الفصل الأول

العمليات الجبرية (قوانين التشكيل) (*)

مقدمـــة :

درسنا في علم الحساب العمليات العددية الأساسية ، وأبرزها عمليتا الجمع والضرب . في كل من هاتين العمليتين يقابل كلّ زوج من الأعداد عدد آخر : حاصل جمعهما (أو مجموعهما) في حالة الجمـع ، وحاصل ضربهما (أو جداؤهما) في حالة الضرب . وسندرس في هذا الفصل نمطاً أعم من العمليات على مجموعات عناصرها كيفية (ليست أعداداً بالضرورة) ، بحيث تشكل العمليات الحسابية المألوفة حالة خاصة من هـــذه العمليات الرياضية التي يطلق عليها اسم **العمليات الجبرية** أو **قوانين التشكيل** . والعمليات الجبرية نوعان . العمليات **الداخليـــة** (قوانين التشكيل الداخلية) ، والعمليات **الخارجية** (قوانين التشكيل الخارجية) . وأهم العمليات الداخلية هي العمليات **الثنائية** (**) ، ولما كانت العمليات الثنائيـة هي العمليات

(*) يوجد في آخر الكتاب جدول يورد المصطلحات باللغتين الانجليزية والفرنسية والتي تشكل المصطلحات العربية الواردة في هذا الكتاب ترجمة لها .

(**) تستخدم الغالبية العظمى من المؤلفين الإنجليز والروس مصطلح « العمليات الثنائية » ، بينما يقتصر جل المؤلفين الفرنسيين على استعمال مصطلح « قوانين التشكيل الداخلية» . هـــذا ويندر ورود مصطلح « قوانين التشكيل الخارجية » في المؤلفات الإنجليزية ، التي تستخدم في الغالب مصطلح «عملية الضرب السلمي » ، ولكننا لانستسيغ هذه التسمية لأسباب لا تخفى على كل من اطلع على الفراغات الاقليدية .

الداخلية الرئيسية التي يتناولها علم الجبر بالدرس ، فإن جميع اخصائيي علم الجبر يعنون بالعمليات الداخلية (أي بقوانين التشكيل الداخلية) العمليات الثنائية منها دون غيرها .

العمليات الداخلية (قوانين التشكيل الداخلية) :

١ ـ ١ **تعريف** : نعرف العملية الداخلية (أو قانون التشكيل الداخلي) على مجموعة S ، بأنها قاعدة تمكننا من مقابلة كل زوج مرتب من عناصر S بعنصر وحيد من المجموعة S نفسها . واختصاراً نقول إن العملية الداخلية على المجموعة S هي تطبيق لـ $S \times S$ في S .

لنرمز بـ o للعملية الثنائية على S . لما كان o تابعاً بالتعريف ، فإن العنصر من S الذي يقابل الزوج المرتب (a , b) من $S \times S$ هو $o((a,b))$. ولكن جرت العادة على استعمال الرمز $a o b$ عوضاً عن $o((a,b))$. يسمى العنصر $a o b$ من S **ناتج** o على a , b ، أو اختصاراً **ناتج** a , b إذا لم يكن ثمة مجال للالتباس (العنصران a , b ليسا مختلفين بالضرورة) ؛ كما تسمى a المركبة الأولى (أو الحد الأول) و b المركبة الثانية (أو الحد الثاني) .

وعلى سبيل المثال ، ففي حالة عملية الجمع المعروفة ، نرمز عادة إلى العملية بـ + ، ونكتب ناتج جمع العنصرين a , b بالشكل $a+b$ بدلاً من $+((a,b))$. وفي حالة عملية الضرب المعروفة ، نرمز إلى العملية بـ . ، ونكتب ناتج ضرب العنصرين a , b بالشكل $a.b$ (أو ab) بدلاً من $.((a,b))$. ولما كنا بصدد تعميم لعمليتي الجمع والضرب

الحسابيتين ، فإننا نستعمل رموزاً أخرى الناتج مثل :

$$a \top b \ , \ a \perp b \ , \ a \llcorner b \ , \ a \lrcorner b \ , \ a \triangle b \ , \ a \triangledown b \ ,$$

$$a \square b \ , \ a \cup b \ , \ \ldots$$

وتجدر بنا الإشارة إلى أنه قد نرمز إلى العملية الثنائية بـ + أو . دون أن نعني بذلك عملية الجمع أو الضرب المألوفتين في علم الحساب . ونسمي عندئذ الناتج $a+b$ مجموع الحدين a , b ونقرأه « a زائد b ». كذلك نسمي الناتج $a.b$ (أو ab) جداء العاملين a و b ، ونقرأه « a ضرب b » .

أمثـــلة :

٢ ـ ١ إن كلا من عمليتي الجمع والضرب المعروفتين في علم الحساب عملية داخلية على مجموعة الأعداد الطبيعية N . أما الطرح فليس كذلك ، إذ لو كان الطرح عملية داخليـــة على N لكان من الضروري أن يكون حاصل طرح أي عنصرين من N عنصراً من N أيضاً . ولكن هذا غير محقق ، فلو أخـــذنا العنصرين $a , b \in N$ بحيث $a < b$ فإن $a - b \notin N$. كذلك فإن القسمة الحسابية المعروفة ليست عملية داخلية على N (لماذا ؟) .

٣ ـ ١ لتكن $P(E)$ مجموعة أجزاء المجموعة E . إن العملية o المعرفة على $P(E) \times P(E)$ بالقاعدة :

$$A \, o \, B = A \cup B$$

هي عملية داخلية على $P(E)$ ، ذلك أنه يقابل كل زوج (A, B) من

$P(E) \times P(E)$ عنصر وحيد من $P(E)$ هو اجتماع المجموعتين الجزئيتين A , B أي $A \cup B$.

كذلك فإن العملية o المعرفة بالقاعدة $A \, o \, B = A \cap B$ هي عملية داخلية على $P(E)$ (لماذا ؟) .

٤ ـ ١ لا يشكل الجمع المعروف في علم الحساب عملية داخلية على المجموعة $S = \{0 , 1 , 2 , 3\}$. في الحقيقـة ليس مجموع أي عنصرين من S عنصراً من S ، فمثلاً : $1 + 3 = 4 \notin S$.

كذلك فإن الضرب على S لا يشكل عملية داخلية على S (لماذا ؟) .

٥ ـ ١ من الممكن تمثيـل العملية الداخلية على مجموعة منتهية بجدول يسمى جدول العملية . وعلى سبيل المثال فإن الجدول (١) الذى يعرف

*	p	q	r	s
p	r	s	p	q
q	p	q	r	s
r	s	p	q	r
s	q	r	s	p

جـــدول (١)

عملية داخلية $*$ على المجموعة $E = \{p , q , r , s\}$ يُترجم على النحو التالي : يقابل كلَّ زوج مرتب (x , y) من $E \times E$ العنصرُ الواقع عنـد تقاطع السطر المار من x بالعمود المار من y . وعلى هذا فإن :

$$r * q = p \quad ; \quad s * q = r$$

بينما :

$$q * r = r \quad ; \quad q * s = s$$

٦ - ١ إن عملية الضرب الخارجي الشعاعي (والتي يرمز لها المؤلفون بـ $\wedge$ أو $\times$) المعرفة على مجموعة الأشعة الطليقة V في الفراغ الحقيقي ذي الأبعاد الثلاثة R^3 هي عملية داخلية على V ، وذلك وفقاً لتعريف هذه العملية . أما الضرب الداخلي أو العددي للأشعة المعرف على V فلا يشكل عملية داخلية (لماذا ؟) .

ملاحظات :

٧ - ١ يعبر أحياناً عن كون o عملية داخلية على مجموعة S بالقول إن S مجموعة مغلقة بالنسبة لـ o . وهكذا فقد رأينا [٢ - ١] أن N مغلقة بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب العاديتين ، وغير مغلقة بالنسبة للطرح والقسمة .

كذلك فإذا كانت A مجموعة جزئية من S المزودة بالعملية الداخلية o (أي التي عرفنا عليها o) ، فإننا نقول إن A مغلقة (أو مستقرة) بالنسبة لـ o ، إذا تحقق الشرط :

$$\forall a, b \in A \ : \ a o b \in A$$

وعلى سبيل المثال فإن المجموعة الجزئية $\{0 , 1\}$ من N مستقرة بالنسبة لعملية الضرب العادية ، ذلك أن كلا من $1 . 1 = 1$, $1 . 0 = 0$, $0 . 1 = 1$, $0 . 0 = 0$ عنصر من A . أما $\{0 , 1\}$ فليست مستقرة بالنسبة لعملية الجمع رغم أن كلا من $1 + 0 = 1$, $0 + 1 = 1$, $0 + 0 = 0$ ، ينتمي إلى A ، وذلك لأن المجموع $1 + 1 = 2$ لا ينتمي إلى A .

٨ - ١ يبين المثال ٣ - ١ أنه يمكن أن نعرف على مجموعة واحدة أكثر من عملية داخلية ، وذلك لأن عمليتي الاجتماع $\cup$ والتقاطع $\cap$ مختلفتان عموماً . كذلك فإن عملية طرح مجموعتين هي عملية داخلية ثالثة على $P(E)$ ، كما يمكن إيراد عمليات داخلية أخرى .

٩ - ١ إن العمليات الثنائية تشكل حالة خاصة من العمليات الجبرية الداخلية التي تعرّف عموماً على أنها عمليات نونية . وبوجه عام فإن العملية النونية على مجموعة S هي تطبيق لـ $S \times S \times \ldots \times S$ (عدد المضاريب n) في S. والعملية النونية الوحيدة التي سبق ورأيناها فضلاً عن العملية الثنائية هي العملية الأحادية ($n = 1$) ، إذ أن هذه العملية هي ببساطة تطبيق لـ S في المجموعة S نفسها [وكمثال على العملية الأحادية نورد عملية الاتمام المعرفة على $P(E)$ مجموعة أجزاء E (انظر I)] . وكما سبق وذكرنا في المقدمة فإن العمليات الداخلية الرئيسية التي يدرسها علم الجبر هي العمليات الثنائية ، وهذا هو السبب في قصر اسم العمليات الجبرية الداخلية (أو قوانين التشكيل الداخلية) على العمليات الثنائية منها وحدها .

أنماط خاصة من العمليات الثنائية :

١٠ - ١ **تعريف** : لتكن o عملية داخلية على مجموعة S . تسمى العملية o **تجميعية** (قابلة للدمج) إذا تحقق الشرط :

$$\forall a , b , c \in S \ : \ a o (b o c) = (a o b) o c$$

١١ - ١ **ملاحظة** : نستنتج بأنه في حالة العملية التجميعية يمكن

تغيير موضع القوسين دون أن يتأثر الناتج . ولهذا السبب فيمكن في حالة العملية التجميعية o حذف القوسين وكتابة الناتج $a\,o(b\,o\,c)$ [أو $(a\,o\,b)o\,c$] بالشكل $a\,o\,b\,o\,c$.

١٢ - ١ **تعريف** : لتكن S مجموعة مزودة بالعملية الداخلية o :

(١) نقول عن عنصرين a, b من S **إنهما قابلان للمبادلة** إذا كان
$a\,o\,b = b\,o\,a$

(٢) إذا كانت جميع عناصر S قابلة للمبادله مثنى مثنى ، أي إذا تحقق الشرط .

$$\forall a , b \in S \quad : \quad a\,o\,b = b\,o\,a$$

فإننا نقول إن العملية o **تبديلية** ، كما نقول إن المجموعة S (المزودة بـ o) **تبديلية أو آبلية** ، نسبة إلى العالم الرياضي النرويجي **آبل** Abel (١٨٠٢ - ١٨٢٩) .

أمثـــلة :

١٣ - ١ إن عمليتي الجمع والضرب العاديتين والمعرفتين على مجموعة الأعداد الحقيقية R تجمعيتان وتبديليتان . أما القسمة العادية التي هي عملية داخلية على مجموعة الأعـداد الحقيقية الموجبة R^+ فليست تجميعية [مثلاً $\left(12 \div \frac{3}{2}\right) \div \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ بينما $12 \div \left(\frac{3}{2} \div \sqrt{2}\right) = 8\sqrt{2}$] وليست تبديلية (مثلاً $\pi \div 7 \neq 7 \div \pi$) .

