# الفصل الثالث

## نظرية الزمر

**مقدمة :**

لقد رأينا في الفصل الأول أن من البنى الجبرية ما هو مزود بعملية جبرية واحدة ( أي بقانون واحد للتشكيل ) ، ومنها ماهو مزود بأكثر . وفي هذا الفصل سنعرض للزمرة التي هي من أهم البنى الجبرية ذات العملية الجبرية الواحدة ، بينما سنتطرق في الفصول اللاحقة إلى بنى جبرية ذات عمليتين جبريتين .

تعد نظرية الزمر من أهم مواضيع الجبر المجرد ، فهي تلعب دوراً رئيسياً في نظرية غالوا Galois ( ١٨١١ - ١٨٣٢ ) التي تعالج المسائل المتعلقة بالحلول الجبرية لكثيرات الحدود (*) . والدور الذي تلعبه نظرية

---

( * ) يقال إن للمعادلة : $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$ ( حيث أمثال كثير الحدود في الطرف الأيسر أعداد حقيقية أو عقدية و n عدد صحيح موجب ) مجموعة حلول جبرية إذا أمكن التعبير عن كل من حلولها بدلالة أمثالها باستخدام عدد منته من عمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة والجذر . ومن المعلوم أن لأي معادلة درجتها n لا تتجاوز 4 مجموعة حلول ←

الزمر في التوبولوجيا لا يقل أهمية وشمولاً عنه في علم الجبر ، ذلك أن نسبة لايستهان بها من البحوث التي تمت في السنوات الأخيرة في علم التوبولوجيا تعتمد بشكل مركز على نظرية الزمر ، حتى بات من الضروري لعلماء التوبولوجيا ( الجبرية ) الاحاطة بنظرية الزمر وسبر أغوارها على نحو لا يقل عمقاً عن علماء الجبر أنفسهم .

وبالنسبة لعلم الهندسة ، فحتى القرن التاسع عشر لم يكن الرياضيون على وفاق حول طبيعة علم الهندسة وحول المواد التي يجب تدريسها في هذا الحقل . ولم يفض هذا الخلاف إلا عام ١٨٧٢ بفضل العالم الألماني كلاين Klein الذي استخدم الزمر لتعريف علم الهندسة تعريفاً دقيقاً وشاملاً . فقد أعلن كلاين فيما يسمى منهاج إيرلانكر ( Erlanger - Program ) أن الهندسة هي العلم الذي يدرس تلك الخواص لمجموعات النقط والمستقيمات ، التي لا تتغير عند القيام « بزمرة » معينة من التحويلات ( التطبيقات ) . ففي الهندسة الاقليدية مثلاً ، فإن مايهمنا هو « زمرة الحركات الصلبة » .

ويجدر بنا أن نضيف إلى ما تقدم ، بأن مجال تطبيق نظرية الزمر

---

جبرية . بل توجد دساتير تعبر عن هذه الحلول بدلالة الأمثال الواردة فيها . أما في الحالة $n > 4$ ، فقد أثبت العالمان روفيني Ruffini ( ١٧٦٥ - ١٨٢٢ ) وآبل Abel ( ١٨٠٢ - ١٨٢٩ ) استحالة إيجاد دساتير حالة ( شبيهة بالدساتير الحالة عندما $n \leq 4$ ) لجذور هذه المعادلات ، إلا أن غالوا اكتشف الشروط التي يجب أن تتحقق في معادلة درجتها لاتقل عن الخامسة كي تقبل هذه المعادلة مجموعة حلول جبرية .

تعدى حقل العلوم الرياضية البحتـــة إلى علم الفيزياء النظرية والكيمياء الكوانتية ، وحتى إلى علم البلورات ، الأمر الذي جعل هـذه النظرية تشغل بالنسبة لاتساع مجال تطبيقاتها المركز الثاني بعد الجبر الخطي بـين فروع علم الجبر .

هذا ونأمل من القارىء الافادة من هذه النظرية لسبب وجيه آخر : ذلك أن المبادىء ( المسلمات ) البسيطة نسبياً لبنية الزمرة توفر فرصـة ممتازة لفهم أفضـــل وأعمق للطريقـــة الاستنتاجية الـتي تحتـــل مكان القلب من العلوم الرياضية المعاصرة . فعند دراستنا لمجموعة الأعداد الصحيحة في الفصل السابق ، نعتقد أنه من العسير على الطالب أن يحرر نفسه من كمية وافرة من الحقائق التي تجمعت لديه في سياق حياته المدرسية ، الأمر الذي يجعله يعتمد تلقائياً على هذه الحقائق مبتعداً عن البراهين المبنية مباشرة على المبادىء ( axioms ) والتعاريف . ولمـــا لم تكن الزمرة مألوفة لدى الطالب ، فإن الدارس لها سيضطر غالباً إلى معالجـة جديدة ودقيقة ، وما يشجعه على هذا بساطة وقلة المبادىء التي تستند عليها الزمرة .

ويجدر بنا أخيراً أن نشير إلى أن سرد نظرية الزمر بجميع تفاصيلها يتطلب كتاباً كاملاً من الحجم الكبير . وبالطبع ، فإن هذا الكتاب الذي يبحث في مبادىء الجبر المجرد لن يطمح إلى الالمام بجميع جوانب هذه النظرية وإنما سيكتفى بمس بعض النقاط الرئيسية فيها .

١ ــ ٣ **تعريف** : لتكن $G$ مجموعة ، $o$ عملية داخلية على $G$ . نقول عن البنية $(G , o)$ إنها زمرة إذا توفرت الشروط ( المبادىء ) التالية :

(١) أن تكون $o$ تجميعية .

(٢) أن تحوي $G$ عنصراً محايداً $e$ لـ $o$ .

(٣) أن يوجد لكل عنصر $a$ من $G$ نظير $a'$ بالنسبة لـ $o$ (*).

**ملاحظـــات :**

٢ ـ ٣ إذا كانت $(G, o)$ زمرة فإننا نقول « إن $G$ زمرة بالنسبة لـ $o$ » ، أو اختصاراً ، « إن $G$ زمرة » ، إذا لم يكن ثمـــة مجال للالتبـاس .

٣ ـ ٣ لا يمكن أن تكون دعامة الزمرة خالية لضرورة احتوائها على عنصر محايد .

٤ ـ ٣ قد يرمز أحياناً للعملية $o$ بـ $+$ ، عندها تسمى الزمرة **جمعية** ويرمز للعنصر المحايد $e$ بـ $0$ ويسمى صفراً ، كما يرمز للنظير $a'$ بـ $(-a)$ ويسمى « ناقص $a$ » أو المقـــلوب الجمعي . ويسمى النـاتج $a+b$ « مجموع العنصرين $a, b$ » ، ويكتب المجموع $a+(-b)$ عندئذ على الشكل $a-b$ ويسمى حاصل طرح $b$ من $a$ ( أو فضل $a$ عن $b$ ) .

كذلك يرمز أحياناً لـ $o$ باشـارة الضرب $\cdot$ ، عندها تسمى الزمرة ضربية ويرمز للعنصر المحايد $e$ بـ $1$ ويسمى واحداً ، كما يرمز للنظير $a'$ بـ $a^{-1}$ ويسمى المقلوب الضربي لـ $a$ ، أو اختصاراً ، مقلوب $a$ . ويسمى

---

( * ) إذا حذفنا الشرط (٣) فتسمى البنية $(G, o)$ مونوئيداً [٠٣-١] . ولو حذفنا الشرطـين (٣) ، (٢) فنسمي $(G, o)$ عندئـذ كربوئيد Groupoïd . وإذا حذفنا الشروط (٣) ، (٢) ، (١) . فإن بعض المؤلفين يطلق على $(G, o)$ اسم نصف الزمرة Semigroup .

الناتج $a.b$ حاصل ضرب أو جداء $a , b$ ، وغالباً ما يكتب $a.b$ بالشكل $ab$ .

٥ - ٣ يسمى العدد الأساسي ( الكاردينالي ) $|G|$ للمجموعة $G$ مرتبة الزمرة $(G , o)$ . وهكذا فإن مرتبة زمرة منتهية عدد عناصرها $n$ تساوي $n$ .

٦ - ٣ ليس [ ١ - ٣ ] هو التعريف الوحيد للزمرة ، فهنالك تعاريف أخرى أشهرها تعريف الروسي كوروش Kurosh الذي نحصل عليه بأن نستعيض عن (٢) ، (٣) من [ ١ - ٣ ] بالشرطين التاليين :

(٢َ) أيا كان العنصران $a , b$ من $G$ فهنالك عنصر $x$ من $G$ بحيث : $a o x = b$ .

(٣َ) أيا كان العنصران $a , b$ من $G$ فهنالك عنصر $y$ من $G$ بحيث : $y o a = b$ .

( انظر التمرين المحلول رقم ٩١) .

**أمثلة :**

٧ - ٣ إن $Z$ زمرة بالنسبة لعملية الجمع العادية : ذلك أن مجموع عددين صحيحين هو عدد صحيح ( أي + عملية داخلية على $Z$ ) وأن عملية الجمع العادية هي تجميعية كما نعلم ، وأن هنالك عنصراً محايداً لـ + ( هو العدد صفر ) ، وأن لكل عنصر $a$ مقلوباً جمعياً ( وهو $-a$ ) . كذلك فإن كلا من $Q$ ، $R$ ، $C$ يشكل زمرة جمعية . أما $N$ فليست كذلك ( لماذا ؟ ) .

٨ - ٣ إن $Q^*$ تشكل زمرة بالنسبة لعملية الضرب العادية ، ذلك أن عملية الضرب مغلقة على $Q^*$ ، وأن هذه العملية تجميعية ، وأن هنالك عنصراً محايداً هو 1 ، وأن لكل عنصر a من $Q^*$ مقلوباً .

كذلك فإن كلا من $R^*$ ، $C^*$ تشكل زمرة ضربية، أما $Z^*$ فليست كذلك ( لماذا ؟ ) .

٩ - ٣ إن $G = \{ a , b , c \}$ لا تشكل زمرة بالنسبة للعملية $\square$ الممثلة بالجدول الوارد أدناه ، رغم أن هذا الجدول يبين مباشرة أن $\square$ عملية داخلية ، وأن a هو عنصر محايد لـ $\square$ ، وأن لكل عنصر نظيراً على الأقل ( $a' = a$ , $b' = c$ , $c' = b$ ) . والسبب في أن ( $G , \square$ ) ليست زمرة هو أن $\square$ غير تجميعية . ففي الحقيقة ، لدينا ( على الأقل ) :

$$b \square (b \square c) = b \square a = b \quad ; \quad (b \square b) \square c = a \square c = c$$

وبالتالي فإن :

$$b \square (b \square c) \neq (b \square b) \square c$$

| $\square$ | a | b | c |
|---|---|---|---|
| a | a | b | c |
| b | b | a | a |
| c | c | a | b |

١٠ - ٣ لنرمز بـ $R_1 , R_2 , R_3$ للدورانات المطبقة على المثلث متساوي الأضلاع ABC حول مركزه O ، والتي تتم في مستوي المثلث باتجاه يائل

اتجـــاه الانتقال من A الى C عن طريق B ، وبالزوايا $360^\circ$ , $240^\circ$ , $120^\circ$ على الترتيب . انرمز كذلك بـ $R_4 , R_5 , R_6$ لدوران المثلث حول الارتفاعات $AA' , BB' , CC'$ على الترتيب كل بزاوية قدرها $180^\circ$ ( $R_4 , R_5 , R_6$ هي إذن تناظرات بالنسبة لـ $AA' , BB' , CC'$ ) . فإذا اصطلحنا على أن ناتج دوران $R_i$ يعقبه دوران $R_j$ هو $R_i \# R_j$ فإن مجموعة الدورانات $R_1 , \ldots , R_6$ تشكل زمرة بالنسبة لـ # . وفي الحقيقة فإن # عملية داخلية جدولها :

| # | $R_1$ | $R_2$ | $R_3$ | $R_4$ | $R_5$ | $R_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $R_1$ | $R_2$ | $R_3$ | $R_1$ | $R_5$ | $R_6$ | $R_4$ |
| $R_2$ | $R_3$ | $R_1$ | $R_2$ | $R_6$ | $R_4$ | $R_5$ |
| $R_3$ | $R_1$ | $R_2$ | $R_3$ | $R_4$ | $R_5$ | $R_6$ |
| $R_4$ | $R_6$ | $R_5$ | $R_4$ | $R_3$ | $R_2$ | $R_1$ |
| $R_5$ | $R_4$ | $R_6$ | $R_5$ | $R_1$ | $R_3$ | $R_2$ |
| $R_6$ | $R_5$ | $R_4$ | $R_6$ | $R_2$ | $R_1$ | $R_3$ |

ومن السهل التحقق من أن # تجميعية ، وأن لهذه العملية عنصراً محايداً هو $R_3$ ، وان لكل عنصر نظيراً بالنسبة لـ # :

$$(R_1' = R_2 , R_2' = R_1 , \mathbf{R}_3' = R_3 , R_4' = R_4 , R_5' = R_5 , R'_6 = R_6)$$

١١ - ٣ **الزمرة التناظرية لمجموعة** : نسمي كل تقابل ( أي تطبيق متباين وغامر ) لمجموعة E على نفسها **تبديلاً** أو **تعويضاً** لـ E . سنبرهن الآن أن مجموعـــة تعويضات E تشكل زمرة بالنسبة لعملية تركـيب التطبيقات o .

