الفصل الثامن

التحسين القوي

إدارة المخاطرة من خلال التلاعب

روجر ريليي المدير التنفيذي لشركة سيفتي فرست، يريد زيادة شعبية شركته. هنا يظهر الغموض في الجانب المتعلق بالطلب على مختلف منتجات الأمان، بينما يرجع الغموض المتعلق بأحجام التصنيع إلى الفحص الصارم لكل خطوط الإنتاج. في بعض الأحيان يتم رفض أكثر من 10٪ من الإنتاج الأسبوعي بسبب الجودة. يتبع روجر منهج غير تقليدي لإدارة المخاطر بالعمل مع ويدني موريس التي تعمل كمدير إدارة المخاطر، يتمثل الدور الذي تلعبه ويدني في تخيل السيناريوهات المحتملة من حيث الطلب وعائد التصنيع. الأمر ليس سهل بالشكل الذي يبدو عليه، حيث أن قرارات التصنيع قد تكون خاطئة في كلا الاتجاهين:فزيادة تصنيع أحد المنتجات التي لا تحقق مبيعات جيدة قد يؤدي إلى فائض، وتقليل تصنيع أحد المنتجات التي تحقق مبيعات جيدة يعني زيادة طلبات التصنيع واللجوء إلى ورديات إضافية بتكلفة أعلى ما قد يؤدي أيضاً إلى خسارة للشركة.

روجر عادة ما يمتلك وجهة نظر متشائمة ويرى أن عملية إدارة المخاطر عبارة عن لعبة بينه وبين ويدني. سيصل إلى خطة إنتاج، ثم يصل ويدني إلى لعب دوراً ما من "قانون مورفي" لخلق مجموعة من سيناريوهات الإنتاج التي اختارها روجر. بعد ذلك، يستخدم روجر وويدني جدول بيانات بسيط خاص بالخطة للتوصل إلى كم الأرباح (أو الخسائر) المتوقع في أسوأ السيناريوهات. ثم تأتي الخطوة الأخيرة بالنسبة لروجر وهي تعديل كميات التصنيع في محاولة لتحسين الأداء العام للشركة، لكن مع كل مجموعة جديدة من قرارات التصنيع التي تقوم ويدني بإعادة تصميمها في أسوأ السيناريوهات المحتملة. في الغالب، سيقوم روجر وويدني بعمل أربعة أو خمسة إعدادات قبل أن يقرر روجر أنه ليس بحاجة إلى تجربة المزيد من الاختلافات.

يجب على روجر وويدني الموافقة المشتركة على نطاق الأرقام الذي سيتم الاختيار منه إلى جانب الموافقة على تقديرات التكاليف المطلوبة في جدول البيانات الخاص بالخطة قبل إقرار الخطة. الآن هما يمتلكان الإجراءات التي سيتم اتباعها ويستمتعون بالتحدي الذي يواجههم أثناء اللعب. تقول ويدني أنها تستدعي الموهبة الماكرة لديها ، في حين أن روجر مقتنع أنه توصل إلى خطط إنتاج قوية: "هذه الخطط الإنتاجية قد تبدو محافظة جداً، لكنني أعلم أن بعد محاولات ويدني بتفنيدها لن يتم إلقاءها بسبب مجموعة من بيانات الطلب والتصنيع غير المتوقعة – وذلك يمثل الكثير بالنسبة لي".

8-1 غموض حقيقي: خلف الاحتمالات

الآن الوقت مناسب للنظر مرة أخرى في إحدى الموضوعات التي قمنا بعرضها سريعاً في الفصول السابقة، حيث ناقشنا فكرة الاحتمالات فيما يتعلق بالمخاطرة كأمر مفروغ منه. وجدير بالذكر أن المخاطر التي ناقشناها من قبل تتعلق بالخسائر التي يمكن أن نتكبدها أو الاحتمالات المتعلقة بذلك. في بعض الأحيان يمكننا الثقة في الاحتمالات ("ما احتمالية ظهور ورقة الآس عندما نختار بشكل عشوائي بين مجموعة كاملة من أوراق اللعب؟"). وفي بعض الأحيان يتم استنتاج الاحتمالات من النظر إلى تكرار حدوث شيء ما في الماضي ("ما احتمالية أن يتم اختيار شخص أشول في مدينة نيويورك عشوائياً؟") وفي أحيان أخرى نصل إلى حكم

قائم على التجربة الشخصية، ربما نستجمع ما تعلمناه في بيئات مختلفة ("ما احتمالية أن يرتفع سعر الذهب خلال العامين المقبلين؟").

أحد كبار المتهكمين في القرن العشرين، فرانك نايت، يحذرنا من الخروج برقم محدد عند النظر إلى احتمالية وقوع حدث في المستقبل. عمل نايت بالتدريس في شيكاغو منذ عام 1928 حتى وفاته في عام 1972 عن عمر 87 عام. لكن الفكرة الأكثر تأثيراً طرحها في رسالة الدكتوراة عام 1916، حيث ناقش نايت وجود نوع من الغموض غير قابل للقياس من خلال الاحتمالات:

> "يجب تحديد الغموض بحس مختلف جذرياً عن المفهوم التقليدي للمخاطرة وإن كان غير منفصل عنه .... الحقيقة أن "المخاطرة" تعني في بعض الحالات كمية يمكن قياسها، لكنها في أحيان أخرى تعتبر شيء لا يحمل هذه الخاصية، وهناك فوارق مهمة وبعيدة المدى في التعامل مع ظاهرة تعتمد على واحدة من حقيقتين كلاهما حقيقي."

على جانب آخر، قدم لورد كيلفن تعليق مشهور عن أهمية القياس قائلاً إذا كنت لا تستطيع قياس شيء ما إذن فالسبب هو "نقص معلوماتك وضعف قابلية القياس"، اعتقد كيلفن أن علماء الاقتصاد وغيرهم من علماء الاجتماع فسروا تصريح كيلفن كالتالي " إذا لم تستطع القياس على اية حال". شعر كيلفن بالغضب تجاه من يحاولون تحويل علم الاقتصاد غلى علم مبني على السلوك العقلي مثل الفيزياء.

يرى نايت أن الحياة مليئة بأمثلة لمحاولات الوصول إلى أحكام فردية عن الأحداث المستقبلية، وغالباً قد يصل الفرد إلى درجة محددة من الثقة حول حكمه، ولا يمكن الحكم على احتمالية ما بأنها صحيحة إذا كانت "دون معنى ومضللة".

أكد مينارد كينيس في كتابته عام 1937 على الفارق بين ما يمكن حسابه كاحتمالية وعدم اليقين المحيط بشيء ما مثل تقادم اخترع جديد. "فيما يتعلق بهذه المساءل لا يوجد أساس علمي يتم على أساسه حساب احتمالية، ببساطة نحن لا نعلم. وجدير بالذكر أن

الحاجة لاتخاذ إجراء أو قرار يجبرنا كممارسين على بذل قصارى جهدنا لتجاهل هذه الحقيقة الخاطئة..."

وفي مواجهة ضرورة اتخاذ قرارات عند وجود غموض، هناك منهجين واسعي النطاق: المنهج الأول يتمثل في الدفع القوي لتقييم واحد على الأقل للاحتمالات حتى وإن كان يخضع لشروط نظرية نايت عن الغموض حيث نشعر بعدم الارتياح لإثبات ذلك. تتمثل الفكرة في النقطة التي يختار فيها صانع القرار بين عدد متنوع من الخيارات المحتملة، من ثم فإن القرار المتخذ سيتضمن عدد من القيم للاحتمالات المفقودة. من الناحية المنطقية، يُفضل ترجمة الغموض إلى احتمالية قائمة على الخبرة الشخصية ما يغذي القرار الذي يجب اتخاذه، بدلاً من ظهوره كقرار فرعي. وبالنظر للأمر من هذه الزاوية، يتحول الأمر إلى البحث في أعماق الفرد وربما اعتقاداته غير الواعية فيما يتعلق بالاحتمالات المختلفة. تم بذل جهد كبير لإيجاد أفضل طريقة لاستنباط اعتقادات صناع القرار بشأن قيم النتائج المختلفة واحتمالات هذه النتائج.

المنهج الثاني يتمثل في البحث عن مقدار الضرر الناتج عن قرار خاطئ بدلاً من التعظيم الكامل لدالة الهدف؛ هذه هي الفكرة التي تكمن خلف التحسين القوي؛ الموضوع الذي سوف نناقشه في هذا الفصل. أحد الدوافع يتمثل في الميل إلى المبالغة في تقدير قناعاتنا، لكن منهج التعظيم القوي سيجنبنا حدوث ذلك.

يقتبس برنشتاين من جي كي تشيسترتون الذي قال عن الحياة "تبدو بشكل حسابي ومنتظم أكثر مما هي عليه، دقتها ظاهرة، لكن عدم الدقة غير ظاهر، ويكمن طابعها البرئ في الانتظار". من خلال التحسين القوي نحاول التعامل مع الطابع البري للحياة.

2-8 تجنب الكارثة عند وجود الغموض

القرار القوي هو الذي يضمن عدم كارثية النتيجة، فمعظم جوانب المسألة غامضة وهناك على الأقل احتمالية للخروج بنتيجة سيئة؛ من ثم يجب علينا محو أو تقليل هذه الاحتمالية. الجدير بالذكر أن النتائج السالبة تعزز أهمية المعرفة بنطاق القيم التي من الممكن أن

تكون الكمية الغامضة من بينها، وذلك النطاق سيحل محل بيانات أكثر دقة عن الاحتمالات.

في أحيان كثيرة نتعامل مع متغيرات الغموض المتعدد، ومن ثم نحتاج إلى اتخاذ قرار ما إذا كان من المفترض تحديد نطاقات لكل متغير على نحو مستقل أو النظر في مجموعة القيم المحددة للنطاق.

المسألة الأولى التي سنتناولها تتمثل في محاولة صانع القرار لتعظيم الهدف الذي يخضع لمجموعة من الشروط، لكن معاملات الشروط غير معلومة. في هذه الحالة، تكون النتيجة السالبة (التي نحاول تجنبها) واحدة من الشروط المنتهكة، ويوضح المثال التالي هذا النوع من المساءل.

مثال 8-1: خطة إنتاج MRB في ظل وجود غموض

نفترض أن MRB المحدودة شركة تصنيع تحتاج إلى تلبية الطلب بإنتاج 10000 وحدة من المنتج A وتمتلك مصنعين يمكن استخدامهم في ذلك، لكن هناك متغيبات في التكاليف وعناصر الكفاءة. يتحمل المصنع 1 تكاليف عمالة 30 دولار في الساعة، بينما يتحمل المصنع 2 تكاليف عمالة 26 دولار في الساعة. تستطيع الميكنة في المصنع 1 إنتاج 130 وحدة من المنتج A في الساعة، بينما يستطيع المصنع 2 إنتاج 110 وحدة في نفس المدة الزمنية. يمكننا صياغة قرار شركة MRB على هيئة مسألة تعظيم لتقليل التكاليف المتعلقة بتلبية الطلب. إذا كان x1 وx2 يمثلان الساعات المستغرقة في مصنع 1 ومصنع 2 على التوالي، إذن فنحن نريد

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & 30x_1 + 26x_2 \\ \text{subject to} \quad & 130x_1 + 110x_2 \geq 10\,000 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

لكن إذا أردنا عمل جدول مقدماً، من ثم فإننا قادرون على تلبية الطلب، وبالتالي ربما نريد مزيد من الأمان. ما مدى الثقة في أن يتطابق معدل الإنتاج مع التوقعات؟ فمن الممكن أن تتعطل الميكنة أو يتغير العاملين أو عدد الوحدات المنتجة ربما لا يظل 130

و110. من ثم، فالأفضل حل المسألة حيث يكون الشرط.

$$(130 - \Delta_1)x_1 + (110 - \Delta_2)x_2 \geq 10\,000$$

كافياً لبعض القيم التي يتم اختيارها لـ Δ_1 وΔ_2.

يمكننا أيضاً تخيل نسخ من نفس المسألة أكثر تعقيداً. على سبيل المثال، نفترض أن MRP بحاجة إلى تلبية طلب 5000 وحدة من المنتج B، بينما يبلغ معدل إنتاج مصنع 1 ومصنع 2 من هذا المنتج 90 وحدة و80 وحدة في الساعة على الترتيب.إضافة إلى ذلك، هناك شرط متعلق بالوقت المتاح، فكل مصنع من الإثنينلديه 90 ساعة قبل تاريخ تسليم الطلب. إذن بكتابة y_1 وy_2 للرمز إلى الساعات المستغرقة في إنتاج المنتج B في المصنعين، تصبح مسألة تقليل التكاليف كالتالي:

$$\begin{array}{ll}
\text{minimize} & 30(x_1 + y_1) + 26(x_2 + y_2) \\[1em]
\text{subject to} & (130 - \Delta_1)x_1 + (110 - \Delta_2)x_2 \geq 10\,000 \\
& (90 - \Delta_3)y_1 + (80 - \Delta_4)y_2 \geq 5000 \\
& x_1 + y_1 \leq 90 \\
& x_2 + y_2 \leq 90 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0.
\end{array}$$

الآن لدينا أربعة من عناصر الأمان $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ للاختيار من بينهم. إضافة إلى ذلك، ماذا لو كان هناك اتصال بين معدلات إنتاج كلا المنتجين في مصنع 1؟ ربما تصبح الأشياء أكثر تعقيداً وقد يصبح رسمها بالتفصيل سهلاً.

