الفصل السادس

التطبيقات الخطية

سندرس في هذا الفصل نوعاً هاماً من التطبيقات بين الفراغات الشعاعية ، وهو الذي يضم ما نسميه بالتطبيقات الخطية ، هذه التطبيقات التي تعتبر من الدعامات الأساسية في الجبر الخطي .

١ - ٦ **تعريف** : ليكن W , V فراغين شعاعيين معرفين على الحقل التبديلي K (سيكون كل حقل يرد في هذا البحث تبديلياً إلا إذا ذكرنا خلاف ذلك) . نقول عن التطبيق :

$$T : V \to W$$

إنه تطبيق خطي فيما إذا حقق الشرطين التاليين :

$$\forall \vec{v}, \vec{v'} \in V : T(\vec{v}+\vec{v'}) = T(\vec{v}) + T(\vec{v'}) \qquad (1)$$

$$\forall \vec{v} \in V, \forall \lambda \in K : T(\lambda \vec{v}) = \lambda T(\vec{v}) \qquad (2)$$

يسمى هذا التطبيق أيضاً تحويلاً خطياً أو مؤثراً خطياً .

إن من الممكن تكرار هاتين العمليتين وضمهما إلى بعضهما واعتبار العلاقة التالية تعريفاً للتطبيق الخطي :

$$\forall \lambda_i \in K \ , \quad \forall \overrightarrow{v_i} \in V : T\left(\sum_1^n \lambda_i \overrightarrow{v_i} \right) = \sum_1^n \lambda_i f\left(\overrightarrow{v_i} \right)$$

إن عمليات الجمع الموجودة في الطرف الأيسر من هـذه العلاقة تمثل الجمع المعرف على V أما عمليات الجمع الموجودة في الطرف الأيمن فهي تمثل الجمع المعرف على W .

٢ - ٦ أمثـــلة :

(١) إن التطبيق المطابق I للفراغ الشعاعي V على الحقـــل K المعرف بالعلاقة :

$$\forall \overrightarrow{v} \in V \quad : \quad I\left(\overrightarrow{v} \right) = \overrightarrow{v}$$

هو تطبيق خطي لأن :

$$\forall \overrightarrow{v_1} , \overrightarrow{v_2} \in V \ , \quad I\left(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}\right) = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} = I\left(\overrightarrow{v_1} \right) + I\left(\overrightarrow{v_2} \right)$$

$$\forall \overrightarrow{v} \in V , \quad I\left(\lambda \overrightarrow{v}\right) = \lambda \overrightarrow{v} = \lambda\, I\left(\overrightarrow{v} \right)$$

(٢) إن التطبيق الثابت لفراغ شـعاعي V في الفراغ الشعاعي W ليس بتطبيق خطي :

في الحقيقة إذا كان $\overrightarrow{w_0}$ شعاعاً ثابتاً من W فإننـا نعرف تطبيقاً ثابتاً f لـ V من W بالعلاقة :

$$\forall \overrightarrow{v} \in V \ , \quad f\left(\overrightarrow{v} \right) = w_0$$

إن هـذا التطبيق لا يحقق الشرط الأول من شرطي التطبيق الخطي

إذ أن :

$$f(\vec{v_1}+\vec{v_2})=\vec{w_0}\neq f(\vec{v_1})+f(\vec{v_2})=\vec{w_0}+\vec{w_0}$$

(٣) إذا طبقنا فراغاً شعاعياً بفراغ شعاعي جزئي منه عدد أبعاده أقل من عدد أبعاد الأول وبحيث نربط كل شعاع من الأول بشعاع من الثاني تقع مركباته ضمن مركبات الأول سمينا هذا التطبيق تطبيق إسقاط.

فلو طبقنا مثلاً الفراغ R^3 بالفراغ R^2 بحيث يكون :

$$\forall (x_1, x_2, x_3)\in R, \quad f:(x_1, x_2, x_3)\rightarrow (x_1, x_2)$$

فإننا نقول إننا أسقطنا الفراغ R^3 على الفراغ R^2 .

لنبرهن أن مثل هذه التطبيقات خطية :

يمكننا أن نكتب من أجل الخاصة السابقة :

$$\begin{aligned} f[(x_1, x_2, x_3)+(x_1', x_2', x_3')] &= f(x_1+x_1', x_2+x_2', x_3+x_3') \\ &= (x_1+x_1', x_2+x_2') = (x_1, x_2)+(x_1', x_2') \\ &= f(x_1, x_2, x_3)+f(x_1', x_2', x_3') \end{aligned}$$

و :

$$\begin{aligned} f[\lambda (x_1, x_2, x_3)] &= f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2) \\ &= \lambda (x_1, x_2) = \lambda f(x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

وهذا ما يبرهن أن f تطبيق خطي .

يمكن تعميم ما سبق وبرهان أن تطبيق الفراغ R^n في الفراغ R^p $(p\leqslant n)$ وفق العلاقة :

$$\forall (x_1, x_2, \ldots x_n) \in R^n \quad , \quad f[(x_1, x_2, \ldots, x_n) = = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$$

هو تطبيق خطي .

التمثيل التحليلي لتطبيق خطي : سنقصر كلامنا في هذا الموضوع على الفراغات الشعاعية ذات الأبعاد المنتهية .

٣ - ٦حساب مركبات الخيال في تطبيق خطي :

ليكن F , E فراغين شعاعيين على الحقل K و f تطبيق خطي لـ E في F ولنفرض أن لـ E القاعدة $A(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n})$ ولـ F القاعدة $B(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_p})$ وليكن $\vec{v} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ شعاعاً من E معروفاً بدلالة مركباته على القاعدة المفروضة أي :

$$\vec{v} = x_1 \vec{e_1} + x_2 \vec{e_2} + \ldots + x_n \vec{e_n}$$

إن التطبيق f يربط هذا الشعاع بشعاع $\vec{w}$ من F وفق العلاقة :

$$\vec{w} = f(\vec{v}) = x_1 f(\vec{e_1}) + x_2 f(\vec{e_2}) + \ldots + x_n f(\vec{e_n})$$

يتعين هذا الخيال عندما نتمكن من تعيين مركبات الأشعة :

$$f(\vec{e_1}) \ , \ f(\vec{e_2}) \ , \ \ldots , \ f(\vec{e_n})$$

من الفراغ F على القاعدة B .

لنفرض :

$$f(\vec{e_i}) = a_i^1 \vec{u_1} + a_i^2 \vec{u_2} + \ldots + a_i^p \vec{u_p} \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

فنجـــد :

$$f(\overrightarrow{v}) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(\overrightarrow{e_i}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{p} a_i^{\,j} \overrightarrow{u_j} \right)$$

وإذا ضممنا مختلف العوامل المضروبة بالشعاع u_j إلى بعضها فسوف نجد :

$$f(\overrightarrow{v}) = \sum_{j=1}^{p} \overrightarrow{u_j} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\,j} x_i \right)$$

يمكن كتابة هذه العلاقة مفصلة بالشكل التالي :

$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{v}) = & (a_1^1 x_1 + a_2^1 x_2 + \ldots + a_n^1 x_n) \overrightarrow{u_1} \\ & + (a_1^2 x_1 + a_2^2 x_2 + \ldots + a_n^2 x_n) \overrightarrow{u_2} \\ & + \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ & + (a_1^p x_1 + a_2^p x_2 + \ldots + a_n^p x_n) \overrightarrow{u_p} \end{aligned}$$

إذا فرضنا أن مركبات $\overrightarrow{w} = f(\overrightarrow{v})$ على القاعدة B هي $y_1, y_2, \ldots, y_p$ فإننا نستنتج من العلاقة السابقة المعادلات التالية :

$$\begin{aligned} y_1 &= a_1^1 x_1 + a_2^1 x_2 + \ldots + a_n^1 x_n \\ y_2 &= a_1^2 x_1 + a_2^2 x_2 + \ldots + a_n^2 x_n \\ \ldots & \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ y_p &= a_1^p x_1 + a_2^p x_2 + \ldots + a_n^p x_n \end{aligned}$$

تعطي هـــذه الدساتير المركبات على القاعدة B للشعاع $\overrightarrow{f(v)}$ خيال الشعاع $\overrightarrow{v}$ وفق التطبيق الخطي f، بتراكيب خطيـة بالنسبة لمركبات $\overrightarrow{v}$ في القاعدة A .

٤ - ٦ **الخاصة المميزة لتطبيق خطي** : لقد بينا في الفقرة السابقة أنه يمكن تمثيل كل تطبيق خطي بعلاقات خطية بين مركبات شعاع وخياله وفق هذا التطبيق وسنبرهن فيما يلي أنه إذا عرف التطبيق بعلاقات خطية بين مركبات شعاع من منطلق التطبيق ومركبات خياله وفق هذا التطبيق فان التطبيق المذكور خطي .

لنعتبر أن الفرضيات التي أوردناها في الفقرة السابقة تبقى صالحة من أجل هذه الفقرة ولنفرض تطبيقاً f يربط بين كل شعاع $\vec{v}$ من E وشعاع $\vec{w}$ من F بالشكل التالي :

$$f : \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e_i} \longrightarrow \vec{w} = \sum_{j=1}^{p} y_j \vec{u_j}$$

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} a_i^{\,j} x_i$$

ولنبرهن أن هذا التطبيق خطي أي يحقق العلاقتين (١) و (٢) .

البرهان : من الواضح أن :

$$f(\vec{v}) = \vec{w} = \sum_{j=1}^{p} y_j u_j = \sum_{j=1}^{p} \vec{u_j} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\,j} x_i \right)$$

$$f(\vec{v}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{p} a_i^{\,j} \vec{u_j} \right) \tag{3}$$

لنفرض الأشعة $\vec{q_i}$ من الفراغ F معرفة بالعلاقات :

$$\vec{q_i} = a_i^1 \vec{u_1} + a_i^2 \vec{u_2} + \ldots + a_i^p \vec{u_p} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

فنأخذ عندها العلاقة (٣) الشكل :

$$f(\vec{v}) = x_1 \vec{q_1} + x_2 \vec{q_2} + \ldots + x_n \vec{q_n}$$

إن هـــذه العلاقة هي التعريف المعمم للتطبيق الخطي كما ورد في الفقرة [١ - ٦]

نذكر هذه الفقرة والتي سبقتها بقولنا :

إن الشرط اللازم والكافي لأن يكون التطبيق $f : E \rightarrow F$ تطبيقاً خطياً للفراغ الشعاعي E في الفراغ الشعاعي F هو أن يكون من الممكن تعريف مركبات خيال كل شعاع $\vec{v}$ من E وفق f بعلاقات خطيـــة بدلالة مركبات $\vec{v}$.

خواص التطبيقات الخطية :

إذا كان V و W فراغين شعاعيين على الحقل K وإذا كان $T : V \rightarrow W$ تطبيقاً خطياً فإنه يكون :

٥ - ٦ خيال الشعاع الصفري في V وفق T هو الشعاع الصفري في W لأن :

$$T(\vec{0_v}) = T(0 . \vec{0_v}) = 0 . T(\vec{0_v}) = \vec{0_w}$$

حيث $\vec{0_v}$ و $\vec{0_w}$ شعاعا الصفر في V و W على الترتيب و 0 هو الصفر في K .

٦ - ٦ خيال نظير شعاع وفق T هو نظير خيال هذا الشعاع .

