الفصل الرابع

الحلقة والحقل

١ ـ ٤ **تمهيد** : لقد درسنا في الفصل السابق من هذا الكتاب مجموعة E عرفنا عليها عملية داخلية o وعينا الخواص التي يجب أن تتمتع بها هذه المجموعة والعملية المعرفة عليها ليمكن تسمية الزوج المرتب (E , o) زمرة . وسندرس في هذا الفصل مجموعة E عرف عليها عمليتان (* , o) وسنعطي للثلاثية (E,o,*) اسماء مختلفة بحسب الخواص التي تتصف بها المجموعة E وكل من هاتين العمليتين وبحسب العلاقات الكائنة بينها .

٢ ـ ٤ **الحلقة** : إذا كانت المجموعة E مجهزة بعملية داخلية o تجعل من (E , o) زمرة تبديلية وإذا كانت هذه المجموعة مجهزة بعملية ثانية (*) تجميعية (قابلة للدمج) وتوزيعية على العملية الأولى (o) . فإننا نقول « إن المجموعة E حلقة بالنسبة لهاتين العمليتين » أو « إن العمليتين * و o تجهزان E ببنية الحلقة » أو « إن الثلاثية (E , o , *) حلقة » ، وكثيراً ما نقول إذا لم نخش أي التباس « إن E حلقة » .

ومن المتفق عليه أن نسمي العملية الأولى جمعاً ونرمز لها (+) وأن نسمي العملية الثانية ضرباً ونرمز لها باشارة الضرب العددي المعتادة كما

نرمز للعنصر المحايد لـ (+) بصفر (0) وللعنصر المحايد للضرب (إن وجد) بالوحدة (١) .

ينتج عما تقدم أنه لتكون الثلاثية (E , + , •) حلقة يجب أن نتحقق الشروط التالية التي نسميها عادة مبادىء الحلقة :

$$\forall x, y, z \in E \;:\; (x+y)+z = x+(y+z) \qquad (١)$$

$$\forall x,y \in E \;:\; x+y = y+x \qquad (٢)$$

$$\forall x \in E \,,\, \exists 0 \in E \;:\; 0+x = x+0 = x \qquad (٣)$$

$$\forall x \in E \,,\, \exists y \in E \;:\; x+y = y+x = 0 \qquad (٤)$$

$$\forall x, y, z \in E \;:\; (x\,y)\,z = x(y\,z) \qquad (٥)$$

$$\forall x, y, z \in E \;:\; \begin{cases} x(y+z) = x\,y + x\,z \\ (y+z)x = y\,x + z\,x \end{cases} \qquad (٦)$$

٣ - ٤ **ملاحظة** : ١ - إننا لم نشترط في العملية الداخلية الثانية (•) المعرفة على الحلقة أن تكون تبديلية كما أننا لم نشترط أن تحوي E دعامة الحلقة عنصراً محايداً بالنسبة لهذه العملية . فإذا كانت العملية (•) تبديلية قلنا إن الحلقة (E , + , •) تبديلية وإذا كان لهذه العملية عنصر محايد في E سمينا هذه الحلقة « حلقة واحدية » .

٤ - ٤ **ملاحظة** (٢) : لقد اتفق أن نرمز لنظير x بالنسبة للعملية + بـ $-x$ ولنظير y بالنسبة للعملية الثانية (إن وجد) بـ y^{-1} وسيكون استناداً إلى تعريف العنصر النظير [٢٢ - ١] :

$$-(-x) = x \quad , \quad (y^{-1})^{-1} = y$$

٥ - ٤ أمثلة من الحلقات :

١ - لقد درسنا في الفصل الثاني مجموعة الأعداد الصحيحة Z وعرفنا عليها عملية جمع جعلت من Z زمرة تبديلية ثم عرفنا على هذه المجموعة عملية ضرب تتصف بكونها قابلة للدمج (تجميعية) وللتوزيع على الجمع كما برهنا أن هذه العملية تبديلية وتقبل العدد (١) عنصراً محايداً فالمجموعة Z إذن حلقة تبديلية واحدية .

٢ - درسنا في الفصل السابق C_n مجموعة أصناف التوافق (قياس n) وعرفنا على هـذه المجموعة عمليتين سمينا الأولى منهما جمعاً (+) وسمينا الثانية ضرباً (∙) ورأينا أن العملية (+) تجعل من هذه المجموعة زمرة جمعية بينما تتصف العملية الثانية بأنها قابلة للدمج (تجميعية) وبأنها توزيعية على العملية الأولى . إذن يمكننا أن نقول إن C_n حلقة . (هل هـذه الحلقة تبديلية وواحدية ؟) .

٣ - لندرس الجدولين التاليين الممثلين لجدولي جمع وضرب معرفين على المجموعة $E = \{ e , a , b , c \}$.

+	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

×	e	a	b	c
e	e	e	e	e
a	e	a	b	c
b	e	b	e	b
c	e	c	b	a

يمكننا بسهولة أن نتأكد من الجدول الأول أن العملية (+) تبديلية وقابلة للدمج ولها عنصر محايد (e) ولكل عنصر من E عنصر نظير بالنسبة لهذه العملية :

$$e + e = e \ , \quad a + c = c + a = e \ , \quad b + b = e \quad , \quad c + a = a + c = e$$

كما يمكننا أن نتأكد من الجدول الثاني أن العملية ($\times$) قابلة للدمج وأنها توزيعية على العملية (+) وهذا ما يسمح لنا بأن نقول إن لـ E بنية حلقة .

نستنتج من الجدول الثاني أن العملية ($\times$) تبديلية وأن العنصر a هو العنصر المحايد لها لذا يمكننا أن نصف هذه الحلقة بأنها واحدية وتبديلية .

٦ - ٤ طرائق الحساب على الحلقة :

١ - لقد عرفنا على E (دعامة الحلقة) عملية داخلية أولى سميناها جمعاً ورمزنا لها بـ (+) ورأينا أن لكل عنصر a من E نظيراً بالنسبة لـ (+) نرمز له بـ ($-a$) وسيكون نتيجة لهذا [٣٦ - ١] أن العملية المعاكسة للجمع والتي نسميها عادة طرحاً ونرمز لها بـ ($-$) معرفة على E فالطرح إذن عملية داخلية معرفة على دعامة كل حلقة . وقد عرفنا أيضاً على E عملية ثانية سميناها ضرباً ورمزنا لها بالاشارات المعتادة لضرب الأعداد . وكثيراً ما نرمز لعنصر من E بناتج تكرار هذه العمليات الثلاث أو بعضها مثل :

$$[\,a \times (-b)\,] + \{\, c \times [\, c + (-e)\,]\,\}$$

إن ناتج العمليات الموجودة في كل قوس من هذه الأقواس يمثل عنصراً

من E يجب أن يعامل بحسب الاشارة التي تتبعه مع العنصر الذي يليه ، وذلك ترتيباً من اليسار إلى اليمين . وقد جرت العادة أن يهمل بعض هذه الأقواس وأن نجري عمليات الضرب الداخلة في هذا التركيب قبل عمليتي الجمع والطرح . فيمكننا مثلاً أن نكتب التركيب السابق بالشكل :

$$a \times (-b) + c \times [c + (-c)]$$

٢ ـ بعد أن برهنا أن الطرح عملية داخلية على الحلقة $(E, +, \cdot)$ يمكننا أن نبرهن أيضاً أن الضرب توزيعي على الطرح كما هو شأنه من أجل الجمع أي أن نبرهن صحة العلاقة :

$$\forall x, y, z \in E \qquad x(y - z) = xy - xz$$

في الحقيقة بما أن الضرب توزيعي على الجمع فإنه يمكننا أن نكتب :

$$x(y - z) + xz = x(y - z + z) = xy$$

وبما أن عملية الجمع وحيدة القيمة وقابلة للاختصار :

$$x(y - z) + xz + (-xz) = xy + (-xz)$$

واستناداً إلى تعريف الطرح والعنصر النظير بالنسبة للجمع تأخذ العلاقة السابقة الشكل :

$$x(y - z) = xy - xz \tag{1}$$

وهي العلاقة المطلوب برهانها .

يبرهن بالطريقة السابقة ذاتها على صحة العلاقة .

$$(y - z)x = yx - zx \tag{2}$$

٣ - إذا جعلنا في العلاقتين (2 , 1) ، $y = z$ فسنجد :

$$x . o = o = o . x$$

٤ - وإذا جعلنا في (2 , 1) ، $y = o$ فسيكون :

$$x(-z) = -xz \quad , \quad (-z)x = -zx$$

نفسر هذا بقولنا « إذا بدلنا أحد حدي الضرب بنظيره بالنسبة للجمع فإن الناتج الجديد سيكون نظيراً للنــاتج القديم بالنسبة للجمع أيضاً » ونذكر عادة هذه الخاصة بالشكل . « إن تغيير إشارة واحد من حدي الضرب يؤدي الى تغيير اشارة ناتج الضرب » .

٥ - اذا غيرنا اشارة كل من حدي الضرب فان الناتج سيغير إشارته مرتين أي أنه سيحافظ على إشارته الأصلية :

$$(-x) . (-y) = x . y$$

نعمم ما سبق على تكرار عملية الضرب فنكتب :

$$\forall p \in N \quad : \quad (-a)^{2p} = a^{2p} \quad , \quad (-a)^{2p+1} = -a^{2p+1}$$

لقد درسنا حتى الآن الحلقة وأتينا على خواصها وأعطينا بعض الأمثلة عليها وسنقدم فيما يلي دراسة فيها بعض التفصيل لحلقتين مهمتين همـا حلقة الأعداد العادية وحلقة كثيرات الحدود .

حلقة الأعداد العادية :

٧ - ٤ **تعريف العدد العادي** : إذا شكلنا الجداء $Z \times Z^*$ فإننـا

سنحصل على أزواج مرتبة من الشكل (a , b) حيث $b \neq o$ ($b \in Z^*$ ، $a \in Z$) . نعطي في هذا البحث الزوج المرتب (a , b) مفهوماً مرادفاً لمفهوم الكسر العادي المعروف (a/b) ونسميه كسراً كما نسمي مركبته الأولى a صورة ومركبته الثانية b مخرجاً لهذا الكسر . ونذكر الخاصة الأساسية للكسور :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a\,d = b\,c$$

بشكل علاقة معرفة على الجداء $Z \times Z^*$:

$$(a , b)\ \mathcal{R}\ (c , d) \Leftrightarrow a\,d = b\,c \qquad (1)$$

يبرهن بسهولة أن هذه العلاقة **منعكسة ، متناظرة ومتعدية** فهي علاقة تكافؤ ونقول عن كل كسرين (a , b) و (c , d) يحققان العلاقة (1) ، إنهما كسران متكافئان ونكتب تجاوزاً :

$$(a , b) = (c , d) .$$

تجزىء العلاقة $\mathcal{R}$ المجموعة $Z \times Z^*$ إلى أصناف تكافؤ يتكون كل صنف من مجموعة الكسور التي كنا نسميها متساوية وندعوها في هذا البحث متكافئة مثل الصنف :

$$\{ (2 , 3) , (4 , 6) , (6 , 9) , \dots \}$$

يمثل كل صنف أحـــد كسوره ونرمز للصنف بالكسر الذي يمثله بعد أن نضع فوقه ، موقتاً ، قوساً يميزه عن هـذا الممثل فنرمز مثلاً للصنف الذي أوردناه أعلاه بـ($\overset{\frown}{2 , 3}$) ويكون :

$$(2, 3) \in (\widehat{2, 3}) \quad , \quad (6, 9) \in (\widehat{2, 3})$$

نسمي كل صنف من أصناف التكافؤ التي أتينا على تعريفها عدداً عادياً ونرمز لمجموعة الأعداد العادية بـ Q :

٨ ـ ٤ العددان العاديان المتساويان : إستناداً إلى خواص علاقة التكافؤ نقول « يتساوى العددان العاديان $(\widehat{a,b})$ ، $(\widehat{c,d})$ فيما إذا انتمى ممثلاهما (a,b) ، (c,d) إلى صنف تكافؤ واحد » .

