المقَالةُ الرابعَة

أ ـ التَعريفَات

ب ـ مُبرَهنات الحجَاج وإضافات النيريزي

ج ـ مُبرَهنات النسَوي

أ ـ التعريفات

[٥٢ أ] المقالة الرابعة من كتاب أوقليدس في الأصول

بسم الله الرحمن الرحيم

١ ـ قال اوقليدس: يقال ان الشكل مرسوم في شكل، اذا كانت زوايا الشكل المرسوم داخلاً تماسّ أضلاع الشكل الخارج.

٢ ـ ويقال ان الشكل مرسوم خارج الشكل اذا كان كل واحد من أضلاع المرسوم خارجاً يماس كل واحدة من زوايا الشكل المرسوم داخلاً.

٣ ـ اذا كان شكل في شكل، فكانت أضلاع الشكل الخارج تماسّ زوايا الشكل الداخل، فإن الخارج يقال له المحيط بالداخل.

النسوي: ٣: ومتى كان شكلان مستقيما الخطوط، وكانت زوايا أحدهما على أضلاع الآخر، قيل للشكل الداخل انه معمول في الشكل الخارج؛ وللشكل الخارج انه معمول على الشكل الداخل.

قال ايرن: قد يسأل قوم في هذا الموضع فيقولون: لماذا قدم الرياضي هذه المقدمة، وإنما ذكر في هذه المقالة أشكالاً ترسم داخل دائرة، وهذه المقدمة ليس يحتاج اليها في شيء من ذلك؟ فنقول انه انما استعمل الرياضي ذلك لتكميل التعليم.

قال المفسر: نقول ان أوقليدس اراد بهذه المصادرة أن الأصول التي عليها مبنى أمر البرهان، في كل الأشكال التي يعمل بعضها في بعض، وبعضها على بعض، انما هي مأخوذة من الأشكال التي يتضمنها هذا الكتاب. والتي ذكر منها في هذا الكتاب من البسائط هي الأشكال التي في هذه المقالة؛ وذكر منها الجنسين المحيطين بجميع أنواع البسائط، اللذين هما الدائرة والشكل المسطح المستقيم

الخطوط. وبينّ كيف يعمل بعضها في بعض، وبعضها على بعض، وترك ذكر البرهان على سائر البسائط الجزئية المستقيمة الخطوط التي عمل بعضها في بعض، وبعضها على بعض، اذ قد دلّ بقوله، وبينّ المثال فيه، في هذه المقالة، وأتى بجميع المقدمات التي يحتاج اليها في جميع المطالب الهندسية، في هذا الكتاب.

وأيضاً فإن سائر الأشكال المسطحة الجزئية التي تحتاج إلى الاستعانة بالمقالة الخامسة والسادسة، فإن بهذه المقالة، وبالخامسة والسادسة، يتمّ عمل سائر البسائط، بعضها في بعض، وبعضها على بعض. فلذلك جعل المصادرة عامة، ولذلك قال ايرن: انما استعمل ذلك لتكميل التعليم.

٤ ـ قال اوقليدس وحكاه ايرن: والشكل يقال انه مرسوم في دائرة اذا كانت زوايا الشكل المرسوم داخل دائرة تماس محيط الدائرة

[النسوي]: يقال في الأشكال المستقيمة الخطوط انها معمولة في دائرة متى كانت جميع زواياها على محيط الدائرة.

٥ ـ [اوقليدس]: والشكل يقال انه مرسوم على دائرة اذا كانت اضلاع الشكل المرسوم خارج الدائرة تماس محيط الدائرة.

٦ ـ والدائرة يقال انها مرسومة في شكل اذا كانت أضلاع الشكل من خارج الدائرة تماس محيط الدائرة.

٧ ـ والدائرة يقال انها مرسومة على شكل اذا كانت زوايا الشكل المرسوم داخل الدائرة تماس محيط الدائرة.

قال ايرن: فلأن يكون التعليم كليا، على ما تقدم من قولنا، ذكر الشكل المرسوم في الدائرة، والشكل المرسوم على الدائرة، والدائرة المرسومة في الشكل، والدائرة المرسومة على الشكل. ولإيضاح التعليم، ينبغي ان نعلم ان الاشتراك بين الشكل والدائرة ان يماس محيط الدائرة زاوية الشكل أو ضلعه. فأما الدائرة فإنه ليس لها، لا زاوية ولا أضلاع.

[النسوي]: يقال في الأشكال المستقيمة الخطوط انها معمولة في دائرة، متى كان جميع زواياها على محيط الدائرة. ويقال فيها انها معمولة على الدائرة متى كان جميع أضلاعها مماسّة للدائرة★

★ يذكر هيث عدا التعريفات الأول والثالث والرابع السابقة، تعريفاً لكل من الشكل المحيط بالدائرة، والشكل المرسوم داخل شكل، والشكل المحيط بشكل، والخط المستقيم المرسوم في الدائرة.

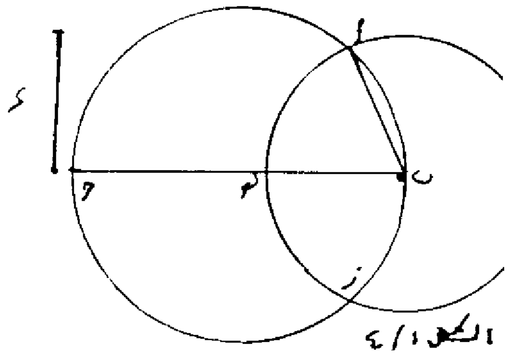
ونذكر القارىء ان لفظة تعليم الواردة هنا في ترجمة كلام هيرن هي المفرد من كلمة تعاليم وتعني الرياضيات. فالتعليم تعني الحقيقة الرياضية.

ب ـ مُبرَهنات الحجَاج
وإضافات النيريزي

[المبرهنة ١/ ٤]

الشكل الأول من المقالة الرابعة

نريد أن نبين كيف نخط في دائرة معلومة خطاً مستقيماً مساوياً لخط مستقيم معلوم، ليس أعظم من قطر الدائرة.



الشكل ١/ ٤

فلننزل ان الدائرة دائرة أ ب جـ، والخط المفروض خط د. ونريد ان نبين كيف نخط في دائـرة أ ب جـ خطاً مساوياً لخط د:

فنخرج قطر دائرة أ ب جـ، وليكن خط ب جـ. فإن كان قطر ب جـ مساوياً لخط د، فقد فعلنا ما اردنا.

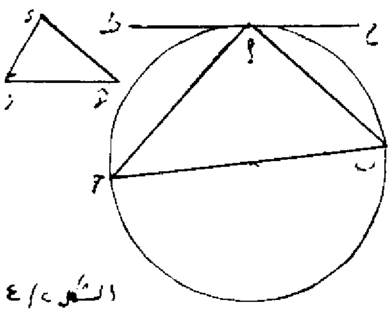
وان كان قطر ب جـ أعظم من خط د فانا نفصل من الأعظم مثل الأصغر، كما بينا ببرهان ١/٣. وننزل أنه خط ب هـ؛ فنجعل نقطة ب مركزاً، ونخط ببعد ب هـ دائرة أ ز فمن أجل ان مركز دائرة أ ز علامة ب، وقد خرج منها الى المحيط خطا ب هـ، ب أ، فظاهر أنهما متساويان. لكن [٥٢ ب]، خط ب هـ مساوٍ لخط د. فخط د اذن مساوٍ لخط أ ب **فقد أوقعنا في دائرة أ ب جـ خط ب أ مساوياً لخط** د. وذلك ما أردنا ان نبين.

قال ايرن : هذا الشكل على ما قاله الرياضي. ولكن ان فرضت نقطة على محيط دائرة، وأردنا ان نبين كيف نخرج منها خطاً في الدائرة، مساوياً لخط ما معلوم، ليس بأعظم من قطر الدائرة، فلتكن النقطة المفروضة نقطة ب من دائرة ب جـ، والخط المفروض خط د، نفصل ب هـ مثل ب د، ونخط على مركز ب، وببعد ب هـ دائرة أ ز، ونخرج خط ب أ. فقد أخرجنا من نقطة ب المفروضة خط أ ب مساوياً لخط د. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٢/ ٤]

الشكل الثاني من المقالة الرابعة

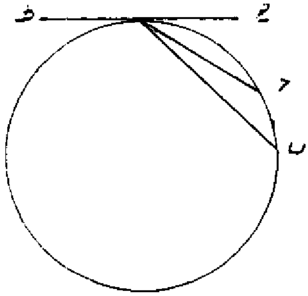
نريد ان نبين كيف نرسم في دائرة مثلثاً مساوية زواياه لزوايا مثلث معلوم فننزل ان الدائرة المعلومة دائرة أ ب جـ. والمثلث المعلوم مثلث د هـ ز.



فنريد ان نبين كيف نرسم في دائرة أ ب جـ مثلثاً مساوية زواياه لزوايا مثلث د هـ ز. فنجيز على دائرة أ ب جـ خطاً يماس دائرة أ ب جـ، كما بين بالشكل المضاف الى ٣/٦. فننزل انه أ ط، وعلامة المماسة علامة أ. ونعمل على علامة أ زاوية ح أ ب مساوية لزاوية د هـ ز، كما بين عملها ببرهان ١/٢٣. ونصل بين علامتي ب، جـ بخط ب جـ. فمن أجل ان خط ح ط يماس دائرة أ ب جـ على نقطة أ، وقد خرج من حيث يماسها خط أ ب، يقطع الدائرة، فببرهان ١/٣١، فان بين جنبتي خط أ ب زاويتين مثل الزاويتين اللتين تقعان في قطعتي الدائرة المتبادلتين. فالزاوية إذن التي تقع في قطعة أ جـ ب مساوية لزاوية ح أ ب. لكن الزاوية التي تقع في قطعة أ جـ ب هي زاوية أ جـ ب. فزاوية أ جـ ب اذن مساوية لزاوية ح أ ب. وكنا فرضنا زاوية ح أ ب مساوية لزاوية د هـ ز. فزاوية أ جـ ب اذن مساوية لزاوية د هـ ز.

وكذلك نبين ان زاوية أ ب جـ مثل زاوية ط أ جـ؛ وكنا عملنا زاوية ط أ جـ مثل زاوية د ز هـ. فزاوية أ ب جـ مساوية لزاوية د ز هـ. فتبقى اذن زاوية هـ د ز مثل زاوية ب أ جـ الباقية. وذلك لأن زوايا المثلث الثلاث مساوية لزاويتين قائمتين. وذلك بين بحسب برهان ١/٣٢ فقد عملنا في دائرة أ ب جـ مثلث أ ب جـ زواياه مساوية لزوايا مثلث د هـ ز. وذلك ما أردنا ان نبين.

وأما على مذهب ايران فقد أوقع هذا الشكل: وذلك انا اذا عملنا زاوية ح أ ب مساوية لزاوية د هـ ز، فقد علمنا ان قطعة أ جـ ب تقبل زاوية مثل زاوية د هـ ز . فاذا عملنا على نقطة أ من خط ط أ زاوية مساوية لزاوية د ز هـ، وطابق الخط الذي عملت عليه الزاوية خط أ ب، ولم يحدث في الدائرة مثلثاً، فنقول: فإذن الزاوية المعمولة هي زاوية ط أ ب. فتكون إذن زويتا ح أ ب، ط أ جـ مساويتين لزاويتي ح أ ب، ط أ ب. لكن مجموع زاويتي ح أ ب، ط أ ب مثل مجموع زاويتين قائمتين.



وهما أيضاً مثل مجموع زاويتي د هـ ز، د ز هـ. فمثلث د هـ ز زاويتان من زواياه مثل زاويتين قائمتين. وهذا خلف لأنه قد تبين ببرهان ١٧ / ١ من ان كل زاويتين من زوايا كل مثلث أصغر من زاويتين قائمتين.

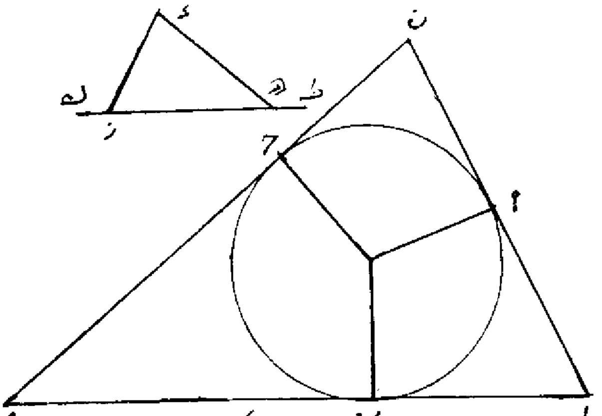
وان كان خط أ جـ الذي عملت عليه زاوية ط أ جـ مثل زاوية د ز هـ، يقع خارج خط أ ب، إلى ما يلي خط أ ح، كما في الصورة، فيكون حينئذ مجموع زاويتي ح أ ب، ط أ جـ أعظم من زاويتين قائمتين. فتكون الشناعة أفظع. وذلك أن مثلث د هـ ز زاويتان من زواياه أعظم من زاويتين قائمتين. وذلك ما أردنا أن نبين.

[المبرهنة ٣/ ٤]

[٥٣ أ] الشكل الثالث من المقالة الرابعة

نريد ان نبين كيف نعمل على دائرة مفروضة مثلثاً مساوية زواياه لزوايا مثلث

معلوم فننزل ان دائرة أ ب جـ المعلومة، ومثلث د هـ ز المعلوم. فنريد ان نبين كيف نعمل على دائرة أ ب جـ مثلثاً زواياه مساوية لزوايا مثلث د هـ ز. فنخرج خط هـ ز في الجهتين جميعاً، مثل خط ط هـ ز ك. ونستخرج مركز الدائرة، كما بين



الشكل ٢ / ٤

ذلك ببرهان ٣/١ وليكن علامة ح. ونخرج منها خطاً إلى محيط الدائرة، كيف اردنا، وليكن خط ح أ. ونعمل على نقطة ح من خط ح أ زاوية أ ح ب مساوية لزاوية د هـ ط، كما بين عملها ببرهان ٢٣/١. ونعمل على نقطة ح من خط ح ب زاوية ب ح جـ مساوية لزاوية د ز ك، كما بين عملها ببرهان ٢٣/١. ونجيز على نقط أ، ب، جـ خطوط ل م، م ن، ن ل تماس دائرة أ ب جـ، كما بينت اجازتها بالشكل المضاف إلى ١٦/٣.

فمن أجل ان خط ل م يماس دائرة أ ب جـ على نقطة ب، وقد خرج من حيث يمارسها: خط إلى المركز، فبحسب برهان ١٧ / ٣ فإن خط ب ح عمود على خط ل م. وبمثل هذا البرهان نبين ان كل واحد من خطي ح أ، ح جـ عمود على خطي ل ن، م ن.

فالزوايا التي عند علامات أ، ب، جـ: كل واحدة منها قائمة.

وكل ذي أربعة أضلاع فانه ينقسم بمثلثين، وقد بين ببرهان ٣٢/١ ان كل مثلث فان زواياه الثلاث مجموعة: مثل زاويتين قائمتين. فزوايا كل ذي أربعة أضلاع اذن مساوية لأربع زوايا قائمة.

فذو أربعة أضلاع أ ح ب ل: زواياه الأربع مجموعة مساوية لأربع زوايا

قائمة، منها زاويتا ل أ ح، ل ب ح قائمتان. وزاويتا د ز ك، د ز هـ أيضاً قائمتين. وذلك ببرهان ۱/۳۳، فتبقى زاويتا أ ل ب، أ ح ب مساويتين لزاويتين قائمتين.

