

الفصل الثامن

قدرة المجموعات

(الأعداد الأساسية)

٨٤ - تكافؤ المجموعات

Équipotence d'ensembles . Equivalence of sets

يمكن للطفل الذي قد لا يعرف العدد بعد أن يدرك فيما لو أن عدد الكراسي في غرفة ما مساو لعدد الأشخاص في هذه الغرفة . يكفيه من أجل ذلك أن يجعل كل شخص في الغرفة يأخذ مكاناً له على أحد الكراسي فيكون بذلك قد كون أزواجاً يتألف كل منها من شخص وكروسي . فإذا لم يبق كرسي دون شخص جالس عليه ولم يبق شخص دون كرسي يجلس عليه فإننا نقول عندئذ ، وكما مر سابقاً ، إن هناك تقابلاً بين مجموعة الأشخاص ومجموعة الكراسي أو نقول إن المجموعتين متكافئتان .

تعريف : نقول عن مجموعة S إنها مكافئة (كميّاً) لمجموعة أخرى E إذا أمكن أن نجد تقابلاً بين المجموعتين S و E ، أي إذا أمكن أن نجد تطبيقاً غامراً ومتبايناً من S إلى E . وبلغة الرموز :

$$S \approx E \quad (\text{تقرأ } S \text{ تكافئ } E)$$

عندما يوجد تطبيق : $S \rightarrow E$ غامر ومتباين

ويقال عن كل مجموعتين متكافئتين إن لهما القدرة ذاتها .

مثال (١) : إن مجموعة جميع الأعداد الصحيحة الموجبة مكافئة لمجموعة جميع الأعداد الصحيحة السالبة لأنه يمكن إيجاد تقابل بين هاتين المجموعتين كأن نقابل مثلاً بين كل عدد صحيح موجب بالعدد السالب الذي يساويه بالقيمة المطلقة .

مثال (٢) : إن المجموعة $S = \{1, 2, 3\}$ لا تكافئ المجموعة $E = \{2, 3\}$ لأنه يستحيل علينا إيجاد تقابل بين المجموعتين .

مثال (٣) : إن المجموعة ط ، مجموعة الأعداد الطبيعية ، تكافئ المجموعة م المكونة من الأعداد الموجبة الزوجية ، لوجود التطبيق الغامر والمتباين :

تا : ط ← ز

س ← ٢ س

فالعدد ١ من ط يقابله العدد ٢ من م والعدد ٢ من ط يقابله العدد ٤ من م وهكذا .

ملاحظة (١) :

إذا كان $S_1 \approx S_2$ و $S_2 \approx S_3$ و $S_1 \approx S_3$ و $S_1 \cap S_2 = S_3$ فإن $S_1 \cup S_2 \approx S_3$ وذلك لأنه إذا كان هنالك تقابل بين S_1 و S_2 وتقابل بين S_2 و S_3 وحيث أنه لا يوجد أي عنصر مشترك بين S_1 و S_2 كما أنه لا يوجد أي عنصر مشترك بين S_2 و S_3 فإنه يوجد تقابل بين $S_1 \cup S_2$ و S_3 .

ملاحظة (٢) :

لا يمكن للمجموعة الخالية أن تكافئ سوى نفسها .

ملاحظة (٣) :

نستنتج من تعريف تكافؤ مجموعتين مباشرة أنه إذا كانت S_1 و S_2 و S_3 ثلاث مجموعات فإن :

(١) $s \approx s$ فكل مجموعة تكافئ نفسها .

(٢) $s \approx e \Leftrightarrow e \approx s$.

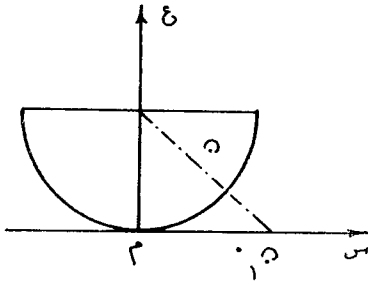
(٣) $s \approx e$ و $e \approx v \Leftrightarrow s \approx v$.

وهكذا نرى أن التكافؤ شأنه في ذلك شأن التساوي والتشابه في

الهندسة منعكس ومتناظر ومتعدي .

مثال (٤) : لتكن s مجموعة نقط مستقيم (نأخذه محوراً للسينات)

ولتكن e مجموعة نقط نصف الدائرة :



$$s^2 = e^2(1 - e) + e^2 \quad e > 1$$

التي يقع مركزها في النقطة
(١٠٠) . ان طرفي نصف الدائرة

أي (١٠١) و (١٠١ -) لا ينتميان
إلى e (حيث $e > 1$) .

الشكل (٢٠٨)

إن $s \approx e$ لأنه يمكن الحصول على تقابل بين مجموعة نقط s
ومجموعة نقط e وبكفي من أجل ذلك ان تقابل كل نقطة e من المستقيم
بالنقطة e من نصف الدائرة التي تقع معها على نصف قطر واحد .

ثم إن المجموعة e تكافئ المجموعة v المكونة من جميع نقط المجال
المفتوح $[1, 1]$.

$$v = \{s : 1 - s > 1\}$$

ولبرهان هذا التكافؤ يكفي أن نسقط نقط نصف محيط الدائرة على

محور السينات (اسقاطاً قائماً) ونقابل كل نقطة بمسقطها .

وأخيراً فإن $s \approx v$ لأن $s \approx e$ و $e \approx v$.

٨٥ - المجموعات المنتهية والمجموعات غير المنتهية :

سبق لنا في الفقرة ١٦ أن قسمنا المجموعات إلى منتهية وغير منتهية. ولقد اعتمدنا في هذا التقسيم على عملية العد حيث قلنا إن المجموعة المنتهية هي تلك التي يمكن أن ننتهي من عد عناصرها وإن المجموعة غير المنتهية هي التي لا تنتهي عملية عد عناصرها .

وسنحاول في هذه الفقرة تقديم تعريف دقيق لهذين النوعين من المجموعات كما أننا سنحاول بعد ذلك أن نميز بين الأنواع المختلفة للمجموعات غير المنتهية .

إذا رجعنا للمثال (٣) من الفقرة السابقة فإننا نلاحظ أن مجموعة الأعداد الطبيعية تكافئ مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية ، التي هي مجموعة جزئية من المجموعة الأولى ، في حين أننا نلاحظ أن المجموعة سـ في المثال (٢) لا تكافئ المجموعة ع التي هي جزء من سـ .

وليس الأمر كذلك فقط بل إنه لا يمكن للمجموعة سـ أن تكافئ أي مجموعة جزئية منها مختلفة عنها . فهناك فارق أساسي اذن ، بين المجموعة ط في المثال (٣) والمجموعة سـ في المثال (٢) ، فالأولى أمكن تكافؤها مع جزء منها يختلف عنها في حين لم يمكن ذلك في الثانية . نقول عن الأولى إنها مجموعة غير منتهية ، ونقول عن الثانية إنها مجموعة منتهية .

تعريف^(١) : نقول عن مجموعة إنها غير منتهية إذا أمكن تكافؤها مع جزء منها يختلف عنها ، وإلا فإننا نقول عنها إنها منتهية .

(١) يعود هذا التعريف الى ريتشارد ديدكند الذي ذكره في عام ١٨٨٨ في منشوره ، ما هي الأعداد وما ينبغي أن تكون ؟

نظرية : إذا كانت ج مجموعة منتهية و ج_١ مجموعة جزئية منها فإن ج_١ تكون أيضاً منتهية .

البرهان :

إذا لم تكن ج_١ منتهية فهي غير منتهية ويوجد بالتسالي مجموعة ج_٢ جزئية من ج_١ ومختلفة عنها بحيث ج_١ ≈ ج_٢ . وبما أن ج - ج_١ منفصلة عن كل من ج_١ و ج_٢ فإنه يكون حسب الملاحظة (١) :

$$ج \cup (ج - ج_1) \approx ج_1 \cup (ج - ج_1)$$

$$أي : ج \approx ج_1 \cup (ج - ج_1)$$

ولكننا نرى بسهولة أن ج_٢ ∪ (ج - ج_١) = ج .

اذن ج تكافئ مجموعة جزئية منها مختلفة عنها وهذا يخالف للفرض .

ينتج من هذه النظرية أنه إذا كانت ج_١ غير منتهية و ج تحوي ج_١ فإن ج تكون غير منتهية ، لأنه لو كانت ج منتهية فعندئذ تكون ج_١ (المجموعة الجزئية منها) منتهية وهذا خلاف الفرض .

مثال (١) : إن المجموعة ج المؤلفة من عنصر واحد ب : ج = {ب} هي مجموعة منتهية لأن ج تحوي مجموعة جزئية واحدة مختلفة عنها هي المجموعة الخالية . ومن الواضح أنه لا يمكن إيجاد تقابل بين ج والمجموعة الخالية .

والمجموعة ج المؤلفة من عنصرين ب و ح : ج = {ب، ح} منتهية كذلك لأن ج تحوي ثلاث مجموعات جزئية مختلفة عنها {ب} و {ح} و ∅ ولا يمكن إيجاد تقابل بين ج وبين أي من هذه المجموعات الجزئية . ومثل ذلك نرى أن كل مجموعة تحوي عدداً محدوداً من العناصر هي مجموعة منتهية، حتى أن المجموعة المكونة من جميع الكتب في العالم هي مجموعة منتهية .

مثال (٢) : ان مجموعة نقط مستقيم غير منتهية لأنها تكافئ ، كما مر سابقاً في المثال ٤ من الفقرة ٨٤ ، نقط القطعة [١ ، ١] والتي تمثل مجموعة جزئية منها مختلفة عنها .

مثال (٣) : إذا كان $P \approx B$ وكانت P منتهية فإن B منتهية .

البرهان : إذا لم تكن B منتهية فهي غير منتهية وبالتالي يوجد مجموعة B جزئية من B ومختلفة عنها ومكافئة لها أي $B \approx B$. لكن P عناصر P التي تقابل عناصرها عناصر B وفق التطبيق الغامر والمتباين الذي يقابل بين عناصر P وعناصر B . ان P مجموعة جزئية من B ومختلفة عنها . لنلاحظ أن $P \approx B$ ، و :

$$P \approx B \wedge B \approx P \Rightarrow P \approx P$$

$$P \approx B \wedge B \approx P \Rightarrow P \approx P$$

وبالتالي تكون المجموعة P غير منتهية وهذا خلاف الفرض .

٨٦ - المجموعات القابلة للعد

« Ensembles dénombrable . Denumerable sets »

تعريف : نقول عن مجموعة S إنها قابلة للعد اذا كانت مكافئة لمجموعة الأعداد الطبيعية أي اذا كان : $S \approx \mathbb{N}$

يلاحظ أن $S \approx \mathbb{N}$ غير منتهية لأن $\mathbb{N}$ غير منتهية أيضاً .

ملاحظة : بالعودة إلى تعريف المتوالية الذي مرّ في الفصل السابع نستطيع القول إن المجموعة القابلة للعد هي المجموعة التي يمكن كتابتها على شكل متوالية غير منتهية (أي تلك المجموعة التي يمكن ترقيم عناصرها) .

