المقالة الخامسة

من كتاب الأصول لأوقليدس

في النسبة والتناسب.

أ ـ التعريفات

ب ـ مبرهنات الحجاج واضافات النيريزي

جـ ـ المقالة الخامسة من كتاب التجريد للنسوي.

أ. التعريفات

بسم الله الرحمن الرحيم

قال اوقليدس:

١ـ المقدار الأصغر يكون جزءاً من المقدار الأعظم، متى كان يقدر الأعظم.

Heath:1 A magnitude is a part of a magnitude, the less of the greater, when it measures the greater.

٢ـ ويكون الأعظم أضعاف الأصغر: متى كان يقع عليه التقدير بالأصغر

Heath: The greater is a multiple of the less when it is measured by the less.

قال المفسِّر: ذكر الرياضي الجزء، دون الأجزاء، لاستعماله الأضعاف في الأقدار المتناسبة. وأيضاً فإن ذكره للجزء مقدم على الأجزاء.

في الهامش: الجزء هو مقدار من مقدار: الأصغر من الأعظم، اذا كان يَعُدُّ الأعظم. والأضعاف هو الأعظم من الأصغر، اذا كان يُعَدُّ بالأصغر.

قال النسوي: ١ ـ المقدار اسم عام يقع على كل ماله قدر، خطاً كان أو سطحاً أو جسماً.

٢ ـ اذا كان مقدار صغير يقدر مقداراً أعظم منه، ولم يفضل من التقدير شيء، قيل للأصغر أنه جزء للأعظم، وللأعظم أنه أضعاف الأصغر.

٣ ـ قال اوقليس: النسبة هي إضافة ما في القدر بين مقدارين من جنس واحد

Heath: A ratio is a sort of relation in respect of size between two magnitudes of the same kind.

Heath: 4. Magnitudes are said to have a ratio to one another which are capable, when multiplied, of exceeding one another.

في الهامش (كتاب الحجاج): النسبة هي أ يية مقدارين متجانسين، كل واحد منهما من الآخر.

قال النسوي: ٣ ـ النسبة هي إضافة ما في القدر بين مقدارين متجانسين والمقادير المتجانسة هي التي يمكن، اذا ضوعف بعضها، أن يزيد على بعض.

قال المفسر (النيريزي): اراد الرياضي بقوله «إضافة ما» ان المضاف بعض المقولات العشر فذكرها ليدل على انها إحدى المقولات.

وقوله «في القدر» ليفصلها من سائر المقولات، ويجعلها في مقولة واحدة، وهي الكم.

«وبين مقدارين»: اراد الحال التي لأحد المقدارين عند الآخر، لأن النسبة هي حال قدر واحد عند قدر آخر من جنس واحد: اما حال الخط عند الخط واما حال السطح عند السطح، واما حال المجسم عند المجسم، واما حال العدد عند العدد، واما حال القول عند القول، واما حال الزمان عند الزمان، واما حال المكان عند المكان.

وهذه الحال التي هي لأحد المقدارين عند الآخر: هي إضافة أحد المقدارين إلى الآخر، أعني تقديره به. وهذه الحال يشتمل عليها جنسان أحدهما حال الاشتراك [٦١ أ] والآخر حال التباين. أما حال الاشتراك فهو ان يكون للمقدارين مقدار آخر يعدُّهما جميعاً، أو يكون أحدهما يَعدُّ الآخر. فإن كان أحدهما يعدُّ الآخر، فإن حال الأصغر عند الأعظم هو حال الجزء، وحال الأعظم عند الأصغر هو حال الأضعاف.

فإن فضلت من الأعظم فضلة هي أصغر من المقدار الأصغر، فليس تخلو هذه الفضلة: إما ان تعدَّ المقدار الأصغر وتستغرقه بالعد، واما ان يفضل من الأصغر فضلة هي أصغر من الفضلة الأولى. فإن كانت تعد هذه الفضلة المقدار

الأصغـر، وتستغـرقـه بالعدّ، فإن تلك الفضلة هي المقدار الثالث الذي يعدّ المقدارين المشتركين.

وان فضلت فضلة هي أصغر من الفضلة الأولى، فليس يخلو أيضاً: إما ان تكـون تعُـدُّ هذه الفضلةُ الثانية: الفضلةَ الأولى، وتستغرقها بالعدّ، أو تفضل فضلة أصغر من الفضلة الثانية. فإن عدَّها واستغرقها بالعد، فإن تلك الفضلة، أعني الفضلة الثانية، هي المقدار الثالث الذي يعدُّ المقدارين المشتركين جميعاً.

وان فضلت منها فضلة هي أصغر من الفضلة الثانية، فان هذه الحال من التفاضل ليست تخلو من جهتين: إما ان ينتهي عدد الفضلات إلى فضلة تعد التي قبلهـا وتستغـرقهـا، فتكون تلك الفضلة هي المقدار الثالث الذي يقدر المقدارين، ويكون حال الأصغر عند الأعظم حال الأجزاء، وتلك الفضلة هي جزء من اجزاء الأعظم؛ أو لا ينتهي به الأمر إلى فضلة تستغرق الفضلة التي قبلها بالعد، لكن لا يزال التفاضل بينهما أبداً، إلى غير نهاية، وهذه الحال التي لأحد المقدارين عند الآخر هي حال التباين.

Heath: 5. Magnitudes are said to be in the same ratio, the first to the second and the third to the fourth, when if any equimultiples whatever be taken of the first and third, and any equimultiples whatever of the second and fourth, the former equimultiples alike exceed, are alike equal to, or alike fall short of, the latter equimuitiples respectively taken in correspondign order

النسوي: يقال للمقادير انها في نسبة واحدة، الأول إلى الثاني والثالث إلى الرابع: متى كانت اضعاف الأول والثالث المتساوية المرات: إما ان تفضل معاً على أضعاف الثاني والرابع المتساوية المرات، أي أضعاف كانت، أو تساويها معاً، أو تنقص عنها معاً، اذا قيس كل واحد بنظيره.

Heath: 6. let magnitudes which have the same ratio be called proportional.

النسوي: ٥ ـ واسم المقادير على نسبة واحدة: المتناسبة

Heath: 7. When of the equimultiples, the multiple of the first magnitude exceeds the multiple of the second, but the multiple of the third does not exceed the multiple of the fourth, then the first is said to have a greater ratio to the second than the third has to the fourth.

8. A proportion in three terms is the least possible.

النسوي ومتى كانت الأضعاف المتساوية المرات: أما أضعاف الأول منها فزائدة على أضعاف الثاني، وأما أضعاف الثالث فغير زائدة على أضعاف الرابع، قيل ان نسبة الأول إلى الثاني أعظم من نسبة الثالث إلى الرابع.

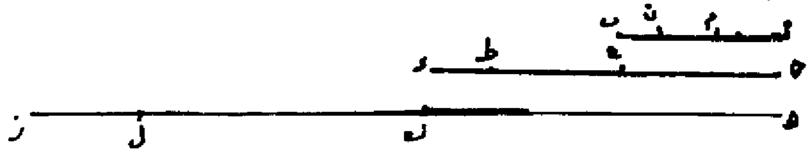
٤ ـ قال اوقليدس: التناسب اشتباه النسب، وأقل ما يكون في ثلاثة مقادير.

قال المفسر: التشابه في النسبة يكون اذا كانت المقادير أكثر من مقدارين، فتكون نسبة الأول إلى الثاني كنسبة قدر آخر عند قدر آخر: اما كنسبة الثاني عند الثالث، والثالث عند الرابع، وكذلك على توالي المقادير، واما نسبة الأول إلى الثاني [كنسبة] الثالث عند الرابع، والخامس عند السادس، وكذلك على توالي المقادير.

وأقل ما يكون هذا التشابه في ثلاثة مقادير. والتشابه هو مقايسة الحال التي بين مقدارين إلى الحال التي بين المقدارين اللذين هما على نسبته. فمتى كانت تلك الحال التي بين المقدارين الأولين، هي الحال التي بين المقدارين الآخرين، قيل حينئذ ان هذه الحال هي حال التشابه في النسبة. ومتى لم تكن كذلك، لم تكن حينئذ هذه الحال هي حال التشابه، ولم يكن تناسب. وانما قال تشابه لأن هذه الحال هي كيفية لا كمية، لأن الحال التي بين المقدارين الأولين، ان كانت حال المساواة، كانت الحال التي بين المقدارين الآخرين أيضاً حال المساواة. وان كانت الحال التي بين المقدارين الأولين هي حال

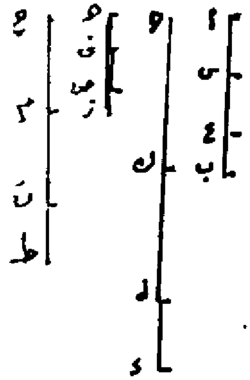
الأضعاف. أو حال الجزء، أو حال الأجزاء، أو سائر أحوال النسبة التي في المقادير المشتركة، كانت الحال أيضاً بين المقدارين الآخرين تلك الحال فيها. وهذه كيفيات لا كميات.