١٤ - ١ إن الجدول (٢) يعرف على $\{a, b\}$ عملية T تبديلية وليست تجميعية ذلك أن $a\,T\,b = b\,T\,a\,(= b)$ من جهة، إلا انـــه

من جهة أخرى :

$$\left.\begin{array}{l} a\,T\,(a\,T\,b) = a\,T\,b = b \\ (a\,T\,a)\,T\,b = b\,T\,b = a \end{array}\right\} \Rightarrow a\,T\,(a\,T\,b) \neq (a\,T\,a)\,b$$

وبالتالي فالعملية T غير تجميعية

T	a	b
a	b	b
b	b	a

جدول (٢)

١٥ - ١ إن عملية تركيب التطبيقـات o تجميعية وليست تبديليـة (انظر I) .

١٦ - ١ إن عملية الضرب الشـعاعي $\wedge$ [١ - ٦] ليست تجميعية وليست تبديلية . فإذا أخذنا في R^3 ثلاثة أشعة واحدة $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ متعامدة مثنى مثنى وموجهة بحيث تكون الثلاثية $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ مباشرة فإن :

$$\left.\begin{array}{l} (\vec{i} \wedge \vec{j}) \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i} \\ \vec{i} \wedge (\vec{j} \wedge \vec{j}) = \vec{i} \wedge \vec{o} = \vec{o} \end{array}\right\} \Rightarrow (\vec{i} \wedge \vec{j}) \wedge \vec{j} \neq \vec{i} (\vec{j} \wedge \vec{j})$$

لذا فان العملية $\wedge$ غير تجميعية

كذلك لدينا .

$$\left.\begin{array}{l} \vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \\ \vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{i} \wedge \vec{j} \neq \vec{j} \wedge \vec{i}$$

إذن العملية $\wedge$ غير تبديلية

١٧ - ١ تعريف : لتكن S مجموعة مزودة بعمليتين داخليتين $*$ و o .

نقول عن العملية o إنها توزيعية من اليسار بالنسبة للعملية $*$ (أو على العملية $*$) إذا توافر الشرط :

$$\forall a, b, c \in S \ : \ a\, o\, (b * c) = (a\, o\, b) * (a\, o\, c)$$

ونقول عن o إنها توزيعية من اليمين بالنسبة لـ $*$ إذا كان :

$$\forall a, b, c \in S \ : \ (b * c)\, o\, a = (b\, o\, a) * (c\, o\, a)$$

أما إذا كانت العملية o توزيعية من اليسار ومن اليمين بالنسبة للعملية $*$ قلنا اختصاراً إن o توزيعية بالنسبة لـ $*$.

أمثلة :

١٨ - ١ إن عملية الضرب العادية على مجموعة الأعداد الصحيحة Z توزيعية بالنسبة لعملية الجمع العادية على هذه الأعداد ، ذلك أن :

$$\forall a, b, c \in Z \ : \ a.(b+c) = a.b + a.c \ , \ (b+c).a = b.a + c.a$$

أما عملية الجمع فغير توزيعية بالنسبة لعملية الضرب لا من اليسار (في الحالة العامة $a+(b.c) \neq (a+b).(a+c)$) ولا من اليمين (في الحالة العامة $(b.c)+a \neq (b+a).(c+a)$).

١٩ - ١ إن كلا من عمليتي اجتماع وتقاطع المجموعات [٣ - ١] توزيعية بالنسبة للأخرى ، ذلك أنه أيا كانت A , B , C من P (E) فإن (انظر I) :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad , \quad (B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A)$$

كذلك فإن :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad , \quad (B \cap C) \cup A = (B \cup A) \cap (C \cup A)$$

٢٠ - ١ لنعرف على Z عمليتين ثنائيتين : أولاهما عملية الجمع العادية + ، وثانيتها العملية o المعرفة بالقاعدة :

$$\forall a , b \in Z \; : \; a o b = a^2 b \qquad (*)$$

(١) لدينا :

$\forall a , b , c \in Z \; : \; a o (b + c) = a^2 (b + c)$ (استناداً إلى (*))

$= a^2 b + a^2 c$ (الضرب توزيعي بالنسبة للجمع)

$= a o b + a o c$ (استناداً إلى (*))

وبالتالي فإن o توزيعية من اليسار بالنسبة لـ + .

(٢) لما كانت اللامساواة :

$$(b + c) o a = (b + c)^2 a = b^2 a + 2 b c a + c^2 a \neq (b o a) +$$
$$+ (c o a) = b^2 a + c^2 a$$

صحيحة في الحالة العامة ، فإن العملية o غير توزيعية بالنسبة لعملية الجمع +

عناصر خاصة من المجموعات المزودة بعمليات داخلية :

٢١ - ١ **تعريف** لتكن S مجموعة مزودة بالعملية الداخلية o ، وليكن e عنصراً من S :

(أ) يسمى e عنصراً **محايداً أيمن** بالنسبة لـ o (أو لـ o) إذا كان :

$$\forall x \in S \quad : \quad x\,o\,e = x$$

(ب) يسمى e عنصراً **محايداً أيسر** بالنسبة لـ o (أو لـ o) إذا كان :

$$\forall x \in S \quad : \quad e\,o\,x = x$$

(حـ) يسمى e عنصراً **محايداً** بالنسبة لـ o (أو لـ o) إذا كان :

$$\forall x \in S \quad : \quad x\,o\,e = e\,o\,x = x$$

هذا وإذا كان e عنصراً محايداً أيمن أو محايداً أيسر أو محايداً لـ o ، وكان a' و a عنصرين من S فعندئذ :

(أَ) يسمى a' **نظيراً أيمن** لـ a بالنسبة لـ o إذا كان : $a\,o\,a' = e$.

(بَ) يسمى a' **نظيراً أيسر** لـ a بالنسبة لـ o إذا كان : $a'\,o\,a = e$.

(حَ) يسمى a' **نظيراً** لـ a بالنسبة لـ o إذا كان: $a\,o\,a' = a'\,o\,a = e$ ،

وفي هذه الحالة نقول إن a **قابل للمناظرة** بالنسبة لـ o . (سنستعمل للدلالة على النظير في أبحاثنا القادمة) .

٢٢ - ١ **نتيجة** : نستخلص مباشرة من (حَ) أنه إذا كان a' نظيراً لـ a بالنسبة لعملية ثنائية o ، فإن a يكون نظيراً لـ a بالنسبة لـ o ؛ لذا يمكن القول هنا بأن هذين العنصرين **متناظران** بالنسبة لـ o .

أمثـــلة :

٢٣ - ١ إن **الصفر** عنصر محايد بالنسبة لعملية الجمـــع على Z ،

ذلك أن :

$$\forall x \in Z \quad : \quad x + 0 = 0 + x = x \, .$$

والعدد 1 هو عنصر محايد لعملية الضرب على Z ، لأن :

$$\forall x \in Z \quad ; \quad x \, . \, 1 = 1 \, . \, x = x \, .$$

كذلك فإن لأي عنصر x من Z نظيراً بالنسبة لعملية الجمع هو x - لأن $x + (-x) = (-x) + x = 0$. وبالعكس فلا يوجد لأي عنصر x من Z مغاير لـ 1 ± نظير في Z بالنسبة لعملية الضرب .

٢٤ - ١ إن المجموعة الخالية Φ عنصر محايد بالنسبة للعملية $\cup$ على P (E) [٣ - ١] ، كما أن E عنصر محايد بالنسبة للعملية $\cap$.

٢٥ - ١ لا يوجد في V عنصر محايد لعملية الضرب الخارجي المعرفة على مجموعة الأشعة الطليقة V في الفراغ R^3 .

٢٦ - ١ لتكن $S = \{a_1 , a_2 , a_3\}$ مجموعة مزودة بعملية داخلية نرمز لها بـ + وممثلة بالجدول (٣) .

+	a_1	a_2	a_3
a_1	a_1	a_2	a_3
a_2	a_1	a_2	a_3
a_3	a_1	a_2	a_3

جدول (٣)

لما كان :

$$\forall a_i , a_j \in S \quad : \quad a_i + a_j = a_j$$

فإن كلا من العناصر a_1 , a_2 , a_3 هو عنصر محايد أيسر لـ + ، في حين لا يشكل أي من هذه العناصر عنصراً محايداً أيمن لـ + .

هذا ويتبين من المساواة السابقة بأن لكل من عناصر S ثلاثة نظائر يسرى (هي بالطبع a_1 , a_2 , a_3) ، ذلك أنه من أجل a_2 مثلاً نرى أن :

$$a_1 + a_2 = a_2 \quad , \quad a_2 + a_2 = a_2 \quad , \quad a_3 + a_2 = a_2$$

ولما كان a_2 عنصراً محايداً (أيسر) فإننا نستنتج استناداً إلى تعريف النظير أن كلا من a_1 , a_2 , a_3 نظير أيسر لـ a_2 .

كذلك فإن جميع عناصر S تشكل نظائر يمنى لكل من عناصر S . لنختر a_2 على سبيل المثال . من الواضح أن :

$$a_2 + a_1 = a_1 \quad , \quad a_2 + a_2 = a_2 \quad , \quad a_2 + a_3 = a_3$$

ولما كانت a_1 , a_2 , a_3 عناصر محايدة (يسرى) للعملية + فإن a_1 , a_2 , a_3 هي نظائر يمنى لـ a_2 .

وتجدر بنا الإشارة إلى أنه على الرغم من وجود ثلاثة نظائر يسرى وثلاثة نظائر يمنى لكل عنصر من S بالنسبة لـ + ، فإن لكل عنصر a_i من S نظيراً وحيداً بالنسبة لـ + هو a_i نفسه . وفي الحقيقة فإن $a_i + a_i = a_i$ ، يعني أن a_i هو نظير نفسه ؛ ولكن لو وجد نظير آخر a_j لـ a_i مغاير لـ a_i ، للزم أن يكون $a_i + a_j = a_j + a_i$ ، إلا أن هذا مستحيل لأن $a_i + a_j = a_j$ و $a_j + a_i = a_i$ و $a_i \neq a_j$ فرضاً .

نظريات أساسية حول العمليات الداخلية :

٢٧ - ١ نظرية : لتكن o عملية داخلية على مجموعة S ؛ عندئذ :

(أ) إذا كان e_1 عنصراً محايداً أيمن لـ o ، وكان e_2 عنصراً محايداً أيسر لـ o ، فإن : $e_1 = e_2$.

(ب) لا يمكن أن يكون في S أكثر من عنصر محايد واحد لـ o .

البرهان : (أ) إن تعريف العنصر المحايد الأيمن والأيسر لـ o يقتضي التالي :

$$\left.\begin{array}{l} \forall x \in S \;:\; x \circ e_1 = x \Rightarrow e_2 \circ e_1 = e_2 \\ \forall x \in S \;:\; e_2 \circ x = x \Rightarrow e_2 \circ e_1 = e_1 \end{array}\right\} \Rightarrow e_1 = e_2$$

(ب) إن صحة الدعوى (ب) تنتج من (أ) ، ذلك أن العنصر المحايد تعريفاً هو محايد أيمن ومحايد أيسر في آن واحد .

٢٨ ـ ١ **نظرية** : لتكن o عملية داخلية تجميعية على مجموعة S ، e عنصراً محايداً لـ o ، a عنصراً من S . عندئذ :

(أ) إذا كان $a_1 \in S$ نظيراً أيسر ، $a_2 \in S$ نظيراً أيمن لـ a بالنسبة لـ o ، فإن $a_1 = a_2$.

(ب) لا يمكن أن يكون لـ a أكثر من نظير واحد بالنسبة لـ o .

البرهان : (أ) لما كان a_1 , a_2 نظيرين أيمن وأيسر لـ a على الترتيب ، فإننا نجد [٢١ ـ ١] : $a \circ a_2 = e$, $a_1 \circ a = e$. وبملاحظة أن o تجميعية فإننا نجد :

$$a_1 = a_1 \circ e = a_1 \circ (a \circ a_2) = (a_1 \circ a) \circ a_2 = e \circ a_2 = a_2$$

(ب) إن صحة الدعوى (ب) تنتج من (أ) ، ذلك أن نظير a هو تعريفاً نظير أيمن ونظير أيسر ا a في آن واحد .

٢٩ - ١ **نظرية** : إذا كانت o عملية داخلية **تجميعية** على مجموعة **S** ، فإن :

$$\forall\, a , b , c , d \in S \ :\ (a o b)\ o\ (c o d) = a o\ ((b o c)\ o\ d\ )$$

$$\forall\, a , b , c , d \in S \ :\ (a o b)\ o\ (c o d) = ((a o b)\ o\ c\ )\ o\ d$$

البرهان : لنثبت صحة أولى هاتين العلاقتين (يتم إثبات العلاقة الثانية بصورة مماثلة للأولى) .