مثال : إن العددين العاديين $(\widehat{3,15})$ ، $(\widehat{7,35})$ متساويان لأن :

$$(3, 15) \in (\widehat{1, 5}) \quad , \quad (7, 35) \in (\widehat{1, 5})$$

٩ ـ ٤ الخاصتان الأساسيتان للكسور :

١ ـ إذا ضربنا حدي كسر بعدد صحيح واحد لايساوي الصفر فإننا نحصل على كسر يكافىء الكسر المفروض أي :

$$\forall k \in N^* \ : \ (a, b) \ \mathcal{R} \ (k a, k b)$$

وذلك لأنه بحسب خواص ضرب الأعداد الصحيحة :

$$a k b = b k a$$

٢ ـ إذا قبل حدا الكسر (a, b) القسمة على عدد صحيح واحد c فإنه يكون :

$$(a, b) \ \mathcal{R} \left(\frac{a}{c} , \frac{b}{c} \right)$$

وذلك لأنه استناداً إلى العلاقة (1) :

$$a \cdot \frac{b}{c} = b \cdot \frac{a}{c} \Rightarrow (a, b) \mathcal{R} \left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c} \right)$$

برهن كتمرين صحة المساواة :

$$a \cdot \frac{b}{c} = b \cdot \frac{a}{c}$$

مستنداً إلى خواص عملية ضرب الأعداد الصحيحة .

نسمي عادة تقسيم حدي كسر على عدد صحيح واحد يقسمها اختصار الكسور وإذا قسمنا حـــدي كسر على قاسمها المشترك الأعظم فسوف نحصل على كسر حداه أوليان فيما بينهما ندعوه بكسر غير قابل للاختصار أو غير قابل للارجاع .

١٠ - ٤ **ملاحظة :** ينتج عن الخاصة الأولى أنه يمكننا أن نضرب حدي كل كسر من مجموعة كسور بعدد بحيث نحصل على مجموعة جديدة من الكسور مخارجها متساوية وتكافىء على الترتيب كسور المجموعة الأولى نسمي مثل هذا العمل توحيد مخارج الكسور .

مثال : إن الكسور $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ تكافىء على الترتيب الكسور $\frac{3}{12}$, $\frac{4}{12}$, $\frac{6}{12}$ وتكافىء أيضاً الكسور $\frac{6}{24}$, $\frac{8}{24}$, $\frac{12}{24}$.

يمكن التوصل إلى توحيد مخارج جملة من الكسور بأشكال عديدة وبصورة خاصة إن الكسرين $\frac{c}{d}$, $\frac{a}{b}$ يكافئان على الترتيب الكسرين $\frac{b\,c}{b\,d}$, $\frac{a\,d}{b\,d}$.

١١ - ٤ **ملاحظة :** يمكننـــا أن نفرض دوماً أن مخرج الكسر

العادي موجب وذلك بأن نضرب ، في الحالة المخالفة ، حدي الكسر بالعدد (١ −) .

١٢ - ٤ تنبيه : لقد رمزنا للعدد العـــادي بممثل له يعلوه قوس وسنحذف هـذه القوس تسهيلًا للطباعة في الحالات التي لا نخشى فيهـــا أي التباس .

١٣ - ٤ **جمع الأعداد العادية** : لنترجم القاعدة المعروفة لجمع كسرين بالتعريف التالي :

$$(a\,,\,b) + (c\,,\,d) = (a\,d + b\,c\,,\,b\,d) \qquad (3)$$

ولنلاحظ أن $a\,d + b\,c \in Z\,,\ b\,d \in Z^*$ لأن $a\,,\,b \in Z : b,d \in Z^*$ ولأن كلا من المجموعتـــين $Z\,,\,Z^*$ مستقرة بالنسبة للجمـــع والضرب المعرفين عليها ونستنتج من هذا أن ناتج عملية جمع كسرين كسر وأن عملية جمع الكسور هي عملية داخلية معرفة على مجموعة الكسور $Z \times Z^*$.

ولنلاحظ أيضاً أنه لو استعضنا في الطرف الأيسر من العلاقة (3) عن حدي الجمع بكسرين مكافئين لهما فسوف نحصل على ناتج للجمع يكافىء الناتج القديم . في الحقيقة :

$$(a\,,\,b)\ \mathcal{R}\ (a'\,,\,b') \iff a\,b' = b\,a'$$

$$(c\,,\,d)\ \mathcal{R}\ (c'\,,\,d') \iff c\,d' = d\,c'$$

إذا ضربنا طرفي المساواة الأولى وطرفي المساواة الثانية على الترتيب بالعددين غير المعدومين $b\,b'\,,\,d\,d'$ وجمعنا المساواتين الناتجتين إلى بعضها فسوف نجـــد :

$$(a\,d + b\,c)\,b'\,d' = (a'\,d' + b'\,c')\,b\,d$$

$$\Leftrightarrow (a\,d + b\,c\,,\,b\,d)\,\mathcal{R}\,(a'\,d' + b'\,c'\,,\,b'\,d')$$

$$\Leftrightarrow [\,(a\,,\,b) + (c\,,\,d)\,]\,\mathcal{R}\,[\,(a'\,,\,b') + (c'\,d')\,]$$

وهو المطلوب برهانه .

انطلاقاً مما سبق يمكننا أن نعطي التعريف التالي :

$$(\widehat{a\,,\,b}) \dot{+} (\widehat{c\,,\,d}) = (\widehat{ad + b\,c\,,\,b\,d})$$

ونذكر ذلك بقولنا : « إن ناتج جمع عددين عاديين هو عدد عادي يمثله ناتج جمع ممثلي العددين العاديين المفروضين » .

١٤ - ٤ تنبيه : لقد مثلنا عملية جمع الأعداد العادية بـ $\dot{+}$ تمييزاً لها عن عملية جمع الكسور سنحذف بعد الآن النقطة من فوق الاشارة + ولن نضعها إلا في الحالات التي نخشى فيها التباساً .

١٥ - ٤ **خواص جمع الأعداد العادية** : يبرهن انطلاقاً من تعريف جمع الأعداد العادية على صحة الخواص التالية :

١ - جمع الأعداد العادية قابل للدمج (تجميعي) :

$$[\,(a\,,\,b) + (c\,,\,d)\,] + (e\,,\,f) = (a\,,\,b) + [\,(c\,,\,d) + (e\,,\,f)\,]$$

٢ - جمع الأعداد العادية تبديلي :

$$(a\,,\,b) + (c\,,\,d) = (c\,,\,d) + (a\,,\,b)$$

٣ - العدد العادي $(0,1) = (0,k)$ هو العنصر المحايد لهذه العملية .

٤ - إن العدد العادي $(\widehat{-a, b})$ هو العنصر النظير لـ $(\widehat{a, b})$ بالنسبة للجمع .

ينتج عما سبق أن Q ، مجموعة الأعداد العادية ، زمرة جمعية تبديلية .

١٦ - ٤ ضرب الأعداد العادية : سنترجم هنا أيضاً قاعدة ضرب الكسور المعروفة بالتعريف التالي :

$$(a, b) \cdot (c, d) = (a c, b d) \qquad (4)$$

وإذا لاحظنا أن $a c \in Z$, $b d \in Z^*$ فإن ناتج الضرب (ac, bd) كسر وإن العملية المعرفة بالعلاقة (4) عملية داخلية معرفة على مجموعة الكسور ويمكننا أن نبرهن بسهولة أن ناتج ضرب كسرين لا يتغير إذا بدلنا كلا من حديه بكسر آخر يكافئه .

استناداً إلى ما تقدم نعطي تعريف ضرب الأعداد العادية بالشكل :

$$(\widehat{a, b}) \dot{\times} (\widehat{c, d}) = (\widehat{a c, b d}) \qquad (5)$$

ونذكر ذلك بقولنا « إن جداء عددين عاديين يمثلهما الكسران (a, b) ، (c, d) هو عدد عادي يمثله جداء هذين الكسرين » .

١٧ - ٤ تنبيه : لقد رمزنا لعملية ضرب الأعداد العادية بإشارة ضرب الأعداد المعتادة $(\times)$ تعلوها نقطة ؛ سنحذف بعد الآن هذه النقطة لتسهيل الطباعة إلا في الحالات التي نخشى فيها التباساً .

١٧ - ٤ خواص ضرب الأعداد العادية : يمكننا انطلاقاً من العلاقة (5) أن نبرهن صحة الخواص التالية :

١ - ضرب الأعداد العادية قابل للدمج (تجميعي) :

$$[(a, b) . (c, d)] . (e, f) = (a, b) . [(c, d) . (e, f)]$$

٢ ـ ضرب الأعداد العادية تبديلي :

$$(a, b) . (c, d) = (c, d) . (a, b)$$

٣ ـ إن العدد العادي :

$$\forall k \in Z^* \quad : \quad (1, 1) = (k, k)$$

هو العنصر المحايد لهذه العملية .

إذا كان $a \neq 0 \ , \ b \neq 0$ فإن العدد العادي (a, b) نظير العدد العادي (b, a) بالنسبة لعملية الضرب .

نسمي عادة نظير العدد العادي x بالنسبة للضرب مقلوباً لهذا العدد ونرمز له بـ x^{-1} .

إذا ضممنا هذه الخواص إلى خواص جمع الأعداد العادية فإننا نقول : « ان مجموعة الأعداد العادية Q حلقة تبديلية واحدية » .

١٨ - ٤ تمرين : برهن أن Q' المجموعة الجزئية من Q والتي يرمز لعناصرها بالشكل $(a, 1)$ حيث $a \in Z$ ، ايزومورفية مع Z بالنسبة للعمليتين $(+ , \cdot)$ المعرفتين على Z و Q .

١٩ - ٤ نتيجة : نتيجة للتمرين السابق ولما قدمناه في الفقرة [١ - ٥٥] فإنه يمكن مع شيء من التجاوز أن نكتب :

$$\forall a \in Z \quad : \quad (a, 1) = a \quad , \quad (0, 1) = (0, a) = 0$$

$$(1, 1) = (a, a) = 1$$

أو بشكل مختصر $Q' = Z$.

ونقول ان $0 = (0, k)$ هو صفر الأعداد العادية و $1 = (1,1)$ هو واحدة الأعداد العادية .

٢٠ - ٤ ليس لـ Q بنية زمرة ضربية لأنه ليس للصفر نظير بالنسبة للضرب (لماذا) .

٢١ - ٤ طرح الأعداد العادية : بعد أن برهنا أن Q زمرة فإننا نستنتج [٦ - ٤] أن عملية الطرح عملية داخلية معرفة على مجموعة الأعداد العادية . يرمز عادة لنظير العدد العـــادي (a, b) بـ $-(a, b)$ - واذا ذكرنا ما رأيناه في [١٤ - ٤] فإنه يكون :

$$-(a, b) = (-a, b) = (a, -b)$$

$$(a, b) - (c, d) = (a, b) + (-c, d) = (ad - bc, bd)$$

٢٢ - ٤ الأعداد العادية الموجبة والسالبة : لقد كتبنا تجاوزاً [١٩ - ٤] :

$$\forall a \in Z \ : \ (a, 1) = a$$

ومن المنطقي أن نقول عن العدد العـادي $(a, 1)$ انه موجب فيما اذا كان a موجباً وأن نقول عنه انه سالب فيما اذا كان a سالباً .

