المقالة الأولى

أ ـ التعريفات

ب ـ مبرهنات الحجاج واضافات النيريزي

ج ـ مبرهنات النسوي

أ- التعريفات

قال اوقليدس:

ان الأسباب التي منها يكون العلم، وبمعرفتها يحاط بالمعلوم هي:
الخبر، والمثال، والخلف، والترتيب، والفصل، والبرهان، والتمام.

أما الخبر فهو الإخبار المقدم عن جملة الاجسام [والأشكال].

وأما المثال فهو صور الأجسام والأشكال المخبر عنها، المدلول بصفتها عن معنى الخبر.

وأما الخلف فهو خلاف المثال، وصرف الخبر إلى ما لا يمكن.

وأما الترتيب فهو النظم المتفق على مراتبه في العلم.

وأما الفصل فهو فصل الخبر الممكن وغير الممكن.

وأما البرهان فهو الحجة على تحقيق الخبر.

وأما التمام فهو تمام العلم بالمعلوم على حسب ما ذكرنا.

ملاحظة ١: في هذه الجمل فراغات بسبب خروم في الورقة ح١. وفي الهامش نص مختلف جاء فيه:

اما المثال فهو رسم الأشكال المخبر عنها المدلول بها على معنى الخبر.

وأما الخلف فبه [صرف] الخبر عن جملته إلى ما لا يمكن في الوضع.

وأما النظم فهو ترتيب القول في تأدية برهان الخبر.

وأما التمام فالغرض المقصود معرفته، الذي من أجله قدم جميع ما رسمنا.

ملاحظة ٢ : ليس شيء من هذا عند النسوي ولا في النص الذي يورده هيث. الا ان هيث يذكر، نقلاً عن بروكلس تعريف عدة مصطلحات، وفي الصفحة ١ / ١٢٩ يذكر ان كل مسألة، وكل نظرية، تحتوي، عند اكتمال حلها، على ما يلي:

enunciation : وهو المنطوق العام، بلغة اليوم.

setting- out : ويقابل الترتيب في النص السابق.

definition or **specification** : ويعطي المفروض والمطلوب مطبقاً على المثال.

يلي ذلك العمل، والبرهان، والتمام (Conclusion) وهو عبارة تبين ان المطلوب في المنطوق العام قد تمَّ إيجاده.

[تعريفات إقليدس والنسوي]

[الحجاج] - ١ : النقطة شيء لا جزء له

Heath, 1:**A point** is that which has no part.

[النسوي] - ١ : النقطة هي شيء ما لا جزء له.

[النيريزي]: قال المعلم أفثيون : النقطة هي مبدأ المقادير ومنشؤها؛ وهي وحدة غير متجزئة ذات وضع .

هنا تنتهي الورقة الأولى في مخطوطة النيريزي، وينقطع بعدها الكلام إلى ان تصل إلى تعريف التوازي، في آخر التعريفات. الا ان هيث ينقل لنا عن النيريزي (من النسخة اللاتينية) تعريفاً لشخص يسميه هيرنديس يقول: ان النقطة هي مبدأ المقادير وهي لا تتجزأ، وآخر لبوسيدونيوس يقول انها نهاية خط أو نهاية لا ابعاد لها. ويقول ان بوسيدونيوس كان كأرسطو يرى ان المقادير تنشأ عن حركة النقطة، وان المقادير التي تنشأ على هذا النحو تكون ذات بعد واحد، أي خطوطاً، لأن النقطة لا تنتشر.

وأقدم تعريف للنقطة وصل الينا هو تعريف الفيثاغوريين لها بأنها وحدة (monad) لا تتجزأ، ولها وضع. وقريب من هذا مفهوم الواحد العددي عندهم: فهو لا يتجزأ، ومنه تتولد الأعداد، والأعداد تختلف عنه في أنها كلها ذات اجزاء؛ فالعدد ٢ له نصف، والعدد ٣ له ثلث، والعدد ٤ له نصف وربع، وهكذا.

ويبدو أن أفلاطون لم يقبل بتعريف الفيثاغوريين، فعرَّف النقطة بأنها بداية خط. وعلى مثل هذا جرى آخرون فعرفوا النقطة بأنها نهاية خط، والخط بأنه نهاية سطح، والسطح بأنه نهاية جسم. فاعترض أرسطو على أولئك الذين يعرفون الشيء بما هو اكثر منه تعقيداً، وعرَّف النقطة بأنها شي لا يتجزأ، وأنها ذات وضع.

وقال انها ليست جسماً، وليس لها وزن، ولا يمكن تمييزها عن موضعها، وأضاف ان من الصعب الانتقال من فكرة الشيء المتناهي في الصغر، الذي لا يتجزأ، وليس له قدر، إلى الشيء المحدود، ذي القدر، القابل للتجزئة. وذكر ان النقط، حتى لو تراكمت، لا تصير شيئاً قابلاً للتجزئة؛ ولذا فالنقط بذاتها لا تولد خطاً؛ كما ان الآن في الزمان لا يولد مدَّة: كلاهما طرف، مبتدأ شيء أو منتهى شيء، او مفترق شيئين؛ النقطة في المكان، والآن في الزمان. وينتهي ارسطو إلى ان حركة النقطة هي وحدها التي ترسم خطاً قابلاً للتجزئة، فالنقطة والخط يدركان بالمخيلة، بالتصور لا بالحس.

وتعريف اقليدس، كما نقله الحجاج والنسوي وهيث لا يخالف كلام أرسطو، ومع ذلك اعترض عليه الإغريق اولاً لأن النقطة ليست هي الشيء الوحيد الذي لا يتجزأ، فمثلها الآن في الزمان، والواحد في الأعداد. وثانياً لأن التعريف سلبي، والأولى ان يكون التعريف ايجابياً.

ودافع بركلس عن تعريف اقليدس فقال: ان النقطة هي الشيء الوحيد

في الهندسة الذي لا يتجزأ، وان التعريف السلبي يقبل في الأوليات، وقد يكون لا مندوحة عنه، اذ كيف نعرِّف الأعمى مثلاً إلا بتعريف سلبي!

بقي ان نذكر ان الرياضيين المحدثين يتجنبون تعريف الأوليات، ولا يتحرجون من تمثيلها باشياء محسوسة، كذرة رمل تتصاغر حتى تصغر عن التجزئة او هباءة تسبح على شعاع من نور. لكن حتى هذا التمثيل لا يلقى قبولا في ضوء التكنولوجيا الحديثة التي تُكبر الهباءة حتى تجعلها اكبر من البطيخة.

والاتجاه الحديث لا يحجم عن تعريف الأوليات فحسب، بل هو يجردها من أي معنى مسبق، حتى ليستعاض عن النقطة والخط والسطح بالفاظ أو اشارات ليس لها دلالة. لذلك عرَّف برتراند رسل الرياضي الحديث بأنه ذلك الذي يتناول اشياء لا يعرف معناها ويستخلص منها نتائج صحيحة، ولكن لا يعرف لها قدراً ولا قيمة، فان جعل لها معنى أو قدراً أو قيمة، انتقل بذلك من حقل الرياضيات البحتة إلى الرياضيات التطبيقية.

[النسوي: ٢] - والخط هو ذو طول فقط.

Heath, 2: A line is breadthless length.

[النسوي: ٣] - ونهايتا الخط نقطتان.

Heath, 3: The extremities of a line are points.

[النسوي: ٤] - والخط المستقيم هو الموضوع على مقابلة أي النقط كانت عليه، بعضها لبعض.

Heath 4: A straight line is a line which lies evenly with the points on itself

---

اعترض ارسطو على التعريف السلبي للخط: «طول لا عرض له»، كما لو كان هنالك طول ذو عرض، فماذا اذا عن آخر ذي سمك؟ ويرجح هيث ان هذا التعريف من وضع افلاطون أو مدرسته، ولذا يعترض عليه ارسطو. وينقل

النيريزي (في النسخة اللاتينية تعريفاً ينسبه إلى من يسميه **هيروميدس** يقول ان الخط مقدار ذو بعد واحد، أو مقدار ممتد في طريق واحد. ويعطي بركلس تعريفات أخرى يذكر ان أكملها هو ان الخط **مسار نقطة**.

واعترضوا أيضاً على التعريف ٣: فبعد تعريف الخط والنقطة لم يبق ما يمنع من وصف نهايتي الخط بأنهما نقطتان. ولكن أي خط؟ ان الخط في عرفنا يمتد من اللانهاية إلى اللانهاية، أو هو خط مغلق، كمحيط الدائرة: لا بداية له ولا نهاية، أو هو شعاع: له بداية، وليس له نهاية. ان ما في ذهن اقليدس ما نسميه اليوم قطعة خطية. فتلك لها نهايتان. ولكن ماذا عن منتصفها؟ وعن تقاطعها مع قطعة خطية أخرى؟ وعن مواضع تقسيماتها أثلاثاً أو ارباعاً، أو أياً كانت؟ ان غاية اقليدس ليست حصر ما على الخط من نقاط، وانما هي، على ما يبدو، استيعاب ما يقوله الذين يعرّفون النقطة بأنها نهاية خط.

وتعـريف الخط المستقيم غامض، سواء بالعربية وبالانكليزية، فعبارة **«الموضوع على مقابلة اي النقط كانت عليه»**، وعبارة (Which lies evenly) = (الذي يقع على سواء): ليس لهما معنى محدد. وكثيرون درسوا تعريف اقليدس باليونانية، ومترجماً إلى اللاتينية، فلم يجدوا له معنى محدداً أيضاً. ويذكر هيث ان التعريف الوحيد للخط المستقيم الذي كان شائعاً من قبل اقليدس هو تعريف افلاطون له بأنه الخط الذي يغطي منتصفه طرفيه؛ أو أنه ذلك الذي يكون منتصفه في مقابلة طرفيه. وتفسير ذلك ان الناظر من أحد طرفيه إلى الطرف الآخر، يرى المنتصف بينهما مباشرة.

وواضح ان عبارة النسوي تتصل بتعريف افلاطون. ولكن يقوم على هذا التعريف اعتراض يبدو انه هو الذي جعل اقليدس يتجنبه. فأفلاطون قد وضع تعريفاً يعتمد على حاسة البصر؛ والهندسة تتجنب الاعتماد على الحواس. ثم ان التعريف يتضمن التسليم بأن البصر يمتد في خطوط مستقيمة، وليس هذا المبدأ من شأن الهندسة.

حاول بروكلس ان يفسر عبارة اقليدس تفسيراً معقولاً، ولكنه أخفق، ولكن اذا نحن سلمنا بأن اقليدس اراد ان يصف الخط المستقيم وصفاً مميزاً لا يعتمد على الحواس، ولا يلقى معارضة من الرياضيين، دون التعرض الى مفاهيم الاتجاه والانحراف، فقد يتبين لنا ان عبارتي «على مقابلة» و«على سواء» انما تعنيان ان الخط يمتد مباشرة من احدى النقطتين إلى الاخرى، امتداد الحبل المشدود بين قطبين، لا ينحرف يمنة ولا يسرة.

مثل هذا التعريف ذكره هيرن Heron اذ قال: الخط المستقيم خط مشدود أقصى ما يمكن. بقي ان نذكر ان تعريفات كثيرة وضعها رياضيون كبار للخط المستقيم. ولكن كلها تصفه ولا تعرفه. ان فكرة الاستقامة فكرة أولية لا يصعب ان تدرك، ولكن يصعب ان تعرّف تعريفاً لا يكون كحلقة مفرغة يفسر الاستقامة بالاستقامة، كتفسير الماء بالماء.

[النسوي - ٥]: والبسيط ذو طول وعرض فقط.

Heath, 5. A surface is that which has length and breadth only.

[النسوي - ٦]: ونهايتا البسيط الخطوط.

Heath 6 The extremities of a surface are lines.

[النسوي - ٧]: والبسيط المستوي هو الموضوع على مقابلة أي الخطوط المستقيمة كانت عليه، بعضها لبعض، ولنسمّ البسيط المستوي: السطح.

Heath, 7: A plane surface is a surface which lies evenly with the straight lines on itself.

فالبسيط عند النسوي يقابل لفظة surface، ويقابل ما نسميه اليوم السطح. ويتبين من التعريف ٧ ان السطح عنده هو البسيط المستوي، أي ما نسميه السطح المستوي.

وظاهر ان هذه التعريفات الثلاثة تتبع مباشرة تعريفات الخط ونهايتيه والخط المستقيم. ومآخذنا على هذه التعريفات واحدة، ومن قبل اقليدس ومن بعده وضعت تعريفات أخرى، فلم تسلم من الاعتراض. فالنيريزي يفسر التعريف ٧، نقلاً عن سنبليقيوس بقوله إن البسيط المستوي هو الذي ينطبق عليه الخط المستقيم كيفما وضع، أو أنه البسيط المستوي الذي يمكن ان يمد عليه خط مستقيم يصل بين أي نقطتين عليه، وهذا هو **التعريف الذي تعطيه** كتبنا المدرسية. ولكن هل يفسر هذا حقاً مفهوم البسيط والبسيط المستوي؟

واذا قلنا ان البسيط، أعني السطح بلغتنا، ذو طول وعرض فقط، كما يريد اقليدس، **فما** الطول والعرض في سطح الكرة مثلاً، وما نهايات هذا السطح؟ من أجل ذلك قرّب بركلس فكرة البسيط بتمثيله بالظل الواقع على الأرض، فهو لا عمق له، وله نهايات بينة.

أرأيت كيف ان من المتعذر تفسير الأوليات بل تعريفها تعريفاً محدداً يعطي جميع مميزاتها مجتمعة.

وسنبليقيوس الذي ينقل عنه النيريزي هو سمبليكيوس Simplicius ، وقد عاش في القرن السادس الميلادي. انظر بشأنه كتاب هيث Greek Mathematics. Vol II

[النسوي، ٨]: والزاوية البسيطة المستقيمة الخطين هي انحراف كل واحد من خطين مستقيمين موضوعين على غير استقامة، عن الآخر.

Heath, 8:A plane angle is the inclination to one another of two lines in a plane which meet one another and do not lie in a straight line.

Heath, 9. And when the lines containing the angle are straight, the angle is called rectilineal.

واضح ان تعريفي اقليدس، كما ينقلهما هيث، ينصبان على نوعين من الزوايا، ثانيتهما الزاوية البسيطة المستقيمة الخطين، التي يعرفها النسوي، **وهي الـزاوية التي نتـداول بها في دروس الـرياضيات، أمـا الأولى فليست مستقيمة** الخطين، واذن فهي من قبيل الزوايا الهلالية التي يكون احد ضلعيها قوس دائرة، وقد اهتم بها الاغريق والعرب، وكتب عنها ابن الهيثم رسالة باسم الزوايا الهلالية.

والتعريف ٨ عند اقليدس ينتهي بعبارة غريبة: خطان في مستوٍ واحد يتقاطعان ولا يقعان في خط مستقيم، يقف هيث عند هذه العبارة، ثم يقدر ان يكون اقليدس قد وضع في البدء تعريفاً واحداً للزاوية ثم عنَّ له ان يجزئه إلى تعريفين احدهما للزاوية المستقيمة الخطين، والآخر للزاوية غير المستقيمة الخطين.

وربما كان المقصود ان يقال: وليسا كلاهما مستقيمين.

ويضيف هيث تصنيفاً لتعريفات الزاوية، قديماً وحديثاً، كما يلي (١/ ١٧٩):

١ ـ الزاوية هي فرق الاتجاه بين خطين مستقيمين، او الفرق بين اتجاهي خطين مستقيمين.

ويقع تعريف اقليدس في هذا الصنف. ولكن الاتجاه مفهوم غير كمي، فقياس الفرق بين اتجاهين يتضمن معنى الزاوية.

٢ ـ الزاوية هي مقدار (أو كمية، أو مقاس) الدوران اللازم لجلب أحد ضلعيها من موضعه حتى ينطبق على الضلع الثاني، دون ان تخرج من السطح الذي هما فيه. والواقع ان مفهوم الزاوية مرتبط بمفهوم الدوران. وان كل تعريف ناجح لها يجب ان يتضمن فكرة الدوران.

٣ ـ الزاوية هي جزء من السطح محدود بين خطين فيه يلتقيان عند نقطة (او شعاعين فيه ينطلقان من هذه النقطة).

[النسوي ؛ ٩]: واذا قام خط مستقيم على خط مستقيم، فصير الزاويتين اللتين عن جنبتيه متساويتين، قيل لكل واحدة منهما زاية قائمة، والخط القائم يقال له: عمود على الخط الذي هو قائم عليه = [Heath, 10].

[النسوي ؛ ١٠]: واذا قام على غير زاويتين متساويتين فأكبرهما يقال لها المنفرجة، واصغرهما يقال لها الحادة.

Heath. 11. An obtuse angle is an angle greater than a right angle.

Heath 12. An **acute** angle is an angle **less** than a right angle.

[النسوي ؛ ١١]: واذا لم يقم أحدهما على الآخر، البتة، وان أخرجا في كلتا الجهتين، بلا نهاية، وهما في سطح واحد، يقال لهما المتوازيان = [Heath, 23].

«قيام» خط على خط عند النسوي يعني تلاقيهما، أو انطلاق احدهما من نقطة على الآخر. على ان **تعريفه** يشبه ترجمة دقيقة بارعة لتعريف هيث، حيث «قام» تقابل (to set up) وسنؤجل ملاحظاتنا على التوازي إلى نهاية التعريفات.

[النسوي: ١٢] والحد هو نهاية الشيء Heath 13, boundary.

[النسوي: ١٣] والشكل ما أحاط به حد أو حدود Heath 14, figure.

[النسوي: ١٤] والدائرة هي شكل مسطح يحيط به خط واحد، في داخله نقطة كل الخطوط المستقيمة التي تخرج منها وتنتهي إلى ذلك الخط: مساوٍ بعضها لبعض. Heath 15, circle.

[النسوي: ١٥] وتلك النقطة هي مركز الدائرة Heath 16, center.

[النسوي: ١٦] وقطر الدائرة هو خط مستقيم يمر بمركز الدائرة وينتهي في الجانبين إلى الخط المحيط بها، ويقطعها نصفين. Heath 17, diameter.

[النسوي: ١٧] ونصف الدائرة هو شكل يحيط به القطر والقوس التي حازها القطر من الخط المحيط. Heath 18, semicircle.

[النسوي : ١٨] وقطعة الدائرة هي شكل يحيط به خط مستقيم وقوس من الخط المحيط بالدائرة، إما أكبر وإما أصغر [من القوس التي حازها القطر].

ما نسميه السطح المستوي سماه النسوي السطح، فكان طبيعياً ان يعرف الدائرة بأنها شكل مسطح. وعلى هذا لا يجوز مثلاً ان نتحدث عن سطح الكرة الأرضية، بل عن بسيطها.

ويلاحظ ان النسوي لا يعطي مصطلحاً لمحيط الدائرة، ويسميه الخط المحيط بها.

وفي تعريف نصف الدائرة نجد في كتاب اقليدس، كما عرضه هيث، عبارة تقول ان مركز الدائرة هو نفسه مركز نصفها. وهذا خطأ، كائناً ما كان المقصود بالمركز، الا اذا اعتبرناه مجرد نقطة كل الخطوط المستقيمة التي تخرج منها وتنتهي إلى قوسها: متساوية. ويذكر هيث ان هذه العبارة إضافة متأخرة وضعت لتكون مثالاً على شكل يقع مركزه على محيطه.

ويعطي النسوي تعريفاً لقطعة الدائرة لا نجده عند اقليدس.

التعريفات التالية (١٩ ـ ٢٤) عند النسوي تحوي ما تحويه (١٩ ـ ٢٢) عند هيث، وتعطي إضافات أخرى، وبترتيب مغاير. فنكتفي هنا بإيراد نصوص النسوي، مع كتابة المصطلحات المقابلة، كما يذكرها هيث. وواضح ان النسوي استطاع ان يذكر هنا ما لم يذكره اقليدس لأنه جاء بتعريف التوازي (التعريف ١١).

ويلاحظ ان النسوي يعطي تعريف قطعة الدائرة وان هيث، أعني اقليدس، لا يعطي هذا التعريف هنا. ذلك انه يؤجله إلى المقالة الثالثة المخصصة لبحث هندسة الدوائر. ولكن ما يجدر ذكره هنا ان هيث يعطي، نقلاً عن اقليدس طبعاً، لنصف الدائرة هنا، ولقطعتها في المقالة الثالثة تعريفين غريبين:

اما نصف الدائرة فتعريفه عنده:

A semicircle is the figure contained by the diameter and the circumference cut off by it.

واما قطعة الدائرة فتعريفها : A segment of a circle is the figure contained by a straight line and a cimcumference of a circle

ووجه الغرابة في هذين التعريفين ان لفظة circumference = المحيط تستعمل فيهما بمعنى القوس (arc) والقوس جزء من المحيط.

[النسوي : ١٩] والأشكال المستقيمة الخطوط [rectilineal figures] هي التي تحيط بها خطوط تسمى الأضلاع.

فالذي تحيط به ثلاثة أضلاع [trilateral figure] يقال له المثلث [triangle].

[النسوي : ٢٠] والمثلثات منها المتساوي الأضلاع [equilateral] وهو الذي أضلاعه الثلاثة مساوٍ بعضها لبعض. ومنها المتساوي الساقين [isosceles] وهو الذي ضلعان فقط من أضلاعه متساويان. ومنها المختلف الأضلاع [Scalene] وهو الذي اضلاعه الثلاثة غير مساوٍ بعضها لبعض.

[النسوي : ٢١]، ومن المثلثات أيضاً المثلث القائم الزاوية [right - angled]، وهو الذي له زاوية قائمة؛ والمنفرج الزاوية [obtuse - angled] وهو الذي له زاوية منفرجة؛ والمثلث الحاد الزاوية [acute - angled] وهو الذي كل واحدة من زواياه الثلاثة حادة.

[النسوي : ٢٢] والتي يحيط بها أربعة أضلاع يقال لها ذوات الاضلاع الأربعة [quadrelateral] وهي نوعان : متوازية الأضلاع، وغير متوازية الأضلاع.

والمتوازية الأضلاع نوعان : الأولى منها هي التي كل ضلعين متقابلين فيها متوازيان، وهي اربعة أنواع :

المربع [square] وهو المتساوي الأضلاع القائم الزوايا.

والمستطيل [oblong] وهو القائم الزوايا وليس متساوي الاضلاع.

والمعين [rhombus] وهو المتساوي الأضلاع وليس قائم الزوايا.

والشبيه بالمعين [rhomboid] وهو الذي كل ضلعين متقابلين فيه متساويان،

وكل زوايتين تتقابلان فيه متساويتان، وليس متساوي الأضلاع ولا قائم الزاوية.

والنوع الثاني منها هي التي فيها ضلعان فقط متوازيان وضلعان متلاقيان، ويسمى المنحرف، وينقسم ثلاثة أنواع:

الأول هو ان يكون فيه زاويتان قائمتان، وزاوية منفرجة، وزاوية حادة.

والثاني ان يكون فيه زاويتان منفرجتان متساويتان وزاويتان حادتان متساويتان.

والثالث ان يكون فيه زاويتان منفرجتان مختلفتان وزاويتان حادتان مختلفتان.

[النسوي: ٢٣] وأما الأشكال ذوات الأضلاع **الكثيرة** [multilateral] فهي التي يحيط بها أكثر من أربعة خطوط مستقيمة، وهي غير متناهية، مثل المخمس والمسدس وما بعدهما، وهي أيضاً نوعان: الأول ما له نظام وترتيب، وهو المتساوي الأضلاع والزوايا، ويمكن ان يعمل عليه وفيه دائرة، تحيط الدائرة بالشكل، والشكل بالدائرة.

(والثاني ما ليس بنظام، وهو المختلف الأضلاع والزوايا، ولا يمكن ان يعمل عليه أو فيه دائرة. فلا تحيط دائرة بالشكل ولا الشكل بدائرة).

[النسوي: ٢٤] وأنواع الخطوط المستقيمة المتلاقية: ستة: العمود، والقطر، والوتر، والضلع، والساق، والقاعدة.

فأما العمود فقد جرى ذكره، وأما القطر فنوعان: أحدهما قطر الدائرة، وقد جرى ذكره، والآخر قطر الشكل ذي الأربعة الاضلاع، وهو الذي يخرج من زاوية منه إلى الزاوية التي تقابلها.

وأما الوتر فهو ايضاً نوعان: أحدهما وتر قوس الدائرة، وهو الذي يحيط مع قوس الدائرة بقطعة الدائرة. والآخر وتر الزاوية: وهو الذي يخرج من أحد الخطين المحيطين بالزاوية إلى الآخر.

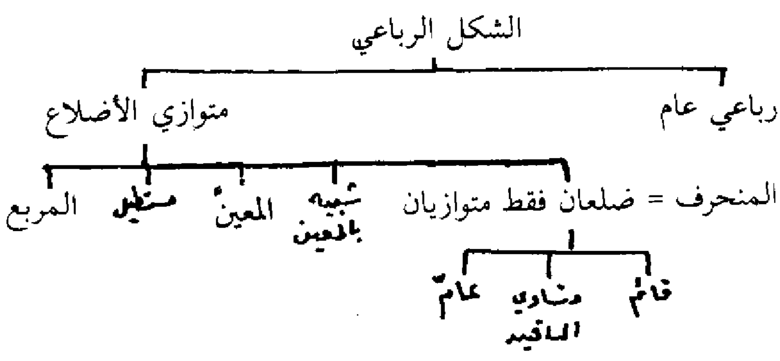
وأما الضلع والساق فقد جرى ذكرهما، وأما القاعدة فهي الخط الذي

يقابل رأس الشكل. ورأس الشكل هو أرفع نقطة في الشكل.

يلاحظ ان ما نسميه الشكل الرباعي يسميه النسوي ذا الأضلاع الأربعة. والمتوازية الأضلاع عنده هي المربع، والمستطيل، والمعين، والشبيه بالمعين. وهذا الذي يسميه الشبيه بالمعين هو ما نسميه اليوم خطأ المتوازي الأضلاع؛ خطأ لأن كل الأشكال الأربعة متوازية الأضلاع، اما هذا فمستطيل انحرف عن شكله القائم فلم تعد زواياه قوائم، كما انحرف المربع فأصبح معيناً. اما الذي فيه ضلعان فقط متوازيان، وهو الذي نسميه خطأ شبه المنحرف، فهو عنده منحرف.

وجدير بالذكر ان تسمية المستطيل بالانكليزية rectangle خطأ لأن المستطيل والمربع قائما الزوايا، والاسم القديم oblong أصح.

ان تغير المصطلحات ليس دائماً نحو الأصوب. والأشكال الرباعية كما يصفها النسوي يبينها التخطيط التالي:



تعريف المتوازيين. انظر التعريف ١١ للنسوي

Heath 23. Parallel straight lines are straight lines which, being in the same plane and being produced indefinitely in both directions, do not meet one another in either direction

وهنا نصل الى نهاية الورقة الساقطة عند النيريزي، حيث ينسب إلى سنبليقيوس تعريفاً منقولاً عن بوسيدونيوس يقول ان الخطين المتوازين هما خطان في سطح واحد لا يتقاربان ولا يتباعدان، وتبقى الأعمدة النازلة من

أحدهما على الآخر متساوية. ثم يشير إلى اعتراض أثير على هذا التعريف يقول ان الواجب اقامة البرهان على ان البعد «بين الخطين المتوازيين هو عمود عليهما؛ وذلك قد بينه اوقليدس في الشكل الثامن والعشرين من المقالة الأولى. فنقول في جواب ذلك ان الحدّ لا يحتاج فيه إلى ذكر العمود، بل يُكتفى فيه بأن يقال: ان البعد الذي بينهما متساوٍ؛ ولتبيين ذلك احتيج ان يقال ان الخط الواحد عمود عليهما جميعاً

فأما الفيلسوف أغانيس فإنه ذكر في حد الخطوط المتوازية أنها في سطح واحد، فقال: ان الخطوط المتوازية هي التي في سطح واحد، واذا أخرجت إخراجاً دائماً غير متناهٍ، في الجهتين جميعاً، كان البُعد بينهما، أبداً بُعداً واحداً.

وقد يُظن ان مساواة البعد بينهما هي العلة التي لها صارا لا يلتقيان؛ اذ ليس المعنى في القولين جميعاً واحداً.

ولعل ما استُثني في حدِّها، من أن الخطين في سطح واحد، ليس يحتاج اليه ضرورة: فانه اذا كان البعد بينهما بعداً واحداً، لم يكن لأحدهما ميل إلى الآخر، بتة؛ فهما لا محالة في سطح واحد، أعني المخرج عليهما جميعاً، وإن كان موضع أحدهما منخفضاً، وموضع الآخر متعالياً.

فأما ان البعد المحدود هو أقصر الخطوط التي تصل بين المتفرقين، فقد قيل فيما تقدم. وهذا البعد هو: أما في النقطتين المفترقتين: فالخط المستقيم مطلقاً الذي يصل بينهما؛ لأن الخط المستقيم أقصر الخطوط التي نهاياتها واحدة، أعني التي تصل بين نقطتين.

فأما البعد بين نقطة وخط، أو بين نقطة وسطح، فهو العمودُ الذي يخرج منها اليه؛ وهو أقصر الخطوط التي تصل بين النقطة وبين السطح، أو بين الخط.

وأما البعد الذي بين خط وخط: فإنهما ان كانا متوازيين فهو بعد واحد متساوٍ في كل موضع منهما؛ وأقصد الأبعاد التي بينهما هو عمود على كل واحد منهما في كل موضع منهما.

وأما ان لم يكونا متوازيين، فإن أقصر الخطوط التي تصل بينهما مختلفة بحسب اختلاف النقط المفترضة عليهما، وهذا الخط، من طريق أنه من نقطة إلى خط، هو عمود على الخط الذي أُخرج اليه؛ الا انه ليس عموداً على الخط الذي فرضت النقطة عليه. ولكن هذا القول قد يحتاج في بيانه إلى إقناع هندسي.

فأما قوله إذ أُخرجا في الجهتين جميعاً، فذلك بالواجب: فإن الخطين المستقيمين اللذين يلتقيان في إحدى الجهتين، لا يلتقيان في الجهة الأخرى، لكن يتباعد كل واحد عن صاحبه أكثر، وهما غير متوازيين.

وأما قوله: اذا أُخرجا إخراجاً تاماً غير متناهٍ، فإنه إنما قاله على سبيل التخيل، لئلا يلزمهما تقصير عن ذلك، لا أن إخراجهما يجوز كرة الكواكب الثابتة؛ لكن لكي لا يكون، اذا وضعنا لإخراجهما حداً لا يلتقيان فيه، أن نحكم، على خطين يمكن فيهما اذا تجاوزا ذلك الحد، ان يلتقيا، بأنهما لا يلتقيان. فهذا ما جرت العادة بأن يقال في هذا العارض بل هو اختصار وتحصيل لما كثَّر فيه غيرنا.

* النقطة علة الأشياء المتصلة، والوحدة علة الأشياء المنفصلة.

* النقطة أصل الخط، والخط أصل الدائرة، والمخروط أصل المجسمات».

فالتوازي عند اقليدس يقتضي عدم التقاطع، وهو عند اغانيس يشترط ثبات الأبعاد. وسنرى اغانيس يثبت عدم التقاطع استناداً إلى مصادرة ثبات الأبعاد؛ فيثبت بذلك ان المصادرتين: عدم التقاطع وثبات الأبعاد متكافئتان منطقياً، فقد يحسن هنا ان نجمل التعريفات المختلفة للمتوازيين كما نجدها في كتب الهندسة، بما يلي:

١ ـ الخطان المتوازيان خطان في سطح واحد، ليس بينهما نقطة مشتركة مهما امتدا، او قد يقال لا يتقاطعان، أو يتقاطعان في اللانهاية، أو انهما يلتقيان في اللانهاية.
٢ ـ الخطان المتوازيان يمتدان في اتجاه واحد أو في اتجاهين متماثلين.
٣ ـ الخطان المتوازيان يبقيان على أبعاد متساوية، أحدهما عن الآخر.

أما تساوي الأبعاد فقد ذكرنا انه يكافىء عدم التقاطع (أو عدم التلاقي) وأما تماثل الاتجاهين فينطوي على فكرة التوازي، اذ ما تعريف الاتجاه أو تساوي الاتجاهين الا بالاستناد ضمناً إلى فكرة التوازي.

وأما التقاطع في اللانهاية فأمر ما دمنا لا نملك التثبت منه، وما دامت، اللانهاية خارج نطاق امكانياتنا وأحكامنا، فلا ندري هل يتقاطع المتوازيان فعلاً في اللانهاية ام لا يتقاطعان، وما الفرق بين الحالتين.

لقد بقي تعريف اقليدس للمتوازيين، على مرِّ العصور، هو الأنسب، وكذلك بقيت مصادرته الخامسة، وهذا هو سر عبقريته.

المصادرات = Postulates

[الحجاج]: قال اوقليدس: المصادرات هي خمس.
[النسوي]: الأشياء التي نحتاج إلى الاتفاق عليها، وهي أربعة.

Heath: let the following be postulated

[النيريزي]: قال سنبليقيوس: ان اوقليدس، بعد ذكر الحدود الدالة على جوهر كل واحد من المحدودات، انتقل بكلامه إلى تعديد المصادرات، والمصادرات بالجملة هي ما ليس مقراً به، لكن نصادر المتعلم على الإقرار به، على طريق المسامحة، ليكون أصلاً موضوعاً بينه وبين المعلم، مقراً به.

وهذا الأصل إما أن يكون غير ممكن، مثل المصادرة التي طلب ارخميدس أن يقرَّ له بها، وهي ان يصادر على انه واقف خارج الأرض؛ فإن ضمن أن يُسلَّم له بذلك، فإنه يبين **أنه** يحرِّك الأرض: اذ يقول: أيها الفتى! أقرَّ لي بأنه يمكن أن ارتفع، فأقف خارج الأرض، وأنا أريك أني احرك الأرض. وذلك عند افتخاره بوجدانه القوة الهندسية[1]. فطلب ان يصادر على ذلك، وينزل أنه كذلك، وان كان غير ممكن، لسياقة التعليم.

فالمصادر عليه: إما أن يكون غير ممكن، على ما قلنا، وإما ممكن معلوم عند الأستاذين، مجهول عند المتعلمين، يحتاج ان يستعمل في أول التعليم وان الأشياء التي تبرهن هي أيضاً معلومة عند الاستاذين، مجهولة عند المتعلمين؛ لكنها لا توضع على طريق المصادرة، لأنها ليست اوائل، لكنها تبرهن. وأما المصادرات فإنما يطلب الواضع لها ان يصادر عليها، من قِبَل انها مبادىء. فمنها ما يطلب ان يصادر عليه، من قِبَل انه لازم فقط للتعليم، كالثلاث المصادرات الأولى ومنها ما تحتاج إلى بيان يسير حتى يصدَّق بها، وتقبل بذاتها، والفصل[2] بينها وبين العلوم المتعارفة ان العلوم المتعارفة مقبولة بنفسها، مع أول وقوع الفكر عليها؛ والمصادرات متوسطة في الطبع بين المبادىء المأخوذة من المعلم الأول، [وبين] التي عللها مجهولة عند المستعملين لها؛ كالحدود بين العلوم المتعارفة التي يقبلها جميع الناس على مثال واحد؛ اذ كانت المصادرات معروفة، لكن ليس عند جميع الناس، بل عند الأستاذين، في كل واحدة من الصناعات.

وقد ظنَّ قوم ان المصادرات الهندسية إنما قصد بها أن يسلَّم بالعنصر فقط[3]، اذ كان لا يتهيأ فيه كل الأعمال: فيكون قد تهيأ لمعاند ان يعاند من قِبَل العنصر، فيقول: إنه لا يمكنني أن أخرج خطاً مستقيماً على سطح البحر، ولا يمكنني ان أخرج أيضاً خطاً مستقيما إخراجاً دائماً، بلا نهاية، إذ ان لا نهاية غير موجود. لكن أصحاب هذا القول: أما أولاً فإنهم يظنون أن

المصادرات إنما يحتاج إليها من كانت هندسته عنصرية فقط. ومن بعد ذلك، ماذا يقولون في مساواة الزوايا القائمة؟ كيف يرون المصادرة على ذلك من قبل العنصر؟ وكذلك الأمر فيما يتلو هذه المصادرات.

فالأجود ان يقال ان المصادرات هي ما ليس بمقبول عند المتعلم في أول ما يقرع سمعه، ويحتاج اليها في البرهان، فمنها ما هو غير ممكن، وليس يسهل قبولها، كما يسهل قبول الثلاث الأول، لكن إنما يطلب الإقرار بها لسياقة التعليم، على ما قلت؛ ومنها ما هو معلوم عند الاستاذ، مقبول عنده، وهو عند المتعلم، في العاجل، مجهول؛ ولذلك يطلب منه الإقرار به؛ كالحال فيما بعد الثلاث المصادرات. ومنفعة الثلاث المصادرات الأول ان لا يعوق عن البراهين ضعف العنصر وتخلفه. وأما التي بعد الثلاث الأول، فإنه يحتاج اليها في البراهين.

قلما يبين لنا النيريزي اين ينتهي النص المقتبس ويبدأ شرحه الخاص. ولكن لا ريب ان ليس كل ما سبق من كلام سنبليقيوس

١ ـ واضح ان هنا إشارة إلى مبدأ الرافعة، والمقصود هو ما يسمى الفائدة الميكانيكية.

٢ ـ تستعمل كلمة «الفصل» بمعنى الفرق.

٣ ـ «التسليم بالعنصر» يعني فهم المصادرة بأنها تجرى حقيقة، كأن نمد الخط إلى ما لا نهاية. والمقصود بها هو مجرد التسليم بأنه يمكن ان يمد هذا الخط بلا نهاية، وان تكن ادواتنا أو امكانياتنا تحول دون ذلك.

المصادرة الأولى

[الحجاج]: قال اوقليدس: لنصادر على ان نخرج خطاً مستقيماً من كل نقطة إلى كل نقطة

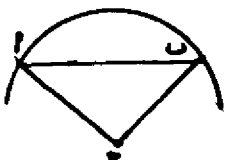
Heath: Let the following be postulated:

1 - To draw a straight line from any point to any point.

[النسوي]: الأشياء التي نحتاج الى الاتفاق عليها، وهي اربعة:

١ـ ان نأتي بخط مستقيم من كل نقطة الى **كل نقطة، على سطح.**

[النيريزي]: قال سنبليقيوس: انما قال هذا القول، لأنه قد يؤخذ لا محالة بين كل نقطتين تفرضان: بُعد هو أقصر الأبعاد بينهما. فاذا اخرجناه، كان المخرج خطاً مستقيماً، وكانت نهايتاه النقطتين المفروضتين. وليس يمكن ان يخرج خط مستقيم يمر بثلاث نقط، الا ان تكون النقطة الوسطى **بسمت** النقطتين اللتين في الطرفين، أعني ان يكون الثلاث في **سمت واحد.**



الشكل ١/١

وقد يمكن أيضاً ان يخرج من كل نقطة إلى كل نقطة قوس من دائرة. فانا اذا أخرجنا الخط المستقيم الذي يصل بين النقطتين، مثل خط أ ب، وعملنا عليه مثلثاً متساوي الأضلاع، مثل أ ب جـ، وصيرنا نقطة جـ مركزاً، وأدرنا ببعد جـ أ دائرة جازت على نقطة ب لأن بعد ب جـ هو مثل بعد جـ أ. فيكون خط أ ب قوساً من دائرة.

وهذا الأمر الواجب طلب ان يصادر عليه، اذ كان قوام عنصر الهندسة: في التخيل. فإنه لو كان في الأجسام ذوات العنصر، نفسها، لكان من التقحم أن نطلب ان يصادر على ان يخرج خط مستقيم من الحمل إلى الميزان.

لنذكر ان المنهج العلمي، كما رسمه أرسطو، يبيح ان نفترض ماهية الشيء، أي تعريفه، ويبقى بعد ذلك ان نثبت أنه موجود الا في المفاهيم الأولية، فنصادر بوجودها، وعلى هذا صادر اقليدس بوجود الخط، هنا، ووجود الدائرة في المصادرة الثالثة، واعتبر وجود النقطة أمراً ضمنياً، فلم يشر اليه.

وهاتان المصادرتان لم توضعا، كما يشير النيريزي، لمجرد افتراض وجود الخط والدائرة، ولكن لتذكر المعترضين بأن الهندسة الإقليدسية ليست تخطيطاً

آلياً، وانما هي «علم قوامه التخيل»، ويتضمن الشرح الذي يأتي به النيريزي ان هنالك خطاً مستقيماً وحيداً بين أي نقطتين، هو أقصر بعد بينهما. وان هنالك خطوطاً أخرى يمكن ان تصل بينهما، منها أقواس دوائر.

المصادرة الثانية

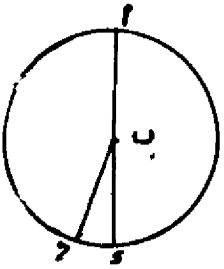
[الحجاج]: قال اوقليدس: ٢ ـ وعلى ان نخرج خطاً مستقيماً ذا نهاية، من خط مستقيم، متصلاً به على استقامة.

Heath: 2

To produce a finite straight line continuously in a straight line.

[النيريزي]: قال سنبليقيوس: المتصلات هي التي نهاياتها واحدة. وقد يمكن ان نخرج خطاً مستقيماً على استقامة، إخراجاً متصلاً، ليكون بأسره خطاً مستقيماً واحداً. وذلك أنه قد يمكن أن يكون المُخرج متصلاً بالخط، ولا يكون الاتصال على استقامة، اذا أحاط بزاوية. وبعكس ذلك أيضاً قد يمكن أن يكونا على استقامة، ولا يكونان خطاً واحداً؛ وذلك متى لم يكونا متصلين.

ونعلّم ما قيل في التحديد: ان يكون الخط ذا نهاية، لأنه ان كان غير متناه، كيف يمكن ان يخرج؟ فأما الخط المتناهي فإنه قد يوضع أن يكون إخراجه غير متناهٍ، ان احتيج إلى ذلك منه، وذلك لئلا يعوقنا في شكل من الأشكال تقصير الخط عن ذلك.



الشكل ١/٢

فأما ان الخط الذي يخرج على استقامة خط مستقيم ذي نهاية، هو معه خط واحد، لا خطّان؛ فإنا نبين ذلك بهذا العمل، بعد ان نشترط ان يسلّم لنا بإحدى المصادرات، وهي التي بعد هذه: أعني أن نخطّ دائرة على كل مركز، وبكل بعد. فنقول: انا نفرض خطاً مستقيماً ذا نهاية، عليه أ ب. فأقول:

ان الخط الذي يخرج متصلاً به على استقامة، هو معه خط واحد.

برهان ذلك انه ان لم يكن الخط الذي يخرج متصلاً بخط أ ب على استقامة: خطاً واحداً فانا نخرج أ ب جـ، وخط أ ب د مستقيم، وندير على مركز ب، وببعد ب أ دائرة أ جـ د.

فإن [كان] كل واحد من خطي أ ب جـ، أ ب د خطاً مستقيماً، فإن كل واحد منهما قطر، لأنه يجوز على مركز الدائرة. فكل واحد منهما يقسم الدائرة نصفين فقوس أ جـ د مساوية لقوس أ جـ: العظمى للصغرى. هذا خلف، لا يمكن، فإذن: الخط الذي يخرج على استقامة خط أ ب متصلاً به هو معه خط واحد.

[النسوي]: ٢ -**وان نمـدَّ خطا** مستقيماً في سطح مفروض، على استقامة، إلى حيث أردنا.

ربما كانت عبارة النسوي أقرب إلى نص اقليدس، كما ينقله هيث، من عبارة الحجاج: فمدُّ المستقيم أوضح وأقل عرضة للتساؤل من اخراج خط من خط.

أما البرهان الذي أعطاه سنبليقيوس لإثبات ان امتداد الخط يكون على استقامته، فيتضمن حلقة مفرغة، اذ يعتمد على أن القطر ينصِّف الدائرة، وهذا بدوره يعتمد على ما نريد هنا اثباته.

المصادرة الثالثة

[الحجاج] ٣: قال اوقليدس: وعلى ان نخط دائرة على كل مركز، وبكل بعد.