لنفرض مؤقتاً أن $x = c\ o\ d$. عندئذ إذا استخدمنا الخاصة التجميعية لـ o فإننا نجد :

$$(a\ o\ b)\ o\ (c\ o\ d) = (a\ o\ b)\ o\ x = a\ o\ (b\ o\ x) =$$

$$= a\ o\ (b\ o\ (c\ o\ d)) = a\ o\ ((b\ o\ c)\ o\ d)$$

٣٠ - ١ **ملاحظة** : تبين هذه النظرية أنه إذا كانت o عملية داخلية **تجميعية** على مجموعة S ، فإنه أيا كانت $a_1 , a_2 , a_3 , a_4 \in S$:

$$((a_1 o a_2) o a_3)\ o\ a_4 = (a_1 o\ (a_2\ o\ a_3))\ o\ a_4 = a_1 o\ ((a_2\ o\ a_3)\ o\ a_4) =$$

$$= a_1\ o\ (a_2\ o\ (a_3\ o\ a_4))$$

وهذا معناه أنه لحساب ناتج هذه العناصر ، فمن الممكن البدء من اليمين أو من اليســـار . كذلك نعرف ناتج العناصر $a_1 , a_2 , \ldots , a_n$ (مأخوذة بهذا الترتيب) بأنـــه ذلك العنصر من S الحاصل عند بـدء الحسابات من اليسار .

ويبرهن بطريقة الاستنتاج الرياضي بأن هـذا الناتج لا يختلف فيما لو بدأنا بالحسابات من اليمين ، أو بشكل أعم ، فيما إذا وضعنا الأقواس بشكل كيفي مع مراعاة ترتيب العناصر $a_1 , a_2 , \ldots , a_n$. وعلى هذا الأساس فإن الناتج الوحيد (بالنسبة للعملية التجميعية o) يكتب دون وضع الأقواس على الشكل $a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_n$ ، أو اختصاراً على الشكل :

$$\underset{i=1}{\overset{n}{\bigcirc}} a_i$$

وفي حالة استعمال الرمز + للدلالة على العملية الداخلية التجميعية ، فإننا نكتب الناتج على النحو التالي :

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

أما في حالة استعمال عملية الضرب ، فنكتب :

$$a_1 a_2 \ldots a_n = \prod_{i=1}^{n} a_i$$

١ - ٣١ تعريف : يطلق اسم مونوئيد (Monoïd) على الزوج المرتب (M , o) حيث M مجموعة ، o عملية داخلية على M ، شريطة أن تكون o تجميعية ، وأن تحتوي M على عنصر محايد لـ o (إذا كان (M ; o) مونوئيداً)، قلنا إن لدينا « المونوئيد M بالنسبة لـ o » ، أو اختصاراً « المونوئيد M » إذا لم يكن ثمة مجال للالتباس) .

١ - ٣٢ نظرية : ليكن M مونوئيداً بالنسبة لـ o عنصره المحايد e ،

وليكن a , b عنصرين من M . فاذا افترضنا أن نظيري b , a بالنسبة لـ o موجودان وهما b' , a' على الترتيب ، فإن نظير العنصر $a\ o\ b$ هو $b'\ o\ a'$.

البرهان : لدينا استناداً إلى تجميعية o وإلى [٢٩ – ١] :

$$(a\ o\ b)\ o\ (b'\ o\ a') = a\ o\ (b\ o\ b')\ o\ a' = a\ o\ e\ o\ a' =$$
$$= (a\ o\ e)\ o\ a' = a\ o\ a' = e$$

$$(b'\ o\ a')\ o\ (a\ o\ b) = b'\ o\ (a'\ o\ a)\ o\ b = b'\ o\ e\ o\ b =$$
$$= (b'\ o\ e)\ o\ b = b'\ o\ b = e$$

وهو المطلوب .

٣٣ - ١ تعريف : لتكن S مجموعة مزودة بالعملية الداخلية o . نقول عن العنصر a من S إنه منتظم ، أو إنه قابل للاختصار ، إذا تحقق الاقتضاءان التاليان أيا كان $b , c \in S$:

$$a\ o\ b = a\ o\ c \Rightarrow b = c \quad , \quad b\ o\ a = c\ o\ a \Rightarrow b = c$$

٣٤-١ نظرية : ليكن M مونوئيداً بالنسبة لـ o عنصره المحايد e . فإذا كان للعنصر c من M نظير بالنسبة لـ o ، فان c عنصر منتظم .

البرهان : لنرمز لنظير c (الوحيد استناداً إلى [٢٨ – ١]) بـ c' .
فاذا كان b , a عنصرين اختياريين من M فان :

$$a\ o\ c = b\ o\ c \Rightarrow (a\ o\ c)\ o\ c' = (b\ o\ c)\ o\ c'$$

$$\Rightarrow a\ o\ (c\ o\ c') = b\ o\ (c\ o\ c') \qquad \text{(لأن } o \text{ تجميعية)}$$

$$\Rightarrow a o e = b o e \Rightarrow a = b$$

هـــذا ويتم الاقتضاء الآخر $c o a = c o b \Rightarrow a = b$ بصورة مماثلة ، وهو المطلوب .

٣٥ - ١ نظرية : ليكن M مونوئيداً بالنسبة لـ o عنصره المحايد e . فاذا كان a , b عنصرين من M ، ووجـد لـ a نظير a' بالنسبة لـ o ، كان لكل من المعادلتين $a o x = b$, $y o a = b$ حل وحيد في S .

البرهان : لنختر المعادلة $a o x = b$ ، ولنبرهن أن العنصر $a' o b$ (الذي ينتمي إلى M وضوحاً) حل وحيد لها . نلاحظ أولاً أن $a' o b$ يحقق المعادلة المختـارة ، ذلك أنه استناداً إلى تجميعية o وإلى تعريف e , a' :

$$a o (a' o b) = (a o a') o b = e o b = b$$

هذا ، ولا يمكن أن يكون للمعادلة $a o x = b$ أكثر من حل واحد ، ذلك أننا لو افترضنا وجود حل آخر z $(z \neq x)$ ، لـكان $a o z = b$ ، ولـكان بالتالي $a o x = a o z$. ولكن هـذه المساواة تقتضي [٣٤ - ١] $x = z$ وهذا مخالف للفرض .

ويبرهن على صحة النظرية في حالة المعادلة $y o a = b$ بصورة مماثلة ، وهو المطلوب .

٣٦ - ١ ملاحظة : لنفرض أن لكل عنصر من المونوئيد (M , o) نظيراً . عندها يقابل كل زوج (a , b) من عناصر M عنصر وحيد x وعنصر وحيد y في M بحيث :

$$b \circ x = a \quad , \quad y \circ b = a$$

ولكن هذا يعني [١ – ١] أننا أمام عمليتين داخليتين جديدتين على M هما ▭ و ◫ بحيث :

$$a \sqsubset b = x = b' \circ a \quad , \quad a \,◫\, b = y = a \circ b'$$

وتسمى هاتان العمليتان العمليتين **المعاكستين** للعملية o .

هذا وإذا كانت العملية o تبديلية ، فلا فرق عندئذ بين ▭ و ◫ ، أي أنه يكون عندئذ لـ o عملية معاكسة واحدة . وعلى سبيل المثال ، فاذا كانت o هي عملية الجمع على Z ، فان العملية المعاكسة هي عمليـة الطرح ؛ وإذا كانت o هي عملية الضرب على R^+ ، فان معاكستها هي عملية القسمة .

٣٧ ـ ١ انسجام علاقة تكافؤ مع عملية داخلية :

لتكن S مجموعة عرفنا عليها علاقة تكافؤ R وعملية داخلية o . من المعلوم أن علاقة التكافؤ تجزىء المجموعة S إلى أصناف تكافؤ منفصلـة ، تسمى مجموعة هذه الأصناف بحاصل قسمة S على العلاقة R ، ويرمز لهـا بـ S/R (انظر I) .

من الممكن أن نحدد شروطاً لو توافرت لاشتققنا من العملية الداخلية o على S عملية داخلية على S/R . من الواضح أنه حتى يكون $O : ((x), (y)) \rightarrow (x \circ y)$ تطبيقاً لـ $S/R \times S/R$ في S/R ، يلزم أن يكون الصنف (x o y) تابعاً بشكل وحيد للصنفين (y) و (x)

فقط وليس تابعاً للممثلين x لـ (x) , y لـ (y) ، أي أن :

$$x\, R\, x_1 \quad , \quad y\, R\, y_1 \Rightarrow x \text{ o } y\, R\, x_1 \text{ o } y_1$$

وإذا تحقق هذا ، فاننا نقول إن علاقة التكافؤ R منسجمة مع العملية الداخلية o . وعندها يمكن تعريف عملية داخلية O على مجموعة أصناف التكافؤ (أي على S/R) بالقاعدة :

$$(x)\, O\, (y) = (x \text{ o } y)$$

مع التأكيد ثانية على أن الصنف الوارد في الطرف الأيمن مستقل عن الممثلين المختارين x , y ولا يتعلق إلا بالصنفين (y) , (x) .

تسمى العملية الداخلية O المعرفة على S/R حاصل قسمة العملية o على علاقة التكافؤ R .

وعلى سبيل المثال ، فاذا عرفنا العلاقة R في Z على الشكل : « العدد الصحيح 2 يقسم m – n » ، فان R تجزىء Z إلى صنفي التكافؤ : مجموعة الأعداد الصحيحة الفردية ، ومجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية . فاذا عرفنا على صنفي تكافؤ Z هذين (وهما (1) , (0)) عملية الجمع (+) وفق القاعدة :

$$\forall\, (x), (y) \in Z/R \quad : \quad (x) + (y) = (x + y)$$

فان العملية الداخلية (+) على Z/R منسجمة مع R (لماذا ؟)

العمليات الخارجية (قوانين التشكيل الخارجية) :

٣٨ - ١ **تعريف** : لتكن A , S مجموعتين . تعرف العملية

الخارجية اليمنى في S بأنها تطبيق لـ $S \times A$ في S ؛ وتعرف العمليـة الخارجية اليسرى في S بأنها تطبيق لـ $A \times S$ في S . وتسمى المجموعة A **ساحة المؤثرات** ، كما تسمى عناصر A في الحالة الأولى **مؤثرات يمنى** ، وفي الحالة الثانية **مؤثرات يسرى** .

وإن كان a عنصراً من A و s عنصراً من S ، ورمزنا للعمليـــة الخارجية اليمنى بـ △ فإن العنصر ((s , a)) △ يسمى ناتج العملية △ على s , a ويرمز له بـ $s \triangle a$. ونتبـع مصطلحاً مماثلاً في حالة العملية الخارجية اليسرى .

هذا وتستخدم اسم عملية الضرب أحياناً للدلالة على العملية الخارجية ، وعندها يرمز الناتج بـ s . a (أو sa) في حـالة العمليـــة اليمنى ، و بـ a . s (أو as) في حالة العملية اليسرى . ففي الحالة الأولى تسمى العملية الخارجية عملية ضرب من اليمين ، وتسمى عناصر المجموعـــة A مضاريب يمنى . أما في الحالة الثانية ، فتسمى العملية الخارجية عمليـة ضرب من اليسار ، وتسمى عندئذ عناصر المجموعة A مضاريب يسرى .

أمثـــلة :

٣٩ - ١ لتكن V مجموعة الأشعة الطليقة في الفراغ R^3 . إن حاصل ضرب عدد حقيقي a بعنصر $\vec{v}$ من V هو تعريفاً شعاع طليق يرمز له بـ $a\vec{v}$. وبالتالي فان ضرب عدد حقيقي بشعاع طليق هي عملية ضرب من اليسار في S ، حيث تشكل R مجموعة مضاريب يسرى .

٤٠ - ١ لتكن E مجموعة ما ، ولنرمز بـ $F(E, R)$ لمجموعـة

تطبيقات E في R . لنعرف عملية ضرب عدد α من **R** بتابع f من
$F(E, R)$ بالدستور :

$$\forall x \in E \quad : \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

بما أن كلا من $\alpha , f(x)$ ينتمي إلى R ، فان $\alpha f(x)$ عدد حقيقي .
وبالتالي فان αf يمكننا من مقابلة كل عنصر x من F بعنصر من R ،
أي أن αf عنصر من $F(E, R)$ كذلك . لذا فان عملية الضرب
المذكورة هي تطبيق لـ $R \times F(E, R)$ في $F(E, R)$ ، وبالتالي فهي
عملية ضرب من اليسار في $F(E, R)$ ، حيث تشكل R مجموعة مضاريب
يسرى .

٤١ - ١ إذا قرأنا الجدول (٤) بنفس طريقة قراءة جداول
العمليات الداخلية [٥ - ١] ، فان الجدول (٤) للعملية $\perp$ يعرف
عملية خارجية يمنى $\perp$ على المجموعة $S = \{1, 2\}$ ، ساحة مؤثراتها اليمنى
هي $A = \{a, b, c\}$.