وكذلك الحال في المقادير المتباينة: فانه ان كانت النسبة مثلاً في ثلاثة مقادير: أول وثانٍ وثالث، حتى تكون نسبة الأول إلى الثاني كنسبة الثاني إلى الثالث، وعدّ الأول، مثلاً، الثاني، ففضلت فضلة ما، ثم عدّ الثاني الثالث، ففضلت فضلة ما، الا ان مقدار ما عدّ الثاني الثالث هو مقدار ما عد الأول الثاني؛ ثم أيضاً عدّت الفضلة التي فضلت من الثاني: المقدار الأول، ففضلت منه فضلة [٦١ ب] هي أصغر من الفضلة الأولى التي فضلت من الثاني، وعد أيضاً الفضلة الباقية من الثالث: المقدار الثاني، ففضلت فضلة هي أصغر من الفضلة الأولى التي فضلت من الثالث، الا ان مقدار ما عدّ الفضلة الباقية من الثاني، هو مقدار ما عدّ المقدار الأول، ففضلت الفضلة الثانية، ثم لا يزال هذا التداول في تقدير الفضلات يقع على التساوي إلى غير نهاية ـ فان المقادير اذا كانت على هذه الحال، قيل انها متناسبة، وكانت هذه الحال منها حال تشابه النسبة.



مثال ذلك انا ننزل المقدار الأول مقدار أ ب،
والثاني جـ د، والثالث هـ ز.
فليكن أ ب يقدر جـ د مرتين: جـ ح، ح ط، وفضلت ط د أصغر من أ ب؛ وقدر جـ د: هـ ز ذلك التقدير بعينه: هـ ك، ك ل، وفضلت ل ز أصغر من جـ د؛ ثم قدر ط د مقدار أ ب: فلننزل جـ د ذلك التقدير بعينه: جـ س، س ع، ففضلت ع د، أصغر من ل ز، فلا يزال هذا التداول بين هذه الثلاثة مقادير يجري على التساوي إلى غير نهاية. وهذه الحال هي حال اشتباه النسب، وهي المناسبة التي بين المقادير.

اما تلك التي للمقادير المشتركة، فتعمُّ الكمية المنفصلة، وكل المقادير المتصلة اذا كانت مشتركة. واما هذه الحال الأخرى التي هي حال التباين فإنها خاصة بالمقادير المتصلة.



وكذلك ان لو انزلنا أربعة مقادير تكون نسبة الأول إلى الثاني كنسبة الثالثة إلى الرابع، فليكن الأول أ ب، والثاني جـ د، والثالث هـ ز، والرابع ح ط. فليقدر أ ب: جـ د، ولننزل انه قدره مرتين: جـ ك، ك ل، وفضل ل د أصغر من أ ب. ومثله يقدر هـ ز مقدار ح ط، فليكن ح م، م ن، وفضلت فضلة هي أصغر من هـ ز، وهي ن ط. وليقدر ل د: أ ب؛ وننزل انه قدره أيضاً مرتين: أ س، س ع، وفضل ع ب، أصغر من ل د. ومثله يقدر ن ط: هـ ز، وليكن هـ ف، ف ص، ويفضل ص ز، أصغر من ن ط.

ثم يقدر ع ب: ل د، فليقدره أيضاً كم شئنا من التقدير. فلننزل انه قدره مرتين ل ق، ق ر. ومثله سواء: يقدر ص ز: مقدار ن ط، فليكن ن س، س ت، وفضلت ت ط أصغر من ص ز.

فعلى هذه الجهة يجري الحال في هذه المقادير الأربعة، اذا كانت متناسبة، متى عدّ قدرُ أ ب: قدرَ جـ د بعدد ما، وفضلت فضلة هي أصغر من أ ب، فإنه بمثل ذلك العدد يقدر هـ ز: ح ط، ويفضل فضلة هي أصغر من هـ ز. وكذلك اذا قدرت فضلة ل د مقدار أ ب، بأي عدد كان، فإنه بمثل ذلك العدد يقدر ن ط مقدار هـ ز، ويفضل فضلة هي أصغر من ن ط. فلا يزال هذا التداول بينها في الفضلات إلى غير نهاية. فاما اذا لم يكن حال المقادير في التشابه بينها هذه الحال، فإنها غير متناسبة.

فان كان الأول يقدر الثاني بعدد أقل مما يقدر الثالث الرابع، وفضلت من الثاني فضلة تقدر المقدار الأول بعد هو أقل أيضاً مما تقدر الفضلة الباقية من

المقدار الرابع : الثالث؛ وفضلت أيضاً فضلتان من الأول والثالث، حالهما عند الفضلتين الأوليين الباقيتين من الثاني والرابع : تلك الحال بعينها، ثم لا تزال هذه الحال واقعة بين الفضلات، متداولة إلى غير نهاية، فان هذه الحال ليست تجري على التشابه، لكنها حال تكون فيها نسبة الأول إلى الثاني أعظم من نسبة الثالث إلى الرابع.

فإن لم يكن كذلك [٦٢ أ] وكان عدد المرات التي يقدر الأول الثاني اكثر من عدد المرات التي يقدر بها الثالث والرابع، وكانت أيضاً الفضلة الباقية من الثاني تقدر الأول بعدد هو أيضاً أكثر مما يقدر الرابع الثالث، ويفضل منهما فضلات حالها عند الفضلات الأول هذه الحال بعينها، ثم لا تزال هذه الحال جارية في الفضلات المتداولة إلى غير نهاية واقعة فيها، فان هذه الحال هي حال يقال فيها ان نسبة الأول إلى الثاني أصغر من نسبة الثالث إلى الرابع.

قال اوقليدس: المقادير التي يقال ان بين بعضها وبعض نسبة هي التي قد يمكن اذا ضوعفت ان يفضل بعضها على بعض.

قال المفسر: يعني الرياضي بذلك: الحال التي بين المقادير في النسبة، اذا كانت تلك الحال بين الأعظام المتجانسة التي يقع عليها التقدير بنوع واحد من أنواع المقادير، أو بشيء منها. فإن هذه اذا أضعفت قيل فيها ان الأضعاف متساوية، او بعضها يفضل على بعض بمقدار مشاركتها، او يفضل من كل واحد منها فضلات من نوع واحد: ان كانت خطوطاً فخطوط وان كانت سطوحاً فسطوح، وان كانت أجساماً فأجسام، وان كانت امكنة فأمكنة، وان كانت ازمنة فأزمنة، وان كانت قولاً فقولاً، وان كانت أعداداً فأعداد.

فيكون، مثلاً أقول: اذا كانت نسبة الخطوط الى الخطوط: كنسبة السطوح إلى السطوح تكون الفضلة التي تفضل من تقدير الأول للثاني: خطاً، والفضلة التي تفضل للسطح عند السطح سطحاً. فيكون حال تداول الفضلات بينها: تلك الحال، ما يفضل من الخطوط [خط] ومن السطوح سطح.

فامـا اذا حصــل الحال التي يقال لها التناسب بين خط وسطح ، وسطح وجسم ، أو غير ذلك ، لـم يمكن ان يقدر الخط بالسطح ، ولا السطح بالجسم ، ولا ان لو اضعف الخط أمكن ان يقال فيه انه مساوٍ للسطح ، أو أعظم منه بمقدار كذا وكذا . ولذلك قال ايرن في ذلك . هي التي إن اضعفت أمكن ان يكون بعضها أعظم من بعض ، يعني بذلك المتجانسات . وذلك ان الخط لو اضعف غاية التضعيف ، لـم يكن أبداً أعظم من السطح . وكذلك كل الأشياء التي ليست بمجانسات .

والمجانسات هي الأنواع التي يمكن ان يقارن بعضها ببعض : كالخط ، عند الخط وكالزاوية عند الزاوية ، وكالمجسم عند المجسم . والرياضي سمى الأعظام المتجـانسـة التي اذا اضعفت امكن ان يكـون بعضهـا أعـظم من بعض . واما ارشميدس فانه يسميها المقادير التي يقارن بعضها بعضاً .