نتيجة : نستنتج من التعريف مباشرة أن كل مجموعة مكافئة لمجموعة قابلة للعد هي مجموعة قابلة للعد . وأن كل مجموعتين قابلتين للعد متكافئتان .

مثال (١) : ان مجموعة الأعداد الزوجية الموجبة قابلة للعد لأنها مكافئة للمجموعة ط .

مثال (٢) : إن المجموعة ج : $\{ ١ , \frac{1}{2} , \frac{1}{3} , \dots , \frac{1}{n} , \dots \}$ قابلة للعد

لأن التطبيق تا : ط $\leftarrow$ ج

$$س \leftarrow \frac{1}{١+س}$$

غامر ومتباين .

نظرية : كل مجموعة جزئية من مجموعة قابلة للعد هي (على الأكثر) مجموعة قابلة للعد (أي انها إما منتهية أو قابلة للعد) :

البرهان : لتكن $\mathcal{M}$ مجموعة قابلة للعد فعندئذ يمكن كتابة هذه المجموعة على شكل متوالية .

$$(١) \quad ١\mathcal{M} , ٢\mathcal{M} , \dots , \mathcal{M} , \dots$$

لتكن $\mathcal{M}$ مجموعة جزئية من $\mathcal{M}$ ولنفرض $\mathcal{M}$ العنصر الأول من المتوالية

(١) الذي ينتمي لـ $\mathcal{M}$ وليكن $\mathcal{M}$ العنصر الثاني وهكذا ... فإذا

رمزنا لـ $\mathcal{M}$ بـ ١ ، ولـ $\mathcal{M}$ بـ ٢ ... فعندئذ تكون $\mathcal{M}$ هي :

$$١ , ٢ , \dots$$

فهي إذن منتهية أو قابلة للعد حسبما تكون هذه المتوالية منتهية أو

غير منتهية .

٨٧ - المجموعات غير القابلة للعد :

إذا لم تكن المجموعة منتهية وإذا لم تكن قابلة للعد فعندئذ نسميها مجموعة غير قابلة للعد .

ولكن هل توجد بالفعل مجموعات ليست قابلة للعد ؟ لأنه إذا لم توجد أية مجموعة من هذا النوع فلا حاجة للبحث في مثل هذه المجموعات . ان الجواب على هذا السؤال يتضح من النظرية التالية :

نظرية : إن مجموعة الأعداد الحقيقية $0 < s \leq 1$ ليست قابلة للعد .

البرهان : يكفي أن نبرهن أنه كانت متوالية الأعداد الحقيقية :

$$b_1, b_2, \dots, b_n, \dots \quad (0 < b_n \leq 1)$$

فإنه يوجد عدد حقيقي s ($0 < s \leq 1$) يختلف عن جميع عناصرها . وهذا يعني أن أي محاولة لترقيم جميع الأعداد الحقيقية في المجال المفروض فاشلة .

إن طريقة البرهان التي سنذكرها الآن ، والتي تسمى طريقة كانتور ، تعتمد على الفكرة التالية :

يمكن كتابة كل عدد $0 < s \leq 1$ على شكل كسر عشري غير من الشكل :

$$0. s_1 s_2 s_3 \dots$$

$$\text{حيث : } 0 \leq s_n \leq 9 \quad (s_1 = 1, 2, 3, \dots)$$

فالعدد $\frac{1}{2}$ مثلاً يكتب بالشكل : $0.4999\dots$ والعدد 1 يكتب

بالشكل ... ٠,٩٩٩. وتتم هذه الكتابة بشكل وحيد. وهكذا نجد أن الأعداد ١, ٢, ٣, ... تكتب على شكل متوالية من تلك الكسور العشرية:

$$\begin{array}{ccccccc} \diagup & \frac{1}{11} & \frac{2}{11} & \frac{3}{11} & \frac{4}{11} & \dots \\ & \diagdown & & & & \\ \diagup & \frac{1}{12} & \frac{2}{12} & \frac{3}{12} & \frac{4}{12} & \dots \\ & & \diagdown & & & \\ \diagup & \frac{1}{13} & \frac{2}{13} & \frac{3}{13} & \frac{4}{13} & \dots \\ & & & \diagdown & & \\ \diagup & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

الشكل (٢٠٧)

لنشكل الآن من العناصر القطرية في الجدول السابق العدد العشري ... ٠,٣٣٣ ٢٢٢ ١١١. ولنكون عدداً عشرياً جديداً نحصل عليه من العدد السابق بأن نبديل ب ب (١ = ٢, ٢ = ٣, ٣ = ...) عدداً صحيحاً آخر $0 \leq b < 9$ يختلف عن ب نفسه فعندئذ يكون هذا العدد العشري الجديد :

$$0,1 > 0,2 > \dots = 0$$

محققاً الشرط $0 \leq s < 1$ وهو يختلف عن كل عدد ب من المتوالية المذكورة لاختلافه عنه في الرقم النوني.

نظرية: كل مجموعة مكافئة لمجموعة غير قابلة للعد هي مجموعة غير قابلة للعد كذلك.

إن برهان هذه النظرية ينتج من التعريف مباشرة. سنبرهن في التمارين المحلولة أن $[1, 0] \approx [1, 0]$ ، وبما أن المجموعة الأولى غير قابلة للعد فالثانية غير قابلة للعد كذلك.

نظرية: كل مجموعة غير منتهية S تحوي مجموعة جزئية قابلة للعد.

البرهان: لنأخذ من S عنصراً كئيفياً s_1 . فبما أن S مجموعة غير

منتهية فإنه يوجد في s_0 - $\{s_1\}$ عنصر s_1 ويوجد في s_0 - $\{s_1, s_2\}$ عنصر ثالث s_2 وهكذا... نحصل بذلك على المجموعة القابلة للعد $\{s_1, s_2, s_3, \dots\}$ الجزئية من s_0 وهو المطلوب .

مثال (١) : إن مجموعة الأعداد الحقيقية المنتهية إلى المجال المغلق $[a, b]$ هي مجموعة غير قابلة للعد. ذلك لأن التطبيق $T(s) = b + (b-a)s$ الغامر والمتباين يقابل بين المجال $[0, 1]$ والمجال $[a, b]$ ، فمجموعتا الأعداد الحقيقية المفروضتان متكافئتان . وحيث أن الأولى غير قابلة للعد فالثانية غير قابلة للعد كذلك .

نسمي المجال $[a, b]$ المستمر Continuum ، Continu

وسنلاحظ في التمارين المحولة أن جميع المستقيمتين وأنصاف المستقيمتين ، إذا نظرنا إليها كمجموعات نقط متكافئة فيما بينها ومكافئة للمستمر .

ولنطرح الآن السؤال التالي :

لاحظنا فيما سبق أن المجموعة المنتهية لا تكافئ أي مجموعة جزئية منها مختلفة عنها وأن كل مجموعة جزئية من مجموعة منتهية هي كذلك مجموعة منتهية . ورأينا بعد ذلك أن المجموعة القابلة للعد تكافئ جزءاً منها (شأنها في ذلك شأن كل مجموعة غير منتهية) وأن المجموعات الجزئية لمجموعة قابلة للعد قد تكون قابلة للعد وقد تكون منتهية . ثم صادفنا بعد ذلك مجموعات ليست منتهية وليست قابلة للعد ، كمجموعة الأعداد الحقيقية في المجال المغلق $[0, 1]$ والتي دعوناها المستمر . ويمكننا بسهولة أن نرى أن المجموعات الجزئية للمستمر (والمجموعات المكافئة له) قد تكون مكافئة للمستمر وقد تكون قابلة للعد (كأن نختار في المجال

$[0, 1]$ المتتالية $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ التي تنتمي جميع عناصرها إلى

المجال المذكور وهي بحد ذاتها مجموعة قابلة للعد ، أو منتهية (كأن
نأخذ العددين $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ كمجموعة جزئية من المستمر) .

والسؤال المطروح الآن : هل هنالك خطوة أخرى بعد هذه الخطوة؟
أي : هل توجد مجموعات غير منتهية وغير قابلة للعد ولا تكافئ المستمر ؟
إن الجواب على هذا السؤال بالإيجاب . فمجموعة التطبيقات الحقيقية المعرفة
على المجال [١٠] والتي تأخذ قيمها في مجموعة الأعداد الحقيقية هي
مجموعة من النوع المذكور . وقبل البرهان نذكر بأنه يكفي كي يكون
تطبيق مفروض مختلفاً عن تطبيق آخر معرف على المنطلق ذاته أن
يختلفا في قيمتيها عند عنصر واحد على الأقل من المنطلق .

ولبرهان النظرية نفرض أن ادعاءنا غير صحيح وأن التطبيقات المشار
إليها مكافئة للمستمر وهذا يعني أنه يوجد تقابل بين المجال [١٠] وبين
مجموعة التطبيقات المذكورة ، فكل قيمة b من المجال المذكور تقابل
تطبيقاً واحداً نرمز له بـ b (س) . لنكون الآن تطبيقاً جديداً
حا (س) معرفاً على المجال $0 \leq s \leq 1$ بحيث يكون حا (ب) $\neq$ ب (ب)
من أجل كل قيمة b من المجال المذكور (وهذا ممكن لأن
المستقر يتكون من مجموعة الأعداد الحقيقية) . فالتطبيق حا (س) لا
يطابق أي تطبيق ب (س) لأن ب (س) $\neq$ حا (س) من أجل $s = b$
على الأقل . وبما أن حا (س) أحد التطبيقات المعرفة على المجال [١٠]
ويأخذ قيمه في المستقر المذكور فإنه يجب أن يطابق أحد التطبيقات
ب (س) . أي يجب أن يكون ب (س) = حا (ب) وهذا غير صحيح
حسب تعريف حا (ب) وهو المطلوب .

٨٨ - العدد الاسامي « Nombre Cardinal . Cardinal number » :

عندما أدخل الانسان مفهوم العدد العادي انطلق من شكل ابتدائي يعتمد على تجزئة الصحيح إلى عدد معين من الأجزاء ، ولكن إذا أردنا الحصول على تعريف دقيق للعدد العادي علينا أن نقتلع عن هذا الشكل ونسلك السبيل التالي :

ننظر للعدد العادي على أنه زوج من الأعداد الطبيعية b و c نكتبه ، وفق ما اعتدنا وألفنا ، بالشكل $\frac{b}{c}$. ولكن حتى هذه النظرية لا تزال كل لبس في هذا المفهوم الجديد فجميع الأزواج العددية $\frac{b}{c}$ ، $\frac{b+2}{c+2}$ ، $\frac{b+3}{c+3}$ ، ... ليست إلا أشكالاً مختلفة للعدد العادي ذاته .

ولذلك فإنه علينا أن ننظر (أولاً) إلى كل زوجين عدديين من الشكل $\frac{b}{c}$ و $\frac{b+1}{c+1}$ على أنها متكافئان ، وأن نعتبر (ثانياً) أن العدد العادي هو ممثل كيفية نختاره من بين الأزواج العددية المتكافئة ، وأن نتحقق (ثالثاً) عند استخراج قواعد الحساب في الأعداد العادية أن قاعدة الحساب لا تتعلق بالممثل الذي اخترناه (بعبارة أخرى : منسجمة مع التكافؤ المذكور) .