$\perp$	a	b	c
1	1	2	1
2	2	2	1

جدول (٤)

٤٢ - ١ ملاحظة : يمكن اعتبار العمليات الخارجية والداخلية
(الثنائية) على أنها حالات خاصة من تطبيق $A \times B \rightarrow C$ ، حيث

A , B , C ثلاث مجموعات (مختلفة أو متساوية) :

(١) فاذا كان A = C ، غدا هذا التطبيق عملية خارجية يمنى في A ساحة مؤثراتها اليمنى B .

(٢) وإذا كان B = C ، أصبح هذا التطبيق عملية خارجية يسرى في B ساحة مؤثراتها اليسرى A .

(٣) وأخيراً ، إذا كان A = B = C ، فان هذا التطبيق ليس إلا عملية داخلية (ثنائية) على A .

هذا وواضح أن العملية الداخلية (الثنائية) ليست إلا عملية خارجية في A ساحة مؤثراتها المجموعة A نفسها .

البنى الجبرية :

لقد اعتبر الجبر حتى عهد ليس بالبعيد على أنه علم الحساب الرمزي : ففي حين تستعمل الاعداد في علم الحساب ، تستخدم في علم الجبر رموز تدل على الأعداد . ولكن الرياضيين لاحظوا بأن بعض العلاقات الرمزية من هذا « الحساب المعمم » والتي كانت صحيحة عند استبدال الأعداد بالرموز ، تبقى صحيحة عند استبدال « أشياء » أخرى بهذه الرموز ، مثل الأشعة والتوابع والمصفوفات وغيرها . وهكذا بدأ علم الجبر عهداً جديداً ، إذ غدا يدرس أنظمة رياضية يتألف كل منها من مجموعة عناصرها كيفية ، ومن عمليات معرفة على هذه المجموعات تشترك مع العمليات الحسابية المألوفة ببعض (وليس بجميع) الخواص . وقد أطلق على هذه الأنظمة الرياضية اسم **البنى الجبرية** .

٤٣ - ١ **تعريف** : البنية الجبرية S هي مجموعة $S = \{E , O , A\}$ مؤلفة من مجموعة غير خالية من العناصر E ، ومن مجموعة O تتألف من عملية واحدة أو أكثر من العمليات الجبرية الداخلية والخارجيـــة ، ومن مجموعة A من الخواص التي يجب أن تحققها المجموعتان E , O . تسمى E **دعامة** البنية S ، كما تسمى A **مبادىء** (أو **مسلمات**) البنية .

٤٤ - ١ **مثال** : المونوئيد (M , o) [٣١ - ١] هو بنية جبرية ، ذلك أنه يتألف من الدعامة M ، ومن العملية الثنائية o (وهي العملية الجبرية الوحيدة $O = \{o\}$) . أما A مجموعـــة مبادىء المونوئيد فهي مجموعة حاوية على عنصرين : أولهما أن تكون العملية o تجميعية ، وثانيهما أن يوجد في M عنصر محايد بالنسبة لـ o .

ومن أهم البنى الجبرية التي سنعالجها في الفصول المقبلة من هذا الكتاب هي الزمرة ، وهي مجموعـــة مزودة بعملية داخلية واحدة ، والحلقة والحقل وكل منها مجموعـــة مزودة بعمليتين داخليتـــين ، والفراغ الشعاعي وهو مجموعـــة مزودة بعمليتين إحـــداهما داخلية والاخرى خارجية . وفي كل من هذه الحالات هنالك مبادىء يجب أن تحققهـا العمليات الجبرية .

هذا ويشار غالباً إلى البنية الجبرية بمجموعة مرتبة $(E , o , \triangle , \top , . . .)$ حيث E دعامة البنية ، $o , \triangle , \top , . . .$ العمليات الجبرية المعرفـة على البنية والتي يجب أن تحقق مبادىء معينة . وعلى سبيل المثال ، فقـد رأينا أنه يشـار إلى المونوئيد بالزوج المرتب (M , o) ، حيث تحقق العملية o شرطين حددناهما قبل قليل .

البنى الرياضية :

تجـــدر بنا الاشارة إلى أن الرياضيات المعاصـــرة تمكنت من صياغة هدفها الأساسي والذي يتلخص بدراسة البنى الرياضية . والبنى الرياضية تنقسم عموماً إلى قسمين رئيسيين : البنى الجبرية والبنى التوبولوجية . فأما البنية الجبرية ، فهي ، كما رأينا ، مجموعة مزودة بعملية جبرية أو أكثر . ومع أننا لسنا بصدد دراسة البنية التوبولوجية إلا أننا نجيز لأنفسنا إيراد هذا التعريف المبسط وغير الدقيق : البنية التوبولوجية هي مجموعـة مزودة بمعيار لقياس المسافة بين عناصرها .

ويتصدى لدراسة البنى الجبرية علم الجبر الذي يضيف إلى دراسة خواص هـــذه البنى البحث في التطبيقات من بنية جبرية إلى أخرى . أما البنى التوبولوجية فيتكفل بدراستها علم التوبولوجيا الذي يضيف إلى دراسة خواص هذه البنى معالجة التطبيقات من بنية توبولوجية إلى أخرى .

هذا وتبقى مجموعة E مجردةً من البنية الرياضية ، طالما لم نعرف عليها عمليات جبرية أو توبولوجية ، أو علاقات بين عناصرها أو علاقات بـين عناصرها وعناصر مجموعات أخرى . . . الخ . وبالعكس فمن الممكن أن نشكل على مجموعة واحدة E بنى رياضية مختلفة .

الهومومورفيزم والايزومورفيزم :

ذكرنا عند تعريفنا للبنى الرياضية أن علم الجبر لا يكتفي بدراسـة خواص البنى الجبرية ، بل يتعداها إلى دراسة التطبيقات من بنية جـبرية إلى أخرى . وتلعب التطبيقات التي تسمى هومومورفيزماً دوراً على غاية من الأهمية في علم الجبر . وسنكتفي الآن بتعريف هـــذا النوع من

التطبيقات ودراسة خواصه في حالة مجموعات مزودة بعمليات داخلية فقط .

٤٥ - ١ **تعريف** : لتكن E مجموعة مزودة بالعملية الداخلية o ، F مجموعة مزودة بالعملية الداخلية * ، f تطبيقاً لـ E في F . تسمى f هومومورفيزماً لـ (E , o) في (F , *) إذا تحقق الشرط :

$$\forall a , b \in E \quad ; \quad f(a \text{ o } b) = f(a) * f(b) \qquad (1)$$

ويطلق على المجموعة الجزئية f(E) من F والتي تتألف من عناصر F التي هي خيالات لجميع عناصر E اسم **الخيال الهومومورفي** لـ E . هذا وإذا كان $f : E \to F$ هومومورفيزماً ، عندئذ يسمى f :

(أ) **مونومورفيزماً** إذا كان f متبايناً .

(ب) **ابيمورفيزماً** إذا كان f غامراً .

(ﺣ) **إيزومورفيزماً** إذا كان f تقابلاً (أي متبايناً وغامراً) .

كذلك يسمى **الهومورفيزم** لبنية في نفسها **إندومورفيزماً** ، كما يسمى الإيزومورفيزم لبنية على نفسها **أوتومورفيزماً** .

هذا وإذا كان كل من E , F مزودة بأكثر من عملية داخلية واحدة ، فاننا نسمي $f : E \to F$ هومومورفيزماً إذا قابل كل عملية o على E عملية واحدة (وواحدة فقط) * على F بحيث تحقق الشرط (1) من أجل كل زوج من العمليات الثنائية المتقابلة .

أمثـــلة :

٤٦ - ١ لتكن البنيتـان (N +) , (N , .) ، حيث + ، . هما

على الترتيب عمليتا الجمـــع والضرب المعروفتين . إن التطبيق f المعرف بالقاعدة $f(x) = 2^x$ هو هومومورفيزم لـ $(N, +)$ في $(N, .)$ ، ذلك أن :

$$\forall n, m \in N \quad : \quad f(n+m) = 2^{n+m} = 2^n \, . \, 2^m = f(n) \, . \, f(m)$$

وإذا لاحظنا أن f متباين لأن :

$$f(n) = f(m) \Rightarrow 2^n = 2^m \Rightarrow n = m$$

فان f مونومورفيزم . ولا يمكن أن يكون f إيزمورفيزماً ، لأن f غير غامر (لماذا ؟) . كذلك ، فلا يمكن أن يكون f إندومورفيزماً ذلك أن البنيتين $(N, +)$ و $(N, .)$ مختلفتـــان بسبب اختلاف العمليتين المعرفتين عليها (رغم تطابق دعامتيها N) .

٤٧ - ١ لتكن S مجموعـة مزودة بالعملية الداخلية o ، ولنفرض وجود عنصر محايد e لـ o . إن التطبيق : $f : S \to S$ وفق الدستور $\forall x \in S : f(x) = e$ هو إندومورفيزم لـ (S, o) في نفسها ، ذلك أن :

$$\forall a, b \in S \quad : \quad f(a \, o \, b) = e = e \, o \, e = f(a) \, o \, f(b)$$

ومن السهل أن نلاحظ بأنه إذا حوت S أكثر من عنصر واحد ، فلا يمكن أن يكون f أوتومورفيزماً

٤٨ - ١ لتكن S مجموعـة مزودة بالعملية الداخلية o . إن التطبيق المطابق لـ S على نفسها هو أوتومورفيزم لـ S .

٤٩ - ١ لتكن + ، . عمليتين داخليتين معرفتين على المجموعـــة $S=\{a, b, c, d\}$ ، $\square$ ، $\sqsubset$ عمليتين داخليتين معرفتين على المجموعة $S' = \{o, 1\}$ ،

وذلك وفقاً لجداول العمليات التالية :

S

.	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	c	d
c	a	a	a	a
d	a	b	c	d

+	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

S′

▭	0	1
0	1	0
1	0	1

$\square$	0	1
0	0	1
1	1	0

إن التطبيق $f : S \to S'$ المعرف كما يلي :

$$f(a) = 0 \quad , \quad f(c) = 0 \quad , \quad f(b) = 1 \quad , \quad f(d) = 1$$

هو ايبمومورفيزم لـ $(S, +, .)$ على $(S', \square, \text{▭})$ ، الأمر الذي يمكننا التحقق منه بفحص الجداول . وعلى سبيل المثال :

$$f(a + b) = f(b) = 1 = 0 \square 1 = f(a) \square f(b) ,$$

$$f(a . b) = f(a) = 0 = 0 \text{▭} 1 = f(a) \text{▭} f(b) .$$

كذلك :

$$f(b + d) = f(c) = 0 = 1 \square 1 = f(b) \square f(d) ,$$

$$f(b . d) = f(d) = 1 = 1 \text{▭} 1 = f(b) \text{▭} f(d)$$

هذا ومن الواضح أن f لايمكن أن يكون إيزومورفيزماً (لماذا ؟) .

نظريات أساسية في الهومومورفيزم والايزومورفيزم :

* **٥٠ - ١ نظريه** : ليكن f هومومورفيزما لـ (E , o) في (F , *) . عندها تصح الدعاوى التالية :

(أ) الخيال الهومومورفي $\bar{E} = f(E)$ لـ E هو مجموعة جزئية مغلقة (مستقرة) من (F , *) .

(ب) إذا كانت العملية الداخلية o على E تجميعية ، فان العملية الداخلية * المعرفة على $\bar{E}$ تكون تجميعية .

(حـ) إذا كانت العملية الداخلية o على E تبديلية ، فان العملية الداخلية * المعرفة على $\bar{E}$ تبديلية .

(د) إذا كان e عنصراً محايداً في (E , o) ، فان $u = f(e)$ عنصر محايد في ($\bar{E}$, *) .

(هـ) إذا كان d , d′ عنصرين متناظرين في (E , o) ، فان خياليهما f(d) , f(d′) يكونان متناظرين في ($\bar{E}$, *) .

(و) إذا كان j , k عنصرين قابلين للمبادلة في (E , o) ، فان خياليهما f(j) , f(k) يكونان قابلين للمبادلة في ($\bar{E}$, *) .

البرهان : ليكن p , q , r أي ثلاثة عناصر من $\bar{E} = f(E)$. إذن هنالك ثلاثة عناصر (على الأقل) a , b , c من E بحيث :

$$f(a) = p \quad , \quad f(b) = q \quad , \quad f(c) = r$$

(أ) لما كان f هومومورفيزماً فان :

$$f(a\, o\, b) = f(a) * f(b) = p * q$$

لكن $a\, o\, b$ عنصر من E (لأن o عملية داخلية على E) إذن $p * q$ عنصر من $\overline{E} = f(E)$.