٥ ـ قال اوقليدس : يقـال في المقـادير انها في نسبة واحدة : الأول إلى الثـاني ، والثـالث إلى الرابع ، متى كانت أضعاف الأول والثالث ، المتساوية المرات ، اما ان تفضل معاً على أضعاف الثاني والرابع المتساوية المرات ، أي الاضعاف كانت ، واما تساويها معاً ، واما ان تنقص عنها معاً ، اذا قيست على الولاء بعضها ببعض .

قال المفسر : ليس يريد تعيين الأضعاف ، بان تكون زائدة أو مساوية ، لكن تعيين المقدار كله الذي هو أضعاف الأول : ان كان زائداً على أضعاف الثاني ، فان أضعاف الثالث زائدة على أضعاف الرابع ؛ وان كان ناقصاً فهو ناقص ، وان كان مساوياً فهو مساوٍ . ويريد ان تكون الزيادة مساوية المرات للعدد المشترك الذي يعد الأول والثاني ، والثالث والرابع . هذا اذا كان الأول يشارك الثاني ، والثالث ، والرابع . فان لم يكونا مشتركين ، وكانا متباينين ، فيكون عدد المقادير التي تعـد اضعـاف الأول لأضعـاف الثـاني ، مساوياً لعدد المقادير التي تعد اضعاف الثالث لأضعاف الرابع ، ويكون عدد المقادير التي تقدر فضلة الثاني

للأول مساوياً لعدد المقادير التي تقدر فضلة الثالث إلى فضلة الرابع ؛ ثم لا يزال كذلك إلى غير نهاية . فان اوقليدس لم يقصد إلى شيء من هذا . فاما من رام أن يأتي ببراهين في هذا أو في غيره فإن ذلك على جهة التعسف . [٦٢ ب] اذ كان يضطرهم إلى اشكال ابوابها متأخرة . ولو قصدوا إلى الحق نفسه لعلموا ان هذا شيء ليس يحتاج فيه إلى برهان لأنه من الأوائل عند من انتهى إلى هذا الموضع ، اذ كان لكل مقالة اوائل ، بحسب مرتبة تلك المقالة .

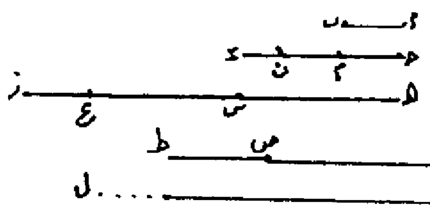
٦ ـ قال اوقليدس : ولنسمِّ المقادير التي نسبتها واحدة بعينها : المتناسبة . ومتى كانت الأضعاف المتساوية المرات : أما أضعاف الأول منها فتفضل على أضعاف الثاني . واما أضعاف الثالث فلا تفضل على أضعاف الرابع ، قيل ان نسبة الأول إلى الثاني أعظم من نسبة الثالث إلى الرابع .

قال المفسر : قد قيل في هذا ما فيه كفاية .

٧ ـ قال اوقليدس : وأقل ما يكون التناسب في ثلاثة حدود . واذا كانت ثلاثة مقادير متناسبة ، قيل ان نسبة الأول إلى الثالث ضعف نسبته إلى الثاني . واذا كانت اربعة مقادير متناسبة قيل ان نسبة الأول إلى الرابع ثلاثة أضعاف نسبته الى الثاني . وعلى هذا المثال يجري ما يتلو ذلك .

قال المفسر : نريد بالضعف ان العدد السمي للمرات التي يقدر الأولُ الثاني ، اذا ضوعف بنفسه ، يكون بتلك العدة نسبة الأول الى الثالث . وان كانت أربعة مقادير ، ضوعف ذلك العدد المربع بالعدد الأول ، فيكون المجتمع هو نسبة الأول الى الرابع . وكذلك ان كانت خمسة مقادير ، ضوعف المجتمع بالعدد الأول ، فيكون ذلك نسبته الى الخامس .

مثال ذلك انا ننزل خمسة مقادير: أ ب ، جـ د ، هـ



ح ط، ك ل. وليكن أ ب يعد جـ د مرتين، وفضل ثلث أ ب، فظاهر ان أ ب يعد جـ د مرتين وثلثاً؛ والعدد السمي هو اثنان وثلث. فاذا ضاعفنا الاثنين والثلث بنفسه، كان المجتمع خمسة وأربعة اتساع، وهذا هو العدد السمي للمرات التي يقدر أ ب: هـ ز. فإن ضاعفنا هذا المجتمع، أعني الخمسة وأربعة الأتساع، بالاثنين والثلث، كان المجتمع اثني عشرة وستة اتساع وثلث تسع. وهذا المقدار الذي يقدر أ ب قدر ح ط. وان ضاعفنا أيضاً الاثني عشرة وستة الاتساع وثلث التسع بالاثنين والثلث، كان المجتمع تسعة وعشرين، وخمسة اتساع وسبعة اتساع التسع، وهو عدد المرات التي يقدر أ ب قدر ك ل.

فليكن تقدير أ ب لقدر جـ د: جـ م، م ن، ويفضل ن د: ثلث أ ب. ويقدر جـ د قدر هـ ز، وليكن هـ س، س ع، كل واحد منهما مثل جـ د، ويفضل ح ز ثلث جـ د. وليقدر هـ ز قدر ح ط، وليكن ح ف، ف ص، كل واحد منهما مثل هـ ز، ويفضل ص ط ثلث هـ ز. وليقدر ح ط قدر ك ل، وليكن ك ق، ق ر، كل واحد منهما مثل ح ط، يفضل ر ل ثلث ح ط. فمن أجل ان هـ س مثل جـ د، جـ د مثلاً أ ب ومثل ثلثه، فالعدد المشترك الذي يعدها كلها هو ثلث أ ب. فالعدد المشترك يعد هـ س سبع مرات، فهو إذن يعد هـ ع أربع عشرة مرة. لكن ع ز ثلث جـ د؛ فالمقدار المشترك يقدر ع ز مرتين وثلثاً. فهو يقدر هـ ز ست عشرة مرة وثلثاً. فالمقدار المشترك الذي يقدر هـ ز، أ ب يجب ان يكون تسع أ ب. فهو يقدر أ ب تسع مرات، ويعد هـ ز تسعاً وأربعين مرة، ويقدر جـ د احدى وعشرين مرة. وتسعة من احد وعشرين هي الثلث وسبعا الثلث. فاذا ضوعف بنفسه كان ما يقدر أ ب: هـ ز مقدر أ ب، كما كان الذي يقدره العدد المشترك تسع مرات، ويقدر هـ ز تسعاً وأربعين مرة. فان أ ب يقدر هـ ز خمس مرات واربعة اتساع مرة. وعلى هذه الجهة يعلم سائر ما بقي.

واما اذا كانت المقادير متباينة فمثله يلزم في عدد المرات التي يقدر الأول والثاني، والثالث الرابع، وفي الفضلات التي تقدر على تلك الجهة.

[٦٣أ] قال اوقليدس: يقال في المقادير انها متسقة في النسبة اذا قيست المقدمات مع المقدمات والتوالي مع التوالي.

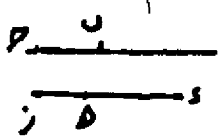
Heath: 11. The term corressponding magnitudes is used of antecedents in relation to antecedents, and of consequents in relation to conseguenets.

12. alternate ratio means taking the antecedent in relation to the antecedent , and the consequent in relation to the consequent.

13. Inverse ratio means taking the consequent as antecedent in relation to antecedent as consequent.

النسوي: ٨: عكس النسبة هو أخذ التالي بمنزلة المقدم، والمقدم بمنزلة التالي.

[اوقليدس]: عكس النسبة هو أخذ التالي بمنزلة المقدم عند أخذ المقدم بمنزلة التالي.



قال المفسر: مثال ذلك ان تكون نسبة أ ب المقدم الى ب جـ التالي كنسبة د هـ المقدم الى هـ ز التالي.

فعكس النسبة هو أخذ ب جـ على أنه مقدم. أ ب، د هـ على انهما التالي. فتصير نسبة ب جـ الى أ ب كنسبة هـ ز الى د هـ.

قال اوقليدس: تبديل النسبة هو أخذ المقدم عند المقدم والتالي عند التالي.

النسوي: تبديل النسبة هو أخذ المقدم عند المقدم والتالي عند التالي.