مثل ذلك يتم في حالة المجموعات المتكافئة . فإذا نظرنا ، على سبيل المثال ، في المجموعات المتكافئة :

{ انسان ، قلم ، كتاب } ، { ١ ، ٢ ، ٣ } ، { مدرسة ، صف ، مقعد } ، { الأرض ، القمر ، المشتري } .

وفي جميع المجموعات المكافئة لها ، وإذا اخترنا إحدى هذه المجموعات ،

المجموعة $\{ ١ ، ٢ ، ٣ \}$ ممثلاً ، كممثل لجميع هذه المجموعات المتكافئة فإننا نطلق عادة على هذه المجموعة التي اخترناها اسم العدد الأساسي للمجموعات المذكورة أو (قدرة) هذه المجموعات .

تعريف : العدد الأساسي ^(١) أو (القدرة) من المجموعة هو ممثل كفي s نختاره من بين جميع المجموعات المكافئة لهذه المجموعة .

وقد نرمز لقدرة المجموعة s بالشكل $|s|$ على أن لا يغرب عن البال أنه يمكن أن نبدل بالمجموعة s أية مجموعة مكافئة لها أي أن :

$$|s| = |ع| \quad \text{لما} \quad s \approx ع$$

ومهما يكن هذا التعريف مجرداً إلا أنه يبدو في حالة المجموعات المنتهية لا غرابة فيه ، ذلك أنه لمعرفة عدد عناصر مجموعة منتهية نقوم بعملية عدٍ لعناصرها فنحصل بهذا على العدد ٤ عند عملية العد $١ ، ٢ ، ٣ ، ٤$ الأمر الذي يجعلنا نعتبر العدد ٤ ممثلاً بالمجموعة $\{ ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ \}$.

وهكذا فإن العدد الأساسي لمجموعة منتهية هو عدد عناصر هذه المجموعة n ، ونرمز له كذلك بالرمز n ذاته .

أما في حالة المجموعات غير المنتهية فإننا لا نعرف إلا عدداً بسيطاً من أصناف المجموعات المتكافئة ، ألا وهي المجموعات القابلة للعد ، التي

(١) يعرف كانتور العدد الأساسي لمجموعة بأنه ذلك المفهوم الذي يدرك بقوة التجريد والذي نلحقه بمجموعة متجاهلين طبيعة عناصرها والترتيب الذي تحتله هذه العناصر. فالعدد الأساسي هو ما تشترك به المجموعات المتكافئة فيما بينها .

ريذهب بعض المؤلفين إلى اعتبار العدد الأساسي من المجموعة s هو جماعة جميع المجموعات المكافئة لمجموعة s .

يمكن اعتبارها ممثلة بالمجموعة $\{1, 2, 3, \dots\}$ ، والمجموعات المكافئة للمستمر والمجموعات المكافئة لمجموعة التطبيقات المعرفة في المجال $[1, 0]$.
 فإذا رمزنا للأعداد الأساسية لهذه الأصناف بـ $\mathbb{M}$ ، $\mathbb{R}$ ، $\mathbb{N}$ ، على الترتيب فاننا لا نكون بذلك قد عرفنا ، حتى الآن ، سوى الأعداد الأساسية :

$$1, 2, 3, \dots, \mathbb{M}, \mathbb{R}, \mathbb{N}.$$

٨٩ - مقارنة الأعداد الأساسية :

تعريف : إذا كانت لدينا مجموعتان $\mathbb{M}$ و $\mathbb{R}$ وإذا كانت $\mathbb{M}$ مكافئة لمجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ ولكن $\mathbb{R}$ لا تكافئ أية مجموعة جزئية من $\mathbb{M}$ فاننا نقول إن $\mathbb{M}$ ذات قدرة أقل (أو ذات عدد أساسي أصغر) من المجموعة $\mathbb{R}$ ونكتب ذلك بالشكل :

$$|\mathbb{M}| < |\mathbb{R}|$$

ولكي يكون لهذا التعريف معنى علينا أن نبرهن أن العلاقة الأخيرة صحيحة عندما نستبدل بكل من $\mathbb{M}$ و $\mathbb{R}$ مجموعة مكافئة لها . لنفرض من أجل ذلك أن $\mathbb{M} \approx \mathbb{M}'$ و $\mathbb{R} \approx \mathbb{R}'$ ولنفرض $\mathbb{M} \approx \mathbb{R}$ ، حيث $\mathbb{R}$ مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ ولكن $\mathbb{R}$ لا تكافئ أية مجموعة جزئية من $\mathbb{M}$. فبما أن $\mathbb{R} \approx \mathbb{R}'$ فإنه يوجد تقابل بين $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}'$. ونجد في هذا التقابل أن $\mathbb{R}$ تقابل بمجموعة جزئية $\mathbb{R}'$ من $\mathbb{R}'$ أي أن $\mathbb{R} \approx \mathbb{R}'$ ، $\mathbb{M} \approx \mathbb{M}'$ وبالتالي $\mathbb{M}' \approx \mathbb{R}'$ أي أن $\mathbb{M}'$ تكافئ مجموعة جزئية من $\mathbb{R}'$. بقي أن نبرهن أن $\mathbb{R}'$ لا تكافئ أية مجموعة جزئية من $\mathbb{M}'$. لنفرض مؤقتاً أن $\mathbb{R}'$ تكافئ مجموعة جزئية من $\mathbb{M}'$ فعدنئذ نجد وفق الطريقة السابقة أن $\mathbb{R}$ تكافئ مجموعة جزئية من $\mathbb{M}$ وهذا ما يناقض ما فرضناه وهو المطلوب .

من الواضح أن التعريف السابق يعطي في حالة الأعداد الأساسية المحدودة المفهوم المعروف « عدد أصغر من عدد آخر » .

'يبرهن أن كل عددين أساسيين m و n قابلان للمقارنة مع بعضها أي أنه إما أن يكون $m > n$ أو $m = n$ أو $m < n$. بعبارة أخرى : إن أية مجموعة كيفية من الأعداد الأساسية قابلة للترتيب حسب كبرها .

ملاحظة : أشرفاً قبل قليل الى أن التعريف الأخير لا يعطي شيئاً جديداً إذا ما طبق على الأعداد الأساسية المحدودة . أما إذا انتقلنا إلى الأعداد الأساسية للمجموعات غير المنتهية ، هذه الأعداد التي نسميها عادة الأعداد غير المحدودة (أو ما وراء النهائية . Transfinite cardinal numbers) فإننا نجد الحقائق التالية :

(١) إذا كان m عدداً أساسياً غير محدود و n عدداً أساسياً محدوداً فعندئذ يكون $m > n$ لأنه إذا كانت m مجموعة ممثلة لـ m (وهي مجموعة غير منتهية) و n مجموعة ممثلة لـ n (وهي مجموعة منتهية) فعندئذ يوجد في m مجموعة جزئية مكافئة لـ n ولا يوجد في n مجموعة جزئية مكافئة لـ m .

(٢) مهما كان العدد الأساسي غير المحدود m فإن $m \leq m$ ، أي أن العدد m أصغر الأعداد الأساسية غير المحدودة .

يكفي لبرهان ذلك أن نلاحظ أن كل مجموعة غير منتهية تحوي مجموعة قابلة للعد حسبنا رأينا سابقاً .

(٣) بما أن $m \geq n$ و $n \neq m$ فإنه يكون $m > n$.

(٤) إن $m > n$.

ولبرهان ذلك نلاحظ أنه إذا رمزنا بـ r للمستمر و بـ s لمجموعة

التطبيقات الحقيقية المعرفة في المجال [١٠٠] فان R تكافئ مجموعة جزئية من R وذلك لأن مجموعة التطبيقات الثابتة والتي يساوي كل منها عدداً معيناً من المجال [١٠٠] هي مجموعة جزئية من R ومكافئة لـ R . ثم إن R لا تكافئ مجموعة جزئية من R كما رأينا سابقاً وهو المطلوب.

ملاحظة : لم نتعرف حتى الآن إلا على ثلاثة أعداد أساسية غير محدودة . ترى هل توجد أعداد أخرى من هذا النوع ؟ نعم فهناك عدد غير منته من الأعداد الأساسية غير المحدودة ، وهذا ينتج من الحقيقة التالية وهي أنه يوجد من أجل كل عدد أساسي عدد أساسي أكبر منه . وتفصيل ذلك نجده في النظرية التالية :

نظرية : إن العدد الأساسي لمجموعة أجزاء مجموعة أكبر من العدد الأساسي للمجموعة نفسها .

البرهان : إن برهان هذه النظرية يبدو واضحاً في حالة المجموعات المنتهية . فمجموعة أجزاء المجموعة الخالية $\emptyset$ هي $\{\emptyset\}$ ، وهي مجموعة مكونة من عنصر واحد ، ويوافق المجموعة الخالية العدد الأساسي (٠) في حين يوافق المجموعة المكونة من عنصر واحد العدد الأساسي ١ . ومجموعة أجزاء المجموعة $\{\emptyset\}$ المكونة من عنصر واحد هي $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ويوافقها العدد الأساسي ٢ ونعلم أن $٢ > ١$. وبشكل عام رأينا في التمرين المحلول رقم ٤٠ أن عدد أجزاء مجموعة تحوي n عنصراً هو 2^n ومن السهل أن نبرهن أن $2^n > n$.

أما في حالة المجموعات غير المنتهية فاننا سنسوق البرهان التالي الذي يشمل كذلك الحالة السابقة ، حالة المجموعات المنتهية ، ل نرمز بـ $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ لمجموعة عناصرها $s_1, s_2, \dots, s_n$ ول نرمز بـ $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$

للمجموعة التي تنتج عن $S \sim (S)$ بأن نبدل بكل S المجموعة $\{S\}$ فتكون هذه المجموعة مكافئة لـ S . ولنرمز بـ G (S) للمجموعة أجزاء S . من الواضح أن $\{S\} \supseteq S$ ولذلك فإن :

$$S \sim (\{S\}) \supseteq G \sim (S)$$

وبالتالي فإن $S \sim$ مكافئة لمجموعة جزئية من G (S) . يكفي أن نبرهن أن G (S) لا تكافئ أية مجموعة جزئية من S .

$$\text{ليكن } G \sim G \supseteq G \sim (S) \quad 6 \quad S \sim S \supseteq S$$

فاذا برهنا أن :

$$G \sim S \approx S \sim . \quad G \sim G \supseteq G \sim (S) \quad (*)$$

فعدنئذ لا يمكن لـ G (S) أن تكافئ أية مجموعة جزئية من S لأنه طالما يصح الاقتضاء (*) من أجل أية مجموعة محتواة في نفسها بالمعنى الواسع فهو يصح من أجل G نفسها وبالتالي ينتج :

$$G \sim S \approx S \sim . \quad S \sim S \approx S \sim G \supseteq G \sim (S)$$

وهذا غير ممكن ، فالمجموعة لا يمكن أن تكون محتواة تماماً في نفسها . وهكذا نجد أن المسألة تؤول إلى برهان الاقتضاء (*) .