(ب) بما أن العملية o تجميعية ، إذن $(a\, o\, b)\, o\, c = a\, o\, (b\, o\, c)$.

ومنه $f((a\, o\, b)\, o\, c) = f(a\, o\, (b\, o\, c))$. لكن f هومومورفيزم ، لذا فان :

$$f((a\, o\, b)\, o\, c) = f(a\, o\, b) * f(c) = (f(a) * f(b)) * f(c) =$$

$$= (p * q) * r$$

$$f(a\, o\, (b\, o\, c)) = f(a) * f(b\, o\, c) = f(a) * (f(b) * f(c)) =$$

$$= p * (q * r)$$

وبالتالي فان $(p * q) * r = p * (q * r)$ ، أي أن العملية $*$ تجميعية على $\overline{E} = f(E)$.

(ﺟ) $a\, o\, b = b\, o\, a \Rightarrow f(a\, o\, b) = f(b\, o\, a) \Rightarrow f(a) * f(b) =$

$$= f(b) * f(a) \Rightarrow p * q = q * p$$

(د) لما كان $a\, o\, e = e\, o\, a = a$ فرضاً ، فان :

$f(a\, o\, e) = f(e\, o\, a) = f(a)$. وبما أن f هومومورفيزم ، فان هاتين العلاقتين تؤديان إلى العلاقتين :

$$f(a) * f(e) = f(e) * f(a) = f(a)$$

أو :

$$p * u = u * p = p$$

ولما كان p أي عنصر من $\bar{E}$ ، فان $u = f(e)$ هو عنصر محايد في $(\bar{E}, *)$

(ه) $d \circ d' = d' \circ d = e \Rightarrow f(d \circ d') = f(d' \circ d) = f(e)$

(لأن f هومومورفيزم) $\Rightarrow f(d) * f(d') = f(d') * f(d) = f(e)$

(استناداً الى د) $\Rightarrow f(d) * f(d') = f(d') * f(d) = u$

(وهو المطلوب) $\Rightarrow [f(d)]' = f(d')$

(و) $j \circ k = k \circ j \Rightarrow f(j \circ k) = f(k \circ j) \Rightarrow f(j) * f(k) =$
$= f(k) * f(j)$

٥١ - ١ يترتب على (و) أنه إذا كانت المجموعة E آبلية [١٢-١] فان خيالها الهومومورفي $\bar{E}$ يكون كذلك .

٥٢ - ١ **نظرية** : ليكن f هومومورفيزما لـ $(E, \top)$ في (F, τ) و g هومومورفيزماً لـ (F, τ) في $(H, \perp)$ فلذا رمزنا (كما هو الحال في الغالب) بـ o إلى عملية تركيب التطبيقات ، فان التطبيق المركب $g \circ f$ هومومورفيزم لـ $(E, \top)$ في $(H, \perp)$.

لدينا أياً كان a , b من E :

(استناداً إلى تعريف $g \circ f$) $(g \circ f)(a \top b) = g[f(a \top b)]$

(لأن f هومومورفيزم) $= g[f(a) \tau f(b)]$

(لأن g هومومورفيزم) $= g(f(a)) \perp g(f(b))$

(استناداً إلى تعريف $g \circ f$) $= (g \circ f)(a) \perp (g \circ f)(b)$

٥٣ - ١ **نظرية** : إذا كان f إيزومورفيزماً لـ $(E, \circ)$ على $(F, *)$ ، فان f^{-1} إيزومورفيزم لـ $(F, *)$ على $(E, \circ)$.

البرهان : بما أن f إيزومورفيزم إذن f تقابل (**أي** تطبيق متباين وغامر) . وبالتالي فان التطبيق العكسي $f^{-1} : F \to E$ موجود ، كما أن f^{-1} تقابل (المرجع I) . إذن إذا افترضنا أن p , q **أي** عنصرين من F ، فهنالك عنصران **وحيدان** a , b من E بحيث : $f^{-1}(q) = b$ ، $f^{-1}(p) = a$. وعندها يكون $p = f(a)$, $q = f(b)$. ولما كان f هومومورفيزما فان : $f(a \circ b) = f(a) * f(b) = p * q$. وبما أن f تقابل فانه يترتب على هذا :

$$f^{-1}(p * q) = a \circ b = f^{-1}(p) \circ f^{-1}(q)$$

وهذا يعني أن f^{-1} هومومورفيزم لـ $(F , *)$ في $(E , \circ)$. ولكن f^{-1} تقابل أيضاً ، إذن f^{-1} إيزومورفيزم لـ $(F , *)$ على $(E , \circ)$.

٥٤ - ١ **نظرية** : إذا كانت S مجموعة كل المجموعات المزود كل منها بعملية داخلية ، وعرفنا على S العلاقة التالية : « يوجد إيزومورفيزم لـ $(E , \circ)$ على $(F , *)$ » فان هذه العلاقة هي علاقة تكافؤ في S .

البرهان : لنرمز للعلاقة السابقة بـ $(E , \circ) \approx (F , *)$

(١) إن العلاقة $\approx$ **منعكسة** . في الحقيقة :

$$\forall (E , \circ) \in S \quad : \quad (E , \circ) \approx (E , \circ)$$

ذلك أن التطبيق المطابق هو إيزومورفيزم لأي بنية $(E , \circ)$ على نفسها (أي أوتومورفيزم لـ $(E , \circ)$) .

(٢) إن العلاقة $\approx$ **متناظرة** ، ذلك أنه إذا كان f إيزومورفيزماً

لـ (E, o) على $(F, *)$ ، فاستناداً إلى [٥٣ - ١] يكون f^{-1} إيزومورفيزماً لـ $(F, *)$ على (E, o) .

(٣) إن العلاقة متعدية ، أي أن :

$$(E, o) \approx (H, \top) \;,\; (H, \top) \approx (F, *) \Rightarrow (E, o) \approx (F, *)$$

ذلك أنه لو فرضنا f إيزومورفيزماً لـ (E, o) على $(H, \top)$ ، g إيزومورفيزماً لـ $(H, \top)$ على $(F, *)$ ، فان كلا من f, g تقابل ، وبالتالي فان $g o f$ تقابل . فاذا أخذنا إلى ذلك أن $g o f$ هومومورفيزم لـ (E, o) في $(F, *)$ استناداً إلى [٥٢ - ١] ، وجدنا المطلوب .

٥٥ - ١ من الجدير بالذكر أن الايزومورفيزم من أهم المفاهيم التي أتى بها الجبر المجرد . فإذا كانت البنيتان الجبريتان $(E, \top), (F, \tau)$ إيزومورفيتين ، فمن الممكن اعتبارهما متطابقتين ، ذلك أن كل ماتختلف به إحداهما عن الأخرى هي رموز عناصرها ، وربما اسم العمليات المعرفة عليها . والايزومورفيزم يمكننا من معرفة ناتج عملية على عناصر إحدى البنيتين دون إجراء الحساب في هذه البنية ، وإنما باجراء الحسابات في البنية الأخرى ، والتي قد تكون أيسر وأسرع .

ويمكن تشبيه الايزومورفيزم بقاموس يُمَكِّننا من التحقق من أن جملة ما في إحدى اللغات تقابل جملة لها نفس المعنى في لغة أخرى ؛ إلا أن حالنا مع الايزومورفيزم ليس على هذه الدرجة من السهولة : فليس الغاية القول ما إذا كانت بنية جبرية إيزومورفية مع أخرى ، بقدر ما هي

تحديد الايزومورفيزم نفسه . واكتشاف الايزومورفيزم أمر غالباً مايكون غاية في الصعوبة ، ولكن ربما كان الشعور بالرضا والغبطة عند اكتشاف هذه العلاقة شبيه لما يعانيه موسيقي أبدع لحناً جميلاً من أنغام تبدو لغيره وكأنها متنافرة ليس بينها أي تناسق أو انسجام .

تمارين محلولة

١ - لتكن $\perp$ عملية داخلية على N معرفة بالقاعـــدة :
$a \perp b = a^2 + b^2$.
(١) احسب :

$$2 \perp 1 \quad , \quad 5 \perp 3 \quad , \quad (3 \perp 1) \perp 5 \quad , \quad 3 \perp (1 \perp 5)$$

(٢) بين ما إذا كانت العملية $\perp$ تجميعية أو تبديلية .
(٣) هل هنالك عنصر محايد لـ $\perp$ ؟
(٤) إذا عرفنا $a^{(n)}$ ($n \geqslant 1$) كما يلي : $a^{(1)} = a$
و $a^{(n)} = a^{(n-1)} \perp a$ ، فاحسب $a^{(2)}, a^{(3)}, a^{(4)}$.

الحل : (١)

$$2 \perp 1 = 2^2 + 1^2 = 5 \quad , \quad 5 \perp 3 = 5^2 + 3^2 = 34$$

$$(3 \perp 1) \perp 5 = (3^2 + 1^2) \perp 5 = 10 \perp 5 = (10)^2 + 5^2 = 125$$

$$3 \perp (1 \perp 5) = 3 \perp (1^2 + 5^2) = 3 \perp (26) = 3^2 + (26)^2 = 685$$

(٢) إن العملية $\perp$ تبديلية لأن :

$$\forall a, b \in N \qquad a \perp b = a^2 + b^2 = b^2 + a^2 = b \perp a$$

لكن $\perp$ غير تجميعية لأنه (على الأقل)

$$(3 \perp 1) \perp 5 \neq 3 \perp (1 \perp 5)$$

(٣) لا يوجد عنصر محايد في N لـ $\perp$ ، ذلك أنه لو افترضنا وجود

هذا العنصر ورمزنا له بـ e ، فيجب أن يتحقق الشرط $x \perp e = x$ أياً كان x من N . ولكن $x \perp e = x^2 + e^2$ ، إذن يجب أن يتحقق $x^2 + e^2 = x$ أو $e^2 = x - x^2$ أياً كان x من N . ولكن هذا مستحيل لأن الطرف الأيسر e^2 من المساواة $e^2 = x - x^2$ يجب أن يكون ثابتاً (لأن e عنصر محدد من N) ، بينما الطرف الأيمن $x - x^2$ يتغير بتغير x (لماذا ؟) . إذن لا وجود في N لعنصر محايد e بالنسبة لـ $\perp$.

(٤) لدينا :

$$a^{(2)} = a^{(1)} \perp a = a \perp a = a^2 + a^2 = 2a^2 .$$

$$a^{(3)} = a^{(2)} \perp a = (2a^2) \perp a = (2a^2)^2 + a^2 = 4a^4 + a^2$$

$$a^{(4)} = a^{(3)} \perp a = (4a^4 + a^2) \perp a = (4a^4 + a^2)^2 + a^2 =$$
$$= 16a^8 + 8a^6 + a^4 + a^2 .$$

٣ ـ لتكن N مجموعة الأعداد الطبيعية المزودة بعملية الرفع إلى القوة (التي نرمز لها بـ $\top$) والمعرفة بالقاعدة :

$$\forall a \in N \quad : \quad a \top 0 = a^0 = 1$$

$$\forall (a, b) \in N \times N^* \quad : \quad a \top b = a^b$$

(١) احسب :

$$1 \top 1 \quad , \quad 2 \top 3 \quad , \quad 3 \top 2 \quad , \quad (2 \top 3) \top 5 \quad , \quad 2 \top (3 \top 5)$$

(٢) هل العملية الداخلية $\top$ تجميعية ؟ وهل هي تبديلية ؟

(٣) هل يوجد عنصر محايد أيمن ، أو محايد أيسر ، أو محايد بالنسبة لـ $\top$ ؟

(٤) هل العملية الداخلية $\top$ توزيعية بالنسبة لعملية الضرب العادية ؟

الحل : (١)

$$1 \top 1 = 1^1 = 1 \quad , \quad 2 \top 3 = 2^3 = 8 \quad , \quad 3 \top 2 = 3^2 = 9$$

$$(2 \top 3) \top 5 = 2^3 \top 5 = 8 \top 5 = 8^5 \quad ,$$

$$2 \top (3 \top 5) = 2 \top 3^5 = 2 \top 243 = 2^{243}$$

(٢) لو كانت $\top$ تجميعية لتحقق الشرط : $(a \top b) \top c = a \top (b \top c)$ أياً كان a , b , c من N . ولكننا رأينا في (١) أن $(2 \top 3) \top 5 \neq 2 \top (3 \top 5)$ ، وبالتالي فان العملية الداخلية $\top$ غير تجميعية .

