، ٤، ٥\}$

و  $١$  ،  $٢$  ،  $٣$  ،  $٤$  ،  $٥$  ، تا؛ تطبيقات من  $س$  إلى  $ع$  بياناتها  
 على الترتيب .

$\{(١، ١) \} \cup \{(٢، ٢) \} \cup \{(٣، ٣) \} \cup \{(٤، ٤) \} \cup \{(٥، ٥) \}$

$$\begin{aligned} & \{ (2, p) \} \cup \{ (1, b) \} \cup \{ (3, c) \} \cup \{ (3, s) \} \\ & \{ (5, b) \} \cup \{ (2, p) \} \cup \{ (4, c) \} \cup \{ (3, s) \} \\ & \{ (3, p) \} \cup \{ (3, b) \} \cup \{ (2, c) \} \cup \{ (3, s) \} \end{aligned}$$

الحل :

ليس في بيان التطبيق المتباين زوجان مرتبان لهما المركبة الثانية نفسها . ولذا فان التطبيقين  $\tau_1$  ،  $\tau_2$  ، متباينان ، إن كلاً من التطبيقين  $\tau_1$  ،  $\tau_2$  غير متباين .

٢٥٥ - برهن أن التطبيق  $\tau_1 : \tau_2 \leftarrow \tau_1 : \tau_2 \leftarrow \tau_1$  متباين

الحل :

طريقة أولى :  $\tau_1 \circ \tau_2 \circ \tau_1 = \tau_1$  ( المنطلق )

فان  $\tau_1 \neq \tau_2 \Rightarrow \tau_1 \circ \tau_2 \neq \tau_1$  لأن مكعي عددين مختلفين مختلفان  $\tau_1 \neq \tau_2 \Rightarrow \tau_1 \circ \tau_2 \neq \tau_1$

طريقة ثانية :

بالتعريف  $\tau_1 \circ \tau_2 \circ \tau_1 = \tau_1$  تا  $(\tau_1) = \tau_2 \circ (\tau_1) \Rightarrow \tau_1 \circ \tau_2 = \tau_1$

الجذران التكميبيان  $\tau_1 = \tau_2$

لعديدين متساويين متساويان

٢٥٦ - برهن أن التطبيق  $\tau_1 : \tau_2 \leftarrow \tau_1 : \tau_2 \leftarrow \tau_1$  غير متباين .

الحل :

بالتعريف تا  $(\tau_1) = \tau_2 \circ (\tau_1) \Rightarrow \tau_1 \circ \tau_2 = \tau_1$

$\tau_1 \circ \tau_2 = \tau_1$

$\tau_1 \circ \tau_2 = \tau_1$

وبما أن الشرط :  
 تا (س<sub>١</sub>) = تا (س<sub>٢</sub>) ⇔ س<sub>١</sub> = س<sub>٢</sub> لم يتحقق إذن فالتطبيق  
 المفروض غير متباين .

٢٥٧ - بفرض ط مجموعة الأعداد الطبيعية ، هل التطبيق :  
 تا : ط × ط ← ط : (س،ع) ← س + ع  
 متباين ؟

الحل : لدينا :

تا ((س،ع)) = تا ((س'،ع')) ⇔ س + ع = س' + ع' بالتعريف  
 وهذا لا يؤدي إلى كون س = س' و ع = ع' بصورة عامة  
 فن المعلوم مثلا أن العدد ٤ هو صورة الأزواج المختلفة (٢،٢) 6 (٣،١) (١،٣) 6 (٣،١) وفق تا وذلك لأن :

$$\text{تا } ((٣،١)) = ٣ + ١ = ٤$$

$$\text{و تا } ((١،٣)) = ١ + ٣ = ٤$$

$$\text{و تا } ((٢،٢)) = ٢ + ٢ = ٤$$

ولذا فالتطبيق المفروض غير متباين .

٢٥٨ - أي التوابع الآتية تابع متباين ؟

$$١ - \text{تا : } [١،٠] \leftarrow \text{ح} : \text{س} \leftarrow \text{س} - ٢$$

$$٢ - \text{ها : } [٠،١] \leftarrow \text{ح} : \text{س} \leftarrow \text{س} - ٢$$

$$٣ - \text{لا : } [١،١] \leftarrow \text{ح} : \text{س} \leftarrow \text{س} - ٢$$

الحل :

١ - لدينا تا (س<sub>١</sub>) = تا (س<sub>٢</sub>) ⇔ س<sub>١</sub> - ٢ = س<sub>٢</sub> - ٢ (بالتعريف)

$$\begin{aligned} \bullet &= (s_1 + s_2) (s_1 - s_2) \Leftrightarrow \bullet = s_2^2 - s_1^2 \Leftrightarrow \\ \bullet &= s_2 - s_1 \Leftrightarrow \bullet = s_2 + s_1 \neq \bullet \text{ لأن } s_2 + s_1 \neq s_2 - s_1 \text{ في منطلق التابع} \\ \bullet &= s_2 = s_1 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

اذن التابع تا متباين .