وبدلاً من الدخول سريعاً في التفاصيل، سنعود خطوة إلى الخلف، حيث نهدف إلى تعظيم هدف يخضع لمجموعة من الشروط لكل من القيم الحقيقية للمعاملات محتملة الحدوث. مجموعة قيم المعاملات المحتملة بالغة الأهمية، ونفترض أنه يمكننا تحديد هذه المجموعة في الوقت الراهن. فالتكوين المسألة العام (برمجة خطية قوية) مع إثنين من المتغيرات وإثنين من الشروط كالتالي

$$
\begin{aligned}
RLP: \quad & \text{maximize} \quad c_1x_1 + c_2x_2 \\
& \text{subject to} \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \text{ for all } (a_{11}, a_{12}) \text{ in } A_1 \\
& \qquad\qquad\quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \text{ for all } (a_{21}, a_{22}) \text{ in } A_2 \\
& \qquad\qquad\quad x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,
\end{aligned}
$$

وقد يمتد ذلك إلى أي عدد من المتغيرات والشروط. لاحظ أن خيار عمل مسألة تعظيم باستخدام الشروط "≤" اعتباطي إلى حد ما – يمكننا تحويل مسألة التعظيم إلى مسألة تقليل بالنظر إلى سالبة الهدف، ويمكن تغيير التباينات المحيطة بالضرب في −1.

نطلق على مجموعة القيم المحتملة للمعاملات في شرط ما "المجموعة غير المعلومة" لهذا الشرط. أول ما نلاحظه أنه يمكننا تحديد المجموعة غير المعلومة بشكل منفصل لكل من الشروط المختلفة. قد نجد بعض العلاقات المعقدة بين القيم a_{11} وa_{12} للشرط الأول والقيم a_{21} وa_{22} للشرط الثاني لنصل إلى مجموعة غير معلومة مكونة من $(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) \in A$، لكن بما أننا في حاجة إلى استيفاء الشروط لكل مجموعة من المعاملات المحتملة، لن تصنع هذه العمليات فارق في نهاية الأمر. يجب أن تفي متغيرات القرار x_1 وx_2 بالشرط الأول لأي قيم محتملة من a_{11} وa_{12} كزوج في المجموعة A، ويجب أيضاً استيفاء الشرك الثاني لأي قيم محتملة من a_{21} وa_{22}. بالتالي، يمكننا تقسيم المجموعة A إلى عناصر منفصلة لكل شرط، كما حدث في صيغة RLP.

طبيعة حل هذه المسألة يتوقف على تركيب المجموعات الغامضة. نفترض أن أحد الشروط يأخذ الشكل التالي

$$a_1x_1 + a_2x_2 \le b \text{ for all } (a_1, a_2) \in A.$$

كل عنصر (a_1, a_2) من المجموعة A ينتج شرط مختلف وكل منهم يتم استيفاءه من خلال (x_1, x_2).

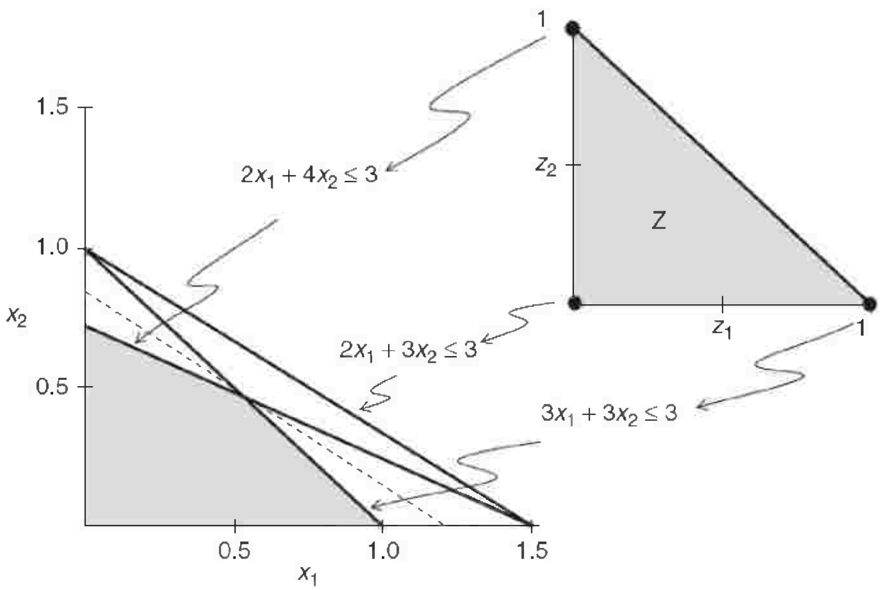
الموقف موضح بالشكل رقم 8-1 الذي يُظهر منطقة الاحتمالات المتعلقة بالشروط

$$(2 + z_1)x_1 + (3 + z_2)x_2 \le 3, \text{ for all } (z_1, z_2) \in Z = \{z_1 \ge 0, z_2 \ge 0, z_1 + z_2 \le 1\}.$$

تشير المجموعة Z هنا إلى مجموعة الانحرافات المحتملة للقيم الأساسية $a_1= 2$ و$a_2= 3$

للوصول إلى مجموعة المعاملات المسموح بها A.

يوضح الشكل أن مجموعة الاحتمالات التي حصلنا عليها من النظر إلى الشروط المولدة من نقطتين الزاوية Z، حيث النقطتين $z_1=0, z_2=1$، وحيث $z_1=1, z_2=0$. ونقطة الزاوية الثالثة عند $z_1=z_2=0$، تعطينا الشرط الأساسي، وهو أعلى من النقاط الأخرى ولا يساهم في تحديد منطقة الاحتمالات. في حين أن كل النقاط الأخرى في Z تولد شروط قد تكون كافية داخل منطقة الاحتمالات (المظللة).



شكل 8-1: منطقة احتمالات الشرط $2x_1 + 3x_2 \leq 3$ تخضع المعاملات إلى الاضطرابات في الزاوية Z.

يمثل الخط المقسم مثال لشرط مولد من نقطة واحدة في الزاوية Z، والحقيقة أنه يمر من خلال النقطة $x_1 = 0.5, x_2 = 0.5$ ما يشير إلى أنها تأتي من نقطة ما على الحد العلوي لـ Z حيث $z_1 + z_2 = 1$.

وتخبرنا زوايا المجموعة غير المعلومة عن كل ما نريد معرفته، إذا كانت المجموعة A

مرتبطة بشرط معين فإنها تكون متعددة المقام مع مجموعة الزوايا K (المعروفة فنياً بأقصى نقاط A)، ومن ثم يمكننا استبدال الشرط الوحيد بنسخ K المعرفة من خلال نقاط الزاوية A، وبالمثل بالنسبة لشرط كل نقاط A.

من ثم، يمكننا أخذ مثال RLP بالأعلى ونستبدل الشرط الأول بمجموعة النسخ المشتقة من نقاط الزاوية A، وعلى نحو مشابه، نستبدل الشرط الثاني بمجموعة النسخ المشتقة من نقاط الزاوية A_2، وهكذا. الأمر الذي يزيد حجم المسألة لكنها تظل محتفظة بنفس التركيب، وفي حالة البرنامج الخطي تظل سهلة الحل.

هكذا، نستقر على مبدأ أن البرامج الخطية مع مجموعات المعاملات غير المعلومة متعددة البسط تظل برامج خطية. لكن لنجعل هذا المنهج أكثر إفادة من الناحية العملية ما يساعدنا على العمل بشكل مباشر مع الشروط التي تعرف المجموعة متعددة البسط في A بدلاً من زوايا A. وعندما تتزايد أبعاد المجموعة A، قد يصبح عدد نقاط الزاوية أكبر قليلاً حتى مع الشروط البسيطة.

بالتالي، لدينا منهج ثاني للتعامل مع نفس المسألة، بداية من الشرط الذي يجب استيفاءه وقتما كانت المعاملات تقع في المجموعة Aالمعرفة بمجموعة التباينات، سنوضح كيف نعيد كتابة الشرط كمجموعة من الشروط الجديدة متضمنة بعض المتغيرات الإضافية ومن ثم تصبح مسألة التعظيم الكاملة معرفة بشكل صحيح. ولكي نصل إلى وصف رسمي لهذا المنهج نحتاج إلى التعبير عن كل شيء من حيث المصفوفات، لكن يمكننا فهم هذه العملية بالنظر في مثال بسيط، وسوف نتناول مثال لمسألة RLP. نفترض أن الشرط الأول $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$ لكل من (a_{11}, a_{12}) في المجموعة A_1 ونفترض أن المجموعةA_1 معرفة بقول أن القيم a_{11} وa_{12} تفي مجموعة الشروط:

$$\begin{gathered}
d_{11}a_{11} + d_{12}a_{12} \leq h_1 \\
d_{21}a_{11} + d_{22}a_{12} \leq h_2 \\
d_{31}a_{11} + d_{32}a_{12} \leq h_3 \\
a_{11} \geq 0,\ a_{12} \geq 0
\end{gathered}$$

قد نتوقع أن المجموعة A_1 متعددة المقام لديها خمسة نقاط زاوية. لكن بدلاً من عمل ذلك، سنعمل مباشرة مع المعاملات d_{ij} التي تظهر في الشروط التي تعرف المجموعة A_1.

يمكننا إعادة صياغة الشرط الأصلي في ثلاثة شروط جديدة:

$$h_1y_1 + h_2y_2 + h_3y_3 \le b_1, \quad (1\text{-}8)$$
$$d_{11}y_1 + d_{21}y_2 + d_{31}y_3 \ge x_1, \quad (2\text{-}8)$$
$$d_{12}y_1 + d_{22}y_2 + d_{32}y_3 \ge x_2. \quad (3\text{-}8)$$

أدخلنا ثلاثة متغيرات جدد y_1, y_2, y_3 (كل واحد من الثلاثة شروط يعرف المجموعة A_1) $y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0$. الشرط الأصلي يتضمن تغيير عناصر المجموعة b1 من كونها المتغيرات الأصلية إلى متغيرات جديدة. أضفنا شرطين جديدين إلى التباينات (8-2) و(8-3)، شرط لكل متغير أصلي x_1 وx_2. كل معاملات d_{ij} تعود للظهور في الشروط الجديدة، لكنها تحولت. أحد المعاملات مثل d_{21} المضروب في a_{21} في الشرط الثاني المعرف A_1، الآن يصبح معامل الضرب للمتغير الثاني الجديد في الشرط المرتبط بـ x_1. ونلاحظ استمرارية في هذا النموذج الذي يجب فحصه لتتفهم أنه يمكنك تطبيقه بشكل مناسب.

بشكل عام، إذا كانت المجموعة غير المعلومة لشرط ما معرفة بشروط m على المعاملات، وهناك معاملات n غير معلومة (بالتماشي مع المتغيرات الأصلية n) إذن فإننا نحتاج إلى متغيرات m جديدة وشروط n+1 لتمثل الشرط الأصلي مع مجموعته غير المعلومة.

تقوم إعادة الصياغة على ثنائية نتيجة البرمجة الخطية التي نناقشها بمزيد من التفصيل في الجزئية التالية. الجدير بالذكر أن تطبيق القواعد بسيط للغاية نظراً لأننا بدأنا بوضع المسألة في صيغة حيث تسير التباينات في اتجاه صحيح وتمتلك المجموعةA كل متغيراتها الموجبة. يمكننا اكتشاف ذلك عملياً من خلال المثال التالي.

مثال 8-2: شرط وجود البروتين في تغذية الماشية

لصياغة خليط غذاء الماشية الذي تستخدمه إحدى الشركات من ثلاثة حبوب مختلفة B, C, D بتكاليف مختلفة، ترغب الشركة في اختيار كميات هذه المكونات w_B, w_C, w_D،

لتقليل التكلفة الإجمالية والتي تخضع لبعض الشروط المتعلقة بالمحتوى الغذائي للخليط. هناك شرط متعلق بمحتوى البروتين في الخليط النهائي يمكن التعبير عنه بالشكل التالي

$$b_{wB} + c_{wC} + d_{wD} \geq 2$$

لكن يختلف محتوى البروتين في كل مكون على حدة، ما يمكن قوله أن كل من b, c, d إيجابي والشروط التالية مستوفاة:

$$b + c \geq 3,\ c + d \geq 4,\ c - (b + d)/2 \leq 1.$$

(ربما يظهر نموذج الترابط المعقد هذا بسبب تنوع الحبوب التي يتم الحصول عليها من نفس المزارعين). كيف يمكن إعادة صياغة شرط البروتين بشكل مناسب؟

الحل

نبدأ بعكس الشرط لنحصل على التباين في الاتجاه القياسي:

$$b(-w_B) + c(-w_C) + d(-w_D) \leq -2$$

هذه الطريقة في كتابة المعادلة تحافظ على موجبة b, c, d. أيضاً نصيغ شروط b, c, d مع التباينات في الاتجاه الصحيح:

$$\begin{aligned} -b - c &\leq -3, \\ -c - d &\leq -4, \\ -(1/2)b + c - (1/2)d &\leq 1. \end{aligned}$$

من ثم لدينا ثلاثة متغيرات جديدة $y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0$ (متغير لكل شرط)، ونحصل على أربعة شروط كالتالي:

$$\begin{aligned} -3y_1 - 4y_2 + y_3 &\leq -2, \\ -y_1 - (1/2)y_3 &\geq -w_B, \\ -y_1 - y_2 + y_3 &\geq -w_C, \\ -y_2 - (1/2)y_3 &\geq -w_D. \end{aligned}$$

نضرب كل شرط من هذه الشروط في -1 لنتخلص من معظم القيم السالبة ونصل إلى

$$\begin{aligned} 3y1 + 4y2 - y3 &\geq 2, \\ y1 + (1/2)y3 &\leq wB, \\ y1 + y2 - y3 &\leq wC, \\ y2 + (1/2)y3 &\leq wD. \end{aligned}$$

8-2-1 مزيد من التفاصيل حول إعادة صياغة الشرط

أدخلنا منهجين مختلفين لنأخذ في الاعتبار مجموعة المعاملات غير المعلومة في الشرط. نريد إضافة مزيد من التفاصيل لكلا المنهجين. نفترض أن الشرط الأصلي كالتالي:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_mx_m \leq b$$

حيث نعلم أن المتجه $(a_1, a_2, \ldots, am)$ في مجموعة A غير المعلومة.