كذلك فان $\top$ غير تبديليـة ، إذ لو كانت كذلك ، لتحقق الشرط $a \top b = b \top a$ أياً كان a , b من N . ولكننا رأينـا في (١) أن $2 \top 3 \neq 3 \top 2$ ، إذن $\top$ غير تبديلية .

(٣) إن شرط وجـود عنصر محايد أيمن e هو $a \top e = a$ أي $a^e = a$ أياً كان a من N . ومن الواضح أن هذا يتم عندما تكون $e = 1$. إذن العدد 1 هو عنصر محايد أيمن لـ $\top$.

ولو وجد عنصر محايد أيسر u ، لـكان $u \top a = a$ أو $u^a = a$ أياً كان a من N . وهذا يقتضي المساواة $u^0 = 0$. ولما كان الغرض ينص على أن $u^0 = 1$ أياً كان u من N ، فاننا نجد $0 = 1$ ، وهذا مستحيل . وبالتالي فلا وجود لعنصر محايد أيسر لـ $\top$.

هذا ، وبما أن العنصر المحايد لـ $\top$ هو عنصر محايد أيمن وأيسر في آن واحد ، فلا وجود لعنصر محايد بالنسبة لـ $\top$.

(٤) إن شرط كون العملية $\top$ توزيعية من اليسار بالنسبة لعملية الضرب أن يتحقق الشرط :

$$a \top (b\,c) = (a \top b)\,(a \top c)$$

أو :

$$a^{bc} = a^b\, a^c = a^{b+c}$$

أياً كانت a , b , c من N . ولكن هذه المساواة غير محققة دوماً : فلو فرضنا مثلاً $a = 2 \;,\; b = 1 \;,\; c = 0$ فاننا نجد $a^{bc} = 2^0 = 1$ ، بينما $a^b a^c = 2^1 . 2^0 = 2 . 1 = 2$. وبالتالي فان العملية $\top$ غير توزيعية من اليسار بالنسبة لعملية الضرب .

لكن $\top$ توزيعية من اليمين بالنسبة لعملية الضرب ، ذلك أن :

$$\forall\, a \in N^*, \forall\, b , c \in N \;:\; (b\,c) \top a = (b\,c)^a = b^a c^a = (b \top a)\,(c \top a)$$

$$\forall\, b , c \in N \;:\; (b\,c) \top 0 = 1 = 1 . 1 = (b \top 0)\,(c \top 0)$$

ومع ذلك فان العملية $\top$ ليست توزيعية بالنسبة لعملية الضرب العادية ، لأنها غير توزيعية من اليسار بالنسبة لعملية الضرب .

٣ـ لتكن E مجموعة مزودة بالعملية الداخلية التجميعية $\top$ ، ولنفرض a عنصراً مثبتاً من E . لنزود E بعملية داخلية أخرى $*$ بحيث يقابل كل زوج (x , y) من $E \times E$ العنصر التالي من E :

$$x * y = x \top a \top y$$

(١) بين أن العملية $*$ تجميعية .

(٢) بين أنه إذا كانت العملية $\top$ تبديلية ، فإن $*$ تكون كذلك .

الحل : (١) إن $*$ تجميعية ، لأنه أياً كان x, y, z من E :

$$(x * y) * z = (x \top a \top y) * z = (x \top a \top y) \top a \top z$$

$$x * (y * z) = x * (y \top a \top z) = x \top a \top (y \top a \top z)$$

ولما كان الطرفان الأيمنان متساويين (لأن العملية $\top$ تجميعية) ، فإن الطرفين الأيسرين متساويان ، أي أن العملية $*$ تجميعية .

(٢) لنفرض العملية $\top$ تبديلية (بالاضافة إلى كونها تجميعية) عندئذ :

$$\forall x, y \in E : x * y = x \top a \top y = (x \top a) \top y = (a \top x) \top y =$$

$$= a \top (x \top y) = a \top (y \top x) = (a \top y) \top x =$$

$$= (y \top a) \top x = y \top a \top x = y * x$$

وبالتالي فإن العملية الداخلية $*$ تبديلية .

٤ - لتكن $\div$ عملية داخلية على المجموعة S ، ونفرض أن $\div$ تجميعية وليست تبديلية ، وأنها تقبل عنصراً محايداً أيمن e ، وأن لكل عنصر a من S نظيراً أيمن a' بالنسبة لـ $\div$. نرمز بـ a'' لنظير a' الأيمن بالنسبة لـ $\div$.

(١) برهن أن $a' \div a = e$ ، وذلك بحساب الناتج $a' \div a \div a' \div a''$ بطريقتين مختلفتين :

(٢) برهن أن $e \div a = a$ ، وذلك بحساب $a \div a' \div a$ بطريقتين مختلفتين .

الحل : (١) لدينا :

$$a' \div a \div a' \div a'' = a' \div (a \div a') \div a'' \quad \text{(لأن } \div \text{ تجميعية)}$$

$$= a' \div e \div a'' \quad \text{(} a' \text{ نظير أيمن لـ } a \text{)}$$

$$= (a' \div e) \div a'' \quad \text{(لأن } \div \text{ تجميعية)}$$

$$= a' \div a'' \quad \text{(} e \text{ عنصر محايد أيمن)}$$

$$= e \quad \text{(} a'' \text{ نظير أيمن لـ } a' \text{)}$$

ولدينا من جهة أخرى :

$$a' \div a \div a' \div a'' = a' \div a \div (a' \div a'') = a' \div a \div e$$
$$= a' \div (a \div e) = a' \div a$$

لذا فإن : $a' \div a = e$.

(٢) لدينــــا

$$a \div a' \div a = (a \div a') \div a = e \div a$$

ولدينا من جهة أخرى .

$a \div a' \div a = a \div (a' \div a)$

$= a \div e$ (استناداً إلى «١»)

$= a$ (e عنصر محايد أيمن)

وبالتالي فإن $e \div a = a$.

ملاحظة : نستنتج أنه إذا كانت الشروط الواردة في المسألة (٤) محققة ، فإنه يوجد عندئذ عنصر محايد e لـ ÷ ، كما يوجد لكل عنصر a من E نظير a' بالنسبة لـ ÷ .

٥ـ لتكن E مجموعة تحوي أكثر من عنصر واحد ، ولتكن F مجموعة تطبيقات E في نفسها ، ولنفرض أن F مزودة بعملية تركيب التطبيقات o التي تقابل كلّ زوج f , g من F بمركبها f o g .

(١) بين أن العملية الداخلية o ليست تبديلية .

(٢) عين العناصر المنتظمة في (F , o) .

الحل : (١) لما كانت في المجموعة E أكثر من عنصر واحـــد ، فيمكن أن نختار فيها عنصرين مختلفين a , b . لنختر تطبيقين ثابتين r , s لـ E في E معرفين كما يلي :

$$\forall x \in E \quad : \quad r(x) = a \quad , \quad s(x) = b \,.$$

من الواضح أنه أياً كان x من E :

$$(r \circ s)(x) = r(s(x)) = r(b) = a \,,$$

$$(s \circ r)(x) = s(r(x)) = s(a) = b \,,$$

ولما كان $a \neq b$ ، فان العنصرين r , s من F غير قابلين للمبـــادلة ($r \circ s \neq s \circ r$) ، وبالتالي فان العملية o غير تبديلية .

(٢) كي يكون f من F عنصراً منتظماً يلزم ويكفي أن يتحقق الشرطان:

أولاً :

$$f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h \,,$$

أي :

$$\forall x \in E \quad : \quad f(g(x)) = f(h(x)) \Rightarrow g(x) = h(x)$$

وبالتالي فان الشرط الأول يتلخص في أن يكون f **متبايناً** .

ثانياً :

$$g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$$

أي :

$$\forall x \in E \quad : \quad g(f(x)) = h(f(x)) \Rightarrow g(x) = h(x) \qquad (*)$$

وكي يتحقق هـذا الاقتضاء مهما كان g , h يلزم ويكفي أن يكون

f **غامراً** : فإذا كان f غامراً فان $f(x)$ يمكن أن يساوي أي عنصر من E ، وبالتالي فليست $g(f(x)) = h(f(x))$ هي إلا المساواة $g(x) = h(x)$ (أيا كان x من E) . وبالعكس ، فاذا تحقق الاقتضاء ($*$) ، كان f غامراً ، لأنه لو لم يكن f كذلك ، لترتب على المساواة $g(f(x)) = h(f(x))$ تساوي g , h في $f(E)$ التي لا تساوي E (لأن f غير غامر) . وعندها يمكن لـ g , h أن يكونا مختلفين على $E - f(E)$ ، وهذا مخالف لـ ($*$) الذي يقضي بتساوي g , h على المجموعة E بأكملها .

نستنتج مما سبق أن الشرط اللازم والكافي كي يكون التطبيق f عنصراً منتظماً في (F , o) هو أن يكون f متبايناً وغامراً (أي تقابلاً) .

ملاحظة : سنتناول في الفصل الثالث بالتفصيل دراسة مجموعة التطبيقات المتباينة والغامرة لمجموعة E على نفسها .

٦ ـ لتكن S مجموعة الأعداد الطبيعية $\{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 \}$ ، ولنعرف على S عملية $\lrcorner$ محددة بالقاعدة :

$$\forall a , b \in S \quad : \quad a \lrcorner b = \min (a , b)$$

($\min (a , b)$ تعني أصغر العددين a , b) . برهن أن $(S , \lrcorner)$ هو مونوئيد آبلي :

الحل : (١) من الواضح أن $\lrcorner$ هي عملية داخلية على S ، لأنها قاعدة تمكننا من مقابلة كل زوج مرتب (a , b) من عناصر S بعنصر وحيد من S هو أصغر العددين a , b الذي ينتمي وضوحاً إلى S .

(٢) إن $\lrcorner$ عملية تجميعية ، ذلك أنه أيا كان a , b , c من S :

$$a \lrcorner (b \lrcorner c) = a \lrcorner \min (b , c) = \min (a , \min (b , c)) =$$
$$= \min (a , b , c)$$

$$(a \lrcorner b) \lrcorner c = \min (a , b) \lrcorner c = \min (\min (a , b) , c) =$$
$$= \min (a , b , c)$$

(٣) إن العـــدد 5 هو عنصر محايد في S ، ذلك أنه أيا كان a من S فإن :

$$5 \lrcorner a = \min (5 , a) = a$$

$$a \lrcorner 5 = \min (a , 5) = a$$

وهكذا فإن $(S , \lrcorner)$ مونوئيد . وهذا المونوئيد آبلي لأن :

(٤) $\forall a , b \in S : a \lrcorner b = \min (a , b) = \min (b , a) = b \lrcorner a$

٧ - لتكن E مجموعة العناصر المنتظمة في المجموعة S المزودة بالعملية الداخلية التجميعية $+$. برهن أن E مجموعـــة جزئية مغلقة (مستقرة) بالنسبة لـ $+$.

الحل : ليكن a , b أي عنصرين من E و x , y عنصرين من S يحققان المساواة :

$$(a + b) + x = (a + b) + y$$

لدينـــا :

$$(a + b) + x = (a + b) + y$$

$\Rightarrow a + (b + x) = a + (b + y)$ (العملية $+$ تجميعية)

$\Rightarrow b + x = b + y$ (a منتظم)

(b منتظم) (1) $\Rightarrow x = y$

ونترك للقارىء التثبت من صحة الاقتضاء

(2) $x + (a + b) = y + (a + b) \Rightarrow x = y$

إن (1) , (2) يثبتان أنه أيا كان العنصران المنتظمان a , b من E ، فإن $a + b$ عنصر منتظم ، أي أن $a + b$ عنصر من E كذلك . وبالتالي فإن E مجموعة جزئية مغلقة بالنسبة لـ + .

٨- لنرمز بـ $F(R , R)$ لمجموعة التطبيقات $f : R \to R$. لنعرف « حاصل ضرب » عنصرين f , g من F بأنه تابع $f g$ معرف بالقاعدة :

$$\forall x \in R \quad : \quad (f g)(x) = f(x)\ g(x)$$

والمطلوب اثبات وجود عنصر محايد بالنسبة لعملية الضرب وتعيين هذا العنصر . عين بعـــد ذلك العناصر المنتظمة ، والعناصر القابلة للمناظرة بالنسبة للعملية المفروضة .