لأنه إذا كان $\overrightarrow{-v}$ نظير الشعاع $\vec{v}$ من V أي $\vec{v} + (\overrightarrow{-v}) = \vec{0_v}$ فإن :

$$T(\vec{v}+(\overrightarrow{-v})) = T(\vec{0_v}) = \vec{0_w}$$

ومن جهة ثانية فإن :

$$T(\vec{v}+(\overrightarrow{-v})) = T(\vec{v}) + T(\overrightarrow{-v})$$

ومنه :

$$T(\vec{v}) + T(\overrightarrow{-v}) = \vec{0_w}$$

أي أن $T(\overrightarrow{-v})$ هو نظير $T(\vec{v})$ من W .

ملاحظة : نهمل في الحالات التي لا نخشى فيها التباساً ، الدليل من شعاع الصفر لفراغ شعاعي .

٧ - ٦ إذا كان U فراغاً شعاعياً جزئياً من V فان T(U) خيـال **U** وفق T والمعرف بالدستور :

$T(U) = \{T(\vec{v}) \ : \ \vec{v} \in U\}$ ، فراغ شعاعي جزئي من W .

بما أن U يحوي الشعاع الصفري وفق النظرية [٧ - ٥] فإن T(U) يحوي حسب [٥ - ٦] الشـعاع الصفري . إذن للبرهان على أن T(U) فراغ شعاعي جزئي من W يكفي أن نتحقق من الخاصتين التاليتين وفق [٧ - ٥] :

$$\forall\ \vec{w}, \vec{w'} \in T(U) \quad , \quad \vec{w} + \vec{w'} \in T(U)$$

$$\forall\ \lambda \in K \qquad\qquad , \quad \lambda\, \vec{w} \in T(U)$$

لنأخـذ $\vec{v}$ و $\vec{v'}$ من U ولنفرض أن $T(\vec{v}) = \vec{w}$ و $T(\vec{v'}) = \vec{w'}$.

بما أن $\vec{v} + \vec{v}' \in U$ فإن :

$$T(\vec{v} + \vec{v}') \in T(U)$$

$$T(\vec{v} + \vec{v}') = T(\vec{v}) + T(\vec{v}') = \vec{w} + \vec{w}'$$

وهذا يعني :

$$T(\vec{v} + \vec{v}') = \vec{w} + \vec{w}' \in T(U)$$

مهما كان λ من K فإن $\lambda \vec{v} \in U$ وهـــذا يؤدي إلى أن $T(\lambda \vec{v}) \in T(U)$:

$$T(\lambda \vec{v}) = \lambda T(\vec{v}) = \lambda \vec{w}$$

وهذا يعني أن : $T(\lambda \vec{v}) = \lambda \vec{w} \in T(U)$ وهو المطلوب .

ينتج عما سبق أن $T(V)$ فراغ شعاعي جزئي من W . ويسمى عادة خيال V وفق التطبيق الخطي T . ونسمي عدد أبعاد $T(V)$ رتبـــة التطبيق الخطي T .

٨ - ٦ أمثلة :

(١) إن R^2 هو خيال التطبيق الخطي $T : R^2 \to R^2$ المعطى بالعلاقة :

$$T(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$$

وذلك لأن T غامر ، وبالتالي تكون رتبـــة التطبيق الخطي T هي اثنان .

(٢) إن R هو خيال التطبيق الخطي $T : R^2 \to R$ المعطى بالعلاقة :

$$T(x_1 , x_2) = (x_1 + x_2)$$

وبالتالي فان رتبة التطبيق الخطي T هي واحد .

٩ - ٦ ليكن V و W فراغين شعاعيين على الحقل K . لتكن $\vec{v}_1 , \ldots , \vec{v}_m$ مجموعة أشعة من V . إذا كان $T : V \to W$ تطبيقاً خطياً وكان $T(\vec{v}_1) , \ldots , T(\vec{v}_m)$ مجموعـــة أشعة مستقلة خطياً من W فان مجموعة الأشعة $\vec{v}_1 , \ldots , \vec{v}_m$ من V مستقلة خطياً .

إن الشرط اللازم والكافي لتكون $\vec{v}_1 , \ldots , \vec{v}_m$ مستقلة خطياً هو أن تتحقق العلاقة :

$$a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \ldots + a_m \vec{v}_m = \vec{0} \Rightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 0$$

حيث $a_1 , \ldots , a_m \in K$. في الحقيقة استناداً إلى [٥ - ٦] نجد :

$$T(a_1 \vec{v}_1 + \ldots + a_m \vec{v}_m) = T(\vec{0}) = \vec{0}$$

وبما أن T تطبيق خطي فان الطرف الأيسر من العلاقة الأخيرة يكتب بالشكل :

$$a_1 T(\vec{v}_1) + \ldots + a_m T(\vec{v}_m) = \vec{0}$$

وبمـــا أننا فرضنا $T(\vec{v}_1) , \ldots , T(\vec{v}_m)$ مستقلة خطياً فان العلاقة الأخيرة تقتضي $a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 0$ وهو المطلوب .

(إن عكس هذه الخاصة معطى بالتمرين المحلول ٢٠٦) .

نحن الآن في وضع يمكننا من برهان النظرية التالية :

١٠ - ٦ نظرية : ليكن V و W فراغين شعاعيين على الحقل K . إذا كانت ($\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}$) قاعدة في V وإذا كانت $\vec{w_n}, \ldots, \vec{w_1}$ مجموعة جزئية من W فإنه يوجد تطبيق خطي وحيد $T : V \to W$ بحيث يكون :

$$T(\vec{e_i}) = \vec{w_i} \quad , \quad i = 1, \ldots, n$$

البرهان : لنبرهن أولاً وجـــود تطبيق خطي T يحقق العلاقات $T(\vec{e_i}) = w_i$. إن من المعروف أنه يمكن كتابة كل شعاع v من V بشكل تركيب خطي وحيد بالنسبة لعناصر قاعدة V أي يوجد n عنصراً $a_1, \ldots, a_n$ من K وبشكل وحيد بحيث يكون :

$$\vec{v} = a_1 \vec{e_1} + \ldots + a_n \vec{e_n}$$

لنعرف تطبيقاً T يربط بين الشعاع $\vec{v}$ ، والشعاع $\overrightarrow{T(v)}$ من W حيث :

$$T(\vec{v}) = a_1 \vec{w_1} + \ldots + a_n \vec{w_n} \qquad (1)$$

تعرف هذه العلاقة T تطبيقاً من V إلى W لأنها تقابل كل عنصر $\vec{v}$ من V بعنصر وحيد $\overrightarrow{T(v)}$ من W . ومن الواضح أن :

$$T(\vec{e_i}) = \vec{w_i} \quad , \quad i = 1, \ldots, n$$

لاثبات أن T هذا تطبيق خطي ، نأخذ الشعاع : $\vec{u} = b_1 \vec{e_1} + \ldots + b_n \vec{e_n}$ من V فيكون وفق تعريف الفراغ الشعاعي :

$$\vec{v} + \vec{u} = (a_1 + b_1)\vec{e_1} + \ldots + (a_n + b_n)\vec{e_n}$$

ومنه :

$$T(\vec{v}+\vec{u}) = (a_1+b_1)\vec{w_1}+\ldots+(a_n+b_n)\vec{w_n}$$

$$= a_1\vec{w_1}+\ldots+a_n\vec{w_n}+b_1\vec{w_1}+\ldots+b_n\vec{w_n}$$

$$= T(\vec{v})+T(\vec{u})$$

وإذا كان $\lambda \in K$ فان :

$$\lambda\vec{v} = \lambda a_1\vec{e_1}+\ldots+\lambda a_n\vec{e_n}$$

ومنه :

$$T(\lambda\vec{v}) = \lambda a_1\vec{w_1}+\ldots+\lambda a_n\vec{w_n}$$

$$= \lambda(a_1\vec{w_1}+\ldots+a_n\vec{w_n})$$

$$= \lambda T(\vec{v})$$

وبذلك نكون قد برهنا أن T تطبيق خطي . بقي علينا أن نبرهن أن التطبيق الخطي T المعرف بالعلاقة (١) وحيد . من أجل هذا لنفرض أنه يوجد تطبيق خطي آخر F من الشكل :

$$F(\vec{e_i}) = \vec{w_i} \quad , \quad i = 1, \ldots, n$$

فيكون :

$$\forall \vec{v} \in V \quad , \quad F(\vec{v}) = F(a_1\vec{e_1}+\ldots+a_n\vec{e_n})$$

$$= a_1 F(\vec{e_1})+\ldots+a_n F(\vec{e_n})$$

$$= a_1\vec{w_1}+\ldots+a_n\vec{w_n} = T(\vec{v})$$

إذن $F(\vec{v}) = T(\vec{v})$ مهما كان $\vec{v}$ من V وهـذا مايثبت أن F هو T نفسه أي أن التطبيق الخطي T وحيد وهذا مايثبت صحة النظرية .

نواة تطبيق خطي :

ليكن V و W فراغين شعاعين على الحقل التبديلي K وليكن التطبيق $T : V \to W$. نسمي مجموعة الأشعة $\vec{v}$ من W التي تحقق $T(\vec{v}) = \vec{0}$ نواة التطبيق الخطي T . نرمز للنواة هذه بـ $T^{-1}(\vec{0})$ أو Ker T :

$$\text{Ker } T = \{ \vec{v} \in V \quad : \quad T(\vec{v}) = \vec{0} \}$$

تتمتع نواة تطبيق خطي $T : V \to W$ بالخاصة التالية :

١١ - ٦ نظرية : Ker T نواة التطبيق الخطي T فراغ شعاعي جزئي من V .

البرهان : أولاً ـ تحوي Ker T الشـعاع الصفري وذلك لأن خيال الشعاع الصفري وفق تطبيق خطي هو الشعاع الصفري . إذن لاثبات أن Ker T فراغ شعاعي جزئي من V يجب أن نتحقق من الخاصتين التاليتين :

$$\forall\ \vec{v}, \vec{v'} \in \text{Ker } T \;\Rightarrow\; \vec{v} + \vec{v'} \in \text{Ker } T$$

$$\forall\ \lambda \in K\ ,\ \vec{v} \in \text{Ker } T \;\Rightarrow\; \lambda \vec{v} \in \text{Ker } T$$

إذا كان $\vec{v}$ و $\vec{v'}$ من Ker T فان :

$$T(\vec{v} + \vec{v'}) = T(\vec{v}) + T(\vec{v'})$$

$$= \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

إذن : $\vec{v} + \vec{v'} \in \text{Ker}\, T$

وإذا كان : $\lambda \in K$ و $\vec{v} \in \text{Ker}\, T$ فان :

$$T(\lambda \vec{v}) = \lambda T(\vec{v}) = \lambda . \vec{0} = \vec{0}$$

إذن $\lambda \vec{v} \in \text{Ker}T$ وبذلك يثبت المطلوب .

١٢ - ٦ نظرية : ليكن V و W فراغين شعاعيين على الحقل التبديلي K ولنفرض أن عدد أبعاد كل من هذين الفراغين الشعاعيين محدود . ليكن T تطبيقاً خطياً لـ V في W . إن مجموع عدد أبعاد خيال V (رتبة التطبيق) مع عدد أبعاد نواة هذا التطبيق يساوي عدد أبعاد الفراغ الشعاعي V (انظر التمرين [٢١٦]) .

١٣ - ٦ أمثلة :

(١) إذا كان I التطبيق الخطي المطابق $I : V \rightarrow V$ فإنه :

$$\forall \vec{v} \in V \quad , \quad I(\vec{v}) = \vec{v}$$

إن نواة هذا التطبيق الخطي تتألف من الشعاع الصفري فقط وبالتالي فان عدد أبعاد نواة هذا التطبيق يساوي الصفر .