نبدأ بالنظر في كيفية إعادة صياغة هذا المصطلح الخاص بنقط الزاوية A. نفترض أن A لديها نقاط زاوية k، ونجعل $\left(a_1^{(j)}, a_2^{(j)}, \ldots, a_m^{(j)}\right)$ نقاط الزاوية jth حيث أن $j = 1,2, \ldots,$ k. من ثم يمكن الحصول على أي نقطة من $(a_1, a_2, \ldots, a_m) \in A$ من مجموعة الأوزان غير السالبة $w_1, w_2, \ldots, w_k$ مع تطبيق $\sum_{j=1}^{k} w_j = 1$ على الزوايا، و

$a_i = \sum_{j=1}^{k} w_j a_i^{(j)}$ for $i = 1, 2, \ldots, m$ بمعنى آخر، يمكن الحصول على نقاط A كمنحنى (محدب) لنقاط الزاوية.

وبما أن نقطة الاحتمال $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ تفي بالشروط لكل من $(a_1, a_2, \ldots a_m) \in A$، يجب فعل ذلك في زوايا A. نفترض أن كل ذلك ما حصلنا عليه، إذن

$$a_1^{(j)}x_1 + a_2^{(j)}x_2 + \ldots + a_m^{(j)}x_m \leq b \text{ for } j = 1, 2, \ldots, k. \tag{4-8}$$

من ثم نرى أن نقطة اعتباطية $(a_1, a_2, \ldots, am)$ تم اختيارها من مكان ما داخل A، إذن

$$\begin{aligned}
&a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_mx_m \\
&= \sum_{j=1}^{k} w_j a_1^{(j)} x_1 + \sum_{j=1}^{k} w_j a_2^{(j)} x_2 + \ldots + \sum_{j=1}^{k} w_j a_m^{(j)} x_m \\
&= \sum_{j=1}^{k} w_j \left(a_1^{(j)} x_1 + a_2^{(j)} x_2 + \ldots + a_m^{(j)} x_m\right) \\
&\leq \sum_{j=1}^{k} w_j b = b,
\end{aligned}$$

وكذلك النقطة $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ أيضاً تفي بالشرط المولد من $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$. بالتالي،

أظهرنا أن الشروط (8.4) هو المطلوب ليمثل المجموعة A غير المعلومة.

بعد ذلك، نريد إيجاد منهج بديل عندما تكون المجموعة A غير المعلومة معرفة بمجموعة من الشروط. وذكرنا بالفعل في التباينات (8-3) – (8-1) كيفية كتابة الشرط الأصلي ليكون متصلاً بالمعلومات حول المجموعة A. الآن نريد توضيح كيفية التعامل مع مجموعة التباينات الجديدة، لفعل ذلك نحتاج غلى أخذ جولة قصيرة في نظرية الازدواجية المرتبطة بالبرامج الخطية. يتميز البرنامج المزدوج الخطي بأنه مدهش، ولا ضرر من قضاء بعض الوقت للنظر في هذه الجزئية.

النتيجة المزدوجة التي نريد الحصول عليها عامة، لكي نجعل قراءتها أسهل سنصف نتيجة المسألة باستخدام متغيرين فقط x_1, x_2 وثلاثة شروط. وتقول نظرية الازدواجية للبرامج الخطية أنه يتم الحصول على القيمة (الأولية) للبرنامج الخطي من خلال

$$\begin{aligned} LP: \quad & \text{maximize} \quad g_1x_1 + g_2x_2 \\ & \text{subject to} \quad d_{11}x_1 + d_{12}x_2 \le h_1, \\ & \qquad d_{21}x_1 + d_{22}x_2 \le h_2, \\ & \qquad d_{31}x_1 + d_{32}x_2 \le h_3, \\ & \qquad x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{aligned}$$

وبالمثل للحصول على القيمة المزدوجة للبرنامج الخطي

$$\begin{aligned} DLP: \quad & \text{minimize} \quad h_1y_1 + h_2y_2 + h_3y_3 \\ & \text{subject to} \quad d_{11}y_1 + d_{21}y_2 + d_{31}y_3 \ge g_1 \\ & \qquad d_{12}y_1 + d_{22}y_2 + d_{32}y_3 \ge g_2 \\ & \qquad y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0. \end{aligned}$$

إذا كنت لم ترى ذلك من قبل، فأنت بحاجة للتوقف والنظر لرؤية ما يحدث في الانتقال من مسألة إلى أخرى. البرنامج الخطي المزدوج لديه شرط لكل متغير في LP الأصلي، ولديه متغير لكل شرط في المسألة الأصلية. أيضاً، المعاملات في دالة الهدف يتم نقلها إلى شروط

الجانب الأيمن والعكس. لم يتبادل المتغيرات والشروط أماكنهم فقط، لكننا قمنا بتغيير مسألة التعظيم بشروط "$\leq$" إلى مسألة تقليل بشروط "$\geq$". وفي كلا المسألتين كل المتغيرات موجبة. في واقع الأمر، العلاقة المزدوجة تظل صحيحة دون شرط موجبة المتغير (متغير حر)، في هذه الحالة يجب أن يكون الشرط متعادل. على سبيل المثال، إذا كانت المسألة الأصلية دون شرط $x_2 \geq 0$، إذن الشرط الثاني في الازدواج قد يصبح

$$d_{12}y_1 + d_{22}y_2 + d_{32}y_3 = g_2.$$

لاحظ أن ما نقوله هنا: أدنى قيمة لدالة الهدف في الازدواج DLP متساوية مع أعلى قيمة للهدف في مسألة LP الأصلية، ومن المثير للاهتمام معرفة السبب في الحصول على نفس القيمة في كلا المسألتين. يمكنك تجربة، على سبيل المثال، وضع أرقام حقيقية بدلاً من الرموز الجبرية للتأكد من النتيجة. لكن احذر أن يكون السبب وراء القيمة المزدوجة عميق إلى حد كبير (يرجع إلى حجة منفصلة؛ بمعنى آخر، تعميم لأبعاد متعددة بناءً على حقيقة أن عدم تقاطع مجموعة من المنحنيات المحدبة على المستوى قد ينتج عنه خط مستقيم بينهم). الأمر ليس صعباً لنرى أن الحد الأدنى في DLP أكبر من الحد الأقصى LP لكن لنرى أن هذه القيم هي نفسها لكنها أكثر صعوبة.

وهناك شكلين آخرين للازدواج يمكن كتابتهم وإن كانت هذه الصيغة هي الأسهل للتذكر، وما نقوله هنا سيكون كافياً للحصول على النتائج التي نرغب بها. ما هي الروابط بين مسألة التعظيم القوي لدينا؟

نفترض أن المجموعة A_1 غير المعلومة في المسألة RLP المرتبطة بالشرط الأول هي مقام مُعرف من خلال التباينات التالية على القيم a_{11} وa_{12}:

$$\begin{aligned}
&d_{11}a_{11} + d_{12}a_{12} \leq h_1,\\
&d_{21}a_{11} + d_{22}a_{12} \leq h_2,\\
&d_{31}a_{11} + d_{32}a_{12} \leq h_3,\\
&a_{11} \geq 0, a_{12} \geq 0.
\end{aligned}$$

إذن يمكننا كتابة الشرط الأول في مسألة RLP أن $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$ لكل (a_{11}, a_{12}) في المجموعة A_1 كالقول أن أعلى قيمة $a_{11}x_1 + a_{12}x_2$ يمكن أخذها لـ $(a_{11}, a_{12}) \in A_1$ أقل

من b_1. ومن ثم، يمكن التعبير عن ذلك بقول أن حل البرنامج الخطي

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \text{subject to} \quad & d_{11}a_{11} + d_{12}a_{12} \le h_1 \\ & d_{21}a_{11} + d_{22}a_{12} \le h_2 \\ & d_{31}a_{11} + d_{32}a_{12} \le h_3 \\ & a_{11} \ge 0, a_{12} \ge 0 \end{aligned}$$

يجب أن يكون أقل من أو مساوي لـ b_1. هذه هي النقطة حيث نستخدم ازدواجية البرمجة الخطية. ومن نتيجة الازدواج نجد أن هذا التعبير هو ذاته المستخدم في حل البرنامج الخطي المزدوج.

$$\begin{aligned} \text{DLP1}: \quad \text{minimize} \quad & h_1y_1 + h_2y_2 + h_3y_3 \\ \text{subject to} \quad & d_{11}y_1 + d_{21}y_2 + d_{31}y_3 \ge x_1, \\ & d_{12}y_1 + d_{22}y_2 + d_{32}y_3 \ge x_2, \\ & y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0, \end{aligned}$$

ويجب أن يكون أقل أو مساوي لـ b_1. بالتفكير في هذا التعبير جيداً تجد أن القيم x_1 وx_2 تفي بالشرط الأول لـ RLP مع مجموعة A_1 غير المعلومة إذا كان هناك بعض القيم $y_1 \ge 0$, $y_2 \ge 0$, $y_3 \ge 0$ الذي يفي التباين

$$h_1y_1 + h_2y_2 + h_3y_3 \le b_1$$

مع شروط DLP1. بمعنى آخر، نريد استيفاء مجموعة التباينات (8-1) – (8-3).

8-2-2 الميزانية في وجود عناصر غير معلومة

إنه أمر متكرر الحدوث أن نضع نطاق محتمل لقيم معامل غير معلوم. إذن، بالنسبة للمعامل a_1، ما يحدث في أغلب الأحيان أننا لا نعلم القيمة الدقيقة لكننا واثقين أن قيمته يقع في نطاق محدد. فمن المناسب تحديد نقطة في منتصف النطاق كأساس للقيمة a_1 ثم يتم تحديد δ_1 المسافة من a_1 إلى حدي النطاق. بالتالي، يتم الحصول على المجموعة غير المعلومة لـ a_1

من خلال $a_1 - \delta_1 \leq a_1 \leq a_1 + \delta_1$

عندما يحتوي الشرط على عدد مختلف من المعاملات غير المعلومة $a_1, a_2, \dots, a_n$ مثلاً، إذن سيحدد ذلك المجموعة A غير المعلومة بالبحث عن كل a_i لاستيفاء نطاق الشروط $a_i - \delta_i \leq a_i \leq a_i + \delta_i$.

وبهذا الترتيب تصبح المجموعة A مستطيل أبعاده n متمركز حول $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

من الناحية العملية، تعتبر هذه النتيجة مجموعة غير معلومة متحفظة للغاية، حيث سمحنا لكل المعاملات غير المعلومة بأخذ أكبر قيم لها في وقت واحد.

إذا لم تكن المتغيرات مترابطة للغاية فمن الأفضل التحفظ في اختيار طول مسافات δ_i كل على حدة، وتعويض ذلك بقليل من التحفظ في النقاط التي تصبح فيها المعاملات قريبة من أعلى قيم لها في نفس الوقت.

الأمر الذي يؤدي إلى تحديد ميزانية من المجموعة B غير المعلومة. إذا كان هناك 10 متغيرات ولدينا ميزانية غير معلومة من 5 متغيرات، يعني ذلك أن مجموع النسب $\_\_a_i - a_i\_\_ /\delta_i$ أقل من 5. قد يتحقق ذلك على سبيل المثال بتحديد خمسة متغيرات عند $a_i + \delta_i$ والخمسة متغيرات الأخرى عند a_i، أو بتحديد خمسة متغيرات عند $a_1 + \delta_1/2$ وخمسة آخرين عند $a_1 - \delta_1$. لنرى ما يبدو عليه هذا المثال، يوضح الشكل (8-2) الموقف عندما يكون هناك ثلاثة معاملات غير معلومة ويقارن ما يحدث عندما $B = 2.5$ و$B = 1.5$. وجدير بالذكر أن الشكل المتمركز حول النقطة تم الحصول عليه من متجه القيم الأساسية (a_1, a_2, a_3).