وزاويتا د هـ ط، د هـ ز أيضاً مساويتان لقائمتين. وكنا عملنا زاوية أ ح ب مساوية لزاوية د هـ ط، فزاوية أ ل ب اذن مساوية لزاوية د هـ ز.

وبمثل هذا البرهان نبين ان زاويتي ب ح جـ، جـ م ب مثل قائمتين. فتبقى زاوية ب م جـ مساوية لزاوية د ز هـ. فمثلثا ل ن م، د هـ ز قد ساوت زاويتان من احدهما زاويتين من الآخر. فالزاوية الباقية اذن مثل الزاوية الباقية. وذلك لأن زوايا كل مثلث مساوية لزاويتين قائمتين. وذلك بين ببرهان ۱/۳۲ فزاوية ل ن م مثل زاوية هـ د ز.

فقد عملنا على دائرة أ ب جـ مثلث ل ن م زواياه مساوية لزوايا مثلث د هـ ز. وذلك ما أردنا ان نبين.

وأما ما أوقعه ايرن في هذا الشكل فهو أيضاً شيء لا يعتد به ولكنا نذكره:

ان قال قائل انا اذا اخرجنا خطي أ ح، ب ح إلى نقطتي س، ع، ثم عملنا زاوية ب ح جـ مساوية لزاوية د ز ك: وقع خط ح جـ بين نقطتي ب، س، فنقول: من أجل ان خط أ س مستقيم، لأنه قطر للدائرة، فان زاويتي أ ح جـ، جـ ح س مساويتان لقائمتين. لكن زاوية أ ح جـ مساوية لزاويتي د هـ ط، د ز ك. وزاويتا د هـ ط، د ز ك أعظم من قائمتين. فزاوية أ ح جـ أعظم من زاويتين قائمتين. وهي أيضاً أصغر من مجموع زاويتي أ ح جـ، جـ ح س القائمتين. هذا شنيع. فخط ح جـ اذن لا ينثني على خط ح س نحو نقطة ب. فان قيل انه يطابق خط ح س فنقول: فتكون اذن زاويتا د هـ ط، د ز ك مساويتين لزاويتي أ ح ب، ب ح س لكن زاويتي أ ح ب، ب ح س مثل قائمتين. فزاويتا د هـ ط، د ز ك اذن قائمتـان. هذا شنيع أيضاً، لأنهما أعظم من قائمتين. فخط ح جـ اذن لا يطابق خط ح س، ولا ينثني عليه نحو نقطة ب.

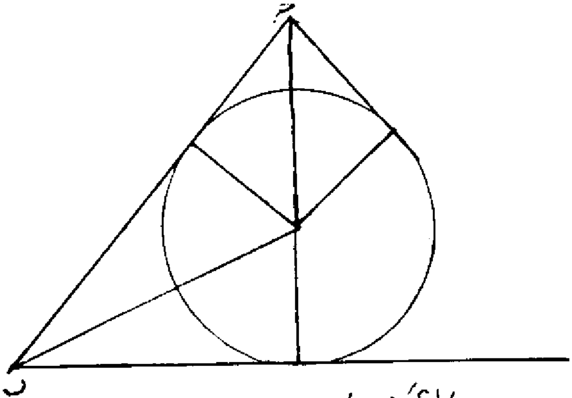
فان قيل انه يطابق خط ح جـ خط ح ع المتصل بخط ب ح على الاستقامة،

فنقول: فمن أجل ان زاوية أ ح ب عملت مثل زاوية د هـ ط، تبقى اذن زاوية د ز ك مساوية لزاويتي ب ح س، س ح ع القائمتين. هذا شنيع جداً، وأشنع منه إن قيل انه ينثني على خط ح ع نحو نقطة أ. فخط جـ ع اذن يكون خروجه أبداً بين نقطتي س، ع.

[المبرهنة ٤/ ٤]

[٥٣ ب] الشكل الرابع من المقالة الرابعة

نريد ان نبين كيف نرسم في مثلث معلوم: دائرة يحيط بها. فننزل ان المثلث المعلوم مثلث أ ب جـ. ونريد ان نبين كيف نعمل فيه دائرة يحيط بها. فنقسم زاوية أ جـ ب بنصفين، كما بيّن ببرهان ٩/١ فننزل أنا قسمناها بخط جـ ز. ونقسم أيضاً زاوية أ ب جـ بنصفين، بخط ب ز. ونعلم على موضع التقاطع: ز فأقول ان علامة ز مركز الدائرة.



الشكل ٤/٤

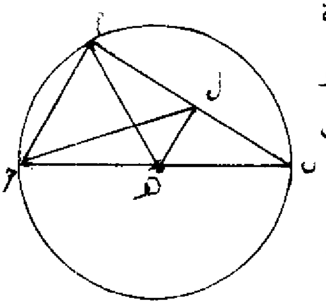
برهانه: انا نخرج من علامة ز إلى اضلاع المثلث أعمدة ز د، ز هـ، ز ح، كما بين اخراجه ببرهان ١٢/١ فمن أجل ان زاوية د جـ ز مساوية لزاوية ز جـ ح؛ وزاوية ز د جـ مساوية لزاوية ز ح جـ، لأن كل واحدة منهما قائمة، فنأخذ ضلع ز جـ مشتركاً، فمثلثا ز د جـ، ز ح جـ قد ساوت زاويتان من أحدهما زاويتين من الآخر، واشتركا في ضلع واحد. فظاهر ببرهان ٢٦/١ ان الضلعين الباقيين من أحدهما مساويان للضلعين الباقيين من الآخر، والزاوية الباقية من أحدهما مساوية للزاوية الباقية من الآخر، فخط ز د مساوٍ لخط ز ح.

وأيضاً فان زاوية هـ ب ح قد قسمت بنصفين بخط ب ز. فزاوية ز ب هـ مساوية لزاوية ز ب ح؛ وزاوية ز هـ ب مساوية لزاوية ز ح ب، لأنهما قائمتان؛ وضلع ز ب مشترك. فخط ز هـ مثل خط ز ح. فخطوط ز د، ز هـ، ز ح متساوية.

فلأنه قد تبين ببرهان ٣/٩ انه اذا خرج من نقطة في دائرة اكثر من خطين، فكانت متساوية، فان تلك النقطة مركز للدائرة. فالدائرة المخطوطة اذن على ان ز مركز لها، وببعد خط ز د: بين انها تمر بنقط هـ، د، ح، ولا تقطع أضلاع المثلث، من أجل ان الزوايا التي عند نقط هـ، د، ح قوائم. فأضلاع المثلث، من الظاهر ببرهان ٣/١٥ انها مماسة الدائرة هـ د ح. فقد عملنا في مثلث أ ب جـ دائرة هـ د ح يحيط بها. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٥/ ٤]

الشكل الخامس من المقالة الرابعة



نريد ان نبين كيف نعمل على مثلث معلوم دائرة تحيط به، ان كان قائم الزاوية، أو منفرج الزاوية، أو حاد الزوايا. فننزل أولاً أنه قائم الزاوية، وليكن مثلث أ ب جـ الأول. ونبين كيف نعمل عليه دائرة تحيط به: فنقسم كل واحد من خطي أ ب، ب جـ بنصفين، على نقطتي هـ، ل، كما بين ببرهان ١/١٠ ونصل خطي ل هـ، أ هـ. فأقول ان نقطة هـ مركز للدائرة التي تحيط بمثلث أ ب جـ.

برهانه: من أجل ان خطي أ ب، ب جـ، كل واحد منهما قسم بنصفين على نقطتي ل، هـ، ووصل خط ل هـ، فظاهر من برهان الشكل الذي نأتي به من بعد هذا الشكل، ان خط ل هـ موازٍ لخط أ جـ. ولأن زاوية ب أ جـ فرضت قائمة،

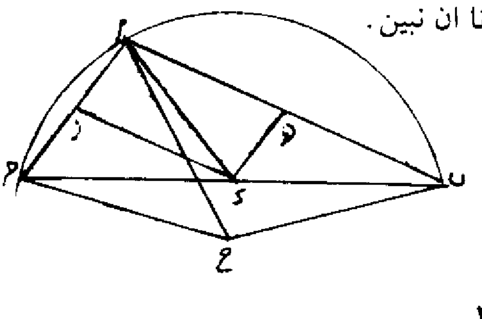
وقد وقع على خطي أ جـ، ل هـ المتوازيين خط أ ب، فظاهر ببرهان **١/٢٩** ان زاوية ب ل هـ الخارجة مثل زاوية ل أ جـ الداخلة.

وكنا قسمنا خط ب ل مثل خط ل أ. فاذا أخذنا خط ل هـ مشتركاً، كان خطا ب ل، ل هـ مثل خطي أ ل، ل هـ، وزاوية ب ل هـ مساوية لزاوية أ ل هـ. فظاهر اذن من برهان **١/٤** ان قاعدة أ هـ مساوية لقاعدة ب هـ. وكنا فرضنا ب هـ مثل هـ جـ. فالخطوط الثلاثة الخارجة من نقطة هـ: متساوية، أعني خطوط هـ أ، هـ ب، هـ جـ. واذا خرج من نقطة في دائرة أكثر من خطين، فكانت متساوية، فإن تلك النقطة مركز للدائرة، بحسب ما تبين ببرهان **٣/٩**. فالدائرة المخطوطة على ان مركز هـ نقطة لها، وببعد خط هـ أ، تمر بنقط أ، ب، جـ. فدائرة أ ب جـ اذن تحيط بمثلث أ ب جـ. فقد عملنا على القائم الزاوية المعلوم دائرة تحيط به.

[**٥٤** أ] وتبين الآن ان خط ل هـ مواز لخط أ جـ:

فنفرض مثلث أ ب جـ، ونخرج خط ل جـ. فمن أجل ان مثلثي أ هـ ل، ل هـ ب على قاعدتين متساويتين، وارتفاعهما على نقطة هـ، فان مثلث أ هـ ل مساوٍ لمثلث هـ ل ب.

ومن أجل ان مثلثي ب ل هـ، ل هـ جـ على قاعدتين متساويتين، وهما خطا ب هـ، هـ جـ، وارتفاعهما على نقطة ل، فان مثلث ب ل هـ مساوٍ لمثلث ل هـ جـ. فمثلث ل هـ جـ اذن مساوٍ لمثلث ل هـ أ. فمثلثا ل هـ جـ، ل هـ أ على قاعدة واحدة، هي قاعدة ل هـ، وبين خطين وهما خطا أ جـ، ل هـ. فبين من برهان **١/٢٨** ان خط أ جـ موازٍ لخط ل هـ. وذلك ما أردنا ان نبين.



وأيضاً فنفرض مثلث أ ب جـ الثاني: زاويته التي عليها ب أ جـ منفرجة. فنبين كيف نعمل عليه دائرة تحيط به. فنقسم

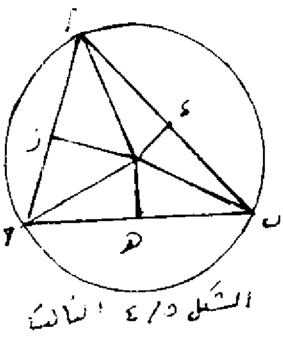
اضلاع المثلث الثلاثة، كل واحد منها بنصفين، على نقطة هـ، ده ز، كما بين قسمته ببرهان ١/١٠. ونصل خطوط هـ د، ز د. فظاهر من الشكل المضاف الذي قدمناه ان ضلع هـ د مواز لضلع أ جـ؛ وقد وقع عليهما خط أ ب. فظاهر ببرهان ١/٢٩ ان زاوية ب هـ د الخارجة مساوية لزاوية ب أ جـ الداخلة. وزاوية ب أ جـ منفرجة، فزاوية ب هـ د اذن منفرجة. فتبقى زاوية أ هـ د حادة. فضلع ب د إذن أعظم من ضلع أ د. فليست نقطة د اذن بمركز للدائرة التي تحيط بمثلث أ ب جـ.

وأيضاً فمن أجل ان زاويتي ب هـ د، جـ ز د منفرجتان، فان العمودين الخارجين من نقطتي هـ، ز يلتقيان خارج مثلث أ ب جـ. فننزل انهما التقيا على نقطة ح. ونصل خط أ ح.

فمن أجل ان خط ب هـ فرضناه مساوياً لخط أ هـ؛ ونأخذ خط هـ ح مشتركاً، فيكون خطا ب هـ، هـ ح مثل خطي أ هـ، هـ ح؛ وزاوية ب هـ ح مساوية لزاوية أ هـ ح، فبين ببرهان ١/٤ ان قاعدة ب ح مساوية لقاعدة أ ح. وبمثل هذا نبين ان قاعدة جـ ح مساوية لقاعدة أ ح.

فالخطوط الثلاثة متساوية، أعني خطوط ح ب، ح أ، ح جـ. وبين من برهان ٣/٩ أنه اذا أخرج من نقطة ح في دائرة أكثر من خطين، فكانت متساوية، فان تلك النقطة مركز للدائرة. فالدائرة المخطوطة على ان نقطة ح مركز لها، وببعد ح أ: تمر بنقط أ، ب، جـ. فدائرة ب أ جـ محيطة بمثلث أ ب جـ. فقد عملنا على مثلث أ ب جـ، المنفرج الزاوية، دائرة تحيط به. وذلك ما أردنا ان نبين.

وأيضاً فانا ننزل مثلث أ ب جـ الثالث حاد الزوايا، ونبين كيف نخط عليه دائرة تحيط به: فنقسم كل واحد من أضلاعه بنصفين، على نقط د، هـ، ز.



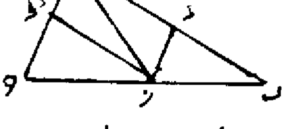
الشكل د/٤ : السادسة

فمما قدمنا من برهان الشكل المضاف، نبين ان خط د هـ موازٍ لخط أ جـ، وقد جاز عليهما خط أ ب. فزاوية ب د هـ الخارجة مساوية لزاوية ب أ جـ الداخلة، بحسب برهان ٢٨ / ١. فلأن زاوية ب أ جـ حادة، تكون زاوية ب د هـ حادة. فزاويتا أ د هـ، أ ز هـ منفرجتان. فاذا أخرجنا عمودي د ح، ز ح فانهما يلتقيان داخل مثلث د هـ ز. فهما اذن داخل مثلث أ ب جـ.

ونصل خط أ ح. فمن أجل ان خط ب د فرضناه مثل خط أ د، فاذا اخذنا خط د ح مشتركاً، يكون خطا ب د، د ح مساويين لخطي أ د، د ح وزاوية أ د ح مساوية لزاوية ب د ح، لأن كل واحدة منهما قائمة. فظاهر من برهان ٤ / ١ ان خط أ ح مساوٍ لخط ح ب. وبمثل هذا البرهان نبين ان خط أ ح مساوٍ لخط ح جـ. فالخطوط الثلاثة متساوية: أعني خطوط ح ب، ح أ، ح جـ. وبين من برهان ٤ / ١ انه اذا خرج من نقطة في دائرة اكثر من خطين فكانت متساوية: فان تلك النقطة مركز للدائرة.

فالدائرة المخطوطة على ان نقطة ح مركز لها، وببعد ح أ: تمر بنقط ب، أ، جـ. فدائرة أ ب جـ إذن تحيط بمثلث أ ب جـ. فقد عملنا على مثلث أ ب جـ، الحاد الزوايا، دائرة تحيط به. وذلك ما أردنا ان نبين.