(١) إذا كان كل من $f, g$ تبديلاً لـ $E$ فإن $g o f$ تبديل لـ $E$ .
في الحقيقة إن $g o f$ متباين لأن :

$(g o f)(x) = (g o f)(y) \Leftrightarrow g(f(x)) = g(f(y))$ ( تعريفاً )

$\Rightarrow f(x) = f(y)$ ( لأن $g$ متباين )

$\Rightarrow x = y$ ( لأن $f$ متباين )

كذلك فإن $g o f$ غامر ، ذلك أنه أيا كان $x$ من $E$ ، فهنالك عنصر $z$ من $E$ بحيث : $g(z) = x$ ( لأن $g$ غامر ) . ولما كان $f$ غامراً كذلك ، فهنالك عنصر $y$ من $E$ بحيث $f(y) = z$ . وبالتالي فإن $g(f(y)) = x$ أو $(g o f)(y) = x$ . وهذا يعني أنه أيا كان $x$ من $E$ فهنالك عنصر $y$ من $E$ يحقق العلاقة $(g o f)(y) = x$ ، وبالتالي فإن $g o f$ غامر .

وهكذا نرى أنه إذا كان كل من $f, g$ تبديلاً لـ $E$ فإن $g o f$ تبديل لـ $E$ ، أي أن $o$ هي عملية داخلية على مجموعة تباديل $E$ .

(٢) إن العملية $o$ تجميعية ( انظر I ) .

(٣) إن التطبيق المطابق $id_E$ هو عنصر محايد لـ $o$ ، ذلك أنه أيا كان التبديل $f$ فإن :

$$\forall x \in E : \quad (f o id_E)(x) = f(id_E(x)) = f(x) \Rightarrow f o id_E = f$$

$$\forall x \in E : \quad (id_E o f)(x) = id_E(f(x)) = f(x) \Rightarrow id_E o f = f$$

(٤) لكل تعويض $f$ لـ $E$ نظير $f^{-1}$ بالنسبة لـ $o$ . في الحقيقة ، إذا كان $x$ عنصراً اختيارياً من $E$ ، فهنالك عنصر $y$ من $E$ يحقق :

$f(y) = x$ ( لأن f غامر ) . ولما كان f متبايناً فإن y وحيد . لذا فمن الطبيعي أن نعرف تابعاً متبايناً وغامراً $f^{-1}$ لـ E على E بالدستور $f^{-1}(x) = y$ . ويسمى $f^{-1}$ عادة التابع العكسي لـ f . ومن الواضح أن :

$$\forall x \in E \quad : \quad (f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(y) = x = id_E\, x$$

$$\Rightarrow \; f \circ f^{-1} = id_E$$

ويبرهن بصورة مماثلة أن : $f^{-1} \circ f = id_E$

وهكذا فإننا نرى أن مجموعة تباديل E تشكل زمرة بالنسبة لعملية تركيب التطبيقات o ، وتسمى هذه الزمرة زمرة **تباديل** ( **أو تعويضات** ) E ، كما تسمى **الزمرة التناظرية** لـ E ، ويرمز لها بـ $S_E$ .

**١٢ - ٣ الزمرة التناظرية من الدرجة n** : إذا كانت E مجموعة منتهية عدد عناصرها n ( Card E = n ) ، فإن $S_E$ تدعى عندئذ الزمرة التناظرية من الدرجة n ويرمز لها بـ $S_n$ . ومن الواضح أن مرتبة $S_n$ هي n! . ولو رمزنا عندئذ بـ $\{1, 2, \ldots, n\}$ إلى المجموعة E ، فإننا نرمز عادة إلى كل عنصر من $S_n$ بسطرين محصورين بين قوسين ، بحيث يقابل كل عدد من السطر العلوي العدد الواقع دونه من السطر السفلي . وعلى سبيل المثال فإن :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

هو تعويض f من $S_4$ حيث :

$$f(1) = 1 \;,\; f(2) = 3 \;,\; f(3) = 4 \;,\; f(4) = 2$$

هذا ويمكن كتابة التبديل نفسه بأشكال مختلفة تبعاً لترتيب الأعداد في السطر العلوي . وعلى سبيل المثال فإن الرموز :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} ، \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} ، \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

تشير إلى التعويض نفسه ، حيث : $1 \to 2 \;,\; 2 \to 3 \;,\; 3 \to 1$

ويشار غالباً إلى الناتج $p \circ q$ بـ $pq$ ويدعى « حاصل ضرب » التعويض $q$ بالتعويض $p$ . وهكذا فإذا كان

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix},\quad q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

عنصرين من $S_5$ فإن :

$$p\,q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

**الخواص الابتدائية للزمر :**

١٣ - ٣ **نظرية** . العنصر المحايد في الزمرة وحيد [ ٢٧ - ١ ] ، ولكل عنصر $a$ من الزمرة نظير وحيد $a'$ [ ٢٨ - ١ ] .

١٤ - ٣ **نظرية** . كل عناصر الزمرة $(G, o)$ منتظمة ، أي أن :

$$\forall a, b, c \in G : \begin{cases} a \circ b = a \circ c \Rightarrow b = c \\ b \circ a = c \circ a \Rightarrow b = c \end{cases}$$

**البرهان** : بما ان لكل عنصر من الزمرة نظيراً ، فان صحة هذه

النظرية ناتج من النظرية [ ٣٤ - ١ ] . لاحظ أنه في الحالة العامة :

$$b\,o\,a = a\,o\,c \quad \text{لاتقتضي} \quad b = c$$

وعلى سبيل المثال فإذا اخترنا العناصر :

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 4 & 7 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix},$$

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 4 & 5 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

من $S_7$ [ ٣ - ١٢ ] فإن :

$$b\,a = a\,c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 7 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

رغم أن $b \neq c$ كما هو واضح .

**١٥ - ٣ نتيجة** : إن كان $a$ , $b$ عنصرين من زمرة وكان $aob = a$ أو $boa = a$ فإن $b = e$ ، لأن المساواة الأولى هي $aob = aoe$ ، والمساواة الثانية هي : $boa = eoa$ .

**١٦ - ٣ نظرية** . إن نظير نظير أي عنصر $a$ من زمرة هو العنصر $a$ نفسه ، أي : $(a')' = a$

**البرهان** : لما كان $a'$ نظيراً لـ $a$ ، فان $a$ نظير لـ $a'$ [ ٢٢ - ١ ].
وبما أن $(a')'$ نظير لـ $a'$ أيضاً ، فإنه يترتب على كون النظير واحداً بالنسبة للعملية التجميعية [ ٢٨ - ١ ] أن $(a')' = a$ .

**١٧ - ٣ نظرية** . إذا كانت ( $G$ , $o$ ) زمرة فان :

$$\forall a, b \in G \quad : \quad (a \circ b)' = b' \circ a'$$

**البرهان** : إن صحة هذه الدعوى ناتجة من النظرية [ ٣٢ - ١ ] بعد ملاحظة أن الزمرة هي مونوئيد لكل عنصر منه نظير فيه .

ويمكننا بالافادة من هذه المساواة ، ومن طريقة التراجع إثبات التالي :

$$\forall a, b, \ldots, p, q \in G \quad : \quad (a \circ b \circ \ldots \circ p \circ q)' =$$
$$= q' \circ p' \circ \ldots \circ a' \circ b'$$

**١٨ - ٣ نظرية** . لتكن $(G, o)$ زمرة . فأيا كان العنصران $a, b$ من $G$ ، فإن لكل من المعادلتين :

$$a \circ x = b \qquad , \qquad y \circ a = b$$

حلًا وحيداً في $G$ .

**البرهان** : إن صحة هذه الدعوى ناتجة من النظرية [ ٣٥ - ١ ] بعد ملاحظة أن الزمرة هي مونوئيد لكل عنصر منه نظير فيه .

هذا ونجد حل المعادلة الأولى على النحو التالي :

$$a \circ x = b \Rightarrow a' \circ (a \circ x) = a' \circ b \Rightarrow (a' \circ a) \circ x = a' \circ b \Rightarrow$$
$$e \circ x = a' \circ b \Rightarrow x = a' \circ b$$

ونجد بصورة مماثلة أن حل المعادلة $y \circ a = b$ هو $y = b \circ a'$ .

**١٩ - ٣ تعريف** : لتكن $(G, o)$ زمرة . فإذا كان $a$ عنصراً من $G$ ، $m$ عدداً صحيحاً موجباً فإننا نعرف :

$$a^m = a \circ a \circ \ldots \circ a \qquad (\text{عدد الحدود } m)$$

وإذا رمزنا بـ e للعنصر المحايد في G ، فاننا نعرف :

$$a^0 = e$$

وإذا رمزنا بـ $a^{-1}$ لنظير a بالنسبة لـ o ، فاننا نصطلح على أن :

$$a^{-m} = (a^{-1})^m = a^{-1} \, o \, a^{-1} \, o \ldots o \, a^{-1}$$ ( عدد الحدود m )

هذا وفي الحالة الخاصة عندما تكون الزمرة جمعية ، فاننا نعرف ( بفرض m عدداً صحيحاً موجباً )

$$m\,a = a + a + \ldots + a$$ ، ( عدد الحدود m )

$$(-m)\,a = m\,(-a) = (-a) + (-a) + \ldots + (-a)$$

( عدد الحدود m )

وإذا رمزنا بـ O للعنصر المحايد في الزمرة الجمعية [ ٤ - ٣ ] فاننا نصطلح على أن :

$$0\,a = O$$

ويجب التنبيه في هذا الصدد إلى أن m a ( m عدد صحيح موجب أو سالب أو صفر ) هو مجرد رمز نعتمده بغية الاختصار في الكتابة ، ولا يجوز البتة الظن بأنه حاصل ضرب عدد صحيح m بالعنصر a من G ، فليس من مبرر لمثل هذا الظن ، ذلك أننا بصدد عملية جمع عناصر من G ، ولا مجال للكلام عن عملية ضرب الأعداد الصحيحة وعناصر G .

هذا ونترك للقارىء إثبات صحة النظرية الواضحة التالية .

٢٠ - ٣ نظرية : لتكن ( G , o ) زمرة عنصرها المحايد e ،

وليكن $a$ عنصراً من $G$ . عندئذ يكون :

$$e^n = e \quad (١)$$

$$a^m \circ a^n = a^{m+n} \quad (٢)$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad (٣)$$

وذلك أيا كان العددان الصحيحان $m , n$ .

**٢١ - ٣ الزمرة التبديلية ( الآبلية )** : إذا كانت العملية $o$ في الزمرة $(G , o)$ تبديلية ، أسمينا الزمرة تبديلية أو آبلية [ ١٢ - ١ ] . وبالاضافة إلى الخواص الابتدائية للزمر التي أوردناها فيما تقدم ، فان الزمرة التبديلية $(G , o)$ تمتاز بالخاصة البينة التالية :

أيا كانت العناصر $a , b , \ldots , p$ من $G$ ، فإن الناتج $aobo \ldots op$ لا يتغير عند العبث بترتيب العناصر ، أو عند الاستعاضة عن بعض هذه العناصر بناتجها . ويترتب على هـــذا مثلاً أنه يمكن إيراد نظير الناتج $aobo , \ldots , op$ بنفس الترتيب ، أي :

$$(a \circ b \circ \ldots \circ p)' = a' \circ b' \circ \ldots \circ p'$$

وأنه لا فرق بين حلي المعادلتين $a \circ x = b \ , \ x \circ a = b$ ، ذلك أن حل كل منهما هو $x = a' \circ b = b \circ a'$ .

وعلى سبيل المثال فإن أي زمرة تناظرية $S_n$ ( درجتها لا تقل عن 3 ) هي زمرة غير آبلية . فاذا كانت $n = 5$ مثلاً ، واخترنا من $S_5$ العنصرين :

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

فإن :

$$a\,b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad b\,a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

كذلك فان زمرة دورانات المثلث [ ١٠ - ٣ ] غير آبلية .

## الزمرة الجزئية

٢٢ - ٣ **تعريف** : لتكن ( G , o ) زمرة ، H مجموعة جزئية من G . نقول عن H إنها زمرة جزئية من الزمرة G إذا كانت H نفسها زمرة بالنسبة (*) لـ o .

**ملاحظات** :

٢٣ - ٣ لما كانت الزمرة الجزئية هي زمرة ، فلا يمكن أن تكون خالية لاحتوائها على عنصر محايد .

٢٤ - ٣ في كل زمرة G زمرتان جزئيتان على الأقل هما الزمرة G نفسها ، والزمرة الجزئية {e} الحاوية على العنصر المحايد e لـ o .

٢٥ - ٣ إذا كانت H زمرة جزئيـــة من G ، وكانت K زمرة جزئية من H ، فان K زمرة جزئية من G .

٢٦ - ٣ لكل الزمر الجزئية من الزمرة ( G , o ) عنصر محايد واحد

---

( * ) أو بصورة أدق ، بالنسبة لمقصور العملية الداخلية ( أي التابـع ) o على H .

هو العنصر المحايد e في G . وفي الحقيقة ، إذا كان u هو العنصر المحايد للزمرة الجزئية H مثلاً ، فيجب أن يتحقق في G المساواتان :

$$e\,o\,u = u\,o\,e = u$$

كما يجب أن يتحقق في H المساواة :

$$u\,o\,u = u$$

وبالتالي فيجب أن يتحقق في G المساواة $u\,o\,u = e\,o\,u$ التي تقتضي $u=e$ لأن جميع عناصر الزمرة منتظمة [ ١٤ - ٣ ] .