بما أن $S \sim S \approx G$. فانه يوجد تقابل بين S و G . لنرمز لهذا التقابل بالرمز $\sim$:

$$\text{حا : } S \sim G$$

$$S \sim >$$

وحيث أن كل عنصر $>$ من G هو جزء من S فاما أن ينتمي S المقابل لهذا العنصر (وفق حا) إلى $>$ نفسه أو أن لا ينتمي .

لتكن $>$ المجموعة المكونة من كل عنصر $S \supseteq S$. ولا ينتمي إلى 'المجموعة $>$ المقابلة له وفق حا .

ان هذه المجموعة $>$ ، والتي هي مجموعة جزئية (قد تكون خالية)

من سم . ليست عنصراً من حج . لأنه لو كانت ح عنصراً من حج .
فمعتدئ يلزم أن يقابل ح عنصر س من سم . وفق حا . وهما نكون
أمام أحد احتمالين . اما أن يكون $\text{س} \supset \text{ح}$ وهذا غير ممكن (حسب
تعريف ح) أو أن يكون $\text{س} \not\supset \text{ح}$ وهذا غير ممكن كذلك ، لأن
العنصر س باعتباره لا ينتمي إلى العنصر المقابل له وفق حا ، فانه يلزم
أن ينتمي لـ ح وفي هذا تناقض . وهكذا نرى أن $\text{ح} \not\supset \text{حج}$. وبالتالي
 $\text{حج} = \text{ح} \cup \text{سم}$ وهو المطلوب .

نظرية بيرن شتاين Bernstein في التكافؤ (مقارنة القدرات) :

إذا كان لدينا مجموعتان سم و حع فإنّه لا يرد منطقياً عند دراسة
التقابل بين هاتين المجموعتين ، سوى الحالات الأربع التالية :

- (١) يوجد تقابل بين سم و حع وعندئذ يكون $\text{سم} \approx \text{حع}$.
- (٢) يوجد تقابل بين إحدى المجموعتين (مثل سم) ومجموعة جزئية
من الثانية ومختلفة عنها ، دون أن يكون العكس ممكناً أي لا
يوجد تقابل بين حع وأية مجموعة جزئية من سم مختلفة عنها .
- (٣) يوجد تقابل بين كل من المجموعتين ومجموعة جزئية من الثانية
مختلفة عنها .
- (٤) لا يوجد أي تقابل بين أي من المجموعتين ومجموعة جزئية من
الثانية مختلفة عنها .

من الواضح أن الحالتين الثالثة والرابعة غير ممكنتين في حالة المجموعات
المنتهية فإما أن تصح الحالة الأولى (عندما يكون للمجموعتين عدد
واحد من العناصر) أو أن تصح الحالة الثانية .

ويبرهن (بالاعتماد على مبدأ من مبادئ نظرية المجموعات يسمى مبدأ

الاختيار) أن الحالة الرابعة كذلك غير ممكنة في حالة المجموعات غير المنتهية .

أما بالنسبة للحالة الثالثة فقد تصح في حالة المجموعات غير المنتهية ، غير أنه في كل مرة تصح فيها هذه الحالة تصح الحالة الأولى كذلك كما يبدو من النظرية الآتية :

نظرية التكافؤ : إذا كانت كل من مجموعتين مكافئة لمجموعة جزئية من الثانية فعندئذ تكون هاتان المجموعتان متكافئتين .

لبرهان هذه النظرية انظر التمرين المحلول (٣٠١) .

٩٠ - جمع عددين أساسيين :

إذا سئل طفل عن مجموع ثلاث كرات مع خمس كرات فإنه يوحّد بين المجموعتين في مجموعة واحدة ثم يعد عناصر المجموعة الجديدة . إن ما قام به الطفل لا يمكن اعتاده مجذافيره عندما تكون المجموعتان مجردتين ، فكل من المجموعتين $\{ ١ ، ٢ ، ٣ \}$ و $\{ ١ ، ٢ ، ٤ \}$ يحوي ثلاثة عناصر غير أن مجموعة الاجتماع $\{ ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ \}$ تحوي أربعة عناصر فقط ، فهذه الطريقة لا تصلح إذن لجمع ٣ و ٣ . غير أننا إذا حرصنا على أن تكون المجموعات المثلة منفصلة فعندئذ يمكن اعتاد ما قام به الطفل تماماً . وعلى هذا إذا أردنا أن نجمع عددين أساسيين مـ و مـ_١ نختار مجموعتين ممثلتين منفصلتين ج و ج_١ ثم نوجد اجتماع هاتين المجموعتين مع ج = ج_١ ∪ ج ، ويكون :

$$م + م_١ = |م|$$

ولكي يكون لهذا التعريف معنى علينا أن نتحقق من أن العدد الأساسي |م| لا يتأثر إذا استبدلنا بالمجموعتين ج و ج_١ مجموعتين

مكافئتين لهما على الترتيب ج' و ج' على أن تكون هاتان المجموعتان منفصلتين كذلك .

وبالحقيقة لما كان $ج \approx ج'$ و $ج \approx ج'$ فإنه يكون حسب الملاحظة (١) من الفقرة (٨٤) .

ج $\cup$ ج' $\approx$ ج' $\cup$ ج' وهو المطلوب .

يمكن أن نبرهن بسهولة (انظر التمارين المحلولة) :

$$(p) \quad m + m_1 = m_1 + m$$

$$(b) \quad (m + m_1) + m_2 = m_2 + (m_1 + m)$$

(c) إذا كان $m_1 \geq m_2$ ، $m_2 \geq m_3$ فعندئذ يكون :

$$m_1 + m_2 \geq m_2 + m_3$$

$$(d) \quad p = n + p \quad p = p + p$$

(حيث ن عدد أساسي محدود) .

$$(e) \quad r = n + r \quad r = p + r \quad r = r + r$$

(حيث ن عدد أساسي محدود) .

(و) إذا كان م عدداً غير محدود فعندئذ يكون : $m = p + m$

ملاحظة : يمكن تعريف عملية الجمع لأكثر من عددين أساسيين وفق ما يلي : إذا كانت $m_1, \dots, m_k$ أعداداً أساسية و ج' ، ... ، ج' مجموعات منفصلة ممثلة لها فإن :

$$m_1 + m_2 + \dots + m_k = ج' \cup ج' \cup \dots \cup ج'$$

ويبرهن أن :

$$(m_1 + m_2) + m_3 = m_3 + (m_1 + m_2)$$

٩١ - ضرب عددين أساسيين :

ليكن m و n عددين أساسيين و j و k مجموعتين (منفصلتين أو غير منفصلتين) ممثلتين لهذين العددين . نسمي العدد الأساسي للجداء الديكارتي للمجموعتين j و k حاصل ضرب m و n أي :

$$m \times n = |j \times k|$$

وإذا كانت j' و k' مجموعتين بحيث $j \approx j'$ و $k \approx k'$ فعندئذ يكون (كما يمكن للقارئ أن يبرهن ذلك بسهولة) :

$$j \times k \approx j' \times k'$$

وحاصل الضرب بالتالي مستقل عن المجموعتين الممثلتين للعددين m و n .

هذا ويمكن أن نذكر تعريف ضرب عددين أساسيين بالشكل التالي:

لنفرض أن العددين الأساسيين $m < 0$ ، $n < 0$ ممثلان بمجموعتين s و t (لا يشترط في هاتين المجموعتين أن تكونا منفصلتين) ولنكوّن المجموعة r من جميع الأزواج المرتبة (s ، t) حيث $s \in s$ و $t \in t$ فعندئذ يكون $m \cdot n = |r|$. أما إذا كان أحد العددين m أو n يساوي الصفر فإن $m \cdot n = 0$.

يبرهن بسهولة (انظر التمارين المحلولة) :

$$(p) \quad m \times n = n \times m$$

$$(b) \quad (m \times n) \times p = m \times (n \times p)$$

$$(c) \quad (m + n) \times p = m \times p + n \times p$$

$$(d) \quad \text{إذا كان } m \geq n \text{ و } p \geq 0 \text{ فعندئذ يكون :}$$

$$m \times p \geq n \times p$$

$$(هـ) \quad n \times p = p. \quad (n \text{ عدد أساسي محدود } \neq 0)$$

$$(و) \quad p = p \times p.$$

$$(ز) \quad n \times r = r. \quad (n \text{ عدد أساسي محدود } \neq 0)$$

$$(ح) \quad r = r \times r.$$

ملاحظة : يمكن تعريف عملية الضرب لأكثر من عددين أساسيين وفق ما يلي : إذا كانت $m_1, \dots, m_k$ أعداداً أساسية و $j_1, \dots, j_k$ مجموعات ممثلة لها على الترتيب فإن :

$$m_1 \times \dots \times m_k = m_1 | j_1 \times \dots \times j_k |$$

★ ★

تمارين محلولة

٢٨٩ - برهن أنه مهما كانت المجموعات S و E و V فإن :

$$١ - S \times E \approx E \times S$$

$$٢ - (S \times E) \times V \approx S \times E \times V$$

الحل :

١ - إذا استطعنا أن نجد تطبيقاً غامراً ومتبايناً معرفاً على $S \times E$ ويأخذ قيمه في $E \times S$ نحصل على المطلوب .

إن التطبيق :

$$f : (s, e) \mapsto (e, s) \quad s \in S \text{ و } e \in E$$

المعرف على $S \times E$ والذي يأخذ قيمه في $E \times S$ غامر ومتباين وهو المطلوب .

٢ - إن التطبيق :

$$f : (S \times E) \times V \mapsto S \times E \times V$$

$$(s, e, v) \mapsto (s, e, v)$$

$$(s \in S, e \in E, v \in V)$$

غامر ومتباين وهو المطلوب .

٢٩٠ - برهن : $[1, 0] \approx [0, 1] \approx [0, 1]$

الحل :

١ - إن $[1, 0] \approx [0, 1]$ لأن التطبيق :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{2} \text{ لما } s = 0 \\ \frac{1}{2+n} \text{ لما } s = \frac{1}{n} \text{ حيث } n \in \mathbb{P}^* \\ s \text{ لما } s \neq 0, \frac{1}{n} \text{ حيث } n \in \mathbb{P}^* \end{array} \right\} = (s) \text{ تا}$$

المعرف^٢ على [١٤٠] والذي يأخذ قيمه في [١٤٠] غامر ومتباين. واستناداً إلى هذا التابع يكون :

$$0 \leftarrow \frac{1}{2} \quad 6 \quad \frac{1}{3} \leftarrow 1 \quad 6 \quad \frac{1}{4} \leftarrow \frac{1}{2} \quad 6 \quad \frac{1}{5} \leftarrow \frac{1}{4} \quad \dots$$

$$s \leftarrow s \text{ عندما } s \neq 0, \frac{1}{n}$$

$$-2 \quad [١٤٠] \approx [١٤٠]$$

ان التطبيق :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{n} = s \text{ لما } \frac{1}{1+n} \\ \frac{1}{n} \neq s \text{ لما } s \end{array} \right\} = (s) \text{ تا}$$

المعرف على [١٤٠] ويأخذ قيمه في [١٤٠] غامر ومتباين .