حينما يكون الغموض المحيط بمعاملات مختلفة مستقل، فإن افتراض أنه يمكننا عزل الزوايا بهذه الطريقة آمن للغاية. في واقع الأمر سنعرض في الجزئية التالية أن إذا معاملات n غير المعلومة متماثلة ومستقلة فإن احتمالية أن يكون الحل الأمثل لمسألة من هذا النوع يتبين أنه غير ممكن أقل من $1 - \phi\,(B/\sqrt{n})$ في حالة زيادة قيمة n. على سبيل المثال إذا كانت $n = 36$ إذن فأكبر قيمة محتملة لـ B هي 36، لكن عندما تكون B تساوي نصف الحجم،

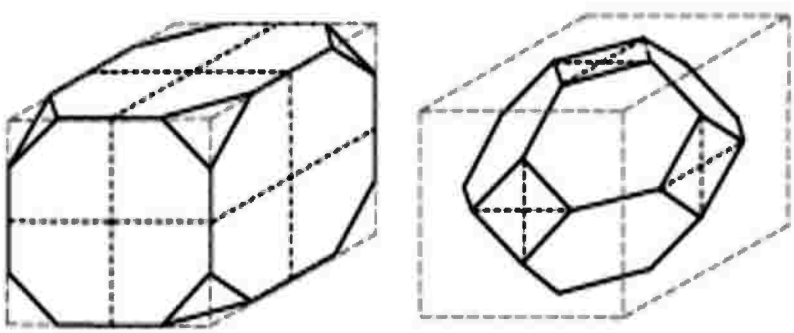
إذن B = 18، وبالتالي احتمالية أن يكون الحل الأمثل غير ممكن هي

$$1 - \Phi\left(18/\sqrt{36}\right) = 1 - \Phi\left(3\right) = 0.00135,$$

أي أن أقل من 2 من 1000.

ثم نفحص طبيعة البرنامج الخطي المعدل الذي نريد حله عندما يكون هناك مجموعة غير معلومة بهذا الشكل. نبدأ بالنظر إلى مثال بسيط حيث أن هناك شرط $a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$ لكل $(a_1, a_2) \in A$، حيث أن A المعرفة a_1, a_2 تفي

$$a_1 = \overline{a}_1 + z_1\delta_1, a_2 = \overline{a}_2 + z_2\delta_2,$$
$$\text{with } \left|z_1\right| \leq 1, \left|z_2\right| \leq 1, \text{ and } \left|z_1\right| + \left|z_2\right| \leq B.$$



الشكل (8-2): هناك ثلاثة متغيرات: يبين الرسم البياني على اليسار ميزانية عدم التيقن تبلغ 2.5، ويظهر الرسم البياني على اليمين ميزانية عدم التيقن وتبلغ 1.5

نظراً لعلامات المعامل، يبلغ إجمالي عدد الشروط على القيم (a_1, a_2) ثمانية. وإذا كنا نتبع المناقشة السابقة، إذن سنستبدل الشرط الوحيد بثلاثة شروط، لكن الشروط الجديدة تنطوي على ثمانية متغيرات جدد. هناك طريقة لتبسيط ذلك والوصول إلى نتيجة التباينات الثلاثة والمتغيرات الثلاثة الجدد، كالتالي:

$$\bar{a}_1x_1 + \bar{a}_2x_2 + w_1 + w_2 + Bt \le b \quad (5\text{-}8)$$
$$w_1 + t \ge \delta_1 |x_1|, \quad (6\text{-}8)$$
$$w_2 + t \ge \delta_2 |x_2|, \quad (7\text{-}8)$$
$$w_i \ge 0, t \ge 0.$$

(سنرى في الجزئية القادمة كيف يتم الحصول على مجموعة معينة من التباينات)، ما يعطينا دليل على كيفية صياغة مسألة عامة بميزانية غير معلومة. نفترض أن لدينا متغيرات $x_1, x_2, \dots x_n$ للقرار n، وأن المسألة الأصلية تتمثل في تعظيم $c_1x_1 + \dots + c_nx_n$ الخاضعة لبعض الشروط، أحدهم هو $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \le b$ لكل معاملات $(a_1, a_2, \dots a_n) \in A$ حيث

$$A = \{(\bar{a}_1 + z_1\delta_1, \bar{a}_2 + z_2\delta_2, \dots, \bar{a}_n + z_n\delta_n)\}$$
$$\text{for } |z_i| \le 1, i = 1, 2, \dots, n \text{ and } |z_1| + |z_2| + \dots |z_n| \le B.$$

إذن كل متغير من المتغيرات الجديدة لـ n + 1 هي $t, w_1, w_2, \dots, w_n$ يخضع لشرط أن يكون غير سلبي، والشرط يمكن استبداله بشروط n + 1 الجديدة.

$$\bar{a}_1x_1 + \bar{a}_2x_2 + \dots + \bar{a}_nx_n + w_1 + w_2 + \dots + w_n + Bt \le b, \quad (8\text{-}8)$$
$$w_i + t \ge \delta_i |x_i|, i = 1, 2, \dots, n. \quad (9\text{-}8)$$

للعودة مرة أخرى إلى البرنامج الخطي نستبدل كل من الشروط $w_i + t \ge \delta_i|x_i|$ بشرطين $w_i + t \ge \delta_i x_i$ و $w_i + t \ge -\delta_i x_i$.

ويمكن التأكد أن هناك متغيرات w_i, x_i وt التي تفي بهذه الشروط، إذن يفي التباين الأصلي مع b لكل من $(a_1, a_2, \dots a_n) \in A$. نختار نقطة في A مع $ai = ai + zi\delta i$ حيث $|z_i| \le 1$ and $|z_1| + |z_2| + \dots |z_n| \le B$. بالتالي

$$\begin{aligned}
&a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \\
&= \bar{a}_1x_1 + \bar{a}_2x_2 + \dots + \bar{a}_nx_n + z_1\delta_1x_1 + \dots + z_n\delta_nx_n \\
&\le \bar{a}_1x_1 + \bar{a}_2x_2 + \dots + \bar{a}_nx_n + |z_1|(w_1 + t) + \dots + |z_n|(w_n + t) \\
&\le \bar{a}_1x_1 + \bar{a}_2x_2 + \dots + \bar{a}_nx_n + w_1 + \dots + w_n + Bt \\
&\le b.
\end{aligned}$$

قمنا باستخدام تباينات مثل $z_1\delta_1 x_1 \leq |z_1|\ \delta_1|x_1|$ ونستخدم حقيقة أن $1 \leq |z_i|$ و $\leq |z_i| \sum$ B. يعتبر ذلك أحد اتجاهات الازدواجية، لكن الأمر أكثر صعوبة عند السير في اتجاه آخر، ونجد أن مجموعة الشروط الجديدة ليس إلا شروط أكثر تقيداً من المجموعة الأصلية.

مثال عملي 8-3: أفيجنون للاستيراد

يجب أن تقوم أفيجنون للاستيراد بتحديد الطلب لاختيار المنتجات A, B, C. الطلب بالكامل على الثلاث منتجات يشترط التوصيل معاً ما يقتضي أن يكون الوزن الإجمالي للشحنة أقل من 5000 كيلوجرام. تزن شحنة منتجات A, B, C 5 كيلو، لكن هناك غموض حول طريقة تعبئة المنتجات وبالتالي وزن التغليف الذي يستخدمه الموردين. يقدر تغليف المنتج A وC بمقدار 0.2 كيلوجرام للشحنة، لكنه مجرد تقدير، كما أنه من المتوقع أن يتراوح وزنه بين 0.1 و0.3 كيلوجرام. في حين أن المنتج B أكثر تعقيداً وتُقدر قيمة التعبئة بنحو 0.5 كيلوجرام للشحنة ، حيث يتراون وزنه بين 0.2 و0.8 كيلوجرام. وتبلغ التكلفة الإجمالية للشحنة 100 دولار. بعد استيراد الشحنة سوف تعرض الشركة المنتجات للمزاد. السعر المتوقع لبيع المنتج A هو 200 دولار للشحنة، مع إمكانية تحقيق سعر أعلى أو أقل بـ50 دولار. السعر المتوقع لبيع المنتج B هو 205 دولار مع إمكانية تغير السعر بقيمة 60 دولار للأعلى أو الأسفل للشحنة. بينما يبلغ السعر المتوقع للمنتج C 195 دولار مع إمكانية لتغير السعر بقيمة 70 دولار. هناك شرط يتمثل في تحقيق أرباح للشركة بقيمة 50000 دولار على الأقل من الصفقة. ترغب أفيجنون في تعظيم الأرباح المتوقعة والتي تخضع لشروط وزن النقل والحد الأدنى للأرباح المحققة. قم بصياغة مسألة التحسين القوي باستخدام ميزانية غير معلومة حيث B = 2 لكل من الشرطين، وقم بحل المسألة في جدول البيانات.

الحل

نفترض أن x_A, x_B, x_C الكميات المطلوبة من كل منتج، ونرمز لوزن الشحنة بـ a_A, a_B, a_C، ونرمز لسعر البيع بـ s_A, s_B, s_C. تبلغ الأرباح المتوقعة 100 دولار، 105 دولار، 95 دولار للمنتجات الثلاثة، بالتالي يصبح لدينا مسألة التعظيم التالية

$$\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & 100x_A + 105x_B + 95x_C \\
\text{subject to} \quad & a_A x_A + a_B x_B + a_C x_C \le 5000 \text{ for } (a_A, a_B, a_C) \in A \\
& -s_A x_A - s_B x_B - s_C x_C \le -50\,000 \text{ for } (s_A, s_B, s_C) \in S \\
& x_A \ge 0, x_B \ge 0, x_C \ge 0,
\end{aligned}$$

مع الحصول على مجموعات غير معلومة من خلال:

$$A = \{(a_A, a_B, a_C) : a_A = 5.2 + 0.1z_A, a_B = 5.5 + 0.3z_B, a_C = 5.2 + 0.1z_C \text{ for } (z_A, z_B, z_C) \in Z\},$$

$$S = \{(s_A, s_B, s_C) : s_A = 100 + 50q_A, s_B = 105 + 60q_B, s_C = 95 + 70q_C \text{ for } (q_A, q_B, q_C) \in Z\},$$

حيث

$$Z = \{(z_A, z_B, z_C) : |z_A| \le 1, |z_B| \le 1, |z_C| \le 1, |z_A| + |z_B| + |z_C| \le 2\}.$$

لاحظ أن الشرط S على الحد الأدنى للأرباح تم ضربه في 1- ليوافق الشكل المعياري. الحقيقة أن كلا الميزانيتين غير المعلومتين لهم نفس المتوسط الذي يمكن أن نستخدمه في المجموعة Z للشرطين المختلفين. الآن يمكننا استخدام القواعد التي قمنا بتطويرها من قبل لإضافة الشروط كما في التباينات (8-8) و(8-9)؛ وفي الصيغة الناتجة يتم استبدال الشروط الكائنة بأربعة شروط جديدة (مع أربعة متغيرات جدد). ما يعطينا

$$\begin{aligned}
\text{maximize } & 100xA + 105xB + 95xC \\
\text{subject to } & 5.2x_A + 5.5x_B + 5.2x_C + w_A + w_B + w_C + 2t_1 \le 5000 \\
& w_A + t_1 \ge 0.1x_A \\
& w_B + t_1 \ge 0.3x_B \\
& w_C + t_1 \ge 0.1x_C \\
& -100x_A - 105x_B - 95x_C + u_A + u_B + u_C + 2t_2 \le -50\,000 \\
& u_A + t_2 \ge 50x_A \\
& u_B + t_2 \ge 60x_B \\
& u_C + t_2 \ge 70x_C
\end{aligned}$$

وكل المتغيرات سالبة

في هذه الصيغة نستطيع تغيير $|x_A|, |x_B|, |x_C|$ إلى x_A, x_B, x_C إذا كان جميعهم موجباً.

حل هذه المسألة في جدول بيانات BRMch8-Avignon.xlsx. حيث لدينا

$x_A = 785.38,\ x_B = 81.65,\ x_C = 69.98,$
$w_A = 54.04,\ t_1 = 24.49,\ u_A = 34\ 370.14,\ t_2 = 4898.91$

وكل المتغيرات الأخرى صفر، من الناحية العملية، نحتاج إلى تحويل المتغيرات إلى أعداد صحيحة (أو الأفضل استخدام إجراء للتعظيم يبحث بين الحلول الصحيحة).

8-2-3 مزيد من التفاصيل حول الميزانية ذات العناصر الغامضة

في هذه الجزئية نريد عمل شيئين: الأول يتمثل في كيفية الحصول على الشرطين (8-5)–(8-7) من الازدواج، والثاني يتمثل في استنتاج الشرط على احتمالية أن يكون الحل الأمثل يقع خارج الميزانية الغامضة (على افتراض أن الأخطاء مستقلة ومتماثلة).

نبدأ بالنظر في الشرط $a_1x_1 + a_2x_2 \le b$ حيث أن قيم (a_1, a_2) لديهم قيم أساسية $(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$ وانحرافات قصوى δ_1, δ_2، ويمكنهم فك غموض ميزانية B غير المعلومة . بالتالي يمكن الحصول على النتيجة من خلال

$$a_1 = \bar{a}_1 + z_1\delta_1,\ a_2 = \bar{a}_2 + z_2\delta_2,$$
$$\text{with } |z_1| \le 1,\ |z_2| \le 1, \text{ and } |z_1| + |z_2| \le B.$$

في الشرط الأصلي لكل من $(a_1, a_2) \in A$، من ثم يمكن إعادة صياغة الشرط بقول أن البرنامج الخطي التالي يتضمن متغير قرار a_1 وa_2 بقيمة أقل من أو تساوي b:

$$\begin{aligned}
&\text{minimize } a_1x_1 + a_2x_2\\
&\text{subject to } a_i - \delta_i u_i + \delta_i v_i = \bar{a}_i,\ i = 1, 2\\
&\qquad u_i + v_i \le 1,\ i = 1, 2\\
&\qquad (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) \le B\\
&\qquad u_1 \ge 0,\ u_2 \ge 0,\ v_1 \ge 0,\ v_2 \ge 0
\end{aligned}$$

قمنا بكتابة u_1 وv_1 للأجزاء الموجبة والسالبة من z_1، أي أن $u_1 = \max(z_1,0)$ و $v_1 = \max(-z,0)$. (على نحو مشابه، u_2 وv_2 يمثلون الأجزاء الموجبة والسالبة من z_2). ما يعني أن $z_1 = u_1 - v_1$ و$|z_1| = u_1 + v_1$. هنا تظهر خدعة، تعريف المتغيرات على هذا النحو يعني أن واحد فقط منهم غير صفري، حيث أن عند صياغة البرنامج الخطي قد يحتوي على كل من $u_1 > 0$ و$v_1 > 0$. رغم ذلك، أل حل تكون فيه المتغيرات غير صفرية يمكن استبداله بحل آخر

يتم فيه طرح نفس القيمة من u_1 وv_1 لنجعل القيمة الأصغر تساوي صفر. سيظل شرط التكافؤ وشروط التباين كما هي، حيث تم تقليل $u_1 + v_1$.