**أمثـــلة :**

٢٧ - ٣ إن مجموعة الأعداد الصحيحة Z هي زمرة جزئية من الزمرة ( R , + ) أي زمرة الأعداد الحقيقية R بالنسبة لعملية الجمع العادية + . كذلك فان مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية تشكل زمرة جزئية من الزمرة ( Z , + ) . وبالتالي فان مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية تشكل زمرة جزئية من الزمرة ( R , + ) [ ٢٥ - ٣ ] ، الأمر الذي يمكن التأكد منه مباشرة دون استخدام الزمرة الوسيطة ( Z , + ) .

هذا ولا تشكل مجموعة الأعداد الصحيحة الفردية زمرة جزئية من ( Z , + ) ( ولا من الزمرة ( R , + ) ) .

٢٨ - ٣ إن كلا من $\{ R_1 , R_2 , R_3 \}$ , $\{ R_3 , R_4 \}$ يشكل زمرة جزئية من زمرة دورانات المثلث الواردة في [ ١٠ - ٣ ] .

٢٩ - ٣ نظرية : لتكن ( G , o ) زمرة و H مجموعة جزئية من

إن الشرط اللازم والكافي حتى تكون H زمرة جزئية من الزمرة G . هو أن تتحقق الشروط التالية :

(١) أن تكون H مجموعة غير خالية .

(٢) أن تكون H مغلقة ( أي مستقرة ) بالنسبة لـ o .

(٣) أن تحوي H نظير أي من عناصر H بالنسبة لـ o .

**البرهان** : لزوم الشروط واضح ، ذلك أنه إذا كانت H زمرة جزئية من G ، فهي زمرة بالنسبة لـ o ، وبالتالي فهي غير خالية [ ٢٣ – ٣ ] وهي مغلقة بالنسبة لـ o ، وتحوي نظير أي عنصر منتم اليها .

وبالعكس سنفترض الآن أن H مجموعة جزئية من G تحقق الشروط (١) - (٣) ، ولنبرهن أن H زمرة .

ويكفي لهذا الغرض ، إذا أدخلنا في اعتبارنا الشرطين (٢) ، (٣) وأن العملية o تجميعية على H لأنها تجميعية على G ، يكفي إثبات وجود عنصر محايد في H بالنسبة لـ o .

في الحقيقة ، لما كانت H غير خالية استناداً إلى (١) ، فانها تحتوي على عنصر a على الأقل . وبالتالي فان $a' \in H$ استناداً إلى (٣) . ولما كانت H مغلقة بالنسبة لـ o استناداً إلى (٢) ، فان $aoa' = e$ ينتمي إلى إلى H . وبما أن e هو العنصر المحايد في G فهو العنصر المحايد في H [ ٢٦ - ٣ ] .

٣٠ ـ ٣ **ملاحظة** . في الحالة الخاصة التي تكون فيها المجموعة الجزئية

H في النظرية السابقة منتهية ، يمكن حذف الشرط الأخير (٣) ( راجع التمرين المحلول ٩٧ ) .

**٣١ - ٣ مثال** : ليكن $k$ عدداً صحيحاً مثبتاً . إن مجموعة الأعداد الصحيحة $K = \{ km \mid m \in Z \}$ تشكل زمرة جزئية من زمرة الأعـــداد الصحيحة بالنسبة لعملية الجمع العادية ، ذلك أن $K \neq \Phi$ وضوحاً ، كما أن حاصل جمع أي عنصرين $km_1$ و $km_2$ من $K$ هو العنصر $k(m_1 + m_2)$ الذي ينتمي إلى $K$ ( أي أن $K$ مغلقة بالنسبة للعملية + ) . وأخيراً فان نظير أي عنصر $km$ من $Z$ هو العنصر $-km$ الذي ينتمي إلى $K$ ( لأنه يساوي حاصل ضرب العدد $k$ بالعدد الصحيح $(-m)$ ) .

**٣٢ - ٣ مثال** : لتكن $G = \{ e , a , b , c , d , f \}$ زمرة بالنسبة للعملية الداخلية $(\cdot)$ الممثلة بالجدول :

| $\cdot$ | e | a | b | c | d | f |
|---|---|---|---|---|---|---|
| e | e | a | b | c | d | f |
| a | a | b | e | f | c | d |
| b | b | e | a | d | f | c |
| c | c | d | f | e | a | b |
| d | d | f | c | b | e | a |
| f | f | c | d | a | b | e |

إن استخدام [ ٣٠ - ٣ ] يبين مباشرة بأن $\{e , a , b\}$ و $\{ e , f \}$ زمرتان جزئيتان من الزمرة $G$ .

**٣٣ ـ ٣ نظرية** : لتكن $(G, o)$ زمرة ، $H$ مجموعة جزئية من $G$ . إن الشرط اللازم والكافي كي تكون $H$ زمرة جزئية من الزمرة $G$ هو أن يتوفر الشرطان التاليان :

(١)َ أن تكون $H$ مجموعة غير خالية .

(٢)َ أيا كان العنصران $a , b$ ( المختلفان أو المتساويان ) من $H$ ، فان العنصر $a o b'$ ينتمي كذلك إلى $H$ .

**البرهان** : إن الشرطين لازمان ، ذلك أنه إذا كانت $H$ زمرة جزئية من $G$ فهي غير خالية [ ٢٣ ـ ٣ ] . ولما كانت $H$ زمرة بالنسبة لـ $o$ [ ٢٢ ـ ٣ ] فانه أيا كان $a , b$ من $H$ ، فان $b'$ عنصر من $H$ . ولما كانت $H$ مغلقة بالنسبة لـ $o$ ، فان $a o b'$ عنصر من $H$ كذلك .

لننتقل إلى البرهان على كفاية الشرطين ، أي لنثبت أنه إذا كانت $H$ مجموعة جزئيـة من $G$ تحقق الشرطين (١)َ ، (٢)َ ، فان $H$ زمرة. في الحقيقة ، لما كانت $H$ غير خالية ( الشرط (١)َ ) فانها تحتوي على عنصر $a$ ( على الأقل ) . عندئذ نجد استناداً إلى الشرط (٢)َ أن $a o a' = e$ ينتمي إلى $H$ . وبما أن $e$ عنصر محايد في $G$ فهو عنصر محـايد في $H$ كذلك [ ٢٦ ـ ٣ ] . وبتطبيق الشرط (٢)َ ثانيـــة ، ولكن الآن على $a , e$ نجد :

$$a \in H \Rightarrow e o a' \in H \Rightarrow a' \in H \qquad (*)$$

أي أن لكل عنصر $a$ من $H$ نظيراً $a'$ منتمياً إلى $H$ كذلك .

سنثبت الآن أنه أيا كان العنصران $a , b$ من $H$ فان $a o b$ عنصر

من H . في الحقيقـــة ، نرى استناداً إلى ( * ) أن $b'$ عنصر من H .
وبالتالي ، واستناداً إلى (٢)َ يكون $a \circ (b')' = a \circ b$ عنصراً من H .

وهكذا نكون قد توصلنا إلى أن الشرطين (١)َ ، (٢)َ يقتضيـان الشروط (١) ، (٢) ، (٣) من [ ٢٩ - ٣ ] ، وبالتالي فان H زمرة جزئية من الزمرة G .

٣٤ - ٣ **مثال** : لتكن $(G, \top)$ زمرة ، ولنقابل كل عنصر a من G بتطبيق $f_a$ لـ G في G معرف بالقاعدة :

$$\forall x \in G \quad : \quad f_a(x) = a \top x$$

وسنبرهن الآن أن مجموعة التطبيقات :

$$F = \{ f_a \mid f_a(x) = a \top x \quad : \quad a, x \in G \}$$

تشكل زمرة جزئية من الزمرة التناظرية $S_G$ .

( أ ) إن التطبيق $f_a : G \to G$ غامر ، ذلك أنه أيا كان b من G ، فهنالك عنصر x من G يحقق $f_a(x) = b$ [ ١٨ - ٣ ] . ولما كان هـذا العنصر وحيداً [ ١٨ - ٣ ] فإن $f_a$ متبـاين كذلك . لذا فان $f_a$ ( أيا كان a ) هو تبديل لـ G ، وبالتالي فان F هي مجموعة جزئية من مجموعة تباديل G ( التي تشكل دعامة $S_G$ ) .

(ب) إن $F \neq \Phi$ ، ذلك أن G تحتوي ( على الأقل ) على العنصر الحايد e . وبالتالي فان F تحتوي على $f_e$ .

(حـ) ليكن $f_a , f_b$ أي عنصرين من F . من السهل التـأكد من أن نظير $f_b$ بالنسبة لعمليـة تركيب التطبيقات o هو $f_{b'}$ ( تأكـد من

ذلك بعد أن تثبت أن $f_e$ هو العنصر الحايد في F بالنسبة لـ o ) . ولما كانت العلاقة التالية .

$$(f_a \circ f_{b'})(x) = f_a(f_{b'}(x)) = f_a(b' \top x) = a \top (b' \top x) =$$

$$(a \top b') \top x = f_{a \top b'}(x)$$

صحيحة أيا كان x من G ، فاننـا نستنتج أنه أيا كان من $f_a$ , $f_b$ من F ، فان $f_a \circ f_{b'}$ ( الذي هو ناتج تركيب أي عنصر $f_a$ مع $f_{b'}$ نظير العنصر الآخر ) هو العنصر $f_{a \top b'}$ الذي ينتمي إلى F ( لأن $a \top b'$ ينتمي إلى G ) .

وهكذا نرى أن شرطي النظرية [ ٣ - ٣٣ ] محققـان بالنسبة لـ F التي هي مجموعة جزئية من $S_G$ ( استناداً إلى « أ » ) . لذا فان F هو زمرة جزئية من $S_G$ .

**٣٥ - ٣ نظرية** . لتكن ( G , o ) زمرة ، a عنصراً من G . عندئذ تكون المجموعة الجزئية من G :

$$[a] = \{ a^k : k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \}$$

زمرة جزئية من الزمرة G .

**البرهان** : نلاحظ قبل كل شيء أن [ a ] ليست خاليـة ، ذلك أن $a^1 = a$ عنصر من [ a ] . لنفترض الآن $a^m$ , $a^n$ أي عنصرين من [ a ] عندئذ : $a^m \circ (a^n)^{-1} = a^m \circ a^{-n} = a^{m-n}$ . ولما كانت [ a ] تحتوي على كل القوى الصحيحة لـ a ، فان $a^{m-n}$ عنصر من [ a ] .

وهكذا نكون قد أثبتنا أن ناتج أي عنصر $a^m$ مع نظير أي عنصر

$a^n$ من المجموعـــة الجزئية غير الخالية [ a ] هو عنصر من [ a ] أيضاً . وبالتالي فان [ a ] زمرة جزئية من ( G , o ) ، وذلك استناداً إلى [ ٣٣ - ٣ ] .

## الزمرة الدوارة

٣٦ - ٣ **تعريف** . تسمى [ a ] الواردة في [ ٣٥ - ٣ ] زمرة دوّارة مولّدة بـ a . وإذا كانت G = [ a ] من أجل عنصر a من G ، قلنا إن G زمرة دوارة ( مولدها a ) . ومن الواضح أن كل زمرة دوارة تجلية .

وقد تكون الزمرة الدوارة منتهية أو غير منتهية . وعلى سبيل المثال ، فان ( Z , + ) الواردة في [ ٧ - ٣ ] هي زمرة دوارة غير منتهيـــة مولدها 1 ، ذلك أنه أيا كان العدد الصحيح m ( الموجب أو السالب أو الصفر ) ، فانه يساوي $1^m$ . فمثلاً إذا كان m = - 3 ، فاننا نجد [ ١٩ - ٣ ] : $(1)^{-3} = (1^{-1})^3$ ، حيث $1^{-1}$ هو كما اصطلحنا عندئذ نظير 1 بالنسبة للعملية + ، أي أن $1^{-1} = -1$ . لذا فان $(1)^{-3} = (-1)^3$ .
ولما كانت العملية على Z هي عملية الجمع العادية ، فان :

$$(-1)^3 = (-1) + (-1) + (-1) = -3$$

هذا ويطلب من القارىء التحقق من أن العدد ( 1 - ) يصلح مولداً آخر لهذه الزمرة .

وعلى الرغم من ورود عدد غير منته من القوى الصحيحة لـ a في زمرة دوارة [ a ] ، فقد يكون عدد العناصر المختلفة في [ a ] منتهياً ، وعندها

تكون الزمرة الدوارة منتهية . وعلى سبيل المثال فان $\{1, -1, i, -i\}$ ( بفرض $i^2=-1$ ) هي زمرة دوارة منتهية بالنسبة لعملية الضرب ، مولدها i أو $-i$ . فإذا أخذنا المولد i مثلاً نجد : $i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$ وأية قوة صحيحة أخرى لـ i هي حتماً أحد هـــذه العناصر الأربعة . وسنبرهن في التمرين المحلول ( ٩٥ ) ما يلي :

**٣٧ ـ ٣ نظرية** . إذا كانت G زمرة دوارة منتهية مرتبتهـــا n ومولدها a ، فان $a^n = e$ ( e العنصر المحايد في G ) ، كما أن العناصر المختلفة في G هي عناصر المجموعة $\{a, a^2, \ldots, a^{n-1}, a^n = e\}$ .

**٣٨ ـ ٣ نظرية** . إن تقاطع أي جماعة S من الزمر الجزئية من الزمرة $(G, o)$ هو أيضاً زمرة جزئية من $(G, o)$ .

**البرهان** : نلاحظ أولاً أن تقاطع الجماعة S غير خال ، ذلك أن كلا من عناصر S يحتوي على العنصر المحـــايد e في G [ ٢٦ - ٣ ] . وهكذا ، ليكن a , b عنصرين متساويين أو لا من التقاطع ( غـــير الخالي ) للجماعة S . عندئذ يكون a , b عنصرين من كل من الزمر الجزئية من G التي تشكل S . واستناداً إلى [ ٣٣ - ٣ ] يكون $a o b'$ عنصراً منتمياً إلى كل زمرة جزئية ، وبالتالي إلى تقاطع هـذه الزمر الجزئية ، وهكذا نرى أن شرطي النظرية [ ٣٣ - ٣ ] محققان ، وهـذا يعني أن التقاطع هو زمرة جزئية من G .

