الفصل الثاني

الكميات العددية والكميات المتجهة

Scalars & Vectors

بعد أن يكمل القارئ هذا الفصل، ويستوعب المفاهيم والأفكار والمبادئ التي وردت خلاله، من المتوقع أن يكون قادراً على:

1. أن يميِّز بين الكميات العددية، والكميات المتجهة.
2. أن يعدد بعض الأمثلة على كلا النوعين من الكميات العددية والمتجهة من خلال دراسته المنهجية.
3. أن يختار الطريقة الرياضية الصحيحة للتعامل مع كل من الكميات العددية والمتجهة.
4. أن يتعلم كيفية تحليل الكميات المتجهة في المستوى الديكارتي وفي الفراغ ويحدد مقدار واتجاه المحصلة.
5. أن يميِّز متجه الوحدة، أهميته واستعمالاته التطبيقية، ولاسيما في عمليتي الضرب القياسي والضرب الاتجاهي.

الكميات العددية والكميات المتجهة

Scalars & Vectors

1-1 المقدمة *Introduction*:

تعتبر المعرفة الصحيحة بكل من الكميات العددية *scalars* والكميات المتجهة *vectors*، أمراً أساسياً في علم الفيزياء، وأهميتها تتجسد في التعرف على طبيعتها وسلوكها وتغيرها بالنسبة لبعضها البعض، وعلى وجه الخصوص تغيّرها بالنسبة للزمن، كما أن تحديد بدايتها ونهايتها ومعرفة موقعها في المستوى الديكارتي *(x-y plane)* ومقاديرها على المحور السيني *(x)* والمحور الصادي *(y)* وحساب ذلك بدلالة زاوية المتجه، بدءاً من نقطة الأصل عند المحور السيني الموجب *(x)* وباتجاه معاكس لحركة عقارب الساعة *counter clockwise*، كل ذلك يجعلنا نتعامل مع الكمية المتجهة بيسر وسهولة، وحرصاً على تبسيط الأمر سنتناول كلاً من هذين النوعين من الكميات على انفراد.

2-2 الكميات العددية *Scalars*:

تعريف الكمية العددية *scalar*: هي الكمية الفيزيائية التي يمكننا أن نعيِّنها تعييناً كاملاً بمعرفة كلٍ من:

1- مقدارها العددي *magnitude* .

2- وحدة قياسها *measurment unit*.

ويُمثَّل ذلك عادة بعدد متبوع بوحدة قياس مناسبة *unit*، فمثلاً عندما نقول: إن كتلة جسم ما تساوي (5) دون أن نذكر وحدة قياس الكتلة المستخدمة، فإن ذلك يجعلنا نتساءل هل وحدة القياس هي الكيلوغرام أم الباوند أم الغرام أم ماذا؟ ولكنّنا عندما نقول: إنَّ الكتلة تساوي ($5\ kg$)، نكون قد أوضحنا المسألة إيضاحاً تاماً، وفي واقعنا هناك أمثلة كثيرة جداً على الكميات العددية، مثل الزمن والمساحة والحجم والكثافة والطاقة والشحنة ودرجة الحرارة، وما إلى هنالك من الكميات التي تُحدَّد بمجرد قياسها بواسطة جهاز قياس مُتفق عليه تحديداً تاماً. بعد أن عرفنا ذلك، يمكننا أن نتعامل مع الكميات العددية باستخدام القواعد الرياضية البسيطة في الجبر كالجمع والطرح والقسمة والضرب.

2-3 الكميات المتجهة *Vectors*:

تعريف الكمية المتجهة *vector*: هي الكمية الفيزيائية التي يمكننا تعيينها تعييناً كاملاً بمعرفة كلٍ من:

1- مقدارها العددي *magnitude*.

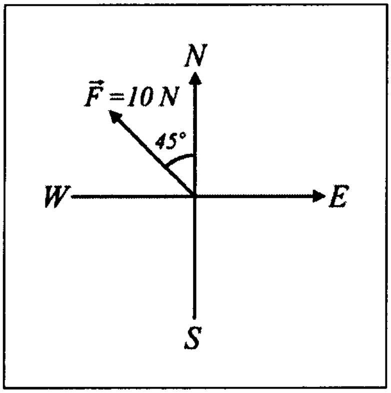
2- اتجاهها *direction*، سواء في المستوى (xy) أو في الفراغ (xyz).

3- نقطة تأثيرها *action point*.

4- محور عملها *action axis*.

ومن الأمثلة المألوفة على الكميات المتجهة، القوة *force*، الإزاحة *displacement*، شدة المجال المغناطيسي *magnetic field*، السرعة *velocity*، التسارع *acceleration*، العزم الخطي *momentum*. ومن الممكن تمثيل الكمية

المتجهة بسهم arrow مرسوم على محور عمله، ونستخدم عادةً المحاور الديكارتية لتحديد كلٍ من المقدار والاتجاه وفق مقياس رسم محدد ومعلوم؛ حيث يكون طول السهم متناسباً مع مقدار الكمية المتجهة واتجاه السهم يعبِّر عن اتجاه تلك الكمية، فعلى سبيل المثال، إذا أثرت قوة مقدارها $(10\,N)$ على جسم باتجاه الشمال الغربي $(N\text{-}W\ direction)$، فإن هذه القوة يمكن تمثيلها بسهم طوله عشر وحدات طول كل منها تساوي $(1\,N)$ ويكون السهم مرسوماً بالاتجاه الذي يطابق اتجاه تأثير القوة على الجسم، انظر الشكل (1-2).



الشكل (1-2) يمثل القوة $(\vec{F})$ مقدارها $(10\,N)$
واتجاهها الشمالي الغربي[1]

ومن الجدير بالذكر أنّ الكمية المتجهة يجري تمثيلها برمز، وهو عبارة عن حرف لاتيني أو إنكليزي فوقه سهم مثل $(\vec{A})$، أما مقدارها فنكتفي بكتابة الحرف (A) دون تحديد الاتجاه، وعلى سبيل المثال في الشكل (1-2) المتجه $(\vec{F})$ يمثل القوة ككمية متجهة، أما مقدارها فهو $(F = 10\,N)$

(1) من المتعارف عليه، إذا لم يتم تحديد الزاوية فإن المقصود بالشمال الغربي هو منتصف الربع الثاني، أي أن الزاوية تساوي (°45) مع الشمال، وتساوي (°135) بدءاً من ا لمحور السيني الموجب.

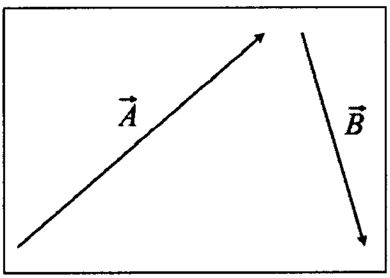
والسؤال الآن هو: هل يمكننا استخدام القوانين الجبرية البسيطة كالجمع والطرح والضرب مع الكميات المتجهة؟ إن الإجابة الأولية هي: لا يمكن إطلاقاً؛ ذلك أن للكميات المتجهة قوانينها المناسبة الخاصة بها، وسنتناول هذه القوانين بشكل موجز في الفقرات التالية.

2-4 جمع المتجهات بطريقة الرسم البياني

:*Adding Vectors: Graphical Method*

إن هذه الطريقة تعتبر بدائية وغير عملية ولاسيما فيما إذا استخدمنا الطريقة التحليلية لإيجاد محصلة أكثر من متجهين، وسوف نتناول هذه الطريقة في فقرة خاصة قادمة في هذا الفصل.

ولتوضيح طريقة جمع المتحهات بطريقة الرسم البياني، افرض أن لدينا المتجهين $(\vec{A})$ و $(\vec{B})$. انظر الشكل (2-2 أ).



الشكل (2-12) ويمثل المتجهين $(\vec{A})$ و $(\vec{B})$

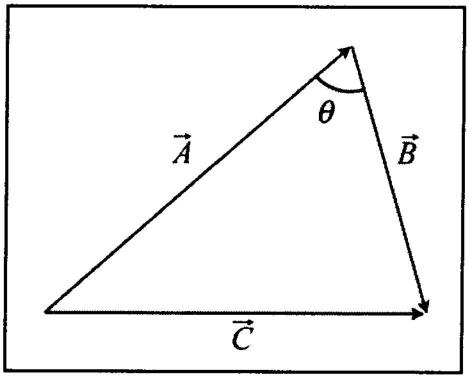
وأردنا إيجاد محصلة هذين المتجهين مستخدمين طريقة الرسم البياني، نبدأ أولاً بنقل المتجه الأول[1] $(\vec{A})$ نقلاً صحيحاً بجميع مواصفاته الهندسية،

(1) نلاحظ أننا بدأنا بالمتجه (A) لأن المتجه المطلوب هو $(\vec{C} = \vec{A} + \vec{B})$ ، علماً بأنّ $(\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A})$.

ثم نبدأ بعد ذلك بنقل المتجه $(\vec{B})$ حيث تكون بدايته عند نهاية المتجه الأول $(\vec{A})$ ، ثم نصل بين بداية المتجه $(\vec{A})$ ونهاية ا لمتجه $(\vec{B})$ مراعين دقة الرسم الهندسي، إنّ المتجه الجديد $(\vec{C})$ والذي بدايته عند بداية المتجه $(\vec{A})$ ونهايته عند نهاية المتجه $(\vec{B})$ هو حاصل جمع المتجهين $(\vec{A})$ و$(\vec{B})$ ، أي أن:

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} \qquad (2\text{-}1)$$

انظر الشكل (2-2 ب).



الشكل (2-2 ب) إيجاد محصلة متجهين باستخدام طريقة الرسم البياني

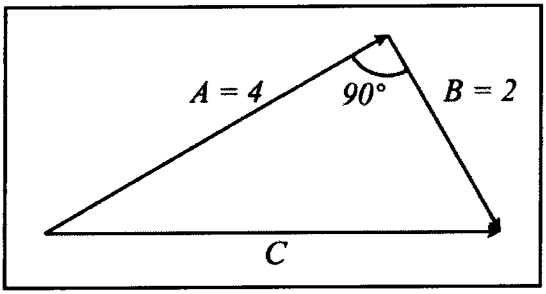
أما القيمة العددية للمتجه $(\vec{C})$ فتحسب بطريقتين، الأولى هي الطريقة التحليلية ، والثانية باستخدام ما يسمى بقانون الجيب تمام *cosine law* ، وهذا يتطلب معرفة مقدار كل من المتجهين $(\vec{A})$ و$(\vec{B})$ وكذلك الزاوية المحصورة بين المتجه الأول $(\vec{A})$ والمتجه الثاني $(\vec{B})$ ، أما الصيغة الرياضية لقانون "الجيب تمام" فهي:

$$\boxed{C^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos(\theta)}$$

وسنثبت صحة هذا القانون في الفقرة (2-8-1) الخاصة بالضرب القياسي.