الحل : حكيما يوجـد عنصر محايد I في F ، يلزم ويكفي أن يتحقق الشرط :

$$\forall f \in F \quad : \quad f I = I f = f$$

وهكذا يجب أن يكون :

$$(f I)(x) = (I f)(x) = f(x)$$

أو :

$$f(x)\, I(x) = I(x)\, f(x) = f(x)$$

أيا كان f من F و x من R . ومن السهل التأكد أنه عندئذ يكون :

$I(x)=1$. وبالتـــالي فإن العنصر المحـايد في F هو التطبيق الثـابت $I: R \to R$ بحيث $I(x)=1$ أياً كان x من R .

ونترك للقارىء التأكد من أن مجموعة العناصر المنتظمة في F هي :

$$E = \{f \mid f \in F(R, R) \quad و \quad f(x) \neq 0\}$$

ومن أن مجموعة العناصر القابلة للمناظرة في F هي F نفسها .

٩ ـ ليكن a , b عددين حقيقيين مفروضين ، $\top$ عملية داخليـة على R معرفة بالقاعدة :

$$\forall x, y \in R \quad : \quad x \top y = a x + b y$$

عـــين الشروط التي يجب أن يحققهـا a , b كي تكون العملية $\top$:

(١) تجميعية . (٢) تبديلية .

الحل : (١) لدينا :

$$(x \top y) \top z = (a x + b y) \top z = a (a x + b y) + b z =$$

$$= a^2 x + a b y + b z$$

$$x \top (y \top z) = x \top (a y + b z) = a x + b (a y + b z) =$$

$$= a x + b a y + b^2 z$$

وكي تكون $\top$ تجميعية ، يلزم ويكفي أن يتحقق الشرط :

$$\forall x, y, z \in R \quad : \quad a^2 x + a b y + b z = a x + b a y + b^2 z$$

وبالتالي فيجب أن تتحقق المطابقة :

$$\forall x, z \in R \quad : \quad a (a - 1) x + b (1 - b) z = 0$$

التي تقتضي المعادلتين (لماذا ؟) :

$$a(a-1)=0 \quad , \quad b(1-b)=0$$

إن لجملة هاتين المعادلتين أربعة حلول هي :

$$(1)\ a=b=0 \quad , \quad (2)\ a=b=1 \quad , \quad (3)\ a=1, b=0 \quad ,$$
$$(4)\ a=0\ , \ b=1$$

وبالتالي فإن العملية $\top$ المعرفة في كل من الدساتير التالية هي عملية داخلية تجميعية على R :

$$(1')\ x \top y=0 \quad , \quad (2')\ x \top y=x+y \quad , \quad (3')\ x \top y=x \quad ,$$
$$(4')\ x \top y=y$$

(٢) كيما تكون العملية $\top$ تبديلية ، يلزم ويكفي أن يتحقق الشرط :

$$\forall x, y \in R \ : \ x \top y=y \top x$$

وهذا الشرط يكافىء :

$$\forall x, y \in R \ : \ (a-b)x=(a-b)y$$

وكي يتحقق هذا الشرط ، يلزم ويكفي أن يكون $a-b=0$ أي $a=b$ (لماذا ؟) . وبالتالي فإن العملية التبديلية الوحيدة $\top$ هي :

$$x \top y=ax+ay$$

وذلك أيا كان a من R .

• ١٠ ـ لتكن S مجموعة مزودة بالعملية الداخلية التجميعية $\perp$ ، ولنفترض f_a, g_a تطبيقين لـ S في S معرفين بالدستورين : $g_a(x)=x \perp a$ و $f_a(x)=a \perp x$ ،

حيث a عنصر من S . أثبت أن :

$$f_{a \perp b} = f_a \circ f_b \quad , \quad g_{a \perp b} = g_b \circ g_a$$

وذلك بفرض o عملية تركيب تطبيقات S في S .

الحل : لدينا أيا كان العنصر x من S :

(تعريفاً)	$f_{a \perp b}(x) = (a \perp b) \perp x$
(العملية $\perp$ تجميعية)	$= a \perp (b \perp x)$
(وفق تعريف f_a)	$= f_a(b \perp x)$
(وفق تعريف f_b)	$= f_a(f_b(x))$
(وفق تعريف o)	$= (f_a \circ f_b)(x)$

لكن المساواة $f_{a \perp b}(x) = (f_a \circ f_b)(x)$ أيا كان x من S تعني أن $f_{a \perp b} = f_a \circ f_b$. هذا ونترك للقارىء أمر إثبات صحة المساواة الثانية .

١١ - ليكن (M , O) مونوئيداً عنصره المحايد e ، a عنصراً من M . أثبت أنه إذا كان a قابلاً للمبادلة مع b ، وكان لـ a نظير a' ، فإن a' يكون قابلاً المبادلة مع b .

الحل : لما كان $a'Oa = aOa' = e$ ، فإن

$$b\, O\, (a\, O\, a') = (a\, O\, a')\, O\, b \qquad (*)$$

وبما أن العملية O تجميعية ، فإن الطرف الأيمن من (*) يساوي $a\,O\,(a'\,O\,b)$ ، كما أن الطرف الأيسر من (*) هو :

(العملية O تجميعية)	$b\, O\, (a\, O\, a') = (b\, O\, a)\, O\, a'$
(a قابل للمبادلة مع b)	$= (a\, O\, b)\, O\, a'$

$= a \, O \, (b \, O \, a')$ (العملية O تجميعية)

وهكذا فإن المساواة (*) تقتضي المساواة .

$$a \, O \, (b \, O \, a') = a \, O \, (a' \, O \, b)$$

التي يترتب عليها استناداً إلى [٣٤ - ١] المســاواة $b \, O \, a' = a' \, O b$ ، التي تعني أن a' قابل للمبادلة مع b .

١٢ - ليكن (E, o) مونوئيداً ، a عنصراً من E . برهن أن المجموعة A التي كل من عناصرها قابل المبادلة مع a مغلقة بالنسبة لـ o .

الحل : نلاحظ قبل كل شيء أن العنصر الحَايد e لـ o قابل المبادلة مع a ، لذا فإن $A \neq \Phi$. بعدئذ نرى أن :

$\forall x, y \in A : \; a \, o \, (x \, o \, y) = (a \, o \, x) \, o \, y$ (العملية o تجميعية)

$= (x \, o \, a) \, o \, y$ $(x \in A)$

$= x \, o \, (a \, o \, y) = x \, o \, (y \, o \, a) = (x \, o \, y) \, o \, a$ (o تجميعية و $y \in A$)

وبالتالي فإننا نرى أنه إذا كان x, y أي عنصرين من A فإن $x \, o \, y$ عنصر من A ، أي أن المجموعة الجزئية A من E مغلقة بالنسبة لـ o .

١٣ - لتكن $S = \{ (x, y) ; x, y \in R \}$ ، ولنعرف العملية التالية :

$$\forall a, x, y \in R : \qquad a \, (x, y) = (a x, a y)$$

ما نوع هذه العملية ؟

الحل : إن هذه العملية تطبيق لـ $R \times S$ في S ، وبالتالي فهي عملية جبرية خارجية يسرى (قانون تشكيل خارجي أيسر) في S ، وساحة المؤثرات اليسرى لهذه العملية هي مجموعة الأعداد الحقيقية .

١٤ - لتكن E مجموعة مزودة بالعملية الداخلية $\perp$ ، ولنقابل كل عنصر a من E بتطبيقين لـ E في E :

$$f_a : x \to x \perp a \quad / \quad g_a : x \to a \perp x$$

(١) ماذا تعني العلاقتان $f_a = g_a = id_E$ بالنسبة لـ a ؟ (id_E هو التطبيق المطابق لـ E على E) .

(٢) ماهو الشرط الذي يجب أن تحققه $\perp$ حتى يكون :

$$\forall a \in E \ : \ f_a = g_a$$

(٣) برهن أنه إذا كان ($E , \perp$) مونوئيداً ، وكان للعنصر a نظير a' بالنسبة لـ $\perp$ ، فإن كلا من f_a , g_a يكون تقابلاً (أي تطبيقاً متبايناً وغامراً) .

(٤) ماهو نوع العنصر a إذا كان كل من التطبيقين f_a , g_a متبايناً ؟

(٥) لنفرض الآن أن العملية $\perp$ تجميعية وتبديلية . بين أنه إذا وجد عنصر a من E بحيث يكون f_a تقابلاً ، فهنالك عنصر محايد لـ $\perp$ ، كما أن a يكون عندئذ قابلاً للمناظرة .

الحل : (١)

$$f_a = g_a = i\,d_E \Leftrightarrow \forall x \in E \ : \ f_a(x) = g_a(x) = i\,d_E(x)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in E \ : \ x \perp a = a \perp x = x$$

وهذا يعني أن العنصر a الذي يحقق العلاقتين $f_a = g_a = i\,d_E$ هو عنصر محايد لـ $\perp$.

(٢)

$$\forall a \in E \ : \ f_a = g_a \iff \forall a, x \in E \ : \ f_a(x) = g_a(x)$$
$$\iff \forall a, x \in E \ : \ x \perp a = a \perp x$$

وهذا يعني أن الشرط اللازم والكافي حتى يكون $\forall a \in \mathbf{E} : f_a = g_a$ هو أن تكون العملية $\perp$ تبديلية .

(٣) إن f_a تطبيق متباين لأن :

$$f_a(x) = f_a(y) \Rightarrow x \perp a = y \perp a$$
$$\Rightarrow x = y$$ (استناداً إلى [٣٤-١])

كذلك فإن f_a تطبيق غامر ؛ ذلك أنه أيا كان العنصر b من E ، فهنالك عنصر (وحيد) x من E يحقق $x \perp a = b$ [٣٥ - ١] ، أو $f_a(x) = b$. وبالتالي فإن التطبيق f_a غامر أيضاً .

ولما كان f_a متبايناً وغامراً فهو تقابل . ويتم إثبات أن g_a تقابل بصورة مماثلة .

(٤) إذا كان كل من f_a, g_a متبايناً فإنه أيا كان x , y من E :

$$f_a(x) = f_a(y) \Rightarrow x = y \quad , \quad g_a(x) = g_a(y) \Rightarrow x = y$$

وبالتالي فإن :

$$x \perp a = y \perp a \Rightarrow x = y \quad , \quad a \perp x = a \perp y \Rightarrow x = y$$

لذا فإن a عنصر منتظم [٣٣ - ١] .

(ه) لنفرض b عنصراً اختيارياً من E . لما كان f_a تطبيقاً متبايناً وغامراً لـ E على E فهنالك عنصر وحيد x من E بحيث $f_a(x) = b$ أو $x \perp a = b$. لنرمز بـ e للعنصر (الوحيد) من E الذي يحقق $e \perp a = a$. سنبرهن الآن على أن e عنصر محايد لـ $\perp$.

إذا أدخلنا في اعتبارنا أن $\perp$ تجميعية وتبديلية نجد :

$$e \perp b = e \perp (x \perp a) = e \perp (a \perp x) = (e \perp a) \perp x = a \perp x =$$
$$= x \perp a = b$$

ولما كان b عنصراً اختيارياً من E فإن e عنصر محايد أيسر لـ $\perp$. لكن العملية $\perp$ تبديلية ، إذن e عنصر محايد أيمن لـ $\perp$ ، وبالتالي عنصر محايد لـ $\perp$.

إن a قابل للمناظرة بالنسبة لـ $\perp$ ، ذلك أنه لما كان f تقابلاً ، فهنالك عنصر وحيد ، وليكن a' يحقق الشرط $f_a(a') = e$ ، أي $a' \perp a = e$. ولكن العملية $\perp$ تبديلية فرضاً ، إذن فالعنصر a' يحقق العلاقتين : $a' \perp a = a \perp a' = e$ ، وبالتالي فإن a' نظير لـ a بالنسبة لـ $\perp$.

١٥ - لتكن E مجموعة مزودة بعمليتين داخليتين + ، • ، ولنفرض وجود عنصرين محايدين e , ε لـ + و • على الترتيب . لنفرض كذلك أن

$$\forall x , y , u , v \in E \quad : \quad (x + y) . (u + v) = (x . u) + (y . v) \qquad (1)$$

(أ) إلام تؤول العلاقة (1) عندما $x = v = e \; , \; y = u = \varepsilon$ ؟

(ب) أثبت تطابق العمليتين + ، • .

(ح) برهن على وجود خواص تبديلية وتجميعية .

الحل : (أ) إن العلاقة (1) تغدو في هذه الحالة :

$$(e+\varepsilon).(\varepsilon+e)=(e.\varepsilon)+(\varepsilon.e)$$

لكن :

(e عنصر محايد لـ +) $\quad e+\varepsilon=\varepsilon+e=\varepsilon$

(ε عنصر محايد لـ •) $\quad e.\varepsilon=\varepsilon.e=e$

إذن تأخذ العلاقة (1) الشكل : $\varepsilon.\varepsilon=e+e$. ولما كان $\varepsilon.\varepsilon=\varepsilon$ و $e+e=e$ (لماذا ؟) فإن : العلاقة (1) تغدو مساواة بين العنصرين المحايدين e, ε .