## الزمر الجزئية الناظمية ( السوية ) :

من بين الزمر الجزئية الشهيرة ، تلك التي ميزها غالوا في أبحاثه والتي

تسمى بالزمر الجزئية الناظمية ( أو اللامتغيرة أو المتميزة ) .

**٣٩ ـ ٣ تعريف** . نقول عن زمرة جزئية H من الزمرة ( G , o ) إنها زمرة جزئية ناظمية من G إذا تحقق الشرط :

$$\forall g \in G , \forall h \in H \ : \ g o h o g' \in H$$

وإذا عرفنا المجموعة $g o H o g'$ على أنها :

$$g o H o g' = \{ g o h o g' : h \in H \}$$

فانه يترتب على التعريف أن الشرط اللازم والكافي حتى تكون H زمرة جزئية ناظمية هو أن يكون :

$$\forall g \in G \ : \ g o H o g' \subseteq H \qquad (*)$$

**٤٠ ـ ٣ نظرية** . الشرط اللازم والكافي كي تكون الزمرة الجزئية H من G زمرة جزئية ناظمية من G هو :

$$\forall g \in G \ : \ g o H o g' = H \qquad (**)$$

**البرهان** : إن تحقق الشرط ( ** ) يقتضي بوضوح الشرط ( * ) ، أي أن تحقق الشرط ( ** ) كاف حتى تكون H زمرة جزئية ناظمية من G .

وبالعكس ، لنفرض الآن أن H زمرة جزئية ناظمية من G ( أي أن الشرط ( * ) محقق ) ، ولنبرهن على تحقق الشرط ( ** ) . في الحقيقة إذا كان g عنصراً اختيارياً من G ، فان g' يكون عنصراً من G . عندها يقتضي الشرط (*) أن يكون $g' o H o (g')' \subset H$ أي أن يكون

$H \subset g' o H o g$ . وينتج عن هذا أنه أيا كان g من G :

$$g\, o\, (g' o H o g)\, o\, g' \subset g\, o\, H\, o\, g' \Rightarrow (g\, o\, g')\, o\, H\, o\, (g\, o\, g')$$
$$\subset g\, o\, H\, o\, g' \Rightarrow e\, o\, H\, o\, e = H \subset g\, o\, H\, o\, g' \qquad (***)$$

إن ( * ) و (***) يبينان أن $\forall g \in G : g\, o\, H\, o\, g' = H$ وهو المطلوب .

## الهومومورفيزم والايزومورفيزم :

عرفنا في الفصل الأول صنفاً خاصاً من التطبيقات من بنية جبرية إلى أخرى أسميناها في حينه الهومومورفيزم ودرسنا بعض خواصها . وتلعب هذه التطبيقات في نظرية الزمر دوراً غاية في الأهمية ، ذلك أنها تعتبر وسيلة لدراسة الخواص الرئيسية للزمرة ، كما أنها تصلح أداة لبرهان بعض النظريات المتعلقة بالزمر .

* ٤١ - ٣ **نظرية** . لتكن $(G, o)$ زمرة ، $(E, *)$ مجرد مجموعة عليها عملية داخلية ، وليكن f هومومورفيزماً لـ $(G, o)$ في $(E, *)$. عندئـــذ :

(١) يكون الخيال الهومومورفي $\overline{G} = f(G)$ زمرة بالنسبة لـ * .

(٢) إذا كانت H زمرة جزئيـة ناظمية من G ، فان خيالهـــا $\overline{H} = f(H)$ هو زمرة جزئية ناظمية من الزمرة $\overline{G}$ .

**البرهان** : (١) إن النظرية [ ٥٠ - ١ ] تبين بأن $\overline{G}$ مجموعة جزئية مغلقـــة بالنسبة لـ * ، وأن * عملية تجميعية على $\overline{G}$ ( لأن العملية o

تجميعية على $G$ ) ، وأن العنصر $u = f(e)$ هو عنصر محايد في $\bar{G}$ بالنسبة لـ * ( لأن $e$ عنصر محايد لـ $o$ في $G$ ) ، وأن لكل عنصر $f(a)$ من $\bar{G}$ نظيراً $f(a')$ بالنسبة لـ * ( لأن لكل عنصر $a$ من $G$ نظيراً $a'$ بالنسبة لـ $o$ ) . لذا فان $\bar{G}$ زمرة بالنسبة لـ * .

(٢) لنفترض $\bar{h}$ عنصراً كيفياً من $\bar{H}$ و $\bar{g}$ عنصراً كيفياً من $\bar{G}$ . عندئذ يوجد عنصران ( على الأقل ) $h$ من $H$ و $g$ من $G$ بحيث : $f(h) = \bar{h}$ , $f(g) = \bar{g}$ . ولما كان :

( لأن $f$ هومومورفيزم ) $f(g \, o \, h \, o \, g') = f(g) * f(h) * f(g')$

( الشق (ﻫ) من [ ٥٠ - ١ ] ) $= f(g) * f(h) * [f(g)]'$

$= \bar{g} \, o \, \bar{h} \, o \, \bar{g}'$

وكان $g \, o \, h \, o \, g'$ عنصراً من $H$ ، فإن $\bar{g} \; o \; \bar{h} \; o \; \bar{g}'$ عنصر من $\bar{H}$ . لكن $\bar{h}$ أي عنصر من $\bar{H}$ ، $\bar{g}$ أي عنصر من $\bar{G}$ ، إذن $\bar{H}$ مجموعة جزئية ناظمية من $\bar{G}$ .

٤٢ - ٣ **نظرية** . إذا كان $f$ هومومورفيزماً للزمرة $(G , o)$ ذات العنصر المحايد $e$ في الزمرة $(S , *)$ ذات العنصر المحايد $u$ فان :

(١) $u = f(e)$ و $f(a') = [f(a)]'$ أيا كان $a$ من $G$ .

(٢) الخيال الهومومورفي $\bar{G} = f(G)$ ( الذي يرمز له أحياناً بـ $\operatorname{Im} f$ ) هو زمرة جزئية من الزمرة $S$ .

(٣) المجموعة $H = f^{-1}(u)$ ( التي تتشكل من جميع عناصر $G$ التي

خيال كل منها u ) هي زمرة جزئية ناظمية من G . وتسمى $f^{-1}(u)$ نواة الهومومورفيزم f ، ويرمز لها بـ Ker f .

**البرهان** : لقد تم إثبات (١) سابقاً [ ٥٠ - ١ ] . أما (٢) فهو ناتج عن النظرية [ ٤١ - ٣ ] ذلك أننا أثبتنا في حينه أن $\overline{G}$ زمرة بالنسبة لـ * ؛ ولما كانت $\overline{G}$ مجموعة جزئية من S ، فان تعريف الزمرة الجزئية يقتضي بأن تكون $\overline{G}$ زمرة جزئية من الزمرة S .

(٣) من الواضح أنه أيا كان العنصران a , b من H فإن :

$$f(a \circ b') = f(a) * f(b') = f(a) * [f(b)]' = u * u' = u$$

وتعني هذه المساواة أن $a \circ b'$ عنصر من H . وإذا أضفنا إلى ذلك أن $H \neq \Phi$ ( لأن $e \in H$ استناداً إلى (١) ) لاستنتجنا اعتماداً على [ ٣٣ - ٣ ] أن H زمرة جزئية من G .

هذا ، ومن جهة أخرى ، فأياً كان العنصر h من H والعنصر g من G فإن :

$$f(g \circ h \circ g') = f(g) * f(h) * f(g') = f(g) * u * [f(g)]'$$
$$= f(g) * [f(g)]' = u$$

وهذا يعني أنه عندئذ يكون $g \circ h \circ g'$ عنصراً من H ، أي أن الزمرة الجزئية H من G هي زمرة جزئية ناظمية من الزمرة G .

**٤٣ - ٣ نظرية كايلي** : Cayley . كل زمرة ( G , T ) هي إيزومورفية لزمرة جزئية من الزمرة التناظرية $S_G$ .

**البرهان** : لقد وجدنا في [ ٣٤ - ٣ ] أن المجموعة :

$$F = \{ f_a \mid f_a(x) = a \top x \quad : \quad a, x \in G \}$$

تشكل زمرة جزئية من الزمرة التناظرية $S_G$ .

وسنبرهن الآن أن التطبيق $K : G \to F$ المعروف بالقاعدة $K(a) = f_a$ هو إيزومورفيزم للزمرة $(G, \top)$ على الزمرة الجزئية $(F, o)$ من $S_G$ ( $o$ هي هنا عملية تركيب التطبيقات ) .

(١) سنبين أولاً أن التطبيق $K$ ،الذي هو غامر كما هو واضح ، متباين . في الحقيقة :

$$K(a) = K(b) \Rightarrow f_a = f_b \Rightarrow \forall x \in G : f_a(x) = f_b(x)$$
$$\Rightarrow a \top x = b \top x$$

ولما كانت المساواة $a \top x = b \top x$ تقتضي $a = b$ [ ١٤ - ٣ ] فاننا نستنتج أن $K$ متباين حقاً .

(٢) بعد أن بينا في (١) أن $K$ تقابل ، بقي علينا إثبات أن $K$ هومومورفيزم . في الحقيقة أيا كان العنصران $a, b$ من $G$ فان :

$$f_{a \top b}(x) = (a \top b) \top x = a \top (b \top x) = f_a(b \top x) =$$
$$f_a(f_b(x)) = (f_a \, o \, f_b)(x)$$

ولما كان هذا صحيحاً أيا كان $x$ من $G$ فان $f_{a \top b} = f_a \, o \, f_b$ . وبما أن :

$$K(a) = f_a \quad , \quad K(b) = f_b \quad , \quad K(a \top b) = f_{a \top b}$$

فان :

$$K(a \top b) = K(a) \, o \, K(b)$$

أي أن K هومومورفيزم . وإذا أضفنا إلى ذلك ما وجدناه في (١) من أن K تقابل فان **K** هو إيزومورفيزم لـ ( G , T ) على الزمرة الجزئية ( F , o ) من الزمرة التناظرية $S_G$ .

٤٤ ـ ٣ **ملاحظة** : بما أننا لم نمل أي شرط على العدد الكاردينالي ( الأسامي ) لـ **G** ، فاننا نستنتج أنه إذا كانت الزمرة G منتهية ومرتبتها n ، فانها إيزومورفية لزمرة جزئية من الزمرة التناظرية $S_n$ من الدرجة n .

# تمارين محلولة

**٨٤** - لتكن E مجموعة مزودة بالعملية الداخلية o . نسمي العنصر a من E متساوي القوى (أو مراوحاً) Idempotent إذا كان $a \circ a = a$ .
برهن أن أي زمرة $(G, \circ)$ تحتوي على عنصر مراوح واحـد فقط هو العنصر الحايد e لـ o .

**الحل** : لما كان $e \circ e = e$ ، فان e عنصر مراوح . ولو افترضنا وجود عنصر مراوح آخر u $(u \neq e)$ في هذه الزمرة ، لكان $u \circ u = u$ . ولكن هذه المساواة تقتضي $u = e$ [ ١٥ - ٣ ] ، وهذا خلاف الفرض . لذا فان أي عنصر مراوح للزمرة G هو عنصر محايد في G . ولما كان في أي زمرة عنصر محايد واحد فقط [ ١٣ - ٣ ] فان أي زمرة تحتوي على عنصر مراوح وحيد هو العنصر المحايد e فيها .

**٨٥** - لتكن $(G, \top)$ زمرة . برهن أنه إذا حقق عنصران $a , x$ من G العلاقة $a \top x = x$ ، كان a العنصر المحايد e لـ $\top$ .

**الحل** : لمـا كان $x = e \top x$ ( استناداً إلى تعريف e ) ، فان العلاقة المفروضة تكافيء العلاقة $a \top x = e \top x$ . التي تقتضي استناداً إلى [ ١٤ - ٣ ] $a = e$ وهو المطلوب .

**٨٦** - لنرمز بـ $P(X)$ لمجموعة أجزاء المجموعة غير الخالية X . برهن أن كلا من البنيتين $(P(X) , \cup)$ , $(P(X) , \cap)$ هي مونوئيد وليست زمرة.

**الحل** : إن $(P(X), \cup)$ مونوئيد ، ذلك أن : (١) عملية الاجتماع هي عملية داخلية على $P(X)$ ، فاجتماع أي عنصرين من $P(X)$ ( أي اجتماع أي مجموعتين جزئيتين من X ) هو عنصر من $P(X)$ . (٢) العملية $\cup$ تجميعية كما نعلم . (٣) يوجد عنصر محايد بالنسبة لـ $\cup$ هو المجموعة الخالية $\Phi$ ( وذلك لأن المجموعة الخالية $\Phi$ هي مجموعة جزئية من أية مجموعة X ) .

لكن $(P(X), \cup)$ ليست زمرة ، ذلك أنه لو افترضنا العكس ، لكان لكل عنصر من $P(X)$ نظير بالنسبة لـ $\cup$ . وهذا يقتضي وجود نظير لـ X ( X عنصر من $P(X)$ ) بالنسبة لـ $\cup$ ، أي وجود عنصر Y من $P(X)$ بحيث : $X \cup Y = \Phi$ . لكن هـذا مستحيل ، لأنه أيا كانت Y من $P(X)$ فان $X \cup Y \supset X$ و $X \neq \Phi$ فرضاً .