ومن المنطقي أيضاً أن نعمم هذا على كل عدد عادي جعل مخرجه موجباً وأن نقول : « إذا كان b موجباً فان العادي (a, b) يكون موجباً إذا كان a موجباً ويكون هذا العدد سالباً إذا كان a ســـالباً » وبما أن :

$$(-a, b) = (a, -b) \quad , \quad (a, b) = (-a, -b)$$

فإننا نعطي التعريف التالي :

« يكون العدد العادي موجباً إذا كانت مركبتا ممثله من إشارة واحدة ويكون العدد العادي سالباً إذا كانت هاتان المركبتان من إشارتين مختلفتين » أي :

$$(a , b) \text{ موجب } \Leftrightarrow a . b > 0$$

$$(a , b) \text{ سالب } \Leftrightarrow a . b < 0$$

٢٣ - ٤ **علاقة الترتيب على Q** : يمكننا أن نمدد علاقة التراجح المعرفة على Z لكي تشمل Q بالتعريف التالي :

تعريف : نقول عن العدد العادي (a , b) إنه يكبر العدد العادي (c , d) فيما إذا كان ناتج الطرح :

$$(a , b) - (c , d)$$

موجباً وبصورة خاصة إذا كان a, b من إشارة واحدة أي إذا كان العدد العادي (a , b) موجباً فإنه يكون :

$$(a , b) - (0,1) = (a , b)$$

موجباً ونقول إن كل عدد موجب يكبر الصفر ونكتب ذلك بالشكل:

$$(a , b) > 0$$

أما إذا كان x و y من إشارتين مختلفتين أي إذا كان العدد العادي (x , y) سالباً ، فإنه يكون :

$$(0,1) - (x , y) = (- x , y)$$

موجباً ونقول إن الصفر يكبر كل عدد سالب ونكتب ذلك بالشكل :

$$(x , y) < 0$$

وبما أن ناتج طرح عددين عاديين عدد عادي فان هذا الناتج سيكون سالباً أو موجباً أو معدوماً وهذا يعني أن كل زوج من الأعداد العادية α , β يحقق واحدة فقط من العلاقتين :

$$\alpha \geqslant \beta \quad , \quad \alpha < \beta$$

يبرهن أن العلاقة $\leqslant$ المعرفة على Q هي علاقة ترتيب ويستنتج أن Q مرتبة كلياً بالعلاقة $\leqslant$.

٢٤ ـ ٤ تقسيم الأعداد العادية : إذا تذكرنا تعريف العمليـــة المعاكسة [٣٦ - ١] وأن لكل عدد عادي يخالف صفر هذه الأعـداد نظيراً بالنسبة للضرب ، فإنه يمكننا أن ننشيء على $Q^* = Q - \{0\}$ عملية معاكسة للضرب نسميها تقسيما ونرمز لها بـ (: أو $\div$ أو —) ونعرفها بالشكل التالي :

$$(a , b) \div (c , d) = (a , b) \times (d , c) = (a d , b c)$$

وكثيراً ما نرمز لهذه العملية بالشكل :

$$(a , b) : (c , d) \qquad \text{أو} \qquad \frac{(a , b)}{(c , d)}$$

وسيكون بصورة خاصة :

$$\frac{1}{(c , d)} = (1 , 1) \times (d , c) = (d , c) = (c , d)^{-1}$$

وهذا يعني أنه إذا كان x عدداً عادياً غير معدوم فإنه يكون :

$$x^{-1} = \frac{1}{x}$$

ويمكننا استناداً إلى ما تقدم أن نكتب :

$$(a , b) = (a , 1) \times (1 , b) = (a , 1) : (b , 1)$$

$$\Leftrightarrow a \times b^{-1} = \frac{(a , 1)}{b , 1} = \frac{a}{b}$$

وبذلك نكون قد ربطنا بين الرمز الجديد للكسر (a , b) والرمز القديم a/b ويمكننا لدفع الالتباس أن نرمز للعدد العادي الذي يمثله الكسر a/b بالشكل (a/b) ونقول إن الكسر (a , b) هو حاصل قسمة العدد الصحيح a على العدد الصحيح غير المعدوم b .

بما أن التقسيم هو العملية المعاكسة للضرب على *Q وإذا تذكرنا قواعد ضرب الاشارات فإنه يمكننا أن نكتب :

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b} \quad , \quad \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$$

وأن نستنتج قواعد تقسيم الاشارات المعروفة .

حلقة كثيرات الحدود ذات المتحول الواحد :

٤-٢٥ تعريف كثير حدود ذي متحول : يقصد في الرياضيات التقليدية بكثير حدود ذي متحول تابع من الشكل :

$$(1) \qquad x \rightarrow a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

حيث نعتبر العوامل a_i والمتحول x أعداداً حقيقية أو مركبة .

نقول إن كثير الحدود (1) من الدرجة n ، ونسمي كل تركيب فيه من الشكل $a_h x^h$ حداً من الدرجة h عامله a_h كما نقول عن حدين إنهما متشابهان فيما إذا كانا من درجة واحدة . سنعمم في هذه الفقرة التعريف السابق بأن نستعيض عن R وC بحلقة تبديلية واحدية نرمز لها بـ K واذا لاحظنا أن كل كثير حدود يمكن تعيينه تعييناً تاماً إذا عرفنا عوامل كل حدوده $a_0, a_1, \ldots, a_n$ فإننا سنرمز لكل كثير حدود بجملة من عناصر K عددها غير منته تمثل عوامل حدوده وسيكون معدوماً عامل كل حد تزيد قوته عن درجة كثير الحدود المفروض فنكتب مثلاً :

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, 0, \ldots)$$

وإذا كان $P(x)$ كثير حدود من الدرجة n فسيكون :

$$\alpha_{n+1} = 0 \ , \ \alpha_{n+2} = 0, \ldots$$

نرمز عادة لمجموعة كثيرات الحدود ذات المتحول x المعرفة على الحلقة K بـ $K(x)$.

٢٦ - ٤ **تساوي كثيري حدود** : نقول تعريفاً إن :

$$(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots) = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots)$$

فيما إذا كان : $\alpha_0 = \beta_0 ,\ \alpha_1 = \beta_1 ,\ \alpha_2 = \beta_2 , \ldots$

أي يتساوي كثيرا حدود فيما إذا ساوى عامل كل حد من الأول عامل الحد المشابه له في الثاني .

٢٧ - ٤ **جمع كثيرات الحدود** : نعرف جمع كثيري حدود بالعلاقة التالية :

$$P + Q = (\alpha_0 , \alpha_1 , \ldots) + (\beta_0 , \beta_1 , \ldots) = (\alpha_0 + \beta_0 , \alpha_1 + \beta_1 , \ldots)$$

بما أن :

$$\alpha_i \in K, \beta_i \in K \Rightarrow \alpha_i + \beta_i \in K$$

فإنه يكون :

$$(\alpha_0 , \alpha_1 , \ldots) \in K(x) \quad , \quad (\beta_0 , \beta_1 , \ldots) \in K(x)$$

$$\Rightarrow (\alpha_0 + \beta_0 , \alpha_1 + \beta_1 , \ldots) \in K(x)$$

وهذا يعني أن عملية جمع كثيرات الحدود عملية داخلية على $\mathbf{K}(x)$.

نستنتج من تعريف جمع كثيرات الحدود وخواص الجمع المعرف على K ، الخواص التالية :

١ - جمع كثيرات الحدود تبديلي .

٢ - جمع كثيرات الحدود قابل للدمج (تجميعي) .

٣ - إن كثير الحدود ($0 , 0 , 0 , \ldots$) هو العنصر المحايد لهذه العملية .

(٤) إن كثير الحدود ($-b_0 , -b_1 , \ldots$) هو العنصر النظير لكثير الحدود ($b_0 , b_1 , \ldots$) بالنسبة للجمع .

إن هذه الخواص الأربع تجعل من $K(x)$ زمرة جمعية تبديلية .

٢٨ - ٤ **ضرب كثيرات الحدود** : إذا تذكرنا القواعد التقليدية

لضرب كثيري حدود فإنه يمكننا أن نعط التعريف التالي لهذه العملية :

$$(\alpha_0 , \alpha_1 , \ldots) \times (\beta_0 , \beta_1 , \ldots) = (\rho_0 , \rho_1 , \ldots)$$

حيث :

$$\rho_0 = \alpha_0 \cdot \beta_0 \quad , \quad \rho_1 = \alpha_0 \beta_1 + \alpha_1 \beta_0 \, , \; \rho_2 = \alpha_0 \beta_2 + \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_0$$

وبصورة عامة :

$$\rho_n = \sum_{i+J=n} \alpha_i \cdot \beta_J$$

يمثل الطرف الأيمن من الدستور الأخير مجموع كل الجداءات الممكنة $\alpha_i \beta_J$ بحيث يكون $i + J = n$.

يمكننا أن نستنتج من التعريف السابق بشيء من العناء :

١ ـ ضرب كثيرات الحدود تبديلي وذلك لأن الجداء $\alpha_i \beta_J$ على K تبديلي .

٢ ـ ضرب كثيرات الحدود قابل للدمج (تجميعي) .

٣ ـ كثير الحدود من الدرجة صفر $\tau = (1 , 0 , 0 , \ldots)$ هو العنصر الحايد لهذه العملية إذ أنه مهما كان n :

$$\rho_n = \sum_{i+J=n} \alpha_i \beta_J = 1 \cdot \beta_n = \beta_n$$

٤ ـ ضرب كثيرات الحدود توزيعي على جمعها .

إن هذه الخواص بالاضافة إلى خواص جمع كثيرات الحدود تجعل من $K(x)$ حلقة تبديلية وواحدية .

٢٩ ـ ٤ **الحلقة الجزئية** : إذا كانت A حلقة وكانت B مجموعة

جزئية منها فإننا نقول إن B حلقة جزئية من A فيما إذا تحقق الشرطان التاليـــان :

١ ـ B زمرة جزئية من A بالنسبة للعملية + .

٢ ـ B مستقرة بالنسبة لعملية الضرب المعرف على A أي :

$$\forall x , y \in B \quad , \quad x y \in B$$

إن الشرط الأول يستدعي أن $0 \in B$ وأن B مستقرة بالنسبة للجمع والطرح المعرفين على A ويبرهن استناداً إلى ما سبق أن $(B , + , \cdot)$ حلقـــة .

مثال : إذا عدنا إلى [١٨ - ٢ ، ٢١ - ٢] فسوف نتأكد من أن C_6 مجموعـــة أصناف التوافق (قياس 6) حلقـة بالنسبة للجمع والضرب المعرفين عليها . إن جـدولي جمع وضرب الأصناف للمجموعتين الجزئيتين من C_6 :

$$E_1 = \{ (0) , (3) \} \quad , \quad E_2 = \{ (0) , (2) , (4) \}$$

$\dot{+}$	(0)	(2)	(4)
(0)	(0)	(2)	(4)
(2)	(2)	(4)	(0)
(4)	(4)	(0)	(2)

$\times$	(0)	(2)	(4)
(0)	(0)	(0)	(0)
(2)	(0)	(4)	(2)
(4)	(0)	(2)	(4)

$+$	(0)	(3)
(0)	(0)	(3)
(3)	(3)	(0)

$\times$	(0)	(3)
(0)	(0)	(0)
(3)	(0)	(3)

يبينان لنا أن كلا من المجموعتين E_1 , E_2 زمرة جمعية جزئية من C_6 وأن عملية الضرب المعرفة على C_6 مستقرة على كل من E_1 , E_2 وهـــذا ما يبرهن على أن كلا منهما حلقة جزئية من الحلقة C_6 .

تمرين : برهن أن كلا من $(E_1 , + , \cdot)$ و $(E_2 , + , \cdot)$ حلقة .

مثال : إذا عرفنا nZ المجموعة الجزئية من Z بما يلي .

$$n Z = \{ n a \mid a \in Z \} \quad , \quad n \in N$$

ودرسنا عليها جمع وضرب الأعداد الصحيحة فإننا سنجد بسهولة أن $(nZ , + , \cdot)$ حلقة جزئية من Z .

٣٠ - ٤ **الجزء المثالي من حلقة** : إذا كانت A حلقـة وكانت B حلقة جزئية من A وإذا كان :

$$\forall x \in B \, , \, \forall y \in A \; : \; x y \in B \qquad (1)$$

قلنا ان B جزء مثالي من اليسار لـ A .

أما اذا كان الشرط السابق من الشكل :

$$\forall x \in B \, , \, \forall y \in A \; : \; y x \in B \qquad (2)$$

فإننا نقول ان B جزء مثالي من اليمين لـ A .

وإذا تحقق الشرطان(1 , 2) ، وبصورة خاصة إذا كانت الحلقة A تبديلية

فإننا نقول إن B جزء مثالي ثنائي الجانب لـ A أو باختصار ان B جزء مثالي لـ A .