Heath: To describe a circle with any centre and distance

[النسوي]: وان ندير دائرة على كل نطقة، وبقدر كل بعد.

[النيريزي]: قال سنبليقيوس: يريد بالبعد الذي تدار عليه الدائرة: البعد المتناهي، في الجهتين جميعاً. فالظاهر أنه كان يمكن ان يخرج من كل نقطة

إلى كل نقطة: خط مستقيم. والدائرة تكون اذا ثبتنا إحدى نقطتي الخط المستقيم، وهي مركز الدائرة، وأديرت النقطة الأخرى حتى يحدث المحيط، فإنه يمكن ان يدار على كل مركز، وبكل بعد، دائرة.

[الحجاج]: ٤ ـ قال اوقليدس: وعلى ان الزوايا القائمة كلها متساوية.

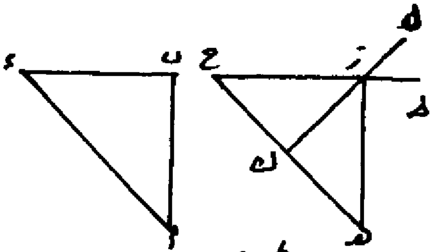
Heath: 4 - That all right angles are equal to one another.

[النسوي]: أسقط النسوي هذه المصادرة.

[النيريزي]:

قال سنبليقيوس: من استعمل في هذا القول البحث المنطقي، ظهر له صحته ظهوراً بيناً. وذلك أنه إن كانت الزاوية القائمة هي التي تحدث عن الخط القائم قياماً لا ميل فيه بتة، والقيام الذي لا ميل فيه بتة لا يحتمل الزيادة ولا النقصان، لكنه أبداً على حال واحدة، فإن الزوايا القائمة هي أبداً متساوية.

أقول إنه لا يمكن أن تكون زاوية قائمة أعظم من زاوية قائمة. فإن أمكن ذلك، فلتكن زاويتان قائمتان مختلفتين، وهما زاويتا أ ب د، هـ ز ح. ولتكن زاوية هـ ز ح أعظم من زاوية أ ب د.



الشكل ٢/١

فظاهر أنه اذا ركبت زاوية أ ب د على زاوية هـ ز ح، ووقع خط أ ب على خط هـ ز، يقع خط ب د داخل زاوية هـ ز ح، لأن زاوية هـ ز ح فرضت أعظم من زاوية أ ب د، فلنفرض أنه وقع داخلاً، وصار وضعه على خط ز ك. فتكون زاوية هـ ز ح أعظم من زاوية هـ ز ك. ولنخرج خط ز ط على استقامة ز ح. فتكون زاوية هـ ز ح مساوية لزاوية هـ ز ط، لأنهما متتاليتان* ، ولأن خط هـ ز اذا كان قائماً قياماً لا ميل فيه بتة، فالزاويتان اللتان عن جنبتيه متساويتان.

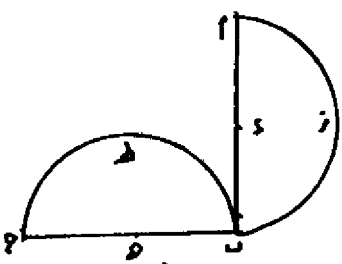
ولكن زاوية هـ ز ح أعظم من زاوية هـ ز ك. فإذن زاوية هـ ز ط أعظم

من زاوية هـ ز ك. ونخرج خط ز ل على استقامة خط ز ك. فتكون زاوية هـ ز ل مساوية لزاوية هـ ز ك، لأنهما متتاليتان★ وهما قائمتان. ولكن زاوية هـ ز ط أعظم من زاوية هـ ز ك. فيجب أن تكون أيضاً أعظم من زاوية هـ ز ل: الصغرى إذن أعظم من العظمى. هذا خلف لا يمكن.

فإذن لا يمكن ان تكون زاوية قائمة أعظم من زاوية قائمة، ولا أصغر منها. فالزوايا القائمة إذن كلها متساوية.

وليس كل الزاويا المتساوية قائمة، الا أن تكون **متتالية**★. فإنه قد يمكن أن تتساوى الزوايا وهي منفرجة، وحادة.

وليبين ان الزوايا المساوية لقائمة هي أيضاً قائمة، اضطر إلى ان ينقل أسم الزاوية إلى القسي أيضاً. فتصير الزوايا التي تحيط بها قسي زوايا قائمة قائمة على طريق الاستعارة.



الشكل ١/٤

مثال ذلك ان نفرض زاوية قائمة عليها أ ب جـ، ونعلم على مركز ب، وبأي بعد شئنا علامتين على خطي أ ب، ب جـ، وهما علامتا د، هـ. وندير على مركزي د، هـ، وببعدي د ب، هـ ب: نصف دائرة أ ز ب، ونصف دائرة ب ط جـ. فتكون زاوية أ ب ز مساوية لزاوية جـ ب ط؛ لأن أنصاف الدوائر، اذا كانت متساوية، كانت زواياها متساوية. ونجعل زاوية أ ب ط مشتركة، فتكون زاوية ز ب ط مساوية لزاوية أ ب جـ وزاوية أ ب جـ قائمة. وزاوية ز ب ط هلالية. فقد صارت زاوية هلالية مساوية لزاوية قائمة.

★ الزاويتان المتتاليتان هنا هما المتجاورتان adjacent .

وهذا الذي ينسبه النيريزي هنا إلى سنبليقيوس ينسبه هيث إلى بابس، نقلاً عن بركلس. ويلاحظ مثل هذا الاختلاف في مواضع أخرى كثيرة. وقد

يكون سبب ذلك اعتماد العرب قديماً على مخطوطات اغريقية غير موثوقة. الا ان الأمر سيحتاج في يوم ما إلى دراسة وتمحيص، استناداً إلى المراجع الإغريقية المتوافرة.

وقد ذكرنا في مقدمتنا لهذه التحقيقات ان المصادرة الرابعة تضع بين يدينا وحدة نقارن بها أقدار الزوايا. فإهمال النسوي لها يفقده هذه الوحدة. على ان رياضيين غيره أسقطوها أيضاً من مجموعة المصادرات (postulates)، وأضافوها إلى الأوليات (axioms) على اعتبار ان الأوليات تختص بحقائق ثابتة، في حين ان المصادرات تختص بانشاءات، أو عمليات يمكن ان تعمل.

المصادرة الخامسة

[الحجاج - ٥] قال اوقليدس

واذا وقع على خطين مستقيمين خط مستقيم، فصيَّر الزاويتين اللتين في جهة واحدة: أصغر من قائمتين، فإن الخطين يلتقيان في الجهة التي فيها الزاويتان اللتان أصغر من قائمتين.

Heath, 5: That if a straight line falling on two straight lines makes the interior angles on the same side less than two right angles, the two straight lines, if produced indefinitely, **meet on that side on which are the angles less than two right angles.**

[النسوي - ٤]: وإنه ان وقع خط مستقيم على خطين مستقيمين، فصير في إحدى الجهتين: الزاويتين الداخلتين أصغر من قائمتين، فإن الخطين اذا اخرجا في تلك الجهة التقيا.

[النيريزي]: قال سنبليقيوس: ان هذه المصادرة ليست بظاهرة كل ذلك؛ لكنه قد احتيج فيها الى بيان بالخطوط، حتى ان انطيباطوس* وديودروس بيناها بأشكال كثيرة مختلفة.

قال النيريزي: قد ذكرنا تفسيرها مع زيادات اغانيس بعد برهان الشكل الثامن والعشرين من المقالة الأولى.

★ هكذا يظهر الأسم في النسخة العربية. وهيث (١/٢٠٣) ينقله عن النسخة اللاتينية بشكلين مختلفين ومهما يكن الاسم فنحن لا ندري من المسمى، وان نكن نعرف ديودورس المذكور معه.

هذه هي المصادرة المشهورة التي وقف قبالتها كل رياضي ذي شأن، من عهد اقليدس، حوالي سنة ٣٠٠ قبل الميلاد، إلى اواخر القرن التاسع عشر، عندما بدأت الهندسات اللااقليدية تتخلق. قال عنها بركلس :«ينبغي ان تشطب من قائمة المصادرات، لأنها نظرية ينطوي برهانها على صعوبات.

وضع بطلميوس كتابا كاملاً في البرهنة عليها، وفي شرح ما تحتاج إليه من تعريفات ونظريات. بل إن اقليدس نفسه اعتبر معكوسها نظرية وأقام عليه برهاناً. ولكن قد يرى بعض المخدوعين ان من المعقول ان نصادر بها، فنستنتج من نقصان الزاويتين عن قائمتين ان الخطين يقتربان، ومن ثم يتقاطعان. فنقول لهم ان رواد هذا العلم نهوا عن تقبل ما يلوح معقولاً، في نطاق الهندسة حيث لا يغني شيء عن التحكيم المنطقي الاستنتاجي، ولقد قال ارسطو: انا لا نتوقع براهين علمية من خطيب شعبي، ونحن بالمثل لا نقبل من الرياضيين أحكاماً مبنية على مجرد المعقولية، ألم ينادِ افلاطون على لسان سمياس ان الأغبياء هم وحدهم الذين يبنون حججهم على مجرد الاحتمالات!

صحيح أنه اذا نقص مجموع الزاويتين عن قائمتين، فإن الخطين يتقاربان؛ وأما قولنا ان تقاربهما يفضي في النهاية إلى التقاء، فهذا أمر معقول، ولكنه غير محتوم، الا اذا كان ثمة ما يقضي بأن هذا من خصائص الخطوط المستقيمة؛ وذلك لأن هناك خطوطاً تتقارب ولا تتلاقى. تلك حقيقة مؤكدة في انواع من الخطوط[1]. مهما يظهر فيها من تناقض. فلا يمكن ان تصح اذن هذه الحقيقة في الخطوط المستقيمة، لهذا فما لم تؤيد بالبرهان تلك الدعوى المذكورة بالمصادرة، فإن ما اكتشفناه عن خطوط تتقارب ولا تتلاقى: يصرف

(١) يعني بالخطوط التي تتقارب ولا تتلاقى القطع الزائد وخط تقاربه.

أنظارنا إلى ان هذا يصح أيضاً في حالة هذه الدعوى. فمهما انطوى على مفاجآت افتراضنا ان ذينك الخطين لا يلتقيان، . فإن الأمر يقتضي أن ننزع من سجل أحكامنا كل ما يبنى على المعقولية مجردة عن التحكيم المنطقي. صفوة القول ان لا بد من برهان على هذه الدعوى التي تبدو شاذة عن مجموعة **المصادرات الأخرى. [بتصرف عن هيث ١/٢٠٢، ٢٠٣]**

والـدلائـل تشير إلى ان اقليدس كان على علم بما تنطوي عليه هذه المصادرة من شكوك: فهو قدَّم تعريفات لثلاثة وعشرين من المفاهيم الهندسية، جعل آخرها تعريف الخطين المستقيمين المتوازيين، فاعتبرهما خطين في سطح واحد لا يلتقيان مهما امتدا.

ومن ثم أتبـع ذلك بخمس مصادرات جعل آخرها المصادرة التي نبحث عنها، فجعل التقاء الخطين فيها رهناً بقيمة مجموع الزاويتين الداخلتين، ان كان هذا المجموع اقل من قائمتين في احدى جهتي القاطع ففي تلك الجهة يلتقي الخطان. ومن ثَمَّ فهما لا يلتقيان في الجهة الأخرى. يتبع هذا مباشرة أنه اذا كان مجموع الزاويتين مساوياً لقائمتين، فالخطان لا يلتقيان، اي انهما متوازيان.

ثم أخذ اقليدس يستنتج نظرياته الهندسية، واحدة بعد الأخرى، متعمداً على ما يبدو تأجيل الخوض في فكرة التوازي كلية، حتى أتم ٢٦ نظرية.

والنظرية ٢٧ منطوقها: اذا وقع خط مستقيم على خطين مستقيمين، فصير الزاويتين المتبادلتين متساويتين، فإن الخطين متوازيان.

هذه نظرية في التـوازي واقليدس يبـرهن عليهـا، استناداً إلى تعريفه للتوازي؛ ويعتمد في ذلك على نظرية من النظريات السابقة، لا على مصادرته الخامسة.

وبالنظريتين ٢٧، ٢٨ يفرغ اقليدس من شروط التوازي، دون اعتماد على مصادرته:

تساوي المتبادلتين
تساوي المتناظرتين ⟸ توازي الخطين.
مساواة الداخلتين في جهة واحدة إلى قائمتين

ثمانية وعشرون نظرية، من ١ الى ٢٨ ليس فيها أي اعتماد على مصادرة التوازي. يسمي الرياضيون مجموعة النظريات التي لا تعتمد على مصادرة التوازي بالهندسة المطلقة، أو المحايدة. وهي هذه النظريات وما يستنتج منها وحدها.

هنا استنفد اقليدس كل الإمكانيات الأساسية في هندسته فلجأ إلى مصادرته لإثبات النظرية ٢٩، وهي عكس نظريتي ٢٧، ٢٨، وقد برهن عليها بطريقة الخلف:

خطان متوازيان قطعهما قاطع ⟸ الزوايا المتبادلة متساوية
الزوايا المتناظرة متساوية
الزاويتان الداخلتان في جهة واحدة
تساويان قائمتين

وقائمة رياضيي الإسلام الذين تصدوا لحل شكوك هذه المصادرة، طويلة. منهم من اعتبرها نظرية وحاول اثباتها، فاضطر الى استعمال مصادرة مكافئة؛ ومنهم من لجأ منذ البدء إلى مصادرة بديلة وجدها أقرب للتصديق.

ومثل هذا ما صنعه بطلميوس وبركلس من الأغريق: اما بطلميوس فبنى برهانه على مصادرة تقول ان أي خطين مستقيمين لا يحصران بينهما سطحاً محدوداً. فاذا وقع خط على خطين في سطح فكانت الزاويتان الداخلتان في كل من الجهتين متكاملتين، فلا يمكن ان يلتقي الخطان، اذ لو التقيا في تلك الجهة، لوجب للسبب نفسه ان يلتقيا في الجهة الأخرى، لأنهما «ليسا في اية جهة أقل توازياً منهما في الجهة الأخرى». واذا التقيا في الجهتين، حصرا بينهما سطحاً مستوياً، وهذا محال.

وأما بركلس فعرَّف المتوازيين بأنهما خطان في سطح، على أبعاد متساوية أحدهما عن الآخر. وعلى هذا الأساس بنى طريقة لرسم المتوازيين وبرهانه لمصادرة اقليدس.

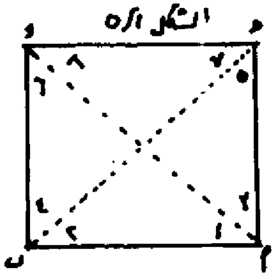
وواضح ان كلاً من بطلميوس وبركلس استعاض عن مصادرة اقليدس بمصادرة أخرى تكافيها. ومثل هذا ما صنعه كل رياضيي الإسلام، الا اننا ننقل أقوال الخيامي والطوسي هنا، للشبه بين ما صنعاه وبين ما صنع ساكيري فيما بعد، فصار مفتاح العبور إلى هندسات أخرى جديدة.

فأبو الفتح، عمر بن ابراهيم الخيامي (أو الخيام) ولد في خراسان بين ٤٣٠، ٤٤٠هـ (١٠٣٨، ١٠٤٨م) وتوفي في بغداد سنة ١١٢٣/٥١٧. وهو شاعر مبدع ورياضي كبير له رسائل في الجبر، ورسالة في شرح ما اشكل من مصادرات كتاب اقليدس، نشرها د. عبدالحميد صبرة في الاسكندرية سنة ١٩٦١. يقول الخيامي في صدر رسالته، بعد ذكر كتاب اقليدس ومصادرة التوازي: «ثم اني شاهدت جماعة من متصفحي كتابه.. لم يتعرضوا لهذا المعنى أصلاً، لصعوبته؛ مثل إيرن واوطوقس، من المتقدمين، وأما المتأخرون: فقد مدت جماعة منهم أيديهم إلى البرهان عليها: مثل الخازن، والشني، والنيريزي، وغيرهم؛ فلم يتأتَّ لواحد منهم برهان نقي؛ بل كل واحد صادر على أمر ليس تسليمه بأسهل من هذا [أي من مصادرة اقليدس]... وقد شاهدت كتاباً لأبي علي بن الهيثم رحمه الله، **موسوماً** بحلِّ شكوك المقالة الأولى.. فلما تصفحته.. صادفت المصنف قد قصد ان تكون هذه المصادرة في صدر المقالة، من جملة سائر المبادىء، من غير احتياج إلى برهان.. وتكلف في ذلك تكلفاً خارجاً عن الاعتدال.. منها أنه قال: اذا تحرك خط مستقيم قائم على خط آخر، ويكون قيامه محفوظاً على ذلك الخط في حركته، فإنه يفعل طرفه الآخر خطاً مستقيماً، والخط الحادث مواز للخط الساكن..»

ويستنكر الخيام هذا القول باعتبار الحركة لا تنتسب إلى الهندسة. أما

طريقته في إثبات المصادرة فتتألف من ثمانية أشكال (اي نظريات) يرى انها يجب ان تضم إلى كتاب اقليدس بعد النظرية ٢٨ ، مباشرة، وهي كما يلي :

$خ_1$: المفروض أ ب خط، أ جـ، ب د عمودان على أ ب متساويان. ينتج ان أ جـ يوازي ب د حسب نظرية ٢٧ ، نصل جـ د فيتكون شكل رباعي أ ب د جـ نسميه هنا رباعي الخيام ١.



المطلوب: زاوية جـ = زاوية د. العمل نصل أ د، ب جـ.

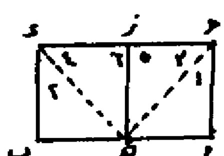
البرهان: نطبق المثلث أ ب جـ على المثلث أ ب د فينطبقان لتساوي ضلعين وزاويتهما. وينتج أن أ د = ب جـ، زاوية ١ = زاوية ٢ وان زاوية ٣ = زاوية ٤ ، زاوية ٥ = زاوية ٦ .

نطبق المثلث أ جـ د على المثلث ب جـ د فينطبقان لتساوي الأضلاع، وينتج ان زاوية ٧ = زاوية ٨ **،فمجموع** زاويتي ٥ ، ٧ يساوي مجموع زاويتي ٦ ، ٨ اذن زاوية جـ = زاوية د. وهو المطلوب.

$خ_2$: المفروض: رباعي الخيام وفيه هـ منتصف أ ب، هـ ز يعامد أ ب ويقطع جـ د في ز.

المطلوب جـ ز = ز د، هـ ز يعامد جـ د.

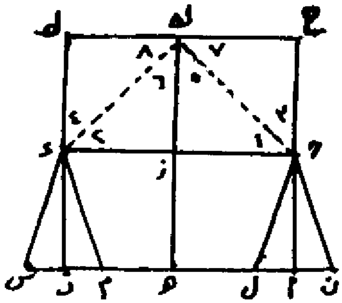
العمل نصل جـ هـ، هـ د.



الشكل ١/٦

البرهان: نطبق المثلث أ جـ هـ على المثلث ب د هـ فينطبقان لتساوي ضلعين وزاويتهما وينتج ان جـ هـ = هـ د، **زاوية** ١ = زاوية ٢ . فزاوية ٣ = زاوية ٤ حسب $خ_1$ ونطبق المثلث هـ جـ ز على هـ د ز فينطبقان لتساوي ضلعين وزاويتهما.

فينتج أن جـ ز = ز د، زاوية ٥ = زاوية ٦ = قائمة. وهو المطلوب.



الشكل ١/٧

خ٣: المفروض رباعي الخيام وفيه هـ ز يعامد أ ب (رباعي الخيام ٢).

المطلوب زاوية أ جـ د = قائمة = زاوية ب د جـ.

العمل: نمد هـ ز إلى ك، ونجعل هـ ز = ز ك، ونخرج ح ك ط عموداً على هـ ك ونمد أد، ب د فيقطعان ح ك ط في ح، ط.

فلان أ جـ يوازي هـ ك العمود على ط ك فإن أ جـ لا بد ان يلاقي ط ك **وكذلك ب و** ويوازي هـ ك العمود على ح ك فإن ب د لا بد ان يلاقي ح ك.

البرهان: نطبق المثلث جـ ز ك على المثلث د ز ك فينطبقان لتساوي ضلعين وزاويتهما وينتج ان جـ ك = د ك، زاوية ٥ = زاوية ٦. فينتج ان زاوية ٧ = زاوية ٨، متممتا زاويتين متساويتين. وزاوية ١ = زاوية ٢، فينتج ان زاوية ٣ = زاوية ٤ لان مكملتي زاوية جـ وزاوية د المتساويتين متساويتان.

ونطبق المثلثين جـ ح ك، د ط ك فينطبقان لتساوي زاويتين وضلع وينتج ان ح ك = ك ط، جـ ح = د ط، زاوية ح = زاوية ط. وزاوية جـ = زاوية د (حسب خ٢) فهما اما قائمتان او حادتان أو منفرجتان.

أولاً: فإن كانتا قائمتين فقد حق الخبر.

ثانياً: وان كانتا حادتين تكون زاوية ح جـ ز أكبر من زاوية ط د ز.

نطبق السطح جـ د على السطح جـ ب، فيقع ك ز على ز.هـ، وتقع ح على ن، ط على س. ويكون ح ط = ن س **وهو أكبر من أب**

وعلى هذا فالخطان أ جـ، ب د «الى الاتساع».

وبالمثل اذا كانت زاوية جـ = زاوية د = منفرجة، كان الخطان الى «التضايق».

فيتج ان خطين قائمين على خط ثالث، ومع ذلك فهما إلى الاتساع أو التضايق، وهذا محال أولي أي من المستحيلات الأولية، فالزاويتان لا تكونان إلا قائمتين.

هذا يدفع الخيام إلى وضع اوليات أخرى ومصطلحات هي:

١ ـ كل متوازيين فإن البعد بينهما لا يتغير.

٢ ـ البعد بين أي خطين هو الخط الواصل بينهما بحيث تكون الزاويتان الداخلتان متساويتين.

٣ ـ اذا فرض خط مستقيم، وأخرج من طرفيه عمودان.. فهما لا يتضايقان ولا يتسعان. والخيام يسميهما متحاذيين.

يلي ذلك النظريات التالية:

خ$_{٤}$: كل رباعي أ ب جـ د، زواياه قائمة، فإن ضلعيه المتقابلين أ ب = جـ د، وكذلك أ د = ب جـ

خ$_{٥}$: كل خطين متحاذيين، فإن العمود على احدهما عمود على الآخر.

خ$_{٦}$: كل خطين متوازيين، حسب تعريف اقليدس، فهما متحاذيان.

خ$_{٧}$: اذا وقع خط مستقيم على خطين متوازيين، كانت الزاويتان المتبادلتان متساويتين، والزاويتان المتناظرتان متساويتين، والزاويتان الداخلتان في جهة واحدة متكاملتين (وهذه نظرية تنوب عن نظريتي ٢٩، ٣٠ عند اقليدس).

خ$_{٨}$: **إذا وقع على خطين آخرين، فكان مجموع الزاوتين الداخلتين في إحدى** جهتيه، أقل من قائمتين، فالخطان اذا مدا من تلك الجهة فانهما يلتقيان.

وهذه وهي المصادرة الخامسة برهن عليها الخيام، باعتبارها نظرية، استناداً إلى نظرياته السبع السابقات، وما معها من أوليات.

وواضح ان لا شيء في صنع الخيام ما يميزه عن سابقيه، الا ما في رباعياته الهندسية، كما سيتبين بعد حين.

وأما نصير الدين الطوسي (١٢٠١/٥٩٧ - ١٢٧٤/٦٧٢) فقد ولد ونشأ في طوس، ثم انتقل إلى نيسابور لإكمال تعليمه، وهناك درس الرياضيات على كمال الدين بن يونس. وفي نيسابور برز واشتهر وذاع صيته، وكانت الفوضى وقتها تعم البلاد، اذ كان هولاكو في زحفه نحوها. الا ان الطوسي تلقى دعوة من الحاكم الإسماعيلي ليلجأ إلى حصون الإسماعيلية في كوهستان، هرباً من المغول فقبل الدعوة، وهناك انصرف إلى العلم. ولكن الجيش المغولي ما لبث ان وصل إلى تلك الحصون. وقبض على الطوسي. الا ان شهرة نصيرالدين واطلاعه على شؤون الفلك والتنجيم قد شفعا له وأوصلاه إلى هولاكو نفسه، الذي اتخذه مستشاره ورفيقه، وأخذه معه إلى بغداد سنة ١٢٥٨ حيث دك عرش الخلافة، ثم رافقه في طريق عودته، وبنى له مرصد مراغة الشهير الذي حشد فيه الطوسي جلة علماء الفلك والرياضيات، من الشرق والغرب، أعني الصين والعالم الإسلامي.

وكتب نصير الدين الطوسي كثيرة، وصل الينا منها حوالي ١٥٠ كتاباً ورسالة، معظمها بالعربية، وبعضها بالفارسية. ومن أهم أعماله تحريره لعديد من الكتب الإغريقية والعربية. ويعني بالتحرير عادة نسخ الكتاب محرراً من أخطاء النساخ، الا ان تحرير الطوسي امتد إلى تطوير الكتاب وتحديث مصطلحاته. وما يهمنا هنا هو تحريره لكتاب اقليدس، ففيه استند الطوسي إلى نسخة الحجاج وإلى تصحيح ثابت بن قرة. وقد جعل الطوسي تحريره لكتاب اقليدس في نسختين، واحدة مطولة وواحدة مختصرة. وفي كل من هاتين النسختين تعرض الطوسي لمصادرة اقليدس الخامسة، فحلّها حلين مختلفين، ثم هو افرد لها رسالة سماها الرسالة الشافية، وفيها استعرض ما عرفه من حلول من تقدمه، فانتقدها جميعاً، ثم جاء بحلوله هو.

والرسالة الشافية درست كثيراً ونشرت. وحلول الطوسي في النسخة المطولة ترجمت إلى اللغات الأوروبية ولخصها هيث في ١ /٢٠٨ - ٢١٠. واما حلوله

في النسخة المختصرة، وفيها يتبين تأثره بالخيام من ناحية، وتأثيره في ساكيري وجون وولس من ناحية أخرى، فيبدو لي انها لم تحظ باهتمام الباحثين، ولذا نلخصها هنا نقلاً عن مخطوطات ٣٥، ٣٦، ٧٠٣، ١٠٢٦ رياضة في دار الكتب في القاهرة:

يبني الطوسي حله هنا على سبع قضايا هي التالية:

«الأولى: أقصر الخطوط الخارجة من نقطة مفروضة إلى خط غير محدود ليست هي عليه، وهو المسمى ببعدها عنه، هو الذي يكون عموداً عليه».
والبرهان كما عرفناه في هندسة اقليدس. فهذه النظرية إذن من صنع الطوسي.

«الثانية: اذا قام عمودان متساويان على خط، ووصل طرفاهما بخط آخر، كانت الزاويتان الحادثتان بينهما متساويتين».

هذه هي خ$_{١}$ عند الخيام وبرهانها برهانه.

«الثالثة»: اذا قام عمودان متساويان على خط، ووصل طرفاهما بخط، كانت الزاويتان الحادثتان بينهما قائمتين».

هذه هي خ$_{٣}$ عند الخيام وبرهانها كبرهانه **من حيث المبدأ**، الا ان الطوسي يعالج المسألة مستنداً إلى مصادرة له.

الرابعة: كل ضلعين متقابلين من سطح ذي أربعة أضلاع قائم الزوايا متساويان.

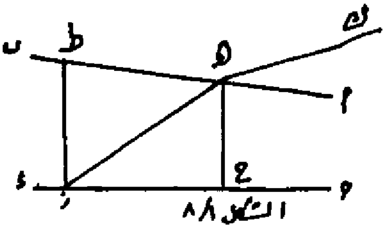
هذه هي خ$_{٤}$ عند الخيام، وبرهانه برهانه.

«الخامسة: كل خط يقع على عمودين قائمين على خط، فإنه يصير المتبادلتين متساويتين، والخارجة مساوية لمقابلتها الداخلة، والداخلتين في جهة معادلتين لقائمتين».

هذه تقابل النظرية **٢٩** عند اقليدس.

«السادسة: اذا تقاطع خطان غير محدودين على غير قوائم، وقام على أحدهما عمود، فإنه إن أخرج قاطع الآخر في جهة الحادة».

هذه القضية تشبه قضية أساسية في النسخة المطولة (انظر هيث ١/٢٠٩) بكل تفاصيلها.


الشكل ٨٨

«السابعة: كل خطين وقع عليهما خط، وكانت الداخلتان في جهة: أصغر من قائمتين، فانهما ان اخرجا في تلك الجهة تلاقيا.

هذه هي مصادرة اقليدس بنص الطوسي.

«فليكن أ ب، جـ د خطين وقع عليهما خط هـ ز، والداخلتان أ هـ ز، جـ ز هـ معاً أصغر من قائمتين.

أقول: فإنهما يتلاقيان في جهة أ، جـ إذا أخرجا. وذلك لأنه اما ان تكون إحدى هاتين الزاويتين قائمة أو منفرجة، أو لا تكون، فتكونان حادتين.

فإن كانت إحداهما قائمة، كانت الأخرى حادة ويلتقيان في جهة الحادة، كما مرَّ (انظر السادسة).

وان كانت احداهما منفرجة، ولتكن هي زاوية أ هـ ز، فلنخرج من هـ عمود هـ ح على أ ب؛ ومن ز عمود ز ط أيضاً على أ ب. فتكون، لوقوع هـ ز على عمودي هـ ح، ط ز، المتبادلتان ح هـ ز، هـ ز ط متساويتين (انظر الخامسة أعلاه).

ولما كانت زاويتا أ هـ ز، هـ ز ح أصغر من قائمتين، وكانت زاوية أ هـ ح قائمة، تبقى زاويتا ح هـ ز ، هـ ز ح معاً، أعني زاويتي هـ ز ط، هـ ز ح، بل زاوية ط ز ح: أقل من قائمة. وكانت زاوية أ ط ز قائمة. فإذن الخطان يتلاقيان في جهة أ، جـ.

وان كانتا حادتين، فلنخرج من هـ عمود هـ ح على جـ د؛ ومن ز عمود ز ط أيضاً على جـ د. فإذا ألقينا زاويتي جـ ز هـ، ز هـ ح معاً، أعني زاويتي جـ ز هـ، هـ ز ط معاً، المساويتين لزاوية ح ز ط القائمة، من زاويتي أ هـ ز، جـ ز هـ: بقيت زاوية أ هـ ح أصغر من قائمة. وكانت جـ ح هـ قائمة.

واذن هما يتلاقيان في جهة أ جـ.

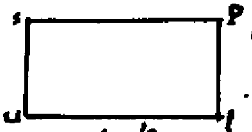
بعد هذا يعطي الطوسي برهاناً آخر لهذه الحالة الأخيرة ويعقبه ببرهان آخر للمصادرة يضيف من اجله القضيتين التاليتين مع برهانيهما:

أ ـ «كل زاوية حادة فصل من أحد ضلعيها خطوط متساوية على الولاء، وأخرج من تلك المفاصل أعمدة على الضلع الآخر، فالخطوط التي تفصلها مواقع الأعمدة من ذلك الضلع متساوية».

ب ـ «كل زاوية فرضت نقطة فيما بين خطيها، فإنه يمكن أن يوصل بينهما بخط مستقيم يمر بتلك النقطة».

ساكيري (Gerolamo Saccheri) (١٦٦٧ ـ ١٧٣٣)

في سنة ١٧٣٣ نشر ساكيري بحثاً طريفاً عن المصادرة الخامسة، وكان معلماً للرياضيات في جامعة بافيا. وقد بدأ بحثه برباعي الخيام والطوسي، الذي يسمى الآن رباعي ساكيري:



الشكل ٩/١

أ ب خط مستقيم، أ جـ، ب د عمودان عليه متساويان في الطول. نصل جـ د ونثبت ان الزاوية جـ = الزاوية د. فاذن الزاوية جـ، الزاوية د إما (١) قائمتان أو (٢) منفرجتان، أو (٣) حادتان. هنا يختلف خط سير ساكيري عن سابقيه.

كان كالخيام والطوسي واثقاً بصحة فرضية القيام لإقليدس، وكان مثلهما يبحث عن تناقض ينجم عن الفرضيتين الأخريين. لكنه مضى في تتبع هذه النتائج، فسبق بذلك لابوشفسكي وريمان من حيث لا يعلم.

وكان من جملة ما استنتج النظريات التالية:

١ ـ اذا صحت اي من الفرضيات الثلاث في حالة واحدة، فهي صحيحة دائماً.

٢ ـ اذا ثبتت فرضية الزاوية القائمة أو المنفرجة أو الحادة، فإن مجموع زوايا المثلث هو على التوالي قائمتان أو اكثر أو اقل.

٣ ـ اذا وجد مثلث مجموع زواياه قائمتان أو أكثر أو أقل، تكون فرضية القائمة

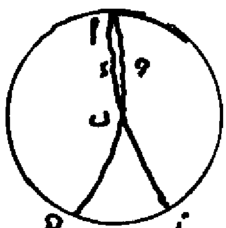
أو المنفرجة أو الحادة، على التوالي صحيحة دائماً.

لم تكن براهين ساكيري خلواً من الهنات. الا ان تفكيره في متابعة فرضيتي الزاوية المنفرجة والزاوية الحادة كان جديداً على الفكر الهندسي. الا انه لم يستغل الا بعد قرن من الزمان على يدي لوباشفسكي وبولياي.

مصادرة أخرى سادسة

[الحجاج] - ٦: وعلى ان خطين مستقيمين لا يحيطان بسطح

[النيريزي]:



الشكل ١٠/١

قال سنبليقيوس: ان هذه المصادرة ليست توجد في النسخ القديمة، ولعل ذلك لأنها ظاهرة بينة. ولذلك وسمت المصادرات بأنها خمس. فأما الحداث فإنهم برهنوها على هذا السبيل فقالوا:

إن أمكن أن يكون خطان مستقيمان يحيطان بسطح، فليحط خطا أ جـ ب، أ د ب، المستقيمان، بسطح، على ما هو مرسوم. ونخرج خطي ب هـ، ب ز على استقامتهما. ولنرسم على مركز ب، وببعد ب أ، دائرة أ ز هـ ح. فمن أجل أن ب مركز لدائرة أ ز هـ ح، يكون كل واحد من خطي أ جـ ب هـ، أ د ب ز، المستقيمين، قطراً للدائرة, فقوس أ ز مساوية لقوس أ ز هـ: العظمى للصغرى. هذا خلف لا يمكن. فليس إذن يحيط خطان مستقيمان بسطح.

فإن قال قائل: ان القوس ليست مساوية للقوس، لكن تكسير القطعة أ د ب ز مساوٍ لتكسير قطعة أ جـ ب هـ ح، لزمه ضرورة ان زاوية ح أ د مساوية لزاويةح أ جـ؛ وذلك غير ممكن. وانما لزمه ذلك لأننا قد بينا ان أنصاف الدوائر تتطابق. وأيضاً فان كانت قطعة أ د ب ز مساوية لقطعة أ جـ ب هـ ح، والمركز

على نقطة ب، فان كل واحدة من القطعتين نصف دائرة؛ وتكون قطعة ز ب هـ خارج الدائرة.

سنجد ان الحجاج يذكر هذه المصادرة بين الأوليات أيضاً.

الأوليات★

[الحجاج]: قال اوقليدس: القضايا المقبولة، والعلوم المتعارفة.

Heath: Common Notions

[النسوي]: علم عام متفق عليه.

[النيريزي]: قال سنبليقيوس: **إنا قد** قلنا فيما تقدم ان العلوم المتعارفة ينبغي ان تكون مقبولة بذاتها عند الناس كلهم، يصدقون بها بأنفسها، أعني بغير توسط.

الأولى

[الحجاج]: ١ ـ المساوية لشيء واحد، فبعضها مساوٍ لبعض.

Heath: Things which are equal to the same thing are also equal to one another

[النسوي] ١ ـ الأشياء المساوية لشيء واحد بعينه، فهي متساوية.

[النيريزي]• قال سنبليقيوس: بيِّن أن هذا القول، اذا قيل في المتساوية، فهو حق، قريب من الفهم. وأما اذا قيل على الطريق الأعم، لم يكن بحق: فإن الأشياء التي هي أطول من شيء واحد، ليس يجب اضطراراً أن يكون بعضها أطول من بعض. ولا الذين هم إخوة لإنسان واحد، بعضهم إخوة لبعض، اذا كان ذلك الواحد أخاً لبعضهم من الأب، وأخاً لبعضهم من الأم.

★ ما سميناه هنا «الأوليات» وسماه هيث «المبادىء العامة Common Notions» يعني به axioms وهنالك شك في أي الاسمين استعمله اقليدس، انظر بشأنه هيث ١/٢٢١.

ولذلك ينبغي ان تكون الإضافة في ذلك بسيطة، مأخوذة من جملة واحدة بعينها، لا على جهات مختلفة، كما مثلنا ذلك في الإخوة؛ ولا من طريق الأكثر والأقل، كما مثلنا في الذين هم أطول من شيء واحد.

الثانية

[الحجاج]: ٢ - وإن زيد على المتساوية متساوية، كانت مجموعاتها متساوية.

Heath: 2 -If equals be added to equals, the wholes are equal.

[النسوي]: ٢ - وإن زيد على المتساوية متساوية، صارت كلها متساوية.

الثالثة

[الحجاج]: ٣ - وإن نقص من المتساوية متساوية، كانت الباقية متساوية.

Heath: 3 If equals be **subtracted** from equals, the remainders are equal.

[النسوي]: ٣ - وان نقص من المتساوية متساوية، صارت الباقية متساوية.

الرابعة

[الحجاج]: ٤ - واذا زيد على غير المتساوية متساوية، كانت مجموعاتها غير متساوية. واذا نقص من غير المتساوية متساوية، كانت الباقية غير متساوية. والتي هي اضعاف الواحد بعينه، فبعضها مساوٍ لبعض. والتي كل واحد منها نصف لواحد بعينه، فبعضها مساوٍ لبعض.

[النسوي]: ٤ - وان زيد على المتساوية غير متساوية، أو على غير المتساوية، متساوية، صارت كلها غير متساوية. وان نقص من المتساوية غير متساوية، أو من غير المتساوية متساوية، صارت الباقية غير متساوية. والتي كل واحد منها مثلان لواحد بعينه، أو ثلاثة أمثاله، أو ما بعد ذلك، فهي متساوية والتي كل واحد منها نصف لواحد بعينه، أو ثلث له، أو ما بعد ذلك، فهي متساوية.

هيث لا يذكر شيئاً من هذا بين الأوليات.

الخامسة

[الحجاج]: ٥ - والتي يطابق بعضها بعضاً، فبعضها مساوٍ لبعض.

[النسوي]: ٥ - والتي لا يفضل أحدها على الآخر، اذا انطبق بعضها على بعض، فهي متساوية.

Heath: 4 - Things which coincide with one another are equel tò one another.

[الحجاج: ٦، النسوي، ٦]: والكل أعظم من الجزء

Heath: 5 - The whole is greater than the part.

أولية أخرى

[الحجاج - ٧] وخطان مستقيمان لا يحيطان بسطح.

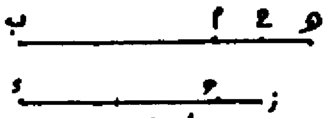
[النسوي - ٧] وخطان مستقيمان لا يحيطان بسطح.

وحينما قلنا في جميع هذا الكتاب: خط، على الإطلاق، فإنا نعني به الخط **المستقيم**. والمفروض، والمعلوم، والمعطى بمعنى واحد.

هيث لا يذكر شيئاً من هذا بين الأوليات.

[النيريزي]:

قال سنبليقيوس: قوله: ان زيد على المتساوية متساوية، صارت كلها متساوية؛ هذا المعنى يتبين بالأعداد بياناً واضحاً، وإن كان في نفسه، بغير أعداد، بيناً مقبولاً، والقضايا المقبولة توجد في النسخ القديمة، ثلاثاً فقط وأما في النسخ الحديثة، فإنه قد زيد فيها هذه، وهي بينة لا تحتاج إلى شرح، وكذلك التي بعدها بينة ظاهرة، وهذه وضعت لئلا يكون في الهندسة شيء مبرهن بأوائل غير مُقرٍّ بها.



الشكل ١/١١

فأما بابس فإنه قد زاد هذا المعنى أيضاً، على أنه من القضايا المقبولة: وهو ان المتساوية اذا زيد عليها مختلفة، كان تفاضل المجتمع من ذلك

مساوياً لتفاضل المختلف المزيد. وذلك يتبين بهذا العمل: نفرض مقدارين متساويين، وهما أ ب، جـ د. ولنزد عليهما مقدارين مختلفين، وهما هـ أ، ز جـ، وليكن هـ أ أعظمهما, فأقول ان زيادة هـ ب على ز د مساوية لزيادة أ هـ على ز جـ.

برهان ذلك انا نفصل من أ هـ مقداراً مساوياً لمقدار ز جـ، وهو أ ح. فمن أجل ان زيادة هـ ب على ب ح هي هـ ح، وَب ح مثل د ز، أ ح مثل جـ ز، صارت زيادة ب هـ على ب ح هي زيادة هـ أ على جـ ز.

وأيضاً ان زيد على المختلفة متساوية، كان تفاضلهما بعد الزيادة مساوياً لتفاضلهما قبل الزيادة. ومثال ذلك أننا إن زدنا على مقداري هـ أ، جـ ز المختلفين، مقداري أ ب، جـ د المتساويين، كان تفاضل هـ ب، ز د مساوياً لتفاضل هـ أ، ز جـ، وذلك قد بيناه قبيل.

وزاد أيضاً بابس شيئاً آخر، وهي هذه: ان البسيط يقاطع البسيط على خط. فان كان البسيطان المتقاطعان مسطحين، كان تقاطعهما على خط مستقيم. والخط يقاطع الخط على نقطة. فإنا قد نحتاج إلى هذا المعنى في الشكل الأول. والخط المستقيم، والبسيط المسطح، قد يمكن، من أجل استوائهما، أن يخرجا إخراجاً دائماً أبداً.

وقد ينبغي أن يقدم أيضاً، من قبل الطرق الجزئية، هذه الأشياء: فنقول بأن غرض الهندسة كما تقدم من قولنا الإبانة عن المقادير والأشكال والوضع ونسب هذه بعضها إلى بعض وقصدها في كل واحد: إما علمي[1] وإما عملي[2]. فما كان قصدها فيه إفادة علم سمي علماً. وما كان قصدها فيه إفادة عمل سمي عملاً. فالعلمي هو ما كانت غايته أن يُعرف شيئاً ما، مثل الشكل الثاني في المقالة الأولى، وما كان شبيهاً به. وهذه الأشكال هي التي من عادتهم أن يقولوا في آخرها: وذلك ما أردنا أن نبين.

وأما العملي فهو ما كانت غايته، فيما يظهر، ان تعمل شيئاً ما. وهذه الأشكال هي التي من عادتهم أن يقولوا في آخرها: وذلك ما أردنا أن نعمل.

ولعلّه أن يقال لنا: فكيف تقول ان الهندسة إنما قصدها كله أن تفيدنا علوماً، اذا كانت قد توجد علوماً وأعمالاً معاً؟ فنقول في ذلك: إن غاية هذه الأعمال أيضاً أن تفيدنا معرفة. [٦أ] ونقول: فإن عمل مثلث متساوي الأضلاع، مطلقاً، هو إفادة معرفة، لا إفادة صنعة باليد. فإنا قد نجد العالم بهذا العمل لا يقدر أن يعمله في عنصر، ولا يصنع هذه الصورة فيه، ولكن يكون عنده أن يصف طريق العمل وحيلته، فقط، لا غير ذلك. فإن كان ذلك قد يصير مبدأً وأولاً لصناعات أخرى تعالج باليد فليس بمنكر فإن الهندسة قد تكون لصناعات كثيرة مبدأً وأولاً. وأيضاً فإن الأعمال التي في صناعة الهندسة تقوم عند العلوم مقام المقدمات التي توطىء لها. ويشبه أن تكون انما تتقدم فتستعمل بسببها.