**ملاحظة** (١) : لو كانت $X = \Phi$ ، فان المونوئيد $(P(X), \cup)$ يغدو زمرة . ( لماذا ؟ ) .

**ملاحظة** (٢) : إن دراسة المسألة من أجل $(P(X), \cap)$ تتم على نحو مماثل .

**٨٧** - لتكن $(G, o)$ زمرة عنصرها المحايد e . برهن أنه إذا تحقق أحد الشروط التالية :

$$\forall a, b \in G \quad : \quad (a \, o \, b)^2 = a^2 \, o \, b^2 \qquad (١)$$

$$\forall a \in G \quad : \quad a^2 = e \qquad (٢)$$

$$\forall a \in G \quad : \quad a' = a \qquad (٣)$$

فان الزمرة $(G, o)$ تكون آبلية .

**الحل** : لنفرض تحقق المساواة الأولى . عندها نجد :

$$(a\,o\,b)^2 = a^2\,o\,b^2 \Rightarrow (a\,o\,b)\;o\;(a\,o\,b) = (a\,o\,a)\;o\,(b\,o\,b)$$

( o تجميعية ) $\Rightarrow a\,o\,(b\,o\,(a\,o\,b)) = a\,o\,(a\,o\,(b\,o\,b))$

( نظرية [ ١٤ - ٣ ] ) $\Rightarrow b\,o\,(a\,o\,b) = a\,o\,(b\,o\,b)$

( o تجميعية ) $\Rightarrow (b\,o\,a)\,o\,b = (a\,o\,b)\,o\,b$

( نظرية [ ١٤ - ٣ ] ) $\Rightarrow b\,o\,a = a\,o\,b$

ولما كانت المساواة الأخيرة صحيحة أيا كان $a, b$ من $G$ ، فان $(G, o)$ زمرة آبلية .

(٢) إذا كانت العلاقة الثانية صحيحة ، فانه أيا كان العنصران $a, b$ من $G$ نجد :

$$a^2 = e\;,\;\; b^2 = e\;,\;\; (a\,o\,b)^2 = e \Rightarrow a^2\,o\,b^2 = e\;,\;\; (a\,o\,b)^2 = e$$
$$\Rightarrow a^2\,o\,b^2 = (a\,o\,b)^2$$

وبتطبيق نتيجة الشق (١) من هذه المسألة نجد المطلوب .

(٣) لنفرض أخيراً تحقق العلاقة الثالثة . عندئذ أيا كان العنصران $a, b$ من $G$ فان $(a\,o\,b)' = a\,o\,b$ لكن $(a\,o\,b)' = b'\,o\,a'$ استناداً إلى [ ١٧ - ٣ ] . إذن $a\,o\,b = b'\,o\,a'$ . ولما كان $b' = b$ و $a' = a$ ، فان $a\,o\,b = b\,o\,a$ وبما أن هذه المساواة صحيحة أيا كان $a, b$ من $G$ ، فان $(G, o)$ زمرة تبديلية .

٨٨ - لتكن $(E, \top)$ زمرة آبلية ، وليكن $\alpha$ عنصراً مثبتاً من E مغايراً للعنصر الحايد e . والمطلوب إثبات أن E زمرة آبليـــة كذلك بالنسبة للعملية الداخلية $\perp$ المعرفة بالقاعدة :

$$\forall a, b \in E \quad : \quad a \perp b = a \top b \top \alpha \qquad (*)$$

**الحل** : (١) لما كانت $\top$ عملية داخلية ، فانه أيا كان a , b من E ، فان $a \top b \top \alpha$ عنصر من E أيضاً . وبالتالي فان E مغلقة بالنسبة للعملية $\perp$ ، أي أن $\perp$ عملية داخلية على E .

(٢) العملية الداخلية $\perp$ تجميعيــة ، ذلك أنه أيا كانت العناصر a , b , c من E فان :

$$(a \perp b) \perp c = (a \top b \top \alpha) \perp c = (a \top b \top \alpha) \top c \top \alpha$$

$= a \top b \top \alpha \top c \top \alpha$ ( لاضرورة للأقواس لأن $\top$ تجميعية )

$= a \top b \top c \top \alpha \top \alpha$ ( $\top$ تبديليـــة )

ولدينا من جهة أخرى :

$$a \perp (b \perp c) = a \perp (b \top c \top \alpha) = a \top (b \top c \top \alpha) \top \alpha$$

$= a \top b \top c \top \alpha \top \alpha$ ( لا ضرورة للأقواس لأن $\top$ تجميعية )

وبالتالي فان العملية $\perp$ تجميعية لأننا وجدنا أن :

$$\forall a, b, c \in E \quad : \quad (a \perp b) \perp c = a \perp (b \perp c)$$

(٣) العملية $\perp$ تبديلية ، ذلك أن $\top$ تبديلية وبالتالي فلا فرق بين الناتج $a \top b \top \alpha$ ( الذي يساوي $a \perp b$ ) وبين الناتج $b \top a \top \alpha$ ( الذي

يساوي $a \perp b$ ) ، وذلك أيا كان $a, b$ من $E$ .

(٤) إذا وجد عنصر محايد $u$ لـ $\perp$ ، فأياً كان $a$ من $E$ يكون :

$$a \perp u = a \Leftrightarrow a \top u \top \alpha = a \Leftrightarrow a \top (u \top \alpha) = a$$

$$\Leftrightarrow u \top \alpha = e$$

واستناداً إلى وجود نظير واحد لكل عنصر من زمرة ، فان $u$ موجود ووحيد ويساوي $\alpha'$ نظير $\alpha$ **بالنسبة للعملية** $\top$ ( تحقق من أن $\forall a \in E \ : \ a \perp \alpha' = \alpha' \perp a = a$ )

(٥) كي يوجد لأي عنصر $a$ من $E$ نظير $\bar{a}$ **بالنسبة للعملية** $\perp$ ، فانه يجب أن يتحقق الشرط :

$$\bar{a} \perp a = \alpha' \Leftrightarrow \bar{a} \top a \top \alpha = \alpha'$$

واستناداً إلى [ ١٨ - ٣ ] نرى أن $\bar{a}$ موجود ووحيد ويساوي $\alpha' \top (a \top \alpha)'$ أو $\alpha' \top \alpha' \top a'$ . ( تحقق من أن

$$(\forall a \in E : \ \bar{a} \perp a = a \perp \bar{a} = \bar{\alpha}$$

إن توفر الشروط (١) - (٥) يعني أن $(E, \perp)$ زمرة تبديلية وهو المطلوب .

**٨٩** - لتكن $S$ زمرة ضربية غير آبلية عنصرها المحايد $e$ ، ولتكن $a, b, c, d$ أربعة عناصر من $S$ ناتجها $abcd$ يساوي $e$ .

(١) برهن أن كلا من النواتج التالية يساوي $e$ أيضاً :

$$bcda \ , \ cdab \ , \ dabc$$

(٢) عبر عن $d^{-1}$ نظير $d$ بدلالة $a , b , c$ ، ثم عين $d^{-1} c^{-1}$ بدلالة $a , b$ .

**الحل** : (١) لدينا :

$$a b c d = e \Leftrightarrow a^{-1} (a b c d) a = a^{-1} e a$$

$\Rightarrow (a^{-1} a) (b c d a) = a^{-1} e a$ ( عملية الضرب تجميعية )

$\Rightarrow b c d a = e$ ( لأن $a^{-1} a = e$ )

$\Rightarrow b^{-1} (b c d a) b = b^{-1} e b \Rightarrow (b^{-1} b) ( c d a b) = b^{-1} e b$

( عملية الضرب تجميعية )

$\Rightarrow c d a b = e$ ( لأن $b^{-1} b = e$ )

$\Rightarrow c^{-1} (c d a b) c = c^{-1} e c \Rightarrow (c^{-1} c) (d a b c) = c^{-1} e c$

( عملية الضرب تجميعية )

$\Rightarrow d a b c = e$ ( لأن $c^{-1} c = e$ )

(٢) وجدنا الآن أن $d a b c = e$ . إذن $d( a b c ) = d d^{-1}$ . وتقتضي هذه المساواة [ ١٤ - ٣ ] المساواة $a b c = d^{-1}$ ، ونكون بهذا قد عبرنا عن $d^{-1}$ بدلالة $a , b , c$ .

هذا ومن الواضح أن المساواة $a b c = d^{-1}$ تقتضي $(a b c)c^{-1} = d^{-1}c^{-1}$.
ولما كانت عملية الضرب تجميعية فان : $ab(cc^{-1}) = d^{-1}c^{-1}$ . لكن $cc^{-1} = e$ إذن $ab = d^{-1} c^{-1}$ .

٩٠ - لتكن $G$ مجموعة كل الأزواج المرتبة $( a , b )$ من الأعداد الحقيقية بفرض $a \neq 0$ ، ولنعرف على $G$ عملية الضرب التالية :

$$(a , b) \ (c , d) = (a c , b c + d) \qquad (*)$$

**أولاً** : برهن أن G زمرة غير تبديلية بالنسبة لعملية الضرب هذه .

**ثانياً** : برهن أن مجموعة العناصر ( a , 0 ) تشكل زمرة جزئية H من الزمرة G ، وأن H إيزومورفية للزمرة ( $R^*$ , • ) (أي زمرة الأعداد الحقيقية المغايرة للصفر بالنسبة لعملية الضرب العادية ) .

**ثالثاً** : لنعرف تطبيقاً $\varphi : G \to R$ بالقاعدة $\varphi((a , b)) = a$ . بين أن $\varphi^{-1}(1)$ ( أي مجموعة العناصر من G التي خيال كل منها هو العدد الحقيقي 1 ) تشكل زمرة جزئية من G ، وأن هذه الزمرة الجزئية إيزومورفية للزمرة ( R , + ) ( أي زمرة الأعداد الحقيقية بالنسبة لعملية الجمع العادية ) .

**الحل** :

**أولاً** : (١) إن عملية الضرب المعرفة بالقاعدة (*) هي عملية داخلية على G ، ذلك أن ( ac , bc + d ) ناتج ضرب العنصرين الاختياريين ( a , b ) و ( c , d ) من G هو زوج مرتب أيضاً مسقطه الأول ac مغاير للصفر .

(٢) إن عملية الضرب على G تجميعية ، ذلك أنه لو افترضنا (f , g) عنصراً اختيارياً ثالثاً من G فإن :

$$((a , b)(c , d)) \ (f , g) = (a c , b c + d) \ (f , g) =$$
$$(a c f , b c f + d f + g)$$

$$(a , b) ( (c , d) (f , g) ) = (a , b) (c f , d f + g) =$$
$$(a c f , b c f + d f + g)$$

(٣) إذا وجـــد عنصر محايد $( x, y )$ في $G$ ، فيجب أن تتحقق العلاقتان :

$$\forall (a , b) \in G \;:\; (a , b) (x , y) = (a , b) \;\text{و}\; (x , y) (a , b) = (a , b)$$

إن هاتين العلاقتين تكافئان جملة المعادلات الخطية التالية :

$$a x = a \quad , \quad b x + y = b$$
$$x a = a \quad , \quad y a + b = b$$

ومن الواضح أنه يوجد لهذه الجملة الحل الوحيد(*) $x = 1 (\neq 0) , y = 0$ .
وبالتالي فان العنصر المحايد في $G$ هو $( 1 , 0 )$ .

(٤) إذا كان العنصر $( \xi , \eta )$ مقلوباً ( أي نظيراً بالنسبة للضرب ) للعنصر الاختياري $( a, b )$ ، فيجب أن يحقق المعادلتين :

$$(a , b) (\xi , \eta) = (1 , 0) \;\text{و}\; (\xi , \eta) (a , b) = (1 , 0)$$

اللتين تكافئان جملة المعادلات الأربع التالية :

$$a \xi = 1 \quad , \quad b \xi + \eta = 0$$
$$\xi a = 1 \quad \quad \eta a + b = 0$$

---

( * ) يكفي أن يكون هذا الحل موجوداً حتى يكون وحيداً ( النظرية [ ١٣ – ٣ ] ) .

ومن الواضح أنه يوجد لهذه العملية الحل الوحيد(*) $\xi = \frac{1}{a} (\neq 0) , \eta = - \frac{b}{a}$ وبالتاليفان للعنصر ( a , b ) الاختياري من G المقلوب الوحيد $\left(\frac{1}{a} , - \frac{b}{a}\right)$ .

نستخلص مما سبق أن G تشكل زمرة ( ضربية ) . لكن هذه الزمرة غير آبلية ، ذلك أنه مثلاً :

$$(4 , 3) \ (-\tfrac{1}{2} , 0) = (-2 , -\frac{3}{2}) \neq (-\tfrac{1}{2} , 0) (4 , 3) = (-2 , 3)$$

**ثانياً** : (١)َ من الواضح أن $H \neq \Phi$ .

(٢)َ أيا كان العنصران ( b , 0 ) , ( a , 0 ) من H ، فان

$$(a , 0) (b , 0)^{-1} = (a , 0) ( \frac{1}{b} , - \frac{0}{b}) = \quad \text{( استناداً إلى (٤) )}$$

$$= \left(\frac{a}{b} , 0 \frac{1}{b} - \frac{0}{b}\right) = \left(\frac{a}{b} , 0 \right) \in H$$

وبالتالي فاننا نحكم [ ٣٣ - ٣ ] أن H زمرة جزئية من الزمرة G .