[٥٤ ب] قال النيريزي: ونبين الآن الطريق الذي انتهى بالرياضي إلى ان ركّب برهان هذه الثلاثة الأشكال هذا التركيب، وبه قسّم كل واحد من أضلاع المثلث بنصفين، واخرج من منتصفي الضلعين المحيطين بالزاوية الموضوعة: خطوطاً على زوايا قائمة. فننزل مثلثاً ما، عليه أ، ب، جـ، وننزل ان الزاوية الموضوعة زاوية ب أ جـ. فأقول: ليس يخلو المركز من ان يكون اما على خط ب جـ، واما خارج خط ب جـ، وإما داخل خط ب جـ



الشكل ٥/٤ ملحق ١

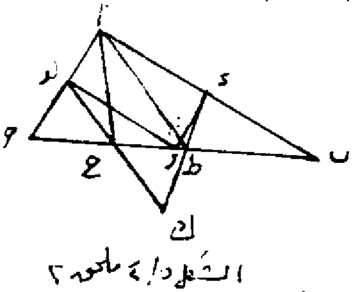
فننزل أولاً أنه على خط ب جـ. فخط ب جد إذن قطر للدائرة. فالمركز على منتصف خط ب جـ، على نقطة ز. ومن أجل ان الدائرة التي تحيط بمثلث أ ب

جـ تمر بنقط أ، ب، جـ، فإن الخط الذي يصل بين نقطتي أ، ز مساوٍ لكل واحد من خطي ب ز، ز جـ. ومن أجل ان القطر يقسم الدائرة بنصفين، فإن مثلث أ ب جـ في نصف دائرة. فظاهر من برهان ٣/٣١ ان زاوية ب أ جـ قائمة. فاذا قسمنا كل واحد من خطي أ ب، أ جـ بنصفين على نقطتي د، هـ، وأخرجنا خطي د ز، هـ ز، فظاهر ان خطي ب د، د ز مساويان لخطي أ د، د ز؛ وقاعدة ب ز مساوية لقاعدة أ ز. فزاوية ب د ز مساوية لزاوية أ د ز. فخط د ز قائم على خط أ ب على زوايا قائمة.

وكذلك خط هـ ز قائم على خط أ جـ. فلذلك فرض الرياضي زاوية قائمة، وقسم أ ب بنصفين على علامة د، وأخرج خط د ز إلى منتصف خط ب جـ. ثم بيّن ان خط د ز مواز لخط أ جـ، ليتبين أنه انما أخرج عموداً.

وأيضاً فانا ان لم نستشهد بشكل ٣/٣٠ فانه يبين على هذا الطريق من اجل انه يجب ان تكون خطوط أ ز، ب ز، جـ ز متساوية. فمن أجل ان خط أ ز مساوٍ لخط ز ب، فإن زاوية أ ب ز مثل زاوية ب أ ز.

وأيضاً فلأن ز جـ مثل ز أ تكون زاوية ز أ جـ مثل زاوية ز جـ أ. فمجموع زاويتي أ ب جـ، أ جـ ب مثل زاوية ب أ جـ. لكن زوايا ب أ جـ، جـ ب أ، ب جـ أ الثلاث مساوية لقائمتين. فزاوية ب أ جـ إذن قائمة.

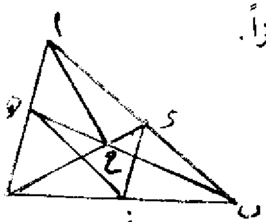


تم ننزل ان المركز يقع خارج خط ب جـ. فننزل أنه علامة ك. فمن أجل ان مركز الدائرة خارج، يجب ان تكون القطعة التي تحيط بمثلث أ ب جـ أصغر من نصف دائرة. وقد تبين ببرهان ٣/٣٠ ان الزاوية التي تقع في أصغر من نصف دائرة، فهي منفرجة. فزاوية ب أ جـ إذن منفرجة.

وأيضاً على الجهة الأخرى فانا نخرج خطي ك د، ك هـ. وقد علمنا من برهان ٣/٣ ان الخطوط التي تخرج من المركز الى منتصف الأوتار، فهي

أعمدة، واذا خرجت أعمدة فهي تقسم الأوتار بنصفين. فنخرج عمودي ك د، ك هـ يقسمان خطي أ ب، أ جـ على نقطتي د، هـ، ويقطعان خط ب جـ على نقطتي ط، ح. ونصل خطي أ ح، أ ط. فمن أجل ان خط أ هـ مثل خط هـ جـ، وخط هـ ح مشترك، فان قاعدة أح مساوية لقاعدة ح جـ. فزاوية هـ جـ ح مثل زاوية هـ أ ح. وكذلك زاوية د أ ط مثل زاوية د ب ط. فيكون مجموع زاويتي ب أ ط، جـ أ ح مثل مجموع زاويتي أ ب جـ، أ جـ ب. فزاوية ب أ جـ بأسرها أعظم من زاويتي أ ب جـ، أ جـ ب. وزوايا المثلث الثلاث مساوية لقائمتين. فزاوية ب أ جـ أعظم من نصف القائمتين. فزاوية ب أ جـ اذن منفرجة.

فاذا قسم خط جـ ب أيضاً بنصفين على نقطة ز، وأخرج خطا د ز، هـ ز، فبين بالشكل المضاف إلى الشكل الذي قدمناه ان خط د ز موازٍ لخط أ جـ. فتكون زاوية ب د ز الخارجة أعظم من زاوية ب د ط. فبدأ فركب من هذا الموضع، ليظهر ان الخطين القائمين على نقطتي د، هـ على زوايا قائمة: يلتقيان خارج خط ب جـ. فنجعل موضع الالتقاء مركزاً.



الشكل ٤ مادة ٢

ثم ننزل ان المركز يقع داخل خط ب جـ. فننزل انه نقطة ح. فمن أجل ان مركز الدائرة داخل: يجب ان تكون القطعة التي تحيط بمثلث أ ب جـ أعظم من نصف دائرة. وقد تبين ببرهان ٣/٣١ ان الزاوية التي تقع [٥٥ أ] في أعظم من نصف دائرة، فهي حادة. فزاوية ب أ جـ اذن حادة.

وأيضاً على الجهة الأخرى فانا نخرج ح د، ح هـ. وقد علمنا من برهان ٣/٣ ان الخطوط التي تخرج من المركز إلى منتصف الأوتار فهي أعمدة؛ وان خرجت أعمدة فهي تقسم الأوتار بنصفين. فنخرج عمودي ح د، ح هـ يقسمان خطي أ ب، أ جـ، على نقطتي د، هـ ونخرج ح د على استقامته إلى نقطة جـ، ونخرج هـ ح على استقامة إلى نقطة ب، ونصل خط أ ح.

فمن أجل ان خط أ هـ مثل هـ جـ، وخط هـ ح مشترك، وزاويتي أ هـ ح، جـ هـ ح متساويتان، لأجل ان كل واحدة منهما قائمة، فان قاعدة أ ح مساوية لقاعدة جـ ح. فزاوية هـ جـ ح اذن مساوية لزاوية هـ أ ح.

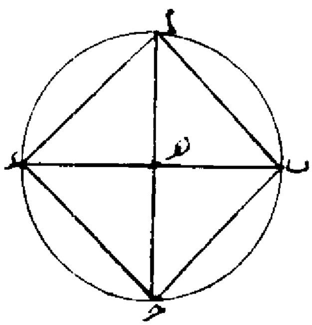
وكذلك زاوية د أ ح مساوية لزاوية د ب ح. فيكون مجموع زاويتي ب أ ح، جـ أ ح مثل مجموع زاويتي أ ب ح، أ جـ ح. فزاوية ب أ جـ بأسرها أصغر من زاويتي أ ب جـ، أ جـ ب. لكن زوايا المثلث الثلاث مساوية لزاويتين قائمتين. فزاوية ب أ جـ أصغر من نصف القائمتين. فهي اذن حادة.

فاذا قسم خط ب جـ بنصفين على نقطة ز، وأخرج خطا ز د، ز هـ، فبين بالشكل المضاف إلى الشكل الذي قدمناه ان خط د ز موازٍ لخط أ جـ. فتكون زاوية ب د ز الخارجة أصغر من زاوية ب د ح. فبدأ فركب من هذا الموضع ليظهر ان الخطين القائمين على نقطتي د، هـ على زوايا قائمة، يلتقيان داخل خط ب جـ. فنجعل موضع الالتقاء مركزاً.

[المبرهنة ٦/ ٤]

الشكل السادس من المقالة الرابعة

نريد ان نبين كيف نرسم في دائرة مفروضة شكلاً ذا أربعة أضلاع [قائم الزوايا] تحيط به فننزل ان الدائرة دائرة أ ب جـ د. ونستخرج مركز الدائرة، كما بين ببرهان ١/٣ وليكن علامة هـ. ونجيز عليها خطين يتقاطعان على زوايا قائمة، كما بينا ببرهان ١/٣. فننزل انهما قطر أ جـ، ب د. ونصل خطوط



الشكل ٦/ ٤

أ ب، ب جـ، أ د، د أ. فمن أجل أن نقطة هـ مركز، وقد خرج منها خطوط هـ أ، هـ ب، هـ جـ، هـ د، فالخطوط الخارجة من مركز هـ إلى المحيط متساوية: فخطا ب هـ، هـ أ مثل خطي د هـ، هـ أ؛ وزاوية ب هـ أ مثل زاوية د هـ أ،

لأن كل واحدة منهما قائمة. فظاهر من برهان ٤ / ١ أن قاعدة أ ب مساوية لقاعدة أ د. وبمثل هذا البرهان نبين ان قاعدة ب جـ مثل قاعدة جـ د؛ وقاعدة أ ب مساوية لقاعدة ب جـ، وقاعدة جـ د مساوية لقاعدة أ د. فالخطوط الأربعة المحيطة بذي الأربعة الأضلاع: متساوية. ومن أجل ان زاوية ب أ د في نصف دائرة، فبين ببرهان ٣/٣٠ انها قائمة. وكذلك نبين ان كل واحدة من زوايا أ ب جـ، ب جـ د، جـ د أ: قائمة، لأن كل واحدة منها في نصف دائرة.

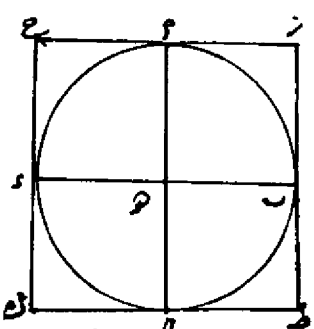
فالشكل ذو الأربعة الأضلاع المعمول في دائرة أ ب جـ د: متساوي الأضلاع، قائم الزوايا. فقد عملنا في دائرة أ ب جـ د شكلاً ذا أربعة أضلاع، قائم الزوايا. وذلك ما أردنا ان نبين.

قال النيريزي: وأما حلّ هذا الشكل، فإنا ننزل ان المربع محلول. فمن أجل انا نطلب ان يكون أ د مثل أ ب، وزاوية أ قائمة، فظاهر أن خط ب د يجب ان يكون قطراً للدائرة.

وكذلك انا متى طلبنا ان يكون خط أ ب مثل خط ب جـ، وزاوية ب قائمة، ان خط ب جـ يجب ان يكون قطراً للدائرة. فنقطة هـ إذن هي المركز. فزاوية هـ أ ب مثل زاوية هـ ب أ. فتبقى زاوية أ هـ ب قائمة. وهي مثل ب هـ جـ. فالزوايا الأربع التي عند المركز: كل واحدة منها قائمة. فالقطران يتقاطعان على زوايا قائمة. فوجد مطلوبه.

[المبرهنة ٧/ ٤]

الشكل السابع من المقالة الرابعة



الشكل ٧/ ٤

[٥٥ ب] نريد ان نبين كيف نعمل على دائرة معلومة شكلاً مربعاً قائم الزوايا يحيط بها. فنفرض دائرة أ ب جـ، ونريد أن نبين كيف نعمل عليها مربعاً قائم الزوايا: فنستخرج المركز، كما بين

ببرهان ٣/١؛ وليكن نقطة هـ. ونجيز عليها قطرين يتقاطعان على زوايا قائمة، كما بين ببرهان ١/١١. ونجيز على نقطة أ، ب، جـ، د: خطوط ز ح، ز ط، ط ك، ك ح، تماس الدائرة، كما بين ببرهان الشكل المضاف إلى ٣/١٦.

فمن أجل ان خط ز ح يماسّ الدائرة، وقد خرج من حيث يماسها خط أ جـ يمر بالمركز: فظاهر من برهان ٣/١٧ ان خط أ هـ قائم على خط ز ح، على زوايا قائمة. فالزاويتان اللتان عند أ: كل واحدة منهما قائمة. وكذلك الزوايا التي عند ب، جـ، د: كل واحدة منها زاوية قائمة.

فمن أجل ان زاويتي ز أ هـ، أ هـ ب كل واحدة منهما قائمة، فمن أجل ان خط أ هـ قد جاز على خطي أ ز، هـ ب، فصيَّر الزاويتين الداخلتين اللتين في جهة واحدة. مساويتين لزاويتين قائمتين، فظاهر من برهان ١/٢٨ ان خط أ ز مواز لخط هـ ب.

ومن أجل ان خط أ ز مواز لخط هـ ب، وقد أجيز عليهما خط ز ب، فبيِّن من برهان ١/٢٩ ان زاوية أ ز ب مساوية لزاوية هـ ب ط. فمن أجل ان زاوية ز ب هـ قائمة، تكون زاوية أ ز ب أيضاً قائمة. فسطح أ ب قائم الزوايا. وهو أيضاً متوازي الأضلاع، لأن الزاويتين عند أ، ز قائمتان. فخط ز ب مواز لخط أ هـ.

فمن أجل ان خط أ هـ مثل خط هـ ب، لأنهما خرجا من المركز إلى المحيط، وسطح أ ب متوازي الأضلاع، فبيِّن من برهان ١/٣٣ أن كل ضلعين يتقابلان متساويان. فضلع هـ ب مساوٍ لضلع أ ز، وخط أ هـ مساوٍ لخط ز ب. فسطح أ ب متساوي الأضلاع، قائم الزوايا.

وبمثل هذا البرهان نبين ان سطح ب جـ أيضاً متساوي الأضلاع قائم الزوايا. فخط ز ط بأسره مساوٍ لخط أ جـ وموازيه. وكذلك خط أ جـ مساوٍ لخط ح ك وموازيه. فخط ز ط إذن مساوٍ لخط ح ك وموازيه. وكذلك نبين ان خط ز

ح موازٍ لخط ط ك ومساويه. فشكل ز ح ك ط متساوي الأضلاع، قائم الزوايا. وذلك ما اردنا ان نبين.

وأما حلَّ هذا الشكل فانا ننزل ان المربع معمول على الدائرة. فمن أجل ان خط ز ح يماس الدائرة على نقطة أ، فإن الخط الذي يخرج من نقطة أ، على زوايا قائمة: يمر بالمركز.

وكذلك الخطوط الخارجة من نقـط ب، جـ، د، على زوايا قائمة، فإنها تنتهي إلى المركز. فنخرجها، ولتلتقِ على نقطة هـ، التي هي المركز.

ومن أجل ان زاويتي ز أ هـ، ز ب هـ كل واحدة منهما قائمة، وزاوية ز فرضت قائمة، فإن زاوية أ هـ ب الباقية: أيضاً قائمة.