قال المفسر: مثال ذلك الصورة الأولى. فليكن المقدمان أ ب، د هـ، والتاليان ب جـ، هـ ز فاذا كانت نسبة أ ب الى ب جـ كنسبة د هـ الى هـ ز، فانا اذا بدلنا كانت نسبة أ ب المقدم الى د هـ المقدم: كنسبة ب جـ التالي الى هـ ز التالي.

Heath: 14. Conposition of a ratio means taking the antecedent together with the consequent as one in relation to the consequent by itself.

قال اوقليدس : تركيب النسبة هو أخذ المقدم مع التالي بمنزلة شيء واحد، عند التالي .

النسوي : تركيب النسبة هو أخذ المقدم مع التالي بمنزلة شيء واحد، عند التالي .

قال المفسِّر: اذا كانت اربعة مقادير متناسبة، وكان أ ب، د هـ مقدمين، ب جـ، هـ ز تاليين، فإنا اذا ركبنا نكون أخذنا المقدم مع التالي جميعاً، كشيء واحد، أعني أخذنا أ ب مع ب جـ كخط واحد، د هـ مع هـ ز كخط واحد. فتكون نسبة أ جـ الى جـ ب كنسبة د ز الى ز هـ اللذين هما التاليان.

Heath: 15. Separation of ratio means taking the excess by which the antecedent exceeds the consequent in relation to the consequent by itself.

النسوي : تفضيل النسبة هو أخذ فضل المقدم على التالي، عند التالي .

قال اوقليدس: تفضيل النسبة هو أخذ فضل المقدم على التالي، عند التالي .

قال المفسِّر: يقول انه في أول وضعنا المقادير المتناسبة، كانت أ ب، ب جـ، د هـ، هـ ز. فكان المقدمان حينئذ أ ب، د هـ، والتاليان ب جـ، هـ ز.

فلما ركبنا صار بعد التركيب أربعة مقادير أخر غير ذلك، تكون متناسبة ويكون المقدمان فيها أ جـ، د ز، والتاليان ب جـ، هـ ز.

والآن، لما فضل أشار الى هذين المقدمين والى هذين التاليين، أعني الى مقدمي أ جـ، د ز، وتاليي ب جـ، هـ ز، فقال: عند التفضيل تكون نسبة فضل المقدم على التالي الى التالي: كنسبة فضل المقدم على التالي الى التالي فتكون الصورة الأولى :

فيكون فضل المقدم، الذي هو أ جـ، على التالي الذي هو ب جـ: أ ب. وكذلك فضل المقدم الثاني الذي هو د ز، على التالي الذي هو هـ ز: مقدار د هـ. فتصير نسبة أ ب الذي هو الفضل الى ب جـ الذي هو التالي: كنسبة د هـ الذي هو الفضل الى هـ ز الذي هو التالي. فصارت المقادير الى الحال التي كانت عليها في الوضع الأول الذي قبل التركيب.

Heath:16. Conversion of a ratio means taking the antecedent in relation to the excess by which the autecedent exceeds the consequent.

النسوي: قلب النسبة هو أخذ المقدم عند فضله على التالي

قال اوقليدس: قلب النسبة هو أخذ المقدم عند فضله على التالي.

قال المفسر: يقول ان نسبة أ جـ، الذي هو المقدم بعد التركيب، الى أ ب الذي هو الفضل على التالي الذي هو ب جـ: كنسبة د ز الى د هـ.

Heath: 17. A ratio ex aequali arises when there being several magnitudes and another set equal to them in multitude which taken two and two are in the same porportion, as the first is to the last among the first magnitudes, so is the first to the last among the second magnitudes.

Or, in other words, it means taking the extreme terms by virtue of the removal of the intermediate terms.

النسوي: نسبة المساواة هي ان تكون مقادير، كم كانت، ومقادير أخرى على عدتها [فتؤخذ] نسبة الاطراف بعضها لبعض.

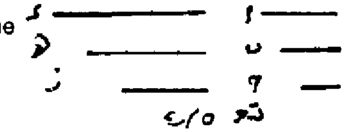
قال اوقليدس: نسبة المساواة تكون متى كانت أي مقادير كانت، ومقادير أخرى على عدتها، وكانت اذا اخذ اثنان من احداهما كانا على نسبة اثنين من الأخرى. فتؤخذ نسبة الأطراف دون ما بينها.

قال المفسر: يقول أخذنا مقادير ما، ومقادير أخر، كل اثنين من الأول على نسبة اثنين من الأخر، فانها في نسبة المساواة تكون متناسبة ونسبة المساواة هي نسبة الأطراف.

مثال ذلك: ننزل ان المقادير الأول أ، ب، جـ؛ والمقادير الأخر د، هـ، ز. وتكون نسبة اثنين من الأول على نسبة اثنين من الأخر:

نسبة أ إلى ب كنسبة د إلى هـ؛ ونسبة ب إلى جـ كنسبة هـ إلى ز، فاذا رفعنا الوسائط، كانت نسبة أ إلى جـ كنسبة د إلى ز وكذلك لو كانت على هذه العدة ما كانت من المقادير.

Heath: 18. A perturbed proportion arises when, there being three magnitudes and another set equal to them in multitude, as antecedent is to consequent among the first magnitudes, so is antecedent to consequent among the second magnitudes, while, as the consequent is to a third among the first magnitndes, so is a third to the antecedent among the second magnitudes.



قال اوقليدس: المناسبة المنتظمة هي متى كان المقدم عند التالي: كالمقدم عند التالي، والتالي عند شيء آخر كالتالي عند شيء آخر.

[٦٣ ب] قال المفسر: مثاله أ، د المقدمان؛ ب، هـ التاليان: جـ، ز الشيئان الآخران. فنقول: نسبة أ المقدم عند ب التالي: كنسبة د المقدم إلى هـ التالي ونسبة ب التالي عند جـ الذي هو شيء آخر كنسبة هـ التالـي إلى ز الذي هو شيء آخر.

قال اوقليدس: المناسبة المضطربة هي متى كان المقدم عند التالي، كالمقدم عند التالي، والتالي عند شيء آخر كشيء آخر عند التالي.

قال المفسر: يقول ان أ، د مقدمان؛ ب، هـ تاليان، جـ، ز الشيئان الآخران. فيقول: نسبة أ المقدم إلى ب التالي: كنسبة د المقدم إلى هـ التالي.

ونسبة ب التالي إلى جـ الذي هو شيء آخر كنسبة ز الذي هو شيء آخر إلى هـ الذي كان وضعه أنه مقدم في الصورة الأولى.

تمت المصادرة

Heath: 9. when three magnitudes are proportional, the first is said to have to the third the duplicate ratio of that which it has to the second.

10. when four magnitudes are (continuously)proportional, the first is said to have to the fourth the triplicate ratio of that which it has to the second, and so on continually, whatevar be the porportion

النسوي : يقال للمقدارين المفروضين ان نسبة أحدهما إلى الآخر مؤلفة من نسبتين مفروضتين، أو من نسب مفروضة، كم كانت، متى وجد [٣١ أ] بينهما مقدار او مقادير، ويتوالى الجميع على النسبتين المفروضتين، أو على تلك النسب المفروضة.

ومتى كان مقداران نسبة أحدهما إلى الآخر مؤلفة من نسبتين متساويتين، أو من ثلاث نسب متساوية، قيل لتلك النسبة انها كالنسبة المفروضة مثناة، أو مثلثة، فما بعد ذلك.

تعليقات :

(١) الجزء هنا بمعنى القاسم (aliquot part) . انظر هيث ٢ / ١١٥ والجزء بالعربية مثل ٧ بالنسبة الى ٢١ أو ٨٤، فهي ثلث ٢١، وهي جزء من ١٢ من ٨٤؛ اما ٢١ فهي ٣ أضعاف السبعة، و ٨٤ اثنا عشر ضعفاً. اما الاجزاء فمثل ٢ بالنسبة الى ٣ فهي ثلثاها، و ٧ بالنسبة الى ١٢ هي ٧ اجزاء من ١٢ جزءاً منها.

(٢)تعريف النسبة لا يُعرِّف من لا يعرفها وقد انصبت على تعريفات اقليدس اعتراضات كثيرة انظر بشأنها هيث، ٢/١١٦ - ١١٩.

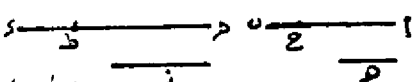
وما عمله كل من الحجاج والنيريزي والنسوي هو اعطاء أوضح التعريفات مع التقيد بخط المؤلف. ومهما يكن حكم القارىء الكريم على هذه التعريفات، فلا ينبغي ان يعزب عن البال ان ثمة أشياء كثيرة، مادية ومعنوية، نألفها ولا نستطيع ان نعطي لها تعريفاً يكون لها كهوية تميزها. ولا ينبغي ان يعزب عن البال أيضاً ان المقالة الخامسة لاقليدس هي من أروع ما كتبه. فكرة كاملة متكاملة، أعطت كل ما يحتاج اليه الرياضي عن النسبة والتناسب.