وبعض الناس قد صيَّر في الأشكال فصلاً ثالثاً سماه الوجدان[٣]: وهو اذا لم نجعل قصدنا أن نعلم ولا أن نعمل، بل ان نقف على ما هو موجود، مثل قصدنا في الشكل الأول من المقالة الثالثة، فإن قصدنا فيه ان نجد مركز دائرة مفروضة. فالفصل بين الوجدان وبين العمل ان الوجدان إنما غايته الوقوف على الشيء الذي هو موجود، ليس أن نستخرج شيئاً ليس موجوداً.

وأما الفصل بينه وبين العلم فهو أن المعنى الذي نفيده بالعلم: لا نعلم أنه موجود أو ليس موجوداً، قبل ان نبرهن: مثل ان زوايا المثلث مساويات لزاويتين قائمتين. وأما في الوجدان فانا نعلم ان للدائرة مركزاً، ولكنا نطلب ان نجد موضعه، الا أن لقائل أن يقول: ان الشيء الذي يلتمس وجوده أيضاً، لا يعلم هل وجوده ممكن، أم غير ممكن، مثل ملتمس التمس ان يجد تربيع دائرة مفروضة.

وقد تسمى الأشكال كلها، علوماً وأعمالاً، باسم مشترك.

وكل واحد من هذه، أعني العلم والعمل، والوجدان إن كان شيئاً آخر غيرهما، ينقسم ستة أقسام، وهي: مقدمة، ومثال، وتفصيل، وعمل، وبرهان، ونتيجة.

أما المقدمة، في هذا الموضع، فهي الشيء الذي يسميه المنطقيون: الموضوع لأن يبين. وهي والنتيجة، في المعنى، شيء واحد بعينه، مثل ان نقول ان كل مثلث فإن زواياه الثلاث معادلات لزاويتين قائمتين. فهذا هو المقدمة، وهو أيضاً النتيجة؛ لأننا متى برهنا ان زوايا المثلث الثلاث معادلات لزاويتين قائمتين، نكون قد حققنا هذا الخبر، فيصير نتيجة. وهو ان نقول انه قد تبين ان زوايا كل مثلث معادلات لزاويتين قائمتين. وليست هذه المقدمة جزءاً من القياس المؤتلف وحدها. إنها قولة تقدم لنا المعنى الذي نريد ان نعلمه أو نعمله أو نجده. فإن كان في ذلك المعنى شيء نُعطاه، وشيء يطلب منا، كالحال في الشكل الأول، فإنا أعطينا فيه خطاً مستقيماً، وطلب منا ان نعمل عليه مثلثاً متساوي الأضلاع: فإنه يحتاج ان نذكر في المقدمة: المعطى والمطلوب جميعاً.

وأما المثال فهو الذي يوقع المعطى في المقدمة تحت البصر.

وأما التفصيل فهو الذي يفصل المطلوب في المقدمة، الموضوع في المثال، من جنسه المشترك، ويطلب أن نعمله ونبرهن [عليه].

وأما العمل فهو الذي يرسم الأشياء التي يحتاج إليها في البرهان، كالخطوط، ونعمل الأشياء التي أمرنا أن نعملها، وذلك مثل ما في الشكل الأول من إخراج أضلاع المثلث المتساوي الأضلاع، ورسم الدوائر التي تكون بها صنعة المثلث والبرهان، لتكفي هذه الأشياء مع المقدمة التي قدمت لتنتج لنا المطلوب.

وأما البرهان فهو الذي يجمع المطلوب من أشياء قد تقدم الإقرار بها.

وربما كان من معاني أولية في العقل، تقوم بالطبع، وعند ذلك يسمى برهاناً أولياً [٦ب] مثل برهان الشكل الأول: فإن الدوائر المتساوية فالخطوط التي تخرج من مراكزها إلى محيطاتها: متساوية. وبهذا القول يتبين المطلوب فيه. والدائرة أقدم من المثلث. وربما كان البرهان من استدلال(٥): مثل ان نبين ان زوايا المثلث الثلاث مساوية لزاويتين قائمتين. إذ كان هذا المعنى إنما يتبين من ان كل مربع ينقسم إلى مثلثين، فإن المربع هو بعد المثلث بالطبع.

وأما النتيجة فهو الذي يعيد المقدمة، مثل ان نقول: فقد تبين أن كل مثلث فإن زواياه الثلاث معادلات لزاويتين قائمتين. فنذكرها بثقة، اذ قد تبرهنت. ولذلك لا نزيد فيها شيئاً بتة أكثر من «فإذن».

والأشكال الكاملة تتم بهذه الستة معاني. ومنها ما يتم بخمسة فقط، مثل الشكل الرابع من المقالة الأولى، إذ كان ليس يحتاج فيه إلى عمل. ومنها ما يتم بأربعة فقط، اذا لم يكن في الشكل شيء يفرض. فإنه عند ذلك يسقط المثال والتفصيل، وذلك موجود في الشكل السابع من المقالة الأولى. والبرهان والنتيجة لا بد منهما في جميع الأشكال.

وقد ينبغي أن نبين أيضاً هذه الأشياء: ما المأخوذة، وما الفائدة، وما اختلاف الوقوع، وما الإعناد(٦)، وما صرف المعنى إلى ما لا يمكن(٧)، فأقول:

ان المأخوذة(٨) هي الشيء الذي، وإن كان في نفسه علماً وشكلاً فإنه إنما يؤخذ لأن يبين به شيء آخر، مثلماً أخذنا في الشكل الثاني: ضلعي المثلثين، فيظهر به ذلك الشيء ظهوراً سهلاً، ولذلك ينبغي أن يقدم قبل ذلك **الشيء، ويوضع [الشيء] تابعاً له، بعد أن يسلّم في البرهان، في العاجل.**

وأما الفائدة فهي التي تتبين مع برهان ما قصد لإقامة البرهان عليه، فيعاد بذلك البرهان.

وأما اختلاف الوقوع فهو وضع صور المعنى على وجوه كثيرة يختلف لها

البرهان. وأما الإعناد فهو القول المقاوم للبرهان، المانع لخروجه إلى غايته.

وأما صرف المعنى إلى ما لا يمكن، فهو أن نضع نقيض المعنى، ونبين أنه يعرض من ذلك شيء آخر غير ممكن، مثل أخذنا في الشكل السادس ان أحد الضلعين أعظم، إن أمكن، فيتبين بذلك بطلان صرف المعنى، وصحة المعنى الموضوع نفسه.

تمت المعاني التي بينها سنبليقيوس في تفسير مصادرات اوقليدس للمقالة الأولى من كتاب الأصول.

زيادة. قال ايرن: الأوائل المقدمة في الهندسة، في صدر كتاب أوقليدس، على أربعة أوجه: أوائل أولية، ومتوسطة وكيفية. ومنها أوائل فلسفية، فهي أوائل متعارفة. كقوله: المساوية لشيء واحد متساوية، والكل أعظم من الجزء. ومتوسط بين هذين، أعني انه ليس في غموض المأخوذة من الفلسفة، ولا في ظهور المتعارفة، بل يتبين بعد بحث يسير. والرابع ما تقدمه اسماً لمعانٍ قائمة في النفس، كقوله: حدّ الشيء طرفه، يريد أن يسمي طرف الشيء حداً. فمعنى الطرف قائم في النفس، وسماه حداً.

تم. وتتلوه المقالة الأولى من كتاب الأصول.

هذه النصوص واضحة، والغامض منها فسره النيريزي. وهذه ايضاحات إضافية:

(١) «العلمي» هنا وصف لأي قضية هندسية تعطى ويراد البرهنة على صحتها؛ كقولك أن زاويتي القاعدة في المثلث المتساوي الساقين متساويتان.

(٢) «والعملي» مايطلب عمله أو رسمه: كقولك ارسم مثلثاً متساوي الأضلاع.

(٣) «والوجدان» ما يطلب ايجاده كقولك أوجد مركز هذه **الدائرة**.

وعلى العموم فإن المصادرات (postulates) عملية، والأوليات والمبادىء العامة axioms علمية.

(٤) البرهان الأولي هو البدهي intuitive

(٥) الاستدلال inference ، وهو غير الاستنتاج deduction

فالاستنتاج ما ينتج عن معارف علمية وعملية، كاستنتاجك ان مجموع زوايا المثلث قائمتان، والاستدلال ما تستدل عليه بالحدس كملاحظتك من تماثل المثلث المتساوي الأضلاع ان زواياه متساوية.

(٦) **الإعناد** هنا بمعنى الاعتراض.

(٧) صرف المعنى إلى ما لا يمكن يقابل reductio ad absurdum ، وهو ما ينتج عنه «الخلف».

(٨) المأخوذة emma وجمعها lemnata .

والآن، وقد فرغنا من عرض المصادرات والأوليات والتعريفات، كما نجدها في النصين العربيين لكتاب اقليدس، يحسن ان نذكر ان التفكير العالمي الحديث حول المصادرات والأوليات، بعامة، يخالف تفكير اقليدس. وقد لخص هيث (١/٢٢٨) هذا التفكير بثلاثة مذاهب أو انظمة:

١ ـ مذهب باش Pasch الذي يرى (سنة ١٨٨٢) ان الفكرة الأولية هي فكرة التطابق أو المساواة بين اي شكلين يتألفان من عدد محدود من النقاط. ومنها يستنتج التطابق بين القطع والزوايا وسواها بطرق شبه اقليدية.

٢ ـ مذهب فيرونيز veronese (١٨٩١) الذي يرى ان الفكرة الأولية هي التطابق بين القطع الخطية، اما التطابق بين الزوايا والمثلثات فيتم بالمصادرة التالية:

ليكن أ ب، أ جـ، أَ بَ، أَ جَـ زوجين من المستقيمات يتقاطعان في أ، أَ، وليكن أ ب يطابق أَ بَ؛ أ جـ يطابق أَ جَـ، فاذا كان ب جـ يطابق بَ جَـ فان الزوجين متطابقان.

٣ ـ مذهب هلبرت Hilbert (١٩٠٣) الذي يعتبر الفكرة الأولية فكرة تطابق القطع والزوايا. فنظام هلبرت اكثر تطوراً من نظامي باش وفيرونيز وأسهل فهماً. ومصادراته الأساسية كما يلي:

١ ـ اذا كانت القطعة أ تطابق القطعة ب كانت ب تطابق أ أيضاً.

٢ ـ اذا كانت زاوية أ تنطبق على زاوية ب كانت تنطبق على أ أيضاً.

٣ ـ اذا طابقت قطعتان قطعة ثالثة فهما متطابقتان أيضاً.

٤ ـ اذا طابقت زاويتان زاوية ثالثة فهما متطابقتان أيضاً.

٥ ـ كل قطعة تتطابق مع نفسها بغض النظر عن الاتجاه أ ب ≡ أ ب ≡ ب أ.

٦ـ كل زاوية تتطابق مع نفسها بغض النظر عن الاتجاه: زاوية أ ب جـ ≡ زاوية جـ ب أ.

٧ ـ اذا أخذنا اي قطعة أ ب على أي خط خ، فأي نقطة أ على الخط هنالك نقطة أخرى وحيدة بَ عليه، على كل جانب من جانبي أَ حيث أَ بَ ≡ أ ب.

٨ ـ اذا أخذنا أي شعاع ش صادر من أي نقطة ن، في أي مستوٍ يمر بها، فهنالك شعاعان فقط شَ، شً، كل على واحد من جانبي ش في هذا المستوى، يصدران من ن ويصنعان مع ش زاويتين ش ن شَ، ش ن شً حيث ش شَ ≡ ش شً.

٩ ـ اذا كانت أ ب، ب جـ قطعتين متتاليتين على الخط خـ (اي تشتركان في نقطة وحيدة ب) وكانت أَ بَ، بَ جَـ قطعتين متتاليتين على الخط خَـ وكانت أ ب ≡ أَ بَ، ب جـ ≡ بَ جَـ كان أ جـ ≡ أَ جَـ.

١٠ ـ اذا كانت (أ ب)، (ب جـ) زاويتين متتاليتين في مستوٍ واحد أ، وكانت (أَ بَ)، (بَ جَـ) زاويتين متتاليتين في مستوٍ آخر أَ، وكانت (أ ب) ≡ (أَ بَ)، (ب جـ) ≡ (بَ جَـ) كان (أ جـ) ≡ (أً جَـ).

١١ ـ اذا تطابق في مثلث ضلعان والزاوية المحصورة بينهما مع نظائرها في مثلث آخر يتطابق أيضاً الضلع الثالث والزاويتان الآخريان مع نظائرها.

ب

المبرهنات (النظريات الهندسية)
في المقالة الأولى لاقليدس
كما ينقلها الحجاج
(النقل المأموني)
مع اضافات النيريزي

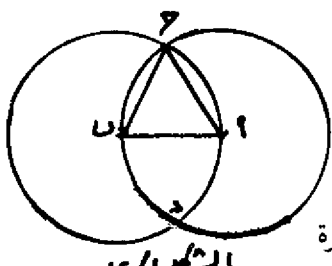
المقالة الأولى من كتاب أوقليدس

[المبرهنة ١/ ١]

الشكل الأول Heath 1/1

خمسة أشكال: شكل لأوقليدس وأربعة أشكال لأيرن .

قال أوقليدس: نريد أن نبين كيف نعمل على خط مستقيم مفروض مثلثاً متساوي الأضلاع.



الشكل ١/ ١ع

فليكن الخط المفروض: أ ب. ولنبين كيف نعمل عليه مثلثاً متساوي الأضلاع:

فنجعل نقطة أ مركزاً، ونخط ببعد أ ب دائرة ب جـ د.

ثم نجعل نقطة ب مركزاً، ونخط ببعد ب أ دائرة أ جـ د.

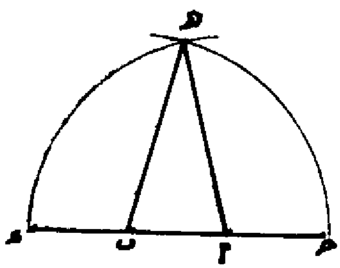
ونخرج من نقطة جـ، وهي على تقاطع الدائرتين: خطَّي أ جـ، جـ ب؛ وليكونا مستقيمين. فلأن نقطة أ مركز دائرة جـ ب د، وقد خرج منها خطان مستقيمان إلى محيطها، وهما أ جـ، أ ب، فهما إذن متساويان.

وأيضاً فلأن نقطة ب مركز الدائرة أ جـ د، وقد خرج منها خطان مستقيمان إلى محيطها وهما خطا ب أ، ب جـ، فهما إذن متساويان. فخط ب جـ مساوٍ لخط ب أ.

فكل واحد من خطي أ جـ، جـ ب مساوٍ لخط أ ب، والمساوية لشيء واحد [٧أ] فهي متساوية، فخط أ جـ مساوٍ لخط جـ ب. فالخطوط الثلاثة اذن متساوية: **أ جـ، ب جـ، أ ب.**

فمثلث أ ب جـ متساوي الأضلاع، وقد عمل على خط أ ب المفروض. وذلك ما أردنا أن نبين.

[النيريزي]:



الشكل ١/١٢

قال ايرن: إن قيل له، يقصد أوقليدس، لا أن يبين كيف نعمل خط مثلثاً متساوي الأضلاع، بل أن يكتفي في عمله بالمثلث المتساوي الساقين، دونه، قلنا ان ذلك ليس بمعجز عن عمل المثلث المتساوي الساقين. لكن لأن عمل المثلث المتساوي الأضلاع أسهل على المبتدىء بالتعلم، وأوجز؛ واذا حصل هذا حصل ذاك، وليس يحصل هذا اذا حصل ذاك. وقد بينا عمل مثلث متساوي الساقين على خط مستقيم معلوم. ابتداءاً بهذا الوجه:

ليكن خط أ ب، ونجعل أ مركزاً، ونخط ببعد أ ب: **قوس جـ.**

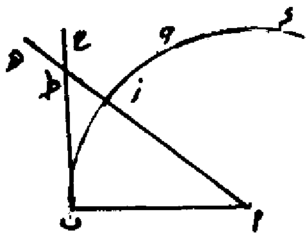
ثم نجعل ب مركزاً، ونخط ببعد ب أ **قوس د.** ونخرج أ ب على الاستقامة، في الجهتين، إلى قوسي جـ، د. فَ أ جـ مثل أ ب، أ ب مثل ب د. فَ أ جـ مثل ب د. ونجعل أ ب مشتركاً. فَ جـ ب إذن مثل أ د. ثم نجعل أ مركزاً، وندير ببعد أ د: دائرة د هـ. ثم نجعل ب مركزاً، ونخط ببعد ب جـ دائرة جـ هـ. ونخرج من نقطة هـ، التي هي تقاطع الدائرتين: خطي هـ أ، هـ ب:

فلأن نقطة أ مركز دائرة هـ د، وقد خرج منها خطان مستقيمان إلى محيطها، فهما إذن متساويان. فخطا أ هـ، أ د متساويان.

وأيضاً فلأن نقطة ب مركز لدائرة جـ هـ، وقد خرج منها إلى المحيط خطا ب هـ، ب جـ، فهما إذن متساويان. فخط أ هـ مساوٍ لخط ب هـ. وذلك ما أردنا ان نبين.

ثم وصف أيضاً، على طريق التوسع في العلم: كيف يعمل على خط مستقيم معلوم: مثلث مختلف الأضلاع، على ثلاثة أنحاء:

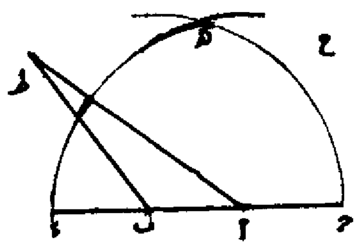
النحو الأول ان يكون الخط المفروض أقصر من أحد الضلعين الباقيين وأطول من الآخر.



الشكل ١/١٤

فنجعل الخط: خط أ ب. ونجعل أ مركزاً. ونديز ببعد أ ب دائرة ب جـ د، وأيضاً نجعل نقطة ب مركزا، ونديز ببعد ب أ دائرة أ جـ هـ. ونخرج خط أ ز هـ، كيف وقع، وكذلك خط ب ط ح.

فمن البين ان خط أ ط أطول من خط أب، وخط أ ب أطول من خط ب ط. وذلك ما أردنا ان نبين.



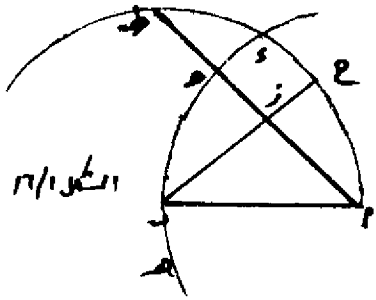
الشكل ١/١٥

والنحو الثاني ان يكون الخط المفروض أقصر من كل واحد من الخطين الباقيين:

فليكن الخط أ ب؛ ويخرج على استقامة، في الجهتين، حتى يكون ب د مثل أ جـ، وكذلك أ جـ مثلث أ ب، على ما عملنا في المتساوي الساقين. ونجعل نقطة أ مركزاً، ونخط ببعد أ د: دائرة د هـ ح. ثم نجعل نقطة ب مركزاً، ونخط ببعد ب جـ: دائرة جـ هـ ط. ونخرج ط أ، ط ب. فخط ط أ أطول من خط أ د، أعني من خط ب د . فهو إذن أطول من خط أ ب كثيراً. وخط ط ب مثل ب جـ. فخط ط أ أطول أيضاً من خط ط ب.

ومن البين ان خط ط ب أطول من خط ب أ، اذ كان مساوياً لخط ب جـ.

[٧ ب] والنحو الثالث ان يكون الخط المفروض أطول من كل واحد من الخطين: فليكن الخط المفروض خط أ ب. ونجعل نقطة أ مركزاً. ونخط ببعد أ ب: دائرة د جـ ب هـ.



الشكل ١/١٢

ثم نجعل نقطة ب مركزاً، ونخط ببعد ب أ: دائرة أ ح د ط. ونخرج خطي أ جـ، ب ح فيتقاطعان على نقطة ز.

فمن البين ان خط أ ب أطول من كل واحد من خطي أ ز، ب ز. وذلك ما أردنا ان نبين.

تعليق: أمـا طريقة اقليدس في حل قضيته الأولى فقد انصبت عليها عدة اعتراضات. منها التساؤل بأي حق يفترض ان الدائرتين تتقاطعان، دون مصادرة تفترض ذلك، ودون تعرض لفكرة الاستمرارية؟ وبأي حق نفترض ان أ جـ، ب جـ لا يلتقيان قبل وصولهما إلى جـ، دون اعتماد على النظر، أو دون ذكر أن الخطين لا يمكن أن يشتركا في قطعة خطية، يتبين من هذا انه ليس من السهل **اقامة سياق منطقي** صارم على نظام كامل مسبق من المصادرات؛ ولذا فنظام اقليدس يتكامل تدريجياً.

والحلول التي ينسبهـا النيريزي إلى هيرن يذكـرهـا بركلس دون ذكـر مصدرها. انظر هيث ٢٤٣/١، وأما النسوي فواضح أنه لم يزد على ان أوجز العبارة.

وجدير بالملاحظة أن النيريزي، نقلاً عن هيرن، يستعمل الحرف الواحد: جـ، د ليدل على القوس، وعلى نقطةٍ على القوس.

[المبرهنة ٢/ ١]

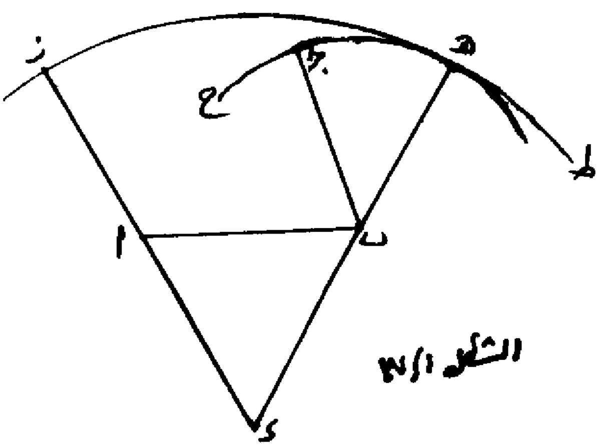
الشكل الثاني من المقالة الأولى

نريد ان نبين كيف نصل بنقطة معلومة خطاً مستقيماً مساوياً لخط مستقيم مفروض:

Heath 2/1: To place at a given point (as an extremity) a straight line equal to a given straight line.

فنجعل النقطة المفروضة نقطة أ، والخط المفروض خط ب جـ. ونبين كيف نصل بنقطة أ المفروضة: خطاً مستقيماً مساوياً لخط ب جـ.

فنصل بين نقطتي أ، ب بخط أ ب؛ ونعمل عليه مثلثاً متساوي الأضلاع، كما عملنا في الشكل الأول من هذه المقالة وليكن مثلث أ د ب؛ ونخرج خطي د أ، د ب على الاستقامة، ولا نجعل لهما حداً. ثم نجعل نقطة ب مركزاً، ونخط ببعد ب جـ دائرة جـ هـ ح. ثم نجعل نقطة د مركزاً، ونخط ببعد د هـ دائرة هـ ز ط.



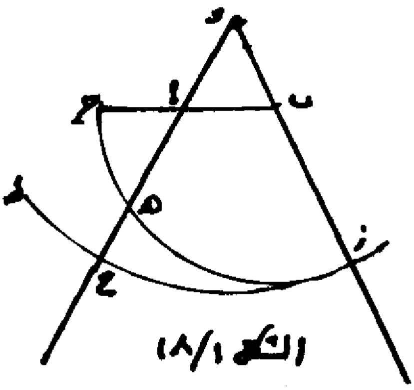
الشكل ١/٢

فلأن نقطة ب مركز دائرة جـ هـ ح، وقد خرج منها خطان: ب جـ، ب هـ إلى محيطها، فمن البيِّن انهما متساويان. وأيضاً فإن نقطة د مركز دائرة ز هـ ط؛ وقد خرج منها خطان: د ز، د هـ إلى محيط الدائرة؛ فمن البيِّن انهما متساويان.

وقد عملنا مثلث أ ب د متساوي الأضلاع. فخط د أ مساوٍ لخط د ب. فاذا اسقطناهما من خطي د هـ، د ز، المتساويين، يبقى خط أ ز، مساوياً لخط ب هـ. وقد بينا ان خط ب هـ مساوٍ لخط ب جـ. فكل واحد من خطي أ ز، ب جـ مساوٍ لخط ب هـ. والمساوية لشيء واحد متساوية. فخط أ ز اذن مساوٍ لخط ب جـ. فقد وصلنا بنقطة أ المفروضة خط أ ز المستقيم مساوياً لخط ب جـ المفروض، الموضوع. وذلك ما أردنا ان نبين.

[النيريزي]:

قوله «نريد أن نصل بنقطة مفروضة خطاً» إنما عنى به ان تكون النقطة طرفاً للخط الذي يوصل بها، فإنما ذلك هو الذي احتاج إليه في العمل في هذا الكتاب، فقدمه على سائر الاتصالات، ومنها ان يكون الخط المفروض مثل خط ب جـ، والنقطة يكون وضعها على الخط نفسه، مثل نقطة أ، ونريد ان نصل بنقطة أ خطاً مستقيماً مساوياً لخط ب جـ، ولتكن نهاية الخط، أعني طرفه، تنتهي الى نقطة أ:-

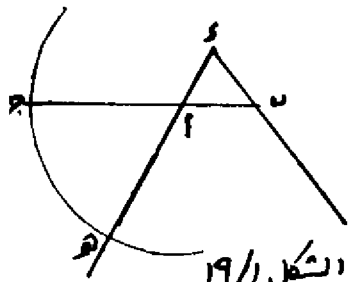


الشكل ١٨/١

فنعمل على أحد قسمي الخط، أعني قسم أ ب، مثلثاً متساوي الأضلاع؛ وذلك بحسب برهان الشكل الأول من هذه المقالة؛ وليكن مثلث أ ب د. ونخرج خطي د ب، د أ على الاستقامة، ولا نجعل لإخراجهما حداً: حتى إذا أدرنا الدائرة فضل من الخطين فضول. ثم نجعل نقطة ب مركزاً، ونخط ببعد ب جـ دائرة ج هـ ز فمن البيِّن ان خط ب جـ مساوٍ لخط ب ز.

وأيضاً فإنا نجعل نقطة د مركزاً، ونخط ببعد د ز دائرة ز ح ط. فمن البين

ان خط د ز مساوٍ لخط د ح. فإذا أسقطنا خطي د أ، د ب المتساويين **من خطي** دز، د ح المتساويين بقي خط ب ز مساوياً لخط أ ح. وقد كنا بينا ان خط ب ز مساوٍ لخط ب جـ. والمساوية لشيء واحد **متساوية. فخط** أ ح إذن مثل خط ب جـ فقد وصلنا بنطقة أ: خط أ ح مساوياً لخط ب جـ، ونقطة أ نهايته. وذلك ما اردنا ان نبين



الشكل ١/١٩

[٨ أ] وأيضاً فقد لا تكون نقطة أ في نهاية الخط المطلوب، ولكن يجوز عليها فنعمل على خط ب أ مثلثاً متساوي الأضلاع، وهو أ د ب. ونخرج خطي د أ، د ب على استقامة. ونجعل نقطة أ مركزاً، ونخط ببعد أ جـ: قوس جـ هـ فمن البين ان خط أ جـ مثل أ هـ، وخط ب أ مثل خط د أ. فخط ب جـ مثل خط د هـ. وذلك ما اردنا ان نبين

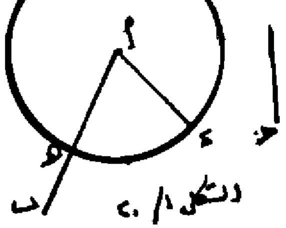
النيريزى لا ينسب اضافاته الى أحد، ولكن هذه الإضافات بعض مما يذكره بركلس انظر هيث ١/٢٤٥.

وفي النص العربي التباس لا نجده في الاصل كما يذكره هيث. فنص الحجاج يقول «نخرج خطي د أ، د ب على الاستقامة، ولا نجعل لهما حدا» والنسوي يقول: «نخرج خطي د أ، د ب إلى هـ، ز». فهل ينتج عن هذا خطا د أ هـ، د ب ز ام د أ ز، د ب هـ؟ حالتان يأخذ الحجاج (أو ناسخ كتابه) احداهما، ويأخذ النسوي الاخرى. وهنا موضع الاختلاف بين حلَّيهما. وثمة ملابسات أخرى في الحل لا يصعب ملاحظتها وذلك لعدم الدقة في تعيين الخطوط.

[المبرهنة ٣/ ١]

الشكل الثالث من المقالة الاولى

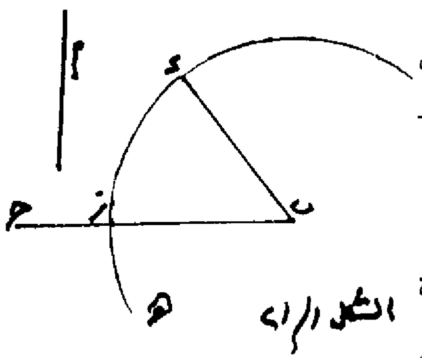
نريد ان نبين كيف نفصل من أطول خطين مختلفين مفروضين: مثل اقصرهما. فنجعل الخطين المفروضين خطي أ ب ، جـ ، ونبين كيف نفصل من أ ب الاطول : مثل جـ الاقصر:



فنصل بنقطة أ ، التي هي طرف خط أ ب : خطاً مساوياً لخط جـ كما بين ببرهان ٢ / ١*، وليكن خط أ د. ثم نجعل نقطة أ مركزاً ، ونخط ببعد أ د: دائرة د هـ ز. فمن البين ان خط أ هـ مثل خط أ د. وكنا وصلنا أ د من نقطه أ على أنه مساوٍ لخط جـ. فخطا جـ، أ هـ كل واحد منهما مساوٍ لخط أ. والمساوية لشيء واحد فهي متساوية فخط أ هـ مثل خط جـ.

فقد فصلنا من خط أ ب الاعظم مثل خط ب جـ الاصغر. وذلك ماأردنا ان نبين.

[النسوى ـ٣]



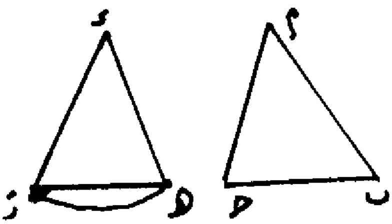
نريد ان نفصل من أطول خطين مفروضين مثل أقصرهما كخط ب جـ الأطول: نريد ان نفصل مثل أ الاقصر: فنصل بنقطة ب مثل خط أ، وهو ب د. وندير على مركز ب ، وببعد ب د: دائرة د ز هـ. فخط ب ز مثل ب د؛ ب د؛ مثل أ. زفَـ ب ز مثل أ. فقد فصلنا من ب جـ مثل أ وهو ب ز. وذلك ما اردنا ان نبين.

★هذا يعني النظرية ٢ من المقالة ١؛ وهو في الأصل ب من أ، بترقيم الجمل. وسنستعمل هذا الترقيم العددي في الحالات التالية

[المبرهنة ٤/ ١]

الشكل الرابع من المقالة الاولى

اذا تساوت زاويتان من مثلثين، وتساوت أضلاعهما المحيطة بهما، كل ضلع ونظيره، تساوت قاعدتاهما، وسائر زواياهما، كل زاوية ونظيرتها، وتساوى المثلثان.



الشكل ١/ ٢٢

مثاله ان زاويتي ب أ حـ، هـ د ز من مثلثي أ ب جـ، د هـ ز: متساويتان؛ وضلع أ ب مثل ضلع د هـ؛ وضلع أ جـ مثل ضلع د ز. فأقول ان قاعدة ب جـ مساوية لقاعدة هـ ز، وزاوية أ ب جـ مساوية لزاية د هـ ز، وزاوية أ جـ ب لزاوية د ز هـ، ومثلث أ ب جـ مساوٍ لمثلث د هـ ز.

برهانه أنا اذا ركبنا مثلث أ ب جـ على مثلث د هـ ز، فإنا نبتدي فنركب نقطة أ على نقطة د، وخط أ ب على خط د هـ. فاذا فعلنا ذلك تركبت نقطة ب على نقطة هـ، لأن خط أ ب مثل خط د هـ.

وأيضاً إذا ركبنا زاوية ب أ جـ على زاوية هـ د ز، تراكبتا، لأنهما متساويتان، وركب خط أ جـ على د ز؛ وركبت نقطة جـ على نقطة ز، لأن خطَّي أ جـ، د ز متساويان. فمن البيِّن أن خط ب جـ يتركب على خط هـ ز، ويتركب المثلث على المثلث. فتصير زاوية أ ب جـ مساوية لزاوية د هـ ز؛ وزاوية أ جـ ب مساوية لزاوية د ز هـ.

فقد تساوى المثلثان. وذلك ما أردنا أن نبين.

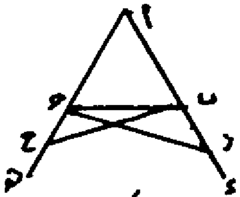
[النيريزي]

فإن تركب ضلع أ ب على ضلع د هـ، وزاوية أ على زاوية د، وضلع أ جـ على ضلع د ز؛ ولم تركب قاعدة هـ ز على قاعدة ب جـ صار وضع قاعدة ب جـ من قاعدة هـ ز، كوضع خط ز ح هـ. وخط ز ح هـ مستقيم. فقد أحاط بسطح ز جـ هـ المستقيم الخطوط: خطان مستقيمان. هذا غير ممكن.

[المبرهنة٥/ ١]

الشكل الخامس من المقالة الأولى

كل مثلث متساوي الساقين، فإن الزاويتين اللتين تقعان فوق القاعدة متساويتان، وإن أخرج ضلعاه المتساويان، فالزاويتان اللتان تقعان تحت القاعدة أيضاً متساويتان.


الشكل ١/ ٢٢

مثاله ان مثلث أ ب جـ متساوي الساقين، وهما ساقا أ ب ، أ جـ؛ وقد اخرجا على الاستقامة الى نقطتي د، هـ، فأقول، إن زاويتي أ ب جـ، أ جـ ب اللتين فوق القاعدة متساويتان، وزاويتي جـ ب د، ب جـ هـ أيضاً متساويتان.

[٨ ب] برهانه أنا نعلم على خط أ د نقطة ز، ونفصل من خط أ هـ خط أ جـ مساوياً لخط أ ز، كما بين ببرهان ١/٣. ونصل خطي جـ ز، ب ح.

فلأن خط أ ز مثل خط أ ح، وخط أ ب مثل خط أ جـ، فضلعا أ ز، أ جـ من مثلث أ جـ ز مساويان **لضلعي أ ح، أ ب** من مثلث أ ب ح، وكل ضلع مساوٍ لنظيره؛ وزاوية أ مشتركة لمثلثي أ جـ ز، أ ب ح؛ ولأنها تحيط بها الأضلاع المتساوية، فمن أجل برهان ١/٤ تكون قاعدة جـ ز مساوية لقاعدة ب ح، ومثلث أ جـ ز مثل أ ب ح، وسائر الزوايا مثل سائر الزوايا: زاوية أ ز جـ مثل زاوية أ ح ب؛ وزاوية أ جـ ز مثل زاوية أ ب ح.

ولأنا كنا فصلنا خط أ ح مثل خط أ ز، وساق أ ب فرض مساوياً لساق أ جـ، فإذا أسقطنا أ ب، أ جـ المتساويين، من أ ز، أ ح المتساويين، فمن البِّين بحسب المصادرة أ ان يبقى خط ب ز مثل خط جـ ح. وقد بينا أن خط جـ ز مثل خط ب ح وان زاوية ب ز جـ مثل زاوية جـ ح ب؛ وقاعدةب جـ مشتركة، **فحسب برهان ١/٤ يكون مثلث جـ ز ب مثل مثلث ب ح جـ؛ وسائر الزوايا مثل** سائر الزوايا، كل زاوية مثل نظيرتها: فزاوية جـ ب ز، إلتي تحت القاعدة، مثل

زاوية ب جـ ح، التي تحت القاعدة؛ وزاوية ب جـ ز مثل زاوية جـ ب ح.

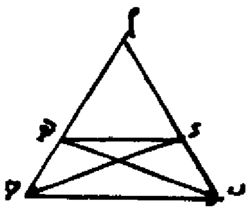
وقد كنا بينا ان زاوية أ ب ح مساوية لزاوية أ جـ ز. فإذا أسقطنا زاويتي ب جـ ز، جـ ب ح المتساويتين، بقيت زاوية أ ب جـ التي فوق القاعدة، مساوية لزاوية أ جـ ب التي فوق القاعدة.

وقد تبين ان زاوية جـ ب د التي تحت القاعدة مثل زاوية ب جـ هـ التي تحت القاعدة. وذلك ما أردنا ان نبين.

[النيريزي]:

الشكل الزائد: إن قيل لنا: لِمَ أقام البرهان على الزاويتين اللتين تحت القاعدة، ولم نجده استعملهما في كتابه، قلنا: إنه عَلِم ما يتشكك به في الشكل السابع، والشكل التاسع، فقدَّم بيان ذلك ليحلَّ به الشك، كما سنبين ذلك فيهما. فإنه قد كان يتهيأ أن نبين أن الزاويتين اللتين على القاعدة متساويتان، من غير تساوي اللتين تحت القاعدة، على هذا الطريق: ليكن ساقا أ ب، أ جـ من مثلث أ ب جـ: متساويين. فأقول:

ان زاوية أ ب جـ مثل زاوية أ جـ ب.



الشكل ١/٤٤

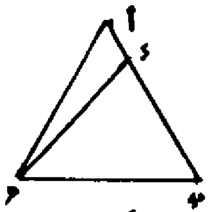
برهانه أنا نعلِّم على خط أب نقطة د، ونفصل من خط أ جـ: خط أ هـ مساوياً لخط أ د، ونخرج خطوط د هـ، د جـ، هـ ب.

فلأن ب أ مثل أ جـ، وخط أ د مثل خط أ هـ، فإن كل ضلعي أ ب ، أ هـ، من مثلث أ ب جـ: مثل كل ضلعي أ جـ، أ د، من مثلث أ جـ د، كل ضلع مساوٍ لنظيره؛ وزاوية أ مشتركة للمثلثين. فبحسب برهان ٤ / ١. تكون قاعدة ب هـ مثل قاعدة جـ د، وزاوية أ هـ ب مثل زاوية أ د جـ، وزاوية أ ب هـ مثل زاوية أ جـ د. فنسقط خطي أ د، أ هـ المتساويين، من خطي أ ب، أ جـ المتساويين، فيبقى خط د ب مثل خط هـ جـ. وقد كنا بيَّنا ان خط ب هـ مثل خط جـ د،

وأن زاوية د ب هـ مثل زاوية هـ جـ د، وقاعدة د هـ مشتركة، فبحسب برهان ٤ / ١ تكون زاوية ب د هـ مثل زاوية جـ هـ د، وزاوية ب هـ د مثل زاوية جـ د هـ. فاذا أسقطناهما من زاويتي ب د هـ، جـ هـ د المتساويتين: بقيت زاوية ب د جـ مساوية لزاوية ب هـ جـ، والأضلاع المحيطة بهما متساوية، كل ضلع مساوٍ لنظيره؛ وقاعدة ب جـ مشتركة لهما. فحسب برهان ٤ / ١ تكون زاوية أ ب جـ مثل زاوية أ جـ ب. وذلك ما أردنا أن نبين.★

[المبرهنة ٦/ ١]

الشكل السادس من المقالة الأولى



الشكل ١/٢٥

اذا تساوت زاويتان من مثلث فهو متساوي الساقين، مثاله أن زاويتي أ ب جـ، أ جـ ب من مثلث أ ب جـ: متساويتان. فأقول ان ساق أ ب مثل ساق أ جـ.

برهانه: ان أمكن أن تكون الزاويتان متساويتين، والساقان غير متساويين، فليكن ساق أ ب أعظم من ساق أ جـ - إن أمكن ذلك - ونفصل من أ ب الأعظم مثل أ جـ الأصغر، كما بينا ببرهان ٣ / ١، وليكن ب د. ونخرج د جـ.

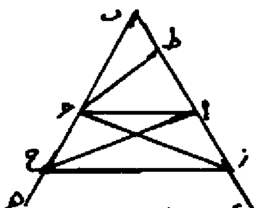
فضلع أ جـ مثل ضلع د ب. ونأخذ ضلع ب جـ مشتركاً. فضلعا أ جـ، جـ ب من مثلث أ جـ ب، الأعظم، مثل ضلعي د ب، ب جـ من مثلث د جـ ب، الأصغر؛ كل ضلع مساوٍ لنظيره. وزاوية أ جـ ب مثل زاوية جـ ب د. فبما بينا ببرهان ٤ / ١ تكون قاعدة أ ب مساوية لقاعدة جـ د، ومثلث أ ب جـ الأعظم مساوياً لمثلث د جـ ب الأصغر. وهذا خلف غير ممكن.

★ يتبين من هيث (١/٢٥٥) أنّ ما يذكره النبريزي عن الشكل الزائد قد ذكره بركلس (٤١٠ - ٤٨٥) وأنّ طاليس أول من اكتشف تساوي زاويتي القاعدة في المثلث المتساوي الساقين.

فقد تبين انه لا يمكن ان يكون أ ب أعظم من أ جـ؛ ولا أصغر. فهو إذن مثله. وذلك ما أردنا ان نبين.

[النيريزي]:

وخبر هذا الشكل يجوز ان يقال: كل مثلث تكون الزاويتان اللتان فوق القاعدة منه: متساويتين، فإنه متساوي الساقين.



الشكل ١/٢٦

ويجوز أن يقال أيضاً: اذا تساوت زاويتان من مثلث، فإن الضلعين اللذين يوترانهما متساويان. وفي الشكل ما هو مضاف إليه: كل مثلث تكون زاويتاه اللتان تحت القاعدة متساويتين، فإنه متساوي الساقين. مثاله مثلث أ ب جـ، أخرج ضلعاه ب أ، ب جـ إلى د وإلى هـ، فكانت زاوية جـ أ د مثل زاوية أ جـ هـ. فأقول إن ضلع ب أ مثل ضلع ب جـ، فإن لم يكن مثله، فلننزل أن ب أ أعظم من ب جـ، ونفصل أ ط مثل ب جـ، كما بين ببرهان ١/٣. ونخرج جـ ط. ونعلم على خط أ د نقطة ز، ونفصل جـ ح مثل أ ز، كما بين ببرهان ١/٣، ونصل خطي أ ح، جـ ز، فلأنا فصلنا خط جـ ح مثل أ ز، ونأخذ أ جـ مشتركاً، فكلا خطي جـ ح، جـ أ مثل كلا خطي ز أ، أ جـ، وزاوية أ جـ ح فرضت مثل زاوية جـ أ ز. فبما بين ببرهان ١/٤، تكون قاعدة أ ح مساوية لقاعدة جـ ز، ومثلث أ جـ ز مساوياً لمثلث أ جـ ح، وزاوية أ ز جـ مثل زاوية أ ح جـ.

وأيضاً فانا فصلنا ح جـ مثل أ ز، وفصلنا أ ط مثل جـ ب. فاذا زدنا على المتساوية متساوية، كان خط ز ط مثل خط ح ب بأسره. وقد بينا أن أ ح مثل جـ ز، وان زاوية أ ح جـ مثل زاوية أ ز جـ. فضلعا ب ح، ح أ، من مثلث ح أ ب: مثل ضلعي ط ز، ز جـ من مثلث ز جـ ط، كل ضلع مثل نظيره. وزاوية ح مثل زاوية ز. فبحسب برهان ١/٣ يكون مثلث ح أ ب مثل مثلث ز جـ ط. وقد كنا بينا ان مثلث أ ح جـ مثل مثلث أ جـ ز. فاذا أسقطنا من المتساوية

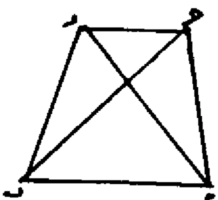
متساوية، بقي مثلث أ ب جـ مثل مثلث أ ط جـ: الأعظم مثل الأصغر. هذا خلف غير ممكن. فليس يمكن ان يكـون ساق أ ب أعـظم من ب جـ. ولا اصغر. فهو إذن مثله. وذلك ما أردنا ان نبين.