وكذلك نبين ان زاوية أ هـ د قائمة. فقد خرج من نقطة هـ، من خط أ هـ، في جهتين مختلفتين، خطان، وهما خطا هـ ب، هـ د، فصارت الزاويتان اللتان عن جنبتي خط أ هـ مساويتين لزاويتين قائمتين. فخطا ب هـ، هـ د قد اتصلا على استقامة، فصارا خطاً واحداً. فخط ب د اذن قطر الدائرة. وكذلك نبين ان خط أ جـ قطر لها. وقد تقاطعا على نقطة هـ.

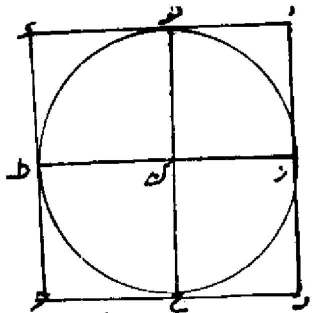
فبدأ الرياضي فركَّب البرهان من هذا الموضع، بان استخرج المركز، وأجاز عليه قطري أ جـ، ب د يتقاطعان على زوايا قائمة. وأجاز على أطراف الأقطار خطوطاً تماسّ الدائرة، ثم نظم سائر البرهان.

[المبرهنة ٨/ ٤]

الشكل الثامن من المقالة الرابعة

نريد أن نبين كيف نعمـل في شكل مربع متساوي الأضلاع قائم الزوايا معلوم: دائرة يحيط بها. فنقسم كل واحد من ضلعي أ د، أ ب بنصفين، على نقطتي هـ، ز، كما بين ببرهان ١٠/١. ونخرج خطي هـ ح، ز ط على زوايا

قائمة، يتقاطعان على علامة ك. فأقول ان علامة ك مركز الدائرة التي تقع في مربع أ ب جـ د.



الشكل ٤/٨

برهـانه: من أجل ان أ هـ مثل هـ د، فإن أ د ضعف أ هـ. وكذلك نبين أن أ ب ضعف أ ز. لكن أ د مساوٍ لخط أ ب. والأشياء المتساوية اذا كان كل واحـد منهـا ضعفـاً لمقـدار ما، فان المقـدارين متساويان. فخط أ هـ مساوٍ لخط أ ز.

ومن أجل ان كل واحدة من زاويتي أ هـ ك، أ ز ك، قائمة، وكذلك زاوية ز أ هـ أيضاً قائمة، تبقى زاوية ك قائمة. فالزوايا التي عند ك، الأربع إذن كل واحدة منها قائمة.

فمن أجل ان سطح أ ك متوازي الأضلاع، فظاهر من برهان ١/٣٤ ان كل خطين يتقابلان متساويان. فخط أ هـ مثل خط ز ك، وخط أ ز مثل خط هـ ك. فسطح هـ ز متساوي الأضلاع قائم الزوايا.

وبمثل هذا البرهان نبين أن سطح ك ب متساوي الأضلاع قائم الزوايا. فخط ك ح مثل خط ز ب. وكنا بينا ان خط هـ ك مثل خط أ ز. فخط هـ ح مثل خط أ ب. وخط ب أ ضعف خط أ ز. فخط هـ ح إذن ضعف خط هـ ك. فخط هـ ك اذن مثل خط ك ح. وكنا بينا ان خط هـ ك مثل ك ز فخطوط هـ ك، ك ح، ك ز، الثلاثة متساوية.

وبمثل هذا البرهان نبين ان خط أ د ضعف خط د هـ؛ وخط ز ط ضعف خط ك ط؛ وخط أ د، ز ط متساويان فكل واحد من خطي هـ د، ك ط متساويان. لكن خط هـ ك مثل خط هـ د. فخط ك ط إذن مثل خط ك هـ.

فالخطوط الأربعة الخارجة من نقط ك إلى نقطة هـ، ز، ط، ح: متساوية؛

آعني خطوط ك هـ، ك ز، ك ح، ك ط. فاذا جعلت نقطة ك مركزاً وادير ببعد أحد الخطوط الأربعة دائرة، فظاهر أنها تمر بمواضع النقط، ولا تقطع شيئاً من الأضلاع، لأن الزوايا التي عند النقط، كل واحدة منها قائمة.

فخطوط أ د، د جـ، جـ ب، ب أ: الأربعة تماس دائرة هـ ز ح ط، على نقط هـ، ز، ح، ط، لأنها خارجة من أطراف الأقطار. وذلك ظاهر من برهان ١٥/٣. فقد عملنا في مربع أ ب جـ د دائرة يحيط بها. وذلك ما أردنا أن نعمل.

وأما حلُّ هذا الشكل فإنا ننزل ان دائرة هـ ز ح ط معمولة في مربع أ ب جـ د المفروض. فمن أجل أن ك هـ مثل ك ز، وخط أ ب يماسّ الدائرة على نقطة ز، وكذلك خط أ د يماسُّها على نقطة هـ، فان الزاويتين اللتين عند ز، هـ، كل واحدة منهما قائمة. وزاوية أ أيضاً قائمة. فتبقى زاوية ك قائمة. وكذلك نبين ان زاوية هـ ك ط قائمة. فخط ز ك ط خط واحد مستقيم.

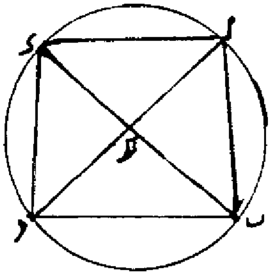
فنطلب ان خط أ هـ مثل خط هـ د، وخط أ ز مثل خط ز ب. وذلك بيِّن من برهان كلام إيرن، في ٣/١٦ لأن دائرة هـ ز ح ط يحيط بها مربع أ ب جـ د. فعلى ما بين في ٣/١٦: يتبين ان خط أ هـ مثل خط هـ ز، وخط أ ز مثل خط ز ب، وان كل واحد من خطي هـ ح، ز ط مستقيم، وأنهما قائمان على خطي أ د، أ ب على زوايا قائمة. فبدأ الرياضي من هذا الموضع فركَّب، بان قسم كل واحد من خطي أ د، أ ب بنصفين، وأخرج خطي هـ ح، ز ط على زوايا قائمة، ثم رتب البرهان الترتيب الذي قدمناه.

[المبرهنة ٩/ ٤]

الشكل التاسع من المقالة الرابعة

نريد ان نبين كيف نعمل على شكل مربع متساوي الأضلاع قائم الزوايا: دائرة تحيط به: فننزل ان الشكل المربع شكل أ ب جـ د، ونريد أن نبين كيف

نعمل عليه دائرة تحيط به. فنخرج قطري المربع، وليكونا خطي أ جـ، ب د، يتقاطعان على نقطة هـ. فأقول ان نقطة هـ مركز للدائرة التي تحيط بمربع أ ب جـ د:



الشكل ٩/٤

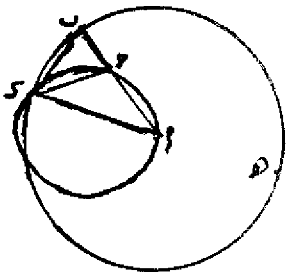
برهانه: من أجل ان خط أ ب مساوٍ لخط أ د، فإن زاوية أ ب د مساوية لزاوية أ د ب. وذلك بين من برهان ١/٤. وزاوية ب أ د فرضت قائمة. فظاهر من برهان ١/٣٢ ان كل واحدة من زاويتي أ ب د، ب د أ: نصف قائمة. وفرضنا [٥٦ ب] زوايا المربع الأربع: كل واحدة منها قائمة. فقد انقسمت كل واحدة منها بقسمين متساويين. والأقسام كلها متساوية. فزاوية ب أ هـ مساوية لزاوية أ ب هـ. فخط هـ أ مساوٍ لخط هـ ب. وكذلك زاوية هـ أ د مساوية لزاوية هـ د أ. فضلع هـ أ مساوٍ لضلع هـ د. وبمثل هذا البرهان نبين ان خط هـ جـ مثل خط هـ د. فالخطوط الأربعة متساوية: أعني خطوط هـ أ، هـ ب، هـ ج، هـ د. واذا جعل نقطة هـ مركزاً، وخُطَّ ببعد أحدها دائرة، فظاهر انها تمر بنقط أ، ب، جـ، د، فقد عملنا على مربع أ ب جـ د: دائرة أ ب جـ د تحيط به. وذلك ما أردنا ان نبين.

واما على طريق الحل: فإننا ننزل ان الدائرة معمولة على الشكل المربع. فنقول ان خطي د هـ، هـ ب قد اتصلا على استقامة، وكذلك خطا أ هـ، هـ جـ. فمن أجل ان الخطوط التي تخرج من المركز إلى المحيط متساوية، فإن خطوط هـ أ، هـ ب، هـ د، هـ جـ متساوية. فضلعا أ هـ، هـ ب مثل ضلعي أ هـ، هـ د، وقاعدة أ ب مثل قاعدة أ جـ. فزاوية أ هـ ب مثل زاوية أ هـ د. فقد خرج من خط أ هـ، من نقطة هـ: خطا هـ ب، هـ د، على استقامة، وصارا خطاً واحداً. فخط د ب اذن مستقيم. وكذلك خط أ جـ. فابتدأ الرياضي وأخرج خطي أ جـ، ب د، ثم نظم البرهان.

[المبرهنة ١٠ / ٤]

الشكل العاشر من المقالة الرابعة

نريد ان نبين كيف نعمل مثلثاً متساوي الساقين، تكون كل واحدة من زاويتيه اللتين على القاعدة: ضعف الزاوية التي يحيط بها الساقان.



الشكل ١٠/ ٤

فنفرض خطاً ما، وليكن خط أ ب، ونقسمه بقسمين: يكون السطح القائم الزوايا الذي يحيط به خط أ ب، وأحد القسمين: مثل المربع الكائن من القسم الآخر. وقسمة ذلك كما بين ببرهان ١١ من ٢. فننزل انا قد قسمناه على نقطة جـ. ونجعل نقطة أ مركزاً، ونخط ببعد أ ب دائرة عليها ب د هـ. ونخرج من نقطة ب: وتراً في دائرة ب د هـ: مساوياً لخط أ جـ. وقد تبين كيف يكون اخراج هذا: بالشكل المضاف إلى ١ من ٤. وليكن مثل خط ب د. ونصل خط جـ د وخط أ د. فأقول ان كل واحدة من زاويتي أ ب د، أ د ب: ضعف زاوية ب أ د.

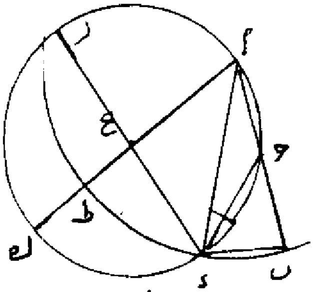
برهانه: انا نخط على مثلث أ جـ د دائرة أ جـ د. وقد تبين كيف نخط ذلك ببرهان ٥ من ٤. فمن أجل ان القائم الزوايا الذي يحيط به خط أ ب، ب جـ مساوٍ للمربع الكائن من خط ب د؛ ونقطة ب خارج دائرة أ جـ د، وقد خرج منها خطان أحدهما يقطعها، وهو خط أ ب، والآخر ينتهي اليها، وهو خط ب د. فمن أجل ان القائم الذي يحيط به خطا أ ب، ب جـ مساوٍ للمربع الكائن من خط ب د، فظاهر من برهان ٣٦ من ٣ ان خط ب د مماس لدائرة أ جـ د.

ولأنه قد خرج من علامة المماسة خط د جـ، فظاهر من برهان ٣١ من ٣: أن عن جنبتي خط جـ د زاويتين مساويتين للزاويتين اللتين في قطيعتيه المتبادلتين. فزاوية ب د جـ مساوية لزاوية جـ أ د. ونأخذ زاوية جـ د أ مشتركة. فيكون جميع

زاوية ب د أ مساوية لمجموع زاويتي جـ د أ، جـ أ د. لكن زاويتي جـ د أ، جـ أ د مساويتان لزاوية ب جـ د الخارجة من مثلث أ جـ د. وذلك ظاهر من برهان ٣١ من ١. فزاوية ب جـ د إذن مساوية لزاوية أ د ب. ومن أجل ان خط أ ب مساوٍ لخط أ د، لأنهما خرجا من المركز إلى المحيط، فبين من برهان ٥ من ١ ان زاوية أ ب د مساوية لزاوية أ د ب. فزاوية جـ ب د اذن مساوية لزاوية ب جـ د. فبين من برهان ٦ من ١ ان خط ب د مساوٍ لخط جـ د. وكنا فرضنا خط ب د مساوياً لخط أ جـ. فخط جـ د مساوٍ لخط أ جـ. وظاهر من برهان ٥ من ١ ان زاوية [٥٧ أ] جـ أ د مساوية لزاوية جـ د أ. وقد كان تبين ان زاوية جـ د ب مساوية لزاوية جـ أ د. فزاوية جـ د أ إذن مساوية لزاوية جـ د ب. فزاوية أ د ب إذن ضعف زاوية ب أ د. وكذلك زاوية د ب أ ضعف زاوية ب أ د.

فقد عملنا مثلث أ ب د متساوي الساقين، أعني خطي أ ب، أ د؛ وكل واحدة من الزاويتين اللتين فوق قاعدة ب د ضعف زاوية ب أ د. وذلك ما أردنا ان نبين.

قال المفسّر: انما يمكن ان نعمل على مثلث أ جـ د دائرة، متى علمت زاوية أ جـ د: قائمة هي أم منفرجة، أم حادة. فنقول: ان من أجل ان خط ب د يماس دائرة أ جـ د، وزاوية ب د أ حادة، . فإن الخط الذي يكون عموداً على نقطة د من خط ب د يكون قطراً لدائرة أ جـ د، ويكون وقوعه من خط د أ: كخط د ز. فقطعة د جـ أ إذن أصغر من نصف دائرة. فزاوية أ جـ د اذن منفرجة.



ملحمة ١٠/٤

وليكن مركز دائرة أ جـ د علامة ح. ونخرج خط أ ح، ونخرجه إلى علامة ط. فظاهر ان خط أ ط مساوٍ لخط أ د، لأنهما أخرجا من مركز دائرة ب د هـ إلى المحيط. فخط د ز إذن أعظم من خط أ ط. فخط ح ط أصغر من نصف قطر دائرة أ جـ د. فنخرجه إلى نقطة ك. فخط ح ك مساوٍ لنصف

قطر أ جـ د. فظاهر ان دائرة ب د هـ تقاطع دائرة أ جـ د. وذلك ما أردنا ان نبين.

واما على طريق الحل فانا ننزل ان مثلث أ ب د قد عمل. وان كل واحدة من زاويتي أ ب د، أ د ب ضعف زاوية ب أ د. فنقسم زاوية أ د ب بنصفين، بخط د جـ. فكل واحد من القسمين اذن مساوٍ لزاوية جـ أ د. فنطلب ان القائم الزوايا الذي يحيط به خطا أ ب، ب جـ مساوٍ لمربع أ جـ.