لنعرف الآن التابع $f : H \to R^*$ بالدستور $f ( ( a , 0 ) ) = a$ ، ولنبرهن أن f إيزومورفيزم للزمرة الجزئية H من G على الزمرة الضربية $( R^* , \cdot )$ .

في الحقيقة :

---

( * ) يكفي أن يكون الحل موجوداً حتى يكون وحيداً ( النظرية [١٣ — ٣] ) .

$$\forall (a, 0), (b, 0) \in H \;:\; f((a, 0)(b, 0)) = f((a b, 0)) =$$
$$a b = f(a, 0)\, f(b, 0)$$

فاذا أضفنا إلى ذلك أن f تقابل ، أي تطبيق متبـــاين وغامر ، ( لماذا ؟ ) حصلنا على المطلوب .

**ثالثاً** : نلاحظ أولاً أن $\varphi$ هومومورفيزم للزمرة الضربية G في الزمرة $(R^*, \cdot)$ ، ذلك أن :

$$\forall (a, b), (c, d) \in G \;:\; \varphi((a, b)(c, d)) = \varphi((a c, b c + d))$$
$$= a c = \varphi(a, b)\, \varphi(c, d)$$

ولما كان العدد 1 هو العنصر المحايد في الزمرة الضربية $(R^*, \cdot)$ فان المجموعة $\varphi^{-1}(1)$ زمرة جزئية من G ( النظريه [ ٤٢ - ٣ ] ) .

سنبين الآن وجود إيزومورفيزم للزمرة الجزئية $\varphi^{-1}(1)$ والتي دعامتها المجموعة $\{(1, b) : b \in R\}$ على الزمرة $(R, +)$ . من الواضح أن التطبيق $\psi : \varphi^{-1}(1) \to R$ المعرف بالقاعدة :

$$\psi((1, b)) = b$$

هو تطبيق غامر ومتباين ( تحقق من هذا ) . فاذا لاحظنا بالاضافة إلى ذلك أن :

$$\psi((1, b)(1, d)) = \psi((1, b + d)) = b + d =$$
$$= \psi(1, b) + \psi(1, d)$$

فاننـــا نحكم بأن $\psi$ إيزومورفيزم الزمرة الجزئيـــة $\varphi^{-1}(1)$ من G على الزمرة الجمعية لـ R .

١٩ - لقد عرف الرومي كوروش Kurosh الزمرة على النحو التالي : نقول عن مجموعة G عليها عملية داخلية o إنها زمرة بالنسبة للعملية o ، إذا كانت G غير خالية ، وكانت o تجميعية ، وكان لكل من المعادلتين :

$$a \circ x = b \quad , \quad y \circ a = b$$

حل وحيد في G أيا كان العنصران a , b من G

برهن أن تعريف كوروش للزمرة يكافىء التعريف الشائع [ ١ - ٣ ] للزمرة .

**أولاً** : إن التعريف [ ١ - ٣ ] يقتضي تعريف كوروش ، ذلك أنه وفق التعريف [ ١ - ٣ ] تكون G غير خالية ( لاحتوائها على العنصر الحايد e ) ، وتكون o تجميعية ، ويكون أخيراً للمعادلتين حل وحيد في G وذلك استناداً إلى النظرية [١٨ - ٣] .

**ثانياً** : سنثبت الآن أن تعريف كوروش يقتضي [ ١ - ٣ ] . لما كانت $G \neq \Phi$ وفق كوروش ، فهنالك عنصر b على الأقل ينتمي إلى G . لنفترض ( استناداً إلى (١) ) أن u هو العنصر الوحيد الذي يحقق المعادلة $b \circ u = b$ ، وأن y هو العنصر الوحيد الذي يحقق المعادلة $y \circ b = a$ ، حيث a أي عنصر آخر من G ( قد يكون a مساوياً b ) . عندئذ ، لما كانت o تجميعية فان :

$$a \circ u = (y \circ b) \circ u = y \circ (b \circ u) = y \circ b = a$$

ولما كانت هذه العلاقة صحيحة أيا كان a من G ، فان u هو هو عنصر محايد أيمن لـ o . وبنفس الطريقة نبرهن على وجود عنصر محايد أيسر لـ o ، أي عنصر e من G بحيث تحقق المساواة :

$$e \, o \, a = a$$

أيا كان a من G . لكن e = u استناداً إلى [ ٢٧ - ١ ] ، إذن نجد أن :

$$\forall a \in G \ : \ e \, o \, a = a \, o \, e = a$$

ونكون بهذا قد أثبتنا وجود عنصر محايد ( وحيد ) e في G لـ o .

لنفترض الآن أن a عنصر اختياري من G . عندئذ يترتب على (١) وجود عنصرين $a''$ و $a'$ وحيدين بحيث :

$$a \, o \, a' = e \quad , \quad a'' \, o \, a = e$$

لكن $a' = a''$ [٢٨ - ١ ] ، إذن لكل عنصر a نظير $a'$ بالنسبة لـ o يحقق :

$$a \, o \, a' = a' \, o \, a = e$$

وهكذا نرى أن تعريف كوروش يقتضي ( بالاضافة إلى تجميعية العملية الداخلية o ) وجود عنصر محايد لـ o ووجود نظير لكل عنصر من G ، أي أن تعريف كوروش يقتضي التعريف [ ١ - ٣ ] .

ولما كنا قد أثبتنا العكس ، أي أن التعريف [ ١ - ٣ ] يقتضي تعريف كوروش ، فان هذين التعريفين متكافئان وهو المطلوب .

* ٩٢ـ لتكن $G = \{a_0 , a_1 , a_2 , \ldots , a_n\}$ زمرة ضربية منتهية (مرتبتها $n + 1$) وعنصرها المحـايد $a_0$ . برهن أنه أيا كان العنصر $a_i$ من $G$ ، فهنالك عدد صحيح موجب $m$ بحيث $a_i^m = a_0$ .

الحل : لما كان $a^1_0 = a_0$ [١٩-٣] فالمسألة محلولة من أجل العنصر المحايد $a_0$ .

لنأخذ الآن عنصراً اختيارياً $a_i$ من $G$ حيث $a_i \neq a^0$ . فاذا رمزنا بـ $a_j$ من $G$ لمقلوب $a_i$ ، فان $a_i a_j = a_0$ . إن $j \neq o$ لأنه في الحـالة المعاكسة يكون $a_i = a_0$ . فاذا كان $j = i$ ، نجد $a_i^2 = a_0$ . ولكن إذا كان $j \neq i$ ، فان :

$$a_i\, a_j = a_0 \qquad (j \neq o \ , \ j \neq i)$$

فاذا رمزنا بـ $a_k$ للعنصر الوحيد الذي يحقق $a_i a_k = a_j$ فانه يكون :

$$a_i\ a_j = a_0 \Rightarrow a_i\,(a_i\, a_k) = a_0 \Rightarrow (a_i\, a_i)\, a_k = a_0 \Rightarrow a_i^2\, a_k = a_0$$

إن $k \neq 0$ لأنـه لو صح العكس لكان $a_i\, a_0 = a_j$ أو $a_i = a_j$ أي $i = j$ ، الأمر الذي استبعدناه . وهنا نقول ثانيـــة : إما أن يكون $k = i$ ، وعندها يكون $a_i^3 = a_0$ ، ولكن إذا كان $k \neq i$ فاننا نجد :

$$a_i^2\ a_k = a_0 \qquad\qquad (k \neq o \ , \ k \neq i)$$

وهكذا فلو سرنا بهذا الطريق لوجدنا حالتين لا ثالث لهما :

(١) فإما أن نجد عدداً صحيحاً موجباً $m$ بحيث يكون $a^m = a_0$ .

(٢) وإما أن لا يتم ذلك ، وعندها نحصل على مجموعة المساويات :

$$a_i a_j = a_0 \ , \ a_i^2 a_k = a_0 \ , \ \ldots \ , \ a_i^n a_h = a_0 \qquad (**)$$

حيث كل من العناصر $a_j , a_k , \ldots , a_h$ مغاير لـ $a_0$ ولـ $a_i$ . ولما كان كل من العناصر $a_j , a_k , \ldots , a_h$ منتمياً إلى $G$ ، فان عددها هو على الأكثر $n - 1$ ( لاستبعاد العنصرين $a_0 , a_i$ ) . ولكن إذا لاحظنا أن العناصر $a_j , a_k , \ldots , a_h$ الواردة كمضاريب في مجموعة المساويات (**) مختلفة ( لماذا ؟ ) ، وأنه من الواضح بأن عدد المساويات (**) يساوي $n$ فإننا نستنتج أن عدد العناصر $a_j , a_k , \ldots , a_h$ يساوي $n$ . وهذا تناقض.

وبالتالي فان الحالة (٢) غير صحيحة . لذا فان الحالة (١) هي الحالة الصحيحة وهو المطلوب .

**٩٣** - برهن أن مجموعة الأعداد $H = \{ 2^m 3^n \mid m , n \in Z \}$ تشكل زمرة جزئية من زمرة الأعداد الحقيقية المغـــايرة للصفر بالنسبة لعملية الضرب العادية .

**الحل** : (١) من الواضح أن $H \neq \Phi$ .

(٢) ليكن $2^m 3^n \ , \ 2^{m'} 3^{n'}$ أي عنصرين من $H$ . إن مقلوب العنصر $2^{m'} 3^{n'}$ ( أي نظير o بالنسبة لعملية الضرب ) هو $2^{-m'} 3^{-n'}$ ( لأن حاصل ضرب أحد هذين العنصرين بالعنصر الاخر من اليمين ومن اليسار يساوي العنصر المحايد 1 ) . وإذا لاحظنا أن :

$$(2^m \ 3^n) \ (2^{-m'} \ 3^{-n'}) = (2^{-m'} \ 3^{-n'}) \ (2^m \ 3^n) = 2^{m-m'} \ 3^{n-n'}$$

وأن $m - m'$ و $n - n'$ ينتميان إلى Z ، فان حاصل الضرب في الطرف الأيمن عنصر من H . وبالتالي فان H زمرة جزئية من $(R^*, \cdot)$ حسب [ ٣٣ - ٣ ] .

* ٩٤ - لتكن $(G, o)$ زمرة عنصرها المحايد e . تسمى المجموعة الجزئية $Z_G$ من عناصر G التي كل عنصر منها قابل للمبادلة مع جميع عناصر G **مركزاً** الزمرة G أي أن :

$$Z_G = \{ z \in G \mid z \circ x = x \circ z \ , \ \forall x \in G \}$$

برهن أن $Z_G$ زمرة جزئية من الزمرة G .

**الحل** : (١) إن $Z_G \neq \Phi$ ، ذلك أن $e \circ x = x \circ e$ أياً كان x من G وبالتالي فان $e \in Z_G$ .

(٢) ليكن $z_1 , z_2$ أي عنصرين من $Z_G$ . عندئذ ، أياً كان x من G فان :

$$z_1 \circ x = x \circ z_1 \ \Rightarrow \ z_2 \circ (z_1 \circ x) = z_2 \circ (x \circ z_1)$$

( o هي عملية وحيدة القيمة )

$$\Rightarrow (z_2 \circ z_1) \circ x = (z_2 \circ x) \circ z_1 \qquad \text{( o تجميعية )}$$

$$\Rightarrow (z_2 \circ z_1) \circ x = (x \circ z_2) \circ z_1 \qquad \text{( o تجميعية )}$$

ولما كانت المساواة الأخيرة صحيحة أياً كان x من G فان $z_2 \circ z_1$ عنصر من $Z_G$ . وبالتالي فان المجموعة الجزئية $Z_G$ مغلقة بالنسبة لـ o .

(٣) من الواضح أنه أياً كان x من G و z من $Z_G$ فان :

لكن $z \circ x' = x' \circ z$ :

$$z \circ x' = x' \circ z \Rightarrow (z \circ x')' = (x' \circ z)' \Rightarrow (x')' \circ z' = z' \circ (x')'$$

$$\Rightarrow x \circ z' = z' \circ x \qquad ([٣-١٦])$$

وهكذا نرى أنه إذا كان $z$ أي عنصر من $Z_G$ ، فان $z'$ ( نظيره بالنسبة لـ $o$ ) عنصر من $Z_G$ .

إن تحقق الشروط (١) - (٣) كاف للحكم بأن $Z_G$ زمرة جزئيـة من الزمرة $G$ ( نظرية [ ٢٩ - ٣ ] ) .

* ٩٥ - لتكن $(G, o)$ زمرة دوّارة منتهية مرتبتها $n$ ومولدها $a$ . برهن أن $a^n = e$ ، كما أن العناصر المختلفة في $G$ هي :

$$\{a, a^2, \ldots, a^{n-1}, a^n = e\}$$

**الحل** : لنفرض أن $a^m = e$ حيث $m < n$ . عندئذ إذا كان $k$ أي عدد صحيح ، فهنالك عددان صحيحان $q, r$ ( $0 \leqslant r < m$ ) بحيث يكون $k = qm + r$ . عندها نرى أن :

$$a^k = a^{qm+r} = (a^m)^q \circ a^r = e^q \circ a^r = a^r$$

وهـــذا يعني أن $a^k$ هو أحد العناصر $a^0, a, a^2, \ldots, a^{m-1}$ ، أي أن $G$ تحتوي على $m$ من العناصر على الأكثر . ولما كانت $G$ تحتوي على $n$ من العناصر ، فاننا نقع في تناقض . وبالتالي فان افتراضنا أن $a^m = e$ حيث $m < n$ خاطىء .