مثال (2-1) *Example*:

باستخدام قانون الجيب تمام أوجد محصلة المتجهين $(\vec{A})$ و$(\vec{B})$ المبينين بالشكل (2-3)، علماً أنّ الزاوية بينهما $(\theta = 90°)$.



الشكل (2-3)

الحل *Solution*:

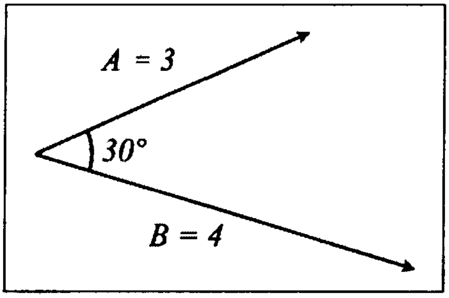
من الواضح أن الزاوية بين المتهجين تساوي $(\theta = 90°)$، إذاً:

$$C^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos(\theta)$$
$$= (4)^2 + (2)^2 + 2(4)(2)\cos(90) = 16 + 4 = 20$$
$$C^2 = 20$$
$$|C| = 4.47$$

ملاحظة: لقد تمّ تحديد متجه المحصلة $(\vec{C})$، حيث تكون بدايته هي بداية المتجه الأول ونهايته عند نهاية المتجه الثاني.

مثال (2-2) *Example*:

باستخدام قانون الجيب تمام *cosine law*، أوجد محصلة المتجهين $(\vec{A})$ و$(\vec{B})$، إذا علمت أن مقداريهما العددين $(A = 3, B = 4)$ والمبيّنين بالشكل (2-4)، حيث أنّ مقدار الزاوية بينهما $(\theta = 30°)$.



الشكل (2-4)

الحل **Solution**:

من المعلوم لدينا أن محصلة متجهين باستخدام قانون الجيب تمام يعبَّر عنها رياضياً على النحو الآتي:

$$C^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos(\theta)$$
$$C^2 = (3)^2 + (4)^2 + 2(3\times 4)\cos(30)$$
$$C^2 = 9 + 16 + 24(0.8660) = 45.78$$
$$|C| = 6.76$$

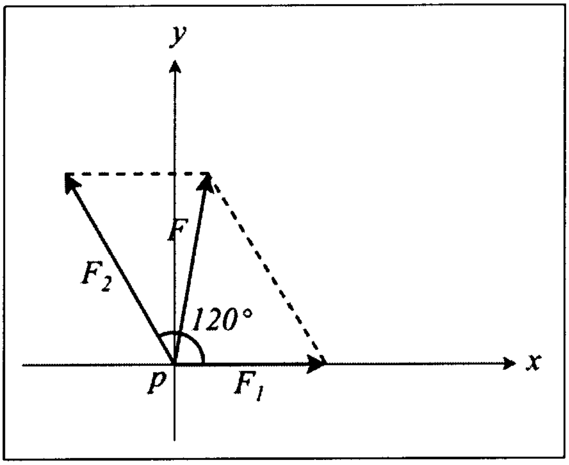
مثال (2-3) **Example**:

قوتان، مقدار الأولى $(\vec{F}_1 = 6N)$، ومقدار الثانية $(\vec{F}_2 = 9N)$ تؤثران في نقطة مادية (P)، انظر الشكل (2-5)، باستخدام قانون الجيب تمام أوجد حسابياً محصلة هاتين القوتين إذا كانت الزاوية بينهما $(\theta = 120°)$.

الحل **Solution**:

هذا المثال مشابه في فكرته للمثال السابق (2-2)، وباستخدام المعادلة الرياضية لقانون الجيب تمام نجد أن:

$$|F| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos(\theta)}$$
$$= \sqrt{(6)^2 + (9)^2 + 2(6)(9)\cos(120)}$$
$$= 7.9\,N$$



الشكل (5-2)

وهذا مثالٌ مباشرٌ يوضح كيف يمكننا إيجاد محصلة قوتين، وذلك إذا عرفنا مقدار كل منهما ومقدار الزاوية المحصورة بينهما، وهذا القانون لا يستخدم إلا مع الكميات المتجهة، وسنناقش في الفقرات القادمة كيف يمكننا تحديد اتجاه هذه القوة المحصلة (F) استكمالاً لتعريفها؛ حيث اكتفينا بإيجاد مقدارها حسابياً، وبتعيين موقعها وذلك بعد إكمال الشكل إلى متوازي أضلاع، قطره يمثل القوة المحصلة (F).

2-4-1 خصائص جمع المتجهات *Vectors Addition Properties*:

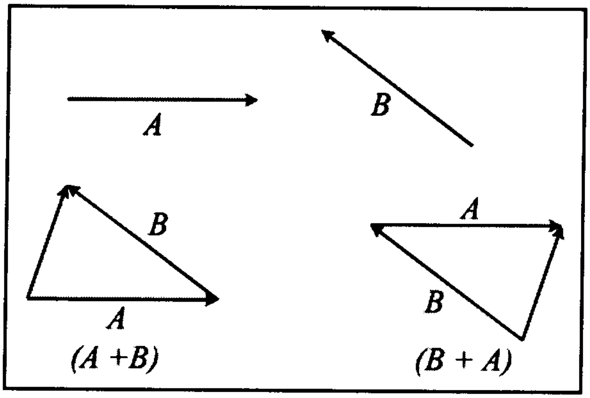
سنبين فيما يلي الخصائص الرياضية لعملية جمع المتجهات:

1- الخاصية التبادلية *commutative law*: ومفاد هذه الخاصية أنّ عملية

البدء بترتيب المتجهات التي نريد جمعها ليست مهمة، فلو كان لدينا المتجهين $(\vec{A})$ و $(\vec{B})$ فإننا نستطيع اعتماداً على هذه الخاصية أن نُعبّر عن محصلتهما على النحو التالي:

$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A} \qquad (2\text{-}2)$$

ويمكن توضيح ذلك من خلال الشكل (6-2).



الشكل (6-2) يوضح الخاصية التبادلية لجمع كميتين اتجاهيتين $(\vec{A})$ و $(\vec{B})$

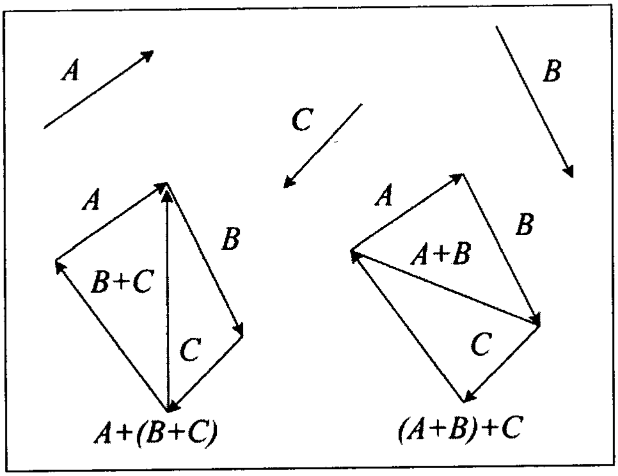
2- الخاصية الترافقية *assosiation law*: إن معنى هذه الخاصية يُمكن توضيحه في حالة الجمع الاتجاهي لثلاث كميات ($\vec{A}$ و $\vec{B}$ و $\vec{C}$)، وذلك بالتعبير رياضياً عنها على النحو الآتي:

$$(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}=\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C}) \qquad (2\text{-}3)$$

ويمكن توضيح ذلك من خلال الشكل (7-2).

ومن الجدير بالذكر هنا أن المتجه $(\vec{A})$ لا يساوي المتجه $(-\vec{A})$ أي أن:

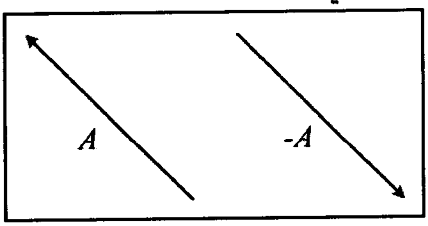
$$\vec{A}+(-\vec{A})=0 \qquad (2\text{-}4)$$



الشكل (2-7) يوضح الطريقة الترافقية للجمع الاتجاهي؛

حيث $(\vec{A})$ و $(\vec{B})$ و $(\vec{C})$ ثلاث كميات اتجاهية، ويلاحظ أن: $(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}=\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})$

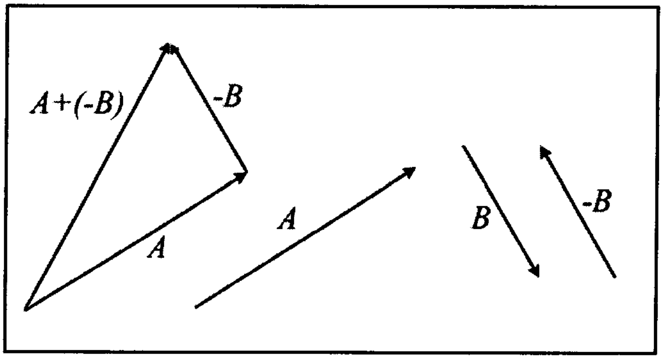
وهذا ما يفيد أن المتجه $(-\vec{A})$ له مقدار المتجه $(\vec{A})$ نفسه، ولكنه في اتجاه معاكس له تماماً، ولعل هذا ما يؤكد مجدداً المعنى الدقيق للكمية الاتجاهية ومضمونها الهندسي، انظر الشكل (2-8).



الشكل (2-8) يوضح أن المتجه $(\vec{A})$ لا يساوي $(-\vec{A})$

2-4-2 طرح المتجهات *Vectors Subtraction*:

هي العملية الثانية بعد الجمع، وذلك لتحديد حاصل طرح الكميات المتجهة، وهي تستند أصلاً في معناها إلى ما سبق ذكره حول الجمع الاتجاهي مع مراعاة أن المتجه $(\vec{B})$ لا يساوي المتجه $(-\vec{B})$ ولتوضيح ذلك انظر الشكل (2-9).



الشكل (9-2) يوضح عملية الطرح الاتجاهي
ويظهر فيه أن عملية الطرح هي عملية جمع لسالب المتجه $(\vec{B})$

$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B}) \qquad (2\text{-}5)$$

أي أن عملية الطرح الاتجاهي تمت بإضافة المتجه $(-\vec{B})$ إلى المتجه $(\vec{A})$.

أما عملية الضرب الاتجاهي فسوف نناقشها بعد أن نتعرف على متجهات الوحدة في الفقرات القادمة من هذا الفصل.