(٢) إذا رمزنا بـ O للتطبيق المعدوم $O : V \rightarrow V$ أي :

$$\forall \vec{v} \in V \quad , \quad O(\vec{v}) = \vec{0}$$

فإن هذا التطبيق خطي وإن نواته هي الفراغ الشعاعي V كله وبالتالي فإن عدد أبعاد نواة هذا التطبيق يساوي عدد أبعاد الفراغ الشعاعي V .

(٣) إذا كان $T : R^2 \to R^2$ التطبيق الخطي المعرف بالعلاقة :

$$T(x, y) = (x, x + y)$$

حيث (x, y) مركبتا شعاع ما $\vec{v}$ من R^2 بالنسبة لقاعدة مفروضة فإن نواة هـذا التطبيق تتألف من الأشعة $\vec{v}$ من R^2 حيث يكون $x = 0$ و $x + y = 0$ أي $x = 0$ و $y = 0$ وبالتالي فإن نواة هـذا التطبيق تتألف من الشعاع الصفري فقط ، إذن عـدد أبعاد نواة هذا التطبيق يساوي الصفر .

(٤) ليكن V الفراغ الشعاعي المؤلف من مجموعة التوابع الحقيقية القابلة للاشتقاق (لماذا ؟) . إذا كان $D : V \to V$ التطبيق المعرف بعملية الاشتقاق ، فإن D تطبيق خطي (لماذا ؟) وأن $\text{Ker } D$ نواة هـذا التطبيق الخطي تتألف من جميع التوابع الثابتة . إن كل تابعين ثابتين من الشكل $f(x) = \alpha$ و $g(x) = \beta$ حيث α و β من R ومهما كانت x من R ، مرتبطان خطياً لأن $\beta f(x) - \alpha g(x) = 0$. إذن مجموعة التوابع الثابتة تشكل فراغاً شعاعياً جزئياً من V ذا بعد واحد وبالتالي فإن عدد أبعاد نواة التطبيق الخطي D يساوي الواحد .

١٤ - ٦ تعريف : نقول عن تطبيق خطي أنه تطبيق خطي منتظم إذا كان متبايناً وغامراً أي إذا كان تقابلاً .

١٥ - ٦ نظرية : إذا كان V و W فراغين شعاعيين على الحقل التبديلي K وكان لهما العدد المحدود ذاته من الأبعاد فإن الشرط اللازم والكافي ليكون التطبيق الخطي $T : V \to W$ تطبيقاً خطياً منتظماً هو أن

تكون $\operatorname{Ker} T$ نواة التطبيق الخطي T مؤلفة من عنصر وحيد هو الشعاع الصفري من V .

البرهان :

لزوم الشرط : T تطبيق خطي منتظم $\Leftarrow \operatorname{Ker} T = \{\vec{0}\}$

لنفرض وجود شعاع $\vec{v}$ غير الشعاع الصفري في $\operatorname{Ker} T$ ، فيكون $T(\vec{v}) = \vec{0}$. بما أن خيال الشعاع الصفري وفق تطبيق خطي هو الشعاع الصفري فان :

$$T(\vec{v}) = T(\vec{0}) = \vec{0}$$

نستنتج من هذه العلاقة واستناداً لكون التطبيق الخطي T متبايناً أن $\vec{v} = \vec{0}$ وهذا مخالف للفرض . إذن : $\operatorname{Ker} T = \vec{0}$.

كفاية الشرط : $\operatorname{Ker} T = \{0\} \Leftarrow T$ تطبيق منتظم .

بما أن للفراغين الشعاعيين V و W العدد ذاته من الأبعاد فيكفي أن نبرهن أن T تطبيق خطي متبـاين . أي أن نبرهن أنه إذا كان $\vec{v}_1 \neq \vec{v}_2$ فإن $T(\vec{v}_1) \neq T(\vec{v}_2)$ حيث $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$. لنفرض أن : $T(\vec{v}_1) = T(\vec{v}_2)$ فنجد أن :

$$T(\vec{v}_1) - T(\vec{v}_2) \Rightarrow T(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \vec{0}$$

أي أن :

$$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 \in \operatorname{Ker} T = \{\vec{0}\}$$

وبالتالي فإن $\vec{v_1} - \vec{v_2} = \vec{0}$ وهذا يخالف الفرض $\vec{v_1} \neq \vec{v_2}$. إذن يجب أن يكون $T(\vec{v_1}) \neq T(\vec{v_2})$ وبذلك يتم المطلوب .

إن التطبيق الخطي المعطى بالمثال (١) من [١٣ - ٦] هو تطبيق خطي منتظم لـ V على V نفسه . وإن التطبيق الخطي المعطى بالمثال (٣) هو أيضاً تطبيق خطي منتظم لـ R^2 على R^2 نفسه ، أما التطبيق الخطي المعطى بالمثال (٢) فليس تطبيقاً خطياً منتظماً .

١٦ - ٦ **نظرية** : إذا كان T تطبيقاً خطياً منتظماً لـ V على W فإن التطبيق المعاكس $T^{-1}: W \to V$ هو تطبيق خطي أيضاً .

البرهان : إن من المعلوم أن T^{-1} تطبيق لأنه العلاقة المعاكسة لتقابل ولاثبات أن T^{-1} تطبيق خطي نأخذ شعاعين كيفيين $\vec{w_2}, \vec{w_1}$ من W وبما أن T تطبيق خطي منتظم فيوجد شعاعان $\vec{v_2}, \vec{v_1}$ من V بحيث يكون :

$$T(\vec{v_1}) = \vec{w_1} \quad , \quad T(\vec{v_2}) = \vec{w_2}$$

ومنه :

$$T^{-1}(\vec{w_1} + \vec{w_2}) = T^{-1}(T(\vec{v_1}) + T(\vec{v_2}))$$

$$= T^{-1}(T(\vec{v_1} + \vec{v_2})) \qquad (\text{تطبيق خطي } T)$$

$$= \vec{v_1} + \vec{v_2} \qquad (\text{التطبيق المطابق } T^{-1} \circ T = I)$$

$$= T^{-1}(\vec{w_1}) + T^{-1}(\vec{w_2})$$

ونجد كذلك من أجل كل $\lambda \in K$:

$$T^{-1}(\lambda \vec{w_1}) = T^{-1}(\lambda\, T(\vec{v_1}))$$

$$= T^{-1}(T(\lambda \vec{v_1})) \qquad (\text{تطبيق خطي } T)$$

$$= \lambda \vec{v_1}$$

$$= \lambda\, T^{-1}(\vec{w_1})$$

وهذا يثبت أن T^{-1} تطبيق خطي .

تركيب التطبيقات الخطية :

١٧ - ٦ نظرية . لتكن V و U و W ثلاثة فراغات شعاعية على الحقل K وليكن T تطبيقاً خطياً من V إلى U و F تطبيقاً خطياً من U إلى W . إن التطبيق المركب F o T هو تطبيق خطي من V إلى W .

البرهان : إذا كان $\vec{v}, \vec{v'} \in V$ فان :

$$(F \circ T)(\vec{v}+\vec{v'}) = F(T(\vec{v}+\vec{v'}))$$

$$= F(T(\vec{v}) + T(\vec{v'})) \qquad (\text{تطبيق خطي } T)$$

$$= (F \circ T)(\vec{v}) + (F \circ T)(\vec{v'}) \qquad (\text{تطبيق خطي } F)$$

وإذا كان $\lambda \in K$ فان :

$$(F \circ T)(\lambda \vec{v}) = F(T(\lambda \vec{v}))$$

$$= F(\lambda\, T(\vec{v})) \qquad (\text{تطبيق خطي } T)$$

$$= \lambda (F \circ T)(\vec{v}) \qquad (\text{تطبيق خطي } F)$$

وبالتالي فان $F \circ T$ تطبيق خطي وهو المطلوب .

١٨ - ٦ مثال : ليكن T و F تطبيقين خطيين من R^3 إلى R^3 معرفين بالشكل :

$$T(x, y, z) = (x, z, 0)$$

$$F(x, y, z) = (x, y, 0)$$

حيث (x, y, z) تمثل مركبات شعاع ما من R^3 .

إن التطبيق المركب $F \circ T$ يعطى بالعلاقة :

$$(F \circ T)(x, y, z) = F(T(x, y, z)) = F(x, z, 0)$$
$$= (x, z, 0)$$

وإن التطبيق المركب $T \circ F$ يعطى بالعلاقة :

$$(T \circ F)(x, y, z) = T(F(x, y, z)) = T(x, y, 0)$$
$$= (x, 0, 0)$$

وهذا مايذكرنا بأن تركيب التطبيقات غير تبديلي .

فراغ التطبيقات الخطية :

تتصف مجموعة التطبيقات الخطية من فراغ شعاعي V إلى فراغ شعاعي W ، معرفين على الحقل K ، بخاصة أساسية هامة هي أن لها بنية الفراغ الشعاعي . وأكثر من هذا ، تتصف مجموعـــة التطبيقات الخطية من فراغ شعاعي V إلى الفراغ V نفسه ببنية جبرية إضافية إذ أنه يعرف على مجموعة التطبيقات الخطية عملية ضرب سنأتي على ذكرها بعد قليل .

لنرمز بـ $\text{Hom}(V, W)$ لمجموعـــة التطبيقات الخطية من الفراغ الشعاعي V إلى الفراغ الشعاعي W المعرفين على الحقل التبديلي K . إذا كان $T, F \in \text{Hom}(V, W)$ فإن التطبيق $T + F$ المعرف بالعلاقة :

$$(T + F)(\vec{v}) = T(\vec{v}) + F(\vec{v}) \;, \quad \forall \vec{v} \in V \qquad \text{(I)}$$

تطبيق خطي من V إلى W وبالتالي ينتمي لـ $\text{Hom}(V, W)$ لأنه إذا كان $\vec{v}, \vec{v'} \in V$ فان :

$$\begin{aligned}(T + F)(\vec{v} + \vec{v'}) &= T(\vec{v} + \vec{v'}) + F(\vec{v} + \vec{v'}) \\ &= T(\vec{v}) + T(\vec{v'}) + F(\vec{v}) + F(\vec{v'}) \\ &= T(\vec{v}) + F(\vec{v}) + T(\vec{v'}) + F(\vec{v'}) \\ &= (T + F)(\vec{v}) + (T + F)(\vec{v'})\end{aligned}$$

وإذا كان $\lambda \in K$ فان :

$$\begin{aligned}(T + F)(\lambda \vec{v}) &= T(\lambda \vec{v}) + F(\lambda \vec{v}) \\ &= \lambda T(\vec{v}) + \lambda F(\vec{v}) \\ &= \lambda (T + F)(\vec{v})\end{aligned}$$

ونكون قد برهنا أن $T + F$ تطبيق خطي من V إلى W .

وإذا كان $\lambda \in K$ فإنه يبرهن بسهولة أن التطبيق λT المعرف بالعلاقة

$$(\lambda T)(\vec{v}) = \lambda T(\vec{v}) \;, \quad \forall \vec{v} \in V \qquad \text{(II)}$$

هو تطبيق خطي من V الى W . وبهذا نكون قـــد عرفنـا على Hom (V , W) ، مجموعـــة التطبيقات الخطية من V الى W ، عملية داخلية هي الجمع التي رمزنا لها تجاوزاً بـ + ، كما عرفنا عملية خارجية هي الضرب بعنصر من الحقـــل K . واذا اعتـــبرنا العنصر الصفري في Hom (V , W) هو التطبيق المعدوم فإنه يمكن بسهولة (أو استناداً إلى [٢ - ٥] والتمرين المحلول [١٥٧]) برهان النظرية التالية :

١٩ - ٦ **نظرية** : تشكل المجموعة Hom (V , W) المزودة بعمليتي الجمع والضرب بعنصر من الحقل K المعرفتين بالمعادلتـــين (I) و (II) ، فراغاً شعاعياً على الحقل K ، ندعوه فراغ التطبيقات الخطية .