فمن أجل ان زاوية جـ أ د مساوية لزاوية أ د جـ، فإن خط أ جـ مساوٍ لخط جـ د. وزاوية ب جـ د الخارجة مثل زاويتي أ د جـ، جـ أ د، فهي اذن ضعف زاوية جـ أ د. فزاوية ب جـ د اذن مثل كل واحدة من زاويتي أ ب د، أ د ب. فخط د جـ مساوٍ لخط ب د. فخط أ جـ مساوٍ لخط د ب. وزاوية أ جـ د مساوية لزاويتي جـ ب د، جـ د ب. فهي اذن أعظم من زاوية ب جـ د. فزاوية أ جـ د منفرجة فنقيم على نقطة د خط د ز على زوايا قائمة [على خط ب د]. فظاهر انا اذا عملنا على مثلث أ جـ د دائرة أ جـ د، فإن خط د ز يكون قطراً للدائرة، وخط ب د يماسُّها.

فنقطة ب خارج دائرة أ جـ د، وقد خرج منها خطا أ ب، ب د: خط أ ب يقطعها، وخط ب د يماسها. فالقائم الزوايا الذي يحيط به خطا أ ب، ب جـ مساوٍ للمربع الكائن من خط ب د.

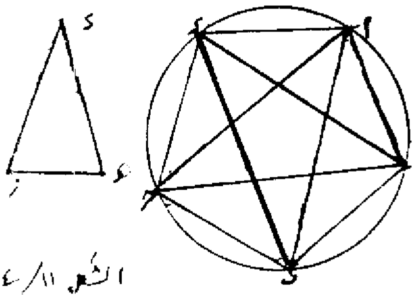
فبدأ الرياضي من هذا الموضع، وفرض خطاً ما عليه، كخط أ ب، ثم قسمه على نقطة جـ بقسمين يكون القائم الزوايا الذي يحيط به خطا أ ب، ب جـ مساوياً للمربع الكائن من خط أ جـ. ثم نظم سائر البرهان. وذلك ما اردنا ان نبين.

[المبرهنة ١١/ ٤]

الشكل الحادي عشر من المقالة الرابعة

نريد ان نبين كيف نخط في دائرة مفروضة شكلاً مخمساً متساوي الأضلاع

والزوايا. فننزل ان الدائرة المفروضة دائرة أ ب جـ. ونبين كيف نخط فيها شكلاً مخمساً متساوي الأضلاع. فنعمل مثلثاً متساوي الساقين تكون كل واحدة من زاويتيه اللتين على القاعدة: ضعف الزاوية التي يحيط بها الساقان، كما بينا عمله بالشكل الذي قبل هذا. وننزل انه مثلث د هـ ز. ونعمل في دائرة أ ب جـ مثلثاً تكون زواياه مساوية لزوايا مثلث د هـ ز. وقد بين عمل ذلك ببرهان ٢ من ٤. وليكن مثلث أ ب جـ، فمن أجل ان كل واحدة من زاويتي أ ب جـ، أ جـ ب ضعف لزاوية ب أ جـ، فانا نقسم كل واحدة منهما بنصفين [٥٧ ب] بخطي ب د، جـ هـ، كما بين قسمة ذلك ببرهان ٢٣ من ٣ ونصل أ هـ، هـ ب، ب جـ، جـ د، د أ.



الشكل ١١/٤

فلأن كل واحدة من زاويتي أ ب جـ، أ جـ ب ضعف زاوية ب أ جـ، وقد قسمت كل واحدة منهما بقسمين متساويين، فإن زواياه ب أ جـ، أ ب د، د ب جـ، أ جـ هـ، ب جـ هـ: الخمس متساوية. ولأن في محيط دائرة أ ب جـ زوايا متساوية، فظاهر من برهان ٢٨ من ٣ ان هذه الزوايا توترها قسي متساوية؛ وهي قسي أ د، د جـ، جـ ب، ب هـ، هـ أ المتساوية. ومن أجل ان في دائرة أ ب جـ: أوتار أ د، د جـ، جـ ب، ب هـ، هـ أ تفصل قسياً متساوية، فبين من برهان ٢٨ من ٣ ان هذه الأوتار متساوية فمخمس أ د جـ ب هـ متساوي الأضلاع.

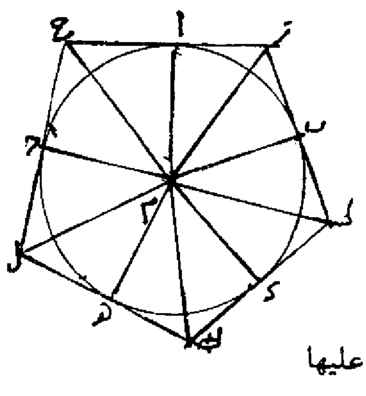
وأيضاً فان قوس ب هـ مساوية لقوس جـ د، ونجعل قوس هـ أ د مشتركة، فجميع قوس ب هـ أ د مساوية لقوس جـ د أ هـ. وقوس ب هـ أ د توتر زاوية د جـ ب، وقوس جـ د أ هـ توتر زاوية جـ ب هـ. فبين من برهان ٢٦ من ٣ ان زاوية هـ ب جـ مساوية لزاوية ب جـ د.

وبمثل هذا البرهان نبين ان زاوية جـ ب هـ مساوية لزاوية أ هـ ب. ونبين ان زوايا المخمس الخمس كلها متساوية. فمخمس أ ب جـ د هـ متساوي الأضلاع والزوايا. فقد عملنا في دائرة أ ب جـ شكلاً مخمساً متساوي الأضلاع والزوايا. وذلك ما أردنا ان نبين.

وأما حل هذا الشكل فانا ننزل ان مخمس أ د جـ ب هـ معمول في دائرة أ ب جـ المفروضة. فنطلب ان زاوية أ جـ هـ مساوية لزاوية ب جـ هـ، وزاوية أ ب د مساوية لزاوية جـ ب د. فمن أجل ان مخمس أ د جـ ب هـ متساوي الأضلاع، والأوتار المتساوية تفصل قسياً متساوية، فقسي أ د، د جـ، جـ ب، ب هـ، هـ أ: متساوية. فمن أجل ان القسي المتساوية من الدوائر المتساوية توتر زوايا متساوية، على المحيط كانت، ام على المركز، فزاوية أ ب د مساوية لزاوية د ب جـ؛ وزاوية أ جـ هـ مساوية لزاوية ب جـ هـ؛ فكل واحدة من زاويتي أ ب جـ، أ جـ ب من مثلث أ ب جـ: ضعف زاوية ب أ جـ. فبدأ الرياضي من هذا الموضع، وعمل في دائرة أ ب جـ: مثلث أ ب جـ متساوي الساقين، كل واحدة من زاويتيه ضعف الزاوية الأخرى. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ١٢/ ٤]

الشكل الثاني عشر من المقالة الرابعة



نريد ان نبين كيف نعمل على دائرة مفروضة شكلاً مخمساً متساوي الأضلاع والزوايا. فننزل دائرة أ ب جـ المفروضة، ونبين كيف نعمل عليها سطحاً مخمساً يحيط بها، متساوي الأضلاع والزوايا. فنعمل فيها مخمساً متساوي الأضلاع والزوايا، كما بينا عمله ببرهان الشكل الذي قبل هذا. ونعلم على النقط التي عليها

ماسّت زوايا المخمس محيط الدائرة، علامات أ، ب، جـ، د، هـ. ونجيز على هذه العلامات خطوطاً تماسّ الدائرة. واجازتها كما بين ببرهان الشكل المضاف إلى ١٦ من ٣. ولتكن خطوط ز ح، ح ل، ل ك، ك ط، ط ز. فأقول ان مخمس ز ط ك ل ح متساوي الأضلاع قائم الزوايا.

برهانه انا نستخرج مركز الدائرة، وليكن نقطة م، كما بين استخراجه ببرهان ١ من ٣. ونخرج منها إلى علامات المماسة خطوط م أ، م ب، م د، م هـ، م جـ. ونخرج أيضاً منها إلى الزوايا خطوط م ح، م ز، م ط، م ك، م ل. فمن أجل ان نقط أ، ب، د، هـ، جـ هي النقط التي عليها ماسّ محيط الدائرة المخمس المعمول فيها، فظاهر من برهان الشكل المتقدم ان قسي أ ب، ب د، د هـ، هـ جـ، جـ أ متساوية. [٥٨ أ] فالزوايا التي عند المركز، التي توترها هذه القسي المتساوية: هي أيضاً متساوية، كالذي بين ببرهان ٢٦ من ٣. فزاوية ب م أ مساوية لزاوية أ م جـ.

ومن أجل ان نقطة ز خارج دائرة أ ب جـ، وقد خرج منها خطا ز أ، ز ب يماسان الدائرة، فظاهر من برهان ١٦ من ٣، وما زاد فيه إيرن ان خط از مساوٍ لخط ز ب. وبهذا البرهان يتبين ان خط أ ح مساوٍ لخط ح جـ.

فمن أجل ان خط أ ز مثل خط ز ب، ونأخذ خط ز م مشتركاً، يكون خطا أ ز، ز م مثل خطي ب ز، ز م؛ وقاعدة م ب مساوية لقاعدة م أ، لأنهما خرجا من المركز إلى المحيط، فظاهر ببرهان ٨ من ١ ان زاوية أ ز م مساوية لزاوية ب ز م، ومثلث أ ز م مساوٍ لمثلث ب ز م؛ وزاويتا ز أ م، ز م أ الباقيتان مساويتان للزاويتين الباقيتين: كل واحدة مثل نظيرتها: زاوية ز أ م مثل زاوية ز ب م، وزاوية ز م أ مثل زاوية ب م ز.

ويمثل هذا البرهان نبين ان زاوية أ م ح مساوية لزاوية ح م جـ. فمن أجل انه قد تبين ان زاوية ب م ز مساوية لزاوية ز م أ، وزاوية أ م ح مساوية لزاوية ح

م جـ، فزاوية ب م أ ضعف زاوية ز م أ؛ وزاوية جـ م أ ضعف زاوية ح م أ.

وقد تبين ببرهان التدبير المتقدم، كما قلنا، ان زاوية ب م أ مساوية لزاوية أ م جـ. والأشياء التي هي أنصاف لأشياء متساوية، فإن الأشياء متساوية. فزاوية ز م أ مساوية لزاوية أ م ح. لكن زاوية م أ ح قائمة، وهي مثل زاوية م أ ز القائمة لأن م أ أخرج من المركز إلى موضع المماسة. وقد تبين برهان ٧ من ٣ ان زاويتي ز أ م، ز م أ من مثلث ز م أ: مساويتان لزاويتي م أ ح، ح م أ من مثلث أ م جـ. ونأخذ ضلع أ م مشتركاً. فظاهر من برهان ٢٦ من ١ ان الضلعين الباقيين من مثلث ز م أ مساويان للضلعين الباقيين من مثلث ح م أ: كل ضلع لنظيره: فضلع م ز مثل ضلع م ح، وضلع ز أ مثل أ ح، والزاوية الباقية مساوية للزاوية الباقية: أعني زاوية م ز أ مساوية لزاوية م ح أ.

ويمثل هذا البرهان نبين ان ح جـ مثل جـ ل، وان ز ب مثل ب ط، وان ط د مثل د ك، وان ك هـ مثل هـ ل. ومن أجل ان ز أ مثل أ ح، وان ل جـ مثل جـ ح، فظاهر ان خط ز ح ضعف أ ح، وان خط ل ح ضعف ح جـ؛ وقد تبين ان أ ح مثل ح جـ. واذا كانت أشياء هي أضعاف لأشياء متساوية، فهي أيضاً متساوية. فخط ز ح إذن مساوٍ لخط ل ح.

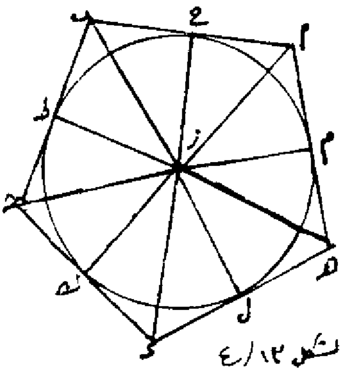
وبمثل هذا التدبير نبين ان خط ط ز مثل خط ز ح، وخط ك ل مثل خط ل ح، وخط ط ك مثل خط ك ل. فأضلاع المخمس الخمسة اذن قد تبين انها متساوية. وبمثل هذا البرهان نبين ان الزوايا أيضاً متساوية: وذلك ان زاوية ب ز م مساوية لزاوية م ز أ، وزاوية أ ح م مثل زاوية جـ ح م. فزاوية ب ز أ ضعف زاوية م ز أ، وزاوية جـ ح أ ضعف زاوية م ح أ، وقد تبين ان زاوية م ح أ مساوية لزاوية م ز أ. واذا كانت أشياء هي أضعاف متساوية لأشياء أخر متساوية؛ فان الأشياء متساوية. فزاوية ب ز أ اذن مساوية لزاوية أ ح جـ. وكذلك نبين ان سائر الزوايا الباقية من زوايا المخمس متساوية. فزوايا المخمس كلها متساوية. وقد

كنا بينا ان أضلاعه أيضاً متساوية. فقد عملنا على دائرة أ ب جـ: شكلاً مخمساً متساوي الأضلاع والزوايا، يحيط بها. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ١٣/ ٤]

الشكل الثالث عشر من المقالة الرابعة

نريد ان نبين كيف نخط في مخمس متساوي الأضلاع والزوايا دائرة يحيط بها. فلننزل أنه مخمس أ ب جـ د هـ. فنقسم [٥٨ ب] كل واحدة من زاويتي أ، ب بنصفين، بخطي أ ز، ب ز، كما بين ببرهان ٩ من ١، وليكن التقاؤهما على نقطة ز. ونخرج إلى سائر الزوايا خطوط ز هـ، ز د، ز جـ. فبين ان هذه الخطوط التي خرجت من نقطة ز إلى زوايا المخمس: كلها متساوية. فمن أجل ان قسمنا زاويتي أ، ب، كل واحدة منهما بنصفين. فزاويتا أ، ب متساويتان. وأنصاف المتساوية متساوية.



الشكل ١٢/٤

فزاوية أ ب ز مساوية لزاوية ب أ ز. فمثلث أ ز ب: زاويتاه اللتان فوق القاعدة متساويتان. فظاهر من برهان ٦ من ١ ان ساق أ ز مساوٍ لساق ب ز. وأيضاً فمن أجل ان ضلع هـ أ مساوية لضلع أ ب، وضلع أ ز مساوٍ لضلع ب ز، فضلعا هـ أ، أ ز من مثلث هـ أ ز: مساويان لضلعي أ ب، ب ز من مثلث أ ب ز، كل ضلع لنظيره؛ وزاوية هـ أ ز مساوية لزاوية أ ب ز. فظاهر من برهان ٤ من ١. ان قاعدة هـ ز مساوية لقاعدة أ ز. وخط أ ز كنا بينا انه مساوٍ لخط ب ز. فالخطوط الثلاثة متساوية، أعني خطوط ب ز، أ ز، هـ ز. وزاوية أ هـ ز مساوية لزاوية ب أ ز.

لكن زاوية ب أ ز نصف زاوية ب أ هـ. فزاوية أ هـ ز اذن نصف زاوية أ هـ د. فزاوية ز هـ د مثل زاوية ز أ هـ. وكذلك نبين ان خطي ز د، ز جـ متساويان

ومساويان لثلاثة الخطوط الآخر. فالخطوط الخمسة الخارجة من نقطة ز الى زوايا المخمس الخمس متساوية.