مثال ١ ـ اذا كان a عنصراً معيناً غير معدوم من الحلقة Z فإن الحلقة الجزئية I المكونة من الأعداد a . q حيث (q ∈ Z) هي جزء مثالي لـ Z وذلك لأن :

$$\forall x \in Z \, , \forall a q \in I \; : \; x a q = (x q) a \in I$$

مثال ٢ ـ لنعد الى المثال (١) من الفقرة [٢٩ ـ ٤] ولنبرهن أن الحلقة الجزئية $E_2 = \{ (0) , (2) , (4) \}$ هي جزء مثالي للحلقة C_6 .

في الحقيقة ان الجدول التالي يمثل جدول ضرب عناصر المجموعة E بعناصر المجموعة C_6 .

×	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)
(2)	(0)	(2)	(4)	(0)	(2)	(4)
(4)	(0)	(4)	(2)	(0)	(4)	(2)

، وهو يؤكد صحة العلاقة :

$$\forall x \in C_6 \; , \; \forall \alpha \in E_2 \; : \; x \alpha = \alpha x \in E_2$$

٣١ ـ نظرية : اذا كانت (E , + , •) حلقة تبديلية وكان I جزءاً مثالياً منها واذا فرضنا :

$$a \in I \; , \; k \in Z \; , \; \alpha \in E$$

فإنه يكون : $k . a + \alpha . a \in I$

حيث : ka يساوي مجموع k مرة a .

البرهان : بما أن I زمرة جزئية جمعية فإنه يكون :

$$a \in I \Rightarrow a + a = 2a \in I \Rightarrow a + 2a = 3a \in I \ldots$$

$$\Rightarrow a + (k - 1) a = k a \in I$$

وبما أن I جزء مثالي من الحلقة E فإنه يكون :

$$a \in I , \alpha \in \mathbf{E} \Rightarrow \alpha . a \in I$$

وبما I زمرة جزئية جمعية فإنه يكون :

$$k a \in I , \alpha a \in I \Rightarrow k a + \alpha a \in I$$

وهو المطلوب برهانه .

٣٢ ـ ٤ **الحلقة التامة** : عندما درسنا خواص عملية ضرب الأعداد الصحيحة رأينا :

$$a . b = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ أو } b = 0$$

أو :

$$a \neq 0 , b \neq 0 \Rightarrow a b \neq 0$$

إن هـــذه الخاصة ليست ضرورية في كل حلقة فهناك حلقات مثل حلقات أصناف التوافق تتحقق فيها العلاقة :

$$a \neq 0 , b \neq 0 \Rightarrow a b = 0$$

فلو أخذنا مثلاً أصناف التوافق (قياس 4) فسوف نجد :

$$(2) \neq (0) \ , \ (2) \neq (0) \ \Rightarrow \ (2) \, . \, (2) = (4) = (0)$$

عندما يتحقق هذا الأمر في حلقة فإننا نقول إن b , a هما من القوامم الحقيقية للصفر .

أو بشكل مختصر نقول إنها قوامم الصفر .

إذا كانت الحلقة A تبديلية وتحوي عناصر غـــير صفرها ولا تحوي قواسم حقيقية للصفر سميناها « حلقة تامة » أو « حلقة كاملة » .

يمكننا في حلقة تامة الاختصار بالنسبة للضرب أي :

$$a \neq 0 \ , \ a\,b = a\,b' \ \Rightarrow \ b = b'$$

في الحقيقـــة :

$$a\,b = a\,b' \ \Rightarrow \ a\,(b - b') = 0$$

وبما أننا فرضنا أن $a \neq 0$ فإن :

$$b - b' = 0 \ \Leftrightarrow \ b = b'$$

٣٣ - ٤ أمثـــلة :

١ - إن مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية حلقة جمعية ضربية $(P , + , \cdot)$ وهي حلقة تامة .

٢ - إن حلقة كثيرات الحدود المعرفة على حلقة الأعداد الصحيحة حلقة تامة .

٣ - إن حلقة أصناف التوافق (قياس ٦) حلقة غير تامـــة وذلك لأن :

$(1).(2) = (4).(2)$ لا يؤدي الى $(4) = (1)$

٣٤ ـ ٤ تمرين : برهن أنه إذا كان n عدداً طبيعياً أوليـــاً فإن الحلقة C_n حلقة تامة .

٣٥ ـ ٤ الحقل : إذا عرفنا على مجموعة ما E عمليتين داخليتين وسمينا الأولى جمعاً (+) والثانية ضربا (•) وتحقق الشرطان :

١ ـ $(E, +, \cdot)$ حلقة .

٢ ـ $E^* = E - \{0\}$ زمرة ضربية حيث 0 هو العنصر الحيادي للجمع المعرف على E ، فإننا نقول : إن E حقل بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب أو إن عمليتي الجمع والضرب تزودان E ببنية حقل وكثيراً ما نقول ، إذا لم نخش أي التباس ، إن E حقل .

بما أن E^* زمرة ضربية فإن لها عنصراً حيادياً $e \neq 0$ ندعوه واحدة الحقل وإن لكل عنصر a من E عنصراً نظيراً فيها نرمز له بـ a^{-1} بحيث يكون :

$$a^{-1} . a = a . a^{-1} = e$$

ينتج عما سبق أن كل حقل يحوي العنصرين (1,0) على الأقل .

نسمي العنصرين $a , b \in E$ المحققين للعلاقـــة $ab = ba$ ، عنصرين قابلين للمبادلة وندعو مجموعة العناصر من E التي يقبل كل منها المبادلة بالنسبة للضرب مع كل عنصر من F ، مركز الحقل .

وإذا كانت عملية الضرب المعرفة على الحقل E تبديلية قلنا إن E حقل تبديلي .

أمثــلة :

١ ـ أصناف التوافق (قياس n) المعرف على N : لقد رأينــا [٥ ـ ٤] أن لـ C_n ، مجموعة أصناف التوافق قياس n ، بنية حلقـة ويبرهن أن هذه الحلقة تكون تامة إذا كان n أولياً [٣٤ ـ ٣] ويكون في هذه الحالة لهذه المجموعة بنية حقل (انظر التمرين الموافق) فلو أخذنا مثلاً مجموعة أصناف التوافق (قياس 5) .

$$C_5 = \{ (0) , (1) , (2) , (3) , (4) \}$$

فإننا نؤكد أن C_5 حلقة تامة لأنه لا يمكن أن يكون جداء صنفين من هــذه الأصناف معدوماً إذا كان كل منها غير معدوم . ولـكي نبرهن ان لهذه المجموعة بنية حقل يكفي أن نبرهن ان لكل عنصر منها عدا الصفر عنصراً نظيراً بالنسبة للضرب وهذا واقع لأن :

$$(1) . (1) = (1) \quad , \quad (2) . (3) = (6) = (1)$$

$$(3) . (2) = (6) = (1) \quad , \quad (4) . (4) = (16) = (1)$$

٢ ـ إذا عدنا إلى دراسة مجموعة الأعداد الصحيحة Z فسوف نجد أنها لا تكون حقلاً لأن Z^* ليس بزمرة ضربية وذلك لأنه لا يوجد لغـــير العددين (١ و ١ ـ) نظير بالنسبة للضرب .

٣ ـ ان مجموعة الأعداد العادية Q حقل تبديلي وذلك لأن :

١ ـ Q زمرة جمعية تبديلية .

٢ ـ Q^* زمرة ضربية تبديلية .

٣٥ ـ ٤ **طرائق الحساب على الحقل** : بما أن الحقل E حلقة فإن طرائق

الحساب على الحلقة تسري على هذا الحقل أيضاً وينتج عن كون E^* زمرة ضربية الخواص التالية :

١ - ان لكل عنصر من E^* نظيراً وحيداً نرمز له بـ a^{-1} .

٢ - ان نظير النظير هو العنصر الأصلي $(a^{-1})^{-1} = a$.

٣ - عملية الضرب المعرفة على E قابلة للاختصار .

٤ - ان $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$ وذلك لان :

(تعريف العنصر النظير) $(a \cdot b)^{-1} \cdot a\, b = e$

(الضرب قابل للدمج) $b^{-1} a^{-1} a \cdot b = b^{-1} e\, b$

$$= b^{-1} b = e$$

٥ - في كل حقل E يجب أن يؤدي $ab = 0$ الى $a = 0$ أو $b = 0$

لأنه لو فرضنا $a\, b = 0$ و $a \neq 0$ فان لـ a مقلوباً هو a^{-1} ويكون :

(الضرب تجميعي) $a^{-1}(a\, b) = (a^{-1} a)\, b = b$

(بحسب [٦ - ٤]) $a^{-1} \cdot 0 = 0$

اذن $a \cdot b = 0$ يؤدي الى $b = 0$ واذا فرضنا $b \neq 0$ وأعدنا برهاناً مشابهاً لما سبق فسوف نجد أن $a = 0$ وهذا هو المطلوب برهانه .

٦ - التقسيم : في كل حقل K ، مهما كان $a \in K^*$ ومهما كان $b \in K$ فان هناك عنصراً وحيداً x يحقق العلاقة :

$$a \cdot x + b = 0$$

في الحقيقة :

$$a\,x + b = 0 \iff a\,x = -b$$ (K زمرة جمعية)

$$\iff x = a^{-1}(-b) = -a^{-1}b$$ (لـ a مقلوب)

اذا كان الحقل تبديلياً نكتب هذا الناتج بالشكل $x = -b/a$ ونكون بذلك قــــد عرفنا على K^* عملية نسميها تقسيماً وهي العملية المعاكسة للضرب . نسمي x/y ناتج تقسيم x على y أو النسبة بين x , y حيث x صورة هذه النسبة و y مخرجها .

يمكننا استناداً إلى خواص عملية الضرب وتعريف العملية المعاكسة له أن نكتب :

$$a/b = c/d \iff a\,b^{-1} = c\,d^{-1}$$

$$a\,d = a(b^{-1}b)\,d = (a\,b^{-1})\,b\,d = c\,d^{-1}\,b\,d = b\,(d^{-1}d)\,c = b\,c$$

أي :

$$a/b = c/d \Rightarrow a\,d = b\,c$$

وعلى العكس إذا كان $ad = bc$ فان :

$$a/b = a\,b^{-1} = b^{-1}\,a\,d\,d^{-1} = b^{-1}\,b\,c\,d^{-1} = c\,d^{-1} = c/d$$

أي :

$$a\,d = b\,c \Rightarrow a/b = c/d$$

وبضم الاقتضاءين السابقين إلى بعضها نجد :

$$a/b = c/d \iff a\,d = b\,c$$

٣٦ ـ ٤ الحقل الجزئي : نقول عن مجموعة جزئية L من الحقل $(K , + , \cdot)$

إنها حقل جزئي من K فيما إذا كان لها بنية حقل بالنسبة للعمليتين (+،٠) المعرفتين على K .

٣٧ـ ٤ **نظرية** : لتكون مجموعة جزئية L غير خالية من الحقل K ، حقلا جزئياً منه يلزم ويكفي أن يكون :

$$(1) \qquad \forall a, b \in L \; , \; a - b \in L \; , \; ab \in L$$

$$(2) \qquad \forall a \in L^* \; , \; a^{-1} \in L^*$$

البرهان : إستناداً إلى النظرية [٨ ـ ٣] نجد :

$$a - b = a + (-b) \in L$$

يؤدي إلى أن L زمرة جمعية جزئية من K وبما أن علاقتي الفرض (١ و ٢) تعطياننا العلاقة :

$$\forall a \in L^* \; , \; a^{-1} \in L \Rightarrow a a^{-1} \in L$$

واستناداً إلى [٨ ـ ٣] أيضاً نقول إن K^* زمرة ضربية جزئية من K وهـــذا مايبرهن على أن L حقل جزئي من الحقل ($K, +, \cdot$) المفروض .

٣٨ـ ٤ **الجزء المثالي لحقل** : نعرف الجزء المثالي لحقل بالشكل ذاته الذي عرفنا به الجزء المثالي لحلقـــة ولكن الجزء المثالي لحقل سيكون أكثر بساطة من مثيله في الحلقة وسنوضح ذلك بالنظرية التالية .

٣٩ـ ٤ **نظرية** : لكل حقل K جزأن مثاليان فقط هما {0} و K نفسه .