سنذكر فيما يلي حالتين خاصتين من فراغ التطبيقات الخطية . الأولى Hom (V(R) , R) والثانية Hom (V , V) .

بما أن الحقل التبديلي R ، استناداً إلى المثال (١) من [٣ - ٥] ، هو الفراغ الشعاعي $V_1(R)$ ذاته فإنه يمكننا أن نكتب الفراغ الشعاعي Hom (V(R) , $V_1(R)$) بالشكل Hom (V(R) , R) ، ويمثـــل الفراغ الشعاعي المتشكل من مجموعة التطبيقات الخطية من الفراغ الشعاعي V على R إلى الفراغ الشعاعي R .

٢٠ - ٦ **تعريف** : نسمي الفراغ الشعاعي Hom (V(R) , R) الفراغ الشعاعي الثنوي للفراغ V . ويرمز عادة لهذا الفراغ بـ V^* .

٢١ - ٦ **نظرية** : إذا كان عـــدد أبعاد الفراغ الشعاعي V(R) محدوداً ويساوي n فان عدد أبعاد الفراغ الشعاعي الثنوي V^* يساوي أيضاً n (انظر التمرين ٢٢٢) .

القاعدة الثنوية لفراغ شعاعي :

إذا كان عدد أبعاد الفراغ الشعاعي $V(R)$ يساوي n فإن هناك n شعاعاً مستقلاً $v_1 , \dots , v_n$ من $V(R)$ تشكل قاعدة فيه نرمز لها بـ $\{ v_i \}$. لتكن $v_1^* , \dots , v_n^*$ جملة أشعة مستقلة خطياً من V^* ، الفراغ الشعاعي الثنوي (أو الموافق) ، بحيث تحقق العلاقات :

$$(III) \qquad v_i^* (v_j) = \delta_{ij} \begin{cases} = 1 & i = j \\ = 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$i , j = 1 , \dots , n$$

إن v_i^* تطبيقات خطية من V إلى R ، أما $v_i^*(v_j)$ فهو خيال الشعاع v_j من $V(R)$ وفق التطبيق v_i^* . تشكل جملة الأشعة $v_1^* , \dots , v_n^*$ استناداً إلى [٢١ - ٦] ، قاعدة في V^* . نرمز لهذه القاعدة بالشكل $\{ v_i^* \}$ ونسميها القاعدة الثنوية أو الموافقة في V^* للقاعدة $\{ v_i \}$ في V .

٢٢ - ٦ نظرية : ليكن V , W فراغين شعاعيين على الحقل R . إذا كان $T : V \longrightarrow W$ تطبيقاً خطياً فان التطبيق $T^* : W^* \longrightarrow V^*$ المعرف بالعلاقة :

$$\forall g \in W^* \quad , \quad T^*(g) = g \circ T$$

تطبيق خطي . حيث $g \in W^*$ هو تطبيق خطي من W إلى R و $g \circ T$ هو التطبيق المركب وهو تطبيق خطي من V الى R أي عنصر من V^* (انظر التمرين ٢٢٤) .

نسمي التطبيق T^* المعرف بالنظرية السابقة منقول التطبيق الخطي T

* **الفراغ الشعاعي** $Hom(V, V)$:

ليكن V فراغاً شعاعياً على الحقل التبديلي K . ان $Hom(V, V)$ مجموعة التطبيقات الخطية من V الى V ذاته تشكل ، كما برهنا ، فراغاً شعاعياً على الحقل K . نسمي كل عنصر من الفراغ الشعاعي $Hom(V, V)$ مؤثراً خطياً على الفراغ الشعاعي V وإن دراسة المؤثرات على فراغ شعاعي تحتل مكاناً هاماً في أبحاث الجبر الخطي العالية .

إن التطبيق الخطي D المعرف بعملية الاشتقاق المعطى بالمثال (٤) [١٣ - ٦] مؤثر خطي على الفراغ الشعاعي المؤلف من مجموعة التوابع الحقيقية القابلة للاشتقاق . يدعى هذا المؤثر المؤثر التفاضلي .

ان تركيب تطبيقين خطيين من V الى V ، كما رأينا ، هو تطبيق خطي وبالتالي فان عملية التركيب « o » هذه تعرف عملية « ضرب » نرمز لها بـ (.) على الفراغ الشعاعي $Hom(V, V)$ من الشكل :

$$\text{(IV)} \qquad \forall F, T \in Hom(V, V) \quad : \quad F . T = F o T$$

تتمتع عملية الضرب هذه بالخواص التالية :

٢٣ - ٦ عملية الضرب عملية تجميعية وذلك لكون عملية تركيب التطبيقات تجميعية . ولكنها في الحالة العامة ليست تبديلية . انظر المثال [١٨ - ٦] .

٢٤ - ٦ اذا كان T مؤثراً خطياً على V فيرمز عادة بـ :

$T^2 = T \cdot T$ و $T^3 = T \cdot T \cdot T$ وهكذا . كما يرمز أيضاً بـ $I = T^0$ للتطبيق المطابق والذي ندعوه المؤثر الحيادي ، ويكون :

$$\forall T \in \text{Hom}(V, V) \quad : \quad T^0 \cdot T = T \cdot T^0 = T$$

٢٥ - ٦ مهما كانت F, T_1, T_2 من $\text{Hom}(V, V)$ فان :

$$F \cdot (T_1 + T_2) = F \cdot T_1 + F \cdot T_2$$

$$(T_1 + T_2) \cdot F = T_1 \cdot F + T_2 \cdot F$$

أي أن عملية الضرب المعرفة آنفاً توزيعية بالنسبة لعملية الجمع المعرفة على مجموعة التطبيقات ، لأنه مهما كان الشعاع $\vec{v}$ من V فان :

$$(F \cdot (T_1 + T_2))(\vec{v}) = F((T_1 + T_2)(\vec{v}))$$

$$= F(T_1(\vec{v}) + T_2(\vec{v}))$$

$$= F(T_1(\vec{v})) + F(T_2(\vec{v})) \quad (\text{تطبيق خطي } F)$$

$$= (F \cdot T_1)(\vec{v}) + (F \cdot T_2)(\vec{v})$$

$$= (F \cdot T_1 + F \cdot T_2)(\vec{v})$$

ومنه :

$$F \cdot (T_1 + T_2) = F \cdot T_1 + F \cdot T_2$$

ونحصل بصورة مشابهة ، على العلاقة الثانية .

٢٦ - ٦ مهما كان λ من K ومهما كان F, T من $\text{Hom}(V, V)$ فان :

$$\lambda (F . T) = (\lambda F) . T = F . (\lambda T)$$

لأنه مهما كان الشعاع $\vec{v}$ من V فإن :

$$(\lambda(F . T))(\vec{v}) = \lambda (F(T(\vec{v})))$$

$$= (\lambda F)(T(\vec{v})) = ((\lambda F) . T)(\vec{v})$$

$$= F(\lambda T(\vec{v}))$$ (F تطبيق خطي)

$$= (F . (\lambda T))(\vec{v})$$

ومنه نجد العلاقة المطلوبة .

نستنتج مما سبق مايلي :

(١) إن الخواص [٢٣ ، ٢٤ ، ٢٥ - ٦] تعرف الفراغ الشعاعي Hom (V , V) كحلقة واحدية (ذات عنصر حيادي) . بينما الخاصة [٢٦ - ٦] تجعل من Hom (V , V) فراغاً شعاعياً بالاضافة الى كونه حلقة . نسمي Hom (V , V) المزود بهذه العمليات جبراً على الحقل K(*) .

(٢) إن مجموعـــة المؤثرات الخطية المنتظمة على الفراغ الشعاعي أي مجموعة التطبيقات الخطية المنتظمة من V على V ذاته ، تشكل فراغاً شعاعياً جزئياً من Hom (V , V) (لماذا ؟) . أضف الى ذلك أن

« * » نقول عن حلقه S أنها تشكل جبراً على الحقل K إذا كانت S فراغاً شعاعياً على الحقل K وكان :

$$\forall u, v \in S \ , \ \forall \lambda \in K \ , \ \lambda (u v) = (\lambda u) v = u (\lambda v)$$

هذه المجموعة التي أنشئت عليها عملية الضرب المعروفة بالعلاقة (IV) تشكل زمرة غير تبديلية في الحالة العـامة وأن العنصر النظير لكل مؤثر خطي منتظم T هو المؤثر الخطي المعاكس T^{-1} .

تمارين محلولة

١٩٩ - تمرين : لتكن $(v_1, \ldots, v_n)$ [1] قاعدة في الفراغ الشعاعي V المعرف على الحقل K . ليكن $v = k_1 v_1 + \ldots + k_n v_n$ شعاعاً ما من V ، حيث $k_1, \ldots, k_n \in K$ ولنعرف التطبيق $T : V \longrightarrow K^n$ بالشكل :

$$T(v) = (k_1, \ldots, k_n)$$

حيث K^n الفراغ الشعاعي $V_n(K)$. برهن أن T تطبيق خطي .

الحل : لنتحقق من شرطي التطبيق الخطي . إذا كان :

$$v' = k_1' v_1 + \ldots + k_n' v_n \quad , \quad k_1', \ldots, k_n' \in K$$

فإن :

$$v + v' = (k_1 + k_1') v_1 + \ldots + (k_n + k_n') v_n$$

وبالتالي :

$$\begin{aligned} T(v + v') &= (k_1 + k_1', \ldots, k_n + k_n') \\ &= (k_1, \ldots, k_n) + (k_1', \ldots, k_n') \\ &= T(v) + T(v') \end{aligned}$$

---

(١) نذكر القارىء بما أوردناه سابقاً من أننا سنرمز للأشعة بأحرف لاتينية وللمقادير السلمية بأحرف يونانية لذا سنهمل في هذه التمارين الأسهم من فوق الأحرف الدالة على أشعة .

أي الشرط الأول محقق .

ومن أجل $\lambda \in K$ فان :

$$\lambda v = \lambda (k_1 v_1 + \dots + k_n v_n) = \lambda (k_1 v_1) + \dots + \lambda (k_n v_n) =$$
$$= ((\lambda k_1) v_1 + \dots (\lambda k_n) v_n)$$

ومنه :

$$T (\lambda v) = (\lambda k_1 , \dots , \lambda k_n)$$
$$= \lambda (k_1 , \dots , k_n)$$
$$= \lambda T (v)$$

أي الشرط الثاني محقق وهو المطلوب .

٢٠٠ - ليكن V و W فراغين شعاعيين على الحقل K وليكن $T : V \longrightarrow W$ تطبيقاً خطياً . برهن أن خيال مجموعة أشعة مرتبطة خطياً من V هو مجموعة أشعة مرتبطة من W .

الحل : إذا كانت $v_1 , \dots , v_n$ مجموعة أشعة مرتبطة خطياً من V فيوجد $a_1 , \dots , a_n$ من K ليست جميعها معدومة بحيث يكون :

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$$

ومنه :

$$T (a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = T (0) = 0$$

وبما أن T تطبيق خطي فان :

$$a_1 T (v_1) + \dots a_n T (v_n) = 0$$

وهذا يعني أن $T(v_1), \ldots, T(v_n)$ مجموعة أشعة مرتبطة خطياً من W .

٢٠١ - ليكن $T: V \longrightarrow W$ تطبيقاً خطياً . إذا كان عدد أبعاد الفراغ الشعاعي V هو n فبرهن أن عـــدد أبعاد $T(V)$ هو أصغر أو يساوي n .