5-2 المتجهات ومركباتها *Vectors and their Components*:

إن عملية تمثيل وتحديد الكمية المتجهة *vector* بطريقة الرسم التي قدمناها في الفقرة (4-2) من هذا الفصل، تعتبر عمليةً مملةً وشاقةً لما تتطلبه من دقة في الرسم الحرفي للكميات المتجهة، وكذلك إتمام العمليات الأخرى كالجمع والطرح. ولهذا تعد طريقة تمثيل وتحليل الكميات المتجهة باستخدام المحاور المتعامدة (x, y) أو ما يسمى بالمحاور الديكارتية *cartesian axes* ومعرفة اتجاه الكمية المتجهة وبعد ذلك سهولة تحويلها إلى مجرد مركبات

سينية *x-components* وأخرى صادية *y-components*، من أفضل الطرق المعتمدة لهذا الغرض، مع ضرورة مراعاة ما يلي:

1- خصائص المحاور المتعامدة عند نقطة التقاطع ، ت الإحداثيات (0.0) والاتجاهين السالب والموجب للمحاور.

2- استخدام النظرية المعروفة والشهيرة في المثلثات المتعامدة -نظرية فيثاغورس- لإتمام العمليات الحسابية.

3- الاستفادة المباشرة من النسب المثلثية الثلاثة الجيب (sin) والجيب تمام (cos) والظل (tan) لمعرفة ما يتعلق بتحديد الكمية المتجهة، مقادير مركباتها وكذلك تحديد اتجاهها.

ولبيان ذلك انظر الشكل (10-2)، وتأمل موقع المتجه $(\vec{A})$، وكذلك المركبتين السينية (A_x) والصادية (A_y) والزاوية (θ) التي تحدد اتجاه الكمية المتجهة $(\vec{A})$.

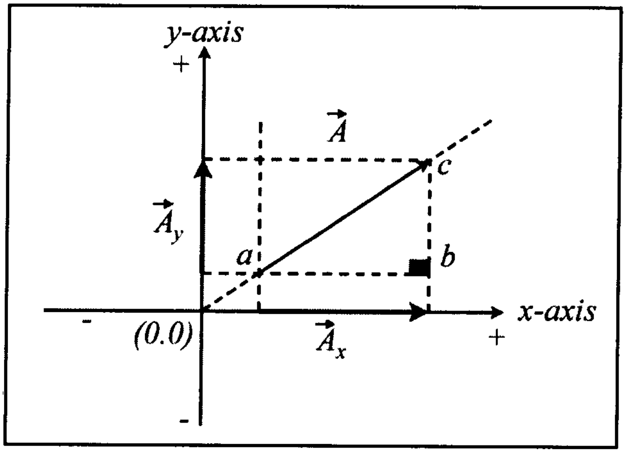
والآن تأمل الشكل (10-2) ولاحظ الآتي:

1- الكميتان المتجهتان $(\vec{A}_x)$ و $(\vec{A}_y)$ هما عبارة عن المركبتين العموديتين للمتجه $(\vec{A})$.

2- من الممكن عملياً نقل المتجه أو مركباته السينية والصادية[1] مادمنا نحافظ على مقداره واتجاهه، كما يمكننا التعامل مع الحالة الجديدة كما كنا نتعامل مع الحالة قبل النقل. ثم لاحظ المثلث القائم $(a\ b\ c)$، حيث إنَّ

(1) المقصود بنقل المتجه، تحريكه على خط تأثيره، وخط تأثير المتجه هو خط وهمي منطبق على المتجه نفسه.

ضلعيه القائمان هما عبارة عن المتجهين (A_x) و (A_y)، والمتجه $(\vec{A})$ يعمل على الخط المار من نقطة الأصل (0.0)؛ حيث يعتبر هذا الخط محور عمله.



الشكل (2-10) يمثل الكمية المتجهة $(\vec{A})$ على المحاور المتعامدة (x, y)
ويوضح اتجاهها ومركباتها الاتجاهية

3- بعد ذلك يمكننا استخدام خصائص المثلث القائم لكي نعبّر عن كلٍ من المركبتين (A_x) و (A_y) من خلال النسب المثلثية للزاوية (θ) التي تحدد اتجاه المتجه $(\vec{A})$.

$$cos(\theta) = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{A_x}{A}$$

$$\boxed{A_x = A\cos(\theta)} \qquad (2\text{-}6)$$

مرة أخرى:

$$sin(\theta) = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{A_y}{A}$$

$$\boxed{A_y = A\sin(\theta)} \qquad (2\text{-}7)$$

وبما أن المحورين (x, y) متعامدان، سنناقش الآن بعض الحالات الخاصة للزاوية (θ).

1- عندما تكون الزاوية $(\theta = 90°)$، هذا يؤدي إلى:

$$A_x = A\cos(90) = 0$$

أي أن المركبة السينية للمتجه تساوي الصفر، بينما:

$$A_y = A\sin(90) = A$$

أي أن المركبة الصادية للمتجه تساوي المتجه نفسه، وهي أعلى قيمة للمركبة الصادية (A_y).

2- عندما تكون الزاوية $(\theta = 0°)$، وهذا يؤدي إلى:

$$A_x = A\cos(0) = A$$

أي أن المركبة السينية تساوي المتجه نفسه، وهي أعلى قيمة للمركبة السينية (A_x) بينما:

$$A_y = A\sin(0) = 0$$

أي أن المركبة الصادية تساوي الصفر.

ولكن على وجه العموم، قد تكون المركبتان السينية والصادية أو إحداهما موجبة أو سالبة، وذلك حسب اتجاه الكمية المتجهة الأساسية الذي لابد أن نحدده بدءاً من الزاوية $(\theta = 0)$ عند المحور السيني الموجب، ثم نكمل الحركة بعكس اتجاه حركة عقارب الساعة، وذلك بقدر زاوية المتجه.

3- بقسمة المعادلتين (2-7) و(2-8) على بعضهما نحصل على:

$$\frac{A_y}{A_x}=\frac{A\sin(\theta)}{A\cos(\theta)}$$

$$\boxed{\tan(\theta)=\frac{A_y}{A_x}} \qquad (2\text{-}8)$$

وللمعادلة (2-8) أهمية بالغة حيث تُستخدم لتحديد اتجاه المحصلة، كما يمكننا أن نستبدل فيها كلاً من (A_y) و (A_x)، بمجموع المركبات الصادية والسينية لعدد من الكميات المتجهة $(\vec{A}_1,\vec{A}_2,\vec{A}_3,...)$، وذلك كما يلي:

نستبدل (A_y) بالمجموع $\left(\sum A_y\right)$ حيث:

$$\sum A_y = A_{y1}+A_{y2}+A_{y3}+...$$

وكذلك نستبدل (A_x) بالمجموع $\left(\sum A_x\right)$ حيث:

$$\sum A_x = A_{x1}+A_{x2}+A_{x3}+...$$

وذلك عندما نقوم بتحليل عدد من الكميات المتجهة $(\vec{A}_1,\vec{A}_2,...)$.

وأخيراً، فإن اتجاه المحصلة يمكن تحديده بمعرفة مقدار الزاوية (θ)، وذلك باستخدام المعادلة (2-8) على النحو الآتي:

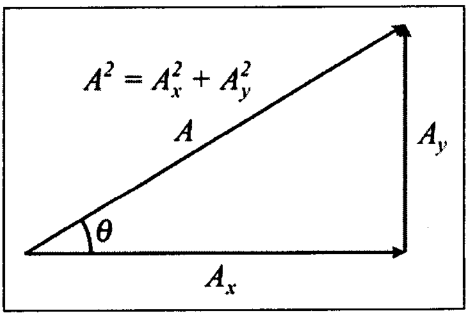
$$\tan(\theta)=\frac{\sum A_y}{\sum A_x}$$

$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{\sum A_y}{\sum A_x}\right) \qquad (2\text{-}9)$$

ومـن خـلال تحديـد القيمـة العدديـة للطـرف الأيمـن للمعـادلتين $(2\text{-}8)$ و$(2\text{-}9)$ بحسب الحالة المطلوبة يمكننا تحديد الاتجاه، سواءً كان ذلك لمتجهٍ واحدٍ أو لمحصلة مجموعة من المتجهات، فعلى سبيل المثال عندما يكون الطـرف الأيمـن للمعادلـة $(2\text{-}9)$ $(\Sigma A_y / \Sigma A_x)$ مسـاوياً إلى الواحـد، فإننـا بعـد التعويض نحصل على ما يلي:

$$\tan(\theta) = 1$$
$$\theta = \tan^{-1}(1)$$
$$= 45°$$

وبالرجوع مرة أخرى إلى الشـكل (2-11) نجد أن أضلاع المثلث القائم $(a\ b\ c)$ تمثل الآتي:



الشكل (2-11) وفيه تظهر المركبتان (A_x) و (A_y) ضلعين قائمين للمثلث $(a\ b\ c)$

إنَّ (A_x) و (A_y) المركبتان السينية والصادية وهما عبارة عن الضلعين القـائمين في المثلـث $(a\ b\ c)$، بينمـا المتجـه $(\vec{A})$ هـو عبـارة عـن وتـر المثلـث، وباستخدام نظرية فيثاغورس نجد أنّ:

$$A^2 = A_x^2 + A_y^2$$

$$\boxed{A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}} \qquad (2\text{-}10)$$

وبشكل عام، ومثلما استخدمنا العلاقة *(2-8)* وتوصلنا إلى العلاقة *(2-9)*، فإننا نستخدم العلاقة *(2-10)* لنتوصل إلى العلاقة *(2-11)*.

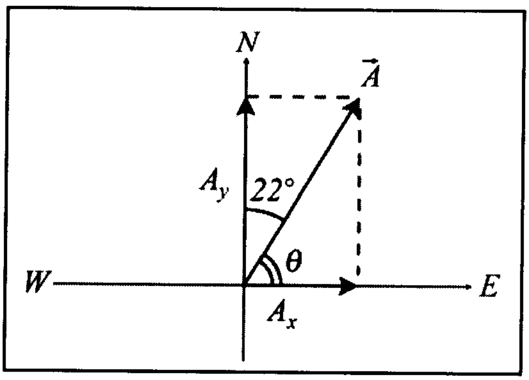
$$A = \sqrt{\left(\sum A_x\right)^2 + \left(\sum A_y\right)^2} \qquad (2\text{-}11)$$

كما يمكننا الاستفادة من هذه المعادلة لمعرفة مقدار المتجه $(\vec{A})$ في حال معرفة كلٍ من المركبتين (A_x) و (A_y) لمتجه واحد، أو المركبات (ΣA_x) و (ΣA_y) لمجموعة من المتجهات.