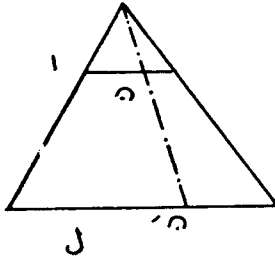
$$-3 \quad [١٤٠] \approx [١٤٠]$$

إن التطبيق تا (س) = ١ - س المعروف على [١٤٠] والذي يأخذ قيمه في [١٤٠] غامر ومتباين وهو المطلوب .

٢٩١ - برهن أن أي مجال محدود مغلق (ل) من المحور الحقيقي ، على أن ننظر اليه ك مجموعة نقط يكافىء المستمر .

الحل :

يكفى من أجل ذلك أن نرسم المجال المفروض ونرسم القطعة [١٠٠]



الشكل (٢٠٨)

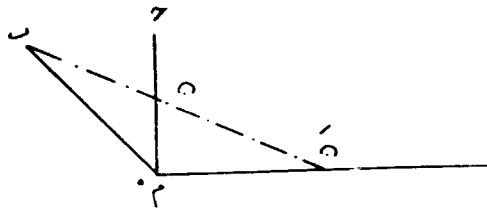
من المحور الحقيقي كما في الشكل (٢٠٨) ونقابل كل نقطة من المستمر بالنقطة التي تقع معها على استقامة واحدة مارة بالنقطة م (نقطة تقاطع المستقيمين اللذين يصلان طرفي المجال بطرفي المستمر) .

نستنتج مما ذكر ومن خاصة التعدي أن أي مجالين محدودين متكافئان .

٢٩٢ - برهن أن نصف المستقيم يكافىء [١٠٠] .

الحل :

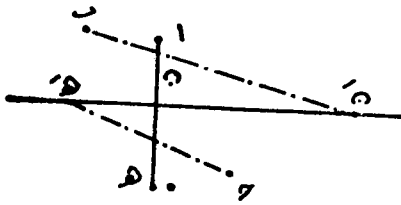
إن الشكل (٢٠٩) يوضح كيف يمكن الحصول على تقابل بين $m = [١٠٠]$



الشكل (٢٠٩)

ونصف المستقيم (يلاحظ أن $m > \parallel$ نصف المستقيم وأن ب لا تقع في الجهة التي يقع فيها نصف المستقيم بالنسبة للقطعة م $>$ وأنه باستثناء ذلك لا تخضع ب لأي شرط) .

٢٩٢ - برهن أن المستقيم يكافئ (١٠٠) .



الحل :

إن الشكل (٢١٠) يوضح

المطلوب .

الشكل (٢١٠)

٢٩٣ - برهن أن مجموعة الأعداد الأولية قابلة للعد .

الحل :

لنبرهن أولاً أن هذه المجموعة غير منتهية . لنفرض مؤقتاً أنها منتهية ولنفرض أن l أكبر عدد أولي ، عندئذ تكون مجموعة الأعداد الأولية (مرتبة حسب كبرها) هي :

$$(١) \quad \{ ٢, ٣, ٥, ٧, ١١, ١٣, ١٧, \dots, l \}$$

لنشكل العدد :

$$١ + (l \times \dots \times ٧ \times ٥ \times ٣ \times ٢) = s$$

فإما أن يكون هذا العدد أولياً (وهذا يناقض فرضنا أن l أكبر الأعداد الأولية) أو أن يكون غير أولي وعندئذ يقبل القسمة على عدد أولي واحد على الأقل مثل l . ولكن لا يمكن لـ l أن يكون من الأعداد الأولية $٢, ٣, ٥, ٧, \dots, l$ لأن s لا يقبل القسمة على أي منها (باقي القسمة يساوي الواحد) . وهذا يدلنا على أن l لا ينتمي للمجموعة (١) وهذا يناقض ما افترضناه كذلك من أن المجموعة (١) تحوي جميع الأعداد الأولية ، فالمجموعة غير منتهية .

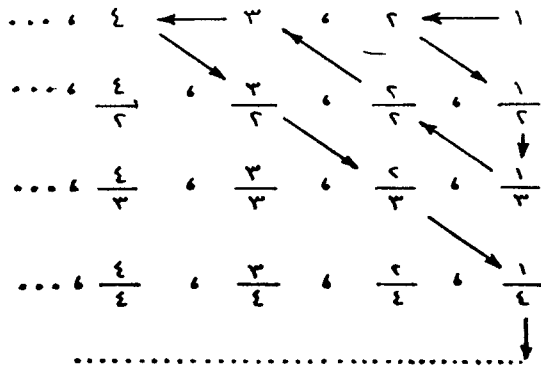
وبما أنه يمكن وضع الأعداد الأولية في متوالية (بترتيب الأعداد الأولية وفق كبرها) فإنها تشكل مجموعة قابلة للعد . أو بشكل آخر ، لما كانت مجموعة الأعداد الأولية هي مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد

الطبيعية القابلة للعد فانها ، حسب نظرية سابقة ، قابلة للعد (على الأكثر)
وحيث أنها ليست منتهية فهي قابلة للعد حتماً وهو المطلوب .

٢٩٤ - برهن أن مجموعة الأعداد العادية الموجبة قابلة للعد .

الحل :

لنشكل جدولاً على النحو التالي : نضع في السطر الأول جميع الأعداد
العادية التي مخرجها ١ (الأعداد الطبيعية) مرتبة حسب كبرها ، ثم نكتب
في سطر ثان جميع الأعداد العادية التي مخرجها ٢ مرتبة حسب كبرها -
كذلك وهكذا ... فنجد :



الشكل (٢١١)

لنرتب بعد ذلك الأعداد العادية (وفق الخط المرسوم) في متوالية
على أن نتجاوز كل عدد سبق أن مرّ مكافئاً له فنجد :

$$1, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}, \dots$$

ففي هذه المتوالية يمر كل عدد عادي موجب مرة واحدة فقط وهو
المطلوب .

٢٩٥ - هل المجموعة :

$$\{ (س، ع، ص) : (س^2 + ع^2 = ص^2) \} \cap (س، ع، ص \equiv ط^*)$$

المعروفة بمجموعة ثلاثيات فيثاغورث ، قابلة للعد ؟

الحل :

من الواضح أنه يلزم ويكفي لتكون الثلاثية المرتبة (س، ع، ص) ثلاثية فيثاغورث أن يوجد مثلث قائم الزاوية أطوال أضلاعه س وع و ص على الترتيب . ومن ثلاثيات فيثاغورث الشهيرة نعلم ، على سبيل المثال ، الثلاثيات (٣، ٤، ٥) (٦، ٨، ١٠) (٥، ١٢، ١٣) .

وإذا كانت (س، ع، ص) ثلاثية فيثاغورث فإن (س، ع، و ص)، حيث و عدد صحيح موجب ، ثلاثية فيثاغورث أيضاً . وبالعكس إذا كانت (س، ع، ص) ثلاثية فيثاغورث وكان و عاملاً مشتركاً بين س وع فإنه يجب أن يكون و عاملاً لـ ص . وإذا كتبنا $س = دس$ ، $ع = د ع$ ، $ص = د و$ ، فمعتدئ يكون :

$$(د، ع، و) = (د، ع، و) + (د، س، و)$$

ومنه نجد أن (س، ع، و) ثلاثية فيثاغورث أيضاً . نسمي كل ثلاثية فيثاغورث (م، ب، ح) ثلاثية فيثاغورث الأولية عندما لا يوجد عامل مشترك بين م و ب و ح . ومن الواضح عندئذ أن كل ثلاثية فيثاغورث تكتب بالشكل (م، ب، و) ، (د، ب، و) ، (د، ب، و) حيث (م، ب، و) أولية و و عدد صحيح موجب .

سنبرهن أولاً أن ثلاثيات فيثاغورث الأولية قابلة للعد .

لتكن (س، ع، ص) ثلاثية أولية . من الواضح أنه لا يمكن أن يوجد عامل مشترك بين أي اثنين من الأعداد الطبيعية س وع و ص وإلا لكان هذا العامل ، باعتبار $س^2 + ع^2 = ص^2$ ، عاملاً مشتركاً

بين الأعداد الثلاثة . من هذا ينتج أنه لا يمكن لـ س و ع أن يكونا زوجيين معاً .

كذلك لا يمكن لـ س و ع أن يكونا فرديين معاً لأنه لو كانا فرديين معاً لاستطعنا أن نكتب :

$$س = ٢ + ٢١ \quad ع = ٢ + ٢١ \quad (٢، ٢، ٢)$$

ويكون :

$$ص^٢ = (١ + ٢١)^٢ + (١ + ٢١)^٢ = ٢(١ + ٢١ + ٢١ + ٢١ + ٢١ + ٢١) = ٢(١ + ٢١ + ٢١ + ٢١ + ٢١ + ٢١)$$

ومنه يتبين أن ص^٢ قابل للقسمة على ٢ وبالتالي يكون ص زوجياً ، أي أن ص^٢ قابل للقسمة على ٤ . وبالتالي يكون المقدار :

$$٢٢ + ٢٢ + ٢١ + ٢١ + ٢١ + ٢١$$
 زوجياً وهذا غير ممكن .

لنبرهن بعد ذلك أنه إذا كانت (س ، ع ، ص) ثلاثية أولية ، وإذا كان ع زوجياً فإن :

$$س = ٢ - ٢١ \quad ع = ٢ - ٢١ \quad ص = ٢ - ٢١$$

حيث ك و ل عددان صحيحان موجبان يحققان الشروط التالية :

$$(١) \quad ك \text{ و } ل \text{ أوليان فيما بينهما .} \quad (٢) \quad ك < ل$$

$$(٣) \quad \text{أحد العددين ك و ل فردي والآخر زوجي .}$$

وبالعكس إذا كان ك و ل عددين صحيحين موجبيين يحققان للشروط الثلاثة فإن (س ، ع ، ص) ثلاثية أولية .

لنبرهان القسم الأول نلاحظ أن كلا من س و ص فردي (لأن ع زوجي) وبالتالي يكون كل من ص + س و ص - س زوجياً ، أي انه يوجد عددان ب و ج بحيث يكون :

$$ص + ب = ٢ \quad ص - ب = ٢$$

إن العددين ب و ج أوليان فيما بينهما لأنه إذا وجد عامل مشترك بينهما

فعمدئذ يكون لـ ص و س عامل مشترك ، الأمر الذي يتنافى مع كون
س و ص أوليين . وحيث أن $ع = ص - س$ فإن :

$$ع = ص - س$$

ولما كان ع زوجياً فإنه يوجد عدد ز بحيث يكون $ع = ٢ ز$ ومنه :

$$٢ ز = ص - س$$

وبما أن ب و ح أوليان فإنه يلزم أن يكون كل منهما مربع كامل ،
أي أنه يوجد عددان صحيحان موجبان ك و ل أوليان فيما بينهما بحيث
يكون :

$$ب = ك^٢ \quad ح = ل^٢$$

وبالتالي نجد :

$$س = ك^٢ - ل^٢ \quad ٦ \quad ع = ٢ ك ل \quad ٦ \quad ص = ك^٢ + ل^٢ \quad (*)$$

من الواضح أن $ك < ل$ لأن $س < ٠$. كما أن أحد العددين ك و ل
فردى والآخر زوجى ، لأنه لو كانا زوجيين لما كانا أوليين كما أنه لو كانا
فرديين لكان كل من س و ص زوجياً وهذا يتنافى مع الفرض .