الحل : لتكن $w_1, \ldots, w_m$ مجموعة أشعة من $T(V)$ ، يوجد مجموعة أشعة $a_1, \ldots, a_m$ من V بحيث يكون :

$$T(a_i) = w_i \quad , \quad i = 1, \ldots, m$$

إذا كان عدد أبعاد $T(V)$ أكبر من n فيمكن اختيار m أكبر من n بحيث تكون مجموعة الأشعة $w_1, \ldots, w_m$ مستقلة خطياً . عندها نجد استناداً الى الخاصة [٥ - ٣] من خواص التطبيق الخطي أن $a_1, \ldots, a_m$ مستقلة خطياً . وهذا يعني أن عدد أبعاد V اكبر من n وهـذا مخالف للفرض . وبالتالي يجب أن تكون $m \leqslant n$ وهو المطلوب .

ملاحظة : نستنتج من التمرين الســـابق أن رتبه تطبيق خطي $T: V \longrightarrow W$ تساوي على الأكثر عدد أبعاد الفراغ الشعاعي V .

٢٠٢ - ليكن A شـــعاعاً مفروضاً من R^3 . نعرف التطبيق $T: R^3 \longrightarrow R$ بالعلاقة :

$$T(v) = v \,.\, A \qquad (\forall\, v \in R^3)$$

حيث . تدل على عملية الضرب الداخلي (العددي) للشعاعين v و A برهن أن T تطبيق خطي .

الحل : إذا كان $v , v' \in R^3$ فإن :

$$T(v+v') = (v+v') . A$$

$= v . A + v' . A$ (حسب خواص الجداء الداخلي)

$= T(v) + T(v')$

وكذلك إذا كان $\alpha \in R$ فان :

$$T(\alpha v) = (\alpha v) . A$$

$= \alpha (v . A)$ (حسب خواص الجداء الداخلي)

$= \alpha T(v)$

وبالتالي فان T خطي .

٢٠٣ - ليكن الفراغ الشعاعي V على الحقل R . اذا كان g , f تطبيقين خطيين $f , g : V \to R$ فبرهن أن التطبيق $F : V \to R^2$ المعطى بالعلاقة $F(v) = (f(v) \; , \; g(v)) , \forall v \in V$ هو تطبيق خطي .

الحل : مهما كان $v' \in V$ و v فلدينا .

$$F(v+v') = (f(v+v') \; , \; g(v+v'))$$

$= (f(v) + f(v') \; , \; g(v) + g(v'))$ (g , f تطبيقان خطيان)

$= (f(v) \; , \; g(v)) + (f(v') \; , \; g(v'))$ (جمع الأشعة)

$= F(v) + F(v')$

وكذلك مهما كان $\alpha \in R$ فان :

$$F(\alpha v) = (f(\alpha v) \quad , \quad g(\alpha v))$$

$= (\alpha f(v), \alpha g(v))$ (g, f تطبيقان خطيان)

$= \alpha (f(v), g(v))$ (ضرب شعاع بعدد)

$= \alpha F(v)$

وبذلك يتم المطلوب .

٢٠٤ - ليكن V الفراغ الشعاعي المتشكل من مجموعة التوابع الحقيقية القابلة للاشتقاق . إذا كان D المؤثر التفاضلي على V و I التطبيق المطابق على V فبرهن أن التطبيق $T = D - I : V \longrightarrow V$ هو تطبيق خطي . أوجد نواة ورتبة هذا التطبيق .

الحل : لاثبات أن T خطي نأخذ $a, u \in V$ فنجد :

$$T(a+u) = (D-I)(a+u)$$

$= D(a+u) - I(a+u)$ (حسب تعريف مجموع تابعين)

$= D(a) + D(u) - I(a) - I(u)$ (حسب خواص مشتق تابعين)

$= [D(a) - I(a)] + [D(u) - I(u)]$ (عملية جمع التوابع تبديلية وتجميعية)

$= T(a) + T(u)$

وبصورة مشابهة نجد أنه إذا كان $\alpha \in R$ فان :

$$T(\alpha a) = \alpha T(a)$$

وبالتالي فان التطبيق T خطي وهو المطلوب .

إن نواة هذا التطبيق :

$$\text{Ker } T = \{ f \in V \ : \ T(f) = O \}$$

$$(D - I)(f) = O \Rightarrow Df - If = O$$

$$\Rightarrow \; Df = If + O = f + O = f$$

وحل المعادلة التفاضلية الحاصلة $Df = f$ هو من الشكل :

$$f(x) = e^x + \lambda$$

حيث λ ثابت اختياري .

تشكل مجموعة هـــذه التوابـع نواة التطبيق الخطي T ، وهي فراغ شعاعي جزئي من V ذو بعد يساوي 1 . رتبة التطبيق الخطي T إذن تساوي الواحد .

٢٠٥ ـ لنفترض أن الشعاعين e_1 , e_2 يشكلان قاعـدة في R^2 . وليكن $T : R^2 \longrightarrow R^n$ تطبيقاً خطيـــاً . برهن أنه إما أن يكون $T(e_1) , T(e_2)$ مستقلين خطياً أو أن يكون عدد أبعاد $T(R^2)$ يســاوي الواحد أو الصفر .

الحل : إن الشعاعين e_1 , e_2 مستقلان خطياً لكونهما يشكلان قاعدة في R^2 . فلدينا إحدى الحالات الثلاث التالية :

١ ـ $T(e_1)$ و $T(e_2)$ مستقلان خطياً وبالتالي يولدان $T(R^2)$ لأن ، حسب التمرين [٢٠١] ، عدد أبعاد $T(R^2)$ يساوي 2 على الأكثر ، وفي هذه الحالة يساوي اثنين .

٢ ـ $T(e_1)$ و $T(e_2)$ مرتبطان خطياً ، عندها يوجد عدد $\lambda \neq 0$ بحيث يكون $T(e_2) = \lambda\, T(e_1)$. إذا كان $v \in R^2$ فيوجد عـــددان α , β بحيث يكون $v = \alpha e_1 + \beta e_2$. ومنه :

$$T(v) = T(\alpha\, e_1 + \beta\, e_2)$$

$$T(v) = \alpha T(e_1) + \beta T(e_2) \qquad (\text{T تطبيق خطي})$$
$$= (\alpha + \beta \lambda) T(e_1)$$

أي أن كل شعاع من $T(R^2)$ يمكن كتابته بدلالة الشعاع $T(e_1)$ ، وبالتالي فإن عدد أبعاد $T(R^2)$ يساوي الواحد .

٣ - $T(e_1)$, $T(e_1)$ يساويان شعاع الصفر . إن كل شعاع من $T(R^2)$ هو الشعاع الصفر وبالتالي فإن $T(R^2) = \{0\}$ وعدد أبعاده يساوي الصفر .

٢٠٦ - (عكس الخاصة ٩ - ٦) .

ليكن V و W فراغين شعاعين على الحقل K وليكن $T : V \longrightarrow W$ تطبيقاً خطياً نواته $\{0\}$. إذا كانت $v_1 , \ldots , v_n$ مجموعة أشعة مستقلة خطياً من V فان $T(v_1) , \ldots , T(v_n)$ مجموعة أشعة مستقلة خطياً من W .

الحل : لما كان T تطبيقاً خطياً فان :

$$\alpha_1 T(v_1) + \ldots + \alpha_n T(v_n) = T(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n)$$

وبالتالي فإن :

$$\alpha_1 T(v_1) + \ldots + \alpha_n T(v_n) = 0 \Rightarrow T(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n) = 0$$
$$\Rightarrow \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0 \quad (\text{لأن } \operatorname{Ker} T = \{0\})$$
$$\Rightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$$

لأن الأشعة $v_1 , \ldots , v_n$ مستقلة خطياً . وهو المطلوب .

٢٠٧ - الدوران في المستوي هو تطبيق خطي لمجموعة نقاط المستوي على نفسه .

(باختيار o مبدأ الاحداثيات في المستوي يمكن تمثيل كل نقطة P من هـذا المستوي بشعاع طايق oP) .

الحل : ليكن ox , oy محورين متعامدين في المستوي π . وليكن (i , j) قاعـــدة طبيعية (قانونية) في π . لنعتبر التطبيق T هو الدوران بمقـدار زاوية ثابتة α حول النقطة o ولنـــبرهن أن T تطبيق خطي . يمكن أن يمثـــل الشعاع $v = oP$ باحداثيي النقطـة $P = (x , y)$.

اذا كانت $o\, x_1\, y_1$ الجملة الجديدة الناتجة عن دوران الجملة o x y فان وضع P′ بالنسبة للجملة الجديدة مشابه لوضع P بالنسبة للجملة القديمة . فاذا رمزنا بـ (x_1' , y_1') و (x' , y') لاحـــداثيات P′ بالنسبة للجملتين الجديدة والقديمة على الترتيب فان :

$$x_1' = x \quad , \quad y_1' = y$$

ومنه :

$$o P' = x_1' \, i_1 + y_1' \, j_1$$

$$= x \, i + y \, j$$

ومنه :

$$x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha$$

$$y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha$$

وحسب [١ - ٦] نجد أن T تطبيق خطي . وهو المطلوب .

٢٠٨ – التحاكي في المستوي هو تطبيق خطي لنقاط المستوي في المستوي نفسه .

الحل : نقول ان النقطة P' تحاكي النقطـــة P بتحاك مركزه o ونسبته λ إذا تحقق الشرط :

$$\overrightarrow{oP'} = \lambda \, \overrightarrow{oP}$$

إذا كتبنا $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{oP} = (x , y)$, $\overrightarrow{v'} = \overrightarrow{oP'} = (x' , y')$ فان :

$$x' = \lambda x \quad , \quad y' = \lambda y$$

وبالتالي فان التطبيق $T : \overrightarrow{v} \longrightarrow \overrightarrow{v'}$ هو تطبيق خطي .

حالة خاصة : إذا كان $\lambda = -1$ فان $\overrightarrow{v'} = -\overrightarrow{v}$ وبالتالي $T : \overrightarrow{v} \longrightarrow -\overrightarrow{v}$ يمثل تطبيق التناظر بالنسبة لـ o وهو تطبيق خطي .

٢٠٩ ـ إذا كان T و F مؤثرين خطيين على R^2 معرفين بالشكل :

$$T(x , y) = (y , x) \quad , \quad F(x , y) = (0 , x)$$

فأوجد : $T \circ F$, $F \circ T$, F^2 , T^2 , $T - F$

الحل : حسب التعريف لدينا :

$$(T \circ F)(x , y) = T(F(x , y))$$

$$= T(0 , x) = (x , 0)$$

$$(F \circ T)(x , y) = F(y , x) = (0 , y)$$

$$F^2(x , y) = F(F(x , y)) = F(0 , x) = (0 , 0)$$

إذن $F^2 = O$ (التطبيق المعدوم)

$$T^2(x , y) = T(T(x , y)) = T(y , x) = (x , y)$$

إذن $T^2 = I$ (التطبيق المطابق)

$$(T - F)(x, y) = T(x, y) - F(x, y)$$
$$= (y, x) - (o, x) = (y, o)$$

٢١٠ - ليكن $T : R^4 \longrightarrow R^3$ و $F : R^3 \longrightarrow R^3$ تطبيقين خطيين معرفين بالشكل :

$$T(x, y, z, w) = (x - y, z + w, x - y + z)$$
$$F(x, y, z) = (0, x + y, x + y + z)$$

والمطلوب إيجاد : ١ - رتبة وصفرية كل من T و F .

٢ - $F \circ T$ و F^2 .

٣ - رتبة وصفرية F^2 .