٢ - بطريقة مماثلة لما سبق لدينا :

$$\begin{aligned} \bullet &= (s_1 + s_2) (s_1 - s_2) \Leftrightarrow \bullet = (s_2) \text{ ها} = (s_1) \text{ ها} \\ \bullet &= s_2 - s_1 \Leftrightarrow \bullet = s_2 + s_1 \neq \bullet \text{ لأن } s_2 + s_1 \neq s_2 - s_1 \text{ في منطلق التابع} \\ \bullet &= s_2 = s_1 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

اذن التابع ها متباين .

٣ - وكذلك لدينا :

$$\begin{aligned} \bullet &= (s_1 + s_2) (s_1 - s_2) \Leftrightarrow \bullet = (s_2) \text{ لا} = (s_1) \text{ لا} \\ \bullet &= s_2 = s_1 \text{ أو } s_2 + s_1 = \bullet \\ \bullet &= s_2 = s_1 \text{ أو } s_2 + s_1 = \bullet \end{aligned}$$

ولما كان هذا الشرطان ممكنين في منطلق هذا التابع . فالتابع غير متباين .

٢٥٩ - أي التطبيقات الآتية تطبيق غامر ؟

١ - تا :  $g \leftarrow h$  : س  $\leftarrow$  ٢ س + ١

٢ - تا :  $g \leftarrow h^*$  : س  $\leftarrow$   $\frac{s+1}{s}$

٣ - تا :  $v \leftarrow +$  : س  $\leftarrow$  ٢ س

الحل :

١ - لنبحث عما إذا كان كل عنصر  $e \in g$  (المستقر) هو صورة وفق تا لعنصر س على الأقل من  $h$  (المنطلق) .

في الحقيقة ، لكي يكون ع صورة لعنصر س يجب أن يكون

$$(1) \quad \frac{1-e}{2} = s \quad \text{ومنه} \quad e = 1 + s$$

ومن الواضح أنه مهما كان  $e \ni \mathcal{E}$  (المستقر) فإن  $e$  هو صورة لعنصر من  $s \ni \mathcal{E}$  (المنطلق) معين بالعلاقة (1).

٢- ليكن  $e$  عنصراً من  $\mathcal{E}$  (المستقر)، فلكي يكون  $e$  صورة لعنصر  $s$  من  $\mathcal{E}$  (المنطلق) \* يجب أن يكون:

$$(2) \quad \frac{1}{1-e} = s \quad \text{ومنه} \quad e = \frac{1+s}{s}$$

وواضح من العلاقة (2) أن العنصر  $1 \ni \mathcal{E}$  (المستقر) ليس صورة لأي عنصر  $s$  من المنطلق  $\mathcal{E}$ \* . ولذا فالتابع  $\tau$  غير غامر .

٣- لكي يكون عنصر  $e$  من المستقر، صورة لعنصر  $s$  من المنطلق يجب أن يكون:

$$(3) \quad \sqrt{e} = s \quad \text{ومنه} \quad e = s^2$$

وبما أن جذر العدد الصحيح الموجب ليس صحيحاً بالضرورة مثل  $\sqrt{3}$  فالعلاقة (3) تسدل على أن بعض الأعداد الصحيحة من المستقر ليست صوراً لأعداد صحيحة موجبة من المنطلق، فالتابع  $\tau$  اذن غير غامر .

٢٦٠- بفرض  $\mathcal{P}$  مجموعة الأعداد الطبيعية، برهن أن التطبيق

$$\tau : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} : (s, e) \leftarrow s \cdot e$$

غامر .

الحل :

بما أن أي عنصر من المستقر  $\mathcal{P}$  هو حاصل ضرب عددين طبيعيين

أي أنه صورة لعنصر واحد على الأقل من ط × ط ، فالتطبيق ما غامر .

٢٦١ - لدينا التطبيقات :

$$١ - \text{تا} : \text{ع} \leftarrow \text{ع} : \text{س} \leftarrow \text{س}^٢$$

$$٢ - \text{ها} : \text{ع} \leftarrow \text{ع}^+ : \text{س} \leftarrow \text{س}^٢$$

$$٣ - \text{قا} : \text{ع}^+ \leftarrow \text{ع} : \text{س} \leftarrow \text{س}^٢$$

$$٤ - \text{كا} : \text{ع}^+ \leftarrow \text{ع}^+ : \text{س} \leftarrow \text{س}^٢$$

بيّن من أجل كل تطبيق ، هل هو متباين ؟ هل هو غامر ؟ هل هو تقابل ؟

الحل :