مثال (2-4) *Example*:

غادرت أرض المطار طائرة صغيرة، وبعد فترة من الزمن أعطت إشارة إلى برج المراقبة أنها على بعد *(215 km)* وباتجاه يصنع زاوية *(22°)* من الشرق إلى الشمال، فكم تبعد الطائرة عن برج مراقبة المطار في الاتجاهين شرقاً وشمالاً؟ انظر الشكل (2-12).

الحل *Solution*:



الشكل (2-12)، المثال (2-4)

المتجه $(\vec{A})$ يمثل بعد الطائرة عن نقطة الأصل (0.0)، كما أن اتجاه الطائرة يصنع زاوية مقدارها $(90° - 22°)$ مع المحور السيني الموجب، أي أن:

$$A = 215\,km$$

إنَّ بعد الطائرة شرقاً هو عبارة عن مسقط المتجه $(\vec{A})$ على المحور السيني.

$$\begin{aligned} A_x &= A\cos(\theta) \\ &= 215\cos(68) = 80.5\,km \end{aligned}$$

أما بعد الطائرة غرباً فهو عبارة عن مسقط المتجه $(\vec{A})$ على المحور الصادي.

$$\begin{aligned} A_y &= A\sin(\theta) \\ &= 215\sin(68) = 199.34\,km \end{aligned}$$

وسوف نتأكد من صحة الحل بطريقة معاكسة، مستفيدين من العلاقات $(2\text{-}9)$ و$(2\text{-}10)$:

$$\begin{aligned} |A| &= \sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2} \\ &= \sqrt{(80.5)^2 + (199.34)^2} \\ &= 215\,km \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan(\theta) &= \frac{A_y}{A_x} \\ &= \frac{199.34}{80.5} = 2.476 \end{aligned}$$

$$\theta = \tan^{-1}(2.476) = 68°$$

وهذا هو مقدار الزاوية بدءاً من المحور السيني الموجب.

2-6 متجهات الوحدة Unit Vectors :

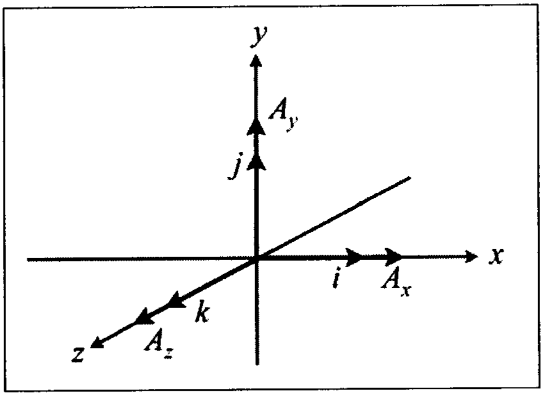
إنَّ تمثيل الكمية المتجهة، سواء في المستوي أو في الفراغ، يمكن أن يتمَّ باستخدام نظام المحاور الثلاثية المتعامدة (x,y,z) مع متجهات الوحدة الخاصة بها، أي أننا نمثل المتجه بُعدياً. والمقصود بالتمثيل تعيين المتجه مقداراً واتجاهاً، وهذا ما يدعو إلى اعتماد متجهات الوحدة على المحاور الثلاثية المتعامدة للتعبير عن الكمية المتجهة. إنَّ مقدار كل واحدٍ منها يساوي الواحد تماماً، وهذا هو سبب تسميتها بمتجهات الوحدة *unit vectors* بينما تكون الزاوية قائمة بين كلٍ منها. وبهدف تمييزها من محور لآخر فقد تمَّ الاتفاق على اعتماد الأحرف الإنكليزية الثلاثة المتعاقبة $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ على المحاور المتعامدة (x,y,z) على التتالي للتعبير عن هذه المتجهات.

إن اعتماد متجهات الوحدة $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ ، مفيدٌ للغاية ولاسيّما للتعبير عن مركبات الكميات المتجهة المتعددة. مثلما هو مفيد للتعبير عن الكمية المتجهة الواحدة، حيث إنَّ $(\hat{i})$ و $(\hat{j})$ هما متجها الوحدة على المحورين (x,y) ، بينما (A_x) و (A_y) هما المركبتان العدديتان للمتجه (A).

إن نظام المحاور الثلاثية المتعامدة باستخدام متجهات الوحدة، يمكن تمثيله على النحو المبيّن في الشكل (13-2).

إذاً، باستخدام هذه الطريقة يمكننا التعبير عن أي كمية متجهة سواء على المحاور الديكارتية أو على المحاور الثلاثية المتعامدة على الشكل الآتي:

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + \hat{A}_z\hat{k} \qquad (2\text{-}12)$$



الشكل (2-13) يبين المحاور المتعامدة باستخدام متجهات الوحدة
$(\hat{i},\hat{j},\hat{k})$ ويلاحظ أن متجهات الوحدة متعامدة مع بعضها البعض أيضاً

فعلى سبيل المثال لو أردنا أن نعبِّر عن الشكل (2-10) السابق الذكر باستخدام متجهات الوحدة فإن المركبتين المتجهتين $(\vec{A}_x)$ و $(\vec{A}_y)$ يمكن إعادة كتابتهما على النحو الآتي:

$$A = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} \qquad (2\text{-}13)$$

أما تمثيل الكمية المتجهة على المحاور الثلاثية المتعامدة، فقد اعتمدنا المثال التالي (2-5)، وذلك لغرض تبسيطها.

مثال (2-5) *Example*:

تأمل المتجه $(\vec{A})$ بمركباته الثلاثة في العلاقة الرياضية الآتية:

$$\vec{A} = 4\hat{i} - 5\hat{j} + 3\hat{k}$$

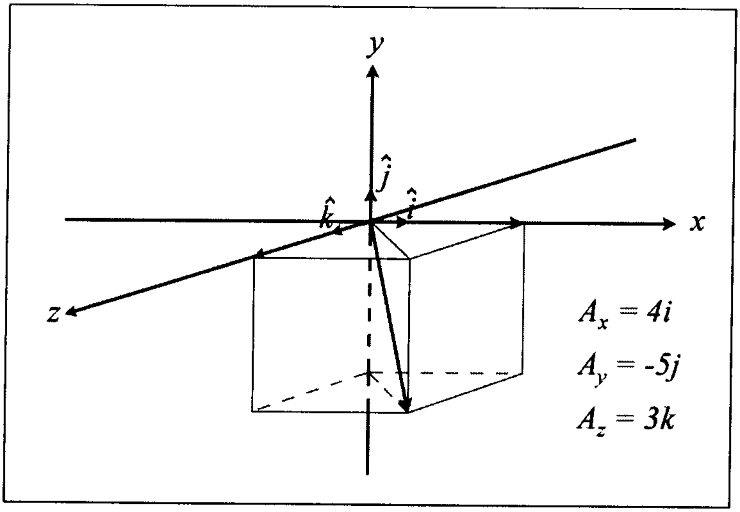
نلاحظ أن المركبات الاتجاهية الثلاثة هي:

$$+4\hat{i}, -5\hat{j}, 3\hat{k}$$

كما نلاحظ أن مركباتها العددية:

$$+4, -5, +3$$

ومن الممكن عملياً تمثيل ذلك على المحاور المتعامدة $(x,\ y,\ z)$، انظر الشكل (2-14):



الشكل (2-14) يبين كيف يمكن تمثيل المتجه $(\vec{A})$ في الفراغ
باستخدام المحاور الثلاثية المتعامدة مع متجهات الوحدة

2-7 جمع الكميات المتجهة بطريقة جمع مركباتها

Adding Vectors by Adding their Components:

يمكننا أن نستعرض هذه المسألة الهامة مرةً أخرى، وذلك باستخدام ثلاث متجهات $(\vec{A})$ و$(\vec{B})$ و$(\vec{C})$ معبِّرين عنها باستخدام متجهات الوحدة وفقاً للعلاقات الرياضية الآتية:

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k} \qquad (2\text{-}14)$$

$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k} \qquad (2\text{-}15)$$

$$\vec{C} = C_x\hat{i} + C_y\hat{j} + C_z\hat{k} \qquad (2\text{-}16)$$

إنّ المعادلات الرياضية التي نستخدمها لإيجاد محصلة المتجهات الثلاثة، وعلى المحاور الثلاثة هي:

$$R_x = A_x + B_x + C_x \tag{2-17}$$

$$R_y = A_y + B_y + C_y \tag{2-18}$$

$$R_z = A_z + B_z + C_z \tag{2-19}$$

$$\boxed{\vec{R} = R_x\hat{i} + R_y\hat{j} + R_z\hat{k}} \tag{2-20}$$

ومعنى ذلك أنَّ محصلة المركبات الثلاثة (x,y,z) كلٌ على انفراد، وهي: (R_x, R_y, R_z)، تمثل مُركبات متجه المحصلة $(\vec{R})$ العددية. كما المحصلة الاتجاهية يمكننا التعبير عنها بإضافة متجهات الوحدة $(\hat{i},\hat{j},\hat{k})$ إلى المحصلات العددية المذكورة.

مثال (2-6) *Example*:

أوجد متجه المحصلة $(\vec{R})$ الذي يمثل حاصل جمع المتجهات الثلاثة الآتية:

$$\vec{A} = 4\hat{i} + 6\hat{j} + 2\hat{k}$$
$$\vec{B} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$$
$$\vec{C} = \hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$$

الحل *Solution*:

$$R_x = 4 + 3 + 1 = 8$$
$$R_y = 6 + 3 - 4 = 5$$
$$R_z = 2 - 2 + 2 = 2$$

وهكذا نجد أنَّ متجه المحصلة هو:

$$\vec{R} = 8\hat{i} + 5\hat{j} + 2\hat{k}$$

2-8 ضرب الكميات المتجهة *Vectors Product*:

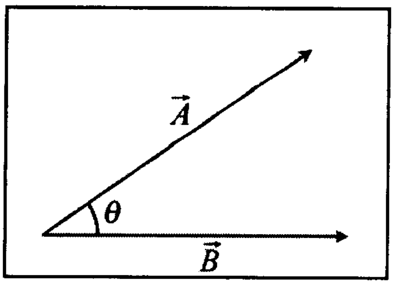
بدايةً، لابد من التأكيد على أن هناك نوعين اثنين من أنواع ضرب الكميات المتجهة وهما: الضرب القياسي، والضرب الاتجاهي. وسنفرد فقرةً خاصةً لكلٍ منهما.