لنفترض بعد ذلك $a^i = a^j$ حيث $0 < i < j \leqslant n$ . عنـدها يكون $a^i \circ a^{-i} = a^j \circ a^{-i}$ أي $a^{i-i} = a^{j-i}$ ، أو $e = a^{j-i}$ . ولمـــا كان

$0 < j - i < n$ ، فان هذه النتيجة خاطئة استناداً إلى ما سبق ، وبالتالي فان $a^n , \ldots , a^2 , a$ عناصر مختلفة . ولما كانت $G$ تحتوي على $n$ من العناصر تماماً ، فان هذه المجموعة من العناصر يجب أن تحوي جميع عناصر $G$ . ولما كان العنصر $e$ من $G$ ، فان $e$ هو أحد هذه العناصر $a^i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ . وبما أننا وجدنا أن $a^m \neq e$ عندما $m < n$ فان $a^n = e$ ونكون بذلك قد أتممنا البرهان .

٩٦- لتكن $G$ زمرة ضربية آبلية ، $H$ زمرة جزئية من $G$ . برهن أن العلاقة $R$ المعرفة على $G$ :

$$x R y \Leftrightarrow x y^{-1} \in H$$

هي علاقة تكافؤ في $G$ ، وأن هذه العلاقة منسجمة مع عملية الضرب أي أن :

$$x R y \Rightarrow (x z) R (y z)$$

ماهو صنف تكافؤ عنصر من $H$ ؟

**الحل** : (١) لما كانت أي زمرة جزئية من زمرة $G$ تحتوي على العنصر الحايد $e$ في $G$ ، فان $e \in H$ . ولكن $xx^{-1} = e$ أيا كان $x$ من $G$ ، لذا فإننا نجد :

$$\forall x \in G \quad : \quad x R x$$

أي أن العلاقة $R$ منعكسة .

(٢) لنفرض أن $x R y$ . إن هذا يعني أن $x y^{-1} \in H$ . ولما

كانت $H$ زمرة ( لأنها زمرة جزئية ) ، فان $H$ تحوي نظير العنصر $x y^{-1}$ ، أي العنصر $(x y^{-1})^{-1}$ الذي يساوي كما نعلم $yx^{-1}$ ( لأن $(y^{-1})^{-1} = y$ ) . ولكن $y x^{-1} \in H$ تعني أن $y R x$ . وهكذا فإننا نرى أن :

$$x R y \Rightarrow y R x$$

أي أن العلاقة $R$ متناظرة .

(٣) لنفرض $x R z$ ، $x R y$ . إن هـذا يعني أن $y z^{-1} \in H$ و $x y^{-1} \in H$ . ولما كانت $H$ مغلقة بالنسبة لعملية الضرب ( لأنها زمرة تعريفاً ) فان :

$$(x y^{-1}) (y z^{-1}) = x (y^{-1} y) z^{-1} = x e z^{-1} = x z^{-1}$$

عنصر من $H$ . ولكن $xz^{-1} \in H$ تعني $x R z$ . وبالتالي فقد وجدنا أن :

$$x R y \text{ و } y R z \Rightarrow x R z$$

أي أن العلاقة $R$ متعدية .

وهكذا نرى مما تقدم أن العلاقة $R$ منعكسة ومتناظرة ومتعدية ، إذن $R$ علاقة تكافؤ في $G$ .

(٤) إن :

$x R y \Leftrightarrow x^{-1} y \in H \Leftrightarrow x (z^{-1} z) y^{-1} \in H$ ( لأن $z^{-1}z = e$ )

$\Leftrightarrow (x z^{-1}) (z y^{-1}) \in H$ ( لأن عملية الضرب تجميعية )

( حسب [١٧-٣] ) $\Leftrightarrow (x z^{-1}) (y z^{-1})^{-1} \in H$

$\Leftrightarrow (x z) R (y z)$

(٥) لنفرض $a$ عنصراً من $H$ . إن صنف تكافؤ هـذا العنصر هو مجموعة كل العناصر $y$ من $G$ التي تكافيء $a$ أي التي ترتبط بـ $a$ بالعلاقة $a R y$ أي بالعلاقة $ay^{-1} \in H$ . ونترك للقاريء التأكد من أن مجموعـة العناصر هذه هي $H$ نفسها . وبالتالي فان صنف تكافؤ عنصر $a$ من $H$ هو $H$ نفسها .

٩٧ - لتكن $(G, o)$ زمرة ، $H$ مجموعة جزئيـة منتهية منها . برهن أنه إذا كانت $H$ غير خالية ومغلقة بالنسبة لـ $o$ فان $H$ زمرة جزئية من الزمرة $G$ .

**الحل** : يكفي أن نبرهن بأن نظير أي عنصر $a$ من $H$ ينتمي إلى $H$ . ليكن $a$ عنصراً من $H$ . لما كانت $H$ مغلقـة بالنسبة لـ $o$ ، فان $a^2 = a o a , a^3 = a^2 o a , \ldots , a^m, \ldots$ كلها عناصر من $H$ . ولكن العناصر المختلفة من هذه المجموعة غير المنتهية من العناصر $a , a^2 , \ldots , a^m , \ldots$ يجب أن تكون منتهية ، لأن $H$ منتهية فرضاً . وهذا يعني أن هنالك عددين طبيعيين $k , h$ حيث $k > h > 0$ يكون من أجلهما $a^k = a^h$ . ويترتب على هذا أن $a^{k-h-1} = a^{-1}$ . ولما كان $k - h - 1 \geqslant 0$ ، فان $a^{k-h-1}$ هو العنصر المحايد $e$ $( e \in H )$ أو أحد العناصر $a , a^2 , \ldots , a^m , \ldots$ التي كل منها ينتمي إلى $H$ . وبالتالي فان $a^{-1}$ عنصر من $H$ . وهو المطلوب .

۹۸ - ليكن $Ox , Oy$ مستقيمين متعامدين في مستو $\Pi$ ، ولتكن لدينا التطبيقات الأربعة التالية للمستوي $\Pi$ على نفسه : $f_1$ التطبيق المطابق و $f_2$ التناظر بالنسبة لـ $Oy$ , $f_3$ التناظر بالنسبة لـ $Ox$ , $f_4$ التناظر بالنسبة لـ $O$ . برهن أن مجموعة هذه التطبيقات الأربعة المزودة بعملية تركيب التطبيقات هي زمرة آبلية .

**الحل** : وجدنا عند دراستنا للزمر التناظرية أن مجموعة التطبيقات المتباينة لمجموعة $E$ على نفسها تشكل زمرة $S_E$ بالنسبة لعملية تركيب التطبيقات وعلى هذا الأساس فان مجموعة كل التطبيقات المتباينة والغامرة للمستوي $\pi$ ( أي المجموعة $R \times R$ ) على نفسه تشكل زمرة بالنسبة لتركيب التطبيقات .

إن التطبيقات الأربعة المفروضة يمكن التعبير عنها بالشكل :

$$f_1( (x , y) ) = (x , y) \quad , \quad f_2( (x , y) ) = (-x , y)$$

$$f_3( (x , y) ) = (x , -y) \quad , \quad f_4( (x , y) ) = (-x , -y)$$

من السهل التأكد من أن كلا من التطبيقات هذه متباين وغامر . وبالتالي فان المجموعة $H = \{ f_1 , f_2 , f_3 , f_4 \}$ هي مجموعة جزئية من $S_{R \times R}$ . ويمكن التأكد كذلك من صحة الجدول التالي :

| o | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $f_1$ | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ |
| $f_2$ | $f_2$ | $f_1$ | $f_4$ | $f_3$ |
| $f_3$ | $f_3$ | $f_4$ | $f_1$ | $f_2$ |
| $f_4$ | $f_4$ | $f_3$ | $f_2$ | $f_1$ |

ولما كانت المجموعة الجزئية ( غير الخالية ) $H$ منتهية ، فان كون $H$ مغلقة بالنسبة لـ $o$ ( انظر الجدول ) كاف للحكم بأن $H$ زمرة جزئية من الزمر التناظرية $S_{R \times R}$ ( انظر المثال السابق ) . وبما أن الزمرة الجزئية هي زمرة تعريفاً ، فإن $H$ هي زمرة بالنسبة لعملية تركيب التطبيقات . وهذه الزمرة تبديلية لأن الجدول السابق متناظر بالنسبة للقطر الرئيسي للجدول ( أي القطر المار بالجهة العلوية اليسرى من الجدول ) .

**٩٩** - برهن أن أية زمرة جزئيـــة من زمرة آبليـة هي زمرة جزئية ناظمية .

**الحل** : لتكن $(G , \top)$ زمرة آبلية ، $H$ زمرة جزئية منها . عندئذ أيا كان $h$ من $H$ و $g$ من $G$ :

( لأن العملية $\top$ تجميعية وتبديلية ) $\quad g \top h \top g' = (g \top g') \top h$

$$= e \top h = h \in H$$

وبالتالي فإن $H$ زمرة جزئية ناظمية من $G$ .

* **١٠٠** - لتكن $H , K$ زمرتين جزئيتين من الزمرة الضربية $G$ بفرض الزمرة الجزئية $K$ ناظمية ، برهن مايلي :

**أولاً** : إن $H \cap K$ زمرة جزئية ناظمية من $H$ .

**ثانياً** : إذا رمزنا بـ $H K = \{ h k \mid h \in H , k \in K \}$ ، فان $HK$ زمرة جزئية من الزمرة $G$ .

**الحل** : **أولاً** : لما كانت $H$ زمرة جزئية من الزمرة الضربيـة $G$

فهي زمرة ضربية . إن $H \cap K$ زمرة جزئية من الزمرة $H$ لأن :

(١) $H \cap K$ مجموعة جزئية من $H$ .

(٢) $H \cap K \neq \Phi$ لأن كلا من المجموعتين الجزئيتين $H , K$ تحتوي على العنصر المحايد $e$ في $G$ .

(٣) إذا كان $a , b$ أي عنصرين من $H \cap K$ فان $ab^{-1}$ عنصر من $H \cap K$ ( لماذا ؟ )

ان الشروط (١) – (٣) تبين أن $H \cap K$ زمرة جزئية من $H$ .

ولبرهان أن الزمرة الجزئية $H \cap K$ من $H$ ناظمية يجب إثبات أن

$$\forall h \in H , \forall l \in H \cap K \ : \ h l h^{-1} \in H \cap K \qquad (1)$$

في الحقيقة ، لما كانت $K$ زمرة جزئية ناظمية من $G$ فإن :

$$\forall g \in G \ , \ \forall k \in K \ : \ g k g^{-1} \in K \qquad (2)$$

وبما أن $H \subseteq G$ ، $H \cap K \subseteq K$ ، فان ( 2 ) تقتضي :

$$\forall h \in H \ , \ \forall l \in H \cap K \ : \ h l h^{-1} \in K \qquad (3)$$

كذلك ، لما كانت $H$ زمرة ( جزئية ) فان :

$$\forall h \ , \ k \in H \ : \ h k h^{-1} \in H \qquad (4)$$

وبما أن $H \cap K \subset H$ ، فان ( 4 ) يقتضي :

$$\forall h \in H \ , \ \forall l \in H \cap K \ : \ h l h^{-1} \in \mathbf{H} \qquad (5)$$

ومن الواضح أنه يترتب على الشرطين ( 5 ) و ( 3 ) :

$$\forall h \in H, \forall l \in H \cap K : h l h^{-1} \in H \cap K$$

أي أن الزمرة الجزئية $H \cap K$ من الزمرة $H$ ناظمية .

**ثانياً** : (١َ) من الواضح أن $HK$ مجموعة جزئية من $G$ .

(٢َ) إن $HK \neq \Phi$ ، ذلك أن كلا من الزمرتين الجزئيتين $H, K$ من $G$ تحتوي على العنصر المحايد $e$ في $G$ ، لذا فإن :

$$e e = e \in H K$$

(٣َ) ليكن $h_1 k_1 , h_2 k_2$ اي عنصرين من $HK$ . ولو أدخلنا في اعتبارنا تجميعية عملية الضرب نجد :

$$(h_1 k_1) (h_2 k_2)^{-1} = (h_1 k_1) (k_2^{-1} h_2^{-1}) = h_1 (h_2^{-1} h_2) k_1 k_2^{-1} h_2^{-1}$$

( لأن $h_2^{-1} h_2 = c$ )

$$= (h_1 h_2^{-1}) [h_2 (k_1 k_2^{-1}) h_2^{-1}] \qquad (6)$$

ولما كان $h_1 h_2 \in H$ ( لأن $H$ زمرة جزئية ) وكان الناتج الموجود داخل القوسين [ ] عنصراً من $K$ لأن $h_2 \in H$ ، $k_1 k_2^{-1} \in K$، ولأن $K$ زمرة جزئية ناظمية ، فان الطرف الأيمن من ( 6 ) هو حاصل ضرب العنصر $h_1 h_2^{-1}$ من $H$ بالعنصر [ ] من $K$ ، أي أن ينتمي إلى $HK$ .

وهكذا نرى أن (٣َ) تعني التالي :

$$\forall h_1 k_1 , h_2 k_2 \in H K : (h_1 k_1) (h_2 k_2)^{-1} \in H K$$

إن (١َ) - (٣َ) تعنيان استناداً إلى [٣٣ - ٣] ، أن $HK$ زمرة

جزئية من الزمرة G .