الحل : ١ - إن نواة التطبيق الخطي T هي :

$$\text{Ker}\, T = \{ (x, y, z, w) \in R^4 : T(x, y, z, w) = 0 \}$$
$$= \{ (x, y, z, w) \in R^4 : x - y = 0 , z + w = 0 , x - y + z = 0 \}$$

إذن تتعين ker T بالمعادلات :

$$x - y = 0 , \quad z = 0 , \quad w = 0$$

وهي تمثل فراغاً شعاعياً جزئياً ذا بعد واحـــد . إذن صفرية T تساوي الواحد ورتبته اذن ثلاثة . (مستندين في ذلك على النظرية ١٢ - ٦) .

أما بالنسبة لـ F فان :

$$\text{Ker}\, F = \{ (x, y, z) \in R^3 : F(x, y, z) = 0 \}$$
$$= \{ (x, y, z) \in R^3 : x + y = o , x + y + z = 0 \}$$

إذن تتعين $Ker\ T$ بالمعادلات :

$$x + y = o \quad , \quad z = o$$

وهي تمثل فراغاً شعاعياً جزئياً من R^3 ذا بعد واحد . اذن صفرية F تساوي الواحد ورتبته تساوي اثنين .

٢ - $$F\, o\, T\, (x , y , z) = F\, (x - y \ , \ z + w \ , \ x - y + z)$$

$$= (0 \ , \ x - y + z + w \ , \ 2x - 2y + 2z + w)$$

$$F^2\, (x , y , z) = F\, o\, F\, (x , y , z) = F\, (0 , x + y \ , \ x + y + z)$$

$$= (o \ , \ x + y \ , \ 2x + 2y + z)$$

٣ - $$Ker\ F^2 = \{ (x , y , z) \in R^2 \ : \ F^2\, (x , y , z) = 0 \}$$

$$= \{ (x , y , z) \in R^3 \ : \ x + y = 0 \ , \ 2x + 2y + z = 0 \}$$

اذن تتعين $ker\ F^2$ بالمعادلات $x + y = 0 \ , \ z = 0$ وهي تمثل فراغاً شعاعياً جزئياً ذا بعد واحد . اذن صفرية F^2 تساوي الواحد ورتبته تساوي اثنين .

٢١١ - ليكن V فراغ التطبيقات المستمرة من R الى R . إذا كان التطبيق $T : V \longrightarrow V$ معطى بالعلاقة :

$$\forall f \in V \ , \ \forall x , t \in R \ , \ (T\, f)\, (x) = \int_{0}^{x} f\,(t)\, d\, t$$

فان T مؤثر خطي على V نسميه المؤثر التكاملي .

الحل : لاثبات أن T تطبيق خطي من V الى V وبالتالي مؤثر خطي على V ، نأخذ $f , g \in V$ فيكون استناداً لخواص التكامل :

$$(T(f+g))(x) = \int_0^x (f+g)(t)\,dt$$

$$= \int_0^x f(t)\,dt + \int_0^x g(t)\,dt$$

$$= (Tf)(x) + (Tg)(x)$$

$$= (Tf + Tg)(x)$$

ومنه :

$$T(f+g) = Tf + Tg$$

كذلك اذا كان $\lambda \in K$ فإن .

$$(T(\lambda f))(x) = \int_0^x (\lambda f)(t)\,dt$$

$$= \lambda \int_0^x f(t)\,dt = \lambda (Tf)(x)$$

ومنه :

$$T(\lambda f) = \lambda (Tf)$$

وهذا مايثبت أن T مؤثر خطي على V .

٢١٢ - الفراغ الذاتي لمؤثر خطي : ليكن T مؤثراً خطياً على الفراغ الشعاعي V على الحقل التبديلي $\mathbf{K}$. نقول عن الشعاع غير المعدوم $v \in V$ أنه شعاع ذاتي بالنسبة لـ T اذا وجـد $\lambda \in K$ بحيث يكون :

$T(v) = \lambda v$ وتسمى λ القيمة الذاتية الموافقة ، برهن أن مجموعة الأشعة الذاتية ، V_λ ، بالنسبة لـ T والموافقة للقيمة الذاتية λ تشكل فراغاً شعاعياً جزئياً من V ، نسميه الفراغ (الجزئي) الذاتي لـ T الموافق للقيمة الذاتية λ .

الحل : للبرهان على أن V_λ تشكل فراغاً شعاعياً جزئياً من V يكفي أن نتحقق من الشرطين التاليين :

$$\forall \quad v_1 , v_2 \in V_\lambda \Rightarrow v_1 + v_2 \in V_\lambda$$

$$\forall v \in V_\lambda \quad , \quad k \in K \Rightarrow k v \in V_\lambda$$

إن v_1 و v_2 من V_λ يعني أن :

$$T(v_1) = \lambda v_1 \quad , \quad T(v_2) = \lambda v_2$$

ومنه :

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) \qquad (\text{تطبيق خطي } T)$$

$$= \lambda v_1 + \lambda v_2$$

$$= \lambda (v_1 + v_2)$$

وهذا يعني أن $v_1 + v_2 \in V_\lambda$ كذلك .

$$T(k v) = k T(v) \qquad (\text{تطبيق خطي } T)$$

$$= k \lambda v = \lambda (k v) \qquad (\text{عملية الجداء في } K \text{ تبديلية})$$

ومنه $k v \in V_\lambda$ وبذلك يتم المطلوب .

٢١٣ - ليكن T مؤثراً خطياً على الفراغ الشعاعي V ولتكن

$v_1, \ldots, v_m$ أشعة ذاتية بالنسبة لـ T على الترتيب مع القيم الذاتية $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ (انظر التمرين ٢١٢) .

إذا كان :

$$i \neq j \Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_j \quad , \quad i, j = 1, \ldots, m$$

فإن : $v_1, \ldots, v_m$ مجموعة أشعة مستقلة خطياً .

الحل : نتبع هنا طريقة البرهان بالتراجع . إذا كان $m = 1$ فإن $v_1 \in V$ وبما أن $v_1 \neq 0$ بالتعريف فإن v_1 مستقل خطياً . أما إذا كان $m = 2$ فإننا نفرض العلاقة :

$$\text{(I)} \qquad a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0 \quad , \quad a_1, a_2 \in K$$

ولنثبت أن $a_1 = a_2 = 0$. إذا ضربنا طرفي العلاقة (I) بـ λ_1 فنحصل على :

$$\text{(II)} \qquad a_1 \lambda_1 v_1 + a_2 \lambda_1 v_2 = 0$$

وإذا أخذنا التطبيق T على طرفي العلاقة (I) فنحصل على :

$$T(a_1 v_1 + a_2 v_2) = T(0) = 0$$

وبما أن T خطي فنجد :

$$a_1 T(v_1) + a_2 T(v_2) = 0$$

وبالتالي :

$$\text{(III)} \qquad a_1 \lambda_1 v_1 + a_2 \lambda_2 v_2 = 0$$

ومن العلاقتين (II) و (III) نجد :

$$a_2 (\lambda_2 - \lambda_1) v_2 = 0$$

بما أن $v_2 \neq 0$ بالتعريف و $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$ فان $a_2 = 0$ وبالرجوع لـ (I) نجد $a_1 = 0$.

(بصورة مشابهة نقيم البرهان من أجل $m > 2$) .

٢١٤ - ليكن $T : R^2 \longrightarrow R^2$ تطبيقاً خطياً معرفاً بالعلاقة :

$$T(v) = T(x, y) = (x - 2y, -x + y)$$

حيث $v = (x, y)$ شعاع ما من R^2 . أوجد الأشعة الذاتية والقيم الذاتية الموافقة بالنسبة لـ T .

الحل : اذا وجد شعاع ذاتي $v = (x, y)$ بالنسبة لـ T ورافق القيمة الذاتية λ فيجب أن يكون $T(v) = \lambda v$ أي :

$$\lambda x = x - 2y \quad , \quad \lambda y = -x + y$$

ومنه نحصل على المعادلتين :

$$(*) \qquad \begin{cases} (\lambda - 1)x + 2y = 0 \\ x + (\lambda - 1)y = 0 \end{cases}$$

وبما أن $v = (x, y) \neq 0$ فإنه يجب أن يكون معين الأمثال في مجموعة المعادلتين السابقتين صفراً أي :

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 2 = 0$$

ومنه :

$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{2} \quad , \quad \lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$$

إذا عوضنا $\lambda = \lambda_1$ في المعادلتين (*) فنجد الفراغ الذاتي :

$$V_1 = \{ (x , y) \in R^2 \quad : \quad x + \sqrt{2}\, y = 0 \}$$

الموافق للقيمة الذاتية λ_1 .

وإذا عوضنا $\lambda = \lambda_2$ في المعادلتين (*) نجد الفراغ الذاتي :

$$V_2 = \{ (x , y) \in R^2 \quad : \quad x - \sqrt{2}\, y = 0 \}$$

الموافق للقيمة الذاتية λ_2 .

٢١٥ - ليكن V فراغاً شعاعياً على الحقل K عدد أبعاده محدود وليكن T و F تطبيقين خطيين من V الى V نفسه بحيث يكون $F \circ T = T \circ F$. اذا كان v شعاعاً ذاتياً لـ T موافقاً للقيمة الذاتية λ فبرهن أن $F(v)$ شعاع ذاتي لـ T موافق للقيمة الذاتية λ بشرط $F(v) \neq 0$.

الحل : ان فرض v شعاعاً ذاتياً لـ T موافقاً للقيمة الذاتية λ يعني أن :

$$T(v) = \lambda v$$

وبأخذ التطبيق F على الطرفين نجد أن :

$$F(T(v)) = F(\lambda v)$$

$$F \circ T(v) = \lambda F(v) \qquad (\text{F خطي})$$

ومن العلاقة $F \circ T = T \circ F$ نجد أن :

$$T \circ F(v) = T(F(v)) = \lambda F(v)$$

وهذا يعني أن $F(v)$ شعاع ذاتي لـ T مرافق للقيمة الذاتيـــة λ وهو المطلوب .

٢١٦ - ليكن V و W فراغين شعاعيين على الحقل K . وليكن $T : V \longrightarrow W$ تطبيقاً خطياً . اذا كان n , q , p عدد أبعاد V , $\mathrm{Ker}T$ و $T(V)$ على الترتيب فبرهن أن : $n = p + q$.

الحل : ليكن $w_1 , \ldots , w_p$ قاعـــدة في $T(V)$. وليكن $v_1 , \ldots , v_p$ أشعة من V بحيث يكون : $i = 1 , \ldots , p$ و $T(v_i) = w_i$ وليكن $u_1 , \ldots , u_q$ قاعدة في $\mathrm{Ker}\, T$. اذا برهنا أن مجموعة الأشعة $(v_1 \ldots , v_p$ و $u_1 , \ldots , u_q)$ تصلح قاعدة في V فإننا نكون قد برهنا أن $n = p + q$.