البرهان : إن كون {0} جزء مثالي للحقل واضح وذلك لأنه :

$$\forall a \in K \; , \; 0 . a = a . 0 = 0$$

لنفرض إذن أن I الجزء المثالي لا يساوي $\{0\}$ وهذا يعني أنه يوجد عنصر $a \neq 0$ في I ويوجد مقلوبه a^{-1} في K واستناداً إلى تعريف الجزء المثالي سيكون :

$$a^{-1} a = a a^{-1} = e \in I$$

وهذا يؤدي إلى أنه مهما كان العنصر x من K فإن :

$$e . x = x . e = x \in I$$

وهذا ما يبرهن المطلوب : $K = I$

تمارين محلولة

١٢٨ - (أ) بين وجود حلقة تحوي عنصراً واحداً فقط . هل هذه الحلقة تبديلية ؟ هل هي واحدية ؟ هل هي تامة ؟

(ب) برهن أنه إذا حوت حلقة أكثر من عنصر واحد ، فلا يمكن أن يكون لعمليتي الجمع والضرب المعرفتين عليها العنصر المحايد نفسه .

الحل : إذا حوت الحلقة عنصراً واحداً فقط ، فيلزم أن يكون هذا العنصر هو العنصر المحايد 0 لعملية الجمع ، ذلك أن الحلقة زمرة (تبديلية) بالنسبة لـ $+$ ، وكل زمرة يجب أن تكون غير خالية لأنها تحوي العنصر المحايد على الأقل [٣-٣] .

إن البنيـــة ($\cdot$ ، $+$ ، $\{0\}$) حيث نعرف عمليتي الجمـع والضرب وفق القاعدتين :

$$0 + 0 = 0 \qquad (1)$$

$$0 \cdot 0 = 0 \qquad (2)$$

هي حلقة .

في الحقيقة ، إن من الواضح أن عمليـــة الجمع داخلية وتبديلية ، كما أنها تجميعية لأن :

$$(0 + 0) + 0 = 0 + 0 = 0 \qquad (\text{حسب } (1))$$

$$0 + (0 + 0) = 0 + 0 = 0 \qquad (\text{حسب } (2))$$

ومن الواضح أيضاً أن 0 هو العنصر المحـايد للعملية $+$ ، وأن نظير

العنصر الوحيد 0 هو العنصر 0 نفسه . وبالتالي فان (+ و {0}) زمرة تبديلية بالنسبة لـ + .

أما بالنسبة لعملية الضرب . ، فمن الواضح أنها تجميعية لأن :

(حسب (2)) $0 . (0 . 0) = 0 . 0 = 0$

(حسب (2)) $(0 . 0) . 0 = 0 . 0 = 0$

كما أنها توزيعية على + ، لأننا نجد استناداً إلى (1) , (2) :

$$0 . (0 + 0) = 0 . 0 = 0 = 0 + 0 = 0 . 0 + 0 . 0$$

$$(0 + 0) . 0 = 0 . 0 = 0 = 0 + 0 = 0 . 0 + 0 . 0$$

وهكذا فان (. و + و {0}) حلقة .

ومن الواضح أن هذه الحلقة تبديلية ، كما أنها واحدية عنصرها المحايد بالنسبة للضرب (الذي يرمز له عادة بـ 1) هو 0 (أي أنه في هذه الحالة $0 = 1$) . هذا والحلقة هذه تامة لأن 0 هو دوماً حاصل ضرب عنصرين كل منهما يساوي 0 .

(ب) لنفرض الآن أن الحلقة تحوي (فضلاً عن العنصر 0) عنصراً آخر (على الأقل) a مغايراً للصفر . وسنثبت أن العنصر المحايد للضرب 1 لا يمكن أن يساوي العنصر المحايد للجمع 0 .

لدينا $1 . a = a$. فاذا فرضنا أن $0 = 1$ لاستنتجنا أن $0 . a = a$ ولما كان $0 . a = 0$ فانه يتعين على المساواة $0 . a = a$ المساواة $0 = a$. وهذا غير صحيح لأننا افترضنا أن $0 \neq a$. وبالتالي فان افتراضنا $0 = 1$ خاطىء ، أي أن $0 \neq 1$.

١٢٩ - بين أن الدستور :

$$\forall x , y \in K \quad : \quad (x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$

لا يصح في الحلقة K ، إلا إذا كانت هذه الحلقة تبديلية .

الحل : أيا كان العنصران x , y من الحلقة K ، فان :

$(x + y)(x - y) = x(x - y) + y(x - y)$ (الضرب توزيعي على الجمع)

$= x^2 - xy + yx - y^2$ (الضرب توزيعي على الطرح)

فاذا كانت الحلقة K تبديلية ، فانه أيا كان x , y من K نجد :

$$yx = xy \Rightarrow -xy + yx = 0 \Rightarrow (x + y) . (x - y) = x^2 - y^2$$

أما إذا كانت K حلقة غير تبديلية ، فهنالك عنصران (على الأقل) x , y من K بحيث $yx \neq xy$ أو $-xy + yx \neq 0$. وهذا يقتضي بصورة عامة :

$$x^2 - xy + yx - y^2 \neq x^2 - y^2$$

إذ أنه لو فرضنا العكس ، أي لو فرضنا صحة المطابقة :

$$x^2 - xy + yx - y^2 = x^2 - y^2$$

التي تكتب استناداً إلى أن (+ , K) زمرة تبديلية بالشكل :

$$x^2 - y^2 + (-xy \times yx) = x^2 - y^2$$

لاقتضت هذه المطابقة وفق [١٥ - ٣] أن :

$$-xy + yx = 0$$

وهذا خلاف الفرض .

١٣٠ - برهن أنه إذا كان x , y عنصرين قابلين للمبادلة في حلقة (• , + , K) ، وكان n عدداً صحيحاً فان :

$$(x+y)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y + \ldots + C_n^m x^{n-m} y^m + \ldots + C_n^n y^n$$

(1)

بفرض :

$$C_n^m = \frac{n\,!}{m\,!\,(n-m)\,!} \quad , \quad 0\,! = 1 \qquad (2)$$

الحل : سنستخدم طريقة التراجع . نلاحظ أولاً أن الدستور (1) صحيح بفرض n = 1 ، ذلك أن :

$$x + y = C_1^0 x + C_1^1 y$$

لنفرض الآن الدستور (1) صحيح من أجل العدد الصحيح الموجب n ، ولنثبت صحته من أجل العدد n + 1 . نلاحظ أن :

$$(x+y)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + \ldots + C_n^m x^{n-m} y^m + \ldots + C_n^n y^n$$

$$\Rightarrow (x+y)^n (x+y) = C_n^0 x^n + (C_n^1 x^{n-1} y + \ldots + C_n^m x^{n-m} y^m + \ldots + C_n^n y^n)(x+y)$$

$$\Rightarrow (x+y)^{n+1} = C_n^0 x^{n+1} + (C_n^0 + C_n^1) x^n y + \ldots + (C_n^{m-1} + C_n^m) x^{n+1-m} y^m + \ldots + {}^{n+1} \qquad (3)$$

لأن x , y قابلان للمبادلة (بالنسبة للضرب) ، ولأن عملية الجمع تجميعية وتبديلية ، ولأن الضرب توزيعي على الجمع .

وإذا لاحظنا صحة مايلي ، مهما كان العددان الصحيحان الموجبان n , m :

$$C_n^{m-1} + C_n^m = C_{n+1}^m \ , \ C_n^0 = 1 = C_{n+1}^0 \ , \ C_n^n = 1 = C_{n+1}^{n+1}$$

فانه يمكن كتابة (3) على الشكل :

$$(x+y)^{n+1} = C_{n+1}^0 x^{n+1} + C_{n+1}^1 x^n y + \dots + C_{n+1}^m x^{n+1-m} y^m +$$

$$+ \dots + C_{n+1}^{n+1} y^{n+1}$$

وهكذا فإننا نجد أن الدستور (1) صحيح مهما كان العدد الصحيح الموجب n .

١٣١ - نقول عن العنصر x من الحلقة (K و + و .) إنه معدوم القوة (Nilpotent) إذا وجـــد عدد صحيح $n > 0$ بحيث يكون $x^n = 0$. برهن أنه إذا افترضنا x , y عنصرين قابلين للمبادلة في K وأن كلا منهما معدوم القوة ، كان كل من $x + y$ و xy معدوم القوة كذلك .

الحل : لما كان كل من x , y معدوم القوة ، فهنالك عددان صحيحان موجبان (مختلفان أو متساويان) n , m بحيث يكون :

$$x^n = 0 \quad , \quad y^m = 0 \qquad (1)$$

إن $(xy)^n$ تعني ضرب العنصر xy بنفسه $n - 1$ مرة . ولما كانت عملية الضرب تجميعية (وفق تعريف الحلقـــة) ، وكان x , y قابلين للمبادلة ، فان :

$$(x\,y)^n = (x\,y)\,(x\,y) \dots (x\,y) = (x \dots x)\,(y \dots y) = x^n\,y^n = 0\,y^n = 0$$

وبالتالي فان xy معدوم القوة (لو رفعنا xy إلى القوة m لحصلنا على النتيجة نفسها) .

ولدينا من جهة أخرى (راجع التمرين ١٣٠) :

$$(x+y)^{n+m} = \sum_{k=0}^{n+m} C_{n+m}^{k} \, x^{n+m-k} \, y^{k} \qquad (2)$$

ولكن كل حد من حدود هذا المجموع يساوي الصفر ، ذلك أنه في حدود (2) ، حيث $0 \leqslant k \leqslant m$ يكون :

$$x^{n+m-k} = x^{n} \, . \, x^{m-k} = 0 \, . \, x^{m-k} = 0 \; , \qquad \text{(وفق (1))}$$

كما انه في حدود (2) حيث $m < k \leqslant n+m$ يكون :

$$y^{k} = y^{k-m} \, y^{m} = y^{k-m} \, 0 = 0 \qquad \text{(وفق (1))}$$

وإذا لاحظنا أن C_{n+m}^{k} عدد طبيعي دوماً فاننا نستنتج أن الطرف الأيمن من (2) هو مجموع أصفار عددها :

$$C_{n+m}^{0} + C_{n+m}^{1} + \ldots + C_{n+m}^{n+m} \qquad (3)$$

وبالتالي فان $x+y$ معدوم القوة .

ملاحظة : برهن أن المجموع (3) يساوي 2^{n+m} .

١٣٢ - تسمى كل حلقة K يتحقق فيها الشرط :

$$\forall x \in K \; : \; x^{2} = x \qquad (1)$$

حلقة بول نسبة إلى العالم الانجليزي جورج بول George Boole (١٨١٥ - ١٨٦٤) .

(أ) بين أن الحلقة K تبديلية .

(ب) تحقق من أن :

$$\forall\, x\, y \in K \quad : \quad x + x = 0 \ , \ x\, y\, (x + y) = 0$$

الحل : (أ) سنبرهن الآن أن :

$$\forall\, x , y \in K \quad : \quad x\, y = y\, x$$

(١) إن هذه المساواة صحيحة إذا كان أحد العنصرين x أو y أو كلاهما صفراً .