بالتالي، باستخدام نظرية الازدواجية للبرامج الخطية، نجد أن الشروط تتضمن أن البرنامج الخطي التالي قيمته أقل من b:

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \overline{a}_1 y_1 + \overline{a}_2 y_2 + w_1 + w_2 + Bt \\ \text{subject to} \quad & y_1 = x_1 \\ & y_2 = x_2 \\ & -\delta_1 y_1 + w_1 + t \geq 0 \\ & -\delta_2 y_2 + w_2 + t \geq 0 \\ & \delta_1 y_1 + w_1 + t \geq 0 \\ & \delta_2 y_2 + w_2 + t \geq 0 \\ & w_i \geq 0, t \geq 0. \end{aligned}$$

نلاحظ أن التكافؤ $y_i = x_i$ حدث (بدلاً من التباين) بسبب عدم وجود شروط أن $a_i \geq 0$. هنا يمكننا استبدال أول شرطين x_1 وx_2 بالشرطين y_1 و y_2. ويمكن أيضاً جمع الشرطين بما يتضمن w_1: if $w_1 + t$ أكبر من $\delta_1 x_1$ و$\delta_1 x_1$ ليصبح لدينا $w_1 + t \geq \delta_1 |x_1|$. من ثم، نتوصل إلى مسألة التعظيم التالية ، التي تمتلك قيمة $\leq$ b.

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \overline{a}_1 x_1 + \overline{a}_2 x_2 + w_1 + w_2 + Bt \\ \text{subject to} \quad & w_1 + t \geq \delta_1 \left| x_1 \right| \\ & w_2 + t \geq \delta_2 \left| x_2 \right| \\ & w_i \geq 0, t \geq 0. \end{aligned}$$

بالتالي، أوضحنا أن الشرط الأصلي يمكن كتابته في شكل الشروط (8-5)–(8-7) .

الآن، نرغب في معرفة مدى احتمالية زيادة الميزانية غير المعلومة عندما يكون كل معامل مجهول متماثل ومستقل. بدلاً من ذلك نتساءل عن احتمالية زيادة الميزانية غير المعلومة، حيث نهتم باحتمالية أن يكون الحل الأمثل الذي توصلنا له يفشل في استيفاء شروط المسألة. لنكون أكثر دقة، نفترض أن قيمة B تستخدم لتعريف المجموعة A المجهولة، ثم نرغب في

معرفة ما احتمالية أن يكون الحل الأمثل الذي توصلنا إليه بناءً على المجموعة المجهولة غير ممكن، ونفترض أن النطاقات الأصلية دقيقة. من المحتمل أن تقع القيم الحقيقية للمعاملات المجهولة في تلك الأجزاء من المكعب المقطوع بسبب شرط الميزانية المجهول، وهنا نطرح سؤال حول احتمالية أن يؤدي ذلك إلى حل غير ممكن.

نفترض أن x^* الحل الأمثل للمسألة مع وجود الميزانية المجهولة، مع العلم أن الحل x^* يفي الشرط مع أي خيار من z_i ما يزيل غموض الميزانية، وأننا سوف نصل إلى خيار معين لـ z.

نفعل ذلك من خلال إعادة ترتيب المتغيرات ومن ثم تأتي أعلى قيم $|x^*_i|\ \delta_i$ أولاً، ثم نختار $z_i = 1 \text{or} -1$ بناءً على العلامة x_i^* لـ $L = |B|$ لتلك المتغيرات، و$z_{L+1} = B - L + L$ للمتغيرات التالية (لتوافق العلامة $x_L^* + 1$، ويتم تعيين باقي z_i كلها عند صفر. مع اختيار z_i يصبح لدينا $\sum_{i=1}^{n} |z_i| = B$ *وسوف تصبح المعاملات* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *في مجموعة* A *المجهولة. ومن ثم، يتم استيفاء الشرط ونستنتج أن*

$$\sum \overline{a}_i x_i^* + \sum_{i=1}^{L} \delta_i \left|x_i^*\right| + (B - L)\delta_{L+1} \left|x_{L+1}^*\right| \leq b. \qquad (10\text{-}8)$$

الآن، نفترض عدم بقاء الشرط عند الحل الأمثل x^* لبعض من قيم المجموعة $a1$ في النطاق المعطى. إذن هناك مجموعة من قيم z_i تأخذ الصيغة

$$\sum \overline{a}_i x_i^* + \sum z_i \delta_i \left|x_i^*\right| > b,$$

وبالتالي، من التباين (10-8)

$$\sum \overline{a}_i x_i^* + \sum z_i \delta_i \left|x_i^*\right| > \sum \overline{a}_i x_i^* + \sum_{i=1}^{L} \delta_i \left|x_i^*\right| + (B - L)\delta_{L+1} \left|x_{L+1}^*\right|.$$

يمكن كتابة هذا التباين

$$\sum_{i=L+1}^{n} z_i \delta_i \left|x_i^*\right| > \sum_{i=1}^{L} (1 - z_i)\delta_i \left|x_i^*\right| + (B - L)\delta_{L+1} \left|x_{L+1}^*\right|$$

نظراً لترتيب $\delta_i\,|x^*{}_i|$ (واستخدام الحقيقة أن $1 - z_i \geq 0$) يتضمن ذلك

$$\sum_{i=L+1}^{n} z_i\delta_i\left|x_i^*\right| \geq \delta_{L+1}\left|x_{L+1}^*\right|\left(\sum_{i=1}^{L}(1-z_i)+(B-L)\right).$$

إذن

$$\sum_{i=1}^{L} z_i + \sum_{i=L+1}^{n} z_i\frac{\delta_i\left|x_i^*\right|}{\delta_{L+1}\left|x_{L+1}^*\right|} > B.$$

والتباين يأخذ الشكل

$$\sum_{i=1}^{n} z_i h_i > B \tag{11-8}$$

مع $0 \leq h_i \leq$ لكل i.

الآن نسأل ما احتمالية ألا تفي قيم z_i الشرط (إذا كانت كل z_i يتم اختيارها بطريقة مستقلة ومتماثلة قرابة الصفر)؟ وبما أن التباين (8-11) تم استيفاءه إذا تم كسر الشرط ، فإن احتمالية استمرار التباين يجب أن تكون أكبر من احتمالية كسر الشرط.

يمكن استخدام الحد النظري الأوسط للحصول على شرط على هذا الاحتمال في حالة زيادة n. يبلغ متوسط المتغير العشوائي $\sum_{i=1}^{n} z_i h_i$ صفر (حيث أن كل z_i له متوسط صفري) والتغير $V = \sum_{i=1}^{n} h_i^2 V_i$ حيث أن V_i هو التغير في المتغير z_i. وبما أن z_i يقع في النطاق 1- إلى 1، لا يمكن أن يكون التغير أكبر من 1 وh_2 أيضاً أقل من 1. ومن ثم التغير $V \leq n$. في النهاية نصل إلى

$$\Pr\left(\sum_{i=1}^{n} z_i h_i > B\right) \approx \Pr(N(0,\sqrt{V}) > B) \leq 1 - \Phi\left(\frac{B}{\sqrt{n}}\right)$$

بالتالي، نستقر على زيادة n وأي توزيع متماثل لأخطاء المعامل قرابة المستويات الأساسية، نظراً لأن هذه الأخطاء مستقلة ، وتستخدم غموض الميزانية B في حل مسألة التعظيم سوف نحصل على احتمالية كسر الشرط عند الحل الأمثل ليس أكثر من $1 - \Phi\left(B/\sqrt{n}\right)$.

3-8 تحسين قوي ومنهج قاعدة الحد الأقصى

أحد الأنواع المهمة من الغموض فيما يتعلق بدالة الهدف في مسألة التعظيم. في هذا السياق، يبحث التحسين العشوائي عن القيمة المتوقعة لهدف تحت نموذج ما واصفاً احتمالات المعاملات المختلفة في دالة الهدف. لكننا نهتم بالبيئة التي يوجد فيها توزيع غير معلوم لتلك المعاملات، وفي الغالب يكون لدينا مجموعة من القيم المحتملة. تنتمي معاملات دالة الهدف إلى المجموعة المجهولة A. وفي هذا السياق، من الطبيعي أن نستخدم منهج قاعدة الحد الأقصى الذي يفترض الأسوأ ويصنع القرارات من أجل ألا يكون الأسوأ بهذا السوء.

لتطبيق هذا المنهج سوف نبدأ بإعادة كتابة المسألة مع متغير إضافي يمثل دالة الهدف. وبالتالي، يمكن كتابة مسألة تعظيم قياسية كالتالي

$$\text{maximize } f(x) \text{ subject to } x \in X,$$

حيث أن f تمثل دالة الهدف وX تمثل مجموعة الاحتمالات المعرفة بالشروط. يمكن إعادة كتابة هذه المسألة القياسية بإضافة متغير غير مشروط v كالتالي:

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && v \\ &\text{subject to} && v \le f(x) \\ & && x \in X. \end{aligned}$$

تكمن ميزة هذا الترتيب في أن غموض دالة الهدف يتحول إلى غموض في الشروط على النحو الذي تعاملنا به في الجزئية السابقة.

الآن نفترض أن دالة الهدف في حالة خطية، فلدينا $f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$ ونفترض أننا نعلم أن $(c_1, c_2 ... c_n)$ تقع في مجموعة A المجهولة، إذن تصبح المسألة كالتالي

$$\begin{aligned} \text{PZ:}\ &\text{maximize} && v \\ &\text{subject to} && v - c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n \le 0 \ \text{ for all } (c_1, c_2, \ldots, c_n) \in A \\ & && x \in X. \end{aligned}$$

تسمح هذه الصيغة بتطبيق كل الآليات المقدمة في الجزئية السابقة. لاحظ أن بالبحث عن شرط لتطبيقه على كل خيارات المعاملات في المجموعة A، نستنتج أن مع القيمة v التي تساوي أصغر قيمة للهدف المحتمل $(c_1, c_2, \ldots, c_n)\in A$. من ثم، فإن الصيغة PZ تساوي

$$\max_{x\in X}\left(\min_{(c_1,c_2,\ldots,c_n)\in A}\{c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n\}\right)$$

نجدا أن مع هذه الصيغة نعظم دالة الهدف إلى أقصى افتراض سلبي لقيم المعاملات المجهولة. يمكن اعتبار ذلك كلعبة بيننا وبين طرف منافس، مثل اللعبة التي رأينا روجر ريلي يلعبها في السيناريو ببداية هذا الفصل. نختار قيم متغيرات القرار $x_1, x_2, \ldots , x_n$ ثم يختار اللاعب الآخر القيم $c_1, c_2, \ldots , c_n$. لكن اللاعب الآخر هنا يتمتع بالمكر حيث يستهدف حصولنا على أسوأ نتيجة ممكنة. في بعض الأحيان يتحدث الناس عن اللعب ضد قوانين الطبيعة، وإن كان ذلك يتضمن نظرة ارتياب من العالم! نعتبر هذه المسألة واحدة من النتائج المضمونة حين تلقي بها لنا الطبيعة.

وهناك علاقة وصل مع فكرة اختبار الضغط العكسي المطروحة في الفصل الثالث. رغم ذلك، اختبار الضغط العكسي يقوم بتنفيذ التقليل الداخلي (إيجاد أسوأ سيناريو محتمل)؛ حيث نقم باختيار متغيرات القرار أيضاً. ومن ثم فنحن لا نحاول فقط إيجاد أسوأ سيناريو محتمل، لكن نحاول أيضاً تجنب أن يكون سيء لدرجة كبيرة.

وبوجه عام، يمكننا التفكير في دالة الأرباح Π التي تعتمد ليس فقط على إجراءاتنا x بل أيضاً على قيم بعض المعاملات المجهولة التي حصلنا عليها من المتجه a والمعلومة الوحيدة لدينا هي$\in$ A a ، المجموعة المجهولة في المسألة. ومن ثم، أفضل شيء يمكن فعله لضمان مستوى محدد من الأرباح هو تعظيم أدنى قيمة للأرباح لـ $a \in A$, أي أن

$$\max_{x\in X}\left\{\min_{a\in A}\Pi(x,a)\right\}. \qquad (12\text{-}8)$$

تصبح المسألة أكثر أهمية عندما تكون دالة الأرباح Π دالة a مقعرة لكل قيمة من x وA متعددة المقام مع زوايا $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(k)}$. كل واحدة من هذه الزوايا تمثل متجه، وبالتالي يمكن كتابة $\left(a_1^{(j)}, a_2^{(j)}, \ldots, a_m^{(j)}\right)$ لزاوية jth للنقطة A حيث j = 1,2, ..., k.