2-8-1 الضرب القياسي *Vectors Salar Product*:

لقد سُميت هذه العملية بهذا الاسم لأن ناتج الضرب هو عبارة عن كمية عددية *scalar*، ومعنى ذلك أن حاصل ضرب كميتين اتجاهيتين ضرباً قياسياً ينتج عنهما كميةً عددية، ويُعبَّر عن الضرب القياسي بالمعادلة الآتية:

$$\boxed{\vec{A}.\vec{B} = |A||B|\cos\theta} \qquad (2\text{-}21)$$

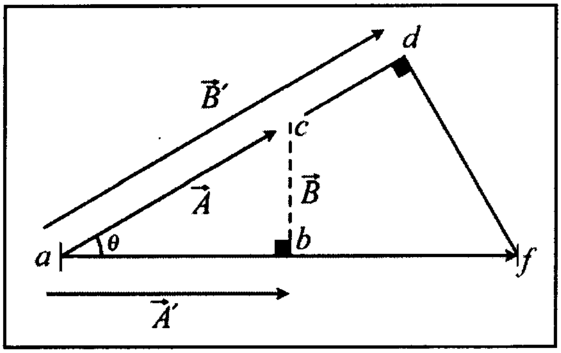
حيث إن $(\vec{A})$ و$(\vec{B})$ يمثلان الكميتين الاتجاهيتين، و(θ) هي الزاوية المحصورة بينهما[1]، وتُقرأ $(\vec{A}\,dot\,\vec{B})$، انظر الشكل (2-15).



الشكل (2-15) الضرب القياسي للمتجهين $(\vec{A})$ و$(\vec{B})$

(1) يطلق على الزاوية (θ) في بعض المصادر "الزاوية الصغرى" لتمييزها عن الزاوية الأخرى بين المتجهين وهي $(360°-\theta)$.

ويمكننا هنا أن نستخدم خاصية التبادل *commutative law* بين المتجهين $(\vec{A})$ و$(\vec{B})$، ولبيان ذلك انظر الشكل (2-16).



الشكل (2-16) خاصية التبادل في الضرب القياسي

انظر المثلث القائم $(a\,b\,c)$ تجد أن:

$$\cos\theta = \frac{A'}{A}$$

$$A' = A\cos\theta$$

إنَّ المتجه (A') هو عبارة عن المسقط العمودي للمتجه $(\vec{A})$ على امتداد المتجه $(\vec{B})$. وهو كمية عددية يمكن معرفتها بمعرفة القيمة العددية للمتجه $(\vec{A})$ وكذلك جيب تمام الزاوية $\cos(\theta)$، وبالذهاب إلى المعادلة *(2-21)* نجد أن:

$$\vec{A}.\vec{B} = A\,B\cos\theta$$
$$= [A\cos\theta]B = A'\,B$$

من ناحية أخرى وبهدف التأكّد أنّ $(\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A})$ يمكننا إيجاد مسقط المتجه $(\vec{B})$ على المتجه $(\vec{A})$. انظر الشكل (2-16) مرةً أخرى وتأمل المتجه $(\vec{B})$ ولاحظ أن جيب تمام الزاوية $\cos(\theta)$ في المثلث القائم *(a d f)* يساوي:

$$\cos\theta = \frac{B'}{B}$$

$$B' = B\cos\theta$$

إنَّ المتجه (B') هو $B\cos(\theta)$ ، وهو عبارة عن المسقط العمودي للمتجه $(\vec{B})$ على امتداد المتجه $(\vec{A})$ ويمكن تعيينه بمعرفة القيمة العددية للمتجه $(\vec{B})$ وكذلك جيب تمام الزاوية $\cos(\theta)$.

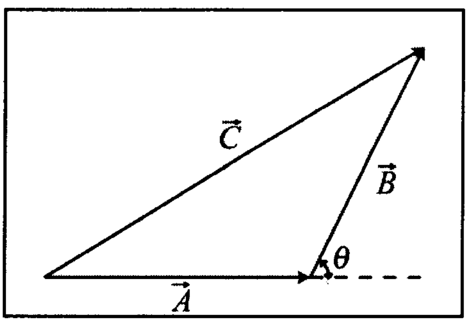
بالذهاب إلى المعادلة (2-21) مرة أخرى نجد أن:

$$\begin{aligned} \vec{A}.\vec{B} &= A\,B\cos\theta \\ &= A\left[B\cos\theta\right] \\ &= A\,B' \end{aligned}$$

وهذه النتيجة تبين لنا من خلال النظر إلى الطرف الأيمن للمعادلة حيث يشتمل على المقادير العددية للمتجهين وجيب تمام الزاوية، وهذه كلها كميات عددية، كما تؤكد مجدداً أن حاصل ضرب كميتين اتجاهيتين ضرباً قياسياً هو كمية عددية، مثلما تؤكد أيضاً أن الضرب القياسي هو عملية تبادلية:

$$\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$$

ومن أهم التطبيقات المباشرة على قانون الضرب القياسي هو إثبات صحة قانون "الجيب تمام" الذي مر ذكره في الفقرة 4-2، وبهدف توضيح قانون "الجيب تمام" تأمل الشكل (2-17).



الشكل (2-17)

إن محصلة المتجهين $(\vec{A})$ و$(\vec{B})$ هي المتجه الثالث $(\vec{C})$، حيث أن الزاوية بينهما (θ)، وكما يُلاحظ هي الزاوية الخارجية. والآن إذا أردنا معرفة حاصل الضرب القياسي للمتجه $(\vec{C})$ بنفسه، أي أنّ:

$$\vec{C}.\vec{C} = |C||C|\cos\theta$$
$$= C^2$$

ذلك أن الزاوية بين المتجه ونفسه تساوي الصفر، أي أنّ $\cos(0) = 1$

ولكن نحن نعلم أن:

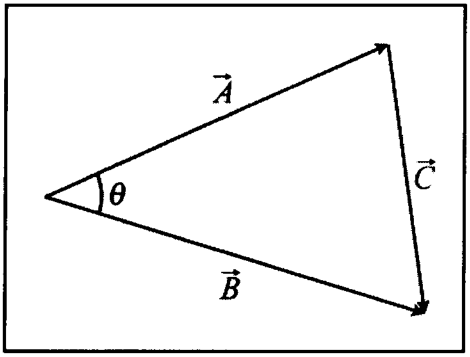
$$\vec{C} = (\vec{A}+\vec{B})$$
$$\vec{C}.\vec{C} = C^2 = (\vec{A}+\vec{B}).(\vec{A}+\vec{B})$$
$$= \vec{A}.\vec{A} + AB\cos\theta + BA\cos\theta$$
$$+ \vec{B}.\vec{B}$$
$$C^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta$$

وهذه هي الصيغة المستخدمة لإيجاد محصلة (جمع) متجهين باستخدام قانون "الجيب تمام".

ومن الممكن استخدامها لإيجاد محصلة (طرح) متجهين، انظر الشكل (2-18)، حيث ستكون النتيجة:

$$\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}$$
$$C^2 = A^2 + B^2 - 2A\cos\theta$$

ملاحظة: في حالة الجمع، إذا كانت الزاوية أكثر من $(90°)$ بين المتجهين فإننا نأخذ الزاوية الخارجية بينهما، وقياس الزاوية يبدأ من المحور السيني الموجب، كما يمكننا التأكد مرة أخرى، وذلك لأن جيب تمام الزاوية الداخلية يكون مقداراً سالباً.



الشكل (2-18)

إن حاصل الضرب الاتجاهي لمتجهات الوحدة يعتبر من التطبيقات المباشرة على الضرب القياسي لمتجهين، ولا بد في هذا المقام من التأكيد على ما يلي:

1- $\hat{i}.\hat{i} = |1||1|\cos(\theta) = |1||1|\cos(0) = 1$

2- $\hat{i}.\hat{j} = |1||1|\cos(90) = 0$

3- $\hat{i}.\hat{k} = |1||1|\cos(90) = 0$

ومعنى ذلك أن القيمة العددية لمتجهات الوحدة هي:

$$|i| = |j| = |k| = 1$$

كما أن الزاوية بين أي متجهين منها هي زاوية قائمة، والزاوية بين المتجه ونفسه تساوي الصفر.

4- كما نؤكد على ضرورة ملاحظة الحالة العامة للتعبير عن الضرب القياسي لمتجهين باستخدام متجه الوحدة وهي:

$$\boxed{\vec{A}.\vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}).(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})}$$

حيث إن:

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$
$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$

وهذا ما سوف نستخدمه لحساب الطرف الأيمن في المثال القادم (2-7)، مع مراعاة الخاصة التوزيعية في الضرب *distribution law*.

مثال (2-7) Example

أوجد مقدار الزاوية (θ) بين المتجهين $(\vec{A})$ و$(\vec{B})$ المعرفين على النحو الآتي:

$$\vec{A} = 3\hat{i} - 4\hat{j}$$
$$\vec{B} = -2\hat{i} + 3\hat{k}$$

الحل Solution:

$$\vec{A}.\vec{B} = |A||B|\cos\theta$$
$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = 5$$
$$B = \sqrt{B_x^2 + B_z^2} = \sqrt{(-2)^2 + (3)^2} = 3.6$$

من ناحية أخرى:

$$\begin{aligned}\vec{A}.\vec{B} &= (A_x\hat{i} + A_y\hat{j}).(B_x\hat{i} + B_z k)\\ &= (3\hat{i} - 4\hat{j}).(-2\hat{i} + 3\hat{k})\\ &= (3\hat{i}).(-2\hat{i}) + (3\hat{i}).(3\hat{k}) + (-4\hat{j}).(-2\hat{i}) + (-4\hat{j}).(3\hat{k})\\ &= (-6)(1) + (9)(0) + 8(0) - (12)(0) = -6\end{aligned}$$

وهكذا بالتعويض نجد أنّ:

$$\cos\theta = \frac{-6}{18} = -0.333$$

$$\theta = \cos^{-1}(-0.333) = 110^\circ$$

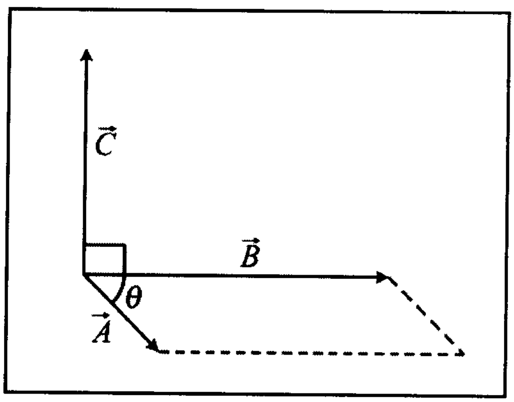
أي أنَّ الزاوية بين المتجهين $(\vec{A})$ و$(\vec{B})$ هي $(\theta = 110^\circ)$.