(٢) إن هذه المساواة صحيحة إذا كان كل من x , y مغايراً للصفر بينما $xy = 0$ ، لأنه عندئذ يكون $yx = 0$ أيضاً لأن :

$$y\, x = (y\, x)^2 = (y\, (x\, y)\,)\, x = (y\, 0)\, x = 0\, x = 0$$

(٣) لنفرض الآن أن كلا من x , y مغاير للصفر ، وأن الحلقة K تامة . عندئذ يكون :

$$x^2 = x \quad , \quad y^2 = y \quad , \quad (x\, y)^2 = x\, y$$

$$\Rightarrow \quad (x\, y)^2 = x^2\, y^2 \ \Rightarrow \ (x\, y)^2 - (x^2\, y^2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x\, (\,(y\, x)\, y\,) - x\, (\, (x\, y)\, y\,) = 0$$ (عملية الضرب تجميعية)

$$\Rightarrow \quad x\, (\, (y\, x)\, y - (x\, y)\, y) = 0$$ (الضرب توزيعي على الطرح)

$$\Rightarrow \quad (y\, x)\, y - (x\, y)\, y = 0$$ ($x \neq 0$ والحلقة تامة)

$$\Rightarrow \quad (y\, x - x\, y)\, y = 0$$ (الضرب توزيعي على الطرح)

$$\Rightarrow \quad y\, x - x\, y = 0$$ ($y \neq 0$ والحلقة تامة)

$\Rightarrow \; y\,x = x\,y$ (المطـــلوب)

ملاحظة : هل نكون قد استكملنا البرهان على (أ) من (١)َ — (٣)َ أم أن هنالك تتمة ، ولماذا ؟

(ب) لدينا مهما كان x من K :

$(x + x)^2 = x + x$ (وفق (1))

$\Rightarrow \; (x + x)\,(x + x) = x + x$ (من تعريف القوة)

$\Rightarrow \; (x + x)\,x + (x + x)\,x = x + x$ (الضرب توزيعي على الجمع)

$\Rightarrow \; x^2 + x^2 + x^2 + x^2 = x + x$ (» » » »)

$\Rightarrow \; (x + x) + (x + x) = x + x$ (وفق (1) والعملية + تجميعية)

$\Rightarrow \; x + x = 0$ (عناصر الزمرة (K ، +) منتظمة)

نستنتج من هذه المساواة أنه أيا كان x , y من K فان :

$x\,y + x\,y = 0$

$\Rightarrow \; (x\,x)\,y + x\,(y\,y) = 0$ (حسب (1))

$\Rightarrow \; (x\,y)\,x + (x\,y)\,y$ (K تبديلية والضرب تجميعي في K)

$\Rightarrow \; x\,y\,(x + y) = 0$ (الضرب توزيعي على الجمع في K)

١٣٣ - لنعين على حلقة غير تبديلية (K ، + ، •) عملية داخلية $\perp$ معرفة بالدستور :

$$\forall x , y \in K \;:\; x \perp y = x\,y - y\,x$$

[حيث نرمز كالعادة بـ $x\,y - yx$ لـ $x\,y + (-y\,x)$]

(أ) قارن بين $y \perp x$ و $x \perp y$.

(ب) بين أن العملية $\perp$ توزيعية بالنسبة للعملية + .

(حـ) برهن صحة العلاقتين التاليتين أيا كان x, y, z من K :

(1) $$x \perp (y \perp z) + y \perp (z \perp x) + z \perp (x \perp y) = 0$$

(2) $$y \perp (x \perp z) = x \perp (y \perp z) - (x \perp y) \perp z$$

الحل : (أ) نلاحظ أنه مهما كان x, y من K فان :

$$(x \perp y) + (y \perp x) = (x\,y - y\,x) + (y\,x - x\,y) =$$
$$= (x\,y - x\,y) + (y\,x - y\,x) = 0 + 0 = 0 \;.$$

وبما أن + عملية تبديلية فرضاً (لأن (K ، +) زمرة تبديلية) ، فان $0 = (y \perp x) + (x \perp y)$ كذلك . وهكذا نكون قد وجدنا أن :

(3) $$\forall x, y \in K \;:\; (x \perp y) + (y \perp x) = (y \perp x) + (x \perp y) = 0$$

وهذا يعني أن العنصرين $y \perp x$ و $x \perp y$ متناظران بالنسبة للعملية + .

(ب) من الواضح أنه مهما كانت العناصر x, y, z من K فان :

$x \perp (y + z) = x\,(y + z) - (y + z)\,x$ (تعريفاً)

$= x\,y + x\,z - (y\,x + z\,x)$ (الضرب توزيعي على الجمع)

$= x\,y + x\,z - y\,x - z\,x$ ([١٧ - ٣])

$= (x\,y - y\,x) + (x\,z - z\,x)$ (العملية + تبديلية وتجميعية)

$= (x \perp y) + (x \perp z)$

ونبرهن بصورة مماثلة أن :

$$(y + z) \perp x = (y \perp x) + (z \perp x) \,.$$

(حـ) لدينـــا :

$$x \perp (y \perp z) = x\,(y \perp z) - (y \perp z)\,x = x\,(y\,z - z\,y) - (y\,z - z\,y)\,x =$$
$$= x\,y\,z - x\,z\,y - y\,z\,x + z\,y\,x$$

(لماذا ؟)

ونجد بالتبديل الدوري لـ x, y, z أن :

$$y \perp (z \perp x) = y\,z\,x - y\,x\,z - z\,x\,y + x\,z\,y$$

$$z \perp (x \perp y) = z\,x\,y - z\,y\,x - x\,y\,z + y\,x\,z$$

ونجد بعد الجمع وملاحظة أن + عملية تجميعية وتبديلية على K أن :

$$x \perp (y \top z) + y \perp (z \top x) + z \perp (x \perp y) = (x\,y\,z - x\,y\,z) +$$
$$+ (y\,z\,x - y\,z\,x) + (z\,x\,y - z\,x\,y) + (x\,z\,y - x\,z\,y) + (x\,y\,z - y\,x\,z) +$$
$$+ (z\,y\,x - z\,y\,x) = 0 + \ldots + 0 = 0 \qquad (4)$$

ولاثبات (2) نلاحظ أولاً أن :

$$\begin{aligned} x \perp (-y) &= x\,(-y) - ((-y)\,x) \\ &= -(x\,y) + y\,x \\ &= -(x\,y - y\,x) && ([\text{١٧ - ٣}]) \\ &= -(x \perp y) && (5) \end{aligned}$$

وعلى هذا الأساس فان :

$$\begin{aligned} y \perp (x \perp z) &= y \perp (-(z \perp x)) && (\text{وفق } (3)) \\ &= -(y \perp (z \perp x)) \quad (6) && (\text{وفق } (5)) \end{aligned}$$

كذلك فان :

(وفق (3)) $\quad$ (7) $\quad - (x \perp y) \perp z = z \perp (x \perp y)$

وبتعويض (6) و (7) في (2) نجد :

$$-(y \perp (z \perp x)) = x \perp (y \perp z) + z \perp (x \perp y)$$

وباضافة العنصر $y \perp (z \perp x)$ إلى طرفي المساواة (1) التي برهنا على صحتها . وبالتالي فان المساواة (2) صحيحة .

١٣٤ - لنعين على مجموعة أزواج الأعـــداد الصحيحة Z^2 عمليتين داخليتين + و × وفق القاعدتين :

$$(a , b) + (a' , b') = (a + a' , b + b')$$

$$(a , b) \times (a' , b') = (a a' , b b' + a b' + b a')$$

برهن أن (Z^2 و + و ×) حلقة تبديلية . ثم بين ماإذا كانت الحلقة هذه واحدية أو تامة .

الحل : من الواضح أن عملية الجمع على Z^2 تجميعية وتبديلية لأن عملية الجمع على Z تجميعية وتبديلية . وفي الحقيقة فان :

$$((a , b) + (a' , b')) + (a'' , b'') = (a + a' , b + b') + (a'' , b'')$$

$$= ((a + a') + a'' , (b + b') + b'') = (a + (a' + a'') , b + (b' + b''))$$

$$= (a , b) + (a' + a'' , b' + b'') = (a , b) + ((a' , b') + (a'' , b''))$$

كما أن :

$$(a , b) + (a' , b') = (a + a' , b + b') = (a' + a , b' + b)$$

$$= (a' , b') + (a , b) .$$

وبالاضافة إلى ذلك ، فان العنصر $(0, 0)$ محايد لعملية الجمع على Z^2 لأنه مهما كان a, b من Z فان :

$$(a , b) + (0 , 0) = (0 , 0) + (a , b) = (a , b)$$

كذلك ، فان لكل عنصر (a, b) نظيراً بالنسبة لعملية الجمع على Z^2 هو $(-a, -b)$ ، ذلك أن :

$$(a , b) + (- a , -b) = (- a , - b) + (a , b) = (0 , 0)$$

وهكذا فان Z^2 **زمرة تبديلية** بالنسبة للعملية + .

لننتقل الآن إلى العملية الداخلية × على Z^2 . إن هذه العملية **تجميعية** ، وذلك أنه مهما كانت العناصر (a'', b'') و (a', b') و (a, b) من Z^2 فان :

$$\begin{aligned}((a , b) \times (a' , b')) \times (a'' , b'') &= (a a' , b b' + a b' + b a') \times \\ \times (a'' , b'') &= ((a a') a'' , (b b' + a b' + b a') b'' + (a a') b'' + \\ &+ (b b' + a b' + b a') a'') , \qquad (1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a , b) \times ((a' , b') \times (a'' , b'')) &= (a , b) \times (a' a'' , b' b'' + \\ + a' b'' + b' a'') &= (a (a' a'') , b (b' b'' + a' b'' + b' a'') + \\ &+ a (b' b'' + a' b'' + b' a'') + b (a' a'')) \qquad (2)\end{aligned}$$

ومن السهل التحقق من أن الزوجين المرتبين الواردين في الطرفين الأيمنين من (1) و (2) متساويان وذلك باستخدام الخواص التجميعية والتبديلية لعملية جمع الأعداد الصحيحة ، والخاصة التجميعية لعملية

ضرب الأعداد الصحيحة ، والخاصة التوزيعية لضرب الأعداد الصحيحة على جمع هذه الأعداد .

كذلك فان العملية × توزيعية على عملية الجمع على Z^2 ، ذلك أن :

$$(a , b) \times ((a' , b') + (a'' , b'')) = (a , b) \times (a' + a'' , b' + b'') =$$
$$= (a (a' + a'') , b (b' + b'') + a (b' + b'') + b (a' + a'')) =$$
$$= (a a' + a a'' , b b' + a b' + b a' + b b'' + a b'' + b a'') =$$
$$= (a a' , b b' + a b' + b a') + (a a'' , b b'' + a b'' + b a'') =$$
$$= (a , b) \times (a' , b') + (a , b) \times (a'' , b'')$$

وهذه المساواة تعني **أن** العملية × توزيعية من اليسار على + . ونجد بصورة مماثلة أن العملية × توزيعية على + من اليمين أيضاً . لذا فان العملية × **توزيعية** على + .

نستخلص مما وجدناه أن (+ ، Z^2) زمرة تبديلية ، وأن العملية × تجميعية على Z^2 ، وأن × توزيعية على + . وهذا يعني أن (× ، + ، Z^2) حلقة .

ولما كان فضلاً عن ذلك :

$$(a , b) \times (a' , b') = (a a' , b b' + a b' + b a') =$$
$$= (a' a , b' b + a' b + b' a) = (a' , b') \times (a , b)$$

فان **هذه الحلقة تبديلية** :

وكي تكون الحلقة واحدية ، يلزم ويكفي وجود عنصر معين (x , y) من Z^2 بحيث تتحقق المساواة التالية **أيا كان** a , b من Z :

$$(a, b)\times(x, y)=(a, b) \Leftrightarrow (ax, by+ay+bx)=(a, b)$$

$$\Leftrightarrow ax=a,\ by+ay+bx=b \Rightarrow x=1,\ y=0$$

وبالتالي فان $(1, 0)$ من Z^2 عنصر محايد للعملية $\times$ ، أي أن الحلقة K واحدية .

لنبحث أخيراً فيما إذا كانت الحلقة K تامـــة . لنفرض (x, y) و (u, v) عنصرين من Z^2 يحققان العلاقة :

$$(x, y)\times(u, v)=(0, 0)$$

نلاحظ أن :

$$(x, y)\times(u, v)=(0, 0) \Leftrightarrow (xu, yv+xv+yu)=(0, 0)$$

$$\Leftrightarrow xu=0,\ yv+xv+yu=0$$

نستنتج من هذا أنه إذا كان $x=0, u=-v$ و y, v أي عـــددين صحيحين ، فان علاقتي التساوي الأخيرتين تكونان محققتين . وعلى سبيل المثـال فان :

$$(0, 1)\ (2, -2)=(0, 0)$$

وبالتـــالي فان الحلقة K **غير تامة** ، لأنها تحتوي على عناصر مغايرة للصفر $(0, 0)$ حاصل ضربها يســـاوي الصفر ، أي أنهـا تحتوي على قواسم للصفر .