في هذه الحالة يصبح المعادل للصيغة PZ:

$$\begin{aligned} \text{PZ1:} \quad & \text{maximize} \quad v \\ & \text{subject to} \quad v - \Pi(x, a) \leq 0 \text{ for all } (a_1, a_2, \ldots, a_m) \in A \\ & \qquad\qquad\quad x \in X. \end{aligned}$$

وباستخدام نفس المنهج الذي استخدمناه من قبل، تصبح الخطة التالية هي استبدال الشرط الوحيد مع نسخ k: واحد لكل نقطة قصوى من A. إذن نحصل على التالي

$$\begin{aligned} \text{PZ2:} \quad & \text{maximize} \quad v \\ & \text{subject to} \quad v - \Pi(x, a^{(1)}) \leq 0 \\ & \qquad\qquad\quad v - \Pi(x, a^{(2)}) \leq 0 \\ & \qquad\qquad\quad \ldots \\ & \qquad\qquad\quad v - \Pi(x, a^{(k)}) \leq 0 \\ & \qquad\qquad\quad x \in X. \end{aligned}$$

إذا كانت v وx محتملين لـ PZI فيلزم استيفاء الشروط لكل نقاط الزاوية A وبالتالي فإنها محتملة لـ PZ2. يمكن أن نستخدم الافتراض الخاص بمنحنى الدالة Π المقعرة لإظهار أن كل من شروط PZ2 مستوفاة، إذن شرط PZ1 سيتم استيفاءه أيضاً. البرهان هو ذاته الذي حصلنا عليه من قبل فيما يتعلق بالتباين (8-4) وتمرين 8-5. وبالتالي، فإن النتيجة النهائية عندما تكون دالة الأرباح مقعرة في المعامل المجهول وتكون المجموعة المجهولة متعددة المقام، ويمكن استبدال المسألة (8-12) بمسألة التعظيم PZ2.

مثال عملي 8-4: سينتينل انتربرايزيس

تبيع شركة سينتيل انتربرايزيس أجهزة الكمبيوتر اللوحي والقارئ الإلكتروني. تطرح الشركة منتج جديد "فليكس ريدر" الذي حصل على حملة إعلانية جيدة. تلقت الشركة طلبات بمقدار 5000 فليكس ريدر مقدماً. حصل العملاء على كود تأميني يمكنهم استخدامه للشراء عبر الإنترنت في تاريخ الإصدار، وهو قبل أسبوعين من تاريخ الطرح في المتاجر. يتم طرح فليكس ريدر بحجمين للشاشة (كبير وصغير)، وبسبب خطأ ما لم يحدد العملاء الحجم المطلوب مقدماً. وما جعل الأمر أسوأ أن المصنعين واجهوا بعض المشاكل المتعلقة بتاريخ الإصدار ما سوف يتسبب في زيادة تكلفة شراء فليكس ريدر عبر الإنترنت. سوف تتحمل الشركة 550 دولار للأجهزة كبيرة الحجم و520 دولار للأجهزة صغيرة الحجم لطرحها في المعاد المقرر، بينما في حالة تأخير الموعد لمدة أسبوعين ستنخفض التكلفة بمقدار 70 دولار. يتم بيع أجهزة فليكس ريدر الكبيرة مقابل 640 دولار والصغيرة مقابل 590 دولار. من المحتمل أن يتراجع العملاء الذين قاموا بعمل الطلب مقدماً لكنهم لا يستطيعون الحصول على الحجم المفضل عن الشراء. الأجهزة التي استلمتها الشركة والأجهزة غير المطلوبة للطلبات المقدمة من العملاء سوف يتم بيعها لاحقاً. كم عدد الأجهزة التي تحتاجها الشركة من الحجمين لطرحها في الموعد المقرر؟

الحل

الهدف يتمثل في استخدام منهج قوي للتعامل مع الغموض حول عدد طلب العملاء مقدماً كم يريدون الحجم الكبير وكم يريدون الحجم الصغير. سيكون لذلك تأثير تعظيم أرباح سنتينل على افتراض أسوأ سيناريو لتقسيم الطلبات.

نريد تحديد حجم الطلب x_L للأجهزة كبيرة الحجم وx_S للأجهزة صغيرة الحجم المطلوبة لتسليم المنتج في الموعد المقرر. وإذا أشرنا إلى إجمالي الطلبات المقسمة d_L للحجم الكبير وd_S للحجم الصغير، إذن فإن طلبات البيع مقدماً هي $z_L = \min(x_L, d_L)$ and $z_S = \min(x_S, d_S)$.

نشير إلى المبيعات العادية لكلا الحجمين بـ w_L وw_S . من ثم تصبح صيغة تكلفة شراء الحجم الكبير هي

$$550x_L + 480(w_L - x_L + z_L)$$

حيث أن الشرط الثاني يرجع لوجود $x_L - z_L$ مخزون متبقي من طلبات الشراء مقدماً. على نحو مشابه، تصبح صيغة تكاليف شراء الأجهزة صغيرة الحجم:

$$520x_S + 450(w_S - x_S + z_S)$$

وبالتالي، فإن الأرباح النهائية هي

$$\begin{aligned}\Pi &= 640(z_L + w_L) + 590(z_S + w_S) - 550x_L - 480(w_L - x_L + z_L)\\ &\quad -520x_S - 450(w_S - x_S + z_S)\\ &= 160z_L + 140z_S - 70(x_L + x_S) + 160w_L + 140w_L.\end{aligned}$$

لتعظيم الأرباح يجب الاختيار من x_L وx_S ولأن

$$\text{maximize } 160 \min(x_L, d_L) + 140 \min(x_S, d_S) - 70(x_L + x_S)$$

لكن الطبيعة سوف تختار d_L وd_S من المجموعة المجهولة

$$A = \{(d_L, d_S) : d_L \geq 0, d_S \geq 0, d_L + d_S = 5000\}$$

يمكن صياغة ذلك كمسألة تعظيم v وفقاً للشروط

$$\begin{gathered} v - 160 \min(x_L, d_L) - 140 \min(x_S, d_S) + 70(x_L + x_S) \leq 0 \text{ for all } (d_L, d_S) \in A \\ x_L \geq 0, x_S \geq 0.\end{gathered}$$

وبما أن الحد الأدنى للمعاملات مقعر، فإن ذلك يفي بالشروط التي نحتاجها لاستبدال المجموعة المجهولة بنسخ الشرط عن أقصى نقطتين في A؛ وهما $d_L = 5000, d_S = 0$ and $d_L = 0, d_S = 5000$.

نفترض أن $x_L \leq 5000$ and $x_S \leq 5000$، حيث لا يمكن أن يوجد سبب لطلب أكثر من الحد الأقصى للطلب. إذن، فإن الشروط عند أقصى نقطتين يمكن تبسيطها والحصول على

$$\begin{aligned}\text{maximize}\quad & v\\ \text{subject to}\quad & v-160x_L+70(x_L+x_S)\le 0\\ & v-140x_S+70(x_L+x_S)\le 0\\ & 0\le x_L\le 5000,\quad 0\le x_S\le 5000.\end{aligned}$$

جدول البيانات BRMch8-Sentinel.xlsx مخصص لحل هذه المسألة، لنحصل على الحل $x_L = 4375$ and $x_S = 5000$، ما يعطينا قيمة v تساوي 43750 دولار. بمعنى آخر، إذا كانت هذه هي قيم x_L وx_S يمكن تحقيق أرباح بقيمة 43750 دولار، وذلك أفضل قيمة مضمونة للأرباح.

1-3-8 * التعظيم القوي من حيث التوزيع

حتى الآن نعتبر الموقف يتعلق الغموض بأرقام معينة في صيغة المسألة. بدلاً من ذلك نفترض أننا نعلم توزيع هذه المعاملات، ونفترض أننا نعلم المجموعة المجهولة المنتمين لها. رغم ذلك هناك حالات عديدة نعلم فيها أكثر من مجموعة للقيم التي يجب أن يأخذها المعامل لكن أقل من توزيعها الكامل. عندما يحدث ذلك يعني أننا نستخدم نموذج تعظيم قوي من حيث التوزيع، والذي من خلاله لا نحدد فقط مجموعة من النقاط ولكن أيضاً مجموعة من التوزيعات كالمجموعة المجهولة. على سبيل المثال، إذا كانت أسعار سلعة معينة غداً تتبع توزيع طبيعي بمتوسط مماثل لسعر اليوم، لكن الانحراف المعياري غير معلوم.

في هذه الحالة، سوف نكتب المجموعة الغامضة A بخط سكريبت $(\mathcal{A})$ لنتذكر أنها مجموعة توزيعات. وإذا كانت ξ المعامل في المسألة و$\Pi(x, \xi)$ تمثل الأرباح باستخدام متغير قرار ξ مع العلم بتوزيع ξ، إذن (إذا كنا قادرين على المخاطرة) نريد تعظيم القيمة المتوقعة لـ $\Pi(x, \xi)$. وبما أننا نعلم تغيرات التوزيع، فننصح بكتابة التوقعات من حيث التوزيع. نستخدم الرموز $E_F[\Pi(x, \xi)]$ لتوقعات $\Pi(x, \xi)$ عندما تأخذ ξ التوزيع F.

نركز على المسألة حيث يحدث الغموض في الهدف بدلاً من الشروط. وبالتالي يصبح الهدف من مسألة التعظيم القوي من حيث التوزيع هو إيجاد أفضل قيمة متوقعة للأرباح

التي يمكن تحقيقها إذا علمنا أن توزيع ξ *يقع في المجموعة المجهولة* A. يمكن كتابة ذلك كالتالي

$$\max_x \left\{ \min_{F \in A} E_F \left[\Pi(x, \xi) \right] \right\}$$

إذا كان يمكن تمثيل الغموض في التوزيع من خلال مجموعة صغيرة من المعاملات المعرفة، فيمكن إعادة هذه المسألة إلى صيغة قوية "قائمة على نقطة" بالحصول على القيمة المتوقعة من حيث قيم المعامل. في هذا المثال حول سعر السلعة غداً يمكن أن نحدد الانحرافات المعيارية المحتملة بين $\sigma_{\max}$ and $\sigma_{\min}$، ومن ثم $A = \{N(0, \sigma) : \sigma_{\min} \leq \sigma \leq \sigma_{\max}\}$. الآن نفترض أنه يمكن حساب الأرباح المتوقعة للانحراف المعياري σ، ومتغير القرار x، لنقل أنه $\Pi(x, \sigma)$. ومن ثم يمكن إعادة كتابة مسألة التعظيم القوي من حيث التوزيع بالشكل التالي

$$\max_x \left\{ \min_{\sigma \in A} \overline{\Pi}(x, \sigma) \right\}$$

حيث أن $A = \{\sigma : \sigma_{\min} \leq \sigma \leq \sigma_{\max}\}$

في مسألة التعظيم القوي من حيث التوزيع، إذا كانت مجموعة A المجهولة تتضمن التوزيعات التي تأخذ السلوك الأقصى لوضع كل الاحتمالات في قيمة وحيدة هي ξ، فنفترض أن الطبيعة سوف تختار أحد هذه التوزيعات القصوى، والسبب بسيط، فالقيمة المتوقعة لـ Π في ظل التوزيع F يجب أن تكون أكبر من أدنى قيمة قد تأخذها،بمعنى آخر، إذا كانت دالة الكثافة F هي f وهي غير صفرية في المجموعة $[a, b]$ إذن

$$\begin{aligned} E_F \left[\Pi(x, \xi) \right] &= \int_a^b \Pi(x, s) f(s) ds \\ &\geq \int_a^b \left(\min_{a \leq z \leq b} \Pi(x, z) \right) f(s) ds = \min_{a \leq z \leq b} \Pi(x, z). \end{aligned}$$

نكتب δ_z رمزاً للتوزيع الذي يضع كل وزنه على نقطة وحيدة هي Z (في بعض الأحيان يسمى توزيع دلتا ديراك). أيضاً نكتب $R(A)$ لنرمز إلى مجمعة القيم التي قد تنتج في ظل

توزيع A. وبالتالي، في الحالة الخاصة التي تكون كل قيمة لـ $z \in R(A)$ ومن ثم δ_z أيضاً في A، نستطيع أن نستنتج

$$\max_x \left\{ \min_{F \in A} E_F \left[\Pi(x, \xi) \right] \right\} = \max_x \left\{ \min_{z \in R(A)} \Pi(x, z) \right\}$$

ومن ثم نعود إلى مسألة التعظيم القوي عند كل نقطة.

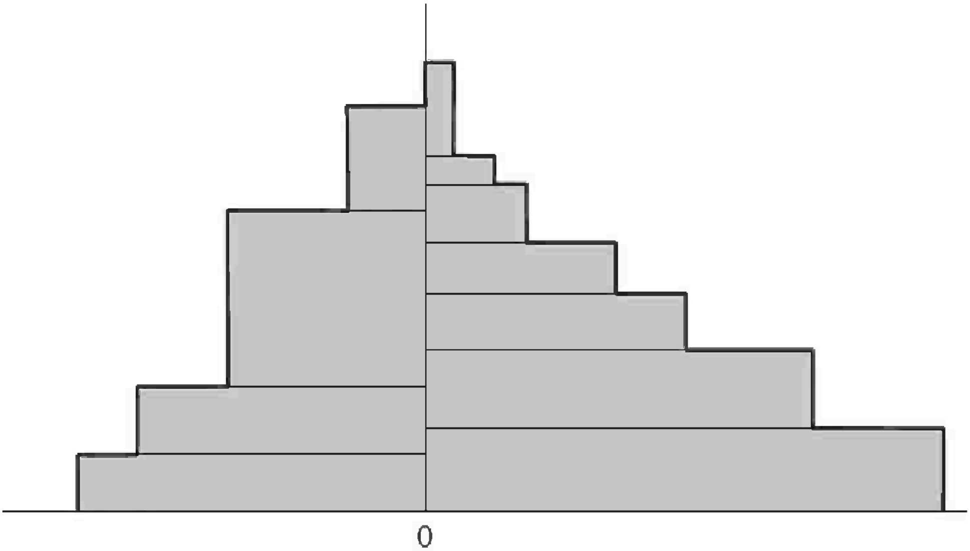
في بعض السياقات من الطبيعي اعتبار مجموعة A المجهولة تحتوي على كل التوزيعات أحادية النمط وبالتالي تتزايد الكثافات إلى الحد الأقصى ثم تتقلص. على سبيل المثال، عند مراعاة توزيع الطلب لمنتج ما له علاقة بالطقس، قد نميل إلى تقييد التوزيع بنموذج نمطي واحد – حتى لو لم يكن أي شيء آخر معلوم.