★ هذا الحل يقابل ما سبق ان سماه بالشكل الزائد.

[المبرهنة ٧/ ١]

الشكل السابع من المقالة الأولى

اذا خرج من طرفي خط: خطان، فالتقى طرفاهما على نقطة، فليس يمكن أن يخرج من مخرجهما خطان آخران [٩ ب] مساويان لهما، في تلك الجهة، يلتقي طرفاهما على غير تلك النقطة.



الشكل ١/٢٧

مثاله أنه قد أخرج من طرفي خط أ ب: خطا أ جـ، ب جـ، والتقيا على نقطة جـ. فأقول إنه غير ممكن ان يخرج من نقطة أ خط مساوٍ لخط أ جـ، ومن نقطة ب خط مساوٍ لخط ب جـ، في تلك الجهة، يلتقي طرفاهما على غير نقطة جـ.

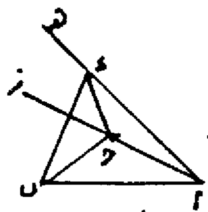
برهانه: إن أمكن ذلك، فليخرجا، وليكونا ا د، ب د؛ ولننزل أن أ د مثل أ جـ، ب د مثل ب جـ؛ ونخرج خط جـ د. فمثلث أ جـ د متساوي الساقين. فزاوية أ جـ د مثل زاوية أ د جـ. وهذا بين ببرهان ١/٥. فزاوية ب جـ د إذن أصغر من زاوية أ د جـ.

وأيضاً فإن مثلث ب جـ د متساوي الساقين: ب جـ مثل ب د. فبحسب برهان ١/٥ تكون زاوية ب جـ د مساوية ب د جـ. ولكن زاوية ب د جـ أعظم من زاوية أ د جـ.

وبينا ان زاوية أ د جـ أعظم من زاوية ب جـ د. فإذن زاوية ب د جـ أعظم

من زاوية ب جـ د بكثير. وهمـا متسـاويتـان. هذا خلف غير ممكن. فغير ممكن أن يخـرج من طرفي خط، خطان يلتقي طرفـاهمـا على نقـطة، ويخـرج من مخرجيهما خطان آخران مساويان لهما، في تلك الجهة، يلتقيان على غير تلك النقطة. وذلك ما أردنا أن نبين.

[النيريزي]:



الشكل ١/٨/٢

إن قال قائل إنه قد يمكن أن يخرج من طرفي خط أ ب: خطا أ جـ، ب جـ، مساويين لخطي أ د، ب د، حتى يكون أ جـ مثل أ د، ب جـ مثل ب د، فنقول ان ذلك غير ممكن. فنصل خط جـ د، ونخرج خطي أ جـ، أ د على استقامتهما، إلى نقطتي هـ، ز فمن أجل ان مثلث أ جـ د متساوي الساقين: أ جـ مثل أ د. فبحسب برهان ١/٥. تكون الزاويتان اللتان تحت القاعدة: متساويتين. فزاوية هـ د جـ مثل زاوية ز جـ د. فزاوية ز جـ د أعظم من زاوية ب د جـ.

وأيضاً مثلث ب د جـ متساوي الساقين: ب د مثل ب جـ. فبحسب برهان ١/٥، تكون الزاويتان اللتان فوق القاعدة متساويتين. فزاوية ب د جـ مثل زاوية ب جـ د.

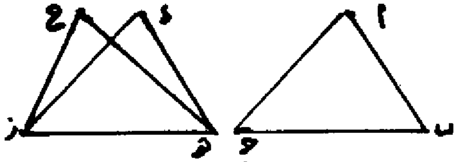
وقد كنا بينا ان زاوية ز جـ د أعظم من زاوية ب د جـ. فيجب ان تكون زاوية ب جـ د أعظم من زاوية ب د جـ بكثير. وهي مثلها. هذا خلف غير ممكن.

فقد بيِّن من هذا الاتساع، بما بيِّن من ١/٥ من تساوي الزاويتين اللتين تحت القاعدة.

[المبرهنة ٨/ ١]

الشكل الثامن من المقالة الأولى

كل مثلثين يسـاوي ضلعـان من أحـدهما ضلعين **من الآخر، كل ضلع** لنـظيره، وتساوي القاعدة القاعدة، فإن الزاويتين اللتين تحيط بهما الأضلاع



الشكل ٢٩/١

المتساوية من المثلثين متساويتان.

مثـاله أن ضلعي مثلث أ ب جـ مساويان لضلعي مثلث د هـ ز: ضلع أ ب مسـاوٍ لضلع د هـ، وضلع أ جـ مساوٍ لضلع د ز؛ قاعدة ب جـ لقاعدة هـ ز. فأقول ان زاوية ب أ جـ مساوية لزاوية هـ د ز.

برهانه ان مثلث أ ب جـ ان ركب على مثلث د هـ ز، بأن نبتدىء فنركب نقطة ب على نقطة هـ، وخط ب جـ على خط هـ ز، فمن البين ان نقطة جـ تتركب على نقطة ز، لأن قاعدتي ب جـ، هـ ز متساويتان.

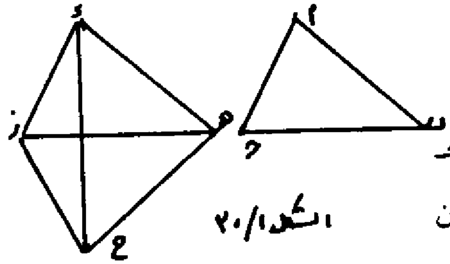
فاذا تركبت قاعدة ب جـ على قاعدة هـ ز، تركب ضلع أ ب على ضلع د هـ، لأنهما متساويان، وتركب [١٠ أ] أيضاً ضلع أ جـ على ضلع د ز، وتركب المثلث على المثلث، وتركبت زاوية أ على زاوية د.

فإن أمكن ان تتـركـب القـاعدة على القاعدة، ولا يتركب الضلعان، كما وصفنا، **على الضلعين،** فليصر وضعهما كوضع خطي هـ ح، ز ح. فقد خرج من طرفي خط: خطان، والتقى طرفـاهـمـا على نقطة؛ وخرج من مخرجيهما خطان آخـران مسـاويان لهمـا، في تلك الجهـة، التقى طرفـاهما على نقطة [أخرى]. وقد بينا ببرهان ١/٧ أن هذا غير ممكن. فكل مثلثين يساوي ضلعان من أحدهما ضلعين من الآخر، كل ضلع لنظيره، وتساوي القاعدة القاعدة، فإن الزاويتين اللتين تحيط بهما الأضلاع المتساوية متساويتان. وذلك ما أردنا ان نبين.

[النيريزي]:

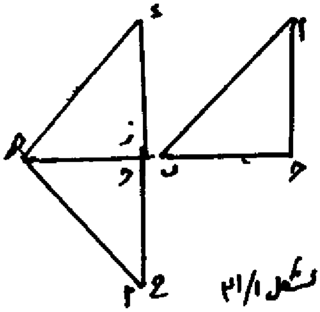
مضـــاف إلى الشكـــل الثـامن من المقالة الأولى: ينسب إلى بيلس* ـ على

★ المقصود Philo (أنظر هيث ١/٢٦٣)



الشكل ٢٠/١

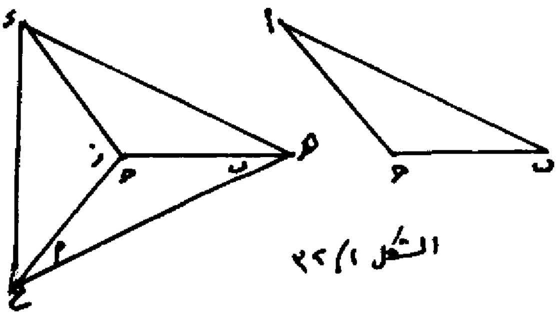
غير طريق الخلف: نركب قاعدة ب جـ من مثلث أ ب جـ، على قاعدة هـ ز من مثلث د هـ ز. وليقع خطا أ ب، أ جـ من الجهة الأخرى، كخطي هـ ح، ز ح. ونصل د ح. فلان خط د هـ مثل خط هـ ح، فببرهان ٥/١، تكون الزاويتان اللتان فوق القاعدة: متساويتين. فزاوية د ح هـ مساوية لزاوية ح د هـ.



الشكل ٢١/١

وبهـذا البرهان نبين ان زاوية د ح ز مساوية لزاوية ح د ز. فزاوية هـ د ز بأسرها مساوية لزاوية هـ ح ز. وذلك ما أردنا أن نبين.

وقد يمكن ان يتصل خط أ جـ بخط د ز، على استقامة، كخط د ز ح؛ فمن أجل ان مثلث د هـ ح متساوي الساقين: ساق د هـ مثل ساق هـ ح، تكون زاوية هـ د ح مثل زاوية هـ ح د. فوضح ان خط أ جـ كأنه يتصل بخط د ز على استقامته. وخط هـ ح هو خط أ ب. وذلك ما اردنا ان نبين.



الشكل ١/ ٢٢

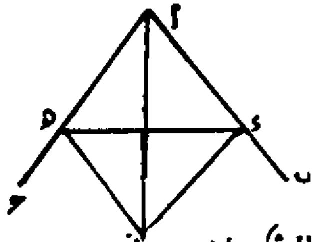
وقد يمكن ان يتصل خط أ جـ بخط د ز اتصالاً يحدث منـه مع خط د ز زاوية في الجهة الأخرى. فليكن ذلك كخط ح ز. ونصل خط د ح.

فلأن مثلث د هـ ح متساوي الساقين: ساق د هـ مثل ساق هـ ح، فببرهان ٥/١ تكون زاوية هـ د ح مساوية لزاوية هـ ح د.

وأيضاً فلأن مثلث د ز ح متساوي الساقين، فببرهان ١/٥ تكون زاوية ز د ح مثل زاوية ز ح د. فاذا أسقطنا من المتساوية متساوية، بقيت زاوية هـ د ز مساوية لزاوية هـ ح ز. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ١/٩]

الشكل التاسع من المقالة الأولى



الشكل ١/٢٢

نريد ان نبين كيف نقسم زاوية مفروضة بنصفين:

فلتكن الزاوية ب أ جـ. فنعلم على خط أ ب علامة د. ونفصل من خط أ جـ: خط أ هـ مساوياً لخط أ د، كما بيِّن ببرهان ١/٣.

ونخرج خط د هـ، ونعمل على خط د هـ مثلثاً متساوي الأضلاع، وليكن مثلث د هـ ز. ونصل خط أ ز.

فلأن ضلع د أ مساوٍ لضلع أ هـ، وضلع أ ز مشترك، فضلعا د أ، أ ز مساويان لضلعي هـ أ، أ ز.

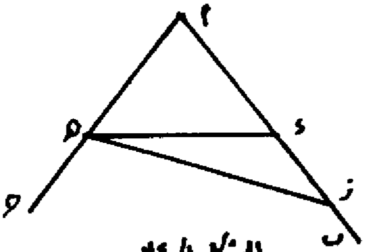
وقاعدة د ز مساوية لقاعدة هـ ز [١٠ ب] فببرهان ١/٨ تكون زاوية د أ ز مساوية لزاوية هـ أ ز.

فقد قسمنا زاوية ب أ جـ بنصفين، بخط أ ز. وذلك ما أردنا ان نبين.

[النيريزي]:

مضاف إلى هذا الشكل: إن قيل ان [رأس] المثلث المتساوي الأضلاع الذي يعمل على خط د هـ، من مثلث أ د هـ قد يقع على خط أ ب:

فيكون ضلع د ز مساوياً لكل واحد من ضلعي د هـ، هـ ز.



الشكل ١/٢٤

فلأن مثلث أ د هـ متساوي الساقين، فببرهـان ١/٥ تكون زاوية ز د هـ مساوية لزاوية د هـ جـ. وهما اللتان تحت القاعدة.

وأيضـاً فإن مثلث ز د هـ متساوي الساقين. فببرهان ١/٥ فإن الزاويتين اللتين فوق القاعدة متساويتان. فزاوية هـ د ز مساوية لزاوية د هـ ز: العظمى للصغرى!

هذا خلف. غير ممكن

وإن قيل إنه يخرج عن خطّي أ ب، أ جـ كانت الشناعة اقبح. وذلك ما أردنا أن نبين.

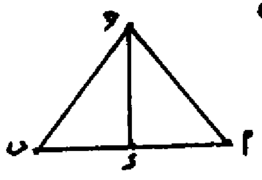
هذه الإضافة ينسبها هيث إلى بركلس (انظر هيث ١/٢٦٥).

ويذكر هيث ان بركلس اعتبر أوضاعاً أخرى للمثلث ز د هـ. فوضعه في جهـة أ، ولاحظ ان ز قد تقـع على أ أو فوقها أو تحتها، فلم يخرج من ذلك بجديد. فناقش عندئذ احتمال قيام وضع غريب كأن تقع ز على أ ب أو أ جـ أو خارجهما.

ونلاحظ هنا، وفي زيادات أخرى قادمة للنيريزي، كأنه هو وبركلس يأخذان عن مصدر واحد، لا سيما فيما ينقله النيريزي عن هيرن. والأمر على كل حال بحاجة إلى استقصاء.

[المبرهنة ١٠/ ١]

الشكل العاشر من المقالة الأولى



نريد أن نبين كيف نقسم خطاً معلوماً بنصفين

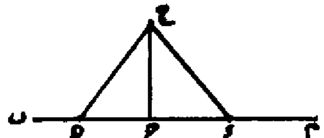
فليكن خط أ ب. ونعمـل عليه مثلثـاً متسـاوي الأضلاع، كما بين في ١/١، وليكن مثلث أ ب جـ.

ونقسم زاوية أ جـ ب نصفين، كما بين ببرهان ١/٩ .

فضلع جـ أ من مثلث أ جـ د: مثل ضلع جـ ب من مثلث ب جـ د. ونأخذ ضلع جـ د مشتركاً، فضلعا أ جـ، جـ د مساويان لضلعي ب جـ، جـ د، كل ضلع لنظيره. وزاوية أ جـ د مساوية لزاوية ب جـ د. فببرهان ١/٤ تكون قاعدة أ د مثل قاعدة ب د. فقد قسمنا خط أ ب بنصفين، على علامة د. وذلك ما أردنا أن نبين.

[المبرهنة ١/١١]

الشكل الحادي عشر من المقالة الأولى


الشكل ١/٢٦

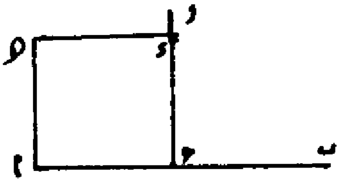
نريد ان نبين كيف نخرج من نقطة معلومة من خط معلوم خطاً يكون عموداً عليه فلنتنزل أن الخط المعلوم خط أ ب، والنقطة المعلومة نقطة جـ. ونبين كيف نخرج منها خطاً يكون عموداً على خط أ ب:

فنعلّم على خط أ جـ نقطة د. ونفصل من خط جـ ب خط جـ هـ مساوياً لخط د جـ، كما بين ببرهان ١/٣ . ونعمل كما عملنا ببرهان ١/١ على خط د هـ مثلثاً متساوي الأضلاع، وليكن مثلث د هـ ح. ونصل بين نقطتي جـ، ح.

فلأن ضلع د جـ مساوٍ لضلع ج هـ، ونأخذ جـ ح مشتركاً، فضلعا د جـ، جـ ح من مثلث د جـ ح: مساويان لضلعي هـ جـ، جـ ح من مثلث جـ هـ ح، كل ضلع لنظيره. وقاعدة د ح مساوية لقاعدة هـ ح. فبحسب برهان ١/٨ تكون زاوية د جـ ح مساوية لزاوية هـ جـ ح.

وبحسب المصادرة: اذا قام خط مستقيم على خط مستقيم فكانت الزاويتان اللتان عن جنبتي القائم متساويتين: فكل واحدة منهما قائمة، والخط القائم يقال له العمود. فخط ح جـ إذن عمود على خط أ ب. وذلك ما أردنا ان نبين.

[النيريزي]: مضاف إلى هذا الشكل لايرن:



الشكل ١/٢٧

نريد ان نخـرج من نقطة أ التي [١١أ] هي طرف الخط: خطاً مستقيماً يكون عموداً على خط أ ب:

فنعلِّم على خط أ ب نقطة جـ. ونخرج منها عموداً كما أخرجنا بحسب برهان ١/١١، وليكن جـ ز، غير محدود. ونفصل جـ د مساوياً لخط أ جـ. ونخرج عمود د هـ إخراجاً غير محدود. ونقسم زاوية أ جـ د بنصفين، بخط مستقيم، بحسب برهان ١/٩، يلقى خط د هـ، ولننزل أنه لقيه على نقطة هـ. ونصل بين نقطتي أ، هـ بخط أ هـ. فأقول ان خط أ هـ عمود على خط أ ب، على نقطة أ:

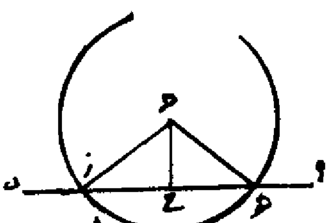
برهانه: إنا فصلنا جـ د مثل أ جـ، جـ هـ مشترك، وعملنا زاوية أ جـ هـ مساوية لزاوية د جـ هـ. فبما بيِّن ببرهان ١/٤، تكون زاوية جـ أ هـ مساوية لزاوية جـ د هـ.

وقد عملنا زاوية جـ د هـ قائمة. فزاوية جـ أ هـ قائمة.

فخط أ ب إذن عمود على نقطة أ من خط أ ب. وذلك ما أردنا أن نبين.

[المبرهنة ١٢/ ١]

الشكل الثاني عشر من المقالة الأولى:



الشكل ١/٢٨

نريد أن نبين كيف نخرج من نقطة مفروضة إلى خط مستقيم غير محدود: خطاً يكون عموداً عليه:

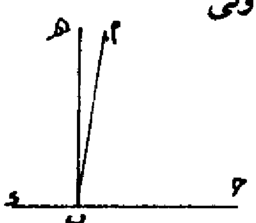
فلننـــزل ان النقـطة هي نقـطة جـ، والخط الـمستقيم غير المحـــدود خط أ ب. فنعلِّم في الجهة الأخرى من الخط: نقطة، كيفما وقعت، ولتكن نقطة د. ونديرعلى نقطة جـ، وببعد جـ د: دائرة د هـ ز. ونخرج من نقطة جـ، التي هي المركز، خطَّين

إلى موضعي تقاطع الدائرة والخط المستقيم، وليكونا جـ هـ، جـ ز. ونقسم هـ ز بنصفين، كما بينا ببرهان ١٠/١، على نقطة ح. ونخرج خط جـ ح. فأقول ان خط جـ ح عمود على أ ب.

برهانه: ان ضلع هـ ح من مثلث جـ هـ ح مساوٍ لضلع ح ز من مثلث ز ح جـ. ونأخذ ح جـ مشتركاً. فكلا ضلعي هـ ح، ح جـ مثل كلا ضلعي ز ح، ح جـ: كل ضلع مساوٍ لنظيره. وقاعدة جـ هـ مساوية لقاعدة جـ ز، لأنهما خرجا من المركز. فبما بينا ببرهان ٨/١، تكون زاوية هـ ح جـ مساوية لزاوية جـ ح ز. وكل خط يقوم على خط، فتصير الزاويتان اللتان عن جنبتي الخط القائم متساويتين، فإن كل واحدة منهما قائمة، والخط القائم يقال له العمود على الخط الذي هو قائم عليه. فخط جـ ح عمود على خط أ ب. فقد أخرجنا من نقطة جـ المعلومة، إلى خط أ ب الذي ليس معلوم القدر: خط جـ ح عموداً عليه، وذلك ما أردنا أن نبين.

[المبرهنة ١٣/١]

الشكل الثالث عشر من المقالة الأولى



الشكل ١/٢٩

كل خط مستقيم يقوم* على خط مستقيم، فإن الزاويتين اللتين عن جنبتي الخط القائم: إما قائمتان واما معادلتان لقائمتين.

Heath 13-1 if a straight line set up on a straight line makes angles, it will make two right angles, or angles equal to two right angles.

مثاله إن خط أ ب قائم على خط د جـ. فأقول ان زاويتي أ ب جـ، أ ب د اللتين عن جنبتي خط أ ب: قائمتان أو معادلتان لقائمتين.

برهانه: ان خط أ ب إن كان عموداً على خط جـ د فإن زاويتي أ ب جـ، أ

★ يستعمل الحجاج قيام خط على خط بمعنى انطلاقه منه، ولا يعني المعاملة.

ب د قائمتان، بحسب ما صودر به في هذه المقالة، إذ كان هذا من الأشياء الأول.

وان لم يكن خط أ ب عموداً على خط د جـ، فإنا نخرج من نقطة ب خطاً يكون عموداً على خط د جـ، كما بينا ببرهان ١١/١، وليكن خط ب هـ.

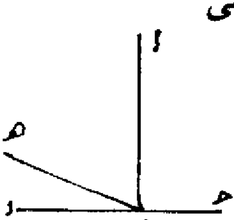
فزاويتا هـ ب جـ، هـ ب د قائمتان، وهما مساويتان للثلاث الزوايا، أعني زوايا أ ب جـ، أ ب هـ، هـ ب د. [١١ ب] لأن زاوية هـ ب جـ القائمة مثل مجموعة زاويتي أ ب جـ، أ ب هـ.

وأيضاً فإن مجموع زاويتي أ ب د، أ ب جـ مثل مجموع الزوايا الثلاث، أعني زوايا د ب هـ، هـ ب أ، أ ب جـ؛ لأن زاوية أ ب د المنفرجة مساوية لمجموع زاويتي أ ب هـ، هـ ب د. والمساوية لشيء واحد متساوية، أعني ان زاويتي هـ ب جـ، هـ ب د القائمتين مثل مجموع الزوايا الثلاث التي ذكرناها. فمجموع زاويتي أ ب جـ، أ ب د مثل مجموع زاويتي هـ ب جـ، هـ ب د القائمتين.

فقد تبين أن كل خط مستقيم يقوم على خط آخر مستقيم، فإن الزاويتين اللتين عن جنبتي الخط القائم: قائمتان أو معادلتان لزاويتين قائمتين. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ١٤/١]

الشكل الرابع عشر من المقالة الأولى



الشكل ١/ ٤٠

اذا خرج من نقطة في خط: خطان في جهتين مختلفتين، فكانت الزاويتان اللتان عن جنبتي الخط المخرج منه معادلتين لزاويتين قائمتين، فإن الخطين المخرجين قد اتصلا على استقامة وصارا خطاً واحداً.

مثاله أنه قد خرج من نقطة ب من خط أ ب: خطا ب جـ، ب د في جهتين

مختلفتين، فصارت زاويتا جـ ب أ، أ ب د معادلتين لزاويتين قائمتين. فأقول إن خطي ب جـ، ب د قد اتصلا على استقامة، فصارا خطاً واحداً،

برهانه أنه لا يمكن الا ذلك. فإن أمكن أن يتصل بنقطة ب خط آخر غير ب د، فيصيرا جميعاً خطاً واحداً مستقيماً، فليكن ذلك الخط خط ب هـ، فإن أمكن أن يكون خط ب هـ قد اتصل بخط ب جـ على استقامة وخط أ ب قائم على خط جـ ب هـ فالـزاويتان اللتان عن جنبتي خط أ ب معادلتان لزاويتين قائمتين، أعني مجموع زاويتي أ ب جـ، أ ب هـ، كما بيِّن ببرهان ١٣/١.

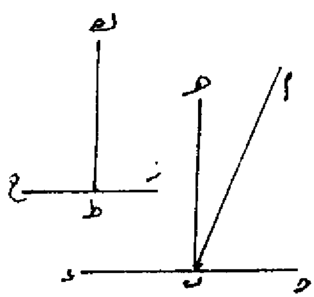
وقد كانت زاويتا أ ب جـ، أ ب د معادلتين لقائمتين. فمجموع زاويتي أ ب جـ، أ ب هـ مساوٍ لمجموع زاويتي أ ب جـ، أ ب د.

فنسقط زاوية أ ب جـ المشتركة. فتبقى زاوية أ ب د العظمى مساوية لزاوية أ ب هـ الصغرى. هذا خلف غير ممكن. فقد تبين أنه غير ممكن ان يتصل بخط ب جـ خط آخر، فيصير معه خطاً واحداً مستقيماً، غير خط ب د. وذلك ما أردنا ان نبين.

[النيريزي] زيادة: وقد يبرهن ببرهان آخر على سبيل التوسع والارتياض:

فلننزل أنه قد خرج من نقطة ب من خط أ ب:

خطا ب جـ، ب د، وصارت زاويتا أ ب جـ، أ ب د معادلتين لقائمتين. فأقول إنهما قد اتصلا على استقامة، فصارا خطاً واحداً.



الشكل ١/٤١

برهانه أنه يمكن ان تخرج من نقطة ب، التي هي نهـاية مشتـركـة لخطي ب جـ، ب د: خطاً يكون عموداً على نهايتهما، لأنه ان كان عموداً على أحدهما دون الآخر، فإن زاويتي أ ب جـ، أ ب د لا تكونان معادلتين لقائمتين. وليكن خط ب هـ.

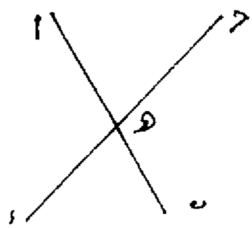
ونفرض خطاً آخر ز ح، ونعلم عليه علامة ط. ونخرج من نقطة ط خط ط

ك عموداً على خط ز ح. فمن البين ان زاوية ز ط ك مساوية لزاوية جـ ب هـ. فاذا ركبنا زاوية ز ط ك على زاوية [١٢أ] جـ ب هـ، بأن نضع نقطة ط على نقطة ب، ونركب خط ط ز على خط ب جـ، وخط ط ك على خط ب هـ؛ ونركب أيضاً زاوية ك ط ح على زاوية أ ب د، لأنهما أيضاً متساويتان: فنركب خط ط ح على خط ب د، فيتركب اذن خط ز ط ح بأسره على خط جـ ب د.

لكن خط ز ط ح خط واحـد مستقيم. فخط جـ ب د أيضـاً خط واحـد مستقيم، وذلك ما أردنا أن نبين

[المبرهنة ١٥/١]

الشكل الخامش عشر من المقالة الأولى



كل خطين مستقيمن يتقـاطعـان، فإن كل زاويتين تتقابلان* متساويتان؛ والزوايا الأربع معادلة لأربع زوايا قائمة

Heath: if two straight lines cut one another, they make the vertical angles equal to one another

الشكل ١/ ٤٢

مثاله أن خطي أ ب، جـ د تقاطعا على نقطة هـ. فأقول إن زاوية أ هـ د مساوية لزاوية ب هـ د، وزاوية أ هـ جـ مساوية لزاوية جـ هـ ب، والزوايا الأربع: أ هـ جـ، جـ هـ ب، ب هـ د، د هـ أ، معادلات لأربع زوايا قائمة.

برهانه أن خط أ هـ قائم على خط جـ د. فببرهان ١٣/١ تكون زاويتا أ هـ جـ، أ هـ د معادلتين لقائمتين. وأيضاً خط جـ هـ قائم على خط أ ب. فزاويتا أ هـ جـ، جـ هـ ب معادلتان لزاويتين قائمتين. فننقص زاوية أ هـ جـ المشتركة. فتبقى زاوية أ هـ د مساوية لزاوية جـ هـ ب. وأيضاً فإن خط د هـ قائم على خط أ ب. فزاويتا أ هـ د، ، د هـ ب معادلتان لزاويتين قائمتين. فنسقط زاوية أ هـ

★ الزاويتان المتقابلتان هنا هما ما نسميها اليوم المتقابلتين بالرأس.

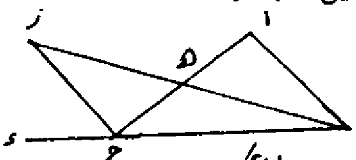
د المشتركة. فتبقى زاوية أ هـ جـ مساوية لزاوية د هـ ب. فقد تبين ان الزوايا المتقابلة متساوية.

وقد تبين أيضاً مما وصفنا ان الزوايا الأربع معادلة لأربع زوايا قائمة. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ١٦/١]

الشكل السادس عشر من المقالة الأولى

كل مثلث يخرج ضلع من احدى زواياه، أي ضلع من أضلاعه، فإن الزاوية الخارجة أعظم من كل واحدة من الداخلتين اللتين تقابلانها.



الشكل ١/٤٢

مثاله أن مثلث أ ب جـ قد أخرج ضلع من أضلاعه على استقامة، وهو ضلع ب جـ، إلى نقطة د. فأقول ان زاوية أ جـ د الخارجة أعظم من كل واحدة من زاويتي أ ب جـ، ب أ جـ.

برهانه انا نقسم ضلع أ جـ بنصفين على نقطة هـ، كما بين ببرهان ١٠/١، ونخرج خط ب هـ ز، ونجعل خط هـ ز مثل خط ب هـ. ونخرج خط جـ ز.

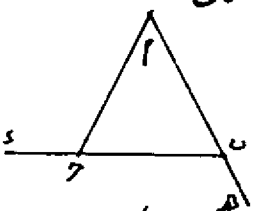
فضلع أ هـ من مثلث هـ أ ب مساوٍ لضلع هـ جـ من مثلث هـ ج ز، وضلع هـ ب مثل ضلع هـ ز، وزاوية أ هـ ب مساوية لزاوية جـ هـ ز. وذلك ببرهان ١/١٥. فمما تبين ببرهان ١/٤ تكون زاوية ب أ هـ مساوية لزاوية هـ جـ ز. فإن زدنا عليها زاوية د جـ ز، صارت زاوية أ جـ د بأسرها أعظم من زاوية جـ أ ب.

وأيضاً يبين أنها أعظم من زاوية جـ ب أ بأنا نخرج خط أ جـ إلى نقطة ح، ونقسم ضلع ب جـ بنصفين على نقطة ك، بما بين ببرهان ١٠/١، ونخرج خط ك ل، ونجعله مثل أ ك، ونخرج ل جـ. فبمثل هذا البرهان المتقدم، وبذلك

الاستشهاد، تبين ان زاوية ب جـ ح اعظم من زاوية أ ب جـ، وانها مساوية لزاوية أ جـ د، كما بين ببرهان ١/٤ . فزاوية أ جـ د أعظم من زاوية أ ب جـ. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ١/١٧]

الشكل السابع عشر من المقالة الأولى



الشكل ١/ ٤٤

كل مثلث فإن مجموع اي زاويتين من زواياه أصغر من زاويتين قائمتين.

مثاله مثلث أ ب جـ. فأقول ان مجموع زاويتي أ ب جـ، ب أ جـ أصغر من زاويتين قائمتين؛ ومجموع زاويتي أ ب جـ، ب جـ أ أصغر من قائمتين؛ ومجموع زاويتي ب أ جـ، أ جـ ب أصغر من قائمتين.

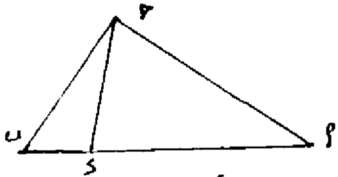
برهانه انا نخرج خط ب جـ على استقامة إلى نقطة د. فبما بين ببرهان ١/١٦ تكون زاوية أ جـ د الخارجة أعظم من زاوية أ ب جـ. ونأخذ زاوية أ جـ ب مشتركة. فمجموع زاويتي أ جـ د، أ جـ ب أعظم من مجموع زاويتي أ ب جـ، أ جـ ب. لكن بما بينا ببرهان ١/١٣ يكون مجموع زاويتي أ جـ د، أ جـ ب مساوياً لمجموع زاويتين قائمتين. فمجموع زاويتي أ ب جـ، أ جـ ب أصغر من قائمتين.

وبمثل هذا البرهان والاستشهاد نبين ان مجموع زاويتي ب أ جـ، أ جـ ب أصغر من قائمتين. وأما ان مجموع زاويتي أ ب جـ، ب أ جـ أصغر من قائمتين، فانا نخرج خط أ ب إلى علامة هـ. ونبين كما بينا قبل.

وذلك ما اردنا أن نبين

[المبرهنة ١٨/ ١]

الشكل الثامن عشر من المقالة الأولى



الشكل ١/ ٤٥

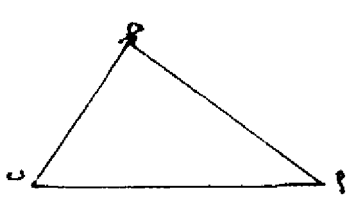
الضلع الأطول من كل مثلث يوتر الزاوية العظمى (subtends the greater angle) مثاله أن ضلع أ ب من مثلث أ ب جـ أطول من ضلع أ جـ. فأقول: ان زاوية أ جـ ب أعظم من زاوية أ ب جـ.

برهانه انا نفصل من ضلع أ ب الأعظم: مثل ضلع أ جـ الأصغر. كما بينا ذلك بشكل ١/٣، وليكن خط أ د، ونصل جـ د. فساق أ جـ مثل ساق أ د، من مثلث أ جـ د. فبما بينا ببرهان ١/٥ تكون زاوية أ جـ د مثل زاوية أ د جـ. ولأن زاوية أ د جـ خارجة من مثلث ب د جـ، فبحسب برهان ١/١٦، تكون زاوية أ د جـ أعظم من زاوية جـ ب د. فزاوية أ جـ ب إذن أعظم من زاوية أ ب جـ بكثير.

فقد تبين ان الضلع الأعظم، وهو أ ب يوتر الزاوية العظمى، وهي زاوية أ جـ ب. وذلك ما أردنا أن نبين.

[المبرهنة ١٩/ ١]

الشكل التاسع عشر من المقالة الأولى



الشكل ١/ ٤٦

الزاوية العظمى من كل مثلث يوترها الضلع الأطول.

مثاله ان زاوية أ جـ ب من مثلث أ ب جـ. أعظم من زاوية أ ب جـ. فأقول ان ضلع أ ب أعظم من ضلع أ جـ.

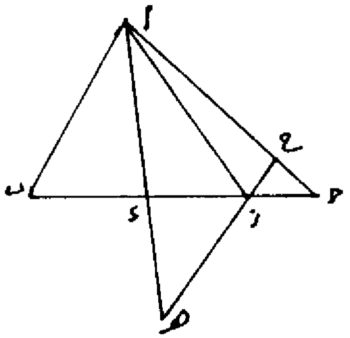
برهانه: إن أمكن ان تكون زاوية أ جـ ب أعظم من زاوية أ ب جـ، ولا يكون ضلع أ ب أعظم من ضلع أ جـ، إذن إما أن يكون مساوياً له، أو أصغر منه.

فإن كان ضلع أ ب مساوياً لضلع أ جـ، فقد بينا ببرهان ١/٥ أنه تكون زاوية أ جـ ب مساوية لزاوية أ ب جـ. لكن فرضت أعظم منها. فهذا خلف لا يمكن.

وان كان ضلع أ ب أصغر من ضلع أ جـ فببرهان ١/١٨ تكون زاوية أ جـ ب أصغر من زاوية أ ب جـ. لكن فرضت أعظم منها. وهذا أيضاً خلف لا يمكن.

فقد تبين لنا ان الزاوية العظمى من كل مثلث يوترها الضلع الأطول. وذلك ما أردنا أن نبين.

[النيريزي]



الشكل ١/٤٧

زيادة: برهان هذا الشكل على غير طريقة الخلف، لايرن،

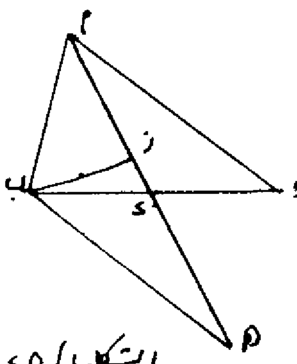
نوطىء لذلك أولاً بهذه المقدمة:

مثلث أ ب جـ: اذا قسمت زاوية ب أ جـ [١٣أ] منه بنصفين، بخط أ د، فكان جـ د أطول من د ب. فأقول ان جـ أ أطول من أ ب فلنخرج د هـ على استقامة أ د مساوياً له، ونفصل د ز مثل د ب، كما بين ببرهان ١/٣، ونصل هـ ز ونخرجه إلى ح، ونصل أ ز.

فخطا أ د، د ب مثل خطي هـ د، د ز؛ وزاويتا أ د ب، ز د هـ المتقابلتان، متساويتان. فببرهان ١/٤ تكون قاعدة أ ب مساوية لقاعدة هـ ز.

وزاوية ب أ د مثل زاوية جـ أ د، لأن زاوية جـ أ ب قسمناها بنصفين بخط أ د. وقد كان تبين ان زاوية ب أ د مثل زاوية ح هـ د. فلا محالة ان زاوية ح أ د مثل زاوية ح هـ أ. فببرهان ١/٦ يكون أ ح مثل ح هـ. فخط أ جـ اطول من

خط ح هـ. وخط ح هـ أطول من هـ ز. وخط هـ ز مثل أ ب. فخط ح هـ أطول من أ ب. لكن أ جـ أطول من ح هـ. فخط أ جـ أطول من أ ب بكثير.



الشكل ١/ ٤٨

ثم نقول: اذا كان مثلث أ ب جـ زاويته أ ب جـ أعظم من زاويته أ جـ ب. فأقول ان ضلع أ جـ أعظم من ضلع أ ب.

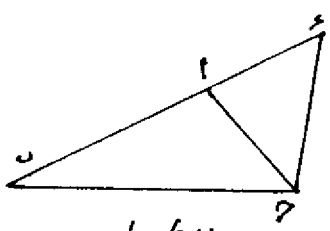
فلنقسم ضلع ب جـ بنصفين على د، كما بين ببرهان ١/١٠، ونخرج خط أ د، ونخرجه إلى نقطة هـ، وليكن د هـ مثل أ د. ونخرج خط ب هـ.

فضلعا ب د، د هـ مساويان لضلعي جـ د، د أ؛ وزاوية ب د هـ مساوية لزاوية أ د جـ. فزاوية د ب هـ مساوية لزاوية أ جـ د. فزاوية أ ب جـ إذن أعظم من زاوية د ب هـ.

ونقسم زاوية أ ب هـ بنصفين بخط ب ز، كما بين ببرهان ١/٩. فخط ز هـ أعظم من خط ز أ، لأن زاوية أ ب جـ كما بينا أعظم من زاوية جـ ب هـ. فمن أجل ذلك وقعت نقطة ز بين نقطتي أ، د. فمن أجل ذلك يكون خط هـ ز أطول من خط ز أ. فبحسب برهان الشكل الذي وَطَّأ لهذا الشكل، يكون ضلع ب هـ أعظم من ضلع أ ب. لكن ضلع ب هـ مثل ضلع أ جـ. فضلع أ جـ أعظم من ضلع أ ب. وذلك ما أردنا أن نبين.

[المبرهنة ٢٠/ ١]

الشكل العشرون من المقالة الأولى



الشكل ١/ ٤٩

كل مثلث فان كل ضلعين من أضلاعه مجموعين كخط واحد: أعظم من الثالث.

مثاله: مثلث أ ب جـ. فأقول ان مجموع ضلعي أ ب، ب جـ كخط واحد: أعظم من ضلع

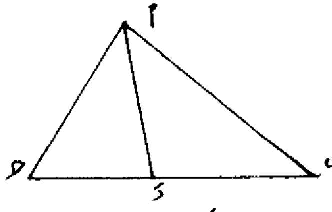
أ جـ؛ وإن مجموع ضلعي أ ب، ب جـ كخط واحد أعظم من ضلع ب جـ؛ وان مجموع ضلعي أ جـ. جـ ب كخط واحد أعظم من ضلع أ ب.

برهانه: إن الأضلاع الثلاثة ان كانت متساوية، فظاهر ان ضلعين منها اذا جمعا كخط واحد: أعظم من الثالث. وان كانت مختلفة، فلننزل أن أحدها أعظمها، ونبين ان الباقيين اذا جمعا كخط واحد، كانا أعظم منه. وليكن أعظمها ضلع ب جـ. فنخرج خط أ ب على الاستقامة إلى نقطة د، ونفرض أ د مثل أ جـ. ونخرج خط جـ د. فلأن مثلث أ جـ د متساوي الساقين: ساق أ جـ مثل ساق أ د، فببرهان ٥/١ تكون زاوية أ جـ د مثل زاوية أ د جـ. فاذا زدنا عليها زاوية أ جـ ب، تكون زاوية ب جـ د بأسرها أعظم من زاوية ب د جـ.

ففي مثلث ب ج د: زاوية ب جـ د أعـظم من زاوية ب د جـ. فببرهان ١/١٩: ضلع ب د أعظم من ضلع ب جـ. لكن ضلع ب د هو مساوٍ مجموع ضلعي ب أ، أ جـ. فقد تبين ان كل مثلث فإن ضلعين من أضلاعه مجموعين كخط واحد: أعظم من الضلع الثالث. وذلك ما أردنا ان نبين

[النيريزي]:

[١٣ ب] زيادة: برهان آخر لهذا الشكل. فليكن مثلث أ ب جـ. فأقـول ان مجمـوع ضلعي أ ب، أ جـ أعـظم من ضلع ب جـ؛ على ان ضلع ب جـ أعظم من كل واحد من ضلعي أ ب، أ جـ.



الشكل ١/٥٠

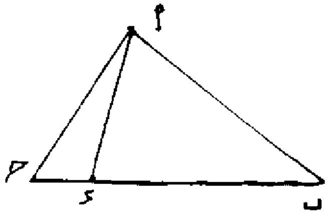
برهانه: انا نقسم زاوية ب أ جـ بنصفين، بخط أ د، كما بين ببرهان ١/٩. فمثلث أ ب د: زاويته الخارجة، أعني أ د جـ، أعظم من زاوية ب أ د، التي هي مساوية لزاوية جـ أ د؛ وذلك ببرهان ١/١٦.

فمثلث أ د جـ فيه زاوية أ د جـ أعـظم من زاوية جـ أ د. وذلـك ببرهان ١/١٩. فيكون ضلع أ جـ أعظم من ضلع جـ د. وبمثل هذا البرهان نبين ان

ضلع أ ب أعظم من ضلع د ب .

فمجموع ضلعي أ ب ، أ جـ إذن أعظم من ضلع ب جـ . وذلك ما أردنا أن نبين .

برهان آخر زيادة



الشكل ١/١٥

فليكن مثلث أ ب جـ ، وضلع ب جـ أطول الأضلاع . ونفصل ب د مثل أ ب ، كما بين ببرهان ١/٣ . فبما بين ببرهان ١/٥ ، تكون زاوية ب أ د مثل زاوية ب د أ . وبما بين ببرهان ١/١٦ تكون زاوية ب د أ أعظم من زاوية د أ جـ . كذلك زاوية جـ د أ أعظم من زاوية د أب

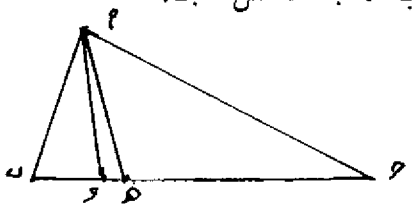
فالزاويتان اللتان عند نقطة د ، عن جنبتي خط أ د إذن جميعاً أعظم من زاوية ب أ جـ وحدها .

وقد تبين ان زاوية ب د أ مثل زاوية د أ ب . فتبقى زاوية أ د جـ أعظم من زاوية جـ أ د . فضلع جـ أ أعظم من ضلع جـ د ؛ ب د مثل أ ب . فمجموع ضلعي أ ب ، أ جـ أعظم من ضلع ب جـ . وذلك ما أردنا ان نبين .