١٣٥ - (أ) إذا قبلنا أن مجموعة الأعداد الحقيقية R تشكل حلقة بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب ، فبرهن أن مجموعة الأعداد الحقيقية : $E=\{m+n\sqrt{3} \mid m, n\in Z\}$ هي حلقة جزئية من الحلقة $(R, +, \cdot)$.

(ب) برهن أن المجموعة الجزئية I من E حيث m , n أعداد صحيحة زوجية هي جزء مثالي من الحلقة E .

الحل : (١) إن (+ ، E) هي زمرة جزئية من الزمرة (+ ، R)، ذلك أن من الواضح كون $E \neq \Phi$، وأنه أيا كان العنصران $m + n\sqrt{3}$, $m_1 + n_1\sqrt{3}$ من E فان مجموع أحدهما $m + n\sqrt{3}$ مع نظير الآخر بالنسبة للجمع $-m_1 - n_1\sqrt{3}$ هو العدد $(m - m_1) + (n - n_1)\sqrt{3}$ وهو ينتمي إلى E كذلك ، لذا فان (+ ، E) زمرة جزئية من (+ ، R) .

(٢) بقي علينا إثبات أن E مغلقة بالنسبة لعملية الضرب . إن هذا يسهل التحقق منه ، لأن :

$$m + n\sqrt{3} \, , \, m_1 + n_1\sqrt{3} \in E \Rightarrow (m + n\sqrt{3})(m_1 + n_1\sqrt{3})$$

$$= m\,m_1 + 3\,n\,n_1 + (n\,m_1 + m\,n_1)\sqrt{3} \in E$$

(ب) نترك للقارىء التحقق بالطريقة نفسها التي اتبعناها في (أ) ، من أن I هي زمرة جزئية من الزمرة (+ ، E) . بقي علينا إثبات أن :

$$\forall i \in I \, , \, \forall a \in E \; : \; a\,i \, , \, i\,a \in I$$

وهذا ليس بالأمر العسير ، لأن أيا كان العنصر $a = m + n\sqrt{3} \in E$ والعنصر $i = 2\,m_1 + 2\,n_1\sqrt{3} \in I$ $(m , n , m_1 , n_1 \in Z)$ فان :

$$(2\,m_1 + 2\,n_1\sqrt{3})(m + n\sqrt{3}) = (m + n\sqrt{3})(2\,m_1 + 2\,n_1\sqrt{3}) =$$

$$= 2\,(m_1\,m + 3\,n_1\,n) + 2\,(n_1\,m + m_1\,n)\sqrt{3} \in I$$

... ليكن a عنصراً اختيارياً من الحلقة التبديلية (• ، + ، K)

ولتكن :

$$I = \{ a . k \mid k \in K \}$$

برهن أن I جزء مثالي من K .

الحل : إن المجموعة I غير خالية كما أن مجموع أي عنصر $a . k$ من من I مع نظير أي عنصر آخر $a . k'$ يساوي :

(الضرب توزيعي على الطرح) $\quad a . k - (a . k') = a . (k - k')$

ولما كانت (+ و K) زمرة فرضاً فان $k - k'$ عنصر من K ، وبالتالي فان $a . (k - k') \in I$ وهذا يعني أن I زمرة جزئية من الزمرة (+ و K) [٣ - ٣٣] .

ومن جهة أخرى ، فأيا كان العنصر $a . k$ من I والعنصر k' من K ، فان :

$$(a . k) . k' = a . (k . k') \qquad (1)$$

لأن عملية الضرب تجميعية .

ولما كانت K ، مغلقة بالنسبة لعملية الضرب فرضاً (لأن الضرب عملية داخلية على K) ، فان $k . k'$ عنصر من K ، وبالتالي فان $(a . k) . k'$ عنصر من I .

كذلك ، لما كانت عملية الضرب تجميعية في كل حلقة ، وتبديلية هنا ، لأن حلقتنا تبديلية فرضاً ، فان :

$$k' . (a . k) = (k' . a) . k = (a . k') . k = a (k' . k) \qquad (2)$$

وباجراء مناقشة مماثلة تماماً لتلك التي قمنا بها قبل قليل ، نجد أن العنصر $(a.k).k'$ عنصر من I أيضاً .

وهكذا نكون قد برهنا أن I زمرة جزئية من الزمرة (+ و K) وأن (1) و (2) محققان ، وهذا كاف للحكم بأن I هي جزء مثالي من الحلقة K (لماذا ؟) .

* **١٣٧** - لتكن ∇ , $\triangle$ عمليتين معرفتين على Z بالقاعدتين التاليتين :

$$a \triangle b = a + b - 1 \quad , \quad a \nabla b = a + b - ab$$

(أ) أثبت أن $(Z, \triangle, \nabla)$ حلقة تامة .

(ب) هل تشكل هذه الحلقة حقلاً ؟

الحل : (أ) نلاحظ بسهولة أن :

(١) $\triangle$ عملية داخلية ، ذلك أن ناتج هذه العملية على أي عنصرين a , b من Z هو عنصر من Z أيضاً .

(٢) $\triangle$ عملية تجميعية ، ذلك أنه أيا كانت الأعداد الصحيحة a , b , c فان :

$$(a \triangle b) \triangle c = (a + b - 1) \triangle c = (a + b - 1) + c - 1 = a + b + c - 2$$

$$a \triangle (b \triangle c) = a \triangle (b + c - 1) = a + b + c - 1 - 1 = a + b + c - 2$$

(٣) $\triangle$ عملية تبديلية لأنه أيا كان العددان الصحيحان a , b فان :

$$a \triangle b = a + b - 1 = b + a - 1 = b \triangle a$$

(٤) إن الشرط اللازم والكافي لوجود عنصر محايد e لـ $\triangle$ هو

أن تتحقق المساواة أيا كان a من Z : (*)

$$a \triangle e = a \Leftrightarrow a + e - 1 = a \Leftrightarrow e = 1$$

وبالتالي فان الواحد عنصر محايد لـ $\triangle$.

(٥) لكل عنصر a من Z نظير بالنسبة لـ $\triangle$ هو $2 - a$ ، الأمر الذي نترك التحقق منه للقارىء .

لذا فان Z **زمرة تبديلية** بالنسبة لـ $\triangle$ عنصرها المحايد 1 .

(٦) $\triangledown$ عملية داخلية على Z .

(٧) $\triangledown$ عملية تجميعية على Z .

(٨) $\triangledown$ عملية توزيعية بالنسبة لـ $\triangle$ ، ذلك أنه أيا كان a , b , c من Z فان :

$$a \triangledown (b \triangle c) = a \triangledown (b + c - 1) = a + (b + c - 1) - a (b + c - 1) =$$

$$= 2a + b + c - ab - ac - 1 = (a + b - ab) + (a + c - ac) - 1$$

$$= (a \triangledown b) + (a \triangledown c) - 1 = (a \triangledown b) \triangle (a \triangledown c)$$

إن هذا يعني بأن $\triangledown$ عملية توزيعية من اليسار على $\triangle$. ولما كانت $\triangledown$ عملية تبديلية ، فان $\triangledown$ عملية توزيعية من اليمين كذلك على $\triangle$.

إن الشروط (١) - (٨) تعني أن Z حلقة بالنسبة للعمليتين الداخليتين $\triangledown , \triangle$. (تلعب هنا $\triangle$ دور عملية الجمع ، $\triangledown$ دور عملية الضرب) .

هذا ، ولما كان :

(*) كفاية الشرط ناتجة عن كون العملية $\triangle$ تبديلية .

$$a \triangledown b = 1 \Leftrightarrow a + b - a b = 1 \Leftrightarrow a(1-b) = 1 - b$$
$$\Rightarrow a = 1 \quad \text{أو} \quad b = 1$$

فإننا نرى أن Z حلقة تامـــة بالنسبة لـ $\triangledown , \triangle$ (الواحـد هنا يلعب دور الصفر في تعريف الحلقة [٢ - ٤] ، لأن $\triangle$ تلعب دور العملية + في التعريف والواحد عنصر محايد لـ $\triangle$) .

(ب) بعد أن برهنا أن Z زمرة تبديلية بالنسبة للعملية $\triangle$ ، فان ($Z, \triangle, \triangledown$) تكون حقلاً إذا كانت $Z - \{1\}$ زمرة تبديلية بالنسبة للعملية الداخلية $\triangledown$ (التي تلعب هنا دور عملية الضرب في التعريف) . إلا أن $Z-\{1\}$ ليست زمرة بالنسبة لـ $\triangledown$ رغم أنه يمكن التحقق من أن $\triangledown$ عملية داخلية على $Z - \{1\}$ ، وأن هذه العملية الداخلية تجميعية وتبديلية ، وأن 0 عنصر محايد للعملية $\triangledown$ في $Z - \{1\}$. والسبب في ذلك هو أن ليس لكل عنصر من $Z - \{1\}$ نظير في هذه المجموعة بالنسبة لـ $\triangledown$. وعلى سبيل المثال فليس للعدد (3) نظير بالنسبة لـ $\triangledown$ إذ لو افترضنا جدلاً x نظيراً له لكان :

$$x \triangledown 3 = 0 \Leftrightarrow x + 3 - 3x = 0 \Leftrightarrow 3 = 2x$$

ومن الواضح خطأ هذه المساواة في Z لأنها تعني مساواة بين عـدد فردي وعدد زوجي .

١٣٨ - (أ) لتكن $S = \{ a + b\sqrt{5} \mid a, b \in Q \}$ (أ) برهن أن S حقل جزئي من حقل الأعداد الحقيقية بالنسبة للعمليتين المألوفتين لجمع وضرب الأعداد الحقيقية) .

(ب) برهن أن التطبيق $f(a + b\sqrt{5}) = a - b\sqrt{5}$ أوتومورفيزم لـ S .

الحل : (أ) أيا كان العنصران $a + b\sqrt{5}$, $a' + b'\sqrt{5}$ من المجموعة غير الخالية S ، فان :

$$(a + b\sqrt{5}) - (a' + b'\sqrt{5}) = (a - a') + (b - b')\sqrt{5} \qquad (1)$$

ولما كان $a - a'$, $b - b'$ عنصرين من Q ، فان حاصل الطرح هذا عنصر من S . إذن S زمرة جزئية من R [٣٣ - ٣] .

بقي علينا فقط (لماذا ؟) إثبات أنه إذا كان العنصر $a + b\sqrt{5}$ منتمياً إلى $S^* = S - \{0\}$ ، فان مقلوبه ينتمي إلى S^* أيضاً .

وفي الحقيقة فان :

$$a + b\sqrt{5} \neq 0 \Rightarrow a - b\sqrt{5} \neq 0 \qquad (2)$$

ذلك أنـــه لو كان $a - b\sqrt{5} = 0$ ، لتعين على ذلك ، $a = b = 0$ ، لأن من الواضح بأن : $a = 0 \Rightarrow b = 0$ ، $b = 0 \Rightarrow a = 0$ ، $a \neq 0 , b \neq 0 \Rightarrow \frac{a}{b} = \sqrt{5}$ ولكن هذه المساواة غير صحيحة لأنها تعني أن هنالك عـدداً عاديا $\left(\frac{a}{b}\right)$ مربعه يساوي 5 ، وهذا غير صحيح كما نعلم .

نستنتج من (2) أن $a + b\sqrt{5} \neq 0$ تكافىء كون :

$$(a + b\sqrt{5})(a - b\sqrt{5}) = a^2 - 5b^2 \qquad (3)$$

مغايراً للصفر . وتبين المساواة (3) أن مقلوب $a + b\sqrt{5}$ هو :

$$\frac{a}{a^2 - 5b^2} - \frac{b}{a^2 - 5b^2}\sqrt{5}$$

ومن الواضح أن هذا العدد ينتمي إلى S^* .