سوف ننظر في مجموعة مجهولة تتكون من كل التوزيعات بدوال كثافة أحادية النمط معرفة على نطاق، لكننا نضيف شرط أن يكون الوسط الحسابي معلوماً مقدماً. ويمكننا تحويل المسألة ليصبح الوسط الحسابي صفر. على سبيل المثال، قد نصل إلى أن القيمة المحتملة لسعر النفط في فترة أسبوع هو سعر اليوم، ويعتبر هذا السعر عشوائي بتوزيع أحادي النمط، حيث يمكن الحصول على هذا التوزيع من خلال أخذ توزيع أحادي النمط بمتوسط صفري ثم نضيف له سعر النفط اليوم.

من الجدير بالملاحظة أن أي توزيع أحادي النمط ذو دعم في نطاق $[-a, b]$ووسط حسابي 0 يمكن الحصول عليه من خلال اختيار رقم من توزيع G على $[-a, b]$ ثم يتم ضربه في رقم يتم اختياره عشوائياً من المسافة $[0, 1]$. يمكن القول أن أي توزيع أحادي النمط يمكن الحصول عليه كناتج نموذجين مستقلين ، أحدهم من G والآخر من U (0,1)، والتوزيع الموحد على (0,1). وجدير بالذكر أن هذه النتيجة تعرف بنظرية Khintchine. طريقة أخرى للحصول على ذلك هي القول أنه يمكن الحصول على التوزيع من الجمع بين توزعات موحدة كل منهم له نطاق بالشكل $[0, x]$، أو بالشكل $[-x, 0]$.

يوضح الشكل 8-3 التوزيع حيث تكون دالة الكثافة تصاعدية لـ $x < 0$ ودالة تنازلية لـ x

.0 <. نرى كيف أن الكثافة تنقسم إلى مستطيلات أفقية، كل منهم يمثل توزيع موحد بين نقاط النهاية الأفقية لهذه المجموعة (سواء المجموعة [−x, 0] أو المجموعة [0, x]) . نفترض أننا قمنا باختيار كل مستطيل مع احتمالية أن يكون مساوي لمنطقته (هذه القيمة تصل إلى 1 حيث أنها تساوي تكامل دالة الكثافة الأصلية f) ثم نختار نموذج من المستطيل غير الموحد داخل المجموعة الأفقية. ويمكن أن نرى احتمالية الوصول إلى أي نقطة توافق ذلك من التوزيع الأصلي.



الشكل 8-3: مثال لتوزيع غير متجانس كمزيج بين التوزيعات الموحدة

نفترض مراعاة التقليل الداخلي، هذه هي طبيعة المسألة: بناءً على القرار x الذي تم اتخاذه من قبل صانع القرار، كيف يجب أن يتم اختيار توزيع ξ لتقليل القيمة المتوقعة لـ $\Pi(x, \xi)$؟ التوزيعات المتاحة أحادية النمط (بوسط حساب صفر). وأي كان التوزيع الذي تم اختياره، هناك بديل يعطينا نفس النتيجة من خلال تقسيم ذلك على عناصره الموحدة (المستطيلات الأفقية) كما في الشكل 8-3، ثم نختار أحدهم باحتمالية مناسبة. بالتالي، على سبيل المثال، إذا كان التوزيع F مكون من ثلاثة توزيعات موحدة U_A, U_B, U_C مع احتمالات P_A, P_B, P_C إذن

$$E_F[\Pi(x,\xi)] = p_A E_{U_A}[\Pi(x,\xi)] + p_B E_{U_B}[\Pi(x,\xi)] + p_C E_{U_C}[\Pi(x,\xi)].$$

ما سبق تكوين محدب لتوقعات التوزيعات الموحدة، ومن ثم يجب أن يأخذ واحد من الثلاثة القيمة $E_F [\Pi (x, \xi)]$ أو أقل. إذا كانت التوزيعات الثلاثة لها قيم أكبر من $E_F [\Pi(x, \xi)]$ إذن فنتيجة اختيارهم مع احتمالات معينة قد تكون أيضاً أكبر من $E_F [\Pi (x, \xi)]$.

هذا مثال لنوع من الحجج التي رأيناها بالفعل عندما قمنا بتقليل دالة خطية على مقامات متعددة، يمكننا فقط مراعاة النقاط القصوى للمقامات المتعددة. كذلك، إذا قمنا بتقليل التوقعات بشأن مجموعة التوزيعات A، يمكننا مراعاة النقاط القصوى للمجموعة A.

في الحقيقة، نستطيع عمل هذه الحجة كاملة في شكل مجرد وعام أكثر، فالمجموعة A من التوزيعات أحادية النمط بوسط حسابي صفر وتدعم النطاق a- إلى b هي نفسها مجموعة محدبة، بحيث إذا أخذنا تكوين محدب من هذين التوزيعين ستظل النتيجة هي توزيع أحادي النمط بوسط حسابي صفر. علاوة على ذلك، التوزيعات الموحدة على $[0, y]$ لـ $0 \le y \le b$, or $[-y, 0]$ for $0 \le y \le a$ هي النقاط القصوى لـ A (حيث لا يمكن الحصول عليهم من خلال تكوين محدب من توزيعين آخرين في A). عند تقليل دالة خطية على توزيعات، نحتاج إلى مراعاة النقاط القصوى (أي هذه التوزيعات الموحدة).

ومن ثم، لإيجاد التوزيع أحادي النمط لـ ξ (بوسط حسابي صفر) الذي يقلل $E[\Pi (x, \xi)]$ نحتاج فقط إلى مراعاة التوزيعات الموحدة سواء على $(-y, 0)$ أو على $(0, y)$. في حالة أن $\Pi (x, \xi)$ دالة مقعرة لـ ξ، يمكن أن نرى أن الحد الأدنى لـ $E[\Pi (x, \xi)]$ على التوزيعات $F \in A$ = {توزيعات موحدة مع دعم في نطاق $[-a, b]$ ووسط حسابي صفر} يمكن الحصول عليه سواء كانت F موحدة على $(-a, 0)$ أو موحدة على $(0, b)$.

سنبرهن على هذه النتيجة بتوضيح أن أحد هذه التوزيعات الموحدة يعطينا قيمة متوقعة لـ $\Pi (x, \xi)$ أصغر من التوزيع الموحد على $(0, y)$ لـ $0 < y < b$. (يمكن استخدام نفس المنهج لتوضيح أن أحد التوزيعات له قيمة متوقعة أصغر من التوزيع الموحد على $(-y, 0)$ for $0 < y < a$.)

قيمة x في $\Pi\ (x, \xi)$ لا يلعب دوراً في هذه المناقشة، ومن ثم نكتب $\Pi\ (\xi)$ for $\Pi\ (x, \xi)$.
ونلاحظ أن عندما تتم توزيع ξ على $(-a, 0)$

$$E(\Pi(\xi)) = \frac{1}{a}\int_{-a}^{0} \Pi(u)du$$

أي متوسط قيمة Π على $(-a, 0)$، وهناك تعبيرات مشابهة لتوقعات Π عندما يتم توزيع ξ على $(0, b)$ or $(0, y)$. نختار y اعتباطية مع $0 < y < b$: والهدف إظهار أن إذا كانت

$$\frac{1}{a}\int_{-a}^{0} \Pi(u)du > \frac{1}{y}\int_{0}^{y} \Pi(u)du,$$

إذن

$$\frac{1}{y}\int_{0}^{y} \Pi(u)du > \frac{1}{b}\int_{0}^{b} \Pi(u)du.$$

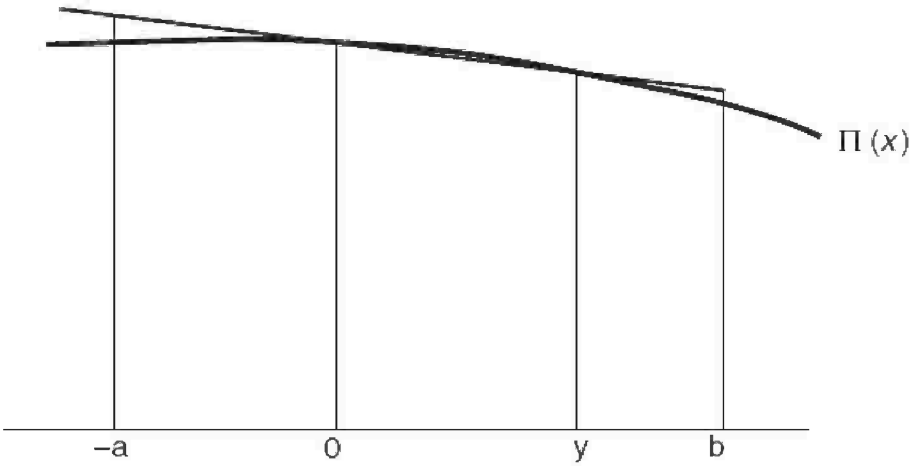
وبما أن Π مقعرة، يمكن رسم خط مستقيم بين النقاط على الرسم البياني لـ Π عند صفر وy وقيم Π أعلى الخط بين 0 وy وأدنى هذا الخط خارج النقاط، يظهر ذلك في الشكل 8-4. الآن، إذا كان الخط المستقيم أفقي عند ارتفاع h، يمكن استنتاج أن متوسط قيمة Π على $(0, a)$ قد يكون أكبر من المتوسط على $(-a, 0)$. وبما أننا نفترض أن متوسط قيمة Πعلى $(-a, 0)$أكبر من النطاق $(0, y)$، نرى أن الخط سوف يكون مائل للأسفل. بالتالي، نرى أن قيمة Π في النطاق (y, b) أقل من القيم في النطاق $(0, y)$. وبالتالي

$$\begin{aligned}
\frac{1}{b}\int_{0}^{b} \Pi(u)du &= \frac{1}{b}\int_{0}^{y} \Pi(u)du + \frac{1}{b}\int_{y}^{b} \Pi(u)du \\
&< \frac{1}{b}\int_{0}^{y} \Pi(u)du + \frac{(b-y)}{b}\Pi(y) \\
&< \frac{1}{b}\int_{0}^{y} \Pi(u)du + \frac{(b-y)}{b}\frac{1}{y}\int_{0}^{y} \Pi(u)du = \frac{1}{y}\int_{0}^{y} \Pi(u)du
\end{aligned}$$

ذلك يكمل ما نريد تأسيسه: حيث يجب أن يكون واحد من $(1/a)\int_{-a}^{0} \Pi(u)du$ أو $(1/b)\int_{0}^{b} \Pi(u)du$ أقل من أو مساوي لـ $(1/y)\int_{0}^{y} \Pi(u)du$. وهكذا توصلنا إلى أن

الحد الأدنى يحدث عند أحد هذه القيم

يمكن استبدال الوسط الحسابي صفر بقيمة اعتباطية w0. ومن ثم نفعل ذلك عندما نرغب في تقليل القيمة المتوقعة لدالة مقعرة $\Pi\ (x, \xi)$ على خيارات توزيع ξ أحادية النمط، ذات دعم عند (wL,wU)، ووسطها الحسابي عند $w0$، بعد ذلك نحتاج فقط إلى مراعاة خيارين: التوزيع الموحد على $(wL,w0)$ والتوزيع الموحد على $(w0,wU)$. ونوضح كيفية استخدام هذه النتيجة في حساب الحل القوي في المثال العملي بالأسفل.



الشكل 8-4: رسم بياني لتوضيح الحجة حول متوسطات دالة مقعرة Π

مثال عملي 8-5: تولوز للأجهزة الطبية

تريد شركة تولوز للأجهزة الطبية عمل طلب بأجهزة مراقبة القلب ليوافق الطلب غير المعلوم، توزيع الطلب مجهول بالنسبة للشركة لكنها تعتقد أن التوزيع أحادي النمط، حيث يبلغ أقل مستوى للطلب صفر وأعلى مستوى 200. القيمة ذات الاحتمال الأقوى هي 100. تبلغ تكلفة الوحدات 4000 دولار ويتم بيعها مقابل 10000 دولار. وهناك تكاليف مرتبطة بالوحدات غير المباعة وبعدم القدرة على تلبية الطلب. تقدر الشركة أن إذا كانت الطلبات x والطلب d، فإن تكاليف "عدم تلبية الطلب" هي $50(x - d)2$. بالتالي، تصبح

دالة الأرباح (1000s دولار) هي

$$\Pi(x, d) = 10\min(x, d) - 4x - 0.05(x-d)^2. \qquad (13\text{-}8)$$

تدرك الشركة أن في بعض الحالات قد تتكبد خسارة، لكنها ترغب في تعظيم الأرباح المتوقعة في حالة أسوأ توزيع محتمل للطلب.