ب ـ مُبرهنات الحجاج وإضافات النيريزي

[المبرهنة ١/ ٥]

الشكل الأول من المقالة الخامسة

اذا كانت مقادير، كم كانت، فيها أضعاف مقادير أخر مقارنة لها على عدتها، وأضعافها متساوية، فإن ما في الواحد من أضعاف قرينه: مساوٍ لما في الجميع من أضعاف الجميع.



الشكل ١/٥

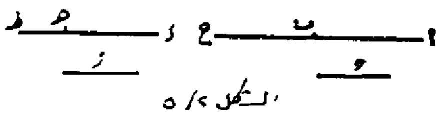
مثاله: ان مقداري أ ب، جـ د فيهما اضعاف متساوية لمقداري هـ، ز أعني ان ما في أ ب من أضعاف هـ: مساوٍ لما في جـ د من أضعاف ز. فأقول ما في أ ب من أضعاف قرينة الذي هو مقدار هـ: مساوٍ لما في أ ب، جـ د جميعاً من أضعاف هـ، ز جميعاً.

برهانه: انا نفصل من مقدار أ ب ما فيه من أضعاف هـ، ولننزل أن أضعافه أ ح، ب ح؛ ونفصل أيضاً من المقدار جـ د ما فيه من أضعاف ز، وننزل ان أضعافه جـ ط، ط د. فمن أجل ان المفروض هو ان ما في أ ب من اضعاف هـ مساوٍ لما في جـ د من أضعاف ز. فظاهر ان عدة أ ح، ح ب مساوية لعدة جـ ط، ط د؛ أ ح مساوٍ لمقدار هـ، جـ ط مساوٍ لمقدار ز. فَـ أ ح، جـ ط جميعاً مساويان لمقداري هـ، ز جميعاً. وأيضاً ح ب مساوٍ لمقدار هـ، ط د مساوٍ لمقدار ز، ح ب، ط د جميعاً مساويان لمقداري هـ، ز جميعاً. فظاهر ظهورا أول أن مقداري أ ب، جـ د جميعاً ضعف لمقداري هـ، ز جميعاً. فَـ أ ب قد تبين انه ضعف لمقدار هـ. فقد تبين ان ما في الواحد، وهو أ ب، من أضعاف هـ: مساوٍ لما في أ ب، جـ د جميعاً من أضعاف هـ، ز جميعاً. وذلك ما أردنا أن نبين.

قال المفسر: اما اذا كان مقدارا أ ب، جـ د خطين، فإنه يمكننا ان نفصل من كل واحد منهما أضعاف ما فيهما من امثال هـ، ز، ببرهان ٣ من ١ . وكذلك اذا كانت زوايا أو قسياً، ببرهان ٢٩ من ٣ . فاما اذا كانا مجسمين، فذلك غير ممكن. وهذه الأضعاف موضوعة على انها مفروضة؛ وانما نتوهم وهماً فقط. فاما اذا كان في أ ب من اضعاف هـ: ضعف ما في جـ د من أضعاف ز، أو نصف ما في جـ د من أضعاف ز، وكذلك أي الأضعاف كانت، يلزم في البرهان هذا الطريق.

[المبرهنة ٢//٥]

الشكل الثاني من المقالة الخامسة



اذا كانت مقادير، وكان ما في الأول من اضعاف الثاني مساوياً لما في الثالث من أضعاف الرابع، وفي الخامس من اضعاف الثاني مثل ما في السادس من أضعاف الرابع، فان الأول والخامس اذا جمعا يكون فيهما من اضعاف الثاني: مثل ما في الثالث والسادس اذا جمعا من أضعاف الرابع.

مثاله: ان في الأول، وهو أ ب. من أضعاف الثاني، وهو جـ، مثل ما في الثالث وهو د هـ، من أضعاف الرابع، وهو ز؛ وفي الخامس، وهو ب ح، من أضعاف الثاني، وهو جـ، مثل ما في السادس، وهو هـ ط من أضعاف الرابع، وهو ز: فاقول ان ما في الأول والخامس اذا جمعا، وهو مقدار أ ح، من أضعاف الثاني، وهو جـ: مثل ما في الثالث والسادس اذا جمعا، وهو د ط، من أضعاف [٦٤ أ] الرابع، وهو ز.

برهانه: ان المفروض هو ان ما في أ ب الأول من أضعاف جـ الثاني، مثل ما في الثالث الذي هو د هـ من أضعاف الرابع الذي هو ز، وفي الخامس الذي هو ب ح من أضعاف الثاني الذي هو جـ، مثل ما في السادس الذي هو هـ ط

من أضعاف الرابع الذي هو ز. فإذن لزم في هذا الشكل مثل ما يلزم في ١ من ٥، يكون ما في أ ح، الذي هو الأول والخامس جميعاً، من اضعاف الثاني الذي هو جـ، مثل ما في د ط الذي هو الثالث والسادس جميعاً من أضعاف الرابع الذي هو ز. وذلك ما أردنا ان نبين.

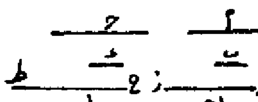
قال المفسر: ليس في هذا الشكل شيء البتة، لأن ترتيب الرياضيات أولاً هو الارثماطيقي، وهو الأعداد، ثم الهندسة، فلذلك صارت الرياضة الأولى فيه عن الأعداد التي يستعان بها على هذه الصناعة منها اذ قد علمنا ان أ ب يعده جـ بعدة مرات ما، وبمثل ذلك العدد يعد ز: د هـ؛ وأيضاً ان جـ يعد ب ح بعدة مرات ما، وبمثل تلك العدة يعد ز: هـ ط. فاذا جمع عدد المرات التي يعد جـ: أ ب، ب ح، كان مساوياً لعدة المرات التي يعد ز: د هـ، هـ ط. فتكون عدة أضعاف أ ح مساوياً لعدة أضعاف د ط. وذلك ما اردنا ان نبين.

[المبرهنة ٣/ ٥]

الشكل الثالث من المقالة الخامسة

اذا كانت مقادير ما، في الأول منها من أضعاف الثاني، مثل ما في الثالث من أضعاف الرابع، وأخذ للأول والثالث أضعاف متساوية، فإن ما في أضعاف الأول المـأخـوذة من أضعاف الثاني مثل ما في أضعاف الثالث المأخوذة من أضعاف الرابع.

مثاله: ان ما في الأول أ من أضعاف ب الثاني، مثل ما في جـ الثالث من أضعاف د الرابع. ونجعل في هـ ز من اضعـاف الأول وهـو أ: مثل ما في ح ط من أضعاف الثالث وهو جـ. فاقول: ان ما في هـ ز من أضعاف ب: مثل ما في ح ط من أضعاف د.



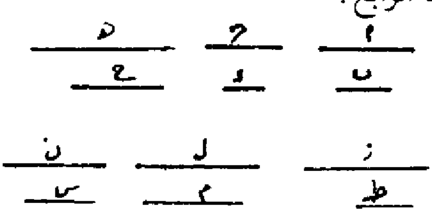
برهانه: انا نفصل من مقدار هـ ز ما فيه من أضعاف أ؛ فليكن هـ ك، ك

ز. ونفصل من ح ط ما فيه من أضعاف جـ، فليكن ح ل، ل ط. فمن أجل انا فرضنا ما في هـ ز من أضعاف أ مساوياً لما في ح ط من أضعاف جـ، فان عدة أقسام هـ ك، ك ز مساوية لعدة أقسام ح ل، ل ط. فيكون لذلك هـ ك مساوياً لقدر أ، ح ل مساوياً لقدر جـ. وكنا فرضنا ان ما في أ من أضعاف ب مثل ما في جـ من أضعاف د. ففي هـ ك من أضعاف ب اذن مثل ما في ح ل من أضعاف د. وكذلك يكون في ك ز من أضعاف ب مثل ما في ح ل من أضعاف جـ. فمن البين من برهان ٢ من ٥ أنا اذا فرضنا الأول هـ ك، والثاني ب، والثالث ح ل والرابع د، والخامس ك ز، والسادس ل ط، وقد تبين ان ما في الأول، وهو هـ ك، من أضعاف الثاني، وهو ب، مثل ما في الثالث، وهو ح ل من أضعاف الرابع، وهو د، وفي الخامس وهو ك ز من أضعاف الثاني وهو ب، مثل ما في السادس وهو ل ط من أضعاف الرابع وهو د. فظاهر من برهان ٢ من ٥ ان ما في الأول والخامس جميعاً، اللذين هما هـ ز، من أضعاف الثاني وهو ب، مثل ما في الثالث والسادس جميعاً وهما ح ط من أضعاف الرابع وهو د. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٤/ ٥]

الشكل الرابع من المقالة الخامسة

اذا كانت نسبة الأول إلى الثاني هي نسبة الثالث إلى الرابع، وأخذ للأول والثالث أضعاف متساوية المرات، ما كانت، وللثاني والرابع أضعاف متساوية المرات، ما كانت، فإن نسبة أضعاف الأول المأخوذة إلى أضعاف الثاني، هي نسبة أضعاف الثالث المأخوذة إلى أضعاف الرابع.