(ب) من الواضح أن :

$$f[(a+b\sqrt{5})+(a'+b'\sqrt{5})]=f[(a+a')+(b+b')\sqrt{5}]$$
$$=a+a'-(b+b')\sqrt{5}=(a-b\sqrt{5})+(a'-b'\sqrt{5})$$
$$=f(a+b\sqrt{5})+f(a'+b'\sqrt{5})\,.$$

كذلك فان :

$$f[(a+b\sqrt{5})(a'+b'\sqrt{5})]=f[(a\,a'+5\,b\,b')+(a\,b'+ba')\sqrt{5}]=$$
$$=a\,a'+5\,bb'-(a\,b'+b\,a')\sqrt{5}=(a-b\sqrt{5})(a'-b'\sqrt{5})=$$
$$=f(a+b\sqrt{5})\,f(a'+b'\sqrt{5})\,.$$

وإذا أضفنا إلى هـــذا أن f تطبيق متباين وغامر لـ S على نفسها (لماذا ؟) ، فإننا نتحقق من أن $f: S \to S$ أوتومورفيزم لـ S .

*۱۳۹ - لتكن (K ، + ، •) حلقة تبديلية وتامة . برهن أنه إذا لم تحو هذه الحلقة أجزاء مثالية خلا الجزأين المثاليين K و $\{0\}$ ، غدت الحلقة (K ، + ، •) حقلاً .

الحل : لما كانت الحلقة تامة ، فان جداء أي عنصرين مغايرين للصفر هو عنصر مغاير للصفر ، وبالتالي فان المجموعة $K^* = K - \{0\}$ مغلقة بالنسبة للضرب .

كذلك ، فان أيا كان العنصر a من K ، فان : $a\,.\,K=\{a\,.\,k \mid k \in K\}$ هي جزء مثالي من الحلقة K (راجع التمرين ۱۳۷) . فاذا فرضنا $a=0$ ، كان الجزء المثالي هذا هو الجزء المثالي الصفر $\{0\}$. أما لو كان $a \neq 0$ فلا يمكن أن يكون $a.K$ هو الجزء المثـــالي الصفر ، لأنه لو فرضنا العكس ، وكان $k \neq 0$ لكان $a\,.\,k=0$ ، أي لحوت الحلقة K قواسم للصفر ، أي لما كانت الحلقة K تامة ، وهذا خلاف الفرض .

ولما كانت الحلقة لا تحوي إلا الجزأين $\{0\}$, K ، فاننا نستنتج من هذه المناقشة أنه إذا كان $a \neq 0$ ، فان $a . K = K$. وبالتالي فان المعادلة :

$$a\ x = b$$

حلا في K أيا كان $a \neq 0$ وأيا كان b من K . إن هذا الحل وحيد ، ذلك أنه لو وجد حل آخر x_1 لكان :

$$a\ x = a\ x_1 \Leftrightarrow a\ x - a\ x_1 = 0 \Leftrightarrow a\ (x - x_1) = 0$$

ولما كانت الحلقة تامة ، وكان $a \neq 0$ فيجب أن يكون : $x - x_1 = 0$ أي $x = x_1$.

نلاحظ الآن أن للمعادلة $ax = a$ ، أيا كان a المغاير للصفر من K ، الحل نفسه . ذلك أنه لو افترضنا وجود عنصرين مغايرين للصفر a , b من K بحيث يكون :

$$a\ x_1 = a \quad , \quad b\ x_2 = b$$

فان $(a\ x_1)\ b = a\ (b\ x_2)$. ولما كانت عملية الضرب تجميعية وتبديلية فان هذه المساواة تكتب على الشكل $(a\ b)\ x_1 = (a\ b)\ x_2$ أو $(a\ b)\ x_1 - (a\ b)\ x_2 = 0$ أو $a\ b\ (x_1 - x_2) = 0$. ولما كان $ab \neq 0$ (لأن K^* مغلقة بالنسبة للضرب) ، وكانت الحلقة K تامة ، فان $x_1 - x_2 = 0$ أي $x_1 = x_2$.

سنرمز للعنصر (الوحيد) الذي يحقق المعادلات $xa = a$ (أيا كان a المغاير للصفر) بـ 1 .

ولما كانت الحلقة K تبديلية ، فاننا نستنتج من هذا أن :

$$\forall\ a \in K^* \ :\ a . 1 = 1 . a = a$$

وأخيراً نلاحظ أنه أيا كان العنصر $a \neq 0$ من K ، فله نظير في K^* لأن المعادلة :

$$a\,x = 1$$

حلا وحيداً كما رأينـــا قبل قليل ، (ولأن العملية تبديلية) ، ومن الواضح هنا أن $x \neq 0$.

وبالنتيجة نكون قد وجدنا أن K^* مغلقة بالنسبة للضرب ، وأن عملية الضرب تجميعية على K^* (لأنها تجميعية على K) ، وأن عمليـة الضرب تبديلية على K^* (لأن K حلقة تبديلية فرضاً) ، وأن لعملية الضرب على K^* عنصراً محايداً رمزنا له بـ 1 ، وأن لكل عنصر من K^* نظيراً في K^* .

لذا ، فان (K^* و •) زمرة تبديلية ، وبالتالي فان (K و + و •) حقل وهو المطلوب .

تمارين غير محلولة

١٤٠ - إذا كان $(A , + , \cdot)$ حلقة برهن أن مجموعة العناصر القابلة للتبديل مع عنصر معين a بالنسبة للعملية الثانية تكون حلقة جزئية من A وأن مجموعة عناصر A القابلة للمبادلة مع أي عنصر من A هي حلقة جزئية .

١٤١ - نعرف على مجموعة الجداء Z^2 عمليتين داخليتين بالشكل :

$$(a , b) + (a' + b') = (a + a' , b + b')$$

$$(a , b) . (a' , b') = (a a' - b b' , a b' + b a')$$

برهن أن Z^2 مجهزة ببنية حلقة . ادرس خواص هذه الحلقة .

١٤٢ - R مجموعة الأعـــداد الحقيقية . نعرف على R^2 عمليتين داخليتين بالشكل التالي :

$$(a , b) + (a' , b') = (a + a' , b + b')$$

$$(a , b) . (a' , b') = (a a' + b b' , a b' + b a')$$

برهن أن $(R^2 , + , \cdot)$ حلقـــة تبديلية هل للصفر قواسم في هذه الحلقة ؟

قم بدراسة مماثلة في الحالة التي نفرض فيها أن العملية الثانية معرفة بالشكل :

$$(a , b) . (a' , b') = (a b' + b a' - a a' , b b' - a a')$$

١٤٣ - في حلقـة غير تبديلية A نعرف عملية داخليـــة *

بالشكل التالي :

$$x * y = xy - yx$$

١ - قارن $y * x$ مع $x * y$.

٢ - برهن أن هذه العملية توزيعية من اليمين ومن اليسار بالنسبة لعملية الجمع المعرفة على A .

٣ - برهن صحة العلاقتين التاليتين :

$$x * (y * z) + y * (z * x) + z * (x * y) = 0$$

$$y * (x * z) = x * (y * z) - (x * y) * z$$

١٤٤ - نعرف في زمرة جمعية A عملية ضرب داخلية بالشكل $ab = 0$. برهن أنه يمكننا عندها أن نسمي A حلقة .

١٤٥ - نعرف على $\mathcal{P}(E)$ مجموعة أجزاء E عملية الطرح المتبادلة (التناظرية) $\triangle$ وعملية التقاطع $\cap$ برهن أن $\mathcal{P}(E)$ المجهزة بهاتين العمليتين ، حلقة تبديلية واحدية .

١٤٦ - برهن أنه يوجد حقل يحوي عنصرين فقط وآخر يحوي ثلاثة عناصر . نرمز بـ $(0,1)$ للعنصرين المحايدين بالنسبة للجمع والضرب المتعلقين بهذا الحقل . اكتب جدولي الجمع والضرب في مثل هذه الحقول وادرس توزيع عملية الضرب على الجمع .

ادرس امكان وجود حقل ذي أربعة عناصر .

١٤٧ - نعرف مجموعة جزئية U من R نرمز لمتحولها بـ u

ونعرفة بالعلاقة :

$$u = a + b\sqrt{2}$$

حيث a , b عددان عاديان . ونأخذ على هذه المجموعة عمليتي الجمع والضرب للأعداد الحقيقية .

برهن أن هاتين العمليتين تجهزان U ببنية حقل .

١٤٨ - لتكن الحلقة (∘ , ∗ , E) . برهن الخاصة التالية :

$$a \circ b' = a' \circ b = (a \cdot b)'$$

حيث α' هو نظير α بالنسبة للعملية الأولى ∗ .

١٤٩ - لتكن E مجموعة الأعداد المركبة $a + ib$ حسب $a, b \in Z$ برهن أن (∘ , + , E) حلقة . بين فيما إذا كانت هذه الحلقة تبديلية وواحدية .

ماهي البنية التي تأخذها المجموعة Z فيما إذا كان a , b عنصرين من مجموعة أصناف التوافق C_{12} .

١٥٠ - تعرف على الجداء $Z \times Z$ العمليتين الداخليتين o و ∗ :

$$(a, b) * (a', b') = (a + b, a' + b')$$

$$(a, b) \circ (a', b') = (a a' - b b', a b' + b a')$$

هل هذه المجموعة حلقة ؟ ماهي العناصر الواحدية فيها ؟ هل هذه الحلقة تامة ؟

∗ **١٥١** - لتكن E مجموعة جزئية من R معرفة بالشكل التالي :

$$\{ a + b\sqrt{3} \mid a, b \in Z \}$$

١ - نعرف على هذه المجموعة العمليتين الداخليتين (+ و .) وهما الجمع والضرب العدديين . برهن أن E حلقة جزئية من R .

٢ - نعرف في E علاقة تكافؤ $\mathcal{R}$:

$$(a + b\sqrt{3})\ \mathcal{R}\ (a' + b'\sqrt{3}) \Leftrightarrow a' - a = 2p\ ,$$
$$b' - b = 2q \quad , \quad p, q \in Z$$

نرمز بـ $E/\mathcal{R}$ لمجموعة أصناف التكافؤ ما هو عدد عناصر هذه المجموعة .

٣ - اكتب جدول ضرب أصناف التكافؤ $E/\mathcal{R}$. هل لـ $E/\mathcal{R}$ بنية حقل .

٤ - برهن أن $E/\mathcal{R}$ يحوي جزءاً مثالياً I يتكون من عنصرين .

١٥٢ - إذا كانت (E و $*$) زمرة تبديلية برهن أنه نحصل على الحلقة (E و $*$ و o) بالعملية o المعرفة بالشكل التالي :

$$\forall x, y \in E \quad , \quad x \circ y = 0$$

١٥٣ - نعرف على الجداء $Z \times Z$ العمليتين الداخليتين :

$$(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$$(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) = (x_1 . x_2, 0)$$

برهن أن (Z^2 و $*$ و o) حلقة . ما هو صفر هذه الحلقة وواحدتها ؟ هل يوجد في هذه الحلقة قواسم للصفر ؟

١٥٤ - إذا عرفنا على المجموعة $Z \times Z$ العمليتين :

$$(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$$(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) = (x_1 x_2, x_1 y_2 + y_1)$$

فهل تصبح (Z^2 ، $*$ ، o) حلقة ؟ وإذا كان ذلك فما هي العناصر الواحدية فيها إن وجدت ؟ برهن أن العملية o غير تبديلية .

١٥٥ - نرمز بـ A لمجموعة التوابع (الخطية) :

$$f(x) = a x + b \qquad (a , b \in \mathcal{R})$$

نجهز A بالعمليتين التاليتين :

(الجمع) $\quad f + g \;:\; x \to f(x) + g(x)$

(الضرب) $\quad f . g \;:\; x \to f[g(x)]$

١ - برهن أن A زمرة جمعية تبديلية .

٢ - برهن أن الجداء قابل للدمج ولكنه غير تبديلي .

٣ - هل A حلقة ؟

١٥٦ - نعرف على Q^2 العمليتين الداخليتين التاليتين :

$$(x_1 , y_1) * (x_2 , y_2) = (x_1 + x_2 , y_1 + y_2)$$

$$(x_1 , y_1) \circ (x_2 , y_2) = (x_1 x_2 + 2 y_1 y_2 , x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

برهن أن (Q^2 ، $*$ ، o) حقل .

برهن أنه لا يوجد حقل جزئي من Q يختلف عن Q نفسها .