في الحقيقة اذا كان v شعاعاً من V فانه يوجد $a_1 , \ldots , a_p \in K$ بحيث يكون :

$$T(v) = a_1 w_1 + \ldots + a_p w_p$$

$$= a_1 T(v_1) + \ldots + a_p T(v_p)$$

$$= T(a_1 v_1 + \ldots + a_p v_p)$$ (T تطبيق خطي)

ومنه :

$$T(v) - T(a_1 v_1 + \ldots + a_p v_p) = 0$$

$$T(v - a_1 v_1 - \ldots - a_p v_p) = 0$$ (T تطبيق خطي)

وبالتـالي فإن $v - (a_1 v_1 + \ldots + a_p v_p)$ ينتمي إلى $\mathrm{Ker}\, T$. إذن يوجد $b_1 , \ldots , b_q \in K$ بحيث يكون :

$$v - (a_1 v_1 + \dots + a_p v_p) = b_1 u_1 + \dots + b_q u_q$$

ومنه :

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_p v_p + b_1 u_1 + \dots + b_q u_q$$

وهـــذا يعني أن كل شعاع v من V يمكن كتابته بعبارة خطيـة بالأشعة $v_1, \dots, v_p\ u_1 \dots, u_q$ ولكي نبرهن أنها قاعدة في V بقي أن نتحقق من كونها مستقلة خطياً . من أجل ذلك لنفرض أن :

$$(*) \qquad a_1 v_1 + \dots + a_p v_p + b_1 u_1 + \dots + b_q u_q = 0$$

فاذا طبقنا T على طرفي هذه العلاقة مع ملاحظة أن :

$T(u_i) = 0, i = 1, \dots, q$ نجد :

$$(**) \qquad a_1 T(v_1) + \dots + a_p T(v_p) = 0$$

ولدينا بالفرض $T(v_1), \dots, T(v_p)$ مستقلة خطيـــاً لذلك فالعلاقة (* *) تفيد بأن $a_1 = \dots = a_p = 0$ وبالتالي تصبح العلاقة (*) بالشكل :

$$(***) \qquad b_1 u_1 + \dots + b_q u_q = 0$$

وبما أن $u_1, \dots, u_q$ مستقلة خطياً لكونها تشكل قاعدة في $\operatorname{Ker} T$ فالعلاقة (* * *) تفيـــد بأن $b_1 = \dots b_q = 0$. إذن العلاقـة (*) تؤدي الى كون $a_1 = \dots = a_p = b_1 = \dots = b_q = 0$ وبالتـالي فانـ الأشعة $v_1, \dots, v_p, u_1, \dots, u_q$ مستقلة خطياً وهو المطلوب .

ملاحظة : يفيد الحل السابق بأن الفراغ الشعاعي V قد جزىء الى فراغين جزئيين . الأول U يتولد بالأشعة $v_1, \dots, v_p$ والثاني $\operatorname{Ker} T$

يتولد بالأشعة $u_q , \dots , u_1$. وأن كل شعاع من V يمكن كتابته كمجموع شعاعين الأول من U والثاني من Ker T . نقول في هذه الحالة أن V هو المجموع المباشر لـ U , Ker T ونكتب ذلك بالشكل $V = U \dotplus \text{Ker } T$ لاحظ أن $U \cap \text{Ker } T = \{0\}$ دوماً .

٢١٧ - ليكن $T : V \to W$ تطبيقاً خطياً نواته $\text{Ker } T = \{0\}$. إذا كان عدد أبعاد V يساوي عدد أبعاد W فبرهن أن $T(V) = W$.

الحل : إن T(V) هو فراغ جزئي من W . وبما $\text{Ker } T = \{0\}$ فان عدد أبعاد T(V) يساوي حسب التمرين ٢١٦ ، عدد أبعاد V وبالتالي يساوي عدد أبعاد W وهذا يعني أن T(V) هو الفراغ W نفسه .

٢١٨ - ليكن V فراغاً شعاعياً على الحقل K وليكن $T : V \to V$ تطبيقاً خطياً محققاً للعلاقة $T^2 = T \circ T = T$. إذا كان $T(V) = U$ و $\text{Ker } T = W$ فبرهن أن $V = U \dotplus W$.

الحل : يمكن برهان المطلوب باتباع الطريقة التي برهن فيها التمرين ٢١٦ ونترك ذلك للقارىء . وسنتبع الطريقة التالية : يمكن أن نكتب أي شعاع $a \neq 0$ من V بالشكل : $a = a - T(a) + T(a)$. إن القسم $a - T(a)$ ينتمي الى W وذلك لأن :

$$T(a - T(a)) = T(a) - T \circ T(a) = T(a) - T(a) = 0$$

وذلك لأن $T(a) \in V$.

أما القسم $T(a)$ فهو ينتمي الى U . وليتم المطلوب يجب أن نثبت أن الصفر هو الشعاع الوحيد المشترك بين U و W . من أجل هذا

نفرض أن $u \neq 0$ ينتمي الى $W \cap U$. إذا كان $u \in U$ فانه يوجد عنصر a من V من الشكل $T(a) = u$ وإذا كان $u \in W$ فإن $T(u) = 0$ ومنه :

$$T \circ T(a) = T(u) = 0$$

وحسب الفرض :

$$T \circ T(a) = T(a) = u = 0$$

وهذا مخالف للفرض أي $W \cap U = \{0\}$ وبالتالي فان $V = U \dotplus W$.

٢١٩ - ليكن $F, T : V \to V$ تطبيقين خطيين محققين العلاقات التاليــة :

آ - $F + T = I$ (التطبيق المطابق) .

ب - $F \circ T = T \circ F = 0$ (التطبيق المعدوم)

برهن أن : $\mathrm{Ker}\, T = F(V)$ و $\mathrm{Ker}\, F = T(V)$

الحل : للبرهـان على أن $\mathrm{Ker}\, T = F(V)$ يجب أن نـــبرهن أن $F(V) \subseteq \mathrm{Ker}\, T$ و $\mathrm{Ker}\, T \subseteq F(V)$. إذا كان $u \in F(V)$ فإنه يوجد a من V يحقق العلاقة $F(a) = u$. باستخدام العلاقة ب نجد :

$$T \circ F(a) = T(u) = 0$$

أي أن $u \in \mathrm{Ker}\, T$ وبالتالي فإن : $F(V) \subseteq \mathrm{Ker}\, T$

لنفرض الان أن $u \in \mathrm{Ker}\, T$ ينتج عن ذلك أن : $T(u) = 0$ وباستخدام العلاقة (آ) نجد أن :

$$I(u) = u = F(u) + T(u) = F(u)$$

أي أن $u \in F(V)$ وبالتالي فان $Ker\ T \subseteq F(V)$ وبذلك نكون قد برهنا أن $Ker\ T = F(V)$. وبصورة مشابهة تبرهن العلاقة $Ker\ F = T(V)$.

٢٢٠ - إذا كان التطبيق الخطي $P : V \rightarrow V$ محققاً للعلاقة :

$$(P^2 = P \circ P) \ , \ P^2 - P + I = 0$$

فبرهن أن التطبيق المعاكس P^{-1} موجود ويساوي $I - P$.

الحل : لاثبات أن P^{-1} موجود علينا أن نثبت أن P متباين وغامر أي منتظم . في الحقيقة :

$$a_1 , a_2 \in V : a_1 \neq a_2 \Rightarrow P(a_1) \neq P(a_2)$$

لأن :

$$P(a_1) = P(a_2) \Rightarrow P^2 (a_1) = P^2 (a_2)$$

ومنه :

$$(P^2 - P)(a_1) = (P^2 - P) (a_2)$$

أو :

$$(P^2 - P) (a_1 - a_2) = 0$$

وبما أن $a_1 - a_2 \neq 0$ لأنه شعاع ما من V فان العلاقة الأخيرة تؤدي الى أن $P^2 - P = 0$ التطبيق المعـــدوم وهـــذا يخالف الفرض حيث : $P^2 - P = - I$. ولـكي نبرهن على أنه غامر يجب أن نبرهن :

$$\forall a \in V \ , \ \exists u \in V : P (u) = a$$

مهما كان a من V فان : $\quad a = I (a)$

(حسب الفرض) $\quad = (P - P^2) (a)$

$$= P \circ (I - P)(a)$$
$$= P(u)$$

حيث رمزنا بـ $u = (I - P)(a)$.

ونكون بذلك قد برهنا أن كل شعاع a من V خيال لشعاع u من V أي أن التطبيق المفروض غامر وقـد برهنا سابقاً أنه متباين فهو قابل للعكس أي P^{-1} موجود .

ينتج من الفرض :

$$I = P - P^2 = P \circ (I - P)$$

وكذلك :

$$(I - P) \circ P = P - P^2 = I$$

وتفيد هـــذه العلاقات بأن التطبيق $I - P$ هو التطبيق ، P^{-1} ، المعاكس للتطبيق P .

٢٢١ - ليكن التطبيقان الخطيان $A , B : V \to V$. برهن أن $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} B = 0$ تودي إلى : $\operatorname{Ker}(B \circ A) = 0$

الحل : لنفرض b شعاعاًمنتمياً الى $\operatorname{Ker}(B \circ A)$ فنجد $(B \circ A)(b) = 0$ ولكن $(B \circ A)(b) = B(A(b)) = 0$ وهذايعنيأن $A(b)$ ينتمي الى $\operatorname{Ker} B$ ويكونبحسب الفرض $A(b) = 0$. وتفيد هذه العلاقة بدورها أن b ينتمي الى $\operatorname{Ker} A$ ويكون بحسب الفرض $b = 0$ إذن $\operatorname{Ker}(B \circ A) = 0$ وهو المطلوب .

٢٢٢ - ليكن V فراغاً شعاعياً معرفاً على الحقل K عدد أبعاده يساوي n . ليكن V^* الفراغ الشعاعي الثنوي أي $V^* = \operatorname{Hom}(V , K)$

برهن أن عدد أبعاد V^* هو أيضاً n .

الحل : ليكن $(e_1, \ldots, e_n)$ قاعدة في V . إن النظرية [١٠ - ٦] تفيد بأن أي تطبيق خطي من V الى K يتعين بمعرفة خيال أشعة قاعدة في V وفق هذا التطبيق . لنعرف التطبيقات الخطية $f_1, \ldots, f_n$ من V الى K بالعلاقات :

$$f_i(e_j) = \delta_{ij} = 1 \quad , i = j$$
$$= 0 \quad , i \neq j$$

إذا برهنا أن $f_1, \ldots, f_n$ تشكل قاعدة في V^* فنكون بذلك قد برهنا أن عدد أبعاد V^* هو n ، عدد أشعة القاعدة ، من أجل ذلك يجب أن نبرهن أولاً أن $f_1, \ldots, f_n$ مستقلة خطياً أي أن :

$$a_1 f_1 + \ldots + a_n f_n = 0 \Rightarrow a_1 = \ldots = a_n = 0$$

وهذا ينتج بأخذ قيمة التطبيق $a_1 f_1 + \ldots + a_n f_n$ من أجل e_j مع تغيير j من 1 الى n .

$$(a_1 f_1 + \ldots + a_n f_n)(e_j) = 0(e_l) = 0$$

ولكن استناداً الى تعريف f_i

$$(a_1 f_1 + \ldots + a_n f_n) e_j = a_l f_l(e_j)$$

ويكون :

$$a_j f_j(e_j) = a_j = 0$$

وذلك من أجل $j = 1, 2, \ldots, n$ وهـــذا ما يبرهن على أن f_i مستقلة خطياً .

بقي علينا أن نبرهن أن $f_1, \ldots, f_n$ تولد الفراغ الشعاعي V^* أي أن كل عنصر F من V^* يمكن كتابته بعبارة خطية في $f_1, \ldots, f_n$.

أقول أنه إذا كان $F(e_i) = b_i$ فان $F = b_1 f_1 + \ldots + b_n f_n$

وذلك لأن قيمة التطبيق في الطرف الأيسر من أجل e_i هي $(b_1 f_1 + \ldots + b_n f_n)(e_i) = b_i$ وهي نفسها قيمة F من أجل e_i و i تتغير من 1 الى n . أي أن قيمة التطبيقين متساوية من أجل جميع أشعة القاعدة $e_1, \ldots, e_n$ وبالتالي من أجل جميع عناصر الفراغ الشعاعي V (لماذا ؟) . وبالتالي فهما متساويان . بهذا نكون قد برهنا أن $f_1, \ldots, f_n$ تشكل قاعدة في V^* وبالتالي فعدد أبعاد V^* يساوي n .