لبرهان القسم الثاني نفرض ك و ل عددين صحيحين موجبين يحققان
الشروط الثلاثة المذكورة . فيما أن :

$$٢ (ك ل) = (ك^٢ - ل^٢) + (ك^٢ + ل^٢)$$

فإن $س + ع = ص$ أي أن (س ، ع ، ص) ثلاثية فيثاغورث .
وهذه الثلاثية أولية لأن س و ص فرديان (اعتماداً على الشرط الثالث)
كما أنه لا يوجد عامل مشترك بينهما ، لأن ذلك يستدعي وجود عامل
مشترك بين ك و ل الأمر الذي يتنافى مع الشرط الأول .

وهكذا نجد أن هنالك تقابلاً بين مجموعة ثلاثيات فيثاغورث الأولية
التي يكون فيها ع زوجياً ومجموعة الأزواج (ك ، ل) ضمن الشروط
الثلاثة المذكورة . لنلاحظ بعد ذلك أن مجموعة الأزواج (ك ، ل) ،

ضمن الشروط الثلاثة السابقة ، قابلة للعد . ويكفي من أجل ذلك أن نضع الأزواج المرتبة التي مركبتها الأولى ٢ ، ثم تلك التي مركبتها الثانية ٣ ، وهكذا ... ونرتب الأزواج في كل مرة وفق كبر المرتبة الثانية على أن نتجاوز تلك الأزواج التي لا تحقق مركبتها الشروط الثلاثة فنجد :

$$6 (1,2) \quad 6 (2,3) \quad 6 (1,4) \quad 6 (3,4) \quad 6 (2,5) \quad 6 (4,5) \\ \dots 6 (1,6) \quad 6 (5,6) \quad 6 (2,7) \quad \dots$$

نقابل كل زوج مرتب (ك، ل) من هذه المجموعة بثلاثيتين أوليتين، في الأولى نحصل عليها بالتعويض في (*) والثانية تنتج من الأولى بتبديل موضعي س و ع .

وبما أن مجموعة الأزواج (ك، ل) قابلة للعد فإن (س، ع، ص) المقابلة قابلة للعد كذلك ، ويتم ذلك وفق الجدول التالي :

ك	ل	س	ع	ص	ك	ل	س	ع	ص
٢	١	٣	٤	٥	٥	٤	٣	١	٢
٣	٢	٥	١٢	١٣	٦	١	٣٥	١٢	٣٧
٤	١	١٥	٨	١٧	٦	٥	١١	٦٠	٦١
٤	٣	٧	٢٤	٢٥	٧	٢	٤٥	٢٨	٥٣
٥	٢	٢١	٢٠	٢٩	٠	٠	٠	٠	٠

وهكذا تكون مجموعة ثلاثيات فيثاغورث الأولية موضوعة على شكل متوالية هي :

$$\begin{aligned} ١, ٢, ٣ &= (٣, ٤, ٥) \quad ٦ \\ ٢, ٣, ٥ &= (١٢, ١٣, ١٥) \quad ٦ \\ ١, ٣, ٥ &= (٣٥, ٣٧, ٦١) \quad ٦ \\ ٢, ٥, ٦ &= (١٢, ١٣, ١٥) \quad ٦ \\ ٣, ٥, ٦ &= (١١, ٦٠, ٦١) \quad ٦ \\ ٣, ٧, ٢٤ &= (٢٨, ٢٥, ٥٣) \quad ٦ \\ ٢, ٢١, ٢٩ &= (٢٠, ٢١, ٢٩) \quad ٠ \dots \end{aligned}$$

لنتنقل بعد ذلك إلى ثلاثيات فيثاغورث بشكلها العام . لقد أشرنا فيما سبق أننا نستطيع الحصول على جميع ثلاثيات فيثاغورث انطلاقاً من الثلاثيات الأولية . فإذا وضعنا في السطر الأول من جدول، الثلاثية الأولية $ث_١$ ، والثلاثيات التي تنتج عنها بضرب كل مركبة من مركباتها بالأعداد $(١، ٢، ٣، ...)$ على التوالي ثم وضعنا في السطر الثاني الثلاثية الأولية $ث_٢$ ، والثلاثيات التي تنتج عنها بضرب كل مركبة من مركباتها بالأعداد $(١، ٢، ٣، ...)$ على التوالي وهكذا ... وإذا رمزنا للثلاثية التي تنتج عن الثلاثية $ث_١$ بضربها بـ $هـ$ بالرمز $هـ ث_١$ فإننا نحصل على الجدول التالي :

$ث_١$	$ث_٢$	$ث_٣$	$ث_٤$	...
$ث_٢$	$ث_٣$	$ث_٤$	$ث_٥$	...
$ث_٣$	$ث_٤$	$ث_٥$	$ث_٦$	...
.	.	.	.	.

وكما في التمرين رقم (٢٩٤) نلاحظ أن هذه المجموعة قابلة للعد ، وأنه يمكن وضعها في متوالية من الشكل :

$ث_١، ث_٢، ث_٣، ث_٤، ث_٥، ث_٦، ث_٧، ث_٨، ث_٩، ث_{١٠}، ...$
وهو المطلوب .

٢٩٦ - نعرف العدد الجبري الحقيقي بأنه جذر حقيقي لمعادلة جبرية من الشكل :

$$س^٣ + س^{٢-١} + س^{١-٢} + س^{٢-٣} + س^{٣-٤} + س^{٤-٥} + ... + س^{٣-١} + س^{٤-٢} + س^{٥-٣} + ... = ٠$$

حيث $س$ ، $س^{٢-١}$ ، $س^{١-٢}$ ، $س^{٢-٣}$ ، $س^{٣-٤}$ ، $س^{٤-٥}$ ، ... أعداد صحيحة
وحيث ٣ عدد كفي صحيح موجب و $س \neq ٠$

برهن أن مجموعة جميع الأعداد الجبرية الحقيقية قابلة للعد .

الحل :

لنفرض $0 < \epsilon$. فإن لم يكن الأمر كذلك غيرنا إشارة طرفي

المعادلة () ولنكون العدد الصحيح الموجب :

$$(*) \quad |a| + |b| + \dots + |a_{n-1}| + |a_n| = \epsilon$$

نسمي هذا العدد الذي لا يقل عن اثنين رتبة المعادلة الجبرية .

من الواضح أنه يقابل كل معادلة جبرية رتبة ، وانه يقابل كل رتبة عدد منته من المعادلات الجبرية لأن $\epsilon \geq 1$ ، كما أن كلاً من $|a| \geq 1$ (ك = 0 ، 1 ، 2 ، ... ، ϵ) وبهذا نتمكن من كتابة

الاعداد الجبرية على شكل متوالية وفق ما يلي :

(١) نكتب الاعداد الجبرية التي هي جذور المعادلات ذات الرتبة ٢ .
ولكن من أجل $l=2$ لا نجد سوى $1 = \epsilon$ ، $1 = \epsilon$ ، أي
اننا لا نجد سوى المعادلة $x^2 = 0$. وهذه لا تعطي سوى الجذر (صفر) .

(٢) نكتب الأعداد الجبرية التي هي جذور المعادلات التي رتبته ٣ .
بالتعويض في (*) نجد الاحتمالات التالية :

$$\begin{aligned} 1 = \epsilon , 1 = \epsilon , 0 = \epsilon & \quad 1 = \epsilon , 0 = \epsilon , 1 = \epsilon \\ 0 = \epsilon , 1 = \epsilon , 1 = \epsilon & \quad 0 = \epsilon , 1 = \epsilon , 0 = \epsilon \end{aligned}$$

والمعادلات الجبرية المقابلة هي :

$$x^3 = 0 \quad x^3 = 1 + x \quad x^3 = 1 - x$$

وهذه تعطي الجذور الجديدة التالية (مرتبة حسب كبرها) : ١ ، ١ -

(٤) عندما يكون $l=4$ نحصل على المعادلات الجبرية :

$$x^4 = 2 \pm x \quad x^4 = 1 \pm x \quad x^4 = 0 \pm x \quad x^4 = 1 \mp x$$

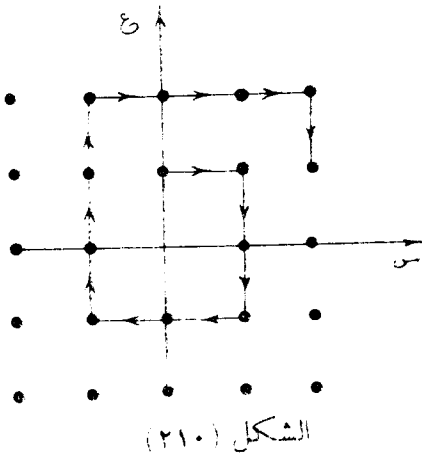
$$s^2 \neq s = 0 \quad 6 \quad 2 \quad s^2 = 0 \quad 6 \quad s^2 = 0$$

وهذه تعطي الجذور الجديدة التالية (مرتبة حسب كبرها) :

$$-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$$

فاذا تابعنا العمل على هذا الشكل نحصل على جميع الأعداد الجبرية الحقيقية مرتبة وفق متتالية . فمجموعة جميع الأعداد الجبرية الحقيقية قابلة للعد .

٢٩٧ - ان مجموعة نقاط المستوي التي احداثيا كل منها عددان صحيحان قابلة للعد .



الحل :

لنرتب النقاط وفق الشكل
فنحصل على :

$$\begin{aligned} & (0,0) \quad (1,0) \quad (1,1) \\ & (0,1) \quad (0,-1) \quad (-1,-1) \\ & \dots \quad (-1,0) \end{aligned}$$

الأمر الذي يؤكد المطلوب .

٢٩٨ - برهن ان اجتماع عناصر جماعة قابلة للعد (على الأكثر) من المجموعات القابلة للعد (على الأكثر) والمنفصلة مثنى مثنى هي قابلة للعد (على الأكثر) .

الحل : لتكن :

$$\{s_1, s_2, s_3, \dots\}$$

جماعة قابلة للعد (على الأكثر) من مجموعات قابلة للعد على الأكثر .