2-8-2 الضرب الاتجاهي *Vectors Product*:

لقد سُميت هذه العملية بهذا الاسم لأن ناتج الضرب هو عبارة عن كمية اتجاهية *vector*، ومعنى ذلك، أن حاصل الضرب الاتجاهي لمتجهين هو متجه ثالث، اتجاهه يكون عمودياً على المستوى الذي يحوي المتجهين المضروبين ببعضهما، أما مقدار المتجه الجديد فيعبَّر عنه بالعلاقة الرياضية الآتية:

$$\boxed{\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C} = |A||B|\sin\theta} \qquad (2\text{-}22)$$

حيث إنَّ (C) تمثل مقدار الكمية المتجهة الجديدة، و(θ) تمثل الزاوية الصغرى المحصورة بين المتجهين $(\vec{A})$ و$(\vec{B})$، انظر الشكل (2-19)، وتُقرأ $(\vec{A}\ cross\ \vec{B})$.



الشكل (2-19) ويمثل الضرب الاتجاهي لكميتين اتجاهيتين $(\vec{A})$ و$(\vec{B})$

أما اتجاه المتجه $(\vec{C})$ فيمكن معرفته باستخدام قاعدة اليد اليمنى، انظر الشكل (2-19)، مع ضرورة أن يبقى منفرداً لتحديد اتجاه حاصل الضرب الاتجاهي، وعملية الترتيب هنا هامة للغاية، بمعنى أن المتجه الأول (A) تمثله أصابع اليد اليمنى والثاني (B) تمثله راحة اليد اليمنى، ويمثل الإبهام اتجاه المتجه الجديد (C)، وهذا ما يؤكد ضرورة الانتباه إلى الآتي:

$$\vec{B}\times\vec{A}=-\vec{A}\times\vec{B}$$ غير تبادلية (23-2)

كما أن التعبير الرياضي عن عملية الضرب الاتجاهي باستخدام متجه الوحدة يكون على الشكل الآتي:

$$\boxed{\vec{A}\times\vec{B}=(A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k})\times(B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k})} \qquad (2\text{-}24)$$

ويمكننا إيجاد حاصل الضرب الاتجاهي $(\vec{A}\times\vec{B})$ باعتماد خاصية التوزيع *distribution law*، كما يمكننا إيجادها باستخدام المصفوفات ومن الضروري جداً أن نؤكد هنا على أن حاصل الضرب الاتجاهي لمتجهات الوحدة في النظام الثلاثي المتعامد (x,y,z) هو أوضح وأقرب مثال على التطبيق المباشر لهذا النوع من الضرب، فعلى سبيل المثال: لو أردنا أن نجد حاصل الضرب الاتجاهي لمتجهي الوحدة $(\hat{i})$ و $(\hat{j})$ فهذا يقتضي:

$$\hat{i}\times\hat{j}=|i||j|sin(\theta)$$

ولكن:

$$|i|=|j|=1$$

كما أن الزاوية بينهما تساوي $(\theta = 90°)$، إذاً المتجه الثالث $(\hat{k})$ هو المتجه العمودي على المستوى الذي يحتوي المتجهين $(\hat{i})$ و $(\hat{j})$ وهكذا نجد أن:

$$\hat{i} \times \hat{j} = |1||1| \sin(90) = 1(\hat{k}) = \hat{k}$$

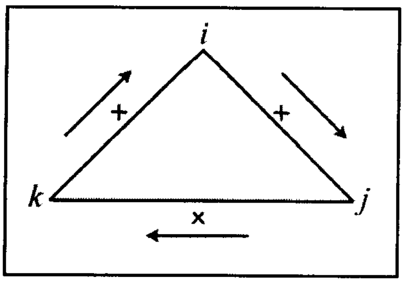
من الواضح أنَّ مقدار المتجه الجديد يساوي الواحد، أما اتجاهه فهو اتجاه $(\hat{k})$ أي منطبق على المحور (z) العمودي على كلٍ من المحورين السيني والصادي. ويمكننا الآن أن نستنتج بيسرٍ وسهولة كلاً مما يلي:

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} \qquad (2\text{-}25)$$

$$\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} \qquad (2\text{-}26)$$

$$\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} \qquad (2\text{-}27)$$

ومن الممكن تبسيط ذلك كلّه باستخدام المثلث البسيط المبيّن في الشكل (2-20)، حيث إنَّ الاتجاه الموجب يكون بعكس اتجاه عقارب الساعة، أما في اتجاه عقارب الساعة فيكون اتجاهاً سالباً.



الشكل (2-20) ويبين الضرب الاتجاهي لمتجهات الوحدة (i) و(j) و(k)

مثال Example (2-8)

إذا كان لديك المتجهان المعرفان على النحو التالي:

$$\vec{A} = 3\hat{i} - 4\hat{j}$$
$$\vec{B} = -2\hat{i} + 3\hat{k}$$

أوجد المتجه الجديد: $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$

الحل *Solution*:

$$\begin{aligned}
\vec{C} &= \vec{A} \times \vec{B} = (3\hat{i} - 4\hat{j}) \times (-2\hat{i} + 3\hat{k}) \\
&= -(3\hat{i} \times 2\hat{i}) + (3\hat{i} \times 3\hat{k}) + (4\hat{j} \times 2\hat{i}) - (4\hat{j} \times 3\hat{k}) \\
&= 0 + 9(-\hat{j}) + 8(-\hat{k}) - 12(\hat{i}) \\
\vec{C} &= -12\hat{i} - 9\hat{j} + 8\hat{k}
\end{aligned}$$

الملاحظات الهامة في هذا المثال، والتي نلفت الانتباه إليها، هي الآتي:

$$\boxed{\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0} \qquad (2\text{-}28)$$

ذلك أن:

$$\hat{i} \times \hat{i} = |1||1| \sin(0) = 0$$

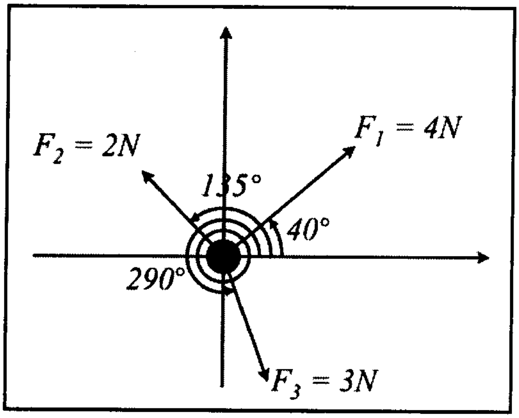
وكذلك بالنسبة لكل من $(\hat{j} \times \hat{j})$ و $(\hat{k} \times \hat{k})$.

مسائل عامة محلولة
Solved Problems

2-1 أثرت ثلاث قوى $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3)$ على جسم كتلته (m) ، انظر الشكل (2-21).

1- أوجد حسابياً مقدار القوة المؤثرة على الجسم.

2- حدد اتجاه هذه القوة.



الشكل (2-21) المسألة المحلولة (2-1)

الحل *Solution*:

من الواضح أن هذا المثال تطبيق مباشر على الطريقة التحليلية باستخدام المحاور الديكارتية، أي بتحويل القوى الثلاث إلى مركباتها.

$$1- \quad F_{1x} = F_1 \cos(\theta_1) = 4\cos(40) = 3.06\,N \quad , \quad F_{1y} = F_1 \sin(\theta_1) = 4\sin(40) = 2.57\,N$$

$$F_{2x} = F_2 \cos(\theta_2) = 2\cos(135) = -1.41\,N , \quad F_{2y} = F_2 \sin(\theta_2) = 2\sin(135) = 1.41\,N$$

$$F_{3x} = F_3 \cos(\theta_3) = 3\cos(290)\ ,\quad F_{3y} = F_3 \sin(\theta_3) = 3\sin(290^\circ)$$
$$= 1.026\,N \qquad\qquad = -2.82$$
$$\sum F_x = 2.676\,N \quad ,\quad \sum F_y = 1.16\,N$$
$$F = \sqrt{\left(\sum F_x\right)^2 + \left(\sum F_y\right)^2}$$
$$= \sqrt{(2.676)^2 + (1.16)^2} = 2.91\,N$$

$$2- \qquad \tan\theta = \frac{\sum F_y}{\sum F_x} = \frac{1.16}{2.676} = 0.433$$
$$\theta = \tan^{-1}(0.433) = 23.43^\circ$$

ملاحظة: استخدم طريقة الرسم في المستوى على المحاور الديكارتية (x,y) لتمثيل كل من المقادير $(F,\Sigma F_y,\Sigma F_x)$.

2-2 أوجد حسابياً المركبة السينية *x-component*، والمركبة الصادية *y-component* لكل واحدة من القوى الموضحة في الشكل (2-22).

الحل Solution:

نلاحظ أن هذا الاختبار يهدف إلى تدريب الطالب على ضبط الطريقة التحليلية للقوى في المستوى، من خلال أربع حالات اتجاهية، متمثلة في أربع زوايا مختلفة.

بالعودة إلى الشكل (2-14) من الفصل الثاني، نجد أن:

$$1- \qquad F_{1x} = F_1 \cos(\theta_1) = 10\cos(45) = 7.07\,N$$
$$F_{1y} = F_1 \sin(\theta_1) = 10\sin(45) = 7.07\,N$$
$$2- \qquad F_{2x} = F_2 \cos(\theta_2) = 7\cos(60) = 3.5\,N$$

$$F_{2y} = F_2 \sin(\theta_2) \qquad = 7\sin(60)$$

$$= 6.06\,N$$

3 – $$F_{3x} = F_3 \cos(\theta_3) \qquad = 6\cos(135)$$

$$= -4.24\,N$$

$$F_{3y} = F_3 \sin(\theta_3) \qquad = 6\sin(135)$$

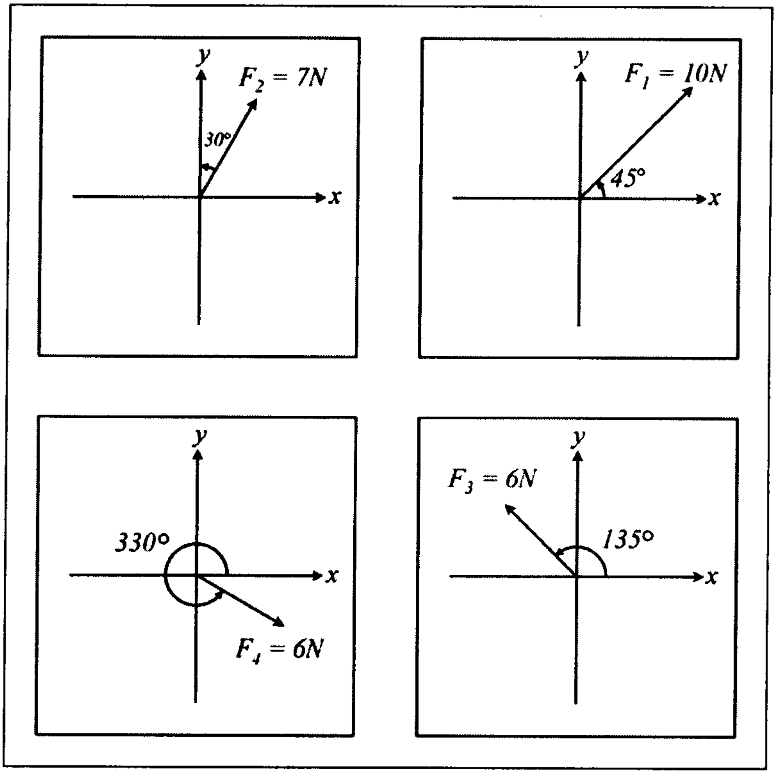
$$= 4.24\,N$$

4 – $$F_{4x} = F_4 \cos(\theta_4) \qquad = 6\cos(330)$$

$$= 5.19\,N$$

$$F_{4y} = F_4 \sin(\theta_4) \qquad = 6\sin(330)$$

$$= -3\,N$$



الشكل (2-22) المسألة المحلولة (2-2)

2-3 بعد أن أوجدت حسابياً المركبات السينية والصادية لمجموعة القوى المستوية في الشكل (2-23)، أوجد حسابياً:

1- محصلة مجموع القوى على المحور السيني $\sum F_x$.