**١٠١** - ألا يمكن أن تكون زمرة آبلية إيزومورفية لزمرة غير آبلية ؟ ولماذا ؟

**الحل** : كلا . لنفترض جدلاً وجود إيزومورفيزم f للزمرة الآبلية $(G, \top)$ على الزمرة غير الآبلية $(E, o)$ . فبما أن الزمرة E غير آبلية ، هنالك عنصران ( على الأقل ) $c, d$ بحيث $c o d \neq d o c$ .
وبما أن الايزومورفيزم تقابل ، فهنالك عنصران ( وحيدان ) $a, b$ من G بحيث $f(b) = d$ ، $f(a) = c$ . ولكن الزمرة G آبلية ، إذن $a \top b = b \top a$ ، وبالتالي فان $f(a \top b) = f(b \top a)$ . وعندها

$$f(a \top b) = f(b \top a) \Rightarrow f(a) o f(b) = f(b) o f(a)$$
$$\Rightarrow c o d = d o c$$

ولما كان $c o d \neq d o c$ ، فإننا نصل إلى تناقض ، وبالتالي فان انطلاقنا من فرضية وجود الايزومورفيزم بين $(G, \top)$ و $(E, o)$ خاطىء .

**١٠٢** - ليكن $\psi$ هومومورفيزماً للزمرة الدوارة G التي مولدها g على الزمرة(*) E . برهن أن الزمرة E دوارة ومولدها $\psi(g)$ .

**الحل** : إذا كان b عنصراً اختيارياً من E ، فهنالك عنصر ( على الأقل ) a من G بحيث $\psi(a) = b$ . ( وجود a ناتج عن كون $\psi$

---

( * ) إذن $\psi$ إبيمورفيزم .

تطبيقاً غامراً ) . ولما كانت $G$ زمرة دوارة مولدها $g$ ، فهنالك عدد صحيح $m$ بحيث : $a = g^m$ ، أي أن $b = \psi(g^m)$ . لكن $\psi : G \to E$ هومومورفيزم إذن $\psi(g^m) = [\psi(g)]^m$ ( لماذا ؟ ) . لذا فهنالك عنصر $\psi(g)$ من $E$ يحقق مايلي : أيا كان العنصر $b$ من $E$ ، فان $b = [\psi(g)]^m$ حيث $m$ عدد صحيح . وهذا يعني أن الزمرة $E$ دوارة مولدها $\psi(g)$ ، وهو المطلوب .

* ١٠٣ - لتكن $(H, o)$ و $(G, \top)$ زمرتين دوارتين من مرتبة واحدة ، وليكن $g$ مولداً اختياريا من $G$ و $h$ مولداً اختياريا من $H$ . برهن على وجود إيزومورفيزم $\varphi : G \to H$ بحيث $\varphi(g) = h$ .

**الحل** : لنفرض أن مرتبة كل من الزمرتين $n$ ، وأن $e , u$ هما العنصران المحايدان في $G , H$ على الترتيب . عندها نجد استناداً إلى التمرين (٩٥) :

$$G = \{ g , g^2 , \ldots , g^n = e \} \quad , \quad H = \{ h , h^2 , \ldots , h^n = u \}$$

مع ملاحظة أن العناصر الداخلة في كل من $H$ ، $G$ مختلفة .

سنبرهن الآن على أن التطبيق $\varphi : G \to H$ المعرف بالقاعدة :

$$\varphi(g^m) = h^m \qquad (1 \leqslant m \leqslant n) \qquad (*)$$

هو إيزومورفيزم لـ $G$ على $H$ .

في الحقيقة ، إن التطبيق $\varphi$ غامر ، لأنه أيا كان العنصر $h^m$ من $H$ ، فانه خيال للعنصر $g^m$ ، كذلك فان التطبيق $\varphi$ متباين ، ذلك أن :

$$\varphi(g^{m'}) = \varphi(g^{m''}) \Rightarrow h^{m'} = h^{m''} \Rightarrow m' = m'' \Rightarrow g^{m'} = g^{m''}$$

ولاثبات أن $\varphi$ هومومورفيزم نفرق بين حالتين :

(١) فإذا كان $m' + m'' \leqslant n$ $( 1 < )$ فيمكن عندئذ تطبيق القاعدة (*) ونجد :

$$\varphi(g^{m'} \top g^{m''}) = \varphi(g^{m'+m''})$$

$$= h^{m'+m''} \qquad \text{( (*) وفق )}$$

$$= h^{m'} \circ h^{m''} = \varphi(g^{m'}) \circ \varphi(g^{m''})$$

(٢) وإذا كان $m' + m'' > n$ ، فإن العدد الصحيح $p = m' + m'' - n$ موجب من جهة ، كما أن $p \leqslant n$ ( لأن $m' + m'' \leqslant 2n$ ) . وعندها نجد استناداً إلى (*) :

$$\varphi(g^{m'} \top g^{m''}) = \varphi(g^{m'+m''}) = \varphi(g^{n+p}) = \varphi(g^{n} \top g^{p})$$

$$= \varphi(e \top g^{p}) = \varphi(g^{p}) = h^{p} = h^{m'+m''-n} =$$

$$= h^{m'} \circ h^{m''} \circ h^{-n}$$

$$= h^{m'} \circ h^{m''}$$

( لأن $h^{-n} = h^{-n} \circ u = h^{-n} \circ h^{n} = h^{n-n} = h^{0} = u$ )

$$= \varphi(g^{m'}) \circ \varphi(g^{m''})$$

وهكذا فإن (١) - (٢) يبينان أن :

$$\forall\, g^{m'}, g^{m''} \in G \quad : \quad \varphi(g^{m'} \top g^{m''}) = \varphi(g^{m'}) \circ \varphi(g^{m''})$$

وبالتالي فإن $\varphi$ هومومورفيزم لـ G في H وإذا أضفنـــا إلى ذلك ماوجدناه بأن $\varphi$ تقابل بين G و H ، استنتجنا أن $\varphi$ إيزومورفيزم لـ G على H ، وأن هذا الايزومورفيزم يحقق استناداً إلى القاعدة (*) :

$$\varphi(g) = h$$

# تمارين غير محلولة

١٠٤ - بين ما إذا كان كل من المجموعات التالية تشكل زمرة بالنسبة للعملية الداخلية المجـــاورة أم لا . برر جوابك في كل من هذه الحالات .

( أ ) مجموعة الأعداد الحقيقية $a + b\sqrt{2}$ ، حيث $a , b$ عـــددان صحيحان ، والعملية الداخلية هي عملية الجمع العادية .

(ب) مجموعة الأعداد الحقيقية المغـايرة للصفر $a + b\sqrt{2}$ ، حيث $a , b$ عددان عاديان ( عقليان ) والعملية هي عملية الضرب العـــادية . (العدد العقلي هو العدد الذي يمكن كتابته على شكل كسر صورته عدد صحيح ومخرجه عدد صحيح مغاير للصفر ) .

(ح) مجموعة التباديل :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

بالنسبة لعملية تركيب التطبيقات .

( د ) المجموعة $\cup = \{ x , y \}$ بالنسبة للعملية o المعرفة بالجدول

| o | x | y |
|---|---|---|
| x | x | y |
| y | y | x |

١٠٥ ـ هل تشكل مجموعة الأعداد الصحيحة زمرة بالنسبة لعملية الطرح العادية ، ولماذا ؟

١٠٦ ـ إن مجموعة الأعـــداد الصحيحة Z تشكل زمرة بالنسبة للعملية $*$ المعرفة بالقاعدة :

$$\forall a , b \in Z \; : \; a * b = a + b - 5$$

أوجد العنصر المحايد لـ $*$ ، ثم أوجد الدستور الذي يعين نظير أي عنصر من هذه الزمرة بالنسبة لـ $*$ .

١٠٧ ـ لتكن G زمرة جمعية آبليـة . برهن ( إما مباشرة أو بالاعتماد على النظريات الخاصة بالزمرة ) صحة المتطابقات التالية أياً كانت العناصر a , b , c من G :

1) $-(-a - b) = a + b$

2) $a - 0 = a$

3) $(c - b) - (a - b) = c - a$

4) $-(a - b) = -a + b = b - a$

5) $(c - b) + (b - a) = c - a$

١٠٨ ـ اكتب التطبيقـات الواردة في التمرين الســـابق بفرض الزمرة G ضربية .

١٠٩ ـ لتكن S مجموعة مزودة بعملية داخلية تجميعية □ . برهن أنه إذا كان كل عنصر في S منتظماً فإن ( S , □ ) تشكل زمرة .

* ١١٠ ـ برهن أنه إذا تحققت الشروط التالية في مجموعة عليها عملية داخلية o :

(١) أن تكون o تجميعية .

(٢) أن يوجد في G عنصر محايد أيسر لـ o .

(٣) أن يوجد لكل عنصر من G نظير أيسر بالنسبة لـ o .

فإن $( G , o )$ تشكل زمرة .

**١١١** - برهن أن كل زمرة جزئية من زمرة آبلية هي آبلية أيضاً أورد مثالاً تبين فيه أن العكس غير صحيح .

**١١٢** - بين أن المجموعة $\{ x | x \in Z , 5 | x \}$ هي زمرة جزئية من زمرة الأعداد الصحيحة Z بالنسبة لعملية الجمع العادية . ( الرمز $5 | x$ يعني أن العدد 5 يقسم العدد x ) .

**١١٣** - برهن أن مجموعة الأشعة المقيدة على الفراغ الاقليدي ذي الأبعاد الثلاثة والمنبعثة من النقطة O تشكل زمرة بالنسبة لعملية جمع الأشعة ( وفق قاعدة متوازي الأضلاع ) هل تشكل مجموعة الأشعة المقيدة الصادرة عن O والتي تقع نهاياتها على مستقيم في الفراغ زمرة جزئية من الزمرة السابقة ؟

**١١٤** - برهن أن كل زمرة جزئية من زمرة دوارة هي زمرة دوارة كذلك .

**١١٥** - ما هو عدد مولدات الزمرة الدوارة من المرتبة n ؟

**١١٦** - لتكن $( G , * )$ زمرة ، H مجموعة جزئية غير خالية من G . برهن أن الشرط اللازم والكافي حتى تكون H زمرة جزئية من

الزمرة G هو :

$$\forall a, b \in H \ : \ a^{-1} b \in H$$

**١١٧** - لتكن $H, K$ زمرتين جزئيتين من الزمرة $G$ . برهن أن $H \cap K$ زمرة جزئية من كل من $G, H, K$ .

**١١٨** - برهن أنه إذا كانت كل من $H, K$ زمرة جزئية ناظمية من الزمرة $G$ ، فان $H K$ زمرة جزئية ناظمية من $G$ كذلك .

$$(HK = \{ hk : h \in H , k \in K \})$$

* **١١٩** - لتكن $(G, o)$ زمرة عنصرها المحايد $e$ ، $(S, \sqsubset)$ زمرة عنصرها المحايد $u$ ، وليكن :

$$J = G \times S = \{ (g, s) \mid g \in G , s \in S \}$$

لنعرف « حاصل ضرب » الزوجين $(g_1, s_1)$ و $(g, s)$ من $J$ بالقاعـــدة .

$$(g, s)\,(g_1, s_1) = (g\, o\, g_1 , s \sqsubset s_1)$$

( أ ) برهن أن $J$ زمرة بالنسبة لعملية الضرب هذه .

(ب) برهن أن $H = \{ (g, u) \mid g \in G \}, K = \{ (e, s) \mid s \in S \}$ زمرتان جزئيتان من $J$ .

(حـ) برهن أن كلا من التطبيقين :

$$H \to G : (g, u) \to g \quad \text{و} \quad K \to S : (e, s) \to s$$

إيزومورفيزم .

١٢٠ - لتكن $G$ زمرة ضربية ، $a , b$ عنصران من $G$ . فاذا فرضنا أن $H$ زمرة جزئية من $G$ وعرفنا :

$$Ha = \{ ha \mid h \in H \} , Hb = \{ hb \mid h \in H \}$$

فبرهن أن :

$$a \in Hb \Rightarrow Ha = Hb$$

١٢١ - لتكن لدينا الزمرتان $( Z , + )$ و $( R^* , \cdot )$ . برهن أن التطبيق $f : Z \to R^*$ المعرف بالقاعـدة $f(n) = a^n$ ، حيث $a$ عنصر مثبت من $R^*$ هو هومومورفيزم .

١٢٢ - برهن أن زمرة الأعداد الصحيحة بالنسبة لعملية الجمـــع العادية ، وزمرة الأعـداد الصحيحة الزوجية بالنسبة للعمليـــة نفسها إيزومورفيتان ؟

١٢٣ - هل التطبيق $\varphi(x) = e^x$ إيزومورفيزم لزمرة الأعداد الحقيقية بالنسبة لعملية الجمع على زمرة الأعداد الحقيقية الموجبة بالنسبة لعملية الضرب ؟

١٢٤ - لتكن $( V , + )$ زمرة الأشعة المنبثقة من نقطة ثابتـة $O$ في الفراغ الاقليدي العـادي بالنسبة لعملية جمع الأشعة ، وليكن $\Pi$ مستوياً ماراً من $O$ . برهن أن التناظر بالنسبة لهـــذا المستوي هو أوتومورفيزم .

١٢٥ - برهن أن الخيـــال الهومومورفي لأي زمرة دوارة هو زمرة دوارة .

١٢٦ - لتكن $G$ زمرة ضربية ، $g$ عنصراً مثبتاً من $G$ . لنعرف

تابعاً $G \to G$ : $\Phi$ بالقاعدة $\Phi(x) = gxg^{-1}$ . برهن أن $\Phi$ هو إيزومورفيزم لـ $G$ على $G$ .

**١٢٧** - لتكن $V$ مجموعة الأشعة الصادرة عن نقطة ثابتة من الفراغ الاقليدي $R^3$ . نقول عن التابع :

$$f_{\vec{a}} : \vec{x} \to \vec{x} + \vec{a}$$

إنه انسحاب في $R^3$ موافق للشعاع $\vec{a}$ . برهن أن مجموعة الانسحابات تشكل زمرة بالنسبة لعملية تركيب التطبيقات .