وأيضـا زيادة في هذا الشكـل : ان قال قائل إنه يمكن ان يكون مثلث : ضلعان من أضلاعه مساويان للضلع الباقي ، فلننزل مثلث أ ب جـ ، وننزل ان مجموع ضلعي أ ب ، أ جـ مساوٍ لضلع ب جـ . فنفصل ب د مثل أ ب ، كما بين ببرهان ١/٣ . فيبقى د جـ مثل جـ أ . ونخرج خط أ د ، فلأن ضلع ب د مثل ب أ فإن زاوية أ د ب مساوية لزاوية د أ ب ، بحسب برهان ١/٥ . وبمثل هذا البرهان نبين ان زاوية أ د جـ مثل زاوية د أ جـ . لكن الزاويتين اللتين عند نقطة د ، عن جنبتي خط أ د ، معادلتان لقائمتين ؛ وذلك بيِّن بحسب برهان ١/١٣ . وهما مساويتان لزاوية ب أ جـ . وهذا محال لا يمكن ، من أجل ان خط د أ قائم على نقطة أ على فصل خطي ب أ ، أ جـ ، فلو صير زاويتي ب أ د ، د أ جـ معادلتين لقائمتين ، فبحسب برهان ١/١٤ يجب ان يكون خطا ب أ ، أ جـ قد

اتصلا على استقامة، وصارا خطاً واحداً مستقيماً. فخطا ب أ، أ جـ اذن خط واحـد مستقيم، ومثلث ب أ جـ يحيط به خطان مستقيمـان. هذا خلف غير ممكن. وذلك ما أردنا ان نبين

وأيضاً زيادة في هذا الشكل: ثم ننزل أيضاً ان ضلعي أ ب، أ جـ مجموعين أصغر من ضلع ب جـ ونفصل ب د مثل ب أ، جـ هـ مثل أ جـ.



الشكل ١/٥٠

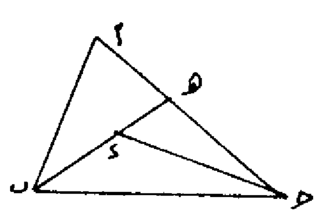
فببرهان ١/٥ تكون زاويتا ب د أ، ب أ د متساويتين وكذلك زاويتا جـ هـ أ، جـ أ هـ متساويتان.

لكن زاوية أ د ب أعظم من زاوية د أ جـ؛ وزاوية د أ جـ أعظم من زاوية جـ أ هـ. فزاوية أ د ب أعظم من زاوية جـ أ هـ كثيراً. وكذلك نبين ان زاوية أ هـ جـ أعظم من زاوية ب أ د كثيرا. فمجموع زاويتي أ د ب، أ هـ جـ أعظم من مجموع زاويتي ب أ د، جـ أ هـ؛ وقد كان مساوياً له. وهذا محال.

[المبرهنة ١/٢١]

[١٤أ] الشكل الحادي والعشرون من المقالة الأولى

كل مثلث يخرج من طرفي ضلع من أضلاعه خطان يلتقي طرفـاهمـا على نقـطة في داخـل الـمـثـلث، فإنهمـا أقصـر من ضلعي المثلث الباقيين، ولكنهما يحيطان بزاوية أعظم من الزاوية التي يحيط بها ضلعا المثلث.



الشكل ١/٥٢

مثاله: ان مثلث أ ب جـ قد خرج من طرفي ضلع ب جـ منه، خطان: ب د، جـ د؛ والتقى طرفاهما داخل المثلث على نقطة د. فأقول ان مجموعهما أصغر من مجموع ضلعي أ ب، أ جـ؛ وان زاوية ب د جـ أعظم من زاوية ب أ جـ.

برهانه: انا نخرج خط د ب على استقامته إلى نقطة هـ. فمجموع ضلعي ب أ، أ هـ أعظم من ضلع ب هـ. ونجعل جـ هـ مشتركاً، فمجموع ضلعي ب أ، أ جـ أعظم من مجموع ضلعي ب هـ، هـ جـ. وذلك بين بحسب برهان ١/٢٠ وأيضاً مجموع ضلعي جـ هـ، هـ د أعظم من ضلع جـ د. ونجعل د ب مشتركاً. فمجموع ضلعيجـ هـ،هـ ب أعظم من مجموع ضلعي جـ د، د ب. وذلك بيّن أيضاً من برهان ١/٢٠.

فمجموع ضلعي أ جـ، أ ب اذن أعظم من مجموع ضلعي ب د، د جـ كثيرا.

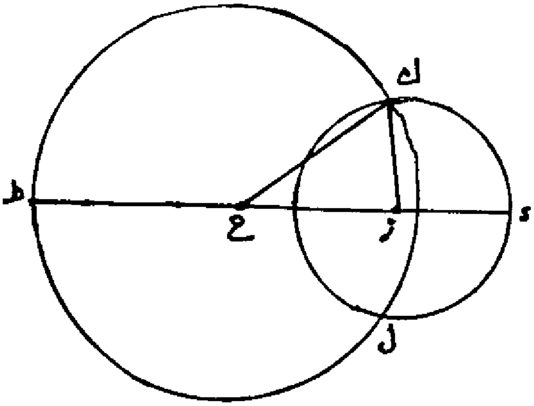
وأيضاً فإن زاوية جـ هـ ب خارجة من مثلث أ ب هـ. فهي اذن أعظم من زاوية هـ أ ب. وذلك بين بحسب برهان ١/١٦. وبهذا الاستشهاد تكون زاوية ب د جـ أعظم من زاوية جـ هـ د. فزاوية ب د جـ إذن أعظم من زاوية ب أ جـ كثيراً. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ١/٢٢]

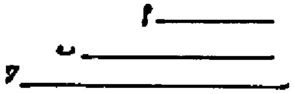
الشكل الثاني والعشرون من المقالة الأولى

نريد أن نبين كيف نعمـل مثلثـاً من ثلاثة خطوط مفروضة: على ان كل خطين مجمـوعين منها أعظم من الخط الثالث؛ لأن سبيل المثلث، بحسب برهان ١/٢٠ ان يكون كل ضلعين من أضلاعه، اذا جمعا، أعظم من الثالث.

مثـالـه: أن خطوط أ، ب، جـ، الثـلاثة مفروضة، ونريد ان نبين كيف نعمل منها مثلثاً؛ على ان مجموع أ، ب كخط واحد: أعظم من خط جـ، ومجموع خطي ب، جـ



أعظم من خط أ، ومجموع خطي جـ، أ أعظم من خط ب.



الشكل ١/ ٥٤

فنخط خطاً مستقيماً غير محدود النهاية، وهو خط د ط، ونفصل د ز مساوياً لخط أ. ونفصل ز ح مساوياً لخط ب. ونفصل ح ط مساوياً لخط جـ، بحسب ما بين ببرهان ٣/١.

ونجعل نقطة ز مركزاً، ونخط ببعد ز د دائرة د ل ك. ونجعل نقطة ح مركزاً ونخط ببعد ح ط دائرة ط ك ل. ونخرج من نقطة ك خطي ك ز، ك ح.

فلأن نقطة ز مركز لدائرة د ل ك، وقد خرج منها إلى المحيط خطا ز ك، ز د، فخط ز ك إذن مثل خط ز د. لكن خط ز د مثل أ. فضلع ز ك مثل أ.

وأيضاً فإن نقطة ح مركز لدائرة ط ك ل، وقد خرج منها إلى المحيط خطا ح ط، ح ك. فخط ح ك اذن مثل خط ح ط. وخط ح ط فصلناه مثل خط جـ. فضلع ك ح مساوٍ لخط جـ.

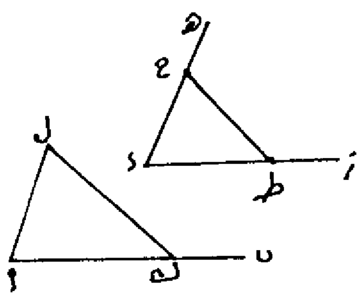
وكنا فصلنا ز ح مثل خط ب. فأضلاع المثلث ز ك ح مساوية لخطوط أ، ب، جـ: ز ك مثل أ، ك ح مثل جـ، ز ح مثل ب.

فقد تبين مما وصفنا انا قد عملنا مثلثاً مساوية أضلاعه لخطوط أ، ب، جـ المعلومة وذلك ما أردنا أن نبين.

[المبرهنة ٢٣/ ١]

الشكل الثالث والعشرون من المقالة الأولى

[١٤ ب] نريد أن نبين كيف نعمل على نقطة معلومة من خط مفروض زاوية مساوية لزاوية معلومة. فلننزل ان الخط أ ب، والنقطة المفروضة نقطة أ، والزاوية المفروضة زاوية هـ د ز. ونريد ان نبين كيف نعمل على نقطة أ



الشكل ١/٥٥

زاوية مثل زاوية هـ د ز. فنعلم على خط د هـ نقطة ح، وعلى خط د ز نقطة ط، ونخرج خط ح ط. ونعمل على خط أ ب مثلثاً، أضلاعه مساوية لأضلاع مثلث د ح ط؛ ونتقصد عند عملنا بأن نجعل ضلع أ ك مثل ضلع د ح، وضلع ك ل مثل ضلع ح ط، وضلع أ ل مثل ضلع د ط، بحسب ما بينا عمل ذلك ببرهان ١/٢٢. وقد علمنا ببرهان ١/٨ أن زاوية ك أ ل مساوية لزاوية ح د ط، وذلك لأن الضلعين المحيطين بزاوية ك أ ل قد بينا أنهما مساويان للضلعين المحيطين بزاوية ح د ط، كل ضلع مساوٍ لنظيره، وقاعدة ك ل مثل قاعدة ح ط. فالزاويتان اللتان توترهما هاتان القاعدتان المتساويتان: متساويتان.

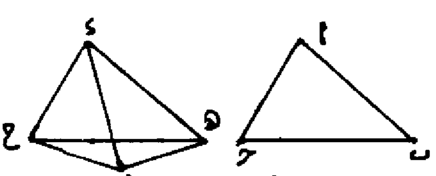
فقد عملنا على نقطة مفروضة من خط مفروض: زاوية مساوية لزاوية مفروضة. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ١/٢٤]

الشكل الرابع والعشرون من المقالة الأولى

كل مثلثين يساوي ضلعان من أحدهما ضلعين من الآخر، كل ضلع لنظيره، وتكون احدى الزاويتين اللتين تحيط بهما الأضلاع المتساوية، أعظم من الزاوية الأخرى، فإن الضلع الباقي الذي يوتر الزاوية العظمى: أعظم من الضلع الباقي من المثلث الآخر، الذي يوتر الزاوية الصغرى.

مثاله: ان ضلعي أ ب، أ جـ من مثلث أ ب جـ مساويان لضلعي د هـ، د ز من مثلث هـ د ز: ضلع أ ب مثل ضلع د هـ، وضلع أ جـ مثل ضلع د ز؛ وزاوية ب أ جـ أعظم من زاوية هـ د ز.



الشكل ١/٥٦

فأقول ان ضلع ب جـ الذي يوتر زاوية ب أ جـ العظمى: أعظم من ضلع هـ ز الذي يوتر زاوية هـ د ز الصغرى.

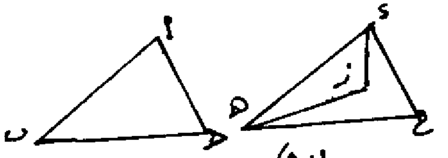
برهانه: انا نعمل على نقطة د من خط هـ د زاوية مثل زاوية ب أ جـ، كما بينا عملها ببرهان ١/٢٣، ولتكن زاوية هـ د ح. ونجعل د ح مثل أ جـ، كما بينا ذلك ببرهان ١/٣. ونخرج خطي ح ز، ح هـ. فضلعا ب أ، أ جـ من مثلث أ ب جـ مساويان لضلعي د هـ، **د ح** من مثلث هـ د ح، كل ضلع مثل نظيره، ضلع أ ب مثل ضلع د هـ، وضلع أ جـ مثل ضلع د ح؛ وزاوية ب أ جـ مثل زاوية هـ د ح. فبحسب برهان ١/٤ تكون قاعدة ب جـ مساوية لقاعدة هـ ح.

وأيضاً فإن مثلث د ز ح متساوي الساقين: ساق د ز مثل ساق د ح. فبحسب برهان ١/٥ تكون زاوية د ز ح مساوية لزاوية د ح ز. لكن زاوية د ح ز أعظم من زاوية هـ ح ز. فزاوية د ز ح أعظم من زاوية هـ ح ز. فاذا زدنا زاوية هـ ز د، كانت زاوية هـ ز ح أعظم من زاوية هـ ح ز كثيراً.

فمثلث هـ ز ح له زاويتان إحداهما أعظم من الأخرى، أعني ان زاوية هـ ز ح أعظم من زاوية هـ ح ز. فبحسب برهان ١/١٩ يكون ضلع هـ ح الموتر للزاوية العظمى أعظم من ضلع هـ ز الموتر للزاوية الصغرى. لكن هـ ح مثل ب جـ. فقاعدة ب جـ قد تبين أنها أعظم من قاعدة هـ ز. وذلك ما أردنا أن نبين.

[النيريزي]

<u>زيادة في هذا الشكل</u>: فإنا متى أخرجنا خط د ح مساوياً لخط أ جـ، ثم أخرجنا خط هـ ح، فجاز نقطة ز، فحدث مثلث د ح هـ، وقد خرج من طرفي ضلع من أضلاعه، وهو ضلع د هـ: خطان، . وهما د ز، هـ ز، فالتقى طرفاهما على نقطة ز داخل المثلث، فحسب برهان ١/١١ فان مجموع ضلعي هـ ز، د ز، كخط واحد [١٥أ] أصغر من مجموع ضلعي د ح، هـ ح. لكن ضلع د ح مثل ضلع د ز، فيبقى ضلع هـ ح أعظم من ضلع هـ ز. وقد تبين بحسب



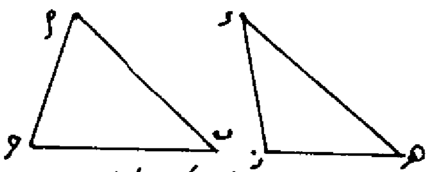
الشكل ١/ ٥٧

برهان ٤/١ ان قاعدة هـ ح مثل قاعدة ب جـ. فقاعدة ب جـ إذن أعظم من قاعدة هـ ز. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٢٥/١]

الشكل الخامس والعشرون من المقالة الأولى

كل مثلثين يساوي ضلعان من أحدهما ضلعين من الآخر: كل ضلع لنظيره، والضلع الباقي من أحدهما أعظم من الضلع الباقي من الآخر، فإن زاوية المثلث التي يوترها الضلع الأعظم: أعظم من الزاوية الأخرى التي يوترها الضلع الأصغر.



الشكل ٥٨/١

مثاله: أن ضلعي أ ب، أ جـ من مثلث أ ب جـ يساويان ضلعي د هـ، د ز من مثلث د هـ ز: ضلع أ ب مثل ضلع د هـ، وضلع أ جـ مثل ضلع د ز. وضلع ب جـ الباقي من مثلث أ ب جـ أعظم من ضلع هـ ز الباقي من مثلث د هـ ز. فأقول ان زاوية ب أ جـ أعظم من زاوية هـ د ز.

برهانه: أنها ان لم تكن أعظم منها، فهي مثلها أو أصغر منها. ولو كانت مثلها، فإنه، مما بيّنا ببرهان ٤/١ يجب ان تكون قاعدة ب جـ مثل قاعدة هـ ز؛ وهي أعظم منها. هذا خلف لا يمكن، فليس ب جـ اذن مثل هـ ز. ولا يجب أيضاً أن تكون أصغر منها: لأنها ان كانت أصغر منها، فبحسب برهان ٢٤/١ يجب ان يكون ضلع ب جـ أصغر من ضلع هـ ز. وكنا فرضناه أعظم منه. هذا خلف غير ممكن.

فقد تبين ان زاوية أ ليست مساوية لزاوية د، ولا هي أيضاً أصغر منها. فهي إذن أعظم منها. وذلك ما أردنا ان نبين.

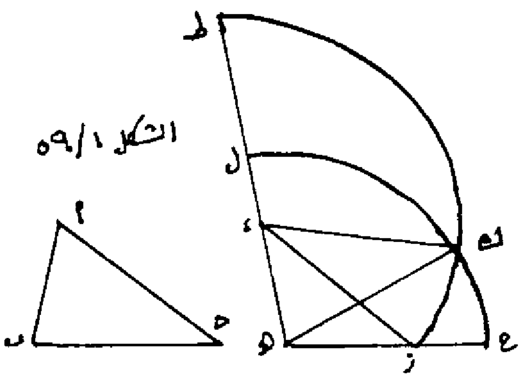
[النيريزي]:

مضاف إلى هذا الشكل ولا يعرف صاحبه★. وهو برهانه من غير طريق الخلف.

فلنتزل ان مثلثي أ ب جـ، د هـ ز فيهما ضلع أ ب مثل ضلع د هـ، وضلع أ جـ مثل د ز. وضلع ب جـ الباقي أعظم من ضلع هـ ز الباقي. فأقول ان زاوية ب أ جـ أعظم من زاوية هـ د ز.

برهانه: انا نخرج خط هـ ز إلى ح على الاستقامة، ونجعل هـ ح مثل ب جـ. ونخرج خط هـ د على الاستقامة إلى نقطة ط، ونجعل د ط مثل أ جـ. ونجعل نقطة د مركزاً ونخط ببعد د ط قوس ط ك ز، لأن ط د مثل د ز.

فلأن ضلعي أ ب، أ جـ كخط واحد، أعظم من ضلع ب جـ، للذي بين من برهان ١/٢٠، وضلع ب جـ مساوٍ لضلع هـ ح، ومجموع ضلعي أ ب، أ جـ كخط واحد هو خط هـ ط، فخط هـ ط إذن أعظم من خط هـ ح.



الشكل ١/٥٩

ونجعل نقطة هـ مركزاً، ونخط ببعد هـ ح قوس ح ك ل. ونخرج هـ ك، د ك. فخط د ك مساوٍ لخط د ط. لكن د ط مثل أ جـ. فخط د ك إذن مثل أ جـ.

وأيضاً فلأن هـ ك مثل هـ ح، وخط هـ ح فرضناه مثل ب جـ، يكون هـ ك مثل ب جـ.

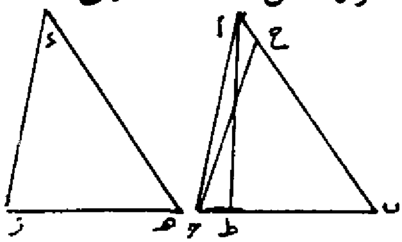
فمثلثا أ ب جـ، هـ د ك: ضلعان من أحدهما مساويان لضلعين من الآخر: أ ب مثل د هـ، أ جـ مثل د ك. وضلع ب جـ الباقي مثل ضلع هـ ك الباقي.

★ ينسبه هيث الى هيرن، انظر ١/٣٠١

فظاهر من برهان ١/٨ أن زاوية ب أ جـ مثل زاوية هـ د ك. لكن زاوية هـ د ك أعظم من زاوية هـ د ز. فزاوية ب أ جـ إذن أعظم من زاوية هـ د ز. وذلك ما أردنا أن نبين.

[المبرهنة ١/٢٦]

[١٥ب] الشكل السادس والعشرون من المقالة الأولى



كل مثلثين تساوي زاويتان من احدهما زاويتين من الآخر، كل زاوية ونظيرتها، ويساوي ضلع من احدهما نظيره من الآخر، أي ضلع كان، فإن الضلعين الباقيين من أحدهما يساويان الضلعين الباقيين من المثلث الآخر، كل ضلع لنظيره، والزاوية الباقية مثل الزاوية الباقية، والمثلث مثل المثلث.

مثاله أن زاويتي أ ب جـ، أ جـ ب من مثلث أ ب جـ: مساويتان لزاويتي د هـ ز، د ز هـ من مثلث د هـ ز: زاوية أ ب جـ مساوية لزاوية د هـ ز، وزاوية أ جـ ب مساوية لزاوية د ز هـ. ونتزل أن ضلع ب جـ أولاً مثل ضلع هـ ز. فأقول أن ضلعي ب أ، أ جـ الباقين: مثل ضلعي د هـ، د ز الباقين: ضلع أ ب مثل ضلع د هـ، وضلع أ جـ مثل ضلع د ز، وزاوية ب أ جـ مثل زاوية هـ د ز.

برهانه: إن لم يكن ضلع ب أ مثل ضلع هـ د، فليكن أحدهما أعظم؛ فلنتزل أن ضلع أ ب أعظم، ونفصل ب ح مساوياً لضلع د هـ، كما بين ببرهان ١/٣. وضلع ب جـ فرض مثل ضلع هـ ز. فضلعا ب جـ، ب ح من مثلث ب جـ ح مثل ضلعي هـ ز، هـ د من مثلث هـ د ز، كل ضلع مساوٍ لنظيره. وزاوية د هـ ز مساوية لزاوية جـ ب ح. فبحسب برهان ١/٤ تكون زاوية ب جـ ح مساوية لزاوية د ز هـ. لكن زاوية د ز هـ فرضت على أنها مساوية لزاوية أ جـ ب. والمساوية لشيء واحد فهي متساوية. فزاوية أ جـ ب مساوية لزاوية ب جـ

ح: العظمى للصغرى. وهذا خلف. فليس ضلع أ ب أعظم من ضلع د هـ.

ولا يمكن أيضاً أن يكون أصغر. والبرهان واحد. فضلع أ ب إذن مساوٍ لضلع د هـ. وضلع ب جـ مثل ضلع هـ ز. فضلعا أ ب، ب جـ من مثلث أ ب جـ: مثل ضلعي د هـ، هـ ز من مثلث د هـ ز: كل ضلع مساوٍ لنظيره، وزاوية أ ب جـ مساوية لزاوية د هـ ز. فببرهان ١/٤ يكون ضلع أ جـ الباقي من مثلث أ ب جـ: مثل ضلع د ز الباقي من مثلث د هـ ز، وزاوية ب أ جـ مثل زاوية هـ د ز. وذلك ما أردنا أن نبين.

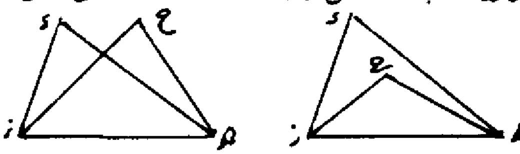
وأيضاً فإنا ننزل أن ضلع أ ب مساوٍ لضلع د هـ، وزاوية ب مساوية لزاوية هـ، وزاوية جـ مساوية لزاوية ز. فأقول أن ضلع ب جـ مساوٍ لضلع هـ ز.

برهانه أنه إذا لم يكن ضلع ب جـ مساوياً لضلع هـ ز، فإن أحدهما أعظم. فلننزل أن ضلع ب جـ أعظم من ضلع هـ ز، ونفصل خط ب ط مثل هـ ز، كما بينا ببرهان ١/٣. ونخرج خط أ ط. فضلعا أ ب، ب ط من مثلث أ ب ط مساويان لضلعي د هـ، هـ ز من مثلث د هـ ز، كل ضلع مساوٍ لنظيره. وزاوية أ ب ط مثل زاوية د هـ ز. فببرهان ١/٤ تكون زاوية أ ط ب مساوية لزاوية د ز هـ. وزاوية د ز هـ فرضت مساوية لزاوية أ جـ ط. فزاوية أ ط ب الخارجة من مثلث أ جـ ط إذن مساوية لزاوية أ جـ ط الداخلة. لكن بحسب برهان ١/١٦ يجب أن تكون زاوية أ ط ب الخارجة اعظم من زاوية أ جـ ط الداخلة؛ وهي أيضاً مثلها. هذا خلف لا يمكن. فضلع ب جـ إذن ليس أعظم من ضلع هـ ز. ولا أيضاً أصغر منه. فهو إذن مثله. فضلعا أ ب، ب جـ من مثلث أ ب جـ مساويان لضلعي د هـ، هـ ز من مثلث د هـ ز؛ كل ضلع مساوٍ لنظيره. وزاوية أ ب جـ مثل زاوية د هـ ز. فالضلع الباقي من مثلث أ ب جـ مساوٍ للضلع الباقي من مثلث د هـ ز. وسائر الزوايا مثل سائر الزوايا. فضلع أ جـ مثل ضلع د ز، وزاوية ب أ جـ مثل زاوية هـ د ز. وذلك ما أردنا أن نبين

[النيريزي]:

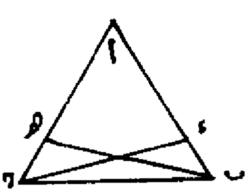
مضاف إلى هذا الشكل على سبيل التوسع [١٦أ]، وجدته ولست أعرف صاحبه.

متى كانت زاوية ب مساوية لزاوية هـ، وزاوية جـ مساوية لزاوية ز، وضلع ب جـ مثل ضلع هـ ز، فإنا متى ركبنا ب جـ على هـ ز: نقطة ب على نقطة هـ، ونقطة جـ على نقطة ز، يركب خط ب جـ على خط هـ ز، لأنهما متساويان، وتركب زاوية ب على زاوية هـ، وزاوية جـ على زاوية ز. فمن البين أن ضلعي أ ب، أ جـ ينطبقان على هـ د، د ز، وزاوية أ تنطبق على زاوية د: لأنه إن لم ينطبق ضلعا أ ب، أ جـ على ضلعي د هـ، هـ ز، فإما أن يقعا مثل هـ ح، ز ح، فتكون زاوية ز هـ ح، أعني زاوية أ ب جـ مثل زاوية ز هـ د: العظمى مثل الصغرى. وهذا غير ممكن. أو أن يقعا داخل مثلث د هـ ز، كخطي هـ ح، ز ح: فإن زاوية ز هـ د أعظم من زاوية ز هـ ح، أعني زاوية جـ ب أ؛ وقد كانت مثلها. وهذا لا يمكن.



الشكل ١/٦١

وهذا الشكل الزائد إن أجري أمره كما أجري الشكل الرابع من هذه المقالة، من غير إستشهاد الخلف، فإنه واضح أن زاوية ب تنطبق على زاوية هـ، وزاوية جـ تنطبق على زاوية ز، وأن هاتين الزاويتين إذا انطبقتا على زاويتي هـ، ز، وانطبق وتركب ضلع ب جـ على ضلع هـ ز، فإن الضلعين الباقيين يتركب كل واحد منهما على نظيره، وتتركب زاوية أ على زاوية د، ويتركب المثلث على المثلث. وذلك ما أردنا أن نبين.



الشكل ١/٦٢

فإذا حصلت هذه المقدمة فإنه يحصل برهان الشكل السادس من هذه المقالة، بغير خلف، وهو: إذا تساوت زاويتان من مثلث، فهو متساوي الساقين.

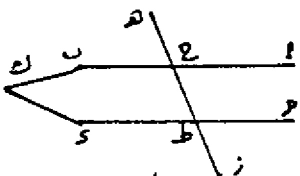
مثاله أن مثلث أ ب جـ زاوية أ ب جـ منه مساوية لزاوية أ جـ ب. فأقول: أن ساق أ ب مثل ساق أ جـ.

برهانه أنا نفصل جـ هـ، ب د متساويين، ونخرج ب هـ، جـ د. فضلعا د ب، ب جـ مثل ضلعي هـ جـ، جـ ب. وزاوية د ب جـ مثل زاوية ب جـ هـ. فبحسب برهان ١/٤ تكون قاعدة د جـ مثل قاعدة هـ ب، وزاوية جـ ب هـ مثل زاوية ب جـ د. وزاوية ب د جـ مثل زاوية ب هـ جـ. وبحسب برهان الشكل الزائد في ١/٢٦ فإن زاوية أ هـ ب الباقية مساوية لزاوية أ د جـ الباقية، وضلع أ د مثل ضلع أ هـ. وأيضاً فإن زاوية أ ب هـ الباقية مثل زاوية أ جـ د الباقية. فبحسب برهان الشكل المتقدم الزائد في ١/٢٦ فإن ضلع أ د مساوٍ لضلع أ هـ. وقد كنا بينا أن ب د مثل جـ هـ. فخط ب أ بأسره مثل خط جـ أ بأسره. فساق أ ب مثل ساق أ جـ. وذلك ما أردنا أن نبين.

[المبرهنة ١/٢٧]:

الشكل السابع والعشرون من المقالة الأولى

إذا وقع خط مستقيم على خطين مستقيمين فصير الزاويتين المتبادلتين متساويتين، فإن الخطين متوازيان.



الشكل ١/٦٤

مثاله: أن خط هـ ز وقع على خطي أ ب، جـ د، فصير زاويتي أ ح ط، ح ط د المتبادلتين متساويتين. فأقول أن خطي أ ب، جـ د متوازيان.

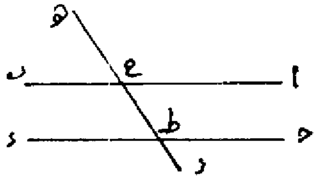
برهانه: إنهما إن لم يكونا متوازيين فإنهما إذا أخرجا في إحدى الجهتين التقيا. فنخرجهما في جهة ب، د، فيلتقيان على نقطة ك، إن أمكن ذلك. فتصير زاوية أ ح ط الخارجة من مثلث ح ط ك أعظم من زاوية ح ط ك الداخلة، كما بين ببرهان ١/١٦. وهذا خلف لأن زاوية أ ح

ط فرضت مساوية لزاوية ح ط د. فخطا أ ب، جـ د، إن أخرجا في الجهتين جميعاً، لم يلتقيا، ولو أخرجا إلى غير نهاية. فهما متوازيان. وذلك ما أردنا أن نبين.

[المبرهنة ٢٨/ ١]:

[١٦ب] الشكل الثامن والعشرون من المقالة الأولى

إذا وقع خط مستقيم على خطين مستقيمين، فصير الزاوية الخارجة مثل الداخلة التي تقابلها، أو صير الزاويتين الداخلتين اللتين في جهة واحدة معادلتين لقائمتين. فإن الخطين متوازيان.



الشكل ١/ ٦٤

مثاله: أن خط هـ ز وقع على خطي أ ب، جـ د فصير زاوية هـ ح ب الخارجة مثل زاوية ح ط د الداخلة التي تقابلها، أو صير مجموع زاويتي ب ح ط، د ط ح مساوياً لمجموع زاويتين قائمتين. فأقول أن خطي أ ب، جـ د متوازيان.

برهانه أن زاوية هـ ح ب مساوية لزاوية ح ط د. ولكن زاوية هـ ح ب مساوية لزاوية أ ح ط. وذلك بحسب برهان ١٥/ ١ والمساوية لشيء واحد فهي متساوية. فزاوية أ ح ط مساوية لزاوية ح ط د. وهما المتبادلتان فحسب برهان ٢٧/ ١ يكون خط أ ب موازياً لخط ج د.

وأيضاً فليكن مجموع زاويتي ب ح ط، ح ط د. الداخلتين اللتين في جهة واحدة: مساوياً لمجموع زاويتين قائمتين. فأقول أن خط أ ب موازٍ لخط جـ د.

برهانه أن مجموع زاويتي ب ح ط ، ح ط د معادل لقائمتين. وكذلك بحسب برهان ١٣/ ١ يكون مجموع زاويتي أ ح ط، ب ح ط معادلاً لزاويتين قائمتين. فزاويتا أ ح ط، ب ح ط مثل زاويتي ب ح ط، ح ط د. فنسقط زاوية

ب ح ط المشتركة، فتبقى زاويتا أ ح ط، ح ط د المتبادلتان متساويتين. فخط أ ب موازٍ لخط ج د. وذلك ما أردنا أن نبين.

[القضية ٢٩/ ١]

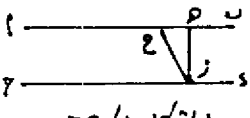
[النيريزي] مقدمات وأشكال يحتاج إليها في الشكل التاسع والعشرين من المقالة الأولى لسنبليقيوس وأغانيس.

إن القضية المستعملة في برهان الشكل التاسع والعشرين من المقالة الأولى، وهي أن كل خطين يخرجان على أقل من زاويتين قائمتين، فإنهما يلتقيان: ليست من القضايا المقبولة.

قال سنبليقيوس في ذلك: أن هذه المصادرة ليست بظاهرة كل ذلك. لكنه قد احتيج فيها إلى بيان الخطوط حتى أن أنطينياطس وذيؤرس بيناه بأشكال كثيرة مختلفة. وبطلميوس أيضاً قد عمل بيانه والبرهان عليه، وإستعمل في ذلك الشكل الثالث عشر والخامس عشر والسادس عشر من المقالة الأولى من الأسطقسات. وذلك ليس بمنكر لأن أوقليدس إنما استعمل هذه المصادرة في الشكل التاسع والعشرين من هذه المقالة. وقد كان هذا المعنى في نفسه أيضاً مستحقاً للنظر والقول فيه، وان تبين أنه كما أن الخطين إذا أخرجا على زاويتين قائمتين كانا متوازيين، كذلك إن اخرجا على أقل من زاويتين قائمتين، كانا متلاقيين.

فأما أغانيس، صاحبنا، فإنه لم يَرَ أن يتقدم فيستعمل هذا المعنى على أنه مصادرة، إذ كان يحتاج إلى متاهات. لكن استعمل أشكالاً أُخر مكان الأشكال التي في الاسطقسات، حتى برهن الشكل التاسع والعشرين من غير أن يجعل هذا المعنى مصادرة. ثم برهن هذه المصادرة بعد ذلك، بمذاهب وسبل هندسية. وهذا كلامه بألفاظه.

قال أغانيس: ومن أجل أنا كنا وعدنا أن نبين أن المصادرة على أن الخطين اللذين يخرجان على أقل من زاويتين قائمتين يلتقيان: قد تصح ببرهان هندسي، إذ كان فيها مطعن يطعن به على المهندسين قديماً، ويقال لهم إنكم إنما تطلبون أن يسلَّم لكم ما ليس [١٧أ] ببين، فتبنون عليه الأشياء الأخر. وإنا نفعل ذلك. ولعل هذا المعنى عظيم جليل القدر. وأنا أرى أنه لا يحتاج إلى كلام طويل ولا ذي فنون، فأقول: إنا حددنا الخطوط المتوازية بأن قلنا إنها التي في سطح واحد، وإذا اخرجت إخراجاً دائماً، غير متناهٍ، في الجهتين جميعاً، كان البعد بينهما أبداً بعداً واحداً. والبعد بينهما هو أقصر خط يصل بينهما، كما قيل ذلك أيضاً في الأبعاد الأخر. فينبغي أن تزاد هذه الأشكال في المقالة الأولى من كتاب الأصول، بعد الشكل السادس والعشرين، حتى يصير هذا [هو] الشكل السابع والعشرين وهو:



إذا كان خطان مستقيمان متوازيين، فإن البعد بينهما هو عمود على كل واحد منهما. مثاله أنا نفرض خطين متوازيين، وهما أ ب، جـ د، وليكن البعد بينهما هـ ز. فأقول أن خط هـ ز عمود على كل واحد من خطي أ ب، جـ د.

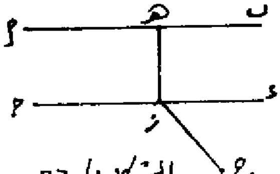
برهانه إنه إن لم يكن عموداً عليهما، فلتكن الزاويتان اللتان عند نقطة ز ليستا بقائمتين. ولتكن الحادة منهما زاوية ز ولنخرج من نقطة ز عموداً على خط أ ب، وهو ز ح، وذلك أنه يقع في جهة أ. فبحسب برهان ١/٢١ يكون ز هـ أطول من ز ح. وقد كان ز هـ فرض أقصر خط مستقيم يقع بين خطي أ ب، جـ د. هذا خلف.

فاذن خط هـ ز عمود على كل واحد من خطي أ ب، جـ د. وذلك ما أردنا أن نبين.

شكل ثانٍ لأغانيس.

إذا وقع خط مستقيم على خطين مستقيمين، وكان عموداً على كل واحد

منهما، فإن الخطين متوازيان،



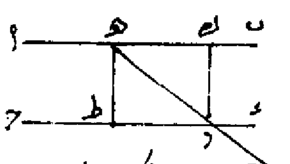
الشكل ١/ ٦٦

والعمود هو البعد الذي بينهما. مثاله أن خطي أ ب، جـ د قد وقع عليهما خط هـ ز، فأحاط مع كل واحد منهما بزاويتين قائمتين، فأقول إن خطي أ ب، جـ د متوازيان، وإن خط هـ ز هو البعد بينهما.

برهانه: إن لم يكونا متوازيين، فإنا نجيز على نقطة ز خطاً موازياً لخط أ ب، وليكن أن أمكن خط ز ح. وننزل أن الخط الموازي لخط أ ب هو خط ز ح. فخط هـ ز يجب ان يكون البعد بين خطي أ ب، ز ح، لأنه أقصر الخطوط التي تخرج من نقطة ز إلى خط أ ب. فزاوية ح ز هـ قائمة، وذلك بحسب برهان الشكل المتقدم. ولكن زاوية د ز هـ فرضت قائمة. هذا خلف. فإذن خطا أ ب، جـ د متوازيان. وخط ز هـ هو البعد بينهما. وذلك ما أردنا أن نبين.

شكل ثالث لأغانيس.

الخط المستقيم المخرج على الخطوط المتوازية يصير الزوايا المتبادلة متساوية، ويصير الزاوية الخارجة مساوية للزاوية الداخلة المقابلة لها، ويصير الزاويتين اللتين في جهة واحدة مساويتين لمجموع زاويتين قائمتين.



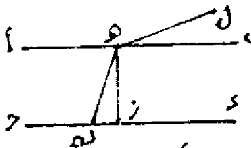
الشكل ١/ ٦٧

برهانه: أنا نخرج من كل واحدة من نقطتي هـ، ز: البعد الذي بين خطي أ ب، جـ د، وهما خطا هـ ط، ز ك. فتكون الأربع الزوايا التي حدثت عنهما قائمة فخط هـ ط موازٍ لخط ك ز. وذلك بحسب برهان الشكل المتقدم. وخط هـ ك موازٍ لخط ط ز. وخطا هـ ك، ط ز هما البعد بينهما. فهما إذن متساويان. ومن أجل أن خط ط ز مساوٍ لخط هـ ك، وخط هـ ط مساوٍ لخط ز ك، وهذه الخطوط تحيط بزوايا متساوية، فإن المثلثين متساويان، وباقي الزوايا مساوية لباقي الزوايا. فزاوية ط ز هـ مساوية لزاوية ز هـ ك. وهما متبادلتان. ولكن زاوية

ط ز هـ تساوي [١٧ب] ح ز د، لأنهما على التقاطع. وذلك بحسب برهان ١/١٥ فزاوية ز هـ ك مساوية لزاوية ح ز د: الخارجة للداخلة المقابلة لها.

وأيضاً فمن أجل ما بينا أن الزوايا المتبادلة متساوية، فإنا نزيد زاوية د ز هـ مشتركة، فتكون زاويتا ط ز هـ، هـ ز د، اللتان هما مساويتان لقائمتين: مساويتين لزاويتي ك هـ ز، د ز هـ. فإذن الزاويتان اللتان في جهة واحدة مساويتان لقائمتين. وذلك ما أردنا أن نبين.

شكل رابع لأغانيس.



الشكل ١/٦٨

إذا أخرج خط مستقيم على خطين مستقيمين، فكانت الزاويتان المتبادلتان اللتان أحاط بهما مع الخطين متساويتين، أو كانت الزاوية الخارجة مساوية للزاوية الداخلة المقابلة لها، أو كانت الزاويتان الداخلتان اللتان في جهة واحدة مساويتين لقائمتين، فإن الخطين متوازيان.

مثاله أن خطي أ ب، جـ د وقع عليهما خط هـ ز، فأحاط معهما بزوايا على ما حددنا. فأقول أن خطي أ ب، جـ د متوازيان.

برهانه: أنه إن كان خط هـ ز عموداً فظاهر أن خطي أ ب، جـ د متوازيان، لما قيل في الشكل الثاني من هذه الأشكال الزائدة. وإن لم يكن خط هـ ز عموداً، فإنا نخرج من نقطة هـ إلى خط جـ د: عمود هـ ك. فإن كانت زاوية هـ قائمة. فظاهر أيضاً أن خطي أ ب، جـ د متوازيان، لما قيل في الشكل الثاني من هذه الأشكال الزائدة. وإن لم تكن زاوية هـ قائمة، فإنا نخرج من نقطة هـ عموداً على خط هـ ك، كما بين ببرهان ١/١١، وليكن عمود هـ ل. فيكون خطا هـ ل، جـ د متوازيين. فزاويتاهما المتبادلتان متساويتان. وذلك كما بين في الشكل الثالث من هذه الأشكال الزائدة.

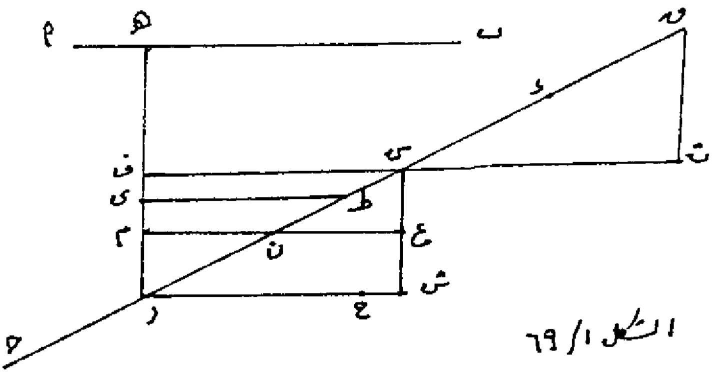
فإذن كل واحدة من زاويتي ز هـ ب، ز هـ ل مساوية لزاوية جـ ز هـ. وذلك غير ممكن. فخطا أ ب، جـ د متوازيان. وذلك ما أردنا أن نبين.

وبحسب أوضاع أغانيس، فإنه قال: ويصير الشكل الحادي والثلاثون: نريد أن نخرج من نقطة مفروضة خطاً موازياً لخط مفروض. والشكل الثاني والثلاثون: السطوح المتوازية الأضلاع: أضلاعها المتقابلة متساوية.

والشكل الثالث والثلاثون: الخطوط الموازية لخط واحد هي متوازية.

والرابع والثلاثون: الخطوط المستقيمة التي تصل بين الخطوط المتساوية المتوازية هي متساوية متوازية.

والخامس والثلاثون: إذا وقع خط مستقيم على خطين مستقيمين، فكانت الزاويتان الداخلتان اللتان في جهة واحدة: أصغر من قائمتين، فإن الخطين إذا أخرجا في جهة الزاويتين اللتين هما أقل من قائمتين: التقيا.



الشكل ١/ ٦٩

مثاله أن خطي أ ب، جـ د المستقيمين وقع عليهما خط هـ ز المستقيم، فصارت الزاويتان اللتان في جهة ب، د أصغر من قائمتين. فأقول: أن خطي أ ب، جـ د يلتقيان في تلك الجهة.

برهانه أنا نجيز على نقطة ز خطاً موازياً لخط أ ب، كما بين إخراجه ببرهان إقليدس في ١/٢٣؛ وليكن خط ز ح. ونخرج البعد بينهما، بحسب برهان ١/١١، وهو خط ز هـ. ونفرض على خط ز د نقطة، كيفما وقعت، ولتكن نقطة

ط. ونخرج من نقطة ط [١٨أ] عموداً على خط ز هـ، كما بين ببرهان ١١/١؛ وليكن خط ط ي. ونقسم خط ز هـ بنصفين، كما بين ببرهان ١٠/١. ونقسم أيضاً نصفه بنصفين، ولا نزال نفعل ذلك دائماً، حتى تقع القسمة دون نقطة ي. فلتقع القسمة على نقطة م. فمن البين أن نقطة م تقع على قسم ينطق به من خط هـ ز. فلننزل أن القسم الذي يقع دون نقطة ي هـو ربع ز هـ مثلاً، [وهو ز م]، ولنجز على نقطة م خطاً موازياً لخطي ز ح، أ ب، وهو خط م ن، كما بين ببرهان ٣١/١. ونخرج خط ن د إخراجاً بغير حدود. ونجعل في ز ق من أضعاف ز ن كأضعاف هـ ز لمقدار ز م، وهو أربعة أضعاف. فأقول أن أ ب، جـ د يلتقيان على نقطة ق.

برهان ذلك أنا نفصل من خط ز ق خطاً مساوياً لخط ز ن، كما بين ببرهان ٣/١، وليكن خط ن س، ونخرج على نقطة س خطاً موازياً لخط ز هـ، وهو خط س ش. ونخرج خط م ن إلى نقطة ع. فيكون مثلثا ز م ن، ن س ع: ضلعان من أضلاعهما متساويان، وهما ز ن، ن س؛ وزاوية ز ن م مساوية لزاوية ع ن س؛ وذلك بين ببرهان ٥/١. وببرهان الشكل الثالث الموضوع من أوضاع أغانيس من هذه المقدمات، تكون زاوية م ز ن مساوية لزاوية ن س ع، لأنهما المتبادلتان.