2- محصلة مجموع القوى على المحور الصادي $\sum F_y$.

3- أوجد محصلة مجموع هذه القوى، ثم حدد اتجاهها مستعيناً بطريقة الرسم.

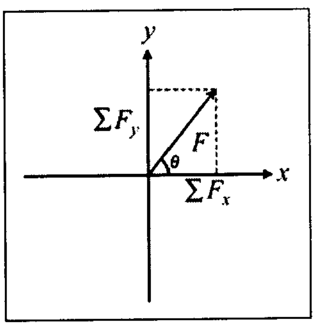
الحل *Solution*:

$$1-\sum F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x}$$
$$= 7.07 + 3.5 + 4.24 + 5.19 = 11.52\,N$$

$$2-\sum F_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y}$$
$$= 7.07 + 6.06 + 4.24 - 3 = 14.37$$

$$3- \quad F = \sqrt{\left(\sum F_x\right)^2 + \left(\sum F_y\right)^2} = \sqrt{(11.52)^2 + (14.37)^2}$$
$$= 18.4\,N$$

$$\tan\theta = \frac{\sum F_y}{\sum F_x} = \frac{14.37}{11.52} = 1.247$$
$$\theta = \tan^{-1}(1.247) = 51.28°$$



الشكل (2-23) المسألة المحلولة (2-3)

2-4 إذا كان لديك $(\vec{A})$ و $(\vec{B})$ والمعرفين على النحو الآتي:

$$\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$$
$$\vec{B} = -3\hat{i} + 3\hat{j}$$

أوجد حسابياً كلاً مما يلي:

1- المتجه $(3\vec{A})$ ، والمتجه $(2\vec{B})$.

2- المقدار العددي لكلٍ من المتجه $(\vec{A})$ والمتجه $(\vec{B})$.

3- المتجه $(\vec{A}+\vec{B})$ والمتجه $(\vec{A}-\vec{B})$.

4- مقدار الزاوية (θ) بين المتجهين $(\vec{A})$ و $(\vec{B})$.

5- ناتج الضرب القياسي للمتجهين $(\vec{A}.\vec{B})$.

6- ناتج الضرب الاتجاهي للمتجهين $(\vec{A}\times\vec{B})$.

الحل Solution:

1- المتجه $(3\vec{A})$ يساوي:

$$3\vec{A} = 6\hat{i} + 9\hat{j}$$

أما المتجه $(2\vec{B})$ فيساوي:

$$2\vec{B} = -6\hat{i} + 9\hat{j}$$

2- المقدار العددي للمتجه $(\vec{A})$ يساوي:

$$|A| = \sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2}$$
$$= \sqrt{(4)^2 + (3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

$$|B| = \sqrt{(B_x)^2 + (B_y)^2}$$
$$= \sqrt{(-3)^2 + (3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 4.24$$

3- المتجه $(\vec{A}+\vec{B})$ يساوي:

$$(\vec{A}+\vec{B}) = (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{i}$$
$$= (2-3)\hat{i} + (3+3)\hat{j} = -\hat{i} + 9\hat{j}$$

أما المتجه $(\vec{A}-\vec{B})$ فيساوي:

$$(\vec{A}-\vec{B}) = (A_x - B_x)\hat{i} - (A_y - B_y)\hat{i}$$
$$= (2-(-3))\hat{i} - (3-3)\hat{j} = 5\hat{i} - 0\hat{j} = 5\hat{i}$$

4- لإيجاد مقدار الزاوية (θ) بين المتجهين نستطيع الاستفادة من قاعدة الضرب القياسي لهما وعلى النحو الآتي:

$$\vec{A} \,.\, \vec{B} = |A||B| \cos\theta$$
$$\vec{A} \,.\, \vec{B} = (2i + 3\hat{j}) \,.\, (-3\hat{i} + 3\hat{j})$$
$$= (2)(-3)\,\hat{i}.\hat{i} + (2)(3)\,\hat{i}.\hat{j} + (3)(-3)\,\hat{j}.\hat{i} + (3)(3)\,\hat{j}.\hat{j}$$
$$= -6 + 9 = 3$$

لاحظ أنّ:

$$(\hat{i}.\hat{j} = \hat{j}.\hat{i} = 0)$$

$$\therefore \ \cos\theta = \frac{A.B}{|A||B|} = \frac{3}{(5)(4.24)} = 0.1415$$
$$\theta = \cos^{-1}(0.1415) = 81.865$$

5- ناتج الضرب القياسي للمتجهين $(\vec{A} \,.\, \vec{B})$ يساوي:

$$(\vec{A}.\vec{B}) = |A||B|\cos\theta$$
$$= (5)(4.24)\cos(81.865) =$$
$$= 3$$

لاحظ أنها ذات النتيجة التي حصلنا عليها في الطلب (4) من هذا السؤال.

6- ناتج الضرب الاتجاهي للمتجهين $(\vec{A}\times\vec{B})$ يساوي:

$$(\vec{A}\times\vec{B}) = |A||B|\sin\theta$$
$$= (2\hat{i}+3\hat{j})\times(-3\hat{i}+3\hat{j})$$
$$= (2)(-3)\hat{i}\times\hat{i}+(2)(3)\hat{i}\times\hat{j}+(3)(-3)\hat{j}\times\hat{i}+(3)(3)\hat{j}\times\hat{j}$$
$$= 6\hat{k}(-9)(-k) = 6\hat{k}+9\hat{k} = 15\hat{k}$$

لاحظ أنَّ: $(\hat{i}\times\hat{i} = \hat{j}\times\hat{j} = 0)$ ، بينما $(\hat{i}\times\hat{j} = \hat{k})$ و $(\hat{j}\times\hat{i} = -\hat{k})$.

مسائل وتمارين الفصل الثاني

Chapter Two Exercises & Problems

2-1 إذا كان مقدار المتجه $(\vec{A})$ يساوي (7) وحدات قياسية، ويصنع زاوية مقدارها $(250°)$ باتجاه عقارب الساعة بدءاً من الاتجاه الموجب للمحور السيني ارسم هذا المتجه مستخدماً المحورين (x,y) ثم أوجد مركبتيه السينية والصادية للمتجه $(\vec{A})$.

2-2 إذا كانت المركبتان السينية والصادية للمتجه $(\vec{A})$ هما:

$$A_x = -25$$
$$A_y = 40$$

أوجد حسابياً:

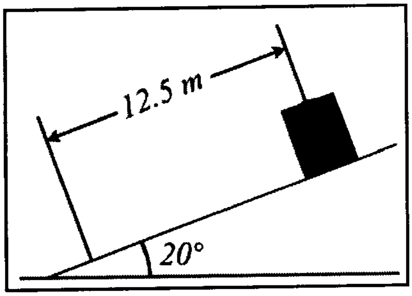
أ- المقدار العددي للمتجه $(\vec{A})$.

ب- مقدار الزاوية بين المتجه $(\vec{A})$ والمحور السيني الموجب.

2-3 يبلغ مقدار طول متجه الإزاحة لجسم متحرك $(\vec{R})$ $(15m)$ ويصنع زاوية قدرها $(30°)$ مع المحور السيني الموجب.

ارسم هذا المتجه مستخدماً المحورين (x,y) ، ثم أوجد حسابياً مركبتيه السينية والصادية.

2-4 قطعة معدنية ثقيلة على شكل آلة، دفعت على سطح مائل إلى الأعلى مسافة $(12.5m)$ حيث تبلغ زاوية الميل $(20°)$ ، انظر الشكل (2-24).



الشكل (2-24)، المسألة (2-4)

أوجد حسابياً:

أ- المسافة التي ارتفعتها القطعة المعدنية إلى الأعلى بعد الدفع.

ب- المسافة التي تحركتها القطعة أفقياً بعد الدفع.

2-5 إذا كان لديك متجها الإزاحة $(\vec{C})$ و$(\vec{D})$ ولهما المركبات الآتية مقاسة بالمتر:

$$C_x = 7.4,\ \ C_y = 3.8,\ \ C_z = -6.1$$
$$D_x = 4.4,\ \ D_y = 2.0,\ \ D_z = 0$$

أوجد حسابياً مركبات المتجه $(\vec{R})$ الذي يمثل حاصل جمع المتجهين.

2-6 لديك المتجهان $(\vec{A})$ و$(\vec{B})$ المعرفان على الشكل الآتي:

$$\vec{A} = 4\hat{i} + 3\hat{j}$$
$$\vec{B} = -13\hat{i} + 7\hat{j}$$

أوجد حسابياً:

أ- حاصل جمع المتجهين باستخدام متجهات الوحدة $(\hat{i})$ و$(\hat{j})$.

ب- أوجد حسابياً مقدار واتجاه المحصلة $(\vec{R})$ التي تمثل $(\vec{A}+\vec{B})$.

2-7 إذا كان لديك المتجهان $(\vec{A})$ و$(\vec{B})$ والمعرفان على الشكل الآتي:

$$\vec{A} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$$
$$\vec{B} = 5\hat{i} - \hat{j}$$

أوجد حسابياً المركبتان السينية والصادية، ثم احسب مقدار واتجاه كل من:

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$$
$$\vec{R} = \vec{B} - \vec{A}$$

2-8 إذا كان لديك المتجهان $(\vec{A})$ و$(\vec{B})$ والمعرفان على الشكل الآتي:

$$\vec{A} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$$
$$\vec{B} = -\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$$

أوجد حسابياً:

أ- $(\vec{A} + \vec{B})$.