١ - بفرض س<sub>١</sub> ، س<sub>٢</sub> عنصرين من المنطلق يكون :

$$\text{تا} (س_١) = \text{تا} (س_٢) \Leftrightarrow س_١ = س_٢ \quad (\text{بالتعريف})$$

$$\Leftrightarrow (س_١ - س_٢) (س_١ + س_٢) = ٠$$

$$\Leftrightarrow س_١ = س_٢ \text{ أو } س_١ = -س_٢$$

وكلا الحالتين ممكنتان في المنطلق ع ، فالتابع تا غير متباين .  
وبفرض ع ∈ ع ( المستقر ) و س ∈ ع ( المنطلق ) ويقابل ع وفق تا ، يكون :

$$س^٢ = ع \Leftrightarrow س = \pm \sqrt{ع} \quad (\text{يؤخذ الجذرين لأن } س \in ع)$$

وبما أن عملية الجذر التربيعي لا تتم إلا من أجل ع ≥ ٠ ، فليس كل عنصر من المستقر يقابل عنصراً على الأقل من المنطلق ، فالتابع تا غير غامر .

وبما أن تا غير متباين وغير غامر فهو ليس تقابلاً .

٢ - بطريقة مماثلة لما رأيناه في تا نجد أن التابع ها غير متباين .

وبفرض  $E \ni \mathcal{E} + (\text{المستقر})$  و  $S \ni \mathcal{E}$  (المنطلق) ويقابل  $E$   
 وفق ها ، يكون  $S^2 = E \Leftrightarrow S = \sqrt{\pm E}$  .

وبما أن  $E \ni \mathcal{E} +$  فعملية الجذر التربيعي ممكنة مهما كان  $E$  من  
 من المستقر ، أي أن كل عنصر من المستقر يقابل عنصراً على الأقل  
 من المنطق ، فالتابع ها غامر .

وبما أن التابع ها غامر وغير متباين فهو ليس تقابلاً .

$$\begin{aligned} 3 - \text{ لدينا } \text{قا } (S_1) = \text{قا } (S_2) &\Leftrightarrow (S_2 - S_1) (S_2 + S_1) = 0 \\ &\Leftrightarrow S_2 - S_1 = 0 \text{ ( لعدم وجود } \\ &\text{عديدين مختلفين في } \mathcal{E} + \text{ مجموعها صفر )} \\ &\Leftrightarrow S_2 = S_1 \end{aligned}$$

اذن فالتابع قا متباين .

وبفرض  $E \ni \mathcal{E}$  (المستقر) و  $S \ni \mathcal{E}$  (المنطلق) ويقابل  $E$   
 وفق قا ، يكون  $S^2 = E \Leftrightarrow S = \sqrt{E}$  (ويقتصر على الجذر  
 الموجب لأن  $S \ni \mathcal{E} +$  ) . وواضح أن كل عنصر  $E \leq 0$  (فقط)  
 من المستقر يقابل عنصراً من المنطق والتابع ها غير غامر .  
 وبما أن قا متباين وغير غامر فهو ليس تقابلاً

٤ - لأسباب مماثلة لما رأيناه في التابع قا نرى أن التطبيق كا متباين  
 ولأسباب مماثلة لما رأيناه من أجل التابع ها نجد أن التطبيق كا  
 غامر .

وبما أن كا متباين وغامر فهو تقابل .

٢٦٢ - لتكن المجموعة  $S = \{3, 4, 7, 8, 9\}$  والتطبيقات  
 الثلاثة  $\alpha, \beta, \gamma$  ، قا الممثلة في الأشكال (١٨٣) ، (١٨٤) ،  
 (١٨٥) أي من هذه التطبيقات يقبل تطبيقاً عكسياً ؟



وبفرض  $\mathcal{E} \ni \mathcal{E}$  (المستقر) و  $\mathcal{S} \ni \mathcal{E}$  (المنطلق) الذي يقابله  $\mathcal{E}$  يكون :

$$(1) \quad \frac{\sqrt{1+\mathcal{E}}\sqrt{3}}{2} = \mathcal{S} \Leftrightarrow \mathcal{E} = 1 - \mathcal{S}^3$$

وواضح أن  $\mathcal{E} \ni \mathcal{E} \Leftrightarrow \mathcal{E} \ni 1 + \mathcal{E} \Leftrightarrow \mathcal{E} \ni \frac{\sqrt{1+\mathcal{E}}\sqrt{3}}{2}$  أي  $\mathcal{E}$  أنه من أجل كل عنصر  $\mathcal{E}$  من المستقر يقابله عنصر  $\mathcal{S}$  من المنطلق فالتابع تا غامر . وأخيراً فالتابع تا هو تقابل .