فبحسب برهان ٤/١ يكون باقي الأضلاع مثل باقي الأضلاع: كل ضلع مساوٍ لنظيره، والزاوية الباقية مساوية للزاوية الباقية. فضلع ز م مثل ضلع س ع؛ وضلع ع ش مثل ضلع ز م، لأنه مقابل له في سطح متوازي الأضلاع. فخط س ش ضعف خط ز م.

فإن أخرجنا من نقطة ق خطاً موازياً لخطي هـ ز، س ش، وأجزنا على نقطة س خط ق س على استقامة يوازي خط أ ب، ويلقى الخط المخرج من نقطة ق، الموازي لخط هـ ز، فبين أنه يفصل منه خطاً مساوياً لخط ز ف. فلنخرجه، وليكن خط ت ق. فيكون خط ت ق مساوياً لخط ف ز: لأن س ق مثل س ز،

وزاوية ف س ز مثل زاوية ق س ت، وزاوية ت ق س مثل زاوية ف ز س: المتبادلتان. فبحسب برهان ٤ / ١ يكون ت ق مثل ز ف. لكن ز ف مثل ف هـ. فخط ت ق مثل ف هـ. فخط أ هـ ب يلقى خط ف ق على نقطة ق. وذلك بحسب ما رتب أغانيس في موضع الشكل الذي يقول أن الخطوط التي تصل بين أطراف الخطوط المتساوية المتوازية هي متوازية متساوية. فقد تبين أنه إذا وقع خط مستقيم على خطين مستقيمين، فكانت الزاويتان الداخلتان اللتان في جهة واحدة: أقل من زاويتين قائمتين، فإن الخطين إذا أخرجا في جهة الزاويتين اللتين هما أقل من قائمتين التقيا. وذلك ما أردنا أن نبين.

كل ما وضعه في هذا الشكل، وفي مقدماته التي قدمها، فهي مقبولة قبول إضطرار، بحسب مصادرات المقالة الأولى، وبحسب الأشكال التي رتبها أغانيس، من الأشكال التي زادها من عنده، مع أشكال أوقليدس. وليس في شيء مما أتى به موضع للطعن بتة.

قال سنبليقيوس: هذا كلام أغانيس بألفاظه. ولعل اوقليدس [١٨ب] إنما استعمل هذا المعنى في المصادرات على أنه أقرب مأخذاً من هذا المأخذ. وذلك أنه إن كانت الخطوط المتوازية هي التي في سطح واحد، وإذا أخرجت في الجهتين جميعاً، إخراجاً دائماً، كان البعد بينهما أبداً متساوياً. فإن هذا القول إذا عكس، كان عكسه حقاً، وهو أن الخطوط التي في سطح واحد إذا لم يكن البعد بينها متساوياً، فليست متوازية، وإذا لم تكن متوازية فهي متلاقية. فإن أوقليدس استعمل هذا المعنى في هذا الشكل، كأنه من القضايا الواجب قبولها. والخطوط التي تخرج على اقل من زاويتين قائمتين، ليس تحفظ بعداً واحداً، فهي إذن متلاقية. وظاهر أن تلاقيها يكون في جهة ميل أحدهما إلى الآخر؛ فإن الجهة الأخرى ينفرجان فيها ويتسعان، ويتزايد البعد بينهما. ولكن من أجل أن القول بأن الخطين إذا لم يكونا متوازيين فهما يلتقيان، يحُتاج إلى تقديمين بينين؛ وأيضاً لأن قطوع المخروطات ليست متوازية، وهي لا تلتقي،

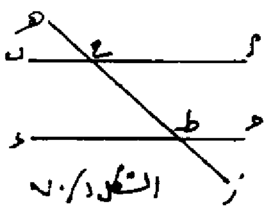
ذكر أغانيس تلك المقدمة واستعمل هذه الأشكال.

وأيضـاً فإن هذا البـرهـان هو عكس الشكـل الذي يقال فيه أن الخطين المستقيمين اللذين إذا وقـع عليهمـا خط مستقيم، كانت الزاويتان الداخلتان معادلتين لقائمتين، فهما متوازيان. فإذا كان هذا الشكل قد بين ببرهان، فهذا المعنى أيضاً يحتاج أن يبين ببرهان. فقد اختصرنا كل شيء يمكن أن يقال في الخطوط المتوازية، وصحيح الأمر فيها.

[المبرهنة ۲۹/ ۱]

الشكل التاسع والعشرون من المقالة الأولى

إذا أخـرج خط مستقيم على خطين مستقيمين متـوازيين، فإن الـزاويتين المتبـادلتين متساويتان؛ والزاويتان الخارجة والداخلة التي تقابلها متساويتان؛ والـزاويتان الداخلتان، في أي الجهتين كانتا، فإن مجموعهما يعدل مجموع زاويتين قائمتين.



مثاله: أن خطي أ ب، جـ د متوازيان؛ وقد أخرج عليهما خط مستقيم، وهو هـ ز؛ فأقول: أن زاويتي أ ح ط، ح ط د المتبادلتين متساويتان؛ وأن زاويتي هـ ح ب، ح ط د، الخارجة والداخلة المتقابلتين: متساويتان؛ وأن مجموع زاويتي ب ح ط، ح ط د، الداخلتين اللتين في جهة واحدة: معادلتان لمجموع زاويتين قائمتين.

برهانه: أنا نبين أولاً أن زاوية أ ح ط مساوية لزاوية ح ط د، المتبادلتين: فإن لم تكن مثلهـا، فإحـداهمـا أعظم؛ فلتكن زاوية أ ح ط أعظم، إن كان يمكن. ونجعل زاوية ب ح ط مشتركة. فمجموع زاويتي أ ح ط، ب ح ط: أعظم من مجموع زاويتي ب ح ط، ح ط د. لكن بحسب برهان ۱۳/ ۱، يكون

مجموع زاويتي أ ح ط، ب ح ط مثل زاويتين قائمتين. فمجموع زاويتي ب ح ط، ح ط د. أصغر من مجموع زاويتين قائمتين. لكن بحسب ما صادر به أوقليدس، وبحسب ما برهن عليه أغانيس في الأشكال المتقدمة: أنه إذا وقع خط مستقيم على خطين مستقيمين، فكانت الزاويتان الداخلتان اللتان في جهة واحدة: أقل من قائمتين، فإن الخطين إذا أخرجا في جهة الزاويتين اللتين هما أقل من قائمتين: التقيا. فخطا أ ب، جـ د إذن يلتقيان في جهة نقطتي ب، د. وهما متوازيان. فهذا محال غير ممكن.

فليس يمكن أن تكون زاوية أ ح ط أعظم من زاوية ح ط د. ولا أصغر منها. فهي إذن مساوية لها. فزاوية أ ح ط مساوية لزاوية ح ط د ـ المتبادلتان.

وأيضاً فإن خطي أ ب، هـ ز يتقاطعان على نقطة ح. فبحسب برهان ١٥/١ تكون زاوية أ ح ط [١٩أ] مساوية لزاوية هـ ح ب. لكن زاوية أ ح ط قد بينا أنها مساوية لزاوية ح ط د. والمساوية لشيء واحد فهي متساوية. فزاوية هـ ح ب الخارجة مثل زاوية ح ط د الداخلة ـ المتقابلتان.

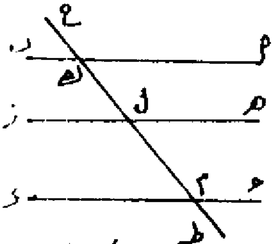
وأيضاً فقد تبين أن زاوية هـ ح ب الخارجة مثل زاوية ح ط د الداخلة. فنجعل زاوية ب ح ط مشتركة. فمجموع زاويتي هـ ح ب، ب ح ط مثل مجموع زاويتي ب ح ط، ح ط د. لكن مجموع زاويتي هـ ح ب، ب ح ط مثل مجموع زاويتين قائمتين، ببرهان ١٣/١. فمجموع زاويتي ب ح ط، ح ط د إذن مثل مجموع زاويتين قائمتين؛ وهما في جهة واحدة.

فقد تبين أنه إذا أخرج خط مستقيم على خطين مستقيمين متوازيين، فإن الزاويتين المتبادلتين متساويتان؛ والزاويتان الداخلة والخارجة التي تقابلها متساويتان؛ والزاويتان الداخلتان، في أي الجهتين كانتا فإن مجموعهما مثل زاويتين قائمتين. وذلك ما أردنا أن نبين.

[المبرهنة ٣٠/ ١]

الشكل الثلاثون من المقالة الأولى

كل الخـطوط المستقيمـة المـوازية لخط مستقيم، فهي متوازية.



الشكل ٧١/١

مثاله: أن خطي أ ب، جـ د موازيان لخط هـ ز. فأقول أن خطي أ ب، جـ د متوازيان.

برهانه: أنا نخرج على خطوط أ ب، جـ د، هـ ز خط ح ط، كيفما خرج. فقد أخرج خط ح ط على خطين مستقيمين متوازيين، وهما خطا أ ب، هـ ز. فبحسب برهان **١/٢٩** تكون زاويتا أ ك ل، ك ل ز المتبادلتـان متسـاويتين. وأيضاً فإنه قد أخرج خط ح ط على خطين متـوازيين، وهمـا خطا هـ ز، جـ د. فزاوية ح ل ز الخارجة مثل زاوية ل م د الداخلة؛ وذلك أيضاً بحسب برهان **١/٢٩**. لكنا قد بينا أن زاوية ح ل ز مساوية لزاوية أ ك ل. والمساوية لشيء واحد فهي متساوية. إذن زاوية أ ك ل مساوية لزاوية ل م د.

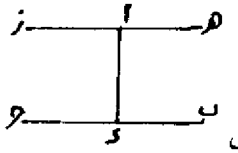
فقد أخرج على خطي أ ب، جـ د خط ح ط، فصير الزاويتين المتبادلتين متساويتين. فبحسب برهان **١/٢٧** يكون خط أ ب موازياً لخط جـ د.

فقـد تبين أن الخـطوط المستقيمـة الموازية لخط مستقيم، فهي متوازية أيضاً. وذلك ما أردنا أن نبين.

[المبرهنة ٣١/ ١]

الشكل الحادي والثلاثون من المقالة الأولى

نريد أن نبين كيف نجيز على نقطة مفروضة خطاً موازياً لخط مستقيم مفروض.



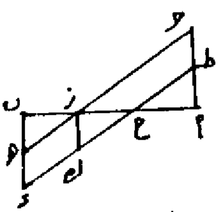
فنجعل النقطة المفروضة نقطة أ، والخط المفروض خط ب جـ. ونريد أن نبين كيف نجيز على نقطة أ خطاً مستقيماً موازياً لخط ب جـ: فنخرج على نقطة أ، وعلى خط ب جـ: خطاً، كيفما خرج، وليكن خط أ د. ونعمل على خط أ د، وعلى نقطة أ: زاوية مساوية لزاوية أ د جـ، كما عمل ببرهان ٢٣ / ١، ولتكن زاوية د أ هـ. ونخرج خط هـ أ على إستقامة إلى ز.

الشكل ١/٧٤

فلأن خط أ د قد أخـــرج على خطي ب جـ، هـ ز، فصـير الـــزاويتـين المتبادلتين متساويتين، فبحسب برهان ٢٧ / ١، يكون خط ب جـ موازياً لخط هـ ز.

فقد أجزنا على نقطة أ خطاً موازياً لخط ب جـ. وهو خط هـ ز. وذلك ما أردنا أن نبين.

[النيريزي]: شكل مضاف إلى هذا الشكل [١٩ب]، وكان موضعه تالي الشكل العاشر. ولكن لما كان برهانه يتم بعد هذا الشكل، كان الوجه فيه أن يتلوه، لأن قسمة خط بثلاثة أقسام متساوية يحتاج إليها فيما بعد.



الشكل ١/٧٢

فليكن خط أ ب، ونقيم على نقطتي أ، ب عمودي أ جـ، ب د، بأي مقدار شئنا، وليكونا متساويين. ونقسم كل واحد منهما بنصفين، على نقطتي هـ، ط. ونخرج خطي جـ ز هـ، ط ح د. ونخرج من نقطة ز خطاً يوازي عمودي أ جـ، ب د؛ وليكن خط ز ك.

فلأن أ جـ يوازي ب د، أعني جـ ط يوازي هـ د، ويساويه؛ والخطوط التي تصل بين أطراف الخطوط المتوازية [المتساوية] متوازية أيضاً ومتساوية، فخطا جـ هـ، ط د متساويان ومتوازيان.

وخط ز ك قد أخرج موازياً لخط جـ ط ؛ وخط جـ ز يوازي خط ط ك . فخط ز ك إذن يساوي خط جـ ط : لأن السطوح المتوازية الأضلاع ، فان كل ضلعين منها يتقابلان متساويان . فخط ز ك اذن يساوي ط أ ويوازيه ، وقد وقع عليهما أ ز . فزاويتا جـ أ ز ، ح ز ك ، المتبادلتان : متساويتان ؛ وزاوية جـ أ ز قائمة . فزاوية ح ز ك قائمـة . وزاوية ح ك ز مثـل زاوية أ ط ح ، لأنهما المتبـادلتـان ، فمثلثا أ ط ح ، ز ح ك تساوي زاويتان من أحدهما زاويتين من الآخر ، كل زاوية ونظيرتها ؛ وقاعدة ط أ مساوية لقاعدة ك ز . فمثلث أ ط ح مثل مثلث ح ك ز ؛ وسائر الأضلاع مثل سائر الأضلاع . فخط أ ح مثل خط ز ح .

وبمثل هذا البرهان نبين ان مثلث ز ك ح مثل مثلث ب هـ ز . لأن قاعدة ك ز مثل قاعدة ب هـ : وزاويتا ح ز ك ، ز ب هـ قائمتان ؛ وزاوية ح ك ز مثل زاوية ك د هـ ، أعني مثل زاوية ز هـ ب . فسائر الأضلاع مثل سائر الأضلاع : أعني ح ز مثل ز ب .

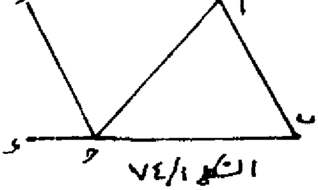
فأقسام أ ح ، ح ز ، ز ب متساوية . وذلك ما أردنا أن نبين . وعلى هذا السبيل نقسم بأي أقسام شئنا ، إلى غير نهاية .

[المبرهنة ٣٢/ ١]

الشكل الثاني والثلاثون من المقالة الأولى

كل مثلث يخرج ضلع من أضلاعه على استقامة ، فإن [١] الزاوية التي تحـدث خارج المثلث مثـل مجموع زاويتيه الداخلتين اللتين تقابلانها ، [٢] وزوايا المثلث الثلاث ، اذا جمعت ، مثل مجموع زاويتين قائمتين .

مثاله : ان مثلث أ ب جـ قد أخرج ضلع من أضلاعه ، وهو ضلع ب جـ ، على استقامة ، إلى نقطة د ، فأقول ان زاوية أ جـ د مثل مجموع زاويتي أ ب جـ ، ب أ جـ : وان زوايا أ ب جـ ، ب جـ أ ،



الشكل ١/٧٤

جـ أ ب، الثلاث، اذا جمعت: مساوية لمجموع زاويتين قائمتين.

برهانه: انا نخرج من نقطة جـ خط جـ هـ موازياً لضلع أ ب، كما بين إخراجه ببرهان ١/٣١.

[١] فخط أ جـ مخرج على خطي أ ب، جـ هـ المتوازيين. فببرهان ١/٢٩: زاويتا ب أ جـ، أ جـ هـ المتبادلتان متساويتان.

وأيضاً فإنه قد أخرج خط ب جـ د على خطي أ ب، جـ هـ المتوازيين. فزاويتا أ ب د، هـ جـ د المتقابلتان متساويتان. وذلك ببرهان ١/٢٩.

فزاوية أ جـ د الخارجة مثل مجموع زاويتي أ، ب اللتين تقابلانها.

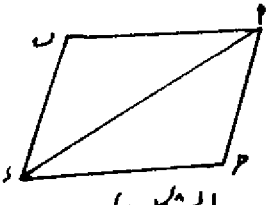
[٢] وقد بيّنا أن زاوية أ جـ هـ مساوية لزاوية ب أ جـ. فنجعل زاوية أ جـ ب مشتركة. فمجموع زاويتي أ جـ د، أ جـ ب مساوٍ لمجموع زوايا أ جـ ب، أ ب جـ، ب أ جـ الثلاثة.

لكن مجموع زاويتي أ جـ ب، أ جـ د مثل قائمتين [٢٠أ] بحسب برهان ١/١٣.

فزوايا المثلث الثلاث، أعني أ جـ ب، أ ب جـ، ب أ جـ، إذا جمعت: مثل مجموع زاويتين قائمتين. وذلك ما أردنا أن نبين.

[المبرهنة ١/٣٣]

الشكل الثالث والثلاثون من المقالة الأولى



الشكل ١/٧٥

الخطوط المستقيمة التي تصل ما بين أطراف الخطوط المتوازية المتساوية، في كلتا الجهتين، هي أيضاً متوازية متساوية.

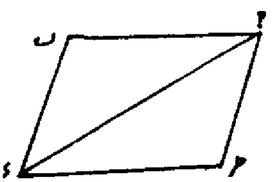
مثاله: أن خطي أ ب، جـ د متوازيان متساويان.

وقـد وصل ما بين أطرافهما بخطي أ ج، ب د. فأقول أن خطي أ جـ، ب د متوازيان متساويان.

برهـانه: أنا نخرج خط أ د. فخط أ د قد أخرج على خطي أ ب، جـ د المتوازيين. فببرهان ١/٢٩ تكون زاويتا ب أ د، أ د جـ المتبادلتان متساويتين؛ وخط أ ب فرض مساوياً لخط جـ د؛ ونأخذ خط أ د مشتركاً: فضلعا ب أ، أ د من مثلث ب أ د، مساويان لضلعي جـ د، د أ من مثلث أ د جـ؛ وزاوية ب أ د مساوية لزاوية أ د جـ. فببرهان ١/٤ يكون ضلع ب د الباقي، من مثلث أ ب د، مثل ضلع أ جـ الباقي من مثلث أ د جـ؛ وسائر الزوايا مثل سائر الزوايا: كل زاوية مثل نظيرتها؛ فزاوية أ د ب مساوية لزاوية جـ أ د. فقد أخرج على خطي أ جـ، ب د خط أ د، فصير زاويتي جـ أ د، أ د ب المتبـادلتين متساويتين. فببرهان ١/٢٧ يكون خط أ جـ موازياً لخط ب د. وقد بينا أنه مساوٍ له. فخطا أ ج، ب د متساويان ومتوازيان. وذلك ما أردنا أن نبين.

[المبرهنة ١/٣٤]

الشكل الرابع والثلاثون من المقالة الأولى



الشكل ١/٧٥

كل السطوح المتوزية الأضلاع، فإن كل ضلعين منهـا يتقـابلان، أو زاويتين تتقابلان، فهما متساويان؛ والقطر يقطع السطح بنصفين:

مثاله: أن سطح أ ب جـ د متوازي الأضلاع: ضلع أ ب مواز لضلع جـ د، وضلع أ جـ مواز لضلع ب د، وقد أخرج قطر أ د. فأقول أن ضلع أ ب مثل ضلع جـ د، وضلع أ جـ مثل ضلع ب د، وزاوية أ مثل زاوية د، وزاوية ب مثل زاوية جـ، وقطر أ د يقسم سطح أ ب جـ د بنصفين، فيصير مثلث أ ب د مثل مثلث أ جـ د.

برهانه: أنه قد أخرج على خطي أ ب، جـ د المتوازيين: خط أ د. فببرهان

١/٢٩ تصير زاويتا ب أ د، أ د جـ، المتبادلتان، متساويتين.

وأيضاً فقد أخرج على خطي أ جـ، ب د المتوازيين: خط أ د. فببرهان ١/٢٩ فإن زاويتي جـ أ د. أ د ب، المتبادلتين: متساويتان.

فزاوية ب أ د من مثلث أ ب د: مثل زاوية أ د جـ من مثلث أ جـ د. وزاوية ب د أ مثل زاوية د أ جـ. ونأخذ ضلع أ د مشتركاً. فببرهان ١/٢٦ فإن الضلعين الباقيين من مثلث أ ب د: مساويان للضلعين الباقيين من مثلث أ جـ د، كل ضلع مثل نظيره: أ ب مثل جـ د؛ أ جـ مثل ب د؛ والزاويتان الباقيتان متساويتان: أ ب د مثل أ جـ د. والمثلث مثل المثلث.

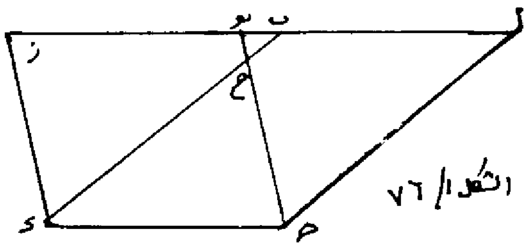
وقد بينا أن زاوية جـ أ د مثل زاوية أ د ب، وزاوية ب أ د مساوية لزاوية أ د جـ. فزاوية ب أ جـ بأسرها مساوية لزاوية ب د جـ بأسرها.

فقد تبين أن كل سطح متوازي الأضلاع، فإن كل ضلعين منه يتقابلان، وكل زاويتين تتقابلان، فهما متساويان؛ والقطر يقسم السطح بنصفين. وذلك ما أردنا أن نبين.

[المبرهنة ١/٣٥]

الشكل الخامس والثلاثون من المقالة الأولى

السطوح المتوازية الأضلاع إذا كانت على قاعدة واحدة وبين خطين متوازيين، فهي متساوية.



مثاله. إن سطحي أ ب جـ د، هـ ز جـ د متوازيا الأضلاع، وهما جميعاً على قاعدة جـ د وبين خطين متوازيين هما أ ز، جـ د. فأقول ان سطحي أ ب جـ د، هـ ز جـ د متساويان.

برهـانه: أنه قد أخرج على خطي أ جـ، ب د المتوازيين: خط أ ب ز. فببرهان **١/٢٩** تكون زاوية ب أ جـ الداخلة مثل زاوية ز ب د الخارجة.

وأيضاً فإن سطحي أ ب جـ د، هـ ز جـ د فرضا متوازيي الأضلاع. فببرهان **١/٢٤** فإن كل ضلعين متقابلين متساويان: ضلع أ جـ مساوٍ لضلع ب د، وضلع أ ب مساوٍ لضلع جـ د، وضلع هـ ز أيضاً مساوٍ لضلع جـ د. والمساوية لشيء واحد فهي متساوية. فخط أ ب مثل خط هـ ز. ونأخذ خط ب هـ مشتركاً. فخط أ هـ بأسره مثل خط ب ز بأسره.

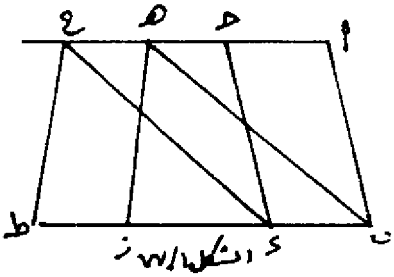
وكنا بينا أن خط أ جـ مثل خط ب د. فضلعا ب ز، ب د من مثلث ب د ز: مثل ضلعي هـ ا، أ جـ من مثلث أ جـ هـ؛ كل ضلع، كما بينا، مساوٍ لنظيره؛ وزاوية د ب ز مساوية لزاوية جـ أ هـ. فببرهان **١/٤** تكون قاعدة جـ هـ مثل قاعدة د ز، ومثلث ب د ز مثل مثلث أ جـ هـ. فنلقي مثلث ب هـ ح المشترك. فيبقى منحرف أ ب ح جـ مثل منحرف هـ ز د ح.

ونأخذ مثلث جـ د ح مشتركاً، فسطح أ ب جـ د بأسره مثل سطح هـ ز جـ د بأسره. وهما السطحان اللذان على قاعدة واحدة وبين خطين متوازيين. وذلك ما أردنا أن نبين.

[النيريزي]: زيادة: قال إيرن: وقوع هذا الشكل على ثلاثة أوجه، بين أوقليدس أحدها، وهو أصعبها.

[المبرهنة ١/٣٦]

الشكل السادس والثلاثون من المقالة الأولى



السطوح المتوازية الأضلاع إذا كانت على قواعد متساوية وبين خطين متوازيين فهي متساوية.

مثاله: أن سطحي أ ب جـ د، هـ ز

ح ط متوازيا الأضلاع، وهما على قاعدتين متساويتين هما ب د، ز ط، وبين خطين متوازيين هما خطا ب ط، أ ح فأقول أن سطحي أ ب جـ د، هـ ز ح ط متساويان. برهانه أنا نخرج خطي هـ ب، ح د. وكنا فرضنا قاعدة ب د مثل قاعدة ز ط، وسطح هـ ز ح ط فرضناه متوازي الأضلاع. فببرهان ١/٣٤ يكون خط هـ ح مثل خط ز ط. والمساوية لشيء واحد متساوية. فخط ب د مساوٍ لخط هـ ح. وهو أيضاً موازٍ له. والخطوط التي تصل بين أطراف الخطوط المتوازية المتساوية، في كلتا الجهتين، هي أيضاً متوازية متساوية، كما بينا ببرهان ١/٣٣. فخط هـ ب مثل خط د ح ومواز له. فسطح هـ ب د ح متوازي الأضلاع. وهو مع سطح هـ ز ح ط على قاعدة واحدة هي هـ ح، وبين خطي أ ح، ب ط المتوازيين. فببرهان ١/٣٥ فإن سطح هـ ب د ح مثل سطح هـ ز ح ط.

وأيضاً فإن سطحي أ ب جـ د، ب د هـ ح على قاعدة ب د، وبين خطي أ ح، ب ط المتوازيين، فببرهان ١/٣٥ فإن سطح أ ب جـ د مساوٍ لسطح ب هـ د ح. والمساوية لشيء واحد فهي متساوية. فسطح أ ب جـ د مساوٍ لسطح هـ ز ح ط.

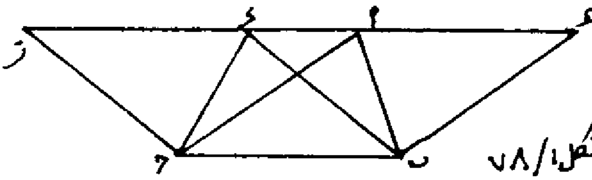
فقد تبين أن السطوح المتوازية الأضلاع التي هي على قواعد متساوية وبين خطين متوازيين هي متساوية. وذلك ما أردنا أن نبين.

[النيريزي]

زيادة: وهذا من إختلاف الوقوع، كما كان قبله. والبرهان عليهما واحد.

[المبرهنة ٣٧/ ١]

[٢١أ] الشكل السابع والثلاثون من المقالة الأولى



إذا كانت المثلثات على قاعـدة واحـدة، وبين خطين متوازيين، فهي متساوية. شكل ١/٧٨

مثـالـه: أن مثلثي أ ب جـ، د ب جـ على قاعدة واحدة وهي قاعدة ب جـ، وبين خطين متوازيين، وهما خطا ب جـ، أ د: فأقول أن مثلث أ ب جـ مثل مثلث د ب جـ.

برهانه: أنا نخرج خط أ د في الجهتين جميعاً. ونخرج من نقطة ب خطاً موازياً لخط أ جـ يلقى الخط المخرج على نقطة هـ. ونخرج أيضاً من نقطة جـ خطاً موازياً لخط ب د يلقى الخط المخرج على نقطة ز؛ وإخراج هذين الخطين كما بين ببرهان ١/٣١. فمن البين أن سطح ب هـ أ جـ متوازي الأضلاع؛ وكذلك سطح د ب جـ ز متوازي الأضلاع. وهما على قاعدة واحدة وبين خطي هـ ز، ب جـ المتوازيين. فببرهان ١/٣٥ يكون سطح ب هـ أ جـ مثل سطح ب د ز جـ.

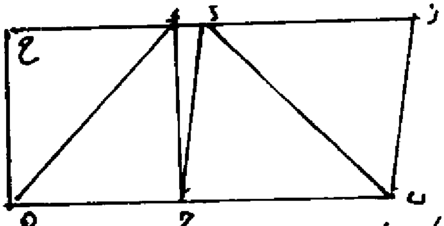
فلأن سطح ب هـ أ جـ متوازي الأضلاع، فببرهان ١/٣٤ فإن القطر الذي هو خط أ ب يقسمه بنصفين. فمثلث أ ب هـ مثل أ ب جـ.

وبمثـل هذا الاستشهـاد نبين أن مثلث د جـ ز مثـل مثلث د جـ ب. والمتساوية فإن أنصافها متساوية. فمثلث د جـ ب إذن مساوٍ لمثلث أ ب جـ.

فقد تبين أن المثلثات التي هي قاعدة واحدة وبين خطين متوازيين فهي متساوية. وذلك ما أردنا أن نبين.

[المبرهنة ٣٨/ ١]

الشكل الثامن والثلاثون من المقالة الأولى



الشكل ١/٧٩

كل المثلثات التي على قواعد متساوية وبين خطين متوازيين فهي متساوية مثاله أن مثلثي أ ب جـ، د جـ هـ على قاعدتين متساويتين، وهما ب جـ، جـ هـ؛ وبين خطين متوازيين، وهما ب هـ، أ د. فأقول أن المثلثين متساويان.

برهانه أنا نخرج خط أ د في كلتا الجهتين؛ ونخرج من نقطة ب خطاً موازياً لخط أ جـ يلقى الخط المخرج على نقطة ز؛ ونخرج أيضاً من نقطة هـ خطاً موازياً لخط جـ د يلقى الخط المخرج على نقطة ح، كما بين إخراج ذلك ببرهان ١/٣١ فمن البين أن سطحي أ جـ ب ز، د جـ هـ ح متوازيا الأضلاع، فببرهان ١/٣٤ مع برهان ١/٣٧ فإن سطحي أ جـ ب ز، د جـ هـ ح متوازيا الأضلاع، وعلى قاعدتين متساويتين وبين خطين متوازيين. فمتوازي أ جـ ب ز مساوٍ لمتوازي د جـ هـ ح. والقطر يقسم كل واحد منهما بنصفين، أعني أ ب، د هـ. وأنصاف المتساوية متساوية. فمثلث أ ب جـ مثل مثلث د جـ هـ.

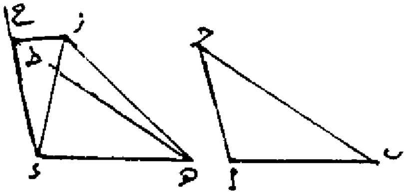
فقد تبين أن المثلثات التي على قواعد متساوية وبين خطين متوازيين، فهي متساوية. وذلك ما أردنا أن نبين.

[النيريزي]:

زيادة في هذا الشكل لأيرن

يتبين بعد بيان هذا المعنى أن كل مثلثين يساوي ضلعان من أحدهما ضلعين من الآخر، كل ضلع لنظيره، وتكون زاوية أحدهما أعظم من زاوية

الآخر، أعني اللتين تحيط بهما الأضلاع المتساوية، فإن هاتين الزاويتين اللتين تحيط بهما الأضلاع المتساوية، مجموعتين: إن كانتا معادلتين لقائمتين فإن المثلثين متساويان؛ وإن كانتا أقل من قائمتين، فالمثلث الذي زاويته أعظم: أعظم من المثلث الآخر؛ وإن كانتا أعظم من قائمتين فالمثلث الذي زاويته أصغر أعظم من المثلث الآخر.



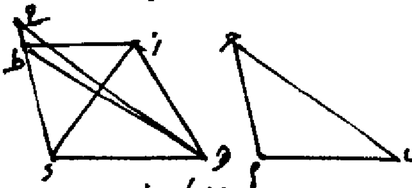
الشكل ١/ ٨٠

فلتكن زويتا ب أ جـ، هـ د ز من مثلثي أ ب جـ، د هـ ز، وهما [٢١ ب] على الصفة التي ذكرناها: معادلتين لقائمتين؛ أولاً على ان زاوية ب أ جـ أعظم. ونعمل على نقطة د، من خط د هـ، زاوية هـ د ح مساوية لزاوية ب أ جـ، كما بين ببرهان ٢٣ / ١. ونجيز على نقطة ز خط ز ط يوازي خط د هـ، كما بين ببرهان ٣١ / ١. ونخرج خط ط هـ.

فزاويتا ب أ جـ، هـ د ط متساويتان. وكنا فرضنا مجموع زاويتي ب أ جـ، هـ د ز مساوياً لمجموع زاويتين قائمتين. فمجموع زاويتي هـ د ز، هـ د ط مساوٍ لمجموع زاويتين قائمتين. ولأن خط ز ط أخرج موازياً لخط د هـ، فببرهان ١/٢٩ يكون مجموع الزاويتين الداخلتين اللتين في جهة واحدة مساوياً لمجموع زاويتين قائمتين. فنسقط زاوية هـ د ط المشتركة. فتبقى زاوية هـ د ز مساوية لزاوية د ط ز. ولكن خط ز ط موازٍ لخط د هـ؛ فتكون زاوية د ز ط مساوية لزاوية هـ د ز. والمساوية لشيء واحد تكون متساوية. فزاوية د ز ط مساوية لزاوية د ط ز. فساق د ز مساوٍ لساق د ط. وخط د ز مثل خط أ جـ. فخط د ط مثل أ جـ. وخط د هـ مثل خط أ ب، وزاوية ب أ جـ مثل زاوية هـ د ط. فقاعدة ب جـ مساوية لقاعدة هـ ط، ومثلث أ ب جـ مساوٍ لمثلث د هـ ط.

فلأن مثلثي د هـ ط، د هـ ز على قاعدة واحدة، وهي قاعدة د هـ، وبين خطين متوازيين، وهما د هـ، ط ز فببرهان ١/٣٧ يكون مثلث د هـ ط مثل مثلث د هـ ز. وقد بينا أن مثلث د هـ ط مثل مثلث أ ب جـ. فمثلث أ ب جـ مثل مثلث

د هـ ز، لأن المساوية لشيء واحد متساوية. وذلك ما أردنا أن نبين.



الشكل ١/٨١

وأيضاً في الصورة الثانية فإنا ننزل أن زاويتي ب أ جـ، هـ د ز أصغر من زاويتين قائمتين؛ وزاوية ب أ جـ أعظم من زاوية هـ د ز؛ وضلع أ ب مثـل ضلع د هـ؛ وضلع أ جـ مثل ضلع د ز. ونبين، كما بينا قبل، أن المثلث أ ب جـ أعظم من مثلث د هـ ز.

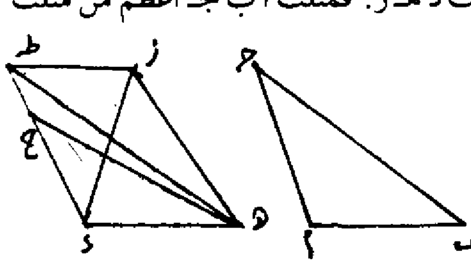
فنعمل زاوية هـ د ح مثل زاوية ب أ جـ. ونخرج ز ط يوازي هـ د.

فلأن مجموع زاويتي ب أ جـ، هـ د ز أصغر من مجموع زاويتين قائمتين، فمجموع زاويتي هـ د ط، هـ د ز أصغر من مجموع زاويتين قائمتين.

لكن مجموع زاويتي هـ د ط، د ط ز مثل زاويتين قائمتين. فإذا أسقطنا زاوية هـ د ط المشتركة، بقيت زاوية هـ د ز أصغر من زاوية د ط ز. لكن زاوية هـ د ز مثل زاوية د ز ط ـ المتبادلتان. فزاوية د ز ط أصغر من زاوية د ط ز. فببرهان ١٩ / ١ يكون ضلع د ز أعظم من ضلع د ط.

وننزل أن د ح مثل د ز. ونصل ح هـ. فخط د ح مثل خط أ جـ؛ وخط د هـ مثل خط أ ب؛ وزاوية ب أ ج مثل زاوية هـ د ح. فببرهان ٤ / ١ يكون مثلث أ ب جـ مثل مثلث د هـ ح.

لكن مثلث د هـ ح أعظم من مثلث د هـ ز. فمثلث أ ب جـ أعظم من مثلث د هـ ز. وذلك ما أردنا أن نبين.



الشكل ١/٨٢

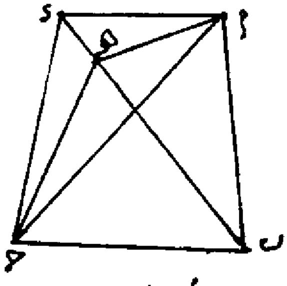
وأيضـاً في الصورة الثالثة فإنا ننزل أن مجموع زاويتي ب أ جـ، د هـ ز أعـظم من مجموع قائمتين، فأقول أن مثلث أ ب جـ أصغر من

مثلث د هـ ز. وذلك لأنه تبقى زاوية هـ د ز أعظم من زاوية د ط ز. وزاوية هـ د ز مساوية [٢٢أ] لزاوية د ز ط. فزاوية د ز ط أعظم من زاوية د ط ز فببرهان ١/١٩ يكون ضلع د ط أعظم من ضلع د ز. ونفصل د ح مثل د ز. فبحسب البرهان المتقدم، وبذلك الاستشهاد، نبين أن مثلث د هـ ح مثل مثلث أ ب جـ. لكن مثلث د هـ ط أعظم من مثلث د هـ ح، ومثلث د هـ ط مثل د هـ ز. فمثلث د هـ ز أعظم من مثلث أ ب جـ. فمثلث أ ب جـ أصغر من مثلث د هـ ز. وذلك ما أردنا أن نبين.

[المبرهنة ٣٩/ ١]

الشكل التاسع والثلاثون من المقالة الأولى

كل المثلثات المتساويات إذا كانت على قاعدة واحدة، في جهة واحدة فإنها بين خطين متوازيين.



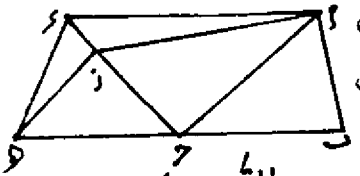
مثاله: أن مثلثي أ ب جـ، د ب جـ متساويان. وهما على قاعدة واحدة، وهي ب جـ؛ وبين خطي ب جـ، أ د. فأقول أن أ د موازٍ لخط ب جـ.

برهانه: إنه إن لم يكن فإنا نخرج من نقطة أ خطاً آخر موازياً لخط ب جـ، غير خط أ د، فلنخرجه، ولننزل أنه خط أ هـ. ونخرج خط جـ هـ.

فلأن مثلثي أ ب جـ، ب جـ هـ على قاعدة واحدة وبين خطين متوازيين، وهما خطا ب جـ، أ هـ، فببرهان ١/٢٧ فإن مثلث أ ب جـ مساوٍ لمثلث ب جـ هـ. لكن مثلث أ ب جـ مثل مثلث ب جـ د. والمساوية لشيء واحد فهي متساوية فمثلث ب جـ هـ مثل مثلث ب جـ د: الأصغر مثل الأعظم. هذا خلف

غير ممكن. فليس يمكن أن يخرج من نقطة أ خط موازٍ لخط ب جـ دون خط أ د. وكذلك لا يمكن أن يخرج من نقطة أ خط يوازي أ جـ فوق خط أ د. وذلك ما أردنا أن نبين.

[المبرهنة ٤٠/ ١]
الشكل الأربعون من المقالة الأولى



كل المثلثات المتساويات إذا كانت على قواعد متساوية، من خط واحد مستقيم، وبين خطين، فإن الخطين متوازيان.

مثاله أن مثلثي أ ب جـ، د جـ هـ متساويان، وعلى قاعدتين متساويتين، وهما ب جـ، جـ هـ، من خط واحد، وهو ب هـ؛ وبين خطي أ د، ب هـ. فأقول أن خط أ د موازٍ لخط ب هـ.

برهانه: أنه إن أمكن أن نخرج من نقطة أ خطاً موازياً لخط ب هـ، غير خط أ د، فلنخرج. وننزل أنه خط أ ز. فخط أ ز موازٍ لخط ب هـ. فمثلثا أ ب جـ، جـ ز هـ على قاعدتي ب جـ، جـ هـ المتساويتين، وبين خطي ب هـ، أ ز المتوازيين. فببرهان ١/٣٨ يكون مثلث أ ب جـ مساوياً لمثلث جـ ز هـ.

لكن فرضنا مثلث أ ب جـ مساوياً لمثلث جـ د هـ. والمساوية لشيء واحد فهي متساوية. فمثلث جـ د هـ مثل مثلث جـ ز هـ: الأعظم مثل الأصغر. هذا خلف غير ممكن.

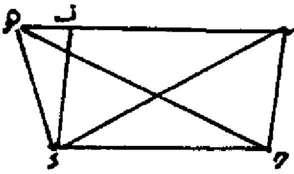
فقد تبين أنه ليس يمكن أن نخرج من نقطة أ خطاً موازياً لخط ب هـ غير خط أ د.

وليس يمكن أن نخرج أيضاً فوق خط أ د خطاً يوازي خط ب هـ. وذلك ما أردنا أن نبين.

[المبرهنة ١/٤١]

الشكل الحادي والأربعون من المقالة الأولى

كل سطح متوازي الأضلاع، قاعدته قاعدة مثلث، وهما بين خطين متوازيين، فإن السطح المتوازي الأضلاع ضعف المثلث.



شكل ١/٨٥

مثاله أن سطح أ ب جـ د متوازي الأضلاع [٢٢ ب] وقاعدته جـ د؛ وهي أيضاً قاعدة مثلث جـ د هـ؛ وهما بين خطي جـ د، أ هـ المتوازيين. فأقول أن سطح أ ب جـ د ضعف مثلث جـ د هـ.

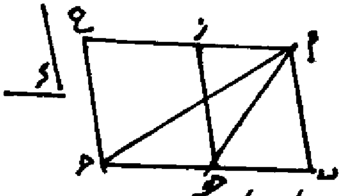
برهانه أنا نخرج قطر أ د. فمن البين، بحسب برهان ١/٣٤ أن القطر يقطع سطح أ ب جـ د بنصفين. فسطح أ ب جـ د ضعف مثلث أ جـ د. لكن مثلثي أ جـ د، جـ د هـ على قاعدة واحدة، وهي قاعدة جـ د، وبين خطين متوازيين، وهما خطا جـ د، أ هـ. فببرهان ١/٣٧ يكون مثلث جـ د هـ مثل مثلث أ جـ د.

وقد تبين أن سطح أ ب جـ د ضعف مثلث أ جـ د. فسطح أ ب جـ د ضعف مثلث جـ د هـ.

فقد تبين أن كل سطح متوازي الأضلاع قاعدته قاعدة مثلث، وهما بين خطين متوازيين، فإن المتوازي ضعف المثلث. وذلك ما أردنا أن نبين.

[المبرهنة ١/٤٢]

الشكل الثاني والأربعون من المقالة الأولى



الشكل ١/٨٦

نريد أن نبين كيف نعمل سطحاً متوازي الأضلاع مساوية زاويته لزاوية معلومة، ومساوياً لمثلث معلوم.

فلتكن الزاوية المعلومة زاوية د، والمثلث المعلوم مثلث أ ب جـ. ونريد أن نعمل سطحاً متوازي ألأضلاع مساوية زاويته لزاوية د، ومساوياً لمثلث أ ب جـ. فنقصد إلى أحد أضلاع المثلث فنقسمه بنصفين، بحسب برهان ١٠ / ١. فننزل أن الضلع الذي نقسمه بنصفين: ضلع ب جـ، على نقطة هـ. ونخرج خط أ هـ. ونعمل على نقطة هـ، من خط جـ هـ، زاوية مساوية د، بحسب برهان ٢٣ / ١، ولتكن زاوية جـ هـ ز. ونخرج من نقطة جـ خطاً موازياً لخط هـ ز، ومن نقطة أ خطاً موازياً لخط ب جـ، بحسب برهان ٣١ / ١، وليكن خط أ ز ح.