الشكل ٤/٥

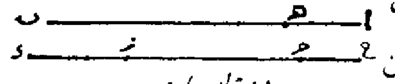
مثاله: ان نسبة اربعة مقادير أ، ب، جـ، د [٦٤ ب]: نسبة أ إلى ب كنسبة جـ إلى د. وقد أخذ لقدري أ، جـ اللذين هما الأول والثالث: أضعاف متساوية،

وهما هـ، ز؛ وأخذ لقدري ب، د وهما الثاني والرابع، أضعاف متساوية وهما ح، ط: فأقول ان نسبة هـ إلى ح كنسبة ز إلى ط.

برهانه: انا نأخذ لمقداري هـ، ز أضعافاً متساوية، وهما ل، ن. ولمقداري ح، ط أضعافاً متساوية، وهما م، س. فلأن أربعة مقادير موضوعة: الأول هـ، والثاني أ، والثالث ز، والرابع جـ؛ في الأول الذي هو هـ، من أضعاف الثاني الذي هو أ، مثل ما في الثالث الذي هو ز، من أضعاف الرابع الذي هو جـ؛ وقد أخذ للأول والثالث أضعاف متساوية وهما ل، ن: فبما قدم برهانه في ٣ من ٥ يكون في ل من أضعاف أ مثل ما في ن من أضعاف جـ. وبمثل هذا البيان نبين ان ما في م من أضعاف ب مثل ما في س من اضعاف د. ونسبة أ إلى ب كنسبة جـ إلى د. وقد أخذ لمقداري أ، هـ أضعاف متساوية، وهما ل، ن، ولقدري ب، د أضعاف متساوية وهما م، س ـ فمما قد شرح الحال في ٣ من ٥ فإن مقداري ل، ن اما ان يكونا مساويين لمقادري م، س، واما ان يكونا زائدين معاً عليهما، واما ان يكونا ناقصين معاً عنهما. لكن أخذ مقدارا أ، ن أضعافاً متساوية لمقداري هـ، ز؛ م، س أضعافاً متساوية لمقداري ح، ط. فكما انه متى كانت أربعة مقادير تكون نسبة الأول إلى الثاني كنسبة الثالث إلى الرابع، وأخذ للأول والثالث أضعاف متساوية، وللثاني والرابع أضعاف متساوية، كانت أضعاف الأول والثالث المأخوذة اما زائدة معاً على أضعاف الثاني والرابع، واما ناقصة معاً عنها، واما مساوية معاً لها، كذلك يلزم عكس هذا انه متى كانت أربعة مقادير، وأخذ للأول والثالث أضعاف متساوية، وللثاني والرابع أضعاف متساوية، وكانت أضعاف الأول والثالث اما زائدة معاً على أضعاف الثاني والرابع، واما ناقصة معاً عنها، واما مساوية لها، فإن نسبة الأول الى الثاني كنسبة الثالث إلى الرابع. فنسبة مقدار هـ إلى مقدار ح كنسبة مقدار ز إلى مقدار ط. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٥/ ٥]

الشكل الخامس من المقالة الخامسة



الشكل ٥/٥

اذا كان مقداران أحدهما أضعاف الآخر، وفصل منهما مقداران، وكان في المفصول من أضعاف المفصول، مثل ما في الكل من أضعاف الكل، فان ما في الباقي من أضعاف الباقي مثل ما في الكل من أضعاف الكل.

مثاله: ان مقدار أ ب أضعاف لمقدار جـ د. وقد فصل منهما مقدارا أ هـ، جـ ز؛ وفي أ هـ من أضعاف جـ ز مثل ما في أ ب من أضعاف جـ د. فأقول ان ما في هـ ب الباقي من أضعاف ز د الباقي مثل ما في أ ب من أضعاف جـ د.

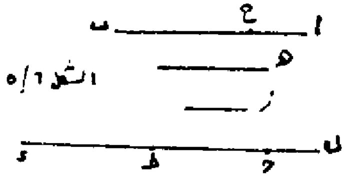
برهانه: انا نصل بمقدار جـ ز مقدار جـ ح؛ ونجعل في هـ ب من أضعاف جـ ح مثل ما في هـ أ من أضعاف جـ ز. فظاهر من برهان ١ من ٥ ان في أ هـ من أضعاف جـ ز مثل ما في جميع أ ب من أضعاف ح ز. وقد كنا فرضنا في أ هـ من أضعاف جـ ز مثل ما في أ ب من أضعاف جـ د. فقد صار مقدار أ ب أضعافاً متساوية لمقداري ح ز، جـ د. فمقدار ح ز إذن مساوٍ لمقدار جـ د. فنسقط جـ ز المشترك. فيبقى ز د مساوياً لمقدار ح جـ. ففي هـ ب من أضعاف ز د مثل ما في أ هـ من اضعاف جـ ز. فظاهر من برهان ١ من ٥ ان في هـ ب الباقي من اضعاف ز د الباقي مثل ما في جميع أ ب من أضعاف جـ د. وذلك ما اردنا ان نبين.

[المبرهنة ٦/ ٥]

[٦٥ أ] الشكل السادس من المقالة الخامسة

اذا كان مقداران فيهما أضعاف متساوية لمقدارين آخرين، وفصل من الأعظمين مقداران فيهما أضعاف متساوية للأصغرين فان الباقيين اما ان يكونا مساويين للأصغرين، . واما ان يكون فيهما أضعاف متساوية لهما.

مثـالـه: ان الأعـظمين أ ب، جـ د، والأصغرين هـ، ز؛ وقد فصل من الأعظمين أ ح، جـ ط؛ وفي أ ح من أضعاف هـ مثل ما في جـ ط من أضعاف ز. فأقول ان ح ب، ط د الباقيين: اما ان يكونا مساويين لمقداري هـ، ز، واما ان يكون في ح ب الباقي من اضعاف هـ: مثل ما في ط د الباقي من أضعاف ز.

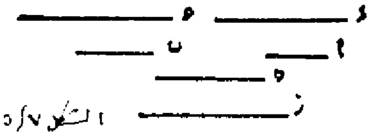


برهانه: ان كان ح ب مساوياً لمقدار هـ، فإنا نجعل جـ ك مساوياً لمقدار ز؛ وان كان في ح ب أضعـاف لمقـدار هـ فانـا نجعـل في جـ ك من أضعاف ز مثل ما في ب ح من أضعاف هـ. ففي ب ح الأول من اضعاف هـ الثاني مثل ما في جـ ك الثالث من أضعاف ز الرابع. وفي أ ح الخامس من اضعاف هـ الثاني مثل ما في جـ ط السادس من اضعاف ز الرابع. فظاهر إذن من برهان ٢ من ٥ ان ما في الأول والخامس من أضعاف الثاني مثل ما في الثالث والسادس من اضعاف الرابع. ففي أ ب إذن من أضعاف هـ مثل ما في ك ط من أضعاف ز. وقد كنا فرضنا في أ ب من اضعاف هـ مثل ما في جـ د من أضعاف ز. فإذن في جـ د من أضعاف ز مثل ما في ك ط من أضعاف ز. فمقدار ك ط مساوٍ لمقدار جـ د. فاذا أسقطنا جـ ط المشترك بقي ك جـ مثل ط د. وكنا فرضنا في جـ ك من أضعاف ز مثل ما في ح ب من أضعاف هـ. ففي ط د من اضعاف ز مثل ما في ح ب من أضعاف هـ. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٧/ ٥]

الشكل السابع من المقالة الخامسة

المقادير المتساوية نسبتها إلى مقدار آخر نسبة واحدة، واذا نسب اليها ذلك المقدار، فان نسبته أيضاً اليها واحدة.