وبفرض  $\mathcal{E}$  هي صورة  $\mathcal{S}$  وفق تا فإن  $\mathcal{S}$  تكون صورة  $\mathcal{E}$  وفق التقابل العكسي تا<sup>-1</sup> أي أن :

$$\mathcal{S} = \text{تا}^{-1}(\mathcal{E})$$

وحسب (1) يكون :  $\text{تا}^{-1}(\mathcal{E}) = \frac{\sqrt{1+\mathcal{E}}\sqrt{3}}{2}$  ويكون التقابل العكسي :

$$\text{تا}^{-1} : \mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E} : \mathcal{E} \leftarrow \frac{\sqrt{1+\mathcal{E}}\sqrt{3}}{2}$$

وبما أن  $\mathcal{E}$  رمز اختياري لتحويل التطبيق ، أمكننا كتابة التقابل العكسي بالشكل :

$$\text{تا}^{-1} : \mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E} : \mathcal{S} \leftarrow \frac{\sqrt{1+\mathcal{S}}\sqrt{3}}{2}$$

مستخدمين  $\mathcal{S}$  الرمز المألوف لتحويل تابع .

٢٦٤ - لدينا التطبيق :

$$\text{تا} : \mathcal{E} - \{5\} \leftarrow \mathcal{E} - \{2\} : \mathcal{S} \leftarrow \frac{1+\mathcal{S}^2}{\mathcal{S}-5}$$

برهن أن تا تقابل وأوجد تا-١ .

الحل :

بفرض  $s_1$  ،  $s_2$  عنصرين من المنطوق يكون لدينا :

$$( \text{بالتعريف} ) \quad \frac{1 + s_2}{s_2 - 5} = \frac{1 + s_1}{s_1 - 5} \Leftrightarrow (s_1) = (s_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (s_1 - 5)(1 + s_2) = (s_2 - 5)(1 + s_1) \Leftrightarrow$$

$$s_1 \neq 5 , s_2 \neq 5$$

$$\Leftrightarrow s_1 = s_2 , \text{ فالتطبيق نا متباين .}$$

وبفرض ع عنصراً من المستقر و س عنصراً من المنطوق يقابله ع

$$\text{يكون} \quad \frac{1 + s}{s - 5} = ع$$

وبحساب س بدلالة ع نجد :

$$س = \frac{1 + ع}{2 - ع}$$

وبما أن الكسر في العلاقة الأخيرة معرف لها كانت ع من المستقر  $\mathcal{E} - \{2\}$  لأن  $ع \neq 2$  . فكل عنصر ع من المستقر يقابله وفق تا عنصر س من المنطوق أي أن التطبيق نا غامر . وأخيراً فالتطبيق نا تقابل . ونجد بسهولة أن التطبيق العكسي هو :

$$\text{تا-١} : \mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E} : س = \frac{1 + س}{2 - س}$$

٢٦٥ - نمثل كل علاقة من العلاقات الواردة في هذا التمرين تطبيقاً  $\mathcal{E}$  في  $\mathcal{E}$  اكتب العلاقة المشتملة لـ حاه تا وعين مجموعة

تعريف ومجموعة قيم هذا التابع المركب في كل حالة من الحالات التالية :

$$\begin{array}{l}
 \text{أ} - \text{أ} = (\text{س}) = 4 + \text{س} = 6 \quad \text{ح أ} = (\text{س}) = 7 - \text{س} \\
 \text{ب} - \text{ب} = (\text{س}) = 3 - \text{س} = 5 \quad \text{ح ب} = (\text{س}) = \text{س}^2 \\
 \text{ج} - \text{ج} = (\text{س}) = 4 + \text{س} = 1 + 6 \quad \text{ح ج} = (\text{س}) = \text{س}^3 \\
 \text{د} - \text{د} = (\text{س}) = 1 - \text{س} = 6 \quad \text{ح د} = (\text{س}) = \frac{1}{\text{س} + 1}
 \end{array}$$

الحل :

لنرمز لمجموعة منطلق نا بـ سـ وملتحوها بـ سـ وللمجموعة مستقره بـ عـ وملتحوها بـ عـ فتكون مجموعة منطلق حا هي عـ نفسها ، ولنرمز لمجموعة مستقرها بـ صـ وملتحوها بـ صـ ، فيكون :

أ - إن التطبيق تا غامر ومتباين يقابل بين كل عنصر س  $\ni$  سـ وعنصر ع  $\ni$  عـ بحيث يكون ع = س + 4 ، وإن التطبيق حا (س) غامر ومتباين أيضاً يقابل بين كل عنصر ع  $\ni$  عـ وعنصر وحيد ص  $\ni$  صـ بحيث يكون :

$$ص = ع - 7 \Leftrightarrow ص = (س + 4) - 7 = 3 - س$$

ح أ نا

أي حا [ تا (س) ] = 3 - س أو س  $\leftarrow$  س - 3  
 إن التابع ح أ نا تطبيق غامر ومتباين (تقابل) ، فمجموعة تعريفه عـ ومجموعة قيمه عـ .