يمكن كتابة هذه المجموعات بالشكل :

$$\{ \dots , s_{10} , \dots , s_{31} , \dots , s_{21} , \dots , s_{11} \} = s_1$$

$$\{ \dots , s_{20} , \dots , s_{32} , \dots , s_{22} , \dots , s_{12} \} = s_2$$

$$\{ \dots , s_{30} , \dots , s_{33} , \dots , s_{23} , \dots , s_{13} \} = s_3$$

$$\dots$$

$$\{ \dots , s_{30} , \dots , s_{33} , \dots , s_{23} , \dots , s_{13} \} = s_d$$

$$\dots$$

ويمكن كتابة اجتماع هذه المجموعات على شكل مجموعة قابلة للعد
وفق ما يلي :

$$\{ s_{11} , s_{21} , s_{31} , \dots , s_{12} , s_{22} , s_{32} , \dots , s_{13} , s_{23} , s_{33} , \dots , s_{14} , \dots \}$$

(وقد رتبنا هذه العناصر مبتدئين أولاً بالعنصر الموجود في الزاوية
العلوية اليمنى وهو s_{11} ثم كتبنا بعد ذلك العنصرين s_{21} ، s_{12} ، ثم
العناصر الواقعة على المستقيمتين الموازيين للمستقيم الذي يقع عليه العنصران
 s_{11} ، s_{21} ، مبتدئين بأقربها منه وهكذا ... وعلى كل مستقيم نبدأ
من الأعلى يساراً إلى الأسفل يميناً) .

٢٩٩ - برهن أن مجموعة الأعداد الحقيقية غير الجبرية (المتسامية
Transcendent) ليست قابلة للعد .

الحل :

لو كانت هذه المجموعة قابلة للعد فعندئذ يكون اجتماع مجموعة الأعداد
الجبرية وغير الجبرية قابلاً للعد (انظر التمرين السابق) وهذا يناقض ما
نعلمه في أن مجموعة الأعداد الحقيقية غير قابلة للعد وهو المطلوب .

٣٠٠ - برهن أنه إذا كان $h = [10]$ فان قدرة $h \times h$ هي قدرة المستمر (بعبارة أخرى : برهن أن قدرة نقاط المربع $0 < s \leq 1$ ، $0 < e \leq 1$ هي قدرة المستمر) .

الحل :

من المعلوم أن كل عدد ينتمي للمجال $[10]$ يمكن كتابته على شكل كسر عشري غير منته (بشكل وحيد) . فإذا كان s و e ، على سبيل المثال ، معطين بالتمثيل العشري :

$$s = 0.30600789000 \\ e = 0.001230046000$$

فاننا نكوّن في كل عدد مجموعات من الارقام بحيث تنتهي كل مجموعة عند أول رقم مغاير للصفر وعندئذ نقابل هذا الزوج من الاعداد بعدد s على النحو التالي : نضع المجموعة الرقمية الاولى من s ثم المجموعة الرقمية الاولى من e فالمجموعة الرقمية الثانية من s فالمجموعة الرقمية الثانية من e وهكذا ... فيكون في مثالنا :

$$s = 0.30010620073800496000$$

فكل زوج (s, e) يقابل عدداً وحيداً s . وبالعكس : بما أن كل مجموعة رقمية من s أو e هي مجموعة رقمية في s فان كل s تقابل تماماً زوجاً معيناً (s, e) هو بالطبع ذلك الزوج الذي تكونت منه ، فالعدد :

$$s = 0.11101010100000$$

يقابل :

$$s = 0.11101000$$

$$e = 0.10101000$$

وبما أن هذا التقابل واحد لواحد فان $h \times h \approx h$ وهو المطلوب .

٣٠١ - اذا كافات كل مجموعة من مجموعتين مجموعة جزئية من الثانية فان هاتين المجموعتين متكافئتان (نظرية كانتور - بيرنشتاين) .

الحل :

لتكن S_1 و S_2 مجموعتين وليكن :

$$S_1 \approx S_2 \Rightarrow S_1 = S_2 \quad S_2 \approx S_1 \Rightarrow S_2 = S_1$$

والمطلوب أن نبرهن أن $S_1 \approx S_2$.

بما أن $S_1 \approx S_2$ فان S_1 تكافئ مجموعة S_2 جزئية من S_1 ومنه نجد : $S_2 \approx S_1$ وبالتالي يوجد تطبيق f : $S_2 \rightarrow S_1$ غامر ومتباين . ونجد ، وفق هذا التطبيق ، أن :

$$\begin{aligned} S_1 &\leftarrow S_2 & (S_2 = S_1) \\ S_2 &\leftarrow S_1 & (S_1 = S_2) \\ S_3 &\leftarrow S_2 & (S_2 = S_3) \\ &\dots & \dots \end{aligned}$$

ولما كان f غامراً ومتبايناً فان :

$$\begin{aligned} S_1 - S_2 &\leftarrow S_2 - S_1 \\ S_2 - S_1 &\leftarrow S_1 - S_2 \\ S_3 - S_2 &\leftarrow S_2 - S_3 \\ &\dots \end{aligned}$$

والمجموعتان :

$$\begin{aligned} & (S_1 - S_2) \cup (S_2 - S_1) \cup (S_3 - S_2) \cup \dots \\ (*) & (S_2 - S_1) \cup (S_1 - S_2) \cup (S_2 - S_3) \cup \dots \end{aligned}$$

والثان تتكون كل واحدة منها من اجتماع مجموعات منفصلة مثني
مثني ، متكافئتان . لنضع الآن :

$$ص = ص \cap س_1 \cap س_2 \cap س_3 \cap \dots$$

فعمدئذ يمكننا أن نبرهن بسهولة أن :

$$س = ص \cup (س - س_1) \cup (س_1 - س_2) \cup (س_2 - س_3) \cup \dots$$

$$س_1 = ص \cup (س_1 - س_2) \cup (س_2 - س_3) \cup \dots$$

ومنه نجد :

$$س = [ص \cup (س_1 - س_2) \cup (س_2 - س_3) \cup \dots] \cup [ص \cup (س_1 - س_2) \cup (س_2 - س_3) \cup \dots]$$

$$س_1 = [ص \cup (س_1 - س_2) \cup (س_2 - س_3) \cup \dots] \cup [ص \cup (س_1 - س_2) \cup (س_2 - س_3) \cup \dots]$$

ان ما بين القوسين الكبيرتين الاوليتين في الطرف الايمن في كل من
المساواتين الاخيرتين العبارة ذاتها ، أما ما بين القوسين الباقيتين فنجد
بسبب (*) مجموعتين متكافئتين وبالتالي $س \approx س_1$ وبما أن $س_1 \approx ع$
فإن $س \approx ع$ وهو المطلوب .

٣٠٢ - برهن انه إذا كانت م و م' وم'' ثلاثة أعداد أساسية وإذا
كان $م > م'$ و $م' > م''$ فإن $م > م''$.

الحل :

لتكن $س$ و $ع$ و $ص$ المجموعات الممثلة للأعداد الأساسية
م و م' و م'' على الترتيب ، فاستناداً إلى الفرض يوجد مجموعتان جزئيتان
 $ع$ و $ص$ بحيث :

$\varepsilon \approx \varepsilon$, $\varepsilon \approx \varepsilon$, $\varepsilon \approx \varepsilon$, $\varepsilon \approx \varepsilon$

واستناداً إلى التكافؤ الأخير يوجد تقابل بين المجموعتين
 E و S ، وبما أن E مجموعة جزئية من E فإنه يوجد مجموعة S_1
 جزئية من S بحيث $E \approx S_1$ وبالتالي $S \approx S_1$. بقي أن
 نبرهن أنه لا يمكن لـ S أن تكافئ أية مجموعة جزئية من S .
 لنفرض مؤقتاً أنه يوجد مجموعة جزئية من S ، ولتكن S_1 بحيث
 $S \approx S_1$ ، $S \supseteq S_1$. عندئذ بما أن $S \approx E$ ، فإنه يوجد مجموعة
 E_1 جزئية من E ، بحيث $S_1 \approx E_1$ ، وبالتالي $S \approx E_1$. وهذا
 يتناقض مع كون $M > M'$ وهو المطلوب .

٣٠٣ - إذا كان m عدداً أساسياً غير محدود و n عدداً أساسياً محدوداً فإن $m < n$.

الحل :

لنفرض أن S مجموعة ممثلة لـ M وأن E مجموعة ممثلة لـ N فعندئذ يوجد في S مجموعة جزئية مكافئة للمجموعة E (S مجموعة غير منتهية و E مجموعة منتهية) غير أن العكس غير ممكن أي أنه لا يمكن أن نجد في E المجموعة المنتهية ، مجموعة جزئية مكافئة للمجموعة غير المنتهية S .

٣٠٤ - أثبت ان $p > r > q$.

الحل :

إذا أخذنا المستمر $[1, \infty)$ ممثلاً لـ R . فنعتقد نعلم أن المجموعة $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ الجزئية من المستمر مجموعة قابلة للعد ولكنه لا يمكن المستمر أن يكافئ مجموعة جزئية من مجموعة قابلة للعد إلا لكافاً

المستمر مجموعة قابلة للعد (حسب التمرين ٣٠١) وهذا غير ممكن ومنه
ينتج أن $p > r$.

كذلك، إذا أخذنا مجموعة التطبيقات الحقيقية $\mathcal{T}$ المعرفة على المجال $[1, 2]$ بمثل $\mathcal{L}$ فإنه يوجد مجموعة جزئية من مجموعة التطبيقات هذه تكافئ المستمر. هذه المجموعة هي التطبيقات الثابتة :

$$[16.0] \ni \mathcal{C} = \mathcal{M} \quad \mathcal{C} > \cdot = (\mathcal{M})$$

فكل عنصر من المستمر يقابل تطبيقاً وبالعكس كل تطبيق من المجموعة الجزئية التي ذكرناها يقابل عنصراً من المستمر . وبالوقت نفسه لا يمكن لمجموعة التطبيقات أن تكافئ مجموعة جزئية من المستمر وإلا (حسب التمرين ٣٠١) لكان المستمر مكافئاً للمجموعة $\mathcal{A}$ وهذا غير ممكن وهو المطلوب .

٣٠٥ - إذا كانت b, c, d ثلاثة أعداد أساسية فائت أن :

$$c + \gamma = \gamma + c$$

$$(s + r) + u = s + (r + u)$$

الحل :

إذا كانت s, e, v ثلاث مجموعات منفصلة مثني مثني ممثلة للأعداد b, c, d على الترتيب فإن :

س ≈ ع ≈ ع ≈ س

(سہ ۛ ع) ۛ صہ ۛ سہ ۛ (ع ۛ صہ)

الأمر الذي ينتج عنه المطلوب .

٣٠٦ - برهن أنه إذا كانت $M \geq N$ ، $M \geq N$ ، $M \geq N$ حيث M ، M ، M ، N ، N ، N أعداد أساسية فإن :

$$M + M \geq N + N$$

الحل :

لتكن S_1 ، S_2 ، S_3 ، E_1 ، E_2 أربع مجموعات منفصلة مثنى مثنى ، ممثلة للأعداد M ، M ، M ، N ، N ، N على الترتيب . عندئذ يوجد حسب الفرض مجموعة E_1 جزئية من E_2 ومجموعة E_2 جزئية من E_1 بحيث $S_1 \approx E_1$ و $S_2 \approx E_2$. وبما أن المجموعات المذكورة منفصلة فإن $S_1 \cup S_2 \approx E_1 \cup E_2$ ولما كانت $E_1 \cup E_2$ جزئية من $E_1 \cup E_2$ فإن $M + M \geq N + N$ وهو المطلوب .