ملاحظة : يطلق عادة على القاعدة $f_1, \ldots, f_n$ في V^* والمعرفة في التمرين السابق إسم القاعدة الثنوية للقاعدة $e_1, \ldots, e_n$ في V . وكثيراً من الأحيان يرمز لهذه القاعدة الثنوية برمز قاعدة V نفسها ويوضع فوقها نجمة « $e_1^*, \ldots, e_n^*$ » .

٢٢٣ - ليكن V فراغاً شعاعياً عدد أبعاده n محدود معرفاً على الحقل K . وليكن V^* الفراغ الشعاعي الثنوي لـ V . برهن أنه يوجد تطبيق خطي منتظم من V الى V^* .

الحل : لنأخذ $e_1, \ldots, e_n$ قاعدة في الفراغ الشعاعي V . ليكن $f_1, \ldots, f_n$ القاعدة الثنوية للقاعدة المفروضة أي أن :

$$f_i(e_j) = \delta_{ij} \quad , \quad i, j = 1, \ldots, n$$

إن التطبيق $T : V \to V^*$ المعطى بالعلاقة :

$$T(e_i) = f_i$$

هو : ١ ـ تطبيق خطي (نظرية [١٠ ـ ٦]) .

٢ ـ تطبيق متباين (لماذا ؟) .

٣ ـ تطبيق غامر (ينتج من أن لـ V , V^* نفس العدد من الأبعاد) .

وبالتالي فان T تطبيق خطي منتظم .

٢٢٤ ـ ليكن V و W فراغين شعاعيين على الحقل K . إذا كان $T : V \to W$ تطبيقاً خطياً فبرهن ان التطبيق $T^* : W^* \to V^*$ المعطى بالعلاقة :

$$\text{(I)} \qquad \forall g \in W^* \quad , \quad T^*(g) = g \circ T$$

خطي (نسمي T^* منقول « مرافق » التطبيق الخطي T) .

الحل : ان الشعاع g من W^* ليس إلا تطبيقاً خطياً من W الى K . وبما أن مركب تطبيقين خطيين هو تطبيق خطي فان $g \circ T$ هو تطبيق خطي من V إلى K فهو عنصر من V^* . اذن العلاقة (I) تعرف تطبيقاً T^* من W^* إلى V^* . نجد أن :

$$\forall f , g \in W^* \quad , \quad T^*(g+f) = (g+f) \circ T$$

$$= g \circ T + f \circ T$$

(عملية تركيب التطبيقات توزيعية بالنسبة للجمع)

$$= T^*(g) + T^*(f)$$

ونجد أيضاً :

$$\forall \lambda \in K \quad , \quad T^*(\lambda g) = (\lambda g) \circ T$$
$$= \lambda (g \circ T) = \lambda T^*(g)$$

وبذلك نكون قد أثبتنا أن T^* تطبيق خطي .

تمارين غير محلولة

٢٢٥ – ليكن V فراغاً شعاعياً على الحقل K . برهن أن التطبيق $T : V \to V$ المعطى بالعلاقة :

$$\forall v \in V \ , \ T(v) = -v$$

هو تطبيق خطي .

٢٢٦ – ليكن A شعاعاً مفروضاً من الفراغ الشعاعي V على الحقل K . ليكن التطبيق $F : V \to V$ المعطى بالعلاقة :

$$\forall v \in V \ , \ F(v) = v + A$$

بين فيما إذا كان F خطياً أم لا ؟

٢٢٧ – إذا كان A شعاعاً مفروضاً من الفراغ الشعاعي R^3 . برهن أن التطبيق $T : R^3 \to R^3$ المعطى بالعلاقة :

$$\forall v \in V \ , \ T(v) = v \wedge A$$

حيث $\wedge$ تشير إلى الجداء الخارجي للشعاعين ، هو تطبيق خطي .

٢٢٨ – ليكن V الفراغ الشعاعي المتشكل من مجموعة التوابع الحقيقية القابلة للاشتقاق من أية رتبة . ليكن التطبيق $D : V \to V$ المعرف بعملية الاشتقاق . برهن ان التطبيق $D^2 = D \circ D$ خطي . أوجد نواة التطبيق D^2 ورتبته .

٢٢٩ – ليكن V و D كما في [التمرين ٢٢٨] . إذا كان I

التطبيق المطابق على V فبرهن أنه إذا كان $a \in R$ ، فإن $T = D - a\,I$ مؤثر خطي على V . أوجد نواة T .

٢٣٠ - برهن أن التناظر بالنسبة لمحور مار من مبدأ الاحداثيات في مستو هو تطبيق خطي لنقاط المستوي في المستوي نفسه .

٢٣١ - ليكن T تطبيقاً خطياً من R^2 الى R^2 معطى بالعلاقتين :

$$x' = a\,x + b\,y \quad , \quad y' = c\,x + d\,y$$

حيث $v' = (x', y')$ خيال $v = (x, y)$ وفق T و d, c, b, a ثوابت من R . ناقش وجود أشعة ذاتية للتطبيق T .

٢٣٢ ليكن $T : V \to W$ تطبيقاً خطياً وليكن عدد أبعاد V يساوي عدد أبعاد W . إذا كان $\mathrm{Ker}\, T = \{0\}$ فبرهن أن T تطبيق منتظم .

٢٣٣ - ليكن W, V فراغين شعاعيين على الحقل K . وليكن عدد أبعاد V أصغر من عدد أبعاد W . برهن أن أي تطبيق خطي $T : V \to W$ لا يمكن أن يكون غامراً .

٢٣٤ - ليكن $T : V \to V \times V$ تطبيقاً معرفاً بالعلاقة :

$$\forall v \in V \quad : \quad T(v) = (v, v)$$

برهن أن T تطبيق خطي .

٢٣٥- ليكن W, H فراغين شعاعين جزئيين من الفراغ الشعاعي V . ليكن $T : H \times W \to V$ التطبيق المعرفْ بالعلاقة :

$$\forall u \in H \, , \, \forall w \in W \quad : \quad T(u, w) = u - w$$

برهن أن T تطبيق خطي . وبرهن أن صورة T هو $H \cup W$ ونواته هي $H \cap W$.

٢٣٦ - ليكن $F , T : V \to V$ تطبيقين خطيين محققين العلاقات التاليـــة :

١ - (I التطبيق المطابق) $\quad F + T = I$

٢ - (O التطبيق المعدوم) $\quad F o T = F o T = O$

٣ - $\quad F o F = F \ , \ T o T = T$

برهن أن $V = F(V) \dotplus T(V)$ (جمع مباشر) .

٢٣٧ - ليكن T تطبيقاً خطياً منتظماً من V الى U و F تطبيقاً خطياً منتظماً من U الى W . برهن أن $F o T$ تطبيق خطي منتظم من U الى W وأن $(F o T)^{-1} = T^{-1} o F^{-1}$.

٢٣٨ - ليكن التطبيقان الخطيان $B : U \to W \ , \ A : V \to U$.

إذا كان $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} B = 0$ فبرهن أن $\operatorname{Ker}(B o A) = 0$ (تعميم للتمرين المحلول [٢٢١]) .

٢٣٩ - ليكن V فراغ كثيرات الحدود من الدرجـة n (أي $f(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$) برهن أن التطبيـــق $T : V \to V$ المعطى بالعلاقة :

$$\forall f(t) \in V \quad : \quad T(f(t)) = \frac{1}{t} \int_0^t f(x)\, dx$$

هو تطبق خطي (مؤثر خطي) . وإذا كان **D** المؤثر التفاضلي على V فبرهن أن $D \circ T = T \circ D$.

٢٤٠ - إذا كان $n \neq m$ فبرهن أنه لا يمكن إيجاد تطبيق خطي منتظم من R^n على R^m .

٢٤١ - ليكن V^* الفراغ الشعاعي الثنوي للفراغ الشعاعي V . لتكن S مجموعة جزئية من V . ولتكن U المجموعة الجزئية من V^* المعرفة بالعلاقة :

$$U = \{ f \in V^* \ : \ f(v) = 0 \ , \ \forall v \in S \}$$

برهن : ١ - أن U فراغ شعاعي جزئي من V^* (يطلق عليه الفراغ الجزئي المتعامد مع S) .

٢ - عدد أبعاد V = عدد أبعاد S + عدد أبعاد U .

٢٤٢ - ليكن V^* الفراغ الشعاعي الثنوي للفراغ V وليكن $(V^*)^*$ الفراغ الشعاعي الثنوي للفراغ V^* . برهن أن التطبيق $T : V \to (V^*)^*$ المعطى بالعلاقة :

$$\forall v \in V \ , \ f \in V^* \quad , \quad (T(v))(f) = f(v)$$

هو تطبيق خطي منتظم .

[لاحظ أن $T(v)$ هو عنصر من $(V^*)^*$ وبالتالي فهو تطبيق خطي من V^* إلى الحقل K ، فالعبارة $(T(v)) (f)$ إذن ذات معنى وتمثل عنصراً من K يساوي بالتعريف $f(v)$] .

٢٤٣ - ليكن T تطبيقاً خطياً من V الى W وليكن F تطبيقاً

خطياً من W الى V . بفرض أن عدد أبعاد V أكبر من عدد أبعاد W برهن أن مرتبة التطبيق $F \circ T$ أصغر من عدد أبعاد V .

٢٤٤ - ليكن T مؤثراً خطياً على R^2 بحيث $T \neq O$ (لايساوي التطبيق المعدوم) و $T^2 = O$ (O التطبيق المعدوم) . برهن أنه يوجد قاعدة (v_1 , v_2) في R^2 من الشكل :

$$T(v_1) = v_2 \quad , \quad T(v_2) = 0$$

٢٤٥ - ليكن T و F مؤثرين خطيين على R^3 ومعرفين بالعلاقتين :

$$F(x, y, z) = (x - y , z + y , x)$$

$$T(x, y, z) = (y , -x , -z)$$

حيث (x , y , z) تمثل عناصر شعاع ما من R^3 . والمطلوب إيجاد :

١ ـ العناصر $F(1, 0, 2)$ و $T(-1, 1, 0)$.

٢ ـ التطبيقات T^2 , $F \circ T$ و F^2 , $T \circ F$ و $2T - 3F$ ومن ثم تعين رتبة وعدد أبعاد ونواة كل من هذه التطبيقات الخطية .

٢٤٦ - ليكن T مؤثراً خطياً على R^2 ومحققاً للعلاقات :

$T^2 = T$ ، $T \neq I$ (I التطبيق المطابق) ، $T \neq O$ (O التطبيق المعدوم)

برهن أنه يوجد قاعدة (v_1 , v_2) في R^2 من الشكل :

$$T(v_1) = v_1 \quad , \quad T(v_2) = 0$$

٢٤٧ - ليكن $T : V \to U$ و $F : U \to W$ تطبيقين خطيين .

اذا كان T^* , F^* منقولي T , F على الترتيب فبرهن أن $(F \circ T)^* = T^* \circ F^*$.

٢٤٨ - ليكن V^* , W^* الفراغين الشعاعيين الثنويين لـ V , W على الترتيب . ليكن التطبيق :

$$P : \mathrm{Hom}(V , W) \rightarrow \mathrm{Hom}(V^* , W^*)$$

المعطى بالعلاقة :

$$P(T) = T^*$$

حيث T عنصر ما من $\mathrm{Hom}(V , W)$ و T^* منقول هذا التطبيق .
برهن أن P تطبيق خطي .