ب - إن التطبيق تا تقابل يحقق العلاقة ع = 3 - س - 5 أما التطبيق حا فهو غير غامر وغير متباين لأن مجموعة قيمة عـ + ولأن (س  $\pm$  س<sup>2</sup>) = س<sup>2</sup> وهو يحقق العلاقة :

$$ص = ع^2 \Leftrightarrow ص = (3 - س - 5)^2$$

أي  $\text{حا} [ \text{نا} ( \text{س} ) ] = ( \text{س} - 3 )$   
 إن التطبيق  $\text{حاه}$   $\text{نا}$  من  $\text{ح}$  إلى  $\text{ح}$  ليس بغامر لأن مجموعة قيمه هي  $\text{ح} +$  وليس بمتباين لأن :

$$\text{س} = \text{ب} + \frac{5}{3} \Leftrightarrow \text{ص} = ( \text{ب} - 3 )$$

$$\text{و س} = \text{ب} - \frac{5}{3} \Leftrightarrow \text{ص} = ( \text{ب} - 3 )$$

وأما مجموعة تعريف هذا التطبيق فهي مجموعة منطلقه  $\text{ح}$  .

$\text{ب} - \text{نا} ( \text{س} )$  تقابل علاقته  $\text{ع} = \text{س} + 1$  و  $\text{حا} ( \text{س} )$  تقابل أيضاً علاقته :

$$\text{ص} = \text{ع} \Leftrightarrow \text{ص} = ( \text{س} + 1 )$$

إن التطبيق  $\text{حاه}$   $\text{نا}$  متباين وغامر يطبق  $\text{ح}$  على  $\text{ح}$  .

$\text{د} - \text{نا}$  تقابل علاقته  $\text{ع} = \text{س} - 1$  أما  $\text{حاه}$  فهو تطبيق غير غامر

$$\text{و غير متباين يحقق العلاقة } \text{ص} = \frac{1}{\text{ع} + 1} = \frac{1}{( \text{س} - 1 ) + 1}$$

$$\text{إن التطبيق المركب : } \text{س} \xleftarrow{\text{حاه نا}} \frac{1}{( \text{س} - 1 ) + 1}$$

ليس بغامر لأن قيمته موجبة دوماً أي مجموعة قيمه هي  $\text{ح} +$  وليس بمتباين لأن :

$$\text{س} = \text{ب} + 1 \xleftarrow{\text{ص}} \frac{1}{\text{ب} + 1}$$

$$\text{و س} = \text{ب} - 1 \xleftarrow{\text{ص}} \frac{1}{\text{ب} + 1}$$

وأما مجموعة تعريفه فهي  $\text{ح}$  .

$$٢٦٦ - \text{تعريف العلاقاتان: نا (س) = (٢-س-٧) ، و حا (س) = \frac{١+س}{١-س}$$

تابعين من ع ← ع ( حيث ع مجموعة الأعداد العادية ) .  
 ١- اكتب علاقة التابع المركب . حاه تا وعين مجموعة تعريف هذا التابع .

ب - ما هي المجموعة التي يجب أن نأخذها منطلقاً للتابع تا ليصبح حاه تا تطبيقاً :

الحل :

إن التابع تا (س) = ٢-س-٧ يربط بكل عنصر س ∈ ع عنصراً وحيداً من ع فهو تطبيق وهو غامر ومتباين ، إذا رمزنا بـ ع لمتحول مستقره فانه يحقق علاقة من الشكل :

$$ع = ٢ - س - ٧$$

أما التابع حا (س) فانه لا يمثل تطبيقاً لأنه غير معرف من أجل س = ١+ع من المنطق ع ، إذا رمزنا بـ ع لمتحول منطلقه وبـ ص لمتحول مستقره فان علاقة هذا التابع هي :

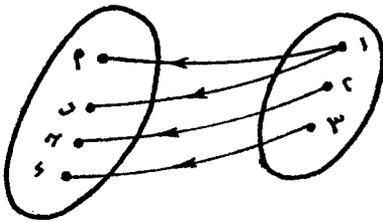
$$\frac{٦-س-٢}{١-س-٢} = \frac{١+(٧-س-٢)}{١-(٧-س-٢)} = ص \Leftrightarrow \frac{١+ع}{١-ع} = ص$$

إن مجموعة تعريف هذا التابع كتابع مركب حاه تا هي ع - {٤}

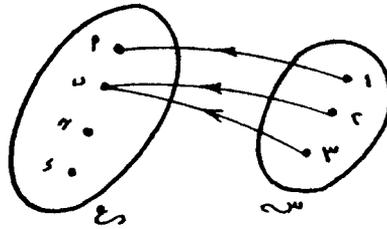
ح - يصبح التابع حاه تا تطبيقاً إذا كان منطلقه مساوياً لمجموعة تعريفه أي إذا كانت مجموعة منطلقه هي المجموعة ع - {٤} .