فلأن مثلثي أ ب هـ، أ هـ جـ على قاعدتين متساويتين، وهما قاعدتا ب هـ، هـ جـ، وإرتفاعهما واحد، وهما بين خطين متوازيين، وهما ب جـ، أ ح فإنه بحسب برهان ١/٣٨ يكون مثلث أ ب هـ مثل مثلث أ هـ جـ. فمثلث أ ب جـ ضعف مثلث أ هـ جـ.

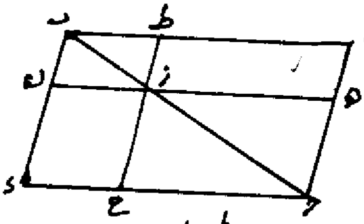
لكن سطح جـ هـ ز ح متوازي الأضلاع، وقاعدته، أعني هـ جـ، قاعدة مثلث أ هـ جـ، وهما بين خطين متوازيين: ب جـ، أ ح. فبحسب برهان ١/٤١ يكون سطح جـ هـ ز ح ضعف مثلث أ جـ هـ.

وقد كنا بينا أن مثلث أ ب جـ ضعف أ جـ هـ. والتي هي أضعاف لشيء واحد فهي متساوية. فمتوازي جـ هـ ز ح مساوٍ لمثلث أ ب جـ.

فقد عملنا سطح جـ هـ ز ح متوازي الأضلاع مساوياً لمثلث أ ب جـ المعلوم، ومساوية زاويته، أعني جـ هـ ز، لزاوية د المعلومة. وذلك ما أردنا أن نبين.

[المبرهنة ٤٣/ ١]

الشكل الثالث والأربعون من المقالة الأولى



الشكل/١/٨٧

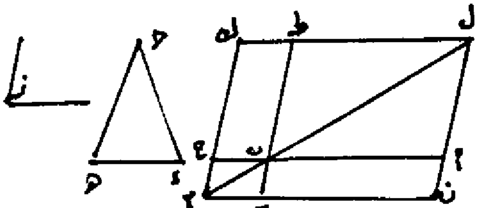
كل سطح متــوازي الأضــلاع على قطره سطحــان متــوازيا الأضــلاع، فإن الســطحين المتممين اللذين عن جنبتي القطر متساويان.

مثاله: أن سطح أ ب جـ د متوازي الأضلاع، وقطره ب جـ، وعن جنبتي قطره سطحا أ ز، ز د يتممان السطح فأقول إنهما متساويان.

برهـانه: أن سطح أ ب جـ د متوازي الأضلاع، وقطره ب جـ؛ فببرهان ١/٣١ فإن قطره يقسمـه بنصفين، وكذلك كل واحد من قطري جـ ز، ز ب يقسمان السطحين بنصفين. فمثلث هـ ز جـ مساوٍ لمثلث جـ ز ح؛ ومثلث ط ب ز مسـاوٍ لمثلث ب ك ز. فمجموع مثلثي هـ ز جـ، ط ب ز [٢٣ أ] مثل مجموع مثلثي ز ح جـ، ب ك ز. [وكذلك مثلث أ ب جـ مثل مثلث ب جـ د] فإذا أسقطنا مجموع مثلثي هـ ز جـ، ط ب ز من مثلث أ ب جـ؛ ومجموع مثلثي جـ ح ز، ب ك ز من مثلث ب د جـ، بقي سطح أ ز مثل سطح ز د ـ المتممان. وذلك ما أردنا أن نبين.

[المبرهنة ٤٤/ ١]

الشكل الرابع والأربعون من المقالة الأولى



الشكل ١/٨٨

نريد أن نبين كيف نعمل على خط مستقيم معلوم سطحاً متوازي الأضــلاع مسـاوياً لمثلث معلوم، ومساوية زاويته لزاوية معلومة.

فنجعل الخط المعلوم خط أ ب، والمثلث المعلوم مثلث جـ د هـ، والزاوية المعلومة زاوية ز. ونريد أن نبين كيف نعمل على خط أ ب سطحاً متوازي الأضلاع مساوياً لمثلث جـ د هـ، ومساوية زاويته لزاوية ز.

فنخرج خط أ ب على إستقامة. فننزل إنا قد أخرجناه إلى نقطة ح. ونجعل ب ح مثل نصف د هـ، الذي هو قاعدة مثلث جـ د هـ. ونعمل عليه سطحاً متوازي الأضلاع مساوياً لمثلث جـ د هـ، وهو سطح ب ط ك ح، ومساوية زاوية ب ح ك منه لزاوية ز؛ وذلك بحسب برهان ١/٤٢. ونخرج خط ط ك على إستقامة إلى نقطة ل، ونخرج من نقطة أ خطاً موازياً لخط ب ط، ببرهان ١/٣١؛ وننزل أنه قد إلتقى مع خط ك ط ل على نقطة ل. ونصل بين نقطتي ل، ب. ونخرج خطي ل ب، ك ح على إستقامة، فهما يلتقيان لأن خطي ك ح، أ ل متوازيان، وقد وقع عليهما خط ل ك. فبحسب برهان ١/٢٩ فإن مجموع الزاويتين الداخلتين اللتين في جهة واحدة: مثل مجموع زاويتين قائمتين. فمجموع زاويتي ل ك م، ك ل م أصغر من مجموع زاويتين قائمتين. فبحسب ما بين أغانيس ببرهان الأشكال المتقدمة، وبحسب ما قدم أوقليدس في المصادرة، فإن خطي ك ح، ل ب إذا أخرجا التقيا.

فلننزل أنهما التقيا على نقطة م. ونخرج من نقطة م خطاً موازياً لخط ك ل، ببرهان ١/٣١، وليكن خط م ن. ونخرج ل أ على إستقامة؛ وننزل أنه قد التقى مع خط م ن على نقطة ن. ونخرج أيضاً خط ط ب على إستقامة، ولينته إلى خط م ن على نقطة س.

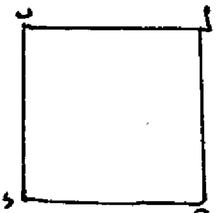
فسطح ل م متوازي الأضلاع، وقطره ل م، وعلى قطره سطحا أ ط، س ح متوازيا الأضلاع يقطعهما القطر، وعن جنبتي القطر سطحان متوازيان يتممان السطح، وهما سطحا ن ب، ب ك. فبحسب برهان ١/٤٣ فإن المتممين متساويان، أعني أن سطح ن ب مثل سطح ب ك. وسطح ب ك عملناه مثل مثلث جـ د هـ. فسطح ن ب مساوٍ لمثلث جـ د هـ.

وكنا عملنا زاوية ب ح ك مثل زاوية زَ. لكن زاوية ب ح ك مساوية لزاوية ب أ ن. فزاوية ب أ ن مثل زاوية ز.

فقد عملنا على خط أ ب المستقيم سطح أ س المتوازي الأضلاع مساوياً لمثلث جـ د هـ المفروض، ومساوية زاويته لزاوية ز. وذلك ما أردنا أن نبين.

[المبرهنة ٤٥/ ١ تقابل ٤٦/ ١ عند هيث*]

الشكل الخامس والأربعون من المقالة الأولى



الشكل ١/٨٩

نريد أن نبين كيف نعمـــل على خط مستقيم معلوم سطحـاً مربعاً قائم الزوايا فليكن الخط المفروض أ ب. فنخرج من نقطة أ خطاً على زاوية قائمة مساوياً لخط أ ب، كما بين ببرهان الشكل المضاف إلى ١١/ ١، وليكن خط أ جـ. ونخرج من نقطة جـ خطاً موازياً لخط أ ب، ببرهان ٣١/ ١. وبهذا العمل نخرج خط ب د موازياً لخط أ جـ، يلقى خط جـ د على نقطة د. فسطح أ ب جـ د متوازي الأضلاع.

فببرهان ٣٤/ ١ فإن السطوح المتوازية [٢٣ ب] الأضلاع: كل ضلعين منها يتقابلان وكل زاويتين تتقابلان فهما متساويان. فضلع ب د مثل ضلع أ جـ. وكنا أخرجنا ضلع أ جـ مثل ضلع أ ب. فضلع ب د مثل ضلع أ ب. وضلع جـ د مثل ضلع أ ب. فالأضلاع الأربعة متساوية.

وزاوية د مثل زاوية أ. وزاوية أ كنا جعلناها قائمة. فزاوية د قائمة.

وزاوية ب مثل زاوية جـ. وعملنا زاوية جـ قائمة. فزاوية ب قائمة. فالزوايا الأربع كل واحدة منها قائمة فسطح أ ب جـ د متساوي الأضلاع قائم الزوايا.

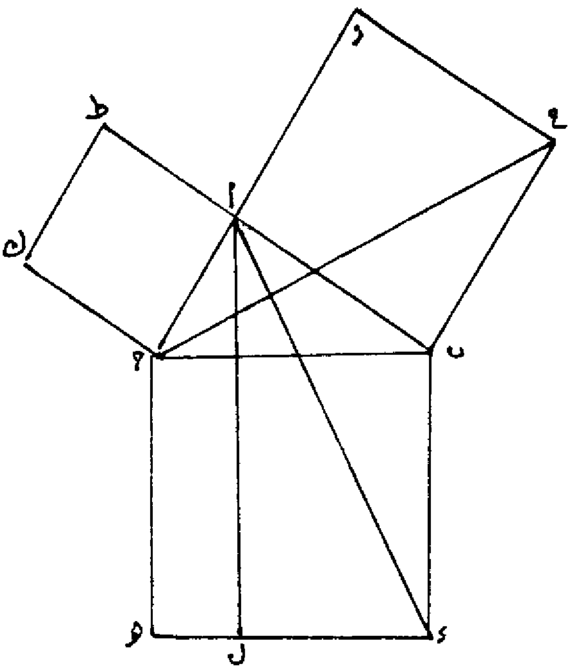
فقد عملنا على خط أ ب سطحاً مربعاً قائم الزوايا.

★ القضية (المبـرهنة) ٤٥ عند هيث تقتضي رسم متوازي أضلاع بزاوية مفروضة يكافىء شكلاً مستقيم الأضلاع مفروضاً. ولم يذكرها الحجاج ولا النيريزي ولا النسوي.

[المبرهنة ١/٤٦ تقابل ١/٤٧ عند هيث]

الشكل السادس والأربعون من المقالة الأولى

كل مثلث قائم الزاوية فإن المربع الكائن من الضلع الذي يوتر الزاوية القائمة مساوٍ لمجموع المربعين الكائنين من الضلعين الباقيين.



مثاله: أن زاوية ب أ جـ من مثلث أ ب جـ قائمة. فأقول أن المربع الكائن من ضلع ب جـ، الموتر لزاوية ب أ جـ القائمة: مساوٍ لمجموع المربعين الكائنين من ضلعي أ ب، أ جـ، وهما الضلعان المحيطان بالزاوية القائمة.

برهانه: أنا نعمل على خط ب جـ سطحاً مربعاً قائم الزوايا، كما بينا عمله ببرهان ١/٤٥. وليكن مربع ب جـ د هـ.

ونعمل أيضاً على خطي أ ب، أ جـ مربعي أ ب ز ح، أ ط ك جـ، قائمي الزوايا. ونخرج من نقطة أ خط أ ل موازياً لخطي ب د، جـ هـ، ببرهان ١/٣١. ونخرج خطي أ د، جـ ح.

فلأنـه قد أخـرج من نقطة أ، من خط ب أ: خطا أ جـ، أ ز في جهتين مختلفتين، فحدث عن جنبتيه زاويتا ب أ جـ، ب أ ز، وكل واحدة منهما قائمة، فمن البين بحسب برهان ١/١٤ أن خطي أ جـ، أ ز قد إتصلا على إستقامة، فصارا خطاً واحداً.

ولأن زاوية أ ب ح القائمة مساوية لزاوية جـ ب د القائمة، نأخذ زاوية أ ب جـ المشتركة، فزاوية جـ ب ح بأسرها مساوية لزاوية أ ب د بأسرها. وضلع ب ح مساوٍ لضلع أ ب. وضلع ب د مساوٍ لضلع ب جـ. فضلعا ح ب، ح جـ مساويان لضلعي أ ب، ب د؛ وزاوية أ ب د مساوية لزاوية جـ ب ح. فبحسب برهان ١/٤ يكون مثلث جـ ب ح مساوياً لمثلث أ ب د.

ولأن سطح أ ب ز ح متوازي الأضلاع، وقاعدته قاعدة مثلث جـ ب ح، وهي خط ح ب؛ وهمـا بين خطي ز جـ، ح ب المتوازيين، فبحسب برهان ١/٤١ يكون سطح أ ب ز ح ضعف مثلث جـ ب ح.

وأيضاً فإن سطح ب د م ل متوازي الأضلاع، وقاعدته قاعدة مثلث أ ب د، وهي خط ب د؛ وهما بين خطي أ ل، ب د المتوازيين. فببرهان ١/٤١ يكون سطح ب د م ل ضعف مثلث أ ب د.

وقد كنا بينا أن مثلث أ ب د مساوٍ لمثلث جـ ب ح، وأن سطح أ ب ز ح ضعفه. والتي هي أضعاف لشيء واحد متساوية. فمربع أ ب ز ح مساوٍ لسطح ب د م ل.

ويمثل هذا البرهان والاستشهاد نبين أن سطح جـ هـ م ل مساوٍ لمربع أ جـ ط ك.

فسطح ب جـ د هـ بأسره مساوٍ لمجموع مربعي أ ب ز ح، أ جـ ط ك.

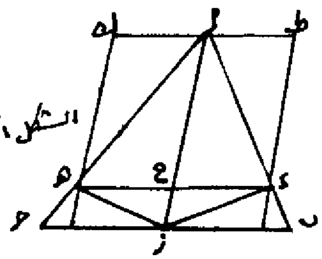
فقد تبين أن المربع الكائن من ضلع ب جـ الموتر لزاوية ب أ جـ القائمة: مساوٍ لمجموع المربعين الكائنين من ضلعي أ ب، أ جـ. وذلك ما أردنا أن نبين.

[النيريزي]:

زيادة في هذا الشكل لايرن

نريد أن نبين أن الخطوط الثلاثة، أعني اللذين يخرجان من زاويتي

المربعين [٢٤ أ] إلى زاويتي المثلث القائم الزاوية، والذي يخرج من زاويته القائمة موازياً لضلعي المربع: تتقاطع على نقطة واحدة.


الشكل ٩١/١

فنوطيء لذلك بثلاثة معان:

الأول منها أنه إذا أخرج في مثلث أ ب جـ خط د هـ موازياً لقاعدته ب جـ؛ وقَسَم ب جـ بنصفين خط أ ح ز، فإن خط د ح أيضاً يكون مثل خط ح هـ. فنخرج على نقطة أ خط ط ك موازياً لقاعدة ب جـ، كما بين ببرهان ١/٣١. وكذلك نجيز على نقطتي د، هـ خطي ك هـ م، ط د ل يوازيان خط أ ح ز. ونصل د ز، هـ ز.

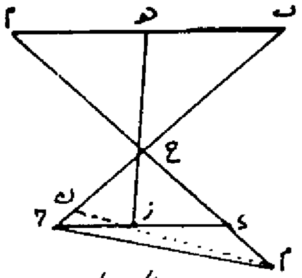
فمثلثا أ ب ز، أ ز جـ متساويان لأنهما على قاعدتين متساويتين، وارتفاعهما على نقطة واحدة، هي نقطة أ. وذلك بحسب برهان ١/٣٨.

وأيضاً بحسب هذا البرهان، لأن مثلثي ب د ز، ز هـ جـ على قاعدتي ب ز، ز جـ المتساويتين، وبين خطي ب جـ، د هـ المتوازيين، فإن مثلث ب د ز مساوٍ لمثلث ز هـ جـ. فإذا أسقطناهما من مثلثي أ ب ز، أ ز جـ المتساويين، بقي مثلث أ د ز مثل مثلث أ هـ ز. ولأن قاعدة كل واحد من هذين المثلثين المتساويين خط أ ز، وخط أ ز قاعدة لسطحي أ ل، أ م المتوازيين، فإن كل واحد من سطحي أ ل، أ م المتوازيين مثلا مثلثه، ببرهان ١/٤١. والأشياء التي هي مثلان لشيء واحد، فهي متساوية. فمتوازي أ ل مثل متوازي أ م.

وهما على قاعدتي ل ز، ز م، وبين خطين متوازيين. فبحسب عكس برهان ١/٣٦، فان قاعدة ل ز مثل قاعدة ز م. وبحسب برهان ١/٣٤ يكون خط د ح مثل خط هـ ح. وذلك ما أردنا أن نبين.

والمعنى الثاني انه اذا أجيز فيما بين خطي أ ب ، جـ د، وهما متوازيان: ثلاثة خطوط تتقاطع على نقطة واحدة، كخطوط ب جـ، أ د، هـ ز تتقاطع على

نقطة ح، فتصير خط جـ ز مساوياً لخط ز د، فإن خط أ هـ يكون مثل خط هـ ب.



(الشكل ١/٩٢)

فلنوطىء لذلك أنه متى كان خط أ ح أعظم من خط ح د، فان خط ب ح يكون أعظم من خط ح جـ؛ وان كان مساوياً له، كان مساوياً له؛ وان كان أصغر منه، كان أصغر منه.

فلننزل أن أ ح أعظم من ح د. فأقول ان ب ح أعظم من ح جـ.

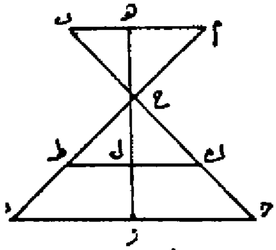
فإن لم يكن أعظم منه فإنه مثله، أو أصغر منه. فلننزل أنه مثله. ونخرج ح د، إلى م حتى يكون ح م مثل أ ح. فضلعا أ ح، ح ب مثل ضلعي م ح، ح جـ؛ وزاوية أ ح ب مساوية لزاوية جـ ح م، وذلك ببرهان ١/١٥. فبحسب برهان ١/٤ فإن قاعدة جـ م مثل قاعدة أ ب، وسائر الزوايا مثل سائر الزوايا. فزاوية ح جـ م مساوية لزاوية أ ب ح. فببرهان ١/٢٧ فإن خط أ ب مواز لخط جـ م. فيكون بحسب ١/٣٠ خط جـ م موازياً لخط جـ د، وهما متقاطعان. هذا خلف. فليس خط ب ح مساوياً لخط ح جـ.

فلننزل أنه أصغر منه. ونفصل ح ك مساوياً لخط ب ح. ونصل ك م. فنبين بمثل ذلك ان ك م موازٍ لخط ب أ. وذلك خلف، اذ ان ب أ موازٍ لخط د جـ. فليس اذن ب ح أصغر من ح جـ. فهو إذن أعظم منه.

وكذلك نبين أنه متى كان أ ح مثل ح د، كان ب ح مثل ح جـ؛ ومتى كان أصغر منه، كان أصغر منه.

فاذا قد وطىء ذلك، فلنبين الآن ان جـ ز متى كان مثل ز د، فان أ هـ يكون مثل هـ ب.

فلننزل أن أ ح أصغر من ح د. فمن البين لما وطأناه أن ب ح أصغر من ح جـ. فنفصل ح ط مثل ح أ، ح ك مثل ح ب، ونصل [٢٤ ب] ط ل ك.



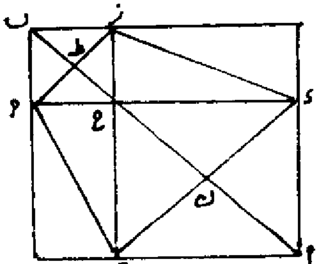
الشكل ١/٩٢

فخطا أ ح، ح ب مثل خطي ك ح، ح ط؛ وزاوية أ ح ب مساوية لزاوية ط ح ك؛ وقاعدة أ ب مساوية لقاعدة ك ط؛ وسائر الزوايا مثل سائر الزوايا. فزاوية ح ك ل مثل زاوية هـ ب ح؛ وزاوية هـ ح ب مثل زاوية ك ح ل؛ وضلع ب ح مثل ضلع ح ك. فببرهان ١/٢٦ يكون ضلع ك ل مثل ضلع ب هـ.

وبهذا البرهان والاستشهاد نبين ان خط أ هـ مثل خط ط ل.

فلأن زاوية ح ك ط مساوية لزاوية أ ب جـ، فببرهان ١/٢٩ يكون خط أ ب موازياً لخط ط ك. لكن خط أ ب موازٍ لخط جـ د. فببرهان ١/٣٠ يكون خط ك ط موازياً لخط جـ د. ولما بينا في المعنى الأول: إذا كان جـ ز مثل ز د، فإن ك ل مثل ك ط؛ فخط أ هـ إذن مثل خط هـ ب.

وكذلك نبين ما قصدنا له ان كان أ ح مثل ح د، أو كان أعظم منه.



الشكل ١/٩٤

والمعنى الثالث: أنه ان كان في سطح أ ب المتوازي الأضلاع: سطحا أ هـ ح د، ح جـ ب ز متوازيي الأضلاع، وكان سطح د ز مثل سطح هـ جـ، ووصل خط أ ح، وأخرج على الاستقامة: لقي نقطة ب.

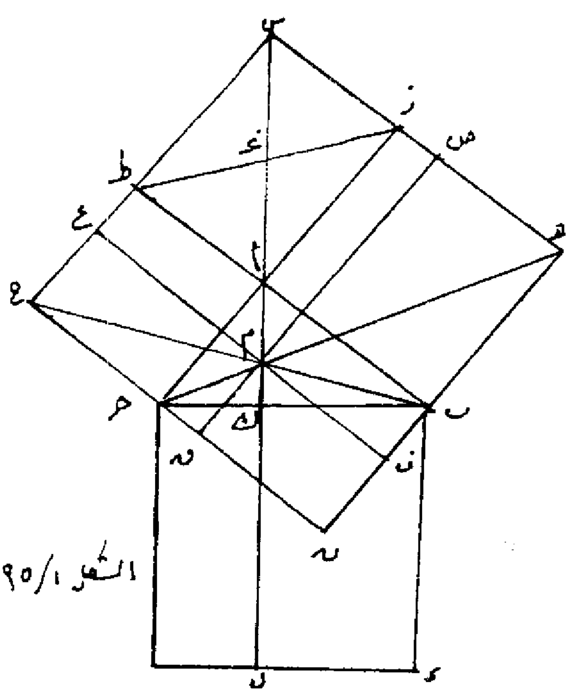
فلنوصل خطوط هـ ك د، هـ جـ، د ز، جـ ط ز. ولنخرج أ ح إلى ط على الاستقامة. وليوصل ط ب. فأقول ان أ ح ط ب مستقيم، أعني ان خط أ ط قد اتصل بخط ط ب على استقامة.

برهانه: ان سطح د ز وضع مساوياً لسطح هـ جـ. فيكون مثلث د ح ز مثل مثلث هـ جـ ح. ونأخذ مثلث ح جـ ز مشتركاً. فيكون مثلث د جـ ز مثل مثلث هـ جـ ز. وهما على قاعدة واحدة، وهي قاعدة جـ ز؛ وبين خطي جـ ز، د هـ. فببرهان ١/٣٩ فإن خط جـ ز موازٍ لخط د هـ.

وخط هـ ك مساوٍ لخط ك د. وذلك بيِّن لأن مثلث أ هـ ك مثل مثلث د ك ح؛ وذلك ببرهان ٣٤ مع برهان ٢٩ ومع برهان ١/٢٦.

وبحسب المعنى الثاني من هذه المعاني، فإن خط جـ ط مثل خط ط ز. لكن خط ب ز مثل خط جـ ح، وذلك ببرهان ١/٣٤. فخطا ط جـ، جـ ح مثل خطي ب ز، ز ط. وزاوية ب ز ط مثل زاوية ح جـ ط؛ وذلك ببرهان ١/٤. فان قاعدة ب ط مثل قاعدة ح ط؛ وزاوية ب ط ز مساوية لزاوية جـ ط ح؛ ونأخذ زاوية ح ط ز مشتركة. فمجموع زاويتي جـ ط ح، ح ط ز مثل مجموع زاويتي ب ط ز، ز ط ح. لكن مجموع زاويتي جـ ط ح، ز ط ح مثل مجموع زاويتين قائمتين. فمجموع زاويتي ب ط ز، ز ط ح مثل مجموع زاويتين قائمتين. فقد خرج من نقطة ط من خط ز ط، في جهتين مختلفتين، خطان، وهما خطا أ ط، ط ب، فصيرا الزاويتين اللتين عن جنبتيه معادلتين لزاويتين قائمتين. فخطا أ ط، ط ب قد اتصلا على استقامة، وصارا خطاً واحداً. وذلك ما أردنا ان نبين.

فاذ قد قدمنا هذه المعاني، فلنتنزل أن مثلث أ ب جـ: زاوية أ منه قائمة، وقد عمل على ب جـ مربع جـ د، وعلى أ ب مربع أ ب هـ ز، وعلى أ جـ مربع أ جـ ح ط؛ وأخرج من نقطة أ خط أ ك ل موازياً لخط ب د، ووصل خط هـ جـ فقاطع خط أ ل على نقطة م. ووصل خط ح م. ثم وصلت نقطة م بنقطة ب. فأقول ان خط م ب على استقامة خط ح م.



الشكل ١/٩٥

فلنخرج خطي هـ ز، ح ط على الاستقامة حتى يلتقيا على نقطة س. ويجاز على نقطة م خط ع م ف موازياً لخط س هـ [٢٥ أ] وخط ص م ق موازياً لخط ز جـ، كما بينٌ إخراجه ببرهان ٣٣ / ١. ويوصل خطا س أ، ط ز.

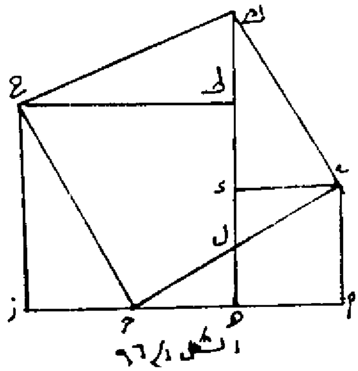
فخط ط أ مثل خط أ جـ. وخط ز أ مثل خط أ ب. فخطا أ ب، أ جـ مثل خطي أ ز، أ ط. وزاوية ب أ جـ مثل زاوية ز أ ط. فقاعدة ب جـ مثل قاعدة ط ز؛ وذلك ببرهان ١/٤؛ وسائر الزوايا مثل سائر الزوايا. فزاوية أ ب جـ مثل زاوية ط ز أ، لكن زاوية أ ب جـ مثل زاوية جـ أ ك، لأن أ ك عمود في مثلث أ ب جـ القائم الزاوية. فزاوية ط ز أ مثل زاوية جـ أ ك. وزاوية ط ز أ مثل زاوية س أ ز، لأنه قد أخرج في متوازي س أ [القائم الزوايا] قطرا أ س، ط ز يتقاطعان على نقطة غـ .فيصير ز غـ مساوياً لخط أ غـ .فزاوية س أ ز مثل زاوية جـ أ ك. ونأخذ زاوية س أ جـ مشتركة. فمجموع زاويتي س أ ز، س أ جـ مثل مجموع زاويتي م أ جـ، جـ أ س. لكن بحسب برهان ١/١٣ فإن مجموع زاويتي س أ ز، س أ جـ مثل مجموع زاويتين قائمتين. فمجموع زاويتي س أ جـ، جـ أ م مثل مجموع زاويتين قائمتين. فحسب برهان ١/١٤ فان خط س أ م مستقيم. وهو قطر لمتوازي س م.

وبحسب برهان ١/٤٣ فان متمم أ ص مساوٍ لمتمم أ ع. ونأخذ سطح أ م مشتركاً. فسطح م ط مثل سطح م ز.

وأيضاً فان سطح ز ن متوازي الأضلاع، وقطره هـ م جـ، وعن جنبتيه سطحا ز م، م ن المتوازيان. وهما المتممان. فمتمم ز م مثل متمم م ن. فسطح م ن اذن مساوٍ لسطح م ط، فحسب ما برهن في المعنى الثالث من المعاني الموطئة لهذا الشكل، يكون خط ب م ح مستقيماً [وقطرا للمتوازي ن ط] وذلك ما أردنا ان نبين.

زيادة في الشكل السادس والأربعين
لثابت بن قرة الحراني الصابئي

كل مثلث قائم الزاوية فإن المربع الكائن من الضلع الذي يوتر الزاوية القائمة مثل مجموع المربعين الكائنين من الضلعين اللذين يحيطان بالزاوية القائمة.



مثاله ان مثلث أ ب جـ، زاوية ب أ جـ منه قائمة. فأقول ان المربع الكائن من ضلع ب جـ مساوٍ لمجموع المربعين الكائنين من ضلعي أ ب، أ جـ.

برهانه: انا نعمل على خط أ ب مربع أ د، ونخرج خط أ جـ إلى نقطة ز، وليكن خط هـ ز مثل خط أ جـ. ونعمل على خط هـ ز مربع هـ ح. ونخرج د ط ك مثل أ جـ.

فلأن أ جـ أخرج مثل هـ ز، فاذا أسقطنا هـ جـ المشترك، بقي أ هـ مثل جـ ز. لكن أ هـ مثل أ ب. فخط أ ب مثل خط جـ ز.

وأيضاً د ك أخرج مثل هـ ط. فنلقي د ط المشترك. فيبقى هـ د مثل ط ك. وخط هـ د مثل خط أ ب. فالأربعة الأضلاع من الأربعة المثلثات متساوية، أعني أ ب، جـ ز، ب د، ط ك.

وكذلك نبين ان الأربعة الأضلاع الباقية متساوية، أعني أ جـ، ز ح، د ك، ط ح: لأن أ جـ اخرج مثل هـ ز، هـ ز مثل ط ح؛ هـ ح مربع. فخط أ جـ إذن مثل خط ط ح. وخط د ك أخرج أيضاً مثل خط أ جـ. وخط ز ح قد تبين انه مثل هـ ز. وخط هـ ز أخرج مثل خط هـ ط. [٢٥ ب] فقد تبين ان خطوط أ جـ، ز ح، د ك، ح ط أيضاً متساوية.

وقد تبين ان زوايا المثلثات الأربعة قوائم، أعني زوايا أ، ز، د، ط. فبحسب برهان ١/٤ تكون الأوتار التي توتر الزوايا المتساوية، وهي القوائم،

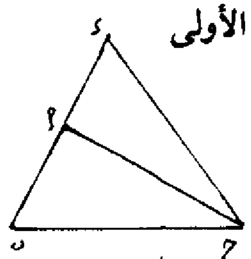
متساوية. فأوتار ب جـ، جـ ح، ب ك، ك ح متساوية. وزاوية د ب ك من مثلث ك ب د مساوية لزاوية أ ب جـ من مثلث أ ب جـ. ونجعل زاوية ل ب د مشتركة. فجميع زاوية أ ب د مثل زاوية جـ ب ك. لكن زاوية أ ب د قائمة. فزاوية جـ ب ك إذن قائمة. وكذلك زاوية جـ ح ك قائمة. وسطح ب ح متساوي الأضلاع. فزاويتا ب ك ح، ب جـ ح كل واحدة منهما قائمة. فسطح ب ح متساوي الأضلاع قائم الزوايا.

وقد بينا ان المثلثات الأربعة متساويات: مثلثا أ ب جـ، جـ ز ح مثل مثلثي ب د ك، ط ك ح، فاذا جعلنا منحرف جـ ل ط ح ومثلث ب د ل مشتركين، كان جميع مربع ب ح مساوياً لمجموع مربعي أ د، هـ ح. لكن مربع أ د هو الكائن من ضلع أ ب؛ ومربع هـ ح هو الكائن من خط هـ ز، وخط هـ ز مساوٍ لضلع أ جـ؛ فمربع هـ ح كائن من ضلع أ جـ. فمجموع مربعي أ د، هـ ح هما الكائنان من ضلعي أ ب، أ جـ. ومربع ب ح كائن من ضلع ب جـ الموتر للزاوية القائمة.

فقد تبين ان مجموع المربعين الكائنين من ضلعي أ ب، أ جـ مساوٍ للمربع الكائن من ضلع ب جـ. وذلك ما أردنا أن نبين.

[المبرهنة ٤٧/ ١ تقابل ٤٨/ ١ عند هيث]

الشكل السابع والأربعون من المقالة الأولى



الشكل ١/ ٩٧

كل مثلث يكون مجموع مربعي ضلعين من أضلاعه مساوياً لمربع الضلع الثالث، فإن الزاوية التي يوترها الضلع الثالث قائمة.

مثاله: ان مربع ضلع ب جـ من مثلث أ ب جـ مساوٍ لمجموع مربعي ضلعي أ ب، أ جـ. فأقول ان زاوية ب أ جـ قائمة.

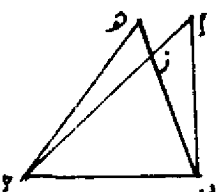
برهانه: انا نقيم على نقطة أ من خط جـ أ: عمود أ د مثل ضلع أ ب، كما

بين بالشكل المضاف إلى ١١/١.

فلأن أ د أخرجناه مثل أ ب، يكون المربع الكائن من خط أ د مثل المربع الكائن من خط أ ب. ونأخذ الخط الكائن من مربع أ جـ مشتركاً. فمجموع مربعي أ ب، أ جـ مثل مجموع مربعي أ جـ، أ د.

فلأن زاوية جـ أ د قائمة، فبحسب برهان ٤٦/١ يكون مجموع مربعي أ جـ، أ د مساوياً لمربع د جـ. فضلع ب جـ مثل ضلع د جـ. وضلع ب أ مثل ضلع أ د. ونأخذ ضلع أ جـ مشتركاً فضلعا أ ب، أ جـ مثل ضلعي أ د، أ جـ. وقاعدة د جـ مثل قاعدة ب جـ. فببرهان ٨/١ تكون زاوية ب أ جـ مساوية لزاوية جـ أ د. لكن زاوية جـ أ د قائمة. فزاوية ب أ جـ قائمة.

فقد تبين ان كل مثلث يكون مجموع المربعين الكائنين من ضلعيه اللذين يحيطان بالزاوية مثل مربع الضلع الثالث، فإن الزاوية التي يوترها الضلع الثالث تكون قائمة. وهذا ما أردنا ان نبين.



الشكل ٩٨/١

[النيريزي]: برهان لهذا الشكل لايرن:

قال ايرن: أقول ان الخط الذي يخرج من نقطة ب على خط ب جـ فيكون مربعه مع مربع ب جـ مساوياً لمربع الضلع الثالث، لا يكون غير خط أ ب على زاوية قائمة على أ جـ. فإن أمكن ان يكون غيره، فليس يخلو من ان يقع دونه أو وراءه. فلننزل أنه وقع دونه، كخط ب ز. فزاوية ب ز جـ أصغر من قائمة. وذلك بحسب برهان ١٧/١. فزاوية أ ز ب منفرجة وذلك بحسب برهان [٢٦ أ] ١٣/١. فزاوية ز أ ب حادة، وذلك بحسب برهان ١٧/١. فبحسب برهان ١٩/١ يكون ضلع أ ب أعظم من ضلع ب ز.

ونخرج ب ز على الاستقامة إلى نقطة هـ، حتى يكون خط ب ز هـ مثل خط ب أ. ونخرج خط هـ جـ. فمربع خط هـ ب، أعني مربع خط أ ب، مع مربع ب جـ: مثل مربع هـ جـ. وقد كان مثل مربع أ جـ. فخط أ جـ مثل خط

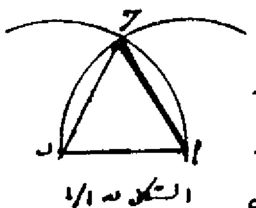
هـ جـ. وخط أ ب مثل خط هـ ب. فقد خرج من طرفي خط مستقيم: خطان مستقيمـان، في جهتين مختلفتين، والتقى طرفـاهمـا على نقـطة؛ وخرج من مخرجيهما خطان آخران مساويان لهما، في تلك الجهة، والتقى طرفاهما على غير تلك النقطة. فبحسب برهان ١/٧ يكون هذا السياق محالاً. وكذلك نسوق إلى المحال ان كان الخط يقع وراء خط أ ب. فخط أ ب اذن هو الذي على زاوية قائمة مع خط ب جـ. وذلك ما أردنا ان نبين.

تمت المقالة الأولى من كتاب اوقليدس

ج - مبرهنات النسوي
كتاب تجريد اوقليدس
المقالة الأولى
لعلي بن احمد النسوي

[المبرهنة ١/ ١ تقابل ١/ ١ عند الحجاج]

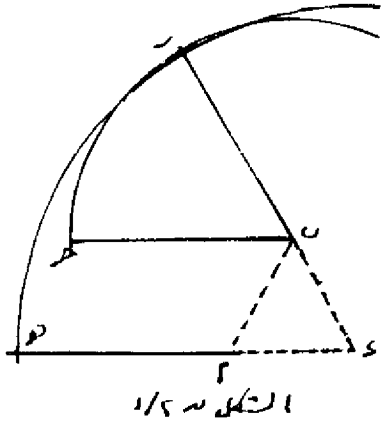
الشكل الأول



نريد ان نعمـل على خط أ ب المفروض مثلثاً متساوي الأضلاع: فنديرعلى مركز أ، وببعد أ ب: دائرة ب جـ هـ. وعلى مركز ب، وببعد ب أ: دائرة أ جـ د. ونخرج من نقطة جـ، وهو موضع التقاطع، خطي جـ أ، جـ ب. فأقول: ان مثلث أ جـ ب متساوي الأضلاع.

برهـانـه: ان خط أ جـ مثل أ ب لأنهما خرجا من المركز إلى المحيط. وكذلك بـ جـ مثل ب أ. فـَ أ جـ، ب جـ أيضاً متساويان. فمثلث أ ب جـ متساوي الأضلاع، وذلك ما اردنا أن نعمل.

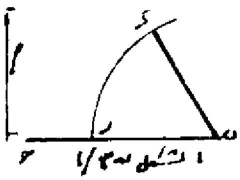
[المبرهنة ١/ ٢ تقابل ١/ ٢ عند الحجاج]



نريد أن نصل بنقطة أ المفروضة خطاً مثل خط ب جـ المفروض فنصل خط أ ب ونعمل عليه مثلث د أ ب المتساوي الأضلاع ونخرج خطي د أ، د ب إلى هـ، وإلى ر ونديرعلى مركز ب، وببعد ب جـ دائرة جـ ر ح، وعلى مركز د، وببعد د ر [٤ و] دائرة ط ر هـ. فأقول: إنا إذن وصلنا بنقطة أ خطاً مثل خط ب جـ، وهو أ هـ.

برهانه: فلأن ب جـ مثل ب ر، لأنهما خرجا من مركز دائرة جـ ر ح إلى محيطها، وَ د هـ مثل د ر أيضاً وَ د أ مثل د ب، لأن أ د ب متساوي الأضلاع، فاذا نقصناهما من د هـ، د ر، يبقى أ هـ مثل ب ر؛ وَب ر مثل ب جـ. فَـ أ هـ مساوٍ لِـ ب جـ. وذلك ما أردنا أن نعمل.

[المبرهنة ٣/ ١، تقابل ٣/ ١ عند الحجاج]

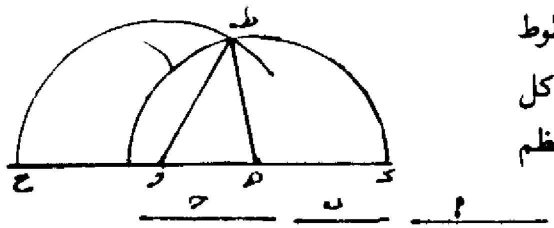


نريد أن نفصل من أطول خطين مفروضين مثل أقصرهما. كخط ب جـ الأطول، نريد أن نفصل منه مثل أ الأقصر. فنصل بنقطة ب مثل خط أ، وهو ب د، وندير على مركز ب، وببعد ب د دائرة د ر هـ. فخط ب ر مثل ب د، وَب د مثل أ. فَ ب ر مثل أ.

فقد فصلنا من ب جـ مثل أ، وهو ب ر؛ وذلك ما أردنا أن نعمل.

[المبرهنة ٤/ ١، تقابل ٢٢/ ١ عند الحجاج]

نريد أن نعمل مثلثاً من ثلاثة خطوط مساوية لخطوط أ، ب، جـ، على أن كل إثنين مجموعين منها أعظم من الباقي.

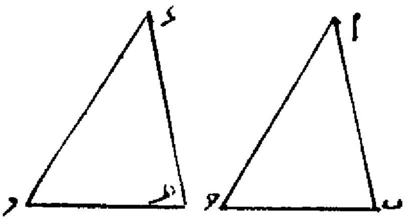


فلنفرض خطاً غير متناهٍ، في جهة. فنفصل منه مثل أ، وهو د هـ؛ ونفصل هـ و مثل ب، وَو ح مثل جـ. وندير على مركز هـ [٤ظ] وببعد هـ د دائرة د ط، وعلى مركز و، وببعد ح و دائرة ح ط، ونصل ط هـ، ط و. أقول: أن مثلث هـ ط و عمل من خطوط مساوية لخطوط أ، ب، جـ.

برهانه: فلأن د هـ مثل هـ ط، لأنهما خرجا من المركز إلى المحيط، وَد هـ مثل أ، فإن هـ ط مثل أ. وكذلك وح مثل و ط، وَوح مثل جـ، فَ و ط مثل جـ. وَهـ و جعلناه مثل ب. فأضلاع مثلث ط هـ و مساوية لخطوط أ، ب، جـ. وذلك ما أردنا أن نعمل.

[المبرهنة ٥/ ١، تقابل ٤/ ١ عند الحجاج]

اذا تساوت زاويتان من مثلثين، كزاويتي أ، د من مثلثي أ ب جـ، د هـ و، وتساوت الأضلاع المحيطة بهما، . كل ضلع ونظيره: أ ب لِـ د هـ، وَأ جـ لِـ د و، أقول: ان قاعدة ب جـ مساوية لقاعدة هـ و، وزاوية ب لزاوية هـ، وزاوية جـ لزاوية و، والمثلث للمثلث.

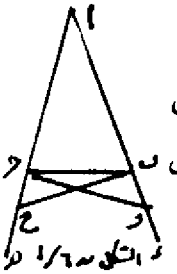


الشكل رقم ٥/ ١

برهانه: أنا نطبق مثلث أ ب جـ على مثلث د هـ و: بأن نركب ضلع أ ب على د هـ، فتقع نقطة أ [٥ و] على نقطة د، ونقطة ب على نقطة هـ، وتقع أ جـ على د و لأن زاويتي أ، د متساويتان، وتركب ب جـ على هـ و، فينطبق المثلث على المثلث، ولا يفضل منه شيء. فيكونان متساويين. وذلك ما أردنا أن نبين.

[المبرهنة ٦/ ١، تقابل ٥/ ١ عند الحجاج]

الزاويتان اللتان على قاعدة كل مثلث متساوي الساقين متساويتان. كمثلث أ ب جـ: متساوي الساقين: أ ب مثل أ جـ. أقول ان زاوية أ ب جـ مثل زاوية أ جـ ب.



الشكل رقم ٦/ ١

برهانه: أنا نخرج أ ب إلى د، أ جـ إلى هـ، ونفرض على ب د نقطة و، ونفصل من جـ هـ مثل ب و، وهو جـ ح. ونصل جـ و، ب ح.

فلأن و أ، أ جـ مساويان لِـ ح أ، أ ب وزاوية أ مشتركة، تكون قاعدة ب ح مثل قاعدة جـ و، وزاوية أ ب ح مثل زاوية أ جـ و، وزاوية و مثل زاوية ح، ومثلث أ ب ح مثل أ جـ و.

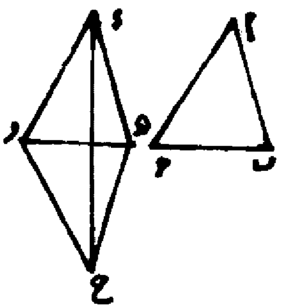
وايضاً فلأن ب و مثل جـ ح، جـ و مثل ح ب، وزاوية و مثل زاوية ح، وقاعدة ب جـ مشتركة، فزاوية و جـ ب تكون مثل زاوية ح ب جـ.