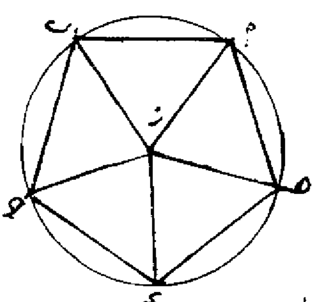
فنخرج من نقطة ز إلى أضلاع المخمس: أعمدة، كما بين ببرهان ١٢ من ١، ولتكن أعمدة ز ح، ز ط، ز ك، ز ل، ز م. فلأن زاوية ح أ ز مساوية لزاوية م أ ز، وزاوية أ ح ز القائمة مساوية لزاوية أ م ز القائمة، فزاويتا ح أ ز، أ ح ز من مثلث أ ح ز: مساويتان لزاويتي م أ ز، أ م ز من مثلث أ م ز: كل زاوية لنظيرتها. ونأخذ ضلع أ ز مشتركاً فظاهر ببرهان ٢٦ من ١ ان قاعدة ح ز مساوية لقاعدة م ز.

وبهذا البرهان نبين ان سائر الأعمدة متساوية، أعني أعمدة ز ل، ز ك، ز ط، ز ح. فظاهر ان نقطة ز مركز للدائرة التي تقع في مخمس أ ب جـ د هـ وذلك انا اذا جعلنا نقطة ز مركزاً، وخططنا ببعد أحد هذه الخطوط، دائرة، فان محيط الدائرة يمر بنقط ح، ط، ك، ل، م، ويصير كل واحد من هذه الخطوط نصف قطر للدائرة. فأضلاع المخمس قائمة على اطراف الاقطار، على زوايا قائمة، عند نقط ح، ط، ك، ل، م.

فظاهر من برهان ١٥ من ٣ ان اضلاع المخمس مماسة لدائرة ح ط ك ل م. ويقال ان دائرة في شكل، اذا كانت أضلاع الشكل تماسّ الدائرة. فقد عملنا في مخمس أ ب جـ د هـ دائرة ح ط ك ل م يحيط بها. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٤/١٤]

الشكل الرابع من المقالة الرابعة



نريد ان نبين كيف نعمل على مخمس مفروض، متساوي الأضلاع والزوايا: دائرة تحيط به. فلننزل انه مخمس أ ب جـ د هـ. فنقسم كل واحدة من زاويتي جـ، د بنصفين، بخطي جـ ز، د ز، كما بين ببرهان ٩ من ١، وليكن التقاء الخطين

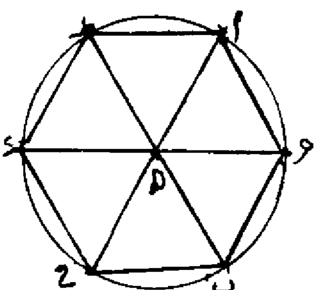
على نقـطة ز. فأقـول ان نقطة ز مركز للدائرة التي تحيط بالمخمس.

برهـانـه: انا نخرج خطوط ز ب، ز أ، ز هـ. فمن أجل زاويتي جـ، د المتساويتين، قد قسمت كل واحدة منهما بنصفين، بخطي ز جـ، ز د، فمن أجل ان انصاف المتساوية متساوية، فزاوية ز جـ د مساوية لزاوية ز د جـ. فظاهر من برهان ٦ من ١ ان ضلع د ز مساوٍ لضلع ز جـ. فلأن ضلع ب جـ مساوٍ لضلع جـ د، وقد تبين ان [٥٩ أ] خط ز جـ مثل خط ز د، فضلعا ز د، ز جـ من مثلث ز د جـ مساويان لضلعي ز جـ، ز ب من مثلث ز جـ ب؛ وزاوية ز د جـ مساوية لزاوية ز جـ ب. فقاعدة ز ب مساوية لقاعدة ز جـ. وكنا بينا ان خط ز جـ مساوٍ لخط ز د. فخطوط ز جـ، ز د، ز ب: الثلاثة، متساوية.

وبهذا البرهان نبين ان الخطين الباقيين أيضاً متساويان، أعني خطي ز أ، ز هـ. فالخـطوط الخمسـة الخارجة من نقطة ز الى زوايا المخمس الخمس متساوية. وظاهر انا اذا جعلنا علامة ز مركزاً، وخططنا ببعد أحد هذه الخطوط الخمسة دائرة، فان الدائرة تمر بنقط أ، ب، جـ، د، هـ فعلامة ز اذن مركز الدائرة. فقد خططنا على مخمس أ ب جـ د هـ دائرة. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ١٥/ ٤]

الشكل الخامس عشر من المقالة الرابعة



الشكل ١٥/ ٤

نريد ان نبين كيف نعمل في دائرة مفروضة شكلاً مسدساً متساوي الأضلاع والزوايا، تحيط به. فننزل انها دائرة أ ب جـ د، وقطرها د جـ، ومركزها نقطة هـ. فنبين كيف نعمل فيهـا مسـدساً متساوي الأضلاع والـزوايا. فنجعل نقطة جـ مركزاً ونخط ببعد جـ هـ دائـرة هـ أ ز ب. ونـــصـــل خطي أ هـ، هـ ب. ونخرجهما على الاستقامة يقطعان دائرة أ ب جـ، وينتهيان الى محيطها، الى

نقطتي ح، ط. ونصل بين اطراف النقط بخطوط أ جـ، جـ ب، ب ح، ح د، د ط، ط أ. فمن أجل ان مركز دائرة أ ب جـ د نقطة هـ، وقد خرج منها الى المحيط خطا هـ أ، هـ ب فهما اذن متساويان. وأيضاً فلأن نقطة جـ مركز دائرة هـ ب ز، وقد خرج منها الى المحيط جـ هـ، جـ أ، فخط أ جـ مثل خط جـ هـ. فالخطوط الثلاثة متساوية، أعني خطوط أ هـ، هـ جـ، جـ أ. فمثلث أ جـ هـ متساوي الأضلاع. فظاهر من برهان ٣٢ من ١ أن كل زاوية من زواياه: ثلثا قائمة. فجميع زاوية أ هـ ب إذن: قائمة وثلث.

ومن أجل ان خط أ هـ قائم على خط ط ب المستقيم، فظاهر من برهان ١٣ من ١ ان زاويتي ط هـ أ، أ هـ ب مساويتان لزاويتين قائمتين. وقد تبين ان زاوية أ هـ ب قائمة وثلث. فتبقى زاوية ط هـ أ ثلثي قائمة. ومن أجل ان خطي أ ح، ط ب يتقاطعان على نقطة هـ، فظاهر من برهان ١٥ من ١ أن زاوية أ هـ ط مساوية لزاوية ب هـ ح. فزاوية ب هـ ح اذن ثلثا قائمة.

وبهذا البرهان نبين ان زاوية أ هـ جـ مساوية لزاوية د هـ ح، وزاوية د هـ ح أيضاً ثلثا قائمة. واذا كانت زوايا متساوية، على مركز دائرة، او على المحيط، فانها على قسي متساوية. وذلك بين من برهان ٢ من ٣. فقسي أ جـ، جـ ب، ب ح، ح د، د ط، ط أ: متساوية. والقسي المتساوية من دائرة واحدة فإنها تفصلها أوتار متساوية. وذلك ظاهر من برهان ٢٨ من ٣. فالأضلاع الستة المحيطة بالمسدس الذي في دائرة أ ب جـ د: متساوية.

ونبين الآن ان زواياه أيضاً متساوية. فمن أجل ان قوس د ح مساوية لقوس ب جـ. ونأخذ قوس د ط أ جـ مشتركة، فجميع قوس ح د ط جـ مساوية لجميع قوس ب جـ أ ط د. والقسي المتساوية من دائرة واحدة، فانها توتر زوايا متساوية، كما بين ببرهان ٢٦ من ٣. فزاوية ح ب جـ مساوية لزاوية د ح ب. وهكذا نبين ان سائر زوايا المسدس متساوية.

فقد عملنا في دائرة أ ب جـ د المفروضة شكلاً مسدساً متساوي الأضلاع والزوايا، تحيط به. وذلك ما أردنا ان نبين.

ونقفو في باقي الثلاث الصور الباقية مثل الذي دبرنا من أ مر: بأن نعمل على دائرة أيضاً شكلاً مسدساً متساوي الأضلاع والزوايا [**٥٩ ب**] ونعمل على مسدس معلوم متساوي الأضلاع والزوايا: دائرة تحيط به؛ ونعمل في مسدس معلوم متساوي الأضلاع والزوايا دائرة يحيط بها.

وقد تبين ايضاً ان ضلع المسدس المعمول في دائرة مساوٍ لنصف قطر تلك الدائرة.

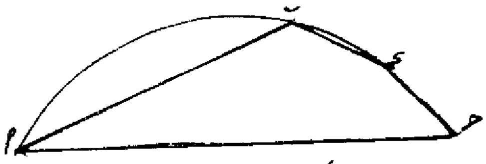
قال ايرن: قد يسأل قوم فيقولون: لماذا وضع الرياضي رسم المسدس، ولم يضع رسم المعشر؟ فان قال قائل: ان المسدس يحتاج اليه في الأشكال السطحية التي هي مقدمة للمجسمات، فنقول نحن: ان الحاجة الى المعشر ايضاً ليس بدون الحاجة الى المسدس في المجسمات. وأيضاً فإن رسم المسدس والمعشر بيِّن. وذلك لأنا اذا رسمنا في الدائرة المفروضة مثلثاً متساوي الأضلاع، وقسمنا قسي الأضلاع، كل واحدة بنصفين، ووصلنا العلامات، نكون قد رسمنا في الدائرة المفروضة شكلاً مسدساً متساوي الأضلاع والزوايا. وكذلك نفعل في المعشر: بأن نرسم في الدائرة مخمساً. فلما كانت هذه الأشكال بينة، على ما وصفنا، وضع رسم المسدس، وترك رسم المعشر.

وأما نحن فنقول في ذلك بان الرياضي لم يضع رسم المسدس لهذا، لكن لأن يبرهن فيه انه اذا كان في دائرة مسدس متساوي الأضلاع والزوايا، فإن ضلع المسدس مساوٍ للخط المخرج من المركز الى المحيط؛ واذا كان الخط المخرج من المركز الى المحيط مساوياً لضلع شكل متساوي الأضلاع في الدائرة، فإنه ضلع مسدس: لأن هذا نحتاج اليه ضرورة في أشكال المجسمات.

وأنا أقول ما قال ايرن، وأزيد زيادة ليست باليسيرة، وهي أنه مع انه يستشهد به في المجسمات، فإنه دلَّ به على عمل سائر الأشكال التي تجرى مجراه من معشر وغيره.

[المبرهنة ١٦/ ٤]

الشكل السادس عشر من المقالة الرابعة



الشكل ١٦/ ٤

نريد ان نبين كيف نرسم في دائرة مفروضة شكلاً ذا خمس عشرة قاعدة متساويات، ومتساوي الزوايا، تحيط به الدائرة فننزل انها دائرة أ ب جـ. فلنوقع في الدائرة خط أ جـ، وليكن مساوياً لضلع المثلث [المتساوي الأضلاع] الذي يقع في هذه الدائرة، كما بين ببرهان ١ من ٤ فظاهر ان خط أ جـ يفصل قوساً تقبل خمس قواعد من أضلاع ذي الخمس عشر قاعدة.

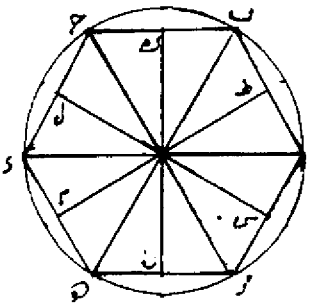
وأيضاً فانا نخرج من نقطة أ خط أ ب في قوس أ جـ، مساوياً لضلع المخمس الذي يقع في دائرة أ ب جـ. فمن البين أيضاً ان خط أ ب يفصل قوساً تقبل ثلاث قواعد من قواعد ذي الخمس عشرة قاعدة. فيبقى اذن قوس ب جـ التي هي فضل القوس العظمى على الصغرى. فظاهر انها تقبل قاعدتين من قواعد ذي الخمس عشر قاعدة.

فنقسم اذن قوس جـ ب بنصفين، على نقطة د، كما بين ببرهان ٢٩ من ٣. وكل واحدة من قوسي ب د، د جـ تقبل خطاً مساوياً لخط ذي الخمس عشرة قاعدة. وذلك بين من برهان ٢٨ من ٣. فاذا قسمنا باقي قوس جـ أ ب بقوس جـ د، بان نبتدي من نقطة جـ، فنخرج في قوس جـ أ خطاً مساوياً لوتر جـ د، كما بين ببرهان ١ من ٤؛ ثم لا نزال نفعل ذلك حتى نستوفي جميع قوس جـ أ ب، فنكون حينئذ قد قسمنا محيط دائرة أ ب جـ بخمسة عشر قسماً متساوية،

توترها خطوط مستقيمة. فنكون قد عملنا شكلاً ذا خمس عشرة قاعدة متساويات، ومتساوي الزوايا. ونعلم تساوي زواياه كما علمنا زوايا شكلي المخمس والمسدس. وذلك ما أردنا ان نبين.

[٦٠ أ] قال ايرن: هذا الشكل على ما قاله الرياضي. وقد نحتاج اليه في الأكر التي تعلق. لأن في هذه الأكر نحتاج ان تكون القوس التي بين دائرة معدل النهار، وبين كل واحدة من دائرتي المنقلبين: قوساً يقع فيه شكل ذو اثنتي عشرة قاعدة. وقد ذكر ذلك المنجمون، فإن القوس التي بين دائرة معدل النهار، واحدى دائرتي المنقلبين من الدوائر التي تمر بأقطاب الكرة، أعني اقطاب الكل، تقبل شكلاً ذا اثنتي عشرة قاعدة متساويات. ومن أجل هذا ذكره الرياضي لئلا يدع شيئاً غير مبرهن.

واذا اتضح ما قلنا، فنبين الأشكال كلها بياناً واضحاً، فانا لا نتثاقل ان نضع شكلاً يمكن به من أراد ان يرسم على شكل متساوي الأضلاع كثير الزوايا: دائرة؛ وكذلك ان اراد ان يرسم في داخله دائرة. ونقدم لذلك مقدمة، فنقول: كل شكل يحيط به خطوط مستقيمة، متساوي الأضلاع والزوايا، فان في داخله نقطة: كل الخطوط المستقيمة الخارجة منها إلى زوايا الشكل متساوية. وأيضاً فأقول ان كل الأعمدة الخارجة من تلك النقطة إلى أضلاع الشكل فهي أيضاً متساوية. وهذه النقطة هي مركز الشكل الكثير الزوايا، ومركز الدائرة المخطوطة عليه والمخطوطة فيه.



مثال ذلك انا نفرض شكل أ ب جـ هـ ز، وننزل أنه متساوي الأضلاع والزوايا. فأقول ان في داخله نقطة كما ذكرنا.

برهان ذلك انا نقسم زاويتين من زواياه، كل واحدة منهما بنصفين، فلتكونا متتاليتين، وننزل انهما زاويتا أ ب جـ، ب جـ د، بخطي ب ح، ح

جـ، وتـلاقيا داخـل الشكل، على نقطة ح. فأقول ان علامة ح مركز الشكل والدائرة المرسومة خارجه.