## تمارين غير محلولة

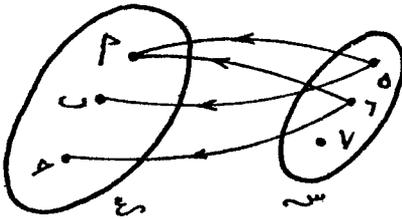
٢٦٧ - بين أي الأشكال الآتية يمثل تابعا ، وعيّن مجموعة تعريف كل تابع :



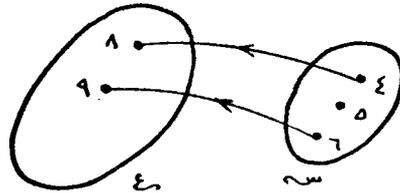
الشكل (١٨٧) ع س



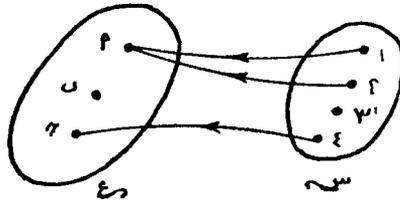
الشكل (١٨٦) ع س



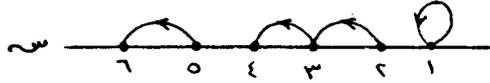
الشكل (١٨٩) ع س



الشكل (١٨٨) ع س

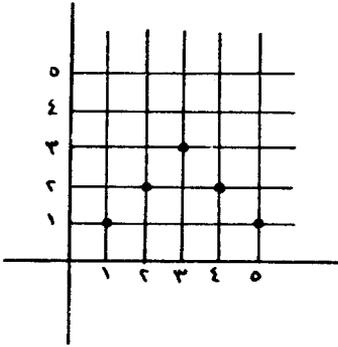


الشكل (١٩٠) ع س

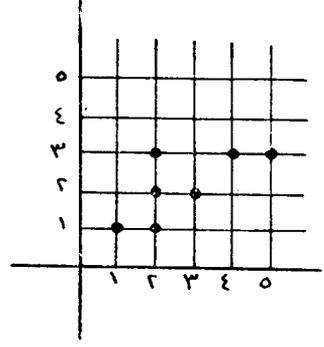


الشكل (١٩١)

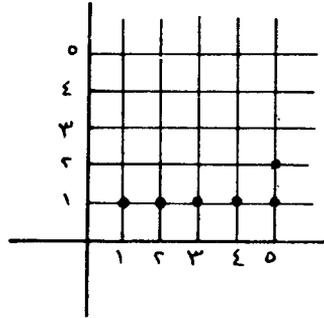
٢٦٨ - لتكن  $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  والعلاقات من  $S$  إلى  $S$  المثلة بالأشكال (١٩٢)، (١٩٣)، (١٩٤) :



الشكل (١٩٣)



الشكل (١٩٢)



الشكل (١٩٤)

أي هذه الأشكال يمثل تابعاً ؟

٢٦٩ - أي العلاقات الآتية من  $R$  إلى  $R$  والمثلة بالخططات



مع العلم أن : تا (س) = - س من أجل  $0 < س ≤ 5$   
 و تا (س) =  $س^2$  من أجل  $س ≥ 0$

١- ما مجموعة تعريف التابع تا ؟

٢- ارسم المحطظ الديكارتي للتابع تا .

٢٧٢ - ميّز التطبيقات بين التوابع الآتية :

تا١ : ج ← ج : س ← طوله لأقرب سنتمتر  
 حيث ج مجموعة سكان القاهرة

تا٢ : ج ← ط : س ← عمره لأقرب سنة  
 حيث ج مجموعة طلاب إحدى الثانويات .

تا٣ : ع ← ع : س ←  $\frac{س + 1}{س}$

تا٤ : ج ← ج : س ←  $\sqrt{س + 1}$

تا٥ : ج ← ج : س ←  $\frac{\sqrt{س}}{س - 1}$

٢٧٣ - لدينا المجموعة  $س = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

والعلاقات  $س١, س٢, س٣, س٤$  من  $س$  الى  $س$  التي بيّناها  
 على الترتيب هي :

$\{(1,1) \} \cup \{(2,1) \} \cup \{(3,2) \} \cup \{(4,4) \}$

$\{(2,1) \} \cup \{(3,2) \} \cup \{(4,3) \} \cup \{(5,4) \}$

$\{(1,1) \} \cup \{(2,2) \} \cup \{(3,3) \} \cup \{(4,4) \} \cup \{(5,5) \}$

$\{(2,1) \} \cup \{(3,2) \} \cup \{(4,3) \} \cup \{(5,4) \} \cup \{(6,5) \}$

أي العلاقات السابقة توابع ، عين مجموعة تعريف كل تابع  
 وعين التطبيق من التوابع .