مثـالـه: ان مقـداري أ، ب متسـاويان،

ومقدار جـ مقدار آخر. فأقول ان نسبة أ إلى جـ كنسبة ب إلى جـ؛ ونسبة جـ أيضاً إلى أ كنسبة إلى ب.

برهانه: انا نأخذ لمقداري أ، ب أضعافاً متساوية، وننزل أنها مقدارا د، هـ، ونأخذ لمقدار جـ أضعافاً أخر، أي الاضعاف كانت، وننزل انها مقدار ز فمن أجل ان ما في د من أضعاف أ فرض مساوياً لما في هـ من أضعاف ب، أ فرض مساوياً لمقدار ب، واذا كانت مقادير متساوية وأخذت لها أضعاف متساوية، فان المقادير التي هي اضعاف المقادير المتساوية هي أيضاً متساوية. فمقدار د مساوٍ لمقدار هـ. ومقدار آخر مفروض، وهو مقدار ز. فظاهر ان مقدار د ان كان زائداً على مقدار ز فإن مقدار هـ أيضاً زائد على ز. وان كان د ناقصاً عن ز، فإن هـ ناقص عن ز، وان كان مساوياً له فهو مساوٍ له. فقدرا د، هـ اما ان يكونا زائدين معاً على ز، واما ناقصين معاً عنه، واما مساويين معاً له. وهما أضعاف متساوية لقدري أ، ب. ومقدار ز أضعاف لمقدار جـ. فنسبة أ إلى جـ كنسبة ب إلى جـ.

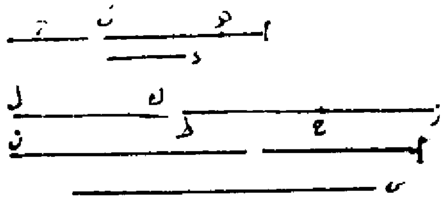
واقول أيضاً: ان نسبة جـ إلى أ كنسبته إلى ب. ونبين أيضاً كما بينا ان د، هـ متساويان، وان ز ان كان زائداً على د فهو أيضاً زائد على هـ، وان كان ناقصاً عن د فإنه أيضاً ناقص عن هـ، وان كان مساوياً له، فهو أيضاً مساوٍ له. فمقدار ز اما ان يكون زائداً على د، هـ معاً، وأما ناقصاً عنهما معاً، واما مساوياً لهما معاً. ومقدار ز فرض أضعافاً لمقدار جـ. ومقدارا د، هـ فرضا أضعافاً متساوية لمقداري أ، ب. فنسبة جـ اذن إلى د كنسبته إلى هـ. وذلك ما اردنا ان نبين.

[المبرهنة ٨/ ٥]

[٦٥ ب] الشكل الثامن من المقالة الخامسة

المقادير المختلفة اذا نسبت إلى قدر آخر، فان الأعظم أعظم نسبة إليه من الأصغر؛ واذا نسب هو اليها فنسبته إلى الأصغر أعظم من نسبته إلى الأعظم.

مثاله: ان مقداري أ ب، جـ مختلفان: مقدار أ ب أعظم من مقدار جـ. ومقدار د مقدار آخر. فأقول ان نسبة أ ب إلى د أعظم من نسبة جـ إلى د. واذا نسب د إليهما كانت نسبته إلى جـ أعظم من نسبته إلى أ ب.



الشكل ٨/د

برهانه: انا نفصل من أ ب ما فيه من اضعاف د حتى يفصل مقدار ليس بأعظم من مقدار جـ. فلننزل ان المفصول مقدار ب هـ، وان مقدار أ هـ الباقي ليس بأعظم من جـ. فليس يخلو أ هـ من ان يكون اما أعظم من د، واما مساوياً، واما أصغر منه.

فلننزل اولاً انه أصغر منه، ونضاعف مقدار أ هـ حتى يصير أعظم من مقدار د. ولتكن الأضعاف المأخوذة لمقدار أ هـ التي هي أعظم من مقدار د: مقدار ز ح: ونفرض مقداري ح ط، ك ل. ونجعل في ح ط من أضعاف هـ ب مثل ما في ح ز من أضعاف أ هـ. وكذلك فليكن في ك ل من أضعاف جـ مثل ما في ح ز من أضعاف أ هـ، ونفرض مقدار م ضعفين لمقدار د؛ ومقدار ن ثلاثة أضعاف لمقدار د. فلا نزال نضاعف على هذا الترتيب إلى أن نبلغ إلى أول إضعاف لمقدار د يكون أعظم من مقدار ك ل. فلننزل انا فعلنا ذلك، وبلغ بنا التضعيف إلى مقدار س، فصار مقدار س أول التضاعيف التي زادت عن مقدار ك ل.

فمن أجل ان ما في ز ح من أضعاف أ هـ: مساوٍ لما في ح ط من أضعاف هـ ب، فظاهر إذن من برهان ١ من ٥ ان ما في الواحد من أضعاف قرينه مساوٍ لما في الجميع من اضعاف الجميع. فما في ز ح إذن من أضعاف أ هـ مساوٍ لما في ز ط من أضعاف أ ب. وكنا فرضنا في ز هـ من أضعاف أ هـ مثل ما في ك ل من أضعاف جـ. وقد تبين ان ما في ز ح من أضعاف أ هـ مساوٍ لما في ز ط من أضعاف أ ب. فما في ز ط إذن من أضعاف أ ب مساوٍ لما في ك ل من أضعاف جـ. وكنا أيضاً فرضنا ما في ح ط من أضعاف هـ ب مساوياً لما في ك ل من أضعاف جـ. فان كان هـ ب مساوياً لمقدار جـ فان ح ط مساوٍ لمقدار ك

ل؛ وان كان أضعافاً له فإن مقدار ح ط أيضاً أضعاف لمقدار ك ل. ولأنا فرضنا مقدار س أعظم من مقدار ك ل، وليس ك ل بأصغر من مقدار ن؛ وقد بينا ان مقدار ك ل أيضاً اما ان يكون مساوياً لمقدار ح ط، واما أصغر منه. فمقدار ح ط إذن ليس بأصغر من مقدار ن. وفرضنا ز ح أعظم من د. فظاهر إذن ان ز ط أعظم من د، ن جميعاً. لكن س مساوٍ لمقدار ن، د جميعاً، ز ط أعظم من س. فَـ ز ط اذن زائد على س. وقد بينا ان س أعظم من ك ل. فمقدار س ليس بأقل من ك ل؛ ز ط، ك ل أضعاف متساوية لمقداري أ ب، جـ. ومقدار س أضعاف لمقدار د. فمقدار أ ب إذن أعظم نسبة إلى مقدار د، من مقدار جـ إلى مقدار د.

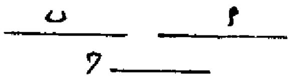
وأقول أيضاً: انا اذا نسبنا مقدار د إلى مقداري أ ب، جـ، فان نسبة د إلى جـ أعظم من نسبة د إلى أ ب. ونبين كما بينا. فمن أجل ان مقدار س زائد على مقدار ك ل، وليس بزائد على مقدار ز ط، ومقدارا ك ل، ز ط أضعاف متساوية لمقداري أ ب، جـ ومقدار س أضعاف لمقدار د: فنسبة د إلى جـ أعظم من نسبته إلى أ ب.

وان كان أ ب مساوياً لمقدار د أو أعظم منه، فإن مقدار جـ أعظم من مقدار د. فنضعف مقدار د حتى يصير أعظم من مقدار جـ. وننزل أنه مقدار م، وَ أ هـ ليس بأعظم من جـ. فَـ أ هـ اذن أصغر من م. فنضاعف أ هـ حتى يصير أعظم من م [٦٦ أ]. ولتكن الأضعاف المأخوذة لمقدار أ هـ التي هي أعظم من م: مقدار ز ح. ونأخذ لمقداري هـ ب، جـ أضعافاً مثل ما في ز ح من أضعاف أ هـ. وليكونا مقداري ح ط، ك ل. ونجعل ن ثلاثة أضعاف م، س أربعة أضعاف ن، حتى يصير إلى أضعاف تكون أعظم من ك ل. وننزل أنه مقدار س. ونبين كما بينا ان ز ط زائد على س، ك ل غير زائد على س. فنسبة أ ب إلى د أعظم من نسبة جـ إلى د. ونسبة د إلى جـ أعظم من نسبته إلى أ ب. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٩/ ٥]

الشكل التاسع من المقالة الخامسة

اذا كانت مقادير نسبتها الى مقدار واحد نسبة واحدة، فإن المقادير متساوية. وان كانت نسبة المقدار الواحد الى مقادير: واحدة، فإن المقادير متساوية.