ب- $(\vec{A} - \vec{B})$.

ج- عرّف المتجه الجديد $(\vec{C})$ حيث إن:

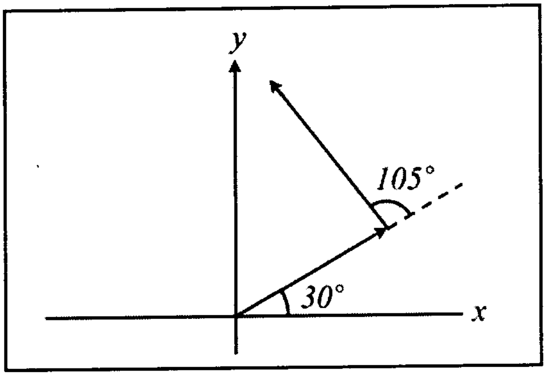
$$\vec{A} - \vec{B} + \vec{C} = 0$$

2-9 إذا كان لديك المتجهات الثلاثة $(\vec{A})$ و$(\vec{B})$ و$(\vec{C})$ حيث إن:

$$\vec{A} - \vec{B} = 2\vec{C}$$
$$\vec{A} + \vec{B} = 4\vec{C}$$
$$\vec{C} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$$

عرّف المتجهين $(\vec{A})$ و$(\vec{B})$.

2-10 المتجهان $(\vec{A})$ و$(\vec{B})$ والموضحّان في الشكل (2-25) لهما نفس الكمية (10) وحدات، ولهما الاتجاهان المبينان على الشكل ذاته.



الشكل (2-25)، المسألة (2-10)

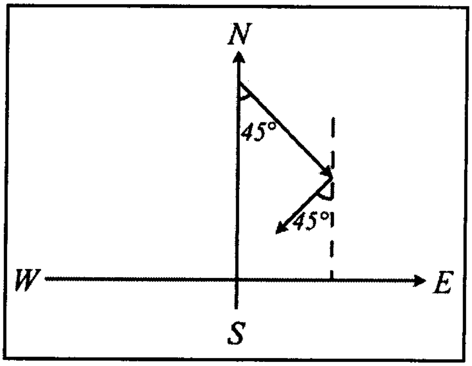
أوجد حسابياً:

أ- المتجه $(\vec{R})$ الذي يمثل حاصل جمع المتجهين $(\vec{A})$ و$(\vec{B})$.

ب- المركبتين السينية والصادية للمتجه $(\vec{R})$.

ج- مقدار الزاوية بين المتجه $(\vec{R})$ والمحور السيني الموجب.

2-11 لاعب غولف احتاج إلى ثلاث محاولات لإدخال الكرة في الحفرة المخصصة لها. إذا كانت المحاولة الأولى على مسافة $(12m)$ شمالاً، والمحاولة الثانية $(6m)$ شمال شرق، والمحاولة الثالثة $(3m)$ جنوب غرب، ما هي المسافة المطلوبة لإدخال الكرة في موضعها الصحيح بمحاولة واحدة؟ انظر الشكل (2-26).



الشكل (2-26)، المسألة (2-11)

2-12 استخدم التعبير الرياضي لكل من الضرب القياسي والضرب الاتجاهي كي تتحقق من صحة النتائج الآتية:

-1 $\hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1$

-2 $\hat{i}.\hat{j} = \hat{j}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{i} = 0$

-3 $\hat{i}\times\hat{i} = \hat{j}\times\hat{j} = \hat{k}\times\hat{k} = 0$

-4 $\hat{i}\times\hat{j} = \hat{k},\ \ \hat{k}\times\hat{i} = \hat{j},\ \ \hat{j}\times\hat{k} = \hat{i}$

2-13 إذا كانت القيمة العددية للمتجه $(\vec{A})$ تساوي (10) وحدات، والقيمة العددية للمتجه $(\vec{B})$ تساوي (6) وحدات، ومقدار الزاوية بينهما يساوي $(60°)$.

أوجد حسابياً كلاً مما يلي:

أ- حاصل الضرب القياسي للمتجهين $(\vec{A})$ و$(\vec{B})$.

ب- مقدار حاصل الضرب الاتجاهي للمتجهين $(\vec{A})$ و$(\vec{B})$.

2-14 إذا كان لديك المتجهان $(\vec{A})$ و$(\vec{B})$ والمعرفان على الشكل الآتي:

$$\vec{A} = 3\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k}$$
$$\vec{B} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$$

استخدم كلاً من:

$$\vec{A}.\vec{B} = |A||B|\cos\theta$$
$$\vec{A}.\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

وذلك لحساب الزاوية المحصورة بينهما.

2-15 لديك المتجهان $(\vec{A})$ و$(\vec{B})$ المعرفان على النحو الآتي:

$$\vec{A} = 3\hat{i} + 5\hat{j}$$
$$\vec{B} = 2\hat{i} + 4\hat{j}$$

أوجد كلاً مما يلي:

$1-$ $\vec{A} \times \vec{B}$

$2-$ $\vec{A}.\vec{B}$

$3-$ $(\vec{A} + \vec{B}).\vec{B}$

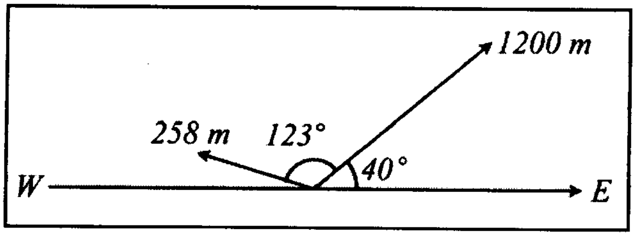
مسائل اختيارية

Optional Problems

2-1 رصدت محطة رادار طائرة قادمة من جهة الشرق مباشرة خلال موقعين، وذلك على النحو الآتي:

أ- على بعد $(1200m)$ وبزاوية مقدارها $(40°)$.

ب- استمر الرادار بالرصد وبعد زاوية قدرها $(123°)$ من نقطة الرصد الأولى سجل بعداً قدره $(258m)$، انظر الشكل (2-27)، أوجد حسابياً المسافة التي قطعتها الطائرة بين نقطتي الرصد.



الشكل (2-27)، المسألة الاختيارية (2-1)

2-2 لديك المتجهات الثلاثة $(\vec{A})$ و$(\vec{B})$ و$(\vec{C})$ المعرفة على النحو الآتي:

$$\vec{A} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$$
$$\vec{B} = -\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$$
$$\vec{C} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$$

أوجد كلاً مما يلي:

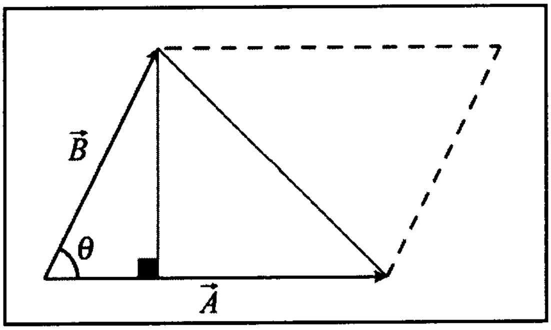
1- $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C})$

2- $\vec{A}.(\vec{B}+\vec{C})$

3- $\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})$

2-3 أثبت أن مساحة المثلث الذي ضلعاه بين المتجهين $(\vec{A})$ و$(\vec{B})$ والمبين في الشكل (2-28) تساوي:

$$\frac{1}{2}\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|$$



الشكل (2-28)، المسألة الاختيارية (2-3)

الخلاصة

Summary

- **الكمية العددية:** هي الكمية التي يمكن تعيينها تعييناً كاملاً بمعرفة مقدارها ووحدة قياسها، ويمكننا أن نستخدم مع مجموعة من الكميات العددية المتجانسة؛ القوانين الجبرية الاعتيادية.
- **الكمية المتجهة:** هي الكمية التي يمكن تعيينها تعييناً كاملاً بمعرفة مقدارها ووحدة قياسها واتجاهها ونقطة تأثيرها ومحور عملها. ويتحتم علينا أن نستخدم مع مجموعة من الكميات المتجهة المتجانسة القوانين الخاصة بها.
- **محصلة عدد من الكميات المتجهة:** يمكننا إيجاد محصلة عدد من الكميات المتجهة المتجانسة وكذلك تحديد اتجاهها بمعرفة محصلة مركباتها السينية ومركباتها الصادية على المحاور الديكارتية على النحو الآتي:

$$\sum A_x = A_{1x} + A_{2x} + \dots$$
$$\sum A_y = A_{1y} + A_{2y} + \dots$$
$$\tan(\theta) = \frac{\sum A_y}{\sum A_x}$$

متجهات الوحدة: يمكننا أن نعبّر عن عدد من الكميات المتجهة المتجانسة في المستوي أو في الفراغ باستخدام متجهات الوحدة (i, j, k) على النحو الآتي:

$$\vec{A} = A_x i + A_y j + A_z k$$
$$\vec{B} = B_x i + B_y j + B_z k$$
$$\vec{C} = C_x i + C_y j + C_z k$$

حيث تساوي القيمة المطلقة لكل منها الواحد، كما أنَّ الزاوية بين كل منها والآخر تساوي تسعين درجة، كما أن محصلة هذه الكميات المتجهة تكون على النحو الآتي:

$$\vec{R} = R_x i + R_y j + R_z k$$

- **قانون الجيب تمام:** ويستخدم لإيجاد حاصل جمع متجهين (B, A)، ويُعبّر عنه رياضياً على الشكل الآتي:

$$\vec{C} = A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta$$

حيث (A) هي المقدار العددي للمتجه الأول، (B) المقدار العددي للمتجه الثاني، (θ) الزاوية المحصورة بين المتجهين.

- **الضرب القياسي:** إنّ ناتج الضرب القياسي لمتجهين (B,A) يُعبّر عنه رياضياً على الشكل الآتي:

$$\vec{A}.\vec{B} = |A||B|\cos\theta$$

حيث $|A|$ هي القيمة المطلقة للمتجه الأول، $|B|$ هي القيمة العددية المطلقة للمتجه الثاني، (θ) هي الزاوية المحصورة بينهما، وناتج الضرب هو كمية عددية.

- **الضرب الاتجاهي:** إنَّ ناتج الضرب الاتجاهي لمتجهين (B,A) يُعبّر عنه رياضياً على الشكل الآتي:

$$\vec{A} \times \vec{B} = |A||B| \sin\theta$$

وناتج الضرب هو عبارة عن كمية اتجاهية ثالثة $(\vec{C})$ عمودية على المستوي الذي يحوي المتجهين (B,A) يمكن تحديد مقداره باستخدام هذه العلاقة الرياضية، كما يمكن تحديد اتجاهه باستخدام قاعدة اليد اليمنى.