٣٠٧ - برهن أن :

$$(1) \quad P = N + P$$

$$(2) \quad P = P + P$$

حيث N عدد أساسي محدود .

الحل :

(١) لنفرض $\{1, 2, \dots, N\}$ المجموعة الممثلة لـ N ولنفرض $\{N+1, N+2, \dots, P\}$ المجموعة الممثلة لـ P . من الواضح أن اجتماع هاتين المجموعتين هو مجموعة الأعداد الطبيعية التي قدرتها P .

(٢) لبرهان القاعدة الثانية يكفي أن نمثل الحد الأول من الطرف الأيمن بمجموعة الأعداد الطبيعية الفردية والحد الثاني بمجموعة الأعداد الزوجية فعندئذ يكون اجتماع هاتين المجموعتين هو مجموعة الأعداد الطبيعية التي قدرتها P .

٣٠٨ - برهن أن :

$$r = r + r$$

$$r = n + r \quad (\text{حيث } n \text{ عدد أساسي محدود})$$

$$r = p + r$$

الحل :

نبدأ ببرهان المساواة الأولى : لنعتبر المجموعة [١٤٠] تمثل الحد الأول في الطرف الأيمن والمجموعة [٢٤١] تمثل الحد الثاني . ان اجتماع هاتين المجموعتين هو المجموعة [٢٤٠] التي لها قدرة المستمر وهو المطلوب .

ولبرهان المساواة الثانية نلاحظ أن $r \geq n + r$ لأن المجموعة الممثلة للطرف الأيمن تكافئ مجموعة جزئية من المجموعة الممثلة للطرف الأيسر . ثم إن : $n + r \geq r + r = r$ اذن :

$$r \geq n + r \geq r \quad \text{ومنه} \quad n + r = r$$

وبالطريقة نفسها يمكن برهان المساواة الأخيرة .

٣٠٩ - برهن أنه إذا كانت b, c, d ثلاثة أعداد أساسية فان :

$$b \times c = c \times b$$

$$(d \times c) \times b = d \times (c \times b)$$

$$d \times c + d \times b = d \times (c + b)$$

الحل :

إذا كانت s, e, v ثلاث مجموعات منفصلة متنى متنى ممثلة لـ b, c, d على الترتيب فان :

$$s \times e \approx e \times s$$

$$(س \times ع) \times ص \approx س \times (ع \times ص)$$

$$(س \cup ع) \times ص \approx (س \times ص) \cup (ع \times ص)$$

ولقد سبق برهان التكافؤين الأول والثاني في التمرين ٢٨٩ ، ويبرهن على التكافؤ الثالث بالطريقة نفسها . ومن هذه التكافؤات ينتج المطلوب مباشرة ، إذا تذكرنا أن العدد الأساسي لـ $س \times ع$ هو $ت . ح$ وأن العدد الأساسي لـ $ع \times ص$ هو $ح . د$ وأن العدد الأساسي لـ $س \times ع \times ص$ هو $ت . ح . د$.

٣١٠ - برهن أنه إذا كانت $م$ و $م$ و $ن$ و $ن$ أعداداً أساسية وكان :

$$م \geq ن \quad 6 \quad م \geq ن$$

فان :

$$م \cdot م \geq ن \cdot ن$$

الحل :

لتكن $س$ ، $س$ ، $ع$ ، $ع$ مجموعات ممثلة لـ $م$ ، $م$ ، $ن$ ، $ن$ على الترتيب عندئذ يوجد مجموعة $ع$ جزئية من $ع$ ومجموعة $ع$ جزئية من $ع$ بحيث يكون :

$$س \approx ع \quad 6 \quad س \approx ع$$

وبالتالي يكون :

$$س \times س \approx ع \times ع \geq ع \times ع$$

$$|س \times س| \geq |ع \times ع|$$

وبالعودة إلى تعريف ضرب الأعداد الأساسية نجد المطلوب .

٣١١ - برهن أن :

$$(١) \quad .p = .p \cdot .p$$

$$(٢) \quad .p = .p \cdot n \quad (\vee \text{ العدد المحدود } n)$$

الحل :

(١) نفرض أن $.p$ ممثل بالمجموعة $\{ ١, ٢, ٣, \dots \}$ فعندئذ يتمثل

الجداء $.p \cdot .p$ بمجموعة الأزواج المرتبة (b, a) أي بالمجموعة :

$$\dots, (٢, ١), (١, ١), \dots$$

$$\dots, (٢, ٢), (١, ٢), \dots$$

$$\dots, (٢, ٣), (١, ٣), \dots$$

$$\dots$$

وهذه المجموعة قابلة للعد كما يبرهن بسهولة .

(٢) نلاحظ استناداً إلى التمرين السابق أن :

$$.p \geq n \geq .p \cdot .p = .p$$

ومنه ينتج المطلوب .

٣١٢ - برهن أن :

$$(١) \quad .r = .r \cdot .p$$

$$(٢) \quad .r = .r \cdot n \quad (\vee \text{ العدد المحدود } n)$$

$$(٣) \quad .r = .r \cdot .r$$

الحل :

لنفرض أن $\{ ١, ٢, ٣, \dots \}$ مجموعة ممثلة لـ $.p$ وأن $[١, ٠]$

ممثلة لـ $.r$ فعندئذ تكون مجموعة الجداء لهاتين المجموعتين هي مجموعة

الازواج (ن،س) حيث ن. عدد طبيعي موجب كفي و س عنصر كفي من [١٤٠] . فاذا قابلنا كل زوج (ن،س) بالعدد ن + س فعندئذ نكون قد قابلنا مجموعة الجداء الديكارتي (ن،س) بنصف المستقيم (س < ١) . ونصف المستقيم هذا ذو قدرة تساوي قدرة المستمر وهو المطلوب .

(٢) إثبات :

$$r \geq n \cdot r \geq m \cdot r = r.$$

(٣) نفرض أن المستمر ممثل بالمجال [١٤٠] عندئذ قتمثل ر. ر. بالمربع $0 < s \leq 1$ $0 < e \leq 1$ الذي له قدرة المستمر كما في تمرين سابق وهو المطلوب .



تمارين غير محلولة

- ٣١٣ - ابحث في التقابل بين المجموعتين :
- $$\text{مج} = \{ ١, ٢, ٣, \dots \} \quad \text{ع} = \{ ١, ١٠, ١٠٠, \dots \}$$
- واستنتج من ذلك تكافؤ المجموعتين .
- ٣١٤ - برهن أن مجموعة جميع الأعداد العادية (الموجبة والسالبة والصفر) قابلة للعد .
- ٣١٥ - ابحث في تكافؤ مجموعتي نقط ضلعين في مثلث .
- ٣١٦ - برهن أن مجموعة جميع الأعداد الجبرية (الحقيقية والعقدية) قابلة للعد .
- ٣١٧ - بيّن أن مجموعة جميع الأزواج المرتبة (ب ، ح) حيث ب و ح عددان صحيحان ، قابلة للعد .
- ٣١٨ - عيّن قدرة المجموعة ك :
- $$\text{ك} = \{ \text{س} : \text{جب } \frac{\pi}{٢} \text{ س} = ١ \wedge \text{س} \in \text{ع} \}$$
- ٣١٩ - هل مجموعة نقاط المستقيم $\text{ع} = \frac{٣}{٤} \text{س} + ١$ والتي احداثيا كل منها عددان صحيحان قابلة للعد .

٣٢٠ - هل مجموعة نقاط القطع $E = \frac{1}{S}$ والتي احداثيا كل منها عددان صحيحان قابلة للعد .

٣٢١ - برهن انه إذا كان كل من S و E مجموعة قابلة للعد فان المجموعة $S \times E$ قابلة للعد كذلك .

٣٢٢ - يمكن مقابلة الأعداد الصحيحة بالأعداد الطبيعية الموجبة كما يلي:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ \dots & 2- & 2 & 1- & 1 & 0 \end{array}$$

أوجد التطبيق τ : τ^* $\leftarrow$ τ الذي يعطي ذلك التقابل بين τ^* و τ .

٣٢٣ = برهن أن قدرة نقاط المكعب :

$$0 \leq S \leq 6 \quad 0 \leq E \leq 6 \quad 0 \leq V \leq 1$$

هي قدرة المستمر .

٣٢٤ - إذا كان m عدداً أساسياً غير محدود فان $m \leq p$.

٣٢٥ - برهن أنه إذا كان $m \geq n$ (m و n عددان أساسيان) فإن:

$$\begin{array}{l} m \cdot n \geq n \quad \vee \quad \text{العدد الأساسي } n \\ m + n \geq n + n \end{array}$$

٣٢٦ - برهن أنه مهما كان العدد غير المحدود m فإن :

$$m = m + p$$

٣٢٧ - برهن أنه إذا كانت B مجموعة الأعداد الحقيقية غير الجبرية

$$\text{فان } |B| = R.$$

أجوبة وإرشادات

٣١٣ - هنالك تطبيق غامر ومتباين : مج ← ج ١

س ← ١٠ س-١

٣١٤ - سبق لنا في تمرين محلول أن وجدنا أن مجموعة جميع الأعداد العادية الموجبة قابلة للعد ، فإذا فرضنا $\{١، ٢، ٣، \dots\}$ المتوالية التي وضعت وفقها الأعداد العادية الموجبة فعندئذ تكون مجموعة جميع الأعداد العادية هي :

$$\{ \dots، ١-، ٢-، ٣-، \dots \}$$

الأمر الذي يؤكد قابلية العد للمجموعة المطلوبة .

٣١٥ - المجموعتان متكافئتان لأن هناك تقابلا بين الضلعين ويكفي من أجل ذلك أن نقابل كل نقطة من أحد الضلعين بالنقطة التي تقع معها على مستقيم مواز للضلع الثالث .

٣١٨ - ك = $\{١-، ٣-، ٥-، ٧-، ٩-، ١١-، \dots\}$ ويكون :
 $|ك| = |م|$

٣١٩ - نعم : النقط المطلوبة هي :

$$\{ \dots، (١٠٠) 6 (٤٤٤) 6 (-٤، -٢) 6 (٧٠٨) ، \dots \}$$

٣٢٠ - لا ، بل هي منتهية حيث تتكون من الزوجين (١ ، ١) ،
(- ١ ، - ١) فقط .

$$\left. \begin{array}{l} \text{عندما يكون } s \text{ فردياً} \\ \text{عندما يكون } s \text{ زوجياً} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{1}{2} + \frac{s}{2} - \\ \frac{s}{2} \end{array} = t(s) \quad - ٣٢٣$$

٣٢٥ - الجواب واضح لأن في كل مجموعة غير منتهية مجموعة جزئية
قابلة للعد .

★