برهانه: ان زاوية جـ ب ح مساوية لزاوية ب جـ ح. فخط ب ح إذن مساوٍ لخط جـ ح. وأيضاً فان خط أ ب مساوٍ لخط ب جـ، وخط جـ ح مساوٍ لخط ب ح، فخطا أ ب، ب ح من مثلث أ ب ح: مساويان لخطي ب جـ، جـ ح من مثلث ب جـ ح، كل ضلع لنظيره؛ وزاوية ب أ ح مساوية لزاوية جـ ب ح. فقاعدة ب ح مساوية لقاعدة أ ح. فخطوط جـ ح، ب ح، أ ح، الثلاثة متساوية، وزاوية ب أ ح مساوية لزاوية جـ ب ح ولأن جميع زواية ز أ ب مساوية لجميع زاوية أ ب جـ، وزاوية أ ب جـ، وزاوية أ ب جـ ضعف زاوية جـ ب ح، فان زاوية ز أ ب ضعف زاوية ب أ ح. فزاوية ز أ ح اذن مساوية لزاوية ب أ ح. فقد انقسمت زاوية ز أ ب أيضاً بنصفين، بخط أ ح، وتساوت خطوط أ ح، ب ح، جـ ح.

ويمثل هذا البرهان نبين ان سائر الخطوط الخارجة من نقطة ح إلى زوايا الشكل، كلها متساوية. فعلى مركز ح، وببعد واحد من هذه الخطوط الخارجة إلى الزوايا، نخط دائرة تحيط بشكل أ ب جـ د هـ ز.

ونقول أيضاً ان الدائرة المعمولة في شكل أ ب جـ هـ ز مركزها هذه النقطة، وان محيطهـا يمـر بالنقط التي اليها انتهت الأعمدة الخارجة من نقطة ح إلى اضلاع الشكل. فنخرج أعمدة ح ط، ح ك، ح ل، ح م، ح س.

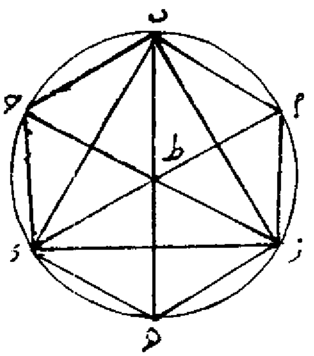
ولأن زاوية ح ط ب مساوية لزاوية ح ك ب، وزاوية ح ب ط مساوية لزاوية ح ب ك، ونأخذ خط جـ ب مشتركاً فظاهر من برهان ٢٦ من ١ ان خط ح ط مساوٍ لخط ح ك.

ويمثل هذا البرهان نبين ان سائر خطوط ح ل، ح م، ح ن، ح س متساوية. فظاهر انا متى جعلنا نقطة ح مركزاً، وخططنا ببعد أحد هذه الخطوط دائرة، فانها تجوز على جميع نقط ط، ك، ل، م، ن، س؛ وخطوط أ ب، ب جـ، جـ د،

د هـ، هـ ز أعمدة على الخطوط الخارجة من نقطة ح التي هي المركز.

فظاهر من برهان ١٥ من ٣ ان أضلاع الشكل مماسة للدائرة المعمولة فيه. وذلك ما أردنا ان نبين.

[٦٠ ب] وقال ايرن أيضاً ولنبين ان الخطين المستقيمين اللذين يقسمان زاويتي أ ب جـ، ب جـ د بنصفين يلتقيان داخل شكل أ ب جـ د هـ ز. فنفرض شكلاً متساوي الأضلاع والزوايا، وليكن مسدساً عليه أ، ب، جـ، د، هـ، ز ونصل خطوط ب د، د ز، ز ب، ز جـ، ب هـ. فمن أجل ان خطي ب جـ، جـ د مساويان لخطي أ ب، أ ز، وزاوية د جـ ب مساوية لزاوية ز أ ب، فإن قاعدة ز ب مساوية لقاعدة ب د؛ وسائر الزوايا مثل سائر الزوايا. فزاوية أ ب ز مساوية لزاوية جـ ب د.



٤/٤٦ ملحق ٣

ومن أجل ان زاوية أ ب جـ قد انقسمت بنصفين، بخط ب ح، وصارت زاوية أ ب ز مساوية لزاوية د ب جـ، فان زاوية ز ب ح مساوية لزاوية د ب ح.

ومن أجل ان خط ز ب مثل خط د ب، فإنا اذا اخذنا ح ب مشتركاً، يكون خطا ز ب، ب ح مثل خطي د ب، ب ح، وزاوية ز ب ح مساوية لزاوية د ب ح. فقاعدة ز ح مثل قاعدة ح د، وزاوية ز ح ب مثل زاوية د ح ب. فزاوية ز ح ب إذن قائمة.

ونفصل خط هـ ح. فمن أجل ان ز هـ مثل هـ د، وخط هـ ح مشترك، يكون كلا ز هـ، هـ ح، مثل كلا د هـ، هـ ح، وقاعدة ح ز مثل قاعدة ح د. فزاوية د ح هـ مساوية لزاوية ز ح هـ فزاوية ز هـ ح قائمة. وقد تبين ان زاوية ز ح ب أيضاً قائمة. فخط هـ ح ب إذن مستقيم.

فالخط إذن القاسم لزاوية ب حـ د بنصفين: خط جـ ز. وقد انتهى إلى

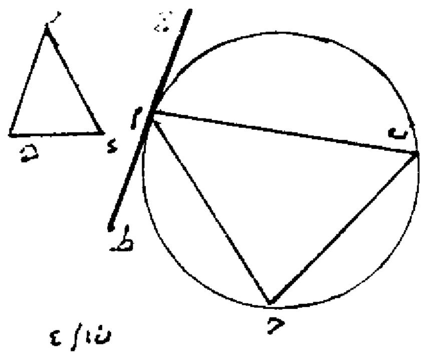
زاوية أ ز د، وقطع خط ب ح هـ، القاسم لزاوية أ ب جـ بنصفين، على نقطة ط، داخل الشكل، وذلك ما أردنا ان نبين.

فاما الأشكال التي عدد أضلاعها فرد، فإن الخطين اللذين يقسمان زاويتي ب، جـ يقعان أعمدة على أضلاع الشكل. ويتبين أيضاً أنهما يلتقيان داخل الشكل. وذلك ما أردنا ان نبين.

تمت المقالة الرابعة بحمد الله ومنّه

ج ـ مُبرهنات النَّسَوي

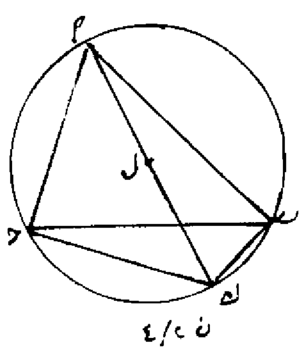
[المبرهنة ١/ ٤ تقابل ٢/ ٤ عند الحجاج]



[٢٥ ب] نريد أن نعمل في دائرة معلومة مثلثاً زواياه مثل زوايا مثلث معلوم كدائرة أ ب جـ، ومثلث د ز هـ، فنجيز على أ خط ح أ ط يماس الدائرة. ونعمل زاوية ح أ ب مثل زاوية هـ، وزاوية ط أ جـ مثل زاوية ز، ونصل ب جـ. فزاوية ب أ ح، أعني زاوية هـ: مثل زاوية أ جـ ب. وزاوية جـ أ ط، أعني زاوية ز: مثل زاوية أ ب جـ. فزاويتا هـ، ز مثل زاويتي أ جـ ب، أ ب جـ وتبقى زاوية د مثل زاوية ب أ جـ. فقد عملنا ما أردنا.

وقد تبين من هذا كيف نعمل في دائرة مثلثاً متساوي الأضلاع، فنعمل في الدائرة مثلثاً زواياه مثل زوايا هذا المثلث.

[المبرهنة ٢/ ٤ تقابل ٥/ ٤ عند الحجاج]

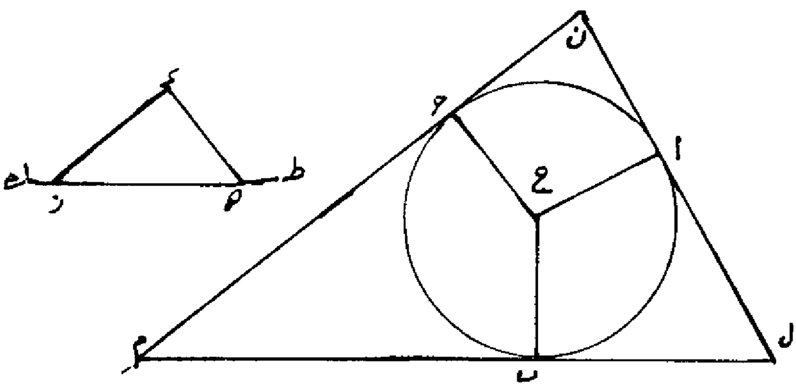


وأيضاً نريد ان نعمل على مثلث معلوم، كمثلث أ ب جـ، دائرة تحيط به. فنخرج من نقطتي ب، جـ من خطي أ ب، أ جـ: عمودين وننفذهما حتى يلتقيا على ك. ونصل خط أ ك، وننصفه على ل. وندير على مركز ل، وببعد أ ل: دائرة أ ب ك جـ.

فلأن زاويتي أ ب ك، أ هـ ك [٢٦ و] قائمتان،

فالدائرة تدار على نقطتي ب، جـ وتحيط بمثلث أ ب جـ. فقد عملنا ما أردنا.

[المبرهنة ٣/ ٤ تقابل ٣/ ٤ عند الحجاج]



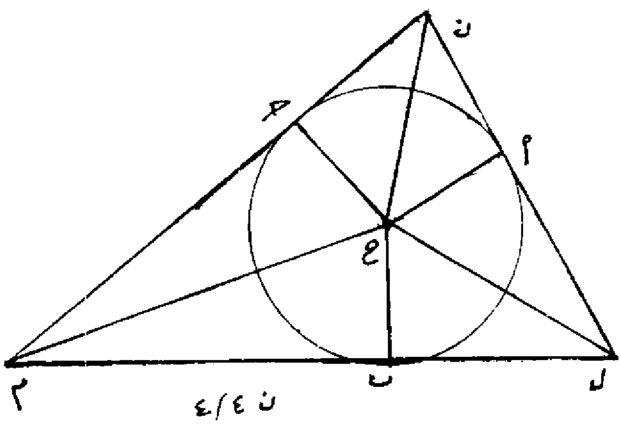
ن ٩/٤

نريد ان نعمل على دائرة معلومة، كدائرة أ ب جـ، مثلثاً يحيط بها وتكون زواياه مثل زوايا مثلث معلوم، كمثلث د هـ ز فنخرج هـ ز إلى ط وإلى ك. ونخرج من نقطة ح، وهي المركز، خط ح ب إلى المحيط، كيف وقع. ونعمل على نقطة ح زاوية ب ح جـ مثل زاوية د هـ ط؛ وزاوية ب ح أ مثل زاوية د زك، ونجيز على نقط أ، ب، جـ خطوط ل م، م ن، ن ل تماس الدائرة. فـ أ ح، ب ح، جـ ح أعمدة. فزوايا أ، ح، ب، ل في شكل أ ل ب ح، ذي الأربعة الأضلاع: مثل أربع قوائم، وزاويتا أ، ب قائمتان. فزاويتا ح، ل مثل قائمتين، فهما مثل زاويتي د ز ك، د ز هـ. ولكن زاوية ب ح أ مثل زاوية د ز ك. فزاوية ل مثل زاوية د ز هـ.

وكذلك تكون زاويتا ح، م مثل زاويتي د هـ ط، د هـ ز، وزاوية ح مثل زاوية د هـ ط، فزاوية م مثل زاوية د هـ ز، وتبقى زاوية ن مثل زاوية د. فقد عملنا ما أردنا.

وقد تبين من هذا عمل المثلث المتساوي الأضلاع على دائرة.

[المبرهنة ٤/ ٤ وتقابل ٤/ ٤ عند الحجاج]



ونعمـل أيضـاً في مثـلث معلوم، كمثلث ن ل م: دائــرة يحيط بهـا: فننصف زاويتي ل، م بخطي ل ح، م ح، أقول: إن ح مركز الدائرة، لأنا نوقع من ح إلـى ل ن، ل م، م ن أعمدة ح أ، ح ب، ح جـ [٢٦ ظ] [فزاوية] أ ل ح مثل زاوية ب ل ح، وزاويتا أ، ب قائمتان، وضلع ل ح واحد في المثلثين. فضلع أ ح مثل ضلع ب ح.

وكذلك نبين ان ب ح مثل جـ ح. فَـ أ ح، ب ح، جـ ح متساوية، وزوايا أ، ب، جـ قائمة، فندير على مركز ح، وببعد أ ح دائرة فانها تمر بنقطتي ب، ح فقد عملنا ما أردنا.

وقد تبين من هذا ان كل مثلث تقسم زاويتان منه بنصفين، بخطين يلتقيان داخـل المثلث، ونخـرج من موضـع ملتقـاهمـا إلى أضلاع المثلث أعمدة، فالأعمدة الثلاثة متساوية.

[المبرهنة ٥ / ٤ تقابل ٦ / ٤ عند الحجاج]

نريد أن نعمل في دائرة معلومة، كدائرة أ ب جـ د، مربعاً. فنخرج قطري أ جـ، ب د يتقاطعان على زوايا قائمة، على هـ؛ ونخرج أ ب، أ د، جـ ب، جـ د. فَـ ب هـ مثل د هـ؛ هـ أ مشترك، وزاوية ب هـ أ مثل زاوية د هـ أ. فَـ أ ب مثل أ د. وكذلك نبين أن أ ب مثل ب جـ، وأن ب جـ مثل جـ د، وان جـ د مثل أ د. وزوايا أ، ب، جـ، د قائمتان لأن كل واحدة منها في نصف الدائرة. فقد عملنا ما أردنا.

وقد تبين من هذا ان كل سطح ذي أربعة أضلاع يقطع كل واحد من قطريه الآخر بنصفين، وعلى زوايا قائمة، وكان القطران متساويين، فان ذلك السطح مربع.

[المبرهنة ٦/ ٤ وتقابل ٩/ ٤ عند الحجاج]

وأيضاً نعمل على مربع معلوم كمربع أ ب جـ د دائرة تحيط به: فنخرج أ جـ، ب د. يتقـاطعان على نقطة هـ. فهي مركز الدائرة: لأن أ ب، مثل أ د، وزاوية أ قائمة، وكل واحدة من زوايا أ ب د، أ د ب نصف قائمة وكذلك كل واحدة من زاويتي د أ جـ. د جـ أ نصف قائمة. فزاوية أ د ب مثل زاوية د أ جـ. فَـ هـ أ مثل د هـ. وكذلك يكون هـ ب مثل هـ أ، هـ جـ مثل هـ د. فَـ هـ أ، هـ ب، هـ جـ، هـ د متساوية. فنديز على مركز هـ، وببعد هـ أ دائرة، فانها تمر بنقط أ، ب، جـ، د. فقد عملنا ما اردنا [٢٧ و] ومن هذا تبين ان كل مربع فان قطريه متساويان، ويقطع إحدهما الآخر بنصفين، وعلى زوايا قائمة.

[المبرهنة ٧ / ٤ وتقابل ٧ / ٤ عند الحجاج]

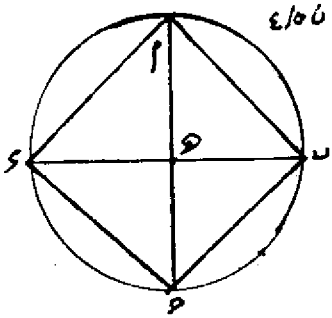
وأيضاً نعمل [على] دائرة معلومة، كدائرة أ ب جـ د، مربعا يحيط بها: فنخرج قطري أ جـ، ب د يتقاطعان على هـ، على زوايا قائمة. ونجيز على نقط أ، ب، جـ، د خطوط ز ح، ز ط، ط ك، ك ح، تماس الدائرة. فَـ أ هـ، ب هـ، هـ جـ،هـ د اعمدة عليها. فالزوايا التي عند أ، ب، جـ، د قائمات. فزاويتا ز أ هـ، ب هـ أ قائمتان. فَـ أ ز، هـ ب متوازيان. وكذلك ب ز، هـ أ متوازيان. فسطح ز ب هـ أ متوازي الأضلاع. وزاوية ز ب هـ قائمة، فزاوية ز قائمة. وكذلك نبين أن زوايا ط، ك، ح قائمات.