(ب) إذا جعلنا في العلاقة (1) $y=u=\varepsilon$ ، فإنها تبقى صحيحة ، ونجد :

$$(x+\varepsilon).(\varepsilon+v)=(x.\varepsilon)+(\varepsilon.v) \qquad (2)$$

ولكن استناداً إلى (أ) :

$$x+\varepsilon=x+e=x \quad ; \quad \varepsilon+v=e+v=v$$

وإذا لاحظنا فضلاً عن ذلك أن :

$$x.\varepsilon=x \quad , \quad \varepsilon.v=v$$

فإن العلاقة (2) تكتب كما يلي :

$$x.v=x+v$$

ولما كانت هذه المساواة صحيحة أيا كان x, v من E فإن العمليتين + ، • متطابقتان .

(حـ) إن تطابق العمليتين + ، • يسمح لنا بكتابة (1) على

النحو التالي :

$$(x + y) + (u + v) = (x + u) + (y + v) \qquad (3)$$

فلو وضعنا $y = e$ ، لوجدنا أن (3) (التي تبقى صحيحة) تغدو على الشكل :

$$x + (u + v) = (x + u) + v$$

ولما كانت هذه العلاقة صحيحة فرضاً أيا كان x , y , v من E ،فإن العملية + (أو •) تجميعية .

أما لو وضعنا في (3) $x = v = e$ ، لوجدنا :

$$(e + y) + (u + e) = (e + u) + (y + e)$$

أو :

$$y + u = u + y$$

ولما كانت هذه المساواة صحيحة فرضاً أيا كان العنصران y , u من E ، فإن العملية + (أو •) تبديلية .

١٦ - ليكن f إيزومورفيزماً لـ $(E , \top)$ على $(E_1 , \top_1)$ ، a , عنصراً منتظماً في $(E , \top)$. أثبت أن العنصر $a_1 = f(a)$ منتظم في $(E_1 , \top_1)$.

الحل : ليكن x_1 , y_1 عنصرين اختياريين من E_1 ، ولنفرض صحة المساواة $a_1 \top_1 x_1 = a_1 \top_1 y_1$. بما أن f إيزومورفيزم فهنالك عنصران (وحيدان) x , y في E بحيث $x_1 = f(x) \; , \; y_1 = f(y)$. وهكذا نرى أن :

$$a_1 \top_1 x_1 = a_1 \top_1 y_1 \Leftrightarrow f(a) \top_1 f(x) = f(a) \top_1 f(y)$$

$$\Leftrightarrow f(a \top x) = f(a \top y)$$ (f إيزومورفيزم)

$$\Leftrightarrow a \top x = a \top y$$ (f متبـــاين)

$$\Rightarrow x = y$$ (a منتظم في E)

$$\Rightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x_1 = y_1$$

وهكذا نكون قد وجدنا :

$$a_1 \top_1 x_1 = a_1 \top_1 y_1 \Rightarrow x_1 = y_1$$

ونجد بصورة مماثلة :

$$x_1 \top_1 a_1 = y_1 \top_1 a_1 \Rightarrow x_1 = y_1$$

وبالتالي فإن $a_1 = f(a)$ عنصر منتظم في E_1 .

١٧ - ليكن f هومومورفيزماً لـ $(E, \top)$ في $(E_1, \top_1)$ ، S مجموعة جزئية غير خالية من E ومغلقة (مستقرة) بالنسبة لـ $\top$ ولتكن S_1 مجموعة جزئية غير خالية من E_1 ومغلقة بالنسبة لـ $\top_1$.

(أ) برهن أن الخيال الهومومورفي $f(S)$ هو مجموعة جزئية مغلقة في E_1 .

(ب) برهن أن الخيال العكسي $f^{-1}(S_1)$ حيث :

$$f^{-1}(S_1) = \{ s \mid s \in S \quad \text{و} \quad f(s) \in S_1 \}$$

هو مجموعة جزئية مغلقة في E .

(أ) انظر [٥٠ – ١] .

(ب) ليكن s_1, s_2 أي عنصرين من $f^{-1}(S_1)$ ؛ إذن $f(s_1), f(s_2)$ ينتميان إلى S_1 . ولما كانت S_1 مغلقة فرضاً بالنسبة لـ $\top_1$ ، فإن الناتج

$f(s_1) \top_1 f(s_2)$ ينتمي إلى S_1 . وبما أن هـذا الناتج يساوي $f(s_1 \top s_2)$
(لأن f هومومورفيزم) ، فإن $f(s_1 \top s_2)$ ينتمي إلى S_1 . وبالتالي
فإن $s_2 \top s_1$ عنصر من $f^{-1}(S_1)$ ، وهذا يثبت أن $f^{-1}(S_1)$ مجموعة جزئية
مغلقة من E .

تمارين غير محلولة

١٨- لتكن o عملية معرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية بالقاعدة :

$$\forall a , b \in R \quad : \quad a \circ b = a + b - a b$$

برهن أن العملية o تبديلية وتجميعية . هل عملية الضرب توزيعية من اليسار بالنسبة للعملية o ؟ .

١٩- اكتب كل جداول العمليات الداخلية على المجموعة $S = \{x,y\}$ ، وعين ما كان منها تبديلياً أو تجميعياً .

٢٠- هل الطرح عملية داخلية على كل من المجموعات الآتية ولماذا ؟

(١) مجموعة الأعداد الصحيحة .

(٢) مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة .

(٣) مجموعة الأعداد الصحيحة التي تقبل القسمة على 3 ؟

٢١- هل عملية الضرب توزيعية من اليسار بالنسبة للطرح من أجل مجموعة الأعداد الحقيقية . اعط بعض الأمثلة لتوضيح ذلك .

٢٢- إذا رمزنا بـ m لعملية المضاعف المشترك البسيط (مثلاً $6 \, m \, 15 = 30$) . بين ما إذا كانت هذه العملية تبديلية أو تجميعية ، ثم برهن أن m غير توزيعية من اليسار بالنسبة لعملية الجمع العادية .

٢٣- لتكن $\llcorner$ عملية داخلية معرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية بحيث

$$\forall a , b \in R \quad : \quad a \llcorner b = \max (a , b)$$

[$\max(a,b)$ تعني أكبر العددين (a,b)] . بين ما إذا كانت العملية ⊥ تبديلية ، وهل هي توزيعية من اليمين بالنسبة لعملية الجمع ؟

٢٤- لتكن o عملية داخلية معرفة على مجموعة E . بين ما إذا كانت هذه العملية تجميعية أو تبديلية ، ثم ادرس وجود عنصر محايد لـ o ، ووجود عناصر قابلة للمناظرة بالنسبة لـ o في كل من الحالات الآتية :

(١) $E = N^*$ ، و $\forall x, y \in N^* : x o y = x^y$

(٢) $E = R$ ، و $\forall x, y \in R : x o y = x + 2y$

(٣) E هي مجموعة الأشعة الطليقة V , o هي عملية جمع الأشعة الطليقة .

(٤) $E = \{+, -\}$, o هي قاعدة ضرب الاشارات :

$$+ o + = + , \quad + o - = - , \quad - o + = - , \quad - o - = +$$

(٥) $E = N \times N$ ، o هي العملية :

$$\forall x, y, x_1, y_1 \in N : (x, y) o (x_1, y_1) = (x + x_1, y + y_1)$$

٢٥- من الممكن أن ترتبط عمليتان داخليتان $\perp$, $*$ على مجموعة E بالعلاقة التالية :

$$\forall x, y, z \in E : (x \perp y) * z = x \perp (y * z)$$

اعط مثالاً على دلك .

٢٦- تحقق أن العملية □ على المجموعة $\{p, q, r, s\}$ الممثلة بالجدول المجاور هي تجميعية وتبديلية . بين كذلك وجود عنصر محايد لـ □ ، وأن لكل عنصر نظيراً بالنسبة لـ □ .

	p	q	r	s
p	p	q	r	s
q	q	r	s	p
r	r	s	p	q
s	s	p	q	r

٢٧- أوجد عملية داخلية على مجموعة مؤلفة من عنصرين a , b بحيث تكون هذه العملية تجميعية وغير تبديلية .

ثم أوجد على هذه المجموعة عملية تبديلية وليست تجميعية

٢٨- نعرف على $E = \{a, b, c\}$ عملية ضرب وفق ما يلي :

$$a^2 = a \ , \ b^2 = b \ , \ c^2 = c \ , \ bc = cb = a \ , \ ca = ac = b \ ,$$

$$ab = ba = c$$

برهن أن هذه العملية الداخلية التبديلية غير تجميعية .

٢٩- لتكن $*$ عملية داخلية على المجموعة S ، ولنفرض وجود عنصر محايد e لـ $*$. برهن أن الشرط اللازم والكافي حتى تكون العمليـــة تجميعية وتبديلية هو أن تتحقق الخاصة التالية :

$$\forall a, b, c, d \in S \ : \ (a * b) * (c * d) = (a * c) * (b * d)$$

٣٠- إذا كانت $\top$ عملية داخلية تجميعية على مجموعة E ، فأثبت صحة ما يلي :

$$\forall a, b, c, d, f \in E \ : \ (((a \top b) \top c) \top d) \top f =$$
$$= a \top (b \top c) \top (d \top f))$$

٣١- نقول عن عملية داخلية O على مجموعة S ، إنها قابلة للقلب إذا تحقق الشرط التالي :

اذا كان العنصران a , b من S ، فهنالك عنصران r , s من S بحيث يكون : $a O r = s O a = b$. أوجد عملية داخلية قابلة للقلب على المجموعة $S = \{ a , b , c , d \}$.

ما هي الخاصة المميزة التي يتمتع بها جدول هذه العملية .

٣٢- لتكن F مجموعة تطبيقات المجموعة E في نفسها . هل يمكنك تصور عملية خارجية في E ساحة مؤثراتها F ؟

٣٣- لتكن $E = \{ e , a , b , c \}$ مجموعة مزودة بعملية ضرب ، e عنصر محايد لهذه العملية . ولنحدد هذه العملية بالعلاقات :

$$a^2 = b^2 = c^2 = e \ , \quad b c = c b = a \ , \quad c a = a c = b \ , \quad a b = b a = c$$

بين أن هـذه العملية تبديلية وتجميعية ، وأن كل عنصر من E قابل للقلب .

٣٤- لتكن E مجموعة القطع المستقيمة من مستقيم ، N مجموعة الأعداد الطبيعية . هل يمكنك تحديد عملية خارجية في E ساحة مؤثراتها N ؟

٣٥- إن كل عنصر منتظم a في مجموعة E عليها عملية داخلية o ، يبقى منتظماً في أية مجموعة جزئية مغلقة بالنسبة لـ o . هل العكس صحيح؟

٣٦- لتكن E مجموعة مزودة بعملية داخلية ⊤ ، $n \in N^*$. بين أن

التطبيق المحدد بالقاعدة :

$$(n , a) \to \overset{n}{\top} a \quad , \quad \overset{1}{\top} a = a$$

يمثل عملية جبرية خارجية .

٣٧- لتكن $D = \{ 3^x \mid x \in N \}$. برهن أن التطبيق $f : N \to D$ المعرف بالقاعدة $f(x) = 3^x$ هو إيزومورفيزم لـ $(N , +)$ على $(D , .)$.

٣٨- لتكن المجموعة R المزودة بعمليتي الجمع والضرب ، ولنفرض

$E = \{ x + y\sqrt{2} \mid x , y \in Q \}$

(١) برهن أن E مغلقة بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب .

(٢) بين أن لكل عنصر مغاير للصفر من E نظيراً بالنسبة لعمليتي الجمع ونظيراً آخر بالنسبة لعملية الضرب .

(٣) برهن أن البنية الجبرية $(E , + , .)$ إيزومورفية للبنية الجبرية $Q \times Q$ التي نعرف عليها عمليتين للجمع والضرب وفق القاعدتين :

$$(x , y) + (x_1 , y_1) = (x + x_1 , y + y_1)$$

$$(x , y)\,(x_1 , y_1) = (x\,x_1 + 2\,y\,y_1 , x\,y_1 + y\,x_1)$$

(٤) إذا استعضنا في دراستنا هذه عن $\sqrt{2}$ بـ $\sqrt{d}$ $(d \in N^*)$ ، فما هو الشرط الذي يجب أن يحققه d حتى تبقى النتائج (١) – (٣) قائمة ؟