وقد بينا ان زاوية أ ب ح مثل زاوية أ جـ و. فاذا نقصنا منهما زاويتي و جـ ب، ح ب جـ، تبقى زاويتا أ ب جـ، أ جـ ب، اللتان على القاعدة: متساويتين. وذلك ما ارنا ان نبين.

وقد تبين من هذا ان كل مثلث متساوي الأضلاع فهو متساوي الزوايا.

[المبرهنة ٧/ ١، تقابل ٨/ ١ عند الحجاج]

اذا تساوت قاعدتان من مثلثين، كقاعدتي ب جـ، هـ و من مثلثي أ ب جـ، د هـ و، وساوت ضلع أ ب لضلع د هـ، أ جـ لِـ د و، أقول: ان زاوية أ مساوية لزاوية د.



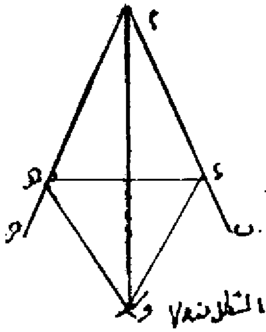
برهانه: أنا نطبق قاعدة ب جـ على قاعدة هـ و [٥ ظ] ونضع مثلث أ ب جـ في الجهة الأخرى، فيقع مثل مثلث هـ و ح، ونصل د ح.

فلأن هـ د مثل هـ ح، تكون زاوية هـ د ح مثل زاوية هـ ح د. وأيضاً د و مثل و ح، فزاوية و د ح مثل زاوية و ح د. فجميع زاوية د مثل جميع زاوية ح.

وزاوية ح مثل زاوية أ. فزاوية د مثل زاوية أ. وذلك ما أردنا أن نبين.

وقد يمكن ان نعمل زاوية على نقطة على خط، مساوية لزاوية مفروضة، بقوة هذا الشكل، والشكل الرابع.

[المبرهنة ٨/ ١، تقابل ٦/ ١ عند الحجاج]

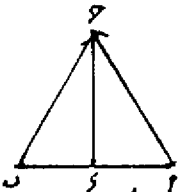


الشكل ن ١/٨

نريد ان نقسم زاوية ب أ جـ المفـروضـة : نصفين : فنفرض على أ ب نقطة د، ونفصل أ هـ مثل أ د، ونصل د هـ، ونعمل على د هـ مثلثاً متساوي الأضلاع .

برهانه : فلأن د أ مثل أ هـ، أ و مشترك، يكون د أ وَ أ و مثل هـ أ وَ أ و، وقاعدة دو مثل قاعدة هـ و فزاوية د أ. و مساوية لزاوية هـ أ و [٦ و]. وذلك ما أردنا أن نبين .

[المبرهنة ٩/ ١، تقابل ١٠/ ١ عند الحجاج]



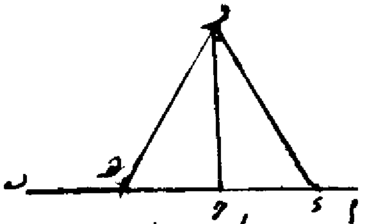
الشكل ن ١/٩

نريد أن نقسم خط أ ب المفـروص بنصفـين فنعمل عليه مثـلث أ جـ ب المتســاوي الأضــلاع، ونقسم زاوية أ جـ ب بنصفين، بخط جـ د. أقول: ان أ جـ مثل د ب .

برهـانـه: فلأن أ جـ مثـل جـ ب، جـ د مشترك، يكون أ جـ، جـ د مثل ب جـ، جـ د، وزاوية أ جـ د مثل زاوية ب جـ د، فقاعدة أ د مثل قاعدة د ب. وذلك ما أردنا أن نبين .

ومن هذا الشكل تبين ان كل مثلث متساوي الساقين [نخرج خطاً] يقسم الـزاوية التي يحيط بها السـاقـان المتسـاويان بنصفـين [فانه يقسم القاعدة أيضاً بنصفين] ويكون عموداً عليها .

[المبرهنة ١٠/ ١ تقابل ١١/ ١ عند الحجاج]



الشكل ن ١٠/١

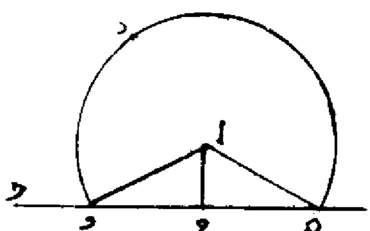
نريد أن نخرج من نقطة جـ المفروضة على خط أ ب المفروض خطاً يكون عموداً على أ ب.

فنفرض على أ جـ نقطة د كيفما كان، ونجعل جـ هـ مثل جـ د، ونعمل على د هـ مثلث د و هـ المتساوي الأضلاع، ونصل جـ و. أقول: ان جـ و عمود على أ ب.

برهانه: فلأن د جـ مثل جـ هـ، وَجـ و مشترك، يكون كلا هـ جـ وَجـ و [مثل د جـ وَ جـ و] وقاعدة د و مثل قاعدة هـ و، وتكون زاوية د جـ و مثل زاوية هـ جـ و، فكل واحدة منهما قائمة، وخط جـ د يكون عموداً على أ ب. وذلك ما أردنا أنت نعمل.

وقد تبين من هذا الشكل ان كل مثلث متساوي الساقين [٦ ظ] نخرج خطاً من رأسه إلى منتصف قاعدته. فإنه يكون عموداً على القاعدة، ويقسم الزاوية التي عند الرأس بنصفين.

[المبرهنة ١١/ ١ تقابل ١٢/ ١ عند الحجاج]



الشكل ن ١١/١

نريد أن نخرج من نقطة أ المفروضة إلى ب جـ، الغير المتناهي، وليست النقطة عليه، خطاً يكون عموداً عليه.

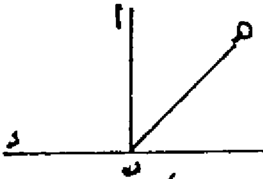
فنعلم في الجهة الأخرى من خط ب جـ نقطة د، كيفما وقعت، وندير على مركز أ وببعد أ د دائرة هـ د و. وننصف خط هـ و على ح، ونخرج خطوط أ هـ، أ ح، أ و. أقول: إن أ ح عمود على ب جـ.

برهانه: فلأن هـ ح مثل ح و، أ ح مشترك يكون كلا هـ ح، ح أ مثل كلا

وح، ح أ، وقاعدة هـ أ مثل قاعدة و أ؛ فزاوية هـ ح أ تكون مثل زاوية وح أ. فكل واحدة منهما هي قائمة. وخط أ ح عمود على ب جـ. وذلك ما أردنا أن نعمل.

[المبرهنة ١٢/ ١، تقابل ١٣/ ١ عند الحجاج]

اذا قام خط على خط، مثل أ ب على جـ د، أقول ان زاويتي أ ب جـ، أ ب د إما قائمتان، وإما مساويتان لقائمتين.

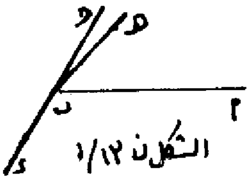


فإن كان أ ب عموداً على جـ د، فقد حق الخبر. وان لم يكن، فنخرج عمود ب هـ. فزاويتا هـ ب جـ، هـ ب د قائمتان. وهما مساويتان [٧ و] لزوايا جـ ب هـ، هـ ب أ، أ ب د الثلاث. وزاويتا أ ب جـ، أ ب د أيضاً مساويتان لزوايا جـ ب هـ، هـ ب أ، أ ب د.

فزاويتا أ ب د، أ ب جـ إما قائمتان واما مساويتان لقائمتين. وذلك ما أردنا أن نبين.

[المبرهنة ١٣/ ١، تقابل ١٤/ ١ عند الحجاج]

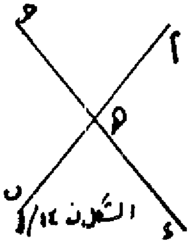
اذا خرج من طرف خط، مثل خط أ ب، من نقطة ب منه، خطان مثل ب جـ، ب د، وكانت زاويتا أ ب جـ، أ ب د مساويتين لقائمتين، أقول: ان خط جـ ب على استقامة ب د.



برهانه: ان لم يكن كذلك، فليكن هـ ب على استقامة ب د. فلأن أ ب قام على هـ ب فزاويتا أ ب د، أ ب هـ مساويتان لقائمتين. وقد كانت زاويتا أ ب د، أ ب جـ مساويتين لقائمتين بالفرض. فنلقي أ ب د المشتركة. يبقى زاوية أ ب هـ الأصغر مثل أ ب جـ الأعظم وهذا محال. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ١٤/ ١ ، تقابل ١٥/ ١ عند الحجاج]

كل خطين يتقاطعان، كخطي أ ب، جـ د، على نقطة ما، مثل نقطة هـ، أقول: ان زاويتي أ هـ جـ، د هـ ب المتقابلتين متساويتان.



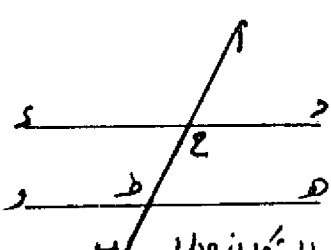
برهانه: فلأن جـ هـ قام على أ هـ ب، فزاويتا أ هـ جـ، جـ هـ ب مساويتان لقائمتين. فزاويتا د هـ ب، ب هـ جـ مساويتـان لقائمتين. وأيضاً خط ب هـ قام على جـ هـ د. فزاويتا د هـ ب، ب هـ جـ مساويتان لزاويتي أ هـ جـ، ب هـ جـ.

نلقي زاوية ب هـ جـ المشتركة. تبقى زاوية أ هـ جـ مساوية لزاوية د هـ ب المقـابلة لها. وعلى هذا تكون زاويتا أ هـ د، جـ هـ ب متساويتين، لأن التدبير واحد.

وأقول أيضاً ان الزوايا الأربع التي عند نقطة هـ مساوية لأربع زوايا قائمة. وذلك ان زاويتي جـ هـ أ، جـ هـ ب مثل قائمتين. وكذلك [٧ ظ] زاويتا د هـ ب، د هـ أ أيضاً مثل قائمتين. فالزوايا الأربع التي عند نقطة هـ مساوية لأربع زوايا قائمة. وذلك ما أردنا أن نبين.

[المبرهنة ١٥/ ١ ، تقابل ٢٩/ ١ عند الحجاج]

اذا وقع خط على خطين، كخط أ ب على خطي جـ د، هـ و، المتوازيين: أقـول: ان زاويتي جـ ح ط، ح ط و المتبادلتين متساويتان، وان زاوية أ ح د الخارجة مساوية لزاوية ح ط و الداخلة. وان زاويتي د ح ط، ح ط و الداخلتين مساويتان لقائمتين.



برهـانه: ان لم تكن زاوية جـ ح ط مساوية لزاوية ح ط و، فلتـكن احـداهمـا أصغـر من الأخـرى، وهي ح ط و. ونجعـل زاوية د ح ط مشتركة، فزاويتا د ح ط، ح ط و أصغر من زاويتي

جـ ح ط، د ح ط.

لكن زاويتا جـ ح ط، د ح ط مثل قائمتين. فزاويتا د ح ط، ح ط و أصغر من قائمتين. فخطا جـ د، هـ و يلتقيان في جهة د و. وهذا خلف، لأنهما متوازيان.

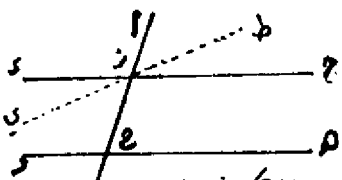
فزاويتا جـ ح ط، ح ط و المتبادلتان متساويتان.

وزاوية أ ح د مثل جـ ح ط. فزاوية أ ح د الخارجة مثل زاوية ح ط و الداخلة.

وان جعلنا زاوية د ح ط [٨ و] مشتركة، كانت زاويتا د ح ط، ح ط و الداخلتان: مساويتين لزاويتي جـ ح ط؛ د ح ط المساويتين لقائمتين. وذلك ما أردنا أن نبين.

[المبرهنة ١٦/ ١، تقابل ٢٨/ ١ عند الحجاج]

اذا وقع خط على خطين، كخط أ ب على خطي جـ د، هـ و، وكانت الزاويتان المتبادلتان، أو الخارجة والداخلة، متساويتين، أو كانت الزاويتان الداخلتان مساويتين لقائمتين، أقول: إن خطي جـ د، هـ و متوازيان.



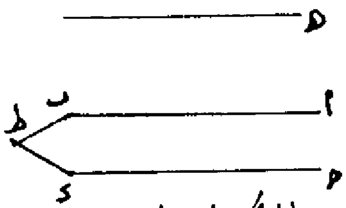
الشكل ١/١٦

برهانه: ان لم يكن جـ د موازياً لِـ هـ و، فليكن الموازي له ط ي. فلأن خط أ ب وقع على خطي ط ي، هـ و المتوازيين، تكون زاويتا ط ز ح، ز ح و، المتبادلتان متساويتين. وقد كانت زاويتا جـ ز ح، ز ح و أيضاً متساويتين، بالفرض. فزاوية ط ز ح مساوية لزاوية جـ ز ح: الأعظم للأصغر. هذا خلف. فخط جـ د مواز لخط هـ و.

وبمثل ذلك نبين ان كانت الخارجة مثل الداخلة، أو كانت الداخلتان مساويتين لقائمتين، فان خط جـ د مواز لخط هـ و. وذلك ما أردنا ان نبين، وقد تبين من هذا انه ليس يجوز على نقطة واحدة خطان، ولا خطوط، موازية لخط واحد مفروض.

[المبرهنة ١٧/ ١ ، تقابل ٣٠/ ١ عند الحجاج]

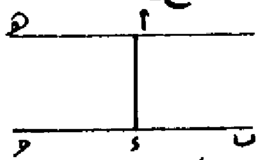
اذا كانت خطوط موازية لخط واحد، كخطي أ ب، جـ د لخط هـ و، أقول: ان أ ب موازٍ لـِ جـ د.


الشكل ن ١٧/ ١

برهـانه: انه ان لم يكونا متوازيين فأنهما يلتقيان، مثلاً على نقطة ط. فقد خرج من نقطة ط خطان موازيان. لخط هـ و المفروض. وهذا محال.

فخطا أ ب، جـ د لا يلتقيان. فهما اذن متوازيان. وذلك ما أردنا أن نبين.

[المبرهنة ١٨/ ١ ، تقابل ٣١/ ١ عند الحجاج]

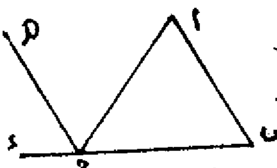

الشكل ن ١٨/ ١

نريد ان نخرج من نقطة أ المفروضة خطاً [٨ ظ] موازياً لخط ب جـ المفروض فنخرج من نقطة أ إلى ب جـ عمود أ د، ونخرج من نقطة أ أيضاً على خط أ د: عمود أ هـ، ونخرج هـ أ على استقامته. أقول: ان هـ أ موازٍ لـِ ب جـ.

برهانه: فلأن خط أ د وقع على هـ أ، ب جـ، وصارت زاويتاه هـ أ د، أ ب د المتبادلتان متساويتين، يكون خط هـ أ موازياً لخط ب جـ. وذلك ما أردنا أن نعمل.

[المبرهنة ١٩/ ١ ، تقابل ٣٢/ ١ عند الحجاج]

كل مثلث يخرج ضلع من أضلاعه، كمثلث أ ب جـ: خرج ضلع ب جـ إلى د، أقول: ان زاوية أ جـ د الخارجة مساوية لزاويتي أ، ب الداخلتين اللتين تقابلانها. والزوايا الثلاث من المثلث مساوية لزاويتين قائمتين.


الشكل ن ١٩/ ١

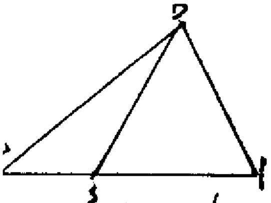
برهانه: نخرج من نقطة جـ خطاً موازياً لخط أ ب، وهو جـ هـ: فلأن خط ب جـ د وقع على خطي أ ب، جـ هـ المتوازيين تكون زاوية هـ جـ د الخارجة مساوية لزاوية أ ب جـ الداخلة.

وأيضاً زاوية أ جـ هـ مساوية لزاوية ب أ جـ لأنهما متبادلتان. فجميع زاوية أ جـ د الخارجة مساوية لزاويتي أ، ب الداخلتين. فان جعلنا زاوية أ جـ ب مشتركة، تكون الزوايا الثلاث لمثلث أ ب جـ مساوية لزاويتي أ جـ د، أ جـ ب، المساويتين لزاويتين قائمتين. وذلك ما أردنا ان نبين.

وهنالك استبان انه اذا ساوى [زاويتان] من مثلث زاويتين من مثلث آخر، فأن الزاوية الباقية مساوية للزاوية الباقية.

وان كل واحدة من زوايا المثلث المتساوي الأضلاع مساوية لثلثي زاوية قائمة [٩ و] وان الزاوية القائمة تكون أعظم من كل واحدة من الزاويتين اللتين تقابلانها. وان كل زاويتين من كل مثلث، فهما أصغر من قائمتين.

[المبرهنة ٢٠/ ١، تقابل ١٨/ ١ عند الحجاج]



الشكل ٢٠/١

الضلع الأعظم من كل مثلث يوتر الزاوية العظمى.

كمثلث أ ب جـ: ضلع أ ب منه اعظم من ضلع أ جـ.

أقول: ان زاوية أ جـ ب أعظم من زاوية أ ب جـ.

برهانه: نفصل أ د مثل أ جـ، ونصل جـ د. فلأن زاوية ب جـ أ أعظم من زاوية د جـ أ، وزاوية د جـ أ أو زاوية أ د جـ، الخارجة أعظم من زاوية أ ب جـ الداخلة، فزاوية ب جـ أ أعظم كثيراً من زاوية أ ب جـ.

[المبرهنة ٢١/ ١، تقابل ١٩/ ١ عند الحجاج]

ونبين عكسه وهو: زاوية أ جـ ب أعظم من زاوية ب، أقول: ان ضلع أ ب أطول من ضلع أ جـ.

برهانه: ان لم يكن كذلك فان أ جـ اما ان يكون مساوياً لِـ أ ب أو أطول منه.

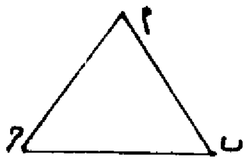
فان كان مساوياً له، فتكون زاوية أ جـ ب مثل زاوية ب.

وان كان أطول منه تكون زاوية ب أعظم من زاوية أ جـ ب.

وليس كذلك. فضلع أ ب أعظم من ضلع أ جـ. وذلك ما أردنا أن نبين.

[المبرهنة ١/٢٢ ، تقابل ١/٦ عند الحجاج]

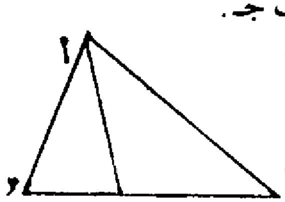
كل مثلث كمثلث أ ب جـ زاويتا ب، جـ اللتان على قاعدته متساويتان، أقول: ان ساق أ ب مثل ساق أ جـ.


الشكل ن ١/٢٢

برهانه: ان لم يكن كذلك، فأحد ساقيه أ ب، أ جـ أعظم من الآخر، فتكون احدى زاويتي ب، جـ أعظم من الأخرى. وهذا خلف. فساقا أ ب. أ جـ متساويان. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ١/٢٣ ، تقابل ١/٢٠ عند الحجاج]

كل ضلعين من مثلث، أي ضلعين كانا، فهما أعظم من الباقي. كمثلث أ ب جـ: أقول ان أ ب، أ جـ مثلاً أعظم [٩ ظ] من ب جـ.

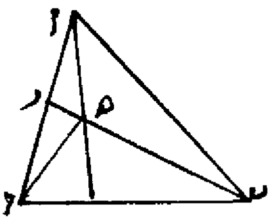

الشكل ن ١/٢٣

برهانه: نقسم زاوية أ بقسمين [متساويين] بخط أ د. فلأن زاوية أ د ب الخارجة، من مثلث أ د جـ أعظم من زاوية د أ جـ الداخلة، وزاوية د أ جـ مثل زاوية د أ ب، تكون زاوية أ د ب أعظم من زاوية ب أ د. فضلع أ ب أطول من ضلع ب د. وكذلك تكون زاوية أ ب جـ أعظم من زاوية د أ جـ، فيكون ضلع أ جـ اطول من د جـ. فضلعا أ ب، أ جـ أطول من ب جـ. وذلك ما أردنا أن نبين.

[المبرهنة ١/٢٤ ، تقابل ١/٢١ عند الحجاج]

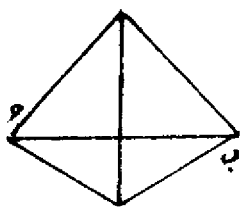
كل مثلثين على قاعدة، احدهما داخل الآخر، كمثلثي أ ب جـ، هـ ب جـ، أقول: ان ضلعي أ ب، أ جـ أطول من هـ ب، هـ جـ، وزاوية هـ تكون أعظم من زاوية أ.

برهانه: نخرج ب هـ إلى و من أ جـ: فَـ أ ب وَ أ و أعظم من ب و. ونجعل و جـ مشتركاً.



فـ أ ب وَ أ جـ أعظم من ب و وَ و جـ. لكن هـ و وَ و جـ أعظم من هـ جـ. ونجعل ب هـ مشتركاً. فـ ب و وَ و جـ أعظم من ب هـ وَ هـ جـ، فـ أ ب وَ أ جـ أعظم كثيراً من ب هـ وَ هـ جـ.

وأيضاً زاوية ب هـ جـ الخارجة من مثلث د هـ جـ: أعظم من زاوية هـ و جـ. وزاوية هـ و جـ الخارجة من مثلث أ ب جـ أعظم من زاوية أ. فزاوية هـ أعظم كثيراً من زاوية أ.



الشكل ن ٢٧/١

[المبرهنة ٢٥/ ١]

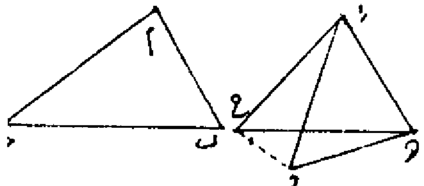
وأيضاً مثلثا أ ب جـ، ب د جـ متساويا الساقين على قاعدة ب جـ. وساقا أ ب، أ جـ أطول من ساقي د ب، د جـ. أقول إن زاوية د أعظم من زاوية أ.

برهانه: انا نصل خط أ د. فلأن أ ب أطول من ب د تكون زاوية ب د أ أعظم من زاوية ب أ د. وكذلك تكون زاوية أ د جـ أعظم [١٠ و] من زاوية د أ جـ. فجميع زاوية د أعظم من جميع زاوية أ. وذلك ما أردنا أن نبين.

واذا كان المثلثان على قاعدتين متساويتين، فيكون البرهان عليه بهذا التدبير.

[المبرهنة ٢٦/ ١، تقابل ٢٤/ ١ عند الحجاج]

اذا ساوى ضلعان من مثلثين، كضلعي أ ب، أ جـ من مثلث أ ب جـ، لضلعي د هـ، د و من مثلث د هـ و، كل واحد لنظيره، أعني أ ب لِـ دهـ، أ جـ لِـ د و، و[كانت] زاوية أ أعظم من زاوية د: أقول: ان قاعدة ب جـ أطول من قاعدة هـ و



الشكل ٢٤/١

برهانه: نطبق مثلث أ ب جـ على مثلث د هـ و بأن نضع أ ب على د هـ. يقع خط أ جـ خارج د و، مثل د ح، لأن زاوية أ أعظم من زاوية هـ د و. ونصل هـ ح، و ح. فكلا ب أ، أ جـ مثل كلا هـ د، د ح. وزاوية أ مثل زاوية د. تكون قاعدة ب جـ مثل قاعدة هـ ح، وزاوية هـ و ح أعظم من زاوية د و ح، وزاوية د و ح مثل زاوية د ح و. فزاوية هـ و ح أعظم من زاوية هـ ح و. فضلع هـ ح أعظم من هـ و، وَ هـ ح مثل ب جـ. فَـ ب جـ أعظم من هـ و.

[المبرهنة ٢٧/ ١، تقابل ٢٥/ ١ عند الحجاج]

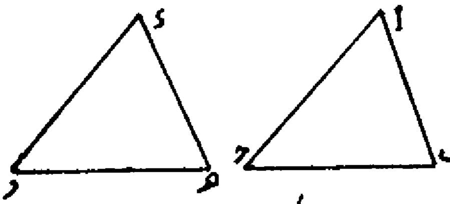
ونبين عكسه، وهو: ضلعا أ ب، أ جـ مساويان لضلعي دهـ، د و، كل واحد لنظيره، وقاعدة ب جـ أعظم من قاعدة هـ و. أقول ان زاوية أ أعظم من زاوية هـ د و.

برهـانه: ان لم تكن كذلك فزاوية أ اما مساوية لزاوية د، فيكون ب جـ مساوياً لِـ هـ و؛ وان كانت زاوية أ [١٠ ظ] [أصغر من زاوية هـ د و يكون ب جـ أصغر من هـ و. وهذا خلف. فزاوية أ أعظم من زاوية د. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٢٨/ ١، تقابل ٢٦/ ١ عند الحجاج]

اذا كان [أحـد] أضـلاع المثلث أ ب جـ، وليكن ب جـ، مساوياً لأحد أضلاع مثلث د هـ و، وليكن هـ و، وتساوت زاويتان من مثلث أ ب جـ لمثلث د و هـ، كل واحدة لنظيرتها: اما اللتان على الضلعين المتساويين، أعني زاوية ب لزاوية هـ، وزاوية جـ لزاوية و (أو غير ذلك) أقول: ان ضلعي أ ب، أ جـ مساويان لضلعي د هـ، د و، كل واحد لنظيره؛ وزاوية أ تكون مساوية لزاوية د. ومثلث أ ب جـ لمثلث د هـ و.

برهانه: انا نطبق خط ب جـ على خط هـ و، ونقطة ب على نقطة هـ. فتقع نقطة جـ على نقطة و، لأن ب جـ مثل هـ و. وتقع ب أ على د هـ، لأن زاوية ب مثل زاوية هـ. وخط أ جـ يقع على د و، لأن زاوية جـ مثل زاوية و. فنقطة أ تقع على نقطة د. فزاويتا أ، د متساويتان، ومثلث أ ب جـ ينطبق على مثلث د هـ و. فهما متساويان.



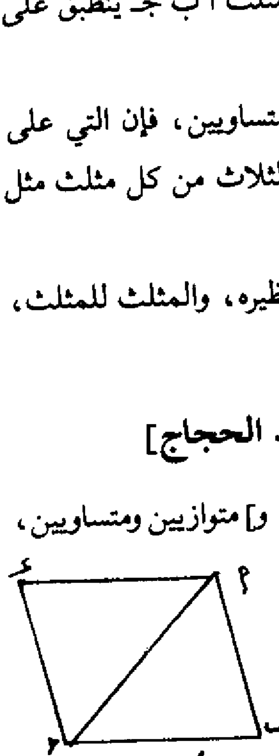
الشكل ن ٢٥/١

وان لم تكن الزوايا المتساوية على الضلعين المتساويين، فإن التي على الضلعين المتساويين أيضاً متساوية، لأن الزوايا الثلاث من كل مثلث مثل زاويتين قائمتين.

فعلى الوجهين جميعاً يكون كل ضلع مساوياً لنظيره، والمثلث للمثلث، وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٢٩/ ١، تقابل ٢٧/ ١ عند الحجاج]

اذا كان ضلعا أ ب، جـ د من سطح أ ب جـ د [١١ و] متوازيين ومتساويين، أقول ان ضلعي أ د، ب جـ أيضاً متساويان.



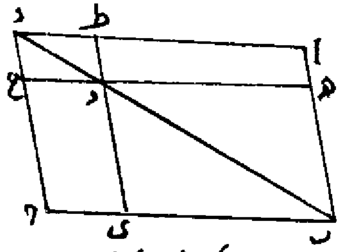
الشكل ن ٢٦/١

برهانه: نصل خط أ جـ. فلأن أ ب مثل جـ د، أ جـ مشترك وزاويتي ب أ جـ، أ جـ د المتبادلتين متساويتان، لأن خطي أ ب، جـ د متوازيان، تكون قاعدة أ د مساوية لقاعدة ب جـ؛ [وهما] متوازيان.

وقد تبين ان الأضلاع والزوايا المتقابلة من كل سطح متوازي الأضلاع: متساوية، والقطر يقطعها بنصفين؛ لأن زاوية ب أ جـ مساوية لزاوية أ جـ د، وهما المتبادلتان، وزاوية د أ جـ أيضاً لزاوية أ جـ ب، لأن أ ب، جـ د متوازيان. فزاويتا ب أ جـ، أ جـ ب من مثلث أ ب جـ مثل زاويتي د أ جـ، أ جـ د من مثلث أ جـ د، وضلع أ جـ مشترك للمثلثين فخط أ د مثل ب جـ، أ ب مثل د جـ.

فزاوية ب الباقية مثل زاوية د الباقية؛ ومثلث أ ب جـ مثل مثلث أ د جـ، وجميع زاوية أ مثل جميع زاوية جـ وذلك ما أردنا أن نبين.

[المبرهنة ١/٣٠، تقابل ١/٤٣ عند الحجاج]

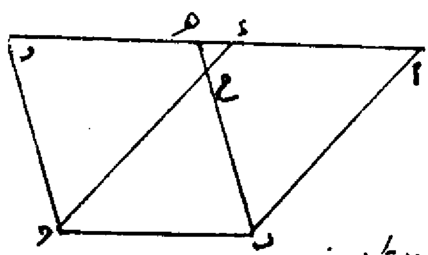


الشكل ٤٧/١

اذا كان سطح متوازي الأضلاع، كسطح أ ب جـ د، وقطره د ب، وعن جنبتي القطر سطحا أ هـ و ط، ح و ي جـ، المتوازيا الأضلاع، اللذان يقال لهما المتممان، أقول: انهما متساويان.

برهانه: فلأن مثلث أ ب د مساوٍ لمثلث د ب جـ ومثلث د ط و لمثلث د و ح ومثلث هـ ب و لمثلث و ب ي، فمثلثا د ط و، و هـ ب مساويان لمثلثي د و ح، و ب ي. فيبقى سطح أ هـ و ط المتوازي الأضلاع مساوياً لسطح ح و ي جـ، وذلك ما اردنا ان نبين.

[المبرهنة ١/٣١، تقابل ١/٣٥ عند الحجاج]



الشكل ٤٨/١

اذا كان سطحان متوازيا الأضلاع كسطحي أ ب جـ د، هـ ب جـ و، على قاعدة واحدة، كقاعدة ب جـ، وبين خطين متوازيين، كخطي أ د، ب جـ أقول انهما متساويان.

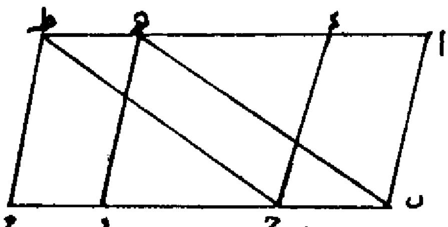
برهانه: لأن خط أ د مثل ب جـ، ب جـ مثل هـ و، فَـ أ د مثل هـ و. ونجعل د هـ مشتركاً. فَـ أ هـ كله مثل د و كله. وَ أ ب أيضاً مثل د جـ، وزاوية جـ د و الخارجة مثل زاوية أ الداخلة. فقاعدة هـ ب مثل قاعدة و جـ، ومثلث أ ب هـ مثل مثلث و د جـ.

نلقي مثلث د هـ ح المشترك. يبقى منحرف أ ب ح د مثل منحرف هـ ح جـ د. نجعل مثلث ح ب جـ مشتركاً. يكون جميع سطح أب جـ د مثل جميع سطح هـ ب جـ و. وذلك ما أردنا أن نبين.

وقد تبين من هذا الشكل ان المثلثات التي على قاعدة واحدة، وفيما بين خطين متوازيين أيضاً متساوية، لأنها أنصاف السطوح المتوازية الأضلاع التي على قاعدتها.

وتبين أيضاً ان كل سطح متوازي الأضلاع، ومثلث، على قاعدة واحدة، وبين خطين متوازيين، فان السطح مثلا المثلث.

[المبرهنة ١/٣٢ ، تقابل ١/٣٦ عند الحجاج]



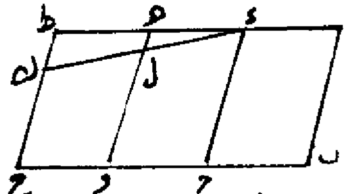
الشكل ن ١/٢٩

اذا كان سطحان متوازيا الأضلاع، كسطحي أ ب جـ د، هـ وح ط، على قاعدتين متساويتين، كقاعدتي ب جـ، و ح، وفيما بين أ ط، ب ح المتوازيين: أقول انهما متساويان.

برهانه [١٢ و] نصل هـ ب، ط جـ، فهما متساويان متوازيان. فسطح هـ ب جـ ط متوازي الأضلاع، وهو مساوٍ لسطح أ ب جـ د، لأنهما على قاعدة ب جـ، وفيما بين خطي أ ط، ب ح المتوازيين. وكذلك سطح هـ ب جـ ط مساوٍ لسطح هـ وح ط لأنهما على قاعدة هـ ط. فسطح أ ب جـ د مساوٍ لسطح هـ وح ط. وذلك ما أردنا ان نبين.

وقد تبين من هذا ان المثلثات التي على قواعد متساوية، وبين خطين متوازيين: متساوية لأنها انصاف السطوح المتوازية الأضلاع التي تكون على قواعدها.

[المبرهنة ١/٣٣]



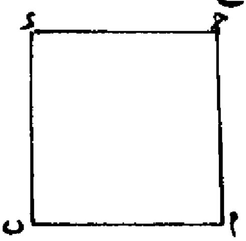
الشكل ١/٢٠/١

عكســه: اذا كان سطحان متساويان متوازيا الأضلاع، كسطحي أ ب جـ د، هـ وح ط: على قاعدتين متساويتين، كقاعدتي ب جـ، وح، أقول ان خطي د هـ، جـ و متوازيان.

برهـانـه: ان لم يكن كذلك، فليكن خط د ل ك موازياً لخط جـ و ح، وسطحا أ ب جـ د، هـ و ح ط متساويان بالفرض. لكن سطحا أ ب جـ د، ل و ح ك متساويان حسب البرهان السابق فسطح ل و ح ك الأصغر: مساوٍ لسطح هـ و ح ط الأعظم. هذا خلف. فخطا د هـ، جـ و متوازيان. وذلك ما أردنا ان نبين.

وقد تبين ذلك أيضاً في المثلثات. اذا كانت كما وصفنا.

[المبرهنة ١/٣٤، تقابل ١/٤٥ عند الحجاج]

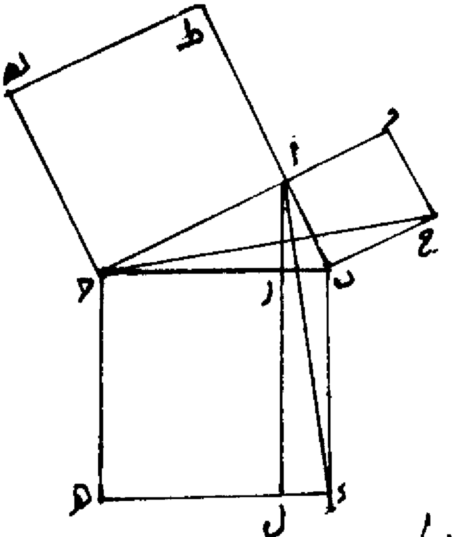


الشكل ١/٢١/١

نريد ان نعمل على خط أ ب المفروض مربعاً فنخرج من نقطتي أ، ب [١٢ ظ] عمودي أ جـ، ب د، ونجعل كل واحد منهما مثل أ ب، ونصل جـ د. اقول ان سطح أ د مربع

برهـانـه: لأن زاويتي أ، ب الداخلتين اللتين في جهة واحدة: قائمتان، يكون أ جـ موازياً لِـ ب د. وهو مساوٍ له. فَـ أ ب أيضاً مساوٍ وموازٍ لِـ جـ د. فاضلاع المسطح أ د الأربعة متساوية، وزواياه متساوية، لأن أ، ب كل واحدة منهما قائمة، ومساوية لكل واحدة من جـ، د. فسطح أ د مربع. وذلك ما أردنا ان نعمل

[المبرهنة ٣٥/ ١ تقابل ٤٦/ ١ عند الحجاج]



كل مثلث قائم الزاوية، كمثلث أ ب جـ، أقول: ان مربع وتر زاويته القائمة، وهو ب جـ، مثل مربعي ضلعي أ ب، أ جـ.

برهانه: نعمل على ب جـ، أ ب، أ جـ مربعات ب د هـ جـ، ب أ و ح، جـ أ ط ك، ونصل خطي أ د، جـ ح.

فزاويتا ب أ جـ، ب أ و قائمتان، جـ أ و خط مستقيم وكذلك ب أ ط خط مستقيم.

فزاوية أ ب ح قائمة، مثل زاوية د ب جـ. ونجعل زاوية أ ب جـ مشتركة. فزاوية ح ب جـ مثل زاوية أ ب د، من مثلثي ح ب جـ، أ ب د. وضلع ب ح مثل ضلع ب أ؛ وَب جـ مثل ب د. فقاعدة جـ ح مثل قاعدة أ د. والمثلث مثل المثلث؛ وسطح ب د ل ز مثلا أ ب د: لأنهما على قاعدة ب د وبين خطين ب د، أ ل المتوازيين. وكذلك سطح و ح ب أ مثلا [١٣ و] مثلث ح ب جـ. فسطح ب د ل ز مثل مربع و ح ب أ.

وبمثل هذا تبين ان سطح ز ل هـ ح مثل مربع ط أ جـ ك. فمربع ب هـ مثل مربعي أ ح، أ ك وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٣٦، / ١ تقابل ٤٧/ ١ عند الحجاج]

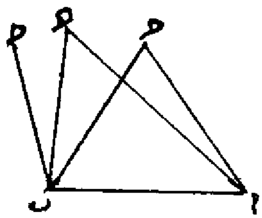
عكسه: وهو مربع خط أ ب من مثلث أ ب جـ: مثل مربعي ب جـ، جـ أ. اقول: ان زاوية ب جـ أ قائمة.

برهانه: ان لم تكن كذلك، فلتكن زاوية ب جـ د قائمة. ونجعل جـ د مثل جـ أ. ونصل د ب. فمربع ب د مثل مربعي

ب جـ، جـ د، أعني مربعي ب جـ، جـ أ، لأن جـ أ مساوٍ لِـ جـ د.

ومربع أ ب مثل مربعي ب جـ، جـ أ بالفرض. فمربع أ ب مثل مربع ب د فخط أ ب مثل خط ب د. فلأن جـ د مثل جـ أ، ب جـ مشترك، وقاعدة أ ب مثل قاعدة ب د، فزاوية ب جـ أ مثل زاوية ب جـ د: الكل مساوٍ للجزء. هذا خلف. فزاوية ب جـ أ قائمة. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٣٧/ ١]



الشكل ن ٤٢/١

زاوية أ ب جـ من مثلث أ ب جـ منفرجة. أقول ان مربع أ جـ أعظم من مربعي أ ب، ب جـ. وأصغر منهما اذا كانت حادة.

برهانه: نجعل زاوية أ ب هـ قائمة، ونجعل ب هـ مثل ب جـ، ولنصل خط أ هـ.

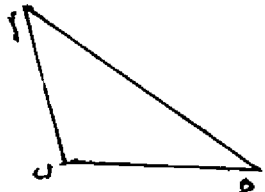
فلأن خط جـ ب مثل ب هـ، وَب أ مشترك، يكون كِلا جـ ب، ب أ مثل كِلا هـ ب، ب أ.

وزاوية أ ب جـ: أما إذا كانت منفرجة فأعظم من زاوية أ ب هـ، وإذا كانت حادة فأصغر منها. فَـ أ جـ في المنفرجة أعظم من أ هـ، وفي الحادة أصغر منه.

فمربع أ جـ: أما إذا كانت [١٣ ظ] الزاوية منفرجة، فأعظم من أ هـ، وأصغر منه إذا كانت حادة. ولكن مربع أ هـ مثل مربعي أ ب، ب هـ، أعني مربعي أ ب، ب جـ.

فمربع أ جـ، إذا كانت زاوية أ ب جـ منفرجة: أعظم من مربعي أ ب، ب جـ، وأصغر منهما إذا كانت حادة. وذلك ما أردنا أن نبين.

[المبرهنة ٣٨/ ١]



(الشكل ١/٢٥

عكسه: مربع أ جـ أعظم من مربعي أ ب، ب جـ.

أقول أن زاوية ب منفرجة

برهانه: إن لم تكن زاوية ب منفرجة، فإنها قائمة أو حادة. ولو كانت قائمة لكان مربع أ جـ مثل مربعي أ ب، ب جـ؛ وليست كذلك [ولو كانت حادة لكان مربع أ جـ اصغر من مربعي أ ب، ب جـ، وليست كذلك] فزاوية ب لا حادة ولا قائمة. فهي إذن منفرجة.

وأيضاً: مربع أ ب أصغر من مربعي أ جـ، جـ ب: أقول أن زاوية جـ حادة.

برهانه: إن لم تكن حادة، فإنها قائمة أو منفرجة. فيكون مربع أ ب إما مساوياً لمربعي أ جـ، جـ ب، أو أعظم منهما. وليس كذلك. فليست زاوية جـ قائمة، ولا منفرجة. فهي إذن حادة. وذلك ما أردنا أن نبين.

تمت المقالة الأولى بحمد الله ومنه.

المقالة الأولى

في موازنة ختامية

تتكون هذه المقالة من تعريفات وأوليات ومصادرات ومن قضايا هندسية.

فالتعريفات التي يذكرها هيث عددها ٢٣، وقد سقط معظمها من النسخة العربية للحجاج، الا انها موجودة في النسخة اللاتينية، وذكرها النسوي في تجريده، واضاف اليها تعريفات أخرى. واوليات هيث والحجاج خمس ومصادراتهما خمس. اما النسوي فقد جعل الأوليات أربعاً بإسقاط مبدأ تساوي الزاويتين القائمتين، وأضاف إلى المصادرات بضع مبادىء أخرى. وأما القضايا فهي ٤٨ عند هيث، وهي ٤٧ عند الحجاج. يزيد عليه هيث بقضية تتطلب رسم متوازي اضلاع بزاوية معلومة يكافىء شكلاً مستقيم الأضلاع مفروضاً.

جرَّد النسوي اقليدس في هذه المقالة من ١٣ قضية وفي ٣١ من القضايا التي يذكرها يتفق مع الحجاج، قضية بقضية، ويزيد عنه اربع قضايا، اثنتان منها تتعلقان بوتر الزاوية المنفرجة في المثلث، وهما متضمنتان في المبرهنة ١٢/٢ عند الحجاج، واثنتان [٢٥، ٣٣ عند النسوي] ليستا اساسيتين.

واما القضايا التي اهملها النسوي فهي [عند الحجاج] المبرهنات ٧، ١٦، ١٧، ٢٣، ٣٣، ٣٤، ٣٧ - ٤٢، ٤٤ ومعظمها حول التوازي والأشكال المتوازية الأضلاع، وهي قضايا اساسية هامة.

وأما النيريزي فيعطي اضافات قيمة لمعظم التعريفات والأوليات والمصادرات ولحوالي ٢٣ قضية ويغير في بعض حلول اقليدس بناء على هذه الإضافات. ويزيد من قيمة اضافاته ان معظمها مأخوذ من كتب لم تصل الينا،

وهي تتفق مع ما يذكره بركلس في كتاب له يبدو ان النيريزي لم يعرفه، ثم هو يعطي برهاناً لطيفاً لنظرية فيثاغورس وينسبه إلى ثابت بن قرة.

وربما كان أثمن ما حصلنا عليه في هذه الصفحات، نحن الذين تجاوزنا مرحلة بنـاء الهنـدسة الإقليدية، اننا رأينا فكرة الدليل الاستنتاجي في مرحلة تكونها ونضجها.