ولكن ضلع أ هـ مثل هـ ب، فسطح ب ز هـ أ مربع. وكذلك سطوح ط ب هـ جـ، جـ هـ د ك، د هـ أ ح مربعات فَـ أ جـ مثل كل واحد من ز ط، ح ك؛ وَب د مثل كل واحد من ك ط، ز ح. فسطح ز ح ك ط متساوية الأضلاع،

قائم الزوايا، فهو مربع فقد عملنا ما اردنا.

ومن هذا تبين ان كل سطح متوازي الأضلاع يخرج من ضلعين متقابلين من اضلاعه خطان الى الضلعين المقابلين لهما، وكان هذان الخطان متساويين، ويقطع كل واحد منهما الآخر بنصفين وعلى زوايا قائمة، فان ذلك السطح مربع.

[المبرهنة ٨/ ٤ وتقابل ٨/ ٤ عند الحجاج]

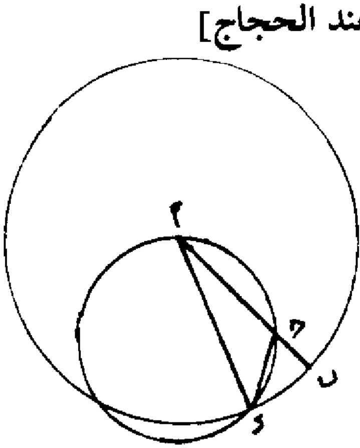


وأيضاً نعمل في مربع معلوم، كمربع ز ط ك ح دائرة يحيط بها: فننصف ز ح، ز ط على أ، ب؛ ونخرج ب د يوازي ز ح، أ جـ يوازي ز ط. فاضلاع سطح ز ب هـ أ متوازية. ولأن ز أ مثل ز ب، يكون ب هـ، هـ أ أيضاً متساويين. وكذلك كل واحد من سطوح ط ب هـ جـ، جـ هـ [٢٧ ظ] د ك، هـ د ح أ: مربع. فَـ أ هـ، هـ ب، هـ د، هـ جـ متساوية.

فعلى مركز هـ، وببعد هـ أ ندير دائرة تمر بنقط أ، ب جـ، د وتماس عندهن أضلاع المربع فقد عملنا ما أردنا.

ومن هذا تبين ان كل مربع يقسم ضلعان متلاقيان منه بنصفين، ويخرج من منتصفي الضلعين عمودان، فان ذينك العمودين متساويان، ويقطع كل واحد منهما الآخر بنصفين، وعلى زوايا قائمة.

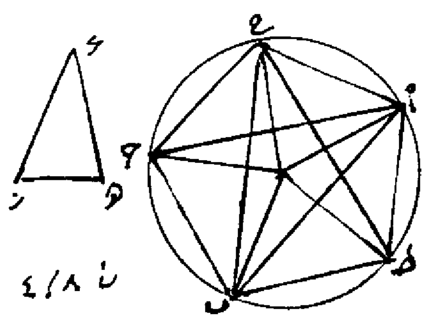
[المبرهنة ٩/ ٤ تقابل ١٠/ ٤ عند الحجاج]



نريد أن نعمل مثلثاً تكون كل واحدة من الزاويتين اللتين على القاعدة مثلي الزاوية الباقية: فنخط أ ب، كم كان، ونقسمه على جـ قسمة يصير بها ضرب أ ب في ب جـ مثل مربع

أ جـ، ونديـــر علـــى مركـــز أ، وببعـــد أ ب دائـــر ب د هـ، ونخـرج مـن ب وتـــر ب د مثـــل أ جـ، ونصـــل خطـــي جـ د، أ د، ونعمل على مثلث أ جـ د دائـرة أ جـ د تحيط به. فَـ أ ب في ب جـ مثـل مربع أ جـ، أ جـ مثل ب د. فَـ أ ب في ب جـ مثل مربع ب د. فَـ ب د مماس لدائرة أ جـ د. وقد خرج من حيث التماس خط د جـ. فزاوية جـ د ب مثل زاوية جـ أ د. وزاوية جـ د أ مشتركة. فكل زاوية ب د أ مثل زاويتي جـ أ د، جـ د أ. ولكن زاوية ب جـ د الخارجة عن المثلث مثلهما جميعاً. فزاوية [٢٨ و] ب جـ د مثل زاوية ب د أ. وزاوية ب د أ مثل زاوية د ب أ. فزاوية د ب أ مثل زاوية ب جـ د. فضلع ب د مثل ضلع جـ د، وَب د مثل أ جـ، فَـ أ جـ مثل جـ د، وزاوية جـ أ د مثل زاوية جـ د أ. فزاويتا جـ د أ، جـ أ د، وهما مثل زاوية ب جـ د الخارجة عن المثلث، مثلا: زاوية جـ أ د. وزاوية ب جـ د مثل كل واحدة من زاويتي د ب أ، ب د أ، اللتين على قاعدة المثلث أ ب د، مثلا زاوية جـ أ د، أعني زاوية ب أ د. وذلك ما أردنا ان نعمل.

[المبرهنة ١٠/ ٤] وتقابل ١١/ ٤ عند الحجاج]

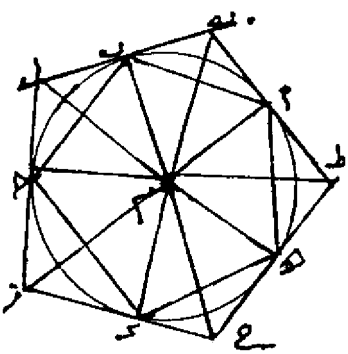


نريد أن نعمـــل في دائـــرة معلومـة، كدائـرة أ ب جـ مخمســاً [متســـاوي الأضـــلاع] تحيط به: فنعمـل مثلث د هـ ز، وتكون كل واحدة من زاويتي هـ، ز مثلثي زاوية د. ونعمل في دائرة أ ب جـ مثلث أ ب جـ تكـون زويتـا ب، جـ مثل زاويتي هـ، ز، وتبقى زاوية أ مثل زاوية د. وننصف زاويتي ب، جـ بخطي ب ح، جـ ط، فيكون نصف ذلك مثل زاوية أ. ونخرج أ ط، ط ب، أ ح، ح جـ. فزوايا ب أ جـ، أ جـ ط، ط جـ ب، جـ ب ح، ح ب أ، الخمس متساوية. فمخمس أ ط ب جـ ح متساوي الأضلاع.

[المبرهنة ١١/ ٤ وتقابل ١٤/ ٤ عند الحجاج]

وأيضاً نعمل على مخمس أ ط ب جـ ح دائرة تحيط به: فننصف زاويتي ب جـ ح، جـ ب ط بخطي ب ك، جـ ك، فيلتقيان على ك، ونخرج ك ط، ك أ، فَـ ب جـ مثل ب ط [٢٨ ظ]، ب ك مشترك، وزاوية ط ب ك مثل زاوية جـ ب ك، وزاوية ط ك ب مثل زاوية ب ك جـ. ولكن زاوية ب ك جـ نصف زاوية ب جـ ح، وزاوية ب جـ ح مثل زاوية ب ط أ. فزاوية ب ط ك نصف زاوية ب ط أ. فهي مثل زاوية أ ط ك وَ ب ط مثل أ ط، ط ك مشترك، وزاوية ب ط ك مثل زاوية أ ط ك. فقاعدة ب ك مثل قاعدة أ ك. وكذلك نبين ان ك ح مثل ك أ، ك ح مثل ك ب. فاذن ك أ، ك ط، ك ب، ك جـ، ك ح الخمسة متساوية. فنذير على مركز ك، وببعد ك أ دائرة. فانها تمر بزوايا أ ط ب جـ ح. وذلك ما اردنا ان نعمل.

[المبرهنة ١٢/ ٤ وتقابل ١٢/ ٤ عند الحجاج]



٤/٩ن

نريد أن نعمل على دائرة معلومة، كدائرة أ ب جـ د هـ، مخمساً يحيط بها: فنخط في الدائرة مخمساً متساوي الأضلاع تحيط به، وليكن مخمس أ ب جـ د هـ. ونجيز على نقط زوايا المخمس، وهي أ، ب، جـ، د، هـ، خطوط ك ل ز ح ط ك. تماس الدائرة [٢٩ و] ونجعل المركز م، ونخرج منها خطوطاً إلى النقط العشر

فلأن ضرب م ز في ز ن مثل مربع جـ ز، وكذلك ضرب م ز في ز ن مثل مربع د ز، يكون مربع جـ ز مثل مربع د ز. فَـ جـ ز مثل د ز. وَ جـ م مثل د م، ز م مشترك. فزاوية جـ ز م مثل زاوية د ز م، وزاوية جـ م ز مثل زاوية، د م ز. فَـ أ ز قد نصف زاويتي جـ ز د، جـ م د.

وكـذلك نصفت خطوط م ح، م ط، م ك، م ل زوايا ح، ط، ك، ل، والزوايا التي عند م. ولكن زاوية جـ م د مثلا زاوية جـ م ز، وزاوية د م هـ مثلا زاوية د م ح. فزاوية د م ز مثل زاوية مثل زاوية د م ح، وزاوية م د ز مثل زاوية م د ح، لأن د م عمود على المماس، وضلع د م مشترك، فزواية م ز د مثل زاوية م ح د.

وكذلك جـ ز مثل جـ ل؛ فَـ ز ل ضعف ز جـ؛ د ح مثل ز د، ز ح ضعف ز د. فَـ ز ل مثل ز ح؛ وزاوية جـ ز د ضعف زاوية م ز د، وزاوية د ح هـ مثلا زاوية م ح د. ولكن زاوية م ز د مثل زاوية م ح د. فزاوية جـ ز د مثل زاوية د ح هـ.

وكذلك نبين أن خطوط ك ل، ل ز، ز ح، ح ط، ط ك متساوية، وان زوايا أ ك ب، ب ل جـ، جـ ز د، د ح هـ، هـ ط أ متساوية. فمخمس ز ح ط ك ل متساوي الأضلاع معمول على الدائرة كما اردنا.

[المبرهنة ١٣/ ٤ وتقابل ١٣/ ٤ عند الحجاج]

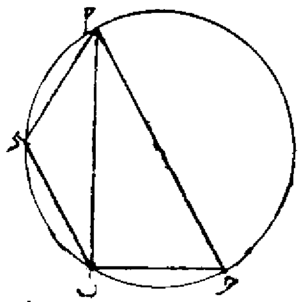
وأيضاً نعمل في مخمس معلوم كمخمس ز ح ط ك ل دائرة يحيط بها:

فننصف زاويتي ز، ح بخطي ز م، ح م، ونصل م ط، م ك، م ل، ونوقع أعمدة م جـ، م د، أ، م ب. فَـ ل ز مثل ز ح، وزاوية ز ل م مثل زاوية ز ح م، وتبقى زاوية ك ل م مثل زاوية [٢٩ ظ] ط ح م، وزاوية ط ح م مثل زاوية ز ح م. فزاوية ك ل م مثل زاوية ز ل م. فزاوية ز ل ك قد نصفها خط ل م. وكذلك نبين ان زاويتي ط ك ل، ك ط ح قد نصفهما ك م، ط م.

ولأن زاوية ل ز م مثل زاوية ح ز م، وزاوية م جـ ز قائمة، مثل زاوية م د ز، وضلع ز م مشترك، يكون م جـ مثل م د. وكذلك نبين ان الأعمدة الخمسة متساوية.

فندير على مركز م، وببعد م د دائرة؛ فانها تمر بنقط أ، ب، جـ، د، هـ. وذلك ما أردنا ان نعمل.

[المبرهنة ١٤/ ٤ وتقابل ١٥/ ٤ عند الحجاج]



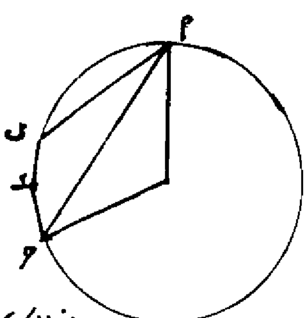
ن ١٠/٤

نريد ان عمل في دائرة كدائرة أ ب جـ مسدساً تحيط به. فنخرج فيها وتر المثلث المتساوي الأضلاع، وهو أ ب، ونخرج قطر أ جـ. فلأن المحيط اذا قسم جميعاً بستة أقسام، ينقسم قوس أ ب جـ بثلاثة أقسام، وَ أ ب، ضلع المثلث، وتر ثلث من المحيط، فيبقى قوس ب جـ سدس الدائرة، فنخرج وتر ب جـ، وهو ضلع المسدس، ونتمُّ باقي أضلاع المسدس، فيكون متساوي الأضلاع. وذلك ما أردنا ان نعمل.

وقد تبين من هذا ان مربع القطر مثل مربع ضلع المثلث مع مربع ضلع المسدس. ذلك ان زاوية ب [٣٠ و] قائمة.

وقد يمكن ان نعمل على الدائرة مسدساً، كما عملنا في المخمس.

[المبرهنة ١٥/ ٤ وتقابل ١٦/ ٤ عند الحجاج]



ن ١١/٤

نريد ان نعمل في دائرة معلومة شكلا ذا خمس عشرة قاعدة تحيط به الدائرة فلتكن الدائرة أ ب جـ، ونخرج فيها وتر مثلث متساوي الأضلاع وهو أ جـ ونخرج وتر المخمس وهو أ ب فاذا قسم المحيط بخمسة عشر، وقع وتر أ جـ على خمسة اجزاء منها. وموقع أ ب على ثلاثة أجزاء، وتبقى قوس ب جـ جزأين منها. فننصفها على د، ونخرج وتري ب د، د

جـ. فقوس ب د مثل قوس د جـ. فاذا قسم المحيط بمثل قوس د جـ، وأخرج وتر كل قوس، يكون كما أردنا أن نعمل.

وقد يمكن ان نعمل أشكالاً في الدائرة لا نهاية لكثرتها: بان ننصف قسيَّ الأشكال، ونخرج أوتارها. وكذلك نعمل بالقسي، مراراً كثيرة. وذلك ما أردنا ان نبين.

تمت المقالة الرابعة والحمد لله حق حمده

المقالة الرابعة

في موازنة ختامية

تتألف هذه المقالة من ١٦ مبرهنة. اتفق في ذلك هيث والحجاج، عدداً وترتيباً. وفد أفاض النيريزي في تعليقه على المبرهنات، نقلاً عن هيرن، عارضاً طريقتي التحليل والتركيب، ومعرجاً أحياناً على أوضاع للمسألة غير ما ذكر اقليدس. وهو يعترف، في أكثر من موضع، بأن الوضع الذي يذكره اقليدس هو أصعب الأوضاع برهاناً، أو أعمها.

وقد جعل النسوي هذه المقالة من ١٥ مبرهنة، واسقط المبرهنة ١/٤ عند الحجاج لأنه ذكرها في المقالة الثالثة.