٢٧٤ - لدينا المجموعتان  $S = \{p, b\}$  و  $E = \{1, 2\}$   
ما هي التوابع الممكنة من  $S$  إلى  $E$ ؟

٢٧٥ - لتكن  $S$  مجموعة مناحي مستقيبات مستو ولنعتبر فيها العلاقة  
ر المعرفة كما يلي :

$$S \text{ ر } E \Leftrightarrow S \perp E$$

أثبت أن العلاقة ر تابع .

٢٧٦ - لدينا المجموعتان  $S = \{p, b\}$  و  $E = \{1, 2, 3\}$   
ما هي التطبيقات الممكنة من  $S$  إلى  $E$ ؟

٢٧٧ - لدينا التابع  $f: E \rightarrow S$  :  $f(1) = p, f(2) = b, f(3) = p$   
عين مقصوره ها على المجموعة  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  . مثل  
هذا المقصور ديكرتياً .

٢٧٨ - لدينا التابعان العدديان لمتحول حقيقي :

$$f: E \rightarrow S \text{ : } f(1) = p, f(2) = b, f(3) = p$$

$$g: E \rightarrow S \text{ : } g(1) = p, g(2) = b, g(3) = p$$

هل هذا التابعان متساويان؟

٢٧٩ - ما التطبيقات المتباينة فيما يلي :

- ١ - التطبيق الذي يربط بكل ثانوية مديرها .
- ٢ - التطبيق الذي يربط بكل كتاب عدد صفحاته .
- ٣ - التطبيق الذي يربط بكل بيت من بيوت دمشق رقمه .
- ٤ - التطبيق الذي يربط بكل دجاجة وزنها .

٢٨٠ - أمن الممكن أن يكون التطبيق الثابت متبايناً؟



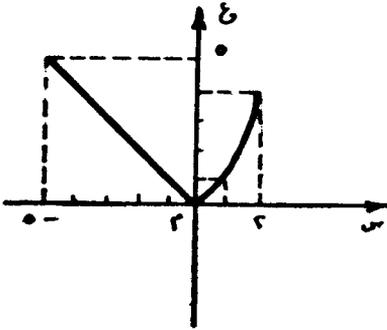


يشترك مع المخطط بنقطة واحدة . ومجموعات تعريف هذه التوابع هي على الترتيب  $[2, 2]$  ،  $\mathbb{R}$  ،  $[-2, 2]$  . وكل من الأشكال (١٩٥) ، (١٩٧) ، (٢٠٠) لا يمثل تابعاً لأن بعض المستقيمت الموازية لـ  $m$  ع تشترك مع المخطط بأكثر من نقطة .

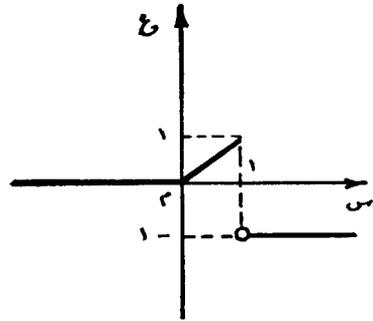
٢٧٠ - ١ - مجموعة التعريف هي  $\mathbb{R}$  ، تا  $(-4)$  ، تا  $(0) = 0$  .

تا  $(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})$  ، تا  $(2) = 1$  ، تا  $(5.0) = 1$  .

٢ - المخطط الديكارتي الشكل (٢٠١)



(٢٠٢)



الشكل (٢٠١)

٢٧١ - ١ - مجموعة تعريف التابع هي المجال  $[-2, 5]$  .

٢ - المخطط الديكارتي الشكل (٢٠٢) .

٢٧٢ - التطبيقات هي  $\mathbb{R}$  ، تا  $\mathbb{R}$  ، تا  $\mathbb{R}$  .

٢٧٣ - كل من  $\mathbb{R}$  ،  $\mathbb{R}$  ليست تابعاً ، مجموعة تعريف التابع المعين

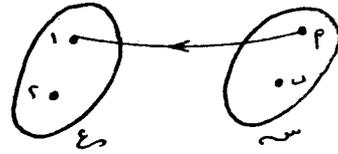
بـ  $\mathbb{R}$  هي  $\{1, 2, 3, 4\}$  ، ومجموعة تعريف التابع المعين

بـ  $\mathbb{R}$  هي  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  ، وهذا التابع تطبيق .