الحل

دالة الأرباح في المعادلة (13-8) دالة مقعرة لـ d بمجرد تحديد x، حيث أن المكونات الثلاثة كلها مقعرة. وبناءً على النتيجة بالأعلى، نحتاج فقط لتقييم الأرباح المتوقعة لإثنين من التوزيعات المحددة لـ d: سواء كانت d موحدة على (0, 100) أو d موحدة على (100, 200).

$$E_{U(100,200)}[\Pi(x,d)] = \frac{1}{100}\int_{100}^{200}(10\min(x,u) - 4x - \frac{1}{20}(x-u)^2)du.$$

بشكل واضح تعتمد قيمة هذا التكامل على قيمة x إذا كانت $x \leq 100$

وإذا كانت $x > 100$

$$\begin{aligned}
&E_{U(100,200)}[\Pi(x,d)] \\
&= \frac{1}{100}\int_{100}^{x}(10u - 4x)du + \frac{1}{100}\int_{x}^{200}6x\,du - \frac{1}{100}\int_{100}^{200}\frac{1}{20}(x-u)^2du \\
&= -4x\frac{x-100}{100} + \frac{1}{100}\left[5u^2\right]_{100}^{x} + 6x\frac{200-x}{100} + \frac{1}{2000}\left[(x-u)^3/3\right]_{x}^{200} \\
&= \frac{x}{10}(160-x) + \frac{1}{20}(x^2-100^2) + \frac{1}{6000}\left((x-200)^3 - (x-100)^3\right).
\end{aligned}$$

ويمكن تقييم التوزيع الآخر على نحو مشابه

$$E_{U(0,100)}[\Pi(x,d)] = \frac{1}{100}\int_{0}^{100}(10\min(x,u) - 4x - \frac{1}{20}(x-u)^2)du.$$

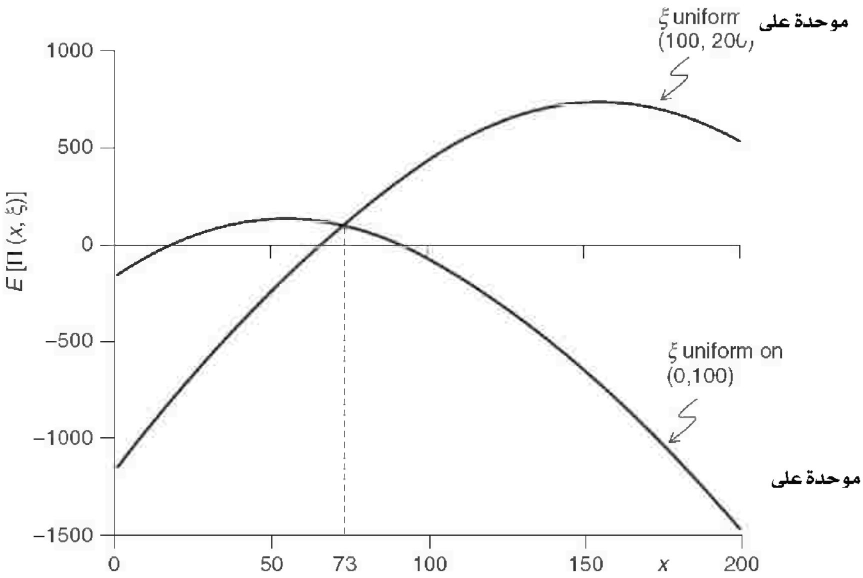
إذا كانت $x \leq 100$

$$
\begin{aligned}
&E_{U(0,100)}[\Pi(x,d)] \\
&= \frac{1}{100}\int_0^x (10u-4x)du + \frac{1}{100}\int_x^{100} 6x du - \frac{1}{2000}\int_0^{100} (x-u)^2)du \\
&= -4x\frac{x}{100} + \frac{1}{100}\left[5u^2\right]_0^x + 6x\frac{100-x}{100} + \frac{1}{2000}\left[(x-u)^3/3\right]_0^{100} \\
&= \frac{1}{10}x\,(60-x) + \frac{x^2}{20} + \frac{1}{6000}\left((x-100)^3 - x^3\right),
\end{aligned}
$$

وإذا كانت $x > 100$

$$
\begin{aligned}
E_{U(0,100)}[\Pi(x,d)] &= \frac{1}{100}\int_0^{100} (10u-4x)du - \frac{1}{100}\int_0^{100} \frac{1}{20}(x-u)^2 du \\
&= -4x + \frac{1}{100}\left[5u^2\right]_0^{100} + \frac{1}{2000}\left[(x-u)^3/3\right]_0^{100} \\
&= -4x + 500 + \frac{1}{6000}\left((x-100)^3 - x^3\right).
\end{aligned}
$$

يوضح جدول البيانات BRMch8-Toulouse.xlsx قيم $EU(0,100)[\Pi(x, d)]$ مع تغير x، كما تم توضيحها أيضاً في الشكل 8-5.



الشكل 8-5: الربح المتوقع لـ TMD كدالة x لتوزيعين بحد أقصى موحدين للطلب

وجدير بالذكر أن قيمة x المثلى القوية هي التي تعظم الحد الأدنى للأرباح. والحجم الأمثل للطلب هو $x = 73$، الذي يضمن حد أدنى للأرباح بقيمة 99883 دولار. نستطيع أن نرى قيم متعددة لـ x، وقد تكون الأرباح المتوقعة سالبة إذا كان خيار توزيع الطلب سيئاً.

ملاحظات

المعلومات حول نظرية فرانك نايت عن الغموض مأخوذة من كتاب برنشتاين. أثار التحسين القوي الكاملة اهتمام كبير في السنوات القليلة الماضية وهناك عدد كبير من الأبحاث التي تتناول جوانب التحسين القوي. وتقدم المقالة النقدية لبرنشتاين، براون آند كرمانيس (2011) فكرة جيدة عن ثقافة التحسين القوي المكثفة.

بينما نتناول هنا مبادئ التحسين القوى مع التركيز على المساءل صغيرة الحجم نسبياً ذات مجموعات مجهولة بسيطة. مناقشة الميزانية المجهولة في الجزئية 8-2 من أعمال ديمتريس بريستماس بالتعاون مع كتاب آخري (بريستما وسيم، 2004). في تلك الجزئية نستخدم خصائص الازدواجية لعمل نفس المسألة وحلها – ذلك المنهج في الازدواجية يمكن أن يمتد إلى تنوع كامل لمزيد من مساءل التحسين القوي المعقدة.

كذلك، قد يمتد تناول التحسين القوي من حيث التوزيع إلى طرق عدة، حيث أن المجموعات الغامضة التي بحثناها حتى أدق التفاصيل كانت دوال أحادية النمط بوسط حسابي معلوم، على وجه التحديد سهل التحليل. يمكن إيجاد بعض النظريات ذات الصلة لكن في سياق توزيعات متعددة الأبعاد في شيبارو (2006).

كما أن هناك أعمال تبحث في حساب الحلول المثلى لعدد متنوع من المساءل، على سبيل المثال، المساءل ذات الخصائص الديناميكية التي تتوافق مع التحسين العشوائي الذي تمت مناقشته في الفصل السابع. لمزيد من المناقشان الشاملة حول المادة ننصح القارئ بالرجوع إلى كتاب Ben-Tal, El Ghaoui and Nemirovski (2009).

المراجع

Ben-Tal, A., El Ghaoui, L. and Nemirovski, A. (2009) *Robust Optimization.* Princeton University Press.

Bernstein, P. (1996) *Against the Gods: The Remarkable Story of Risk* . John Wiley & Sons.

Bertsimas, D., Brown, D. and Caramanis, C. (2011) Theory and applications of robust optimization. *SIAM Review*, 53, 464–501.

Bertsimas, D. and Sim, M. (2004) The price of robustness. *Operations Research*, 52, 35–53.

Shapiro, A. (2006) Worst-case distribution analysis of stochastic programs. *Mathematical Programming Ser. B*, 107, 91–96.

تمارين

8-1 أعد كتابة الشروط

نفترض أن المسألة تتمثل في اختيار كمية من منتج ماxi، للمنتجات i=1,2,3,4 حيث أن معدلات الفشل مرتفعة وغامضة. الوقت المستغرق لإنتاج وحدة من المنتج هي دقيقة واحدة. لكن نظراً لمعدلات الفشل، إنتاج كمية xi من المنتج i يتطلب aixi دقائق، حيث ai ≥ 1، ومعدلات الإنتاج ai غامضة. نفترض أننا على يقين أن $a1 \leq 1.1,\ a3 \leq 1.1$. علاوة على ذلك، معدلات الفشل مترابطة بشكل معقد. يرى الخبير أنه يمكن فرض الشروط التالية:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \leq 4.3,$$
$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \leq 0.1.$$

قم بصياغة الشرط على كميات المنتج لكل من المنتجات الأربعة إذا كان من الضروري ضمان صنع هذه المنتجات في أقل من 40 ساعة إجمالاً (2400 دقيقة).

8-2 معاملات غير متعلقة

مسألة تعظيم قوي تحتوي على الشرط

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \leq b$$

الذي يجب أن يخضع له كل من $(a_1, a_2, a_3) \in A$ حيث أن A تمثل المجموعة حيث $ai \in$

$(a_i - \delta_i , a_i + \delta_i)$، وليس هناك علاقة بين قيم a_i. وضح ذلك باستخدام قيم مجردة $|x_1|$, $|x_3|$, $|x_2|$ بحيث يمكن إعادة كتابة ذلك بشرط وحيد.

3-8 تأثير الميزانية المجهولة

(أ) قم بحل مثال أفيجنون للاستيراد في ظل وجود ميزانية مجهولة $B = 1.5$ وقارن دوال الهدف بحالة أن $B = 2$ لترى كم الزيادة في الأرباح المتوقعة مع أخذ أقل المناهج تحفظاً.

(ب) وضح ما إذا كان لا يوجد ميزانية مجهولة (وكل متغير يمكن أن يأخذ أي قيمة في مجموعته)، والتي تعادل الوضع $B = 3$، وبالتالي لا يوجد حل محتمل.

4-8 التعظيم القوي لسنتينل

في مثال سنتينل، استخدم جدول البيانات لتوضيح ما إذا كان قد تم تخفيض أسعار البيع إلى 600 دولار و550 دولار للأجهزة كبيرة وصغيرة الحجم،وبالتالي فإن الحل الأمثل يتضمن $x_L = x_S = 0$. اشرح سبب حدوث ذلك.

5-8 مجموعات مجهولة بدوال مقعرة

نفترض أن A متعدد المقام وله زوايا $a(1), a(2), \ldots , a(k)$ (كل منهم يمثل متجه في R^n).
إذا كانت $\_(x, a)$ دالة a مقعرة لكل x محددة و$v \leq _(x, a(i))$ for $i = 1, 2, \ldots , k$ (إذن s اقل من $\_(x, a(i))$ عن كل نقطة زاوية)، أثبتت أن $v \leq \_(x, a)$ لكل $a \in A$.

6-8 بروفينس رينتالز

تمتلك بروفينس رينتالز أسطول مكون من 100 سيارة تؤجرهم باليوم، تفكر الشركة بالاستثمار في أنظمة GPS للسيارات وسوف يكلفهم ذلك 4 دولار إضافية يومياً على إيجار أنظمة GPS. تبلغ تكلفة شراء أنظمة GPS 500 دولار وتتطلب أيضاً تركيب حامل آمان بتكلفة 250 دولار للسيارة. تتمكن بروفينس من بيع سياراتها بعد 500 يوم وهي أيضاً

مدة عمر أنظمة GPS. ومن ثم، السيارة التي تحتوي على النظام لها قيمة إضافية بعد هذه الفترة مقارنة بالسيارة دون النظام. فور إعلان بروفينس رينتالز عن هذه الخدمة سوف تكون غالية الثمن من حيث عدم القدرة على توفيرها. تعتقد بروفينس رينتالز أنها ستتحمل 10 دولار إذا كان العميل غير قادر على الحصول على النظام لكنه قام بطلبه.

(أ) قم بصياغة ما سبق كمسألة تعظيم قوي بناءً على الافتراضات التالية: (أ) يتم ايجار كل السيارات كل يوم. (ب) يجب أن تتخذ بروفينس رينتالز قرار في بداية الـ 500 يوم حول كيف يتم تركيب أنظمة GPS ولا يمكن تركيب مزيد من الأنظمة على مدار فترة 500 يوم. (ج)نفس الفئة من العملاء تطلب أنظمة GPS كل يوم (لكن لا تستطيع بروفينس رينتالز التنبؤ بهذه الفئة).

(ب) أثبت أن إذا اتخذت بروفينس رينتال قرار بعدد الأنظمة التي سيتم تركيبها ، ثم يتم اختيار قيمة p، فئة العملاء التي قامت بطلب الأنظمة، ومن ثم تحقق الشركة أقل أرباح، بعد ذلك يتم اختيار p عند 0 أو 1.

(ج) استخدم المعطيات في النقطة السابقة لحل مسألة التعظيم القوي.

7-8 تولوس للأجهزة الطبية

في مثال تولوس للأجهزة الطبية نفترض أن الشركة تعلم أن توزيع الطلب أحادي النمط لكنها غير قادرة على تحديد قيمة الوسط الحسابي (مع وجود جوانب أخرى من المسألة غير معلومة). اشرح لماذا يتراجع القرار إلى مسألة تعظيم قوي عادية؟ واحسب أفضل خيار للطلب x.