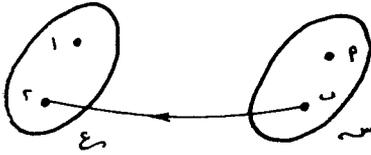
٢٧٤ - يضاف الى التطبيقات الواردة في التمرين المحلول رقم (٢٤٢) :  
 التوابع الممثلة بالأشكال (٢٠٣) ، (٢٠٤) ، (٢٠٥) ، (٢٠٦) :



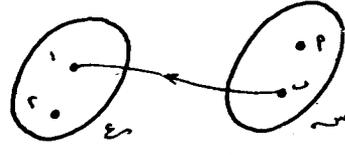
الشكل (٢٠٤)



الشكل (٢٠٣)



الشكل (٢٠٦)



الشكل (٢٠٥)

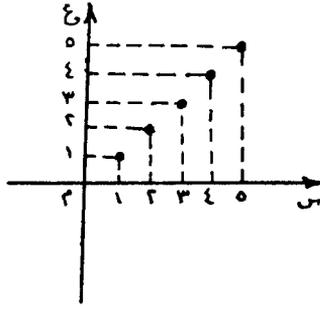
٢٧٥ - لأن كل منحي  $S \ni s$  يقابله منحي من  $S$  متعامد معه .

٢٧٦ - هي التطبيقات :

$$\left. \begin{array}{l} 3 \leftarrow P \\ 3 \leftarrow S \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 2 \leftarrow P \\ 2 \leftarrow S \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 1 \leftarrow P \\ 1 \leftarrow S \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2 \leftarrow P \\ 3 \leftarrow S \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 1 \leftarrow P \\ 3 \leftarrow S \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 1 \leftarrow P \\ 2 \leftarrow S \end{array} \right\}$$

وكل تطبيق ينتج عن التطبيقات الثلاثة الأخيرة بتبادل موضعي  $P$  و  $S$   
 ٢٧٧ -  $h_a : \{1, 2, 3, 4, 5\} \leftarrow S : S \leftarrow S$  والتمثيل  
 الديكارتي الشكل (٢٠٧) :



الشكل (٢٠٧)

٢٧٨ - ليسا متساويين لأن مجموعة تعريف الأول  $E_1$  --  $\{1\}$  ومجموعة تعريف الثاني  $E_2$  والمجموعتان غير متساويتين .

٢٧٩ - كل من التطبيقين  $١, ٣$  متباين .

٢٨٠ - يكون التطبيق الثابت متبايناً إذا كان المنطلق مجموعة وحيدة العنصر .

٢٨١ - أية مجموعة  $S$  يكون التطبيق المطابق عليها متبايناً .

٢٨٢ - يكون التطبيق الثابت غامراً إذا كان المستقر مجموعة وحيدة العنصر .

٢٨٣ - يكون التطبيق الثابت غامراً ومتبايناً معاً إذا كان كل من المستقر والمنطلق مجموعة وحيدة العنصر .

٢٨٤ - التطبيق المطابق على مجموعة غامر .

٢٨٥ -  $١^{-1} : E \leftarrow S : S \leftarrow \sqrt{S}$  .

٢٨٦ - يبرهن كما في التمرين المحلول (٢٦٤) أن  $T$  متباين وغامر والتطبيق المعاكس هو :

$$١^{-1} : E \leftarrow S : S \leftarrow \frac{S+3}{S-2}$$

٢٨٧ - ١ - (تا) غامر ومتباين ، (حا) ليس بغامر ولا متباين .

$$٢ - \beta - [٢, ٣ -] = 'ه \cup ه$$

$$\{٤, ٢, ٠, ٢ - , ٤ - , ٦ -\} = ('ه \cup ه) تا$$

$$\{٤, ٢, ٠\} \cup \{٢, ٠, ٢ - , ٤ - , ٦ -\} = ('ه) تا \cup ه) تا$$

$$= ('ه \cup ه) تا$$

$$٣ - \alpha - \{٠, ٤, ١, ٤, ٩\} = ('ه \cup ه) حا$$

$$\{٤, ١, ٠\} \cup \{١, ٠, ١, ٤, ٩\} = ('ه) حا \cup ه) حا$$

$$('ه) حا \cup ه) حا = ('ه \cup ه) حا$$

$$\{٢, ٠\} = ('ه \cap ه) تا ، [١, ٠] = 'ه \cap ه$$

$$\{٢, ٠\} = ('ه) تا \cap ه) تا$$

$$\{٤, ١, ٠\} = ('ه) حا \cap ه) حا ، \{١, ٠\} = ('ه \cap ه) حا$$

$$('ه) حا \cap ه) حا \neq ('ه \cap ه) حا .$$

٢٨٨ - ١ - (تا) غير غامر ومتباين ، (حا) غامر وغير متباين .

$$٢ - \beta - حا [ تا (س) ] = س وهو غامر ومتباين .$$

$$٣ - \alpha - س = ٢ ، مستحيلة ، س = ٨ ، س = ٢٦ ، أي عدد فردي .$$