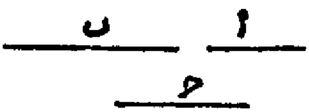


مثاله: ان مقداري أ، ب نسبتهما الى مقدار جـ نسبة واحدة. فأقول ان مقداري أ، ب متساويان. فان أمكن ان يكونا غير متساويين فإن أ إذن إما ان يكون أعظم من ب، وإما أصغر. وقد بينا ببرهان ٨ من ٥ ان المقادير المختلفة اذا نسبت الى مقدار آخر، فإن الأعظم أعظم نسبة اليه من الأصغر. فنسبة أ إذن الى جـ أعظم من نسبة ب من جـ. وكنا فرضنا نسبة أ الى جـ مثل نسبة ب الى جـ. وهذا خلف. وكذلك لا يمكن ان يكون أ أصغر من ب لما بينا. فهما إذن متساويان وأيضاً فإن نسبة جـ الى أ مثل نسبة جـ الى ب. فأقول ان أ يساوي ب.

برهانه: انه لا يمكن غيره. فإن أمكن فليكن أ أعظم من ب أو أصغر منه. فلو كان أعظم منه لكانت نسبة جـ الى أ أصغر من نسبته الى ب، وليس كذلك. ولو كان أصغر من ب لكانت نسبة جـ الى أ أعظم من نسبته الى ب. وليس كذلك. فهما اذن متساويان وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ١٠/ ٥]

الشكل العاشر من المقالة الخامسة



اذا كانت مقادير نسبتها الى مقدار آخر مختلفة، فإن الذي نسبته اليه أعظم هو أعظمها. واذا كان مقدار نسبته الى مقادير أخر مختلفة، فان

الذي النسبة اليه أعظم هو أصغرها.

مثاله: ان مقدار أ نسبته الى مقدار جـ أعظم من نسبة ب الى جـ. فأقول: ان أ أعظم من ب.

برهانه: ان لم يكن أ أعظم من ب، فهو إذن مثله أو أصغر منه. فلو كان مثله لكانت نسبتهما الى مقدار جـ واحدة، كما بين ببرهان ٧ من ٥؛ وليست كذلك. ولو كان أصغر منه لكانت نسبته الى جـ أصغر من نسبة ب الى جـ، كما بين ببرهان ٨ من ٥، وليس كذلك. فليس أ اذن بمساوٍ لمقدار ب، ولا أصغر منه.

فهو اذن أعظم منه. وأيضاً فان نسبة جـ الى ب أعظم منها الى أ؛ فأقول ان ب أصغر من أ.

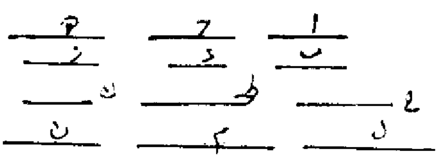
برهانه: انه ان لم يكن أصغر منه فهو مساوٍ له أو أعظم منه. ولو كان مساوياً له لكـانت نسبة جـ الى أ كنسبته الى ب، كما بين ببرهان ٧ من ٥، وليست كذلك. ولو كان ب أعظم من أ لكانت نسبة جـ الى أ أعظم من نسبته الى ب، كما بين ببرهان ٨ من ٥، وليس كذلك. فليس أ بمساوٍ لمقدار ب، ولا هو أيضاً أصغر منه. فهو إذن أعظم منه. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ١١/ ٥]

الشكل الحادي عشر من المقالة الخامسة

المقادير التي نسبتها الى مقادير أخر واحدة، فهي متناسبة.

مثـاله: ان نسبة أ الى ب كنسبة جـ الى د؛ ونسبة هـ الى ز كنسبة جـ الى د. فأقــول ان نسبـة أ الى ب كنسبـة هـ الى ز.



برهـانـه: انـا نأخذ لمقادير أ، جـ، هـ أضعافاً متساوية، أي الأضعاف

كانت، وننزل انها مقادير ح، ط، ك. ونأخذ [٦٦ ب] أيضاً لمقادير ب، د، ز، أضعافاً متساوية، أي الأضعاف كانت، وننزل انها ل، م، ن.

فمن أجل ان نسبة أ الى ب كنسبة جـ الى د، وقد أخذ لمقداري أ، جـ أضعاف متساوية، وهما مقدارا ح، ط؛ وقد أخذ لمقداري ب، د أضعاف متساوية، وهما مقدارا ل، م؛ وظاهر مما تقدم ببرهان ٤ من ٥ أن مقداري ح، ط إما ان يكونا زائدين معاً على مقداري ل، م، وإما ناقصين معاً عنهما، وإما مساويين معاً لهما.

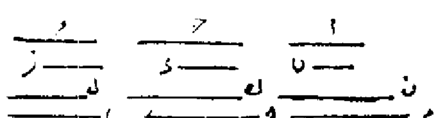
فمن أجل ان نسبة هـ الى ز كنسبة جـ الى د، وقد أخذ لمقداري هـ، جـ أضعاف متساوية، وهما ك، ط، وأخذ أيضاً لمقداري ز، د أضعاف متساوية، وهما م، ن، فمقدارا ك، ط إما ان يكونا زائدين معاً على مقداري ن، م، واما ناقصين معاً عنهما، وإما مساويين معاً لهما. فقدرا ح، ك اما ان يكونا زائدين معاً على ل، ن، واما ناقصين معاً عنهما، واما مساويين لهما. فنسبة أ الى ب كنسبة هـ الى ز. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ١٢/ ٥]

الشكل الثاني عشر من المقالة الخامسة

اذا كانت مقادير، وكانت نسبة الأول الى الثاني كنسبة الثالث الى الرابع، ونسبة الثالث الى الرابع أعظم من نسبة الخامس الى السادس، فإن نسبة الأول الى الثاني أعظم من نسبة الخامس الى السادس.

مثاله: ان نسبة أ الى ب كنسبة جـ الى د، ونسبة جـ الى د أعظم من نسبة هـ الى ز. فأقول ان نسبة أ الى ب أعظم من نسبة هـ الى ز.



برهانه: من أجل ان نسبة جـ الى د أعظم من نسبة هـ الى ز، فإنا متى أخذنا

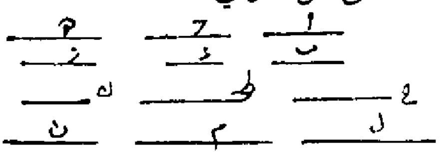
لمقـداري جـ، هـ أضعـافـاً متسـاوية، مثـل مقـداري ح، ط، وأخذنا أيضاً لمقداري د، ز أضعافاً متساوية، مثل مقداري ك، ل، فإن مقدار ح يمكن ان يزيد على مقدار ك، ومقدار ط يمكن ان ينقص عن مقدار ل. واذا كان هكذا فمقدار ط غير زائد على مقدار ل.

ونفرض أيضاً مقداري م، ن، وليكن في م من أضعاف أ مثل ما في ح من أضعاف جـ، وفي ن من أضعاف ب مثل ما في ك من أضعاف د. فمن أجل ان نسبة أ الى ب كنسبة جـ الى د، فمقدارا م، ح اما ان يكونا زائدين معاً على مقداري ن، ك، واما ناقصين معاً عنهما، واما مساويين معاً لهما. لكنا قد بينا ان مقدار ح زائد على مقدار ك، ط غير زائد على ل. فمقدار م اذن زائد على ن، ط غير زائد على ل؛ م، ط أخذا أضعافاً متساوية لمقداري أ، هـ؛ ن، ل أخذا أضعافاً متساوية لمقداري ب، ز. فنسبة أ الى ب إذن أعظم من نسبة هـ الى ز، وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ١٣/ ٥، هي ١٢/ ٥ عند هيث]

الشكل الثالث عشر من المقالة الخامسة

اذا كانت مقادير متوالية متناسبة، كم كانت، فان نسبة واحد من المقدمات الى قرينه من التوالي: كنسبة كل المقدمات الى كل التوالي.



مثاله: ان مقادير أ، ب، جـ، د، هـ، ز متوالية متناسبة: نسبة أ الى ب كنسبة جـ الى د ونسبة جـ الى د كنسبة هـ الى ز. فأقول ان نسبة أ الذي هو أحد المقدمات الى ب الذي هو قرينه من التوالي: كنسبة كل أ، جـ، هـ، اذا جمعت، الى كل ب، د، ز اذا جمعت.

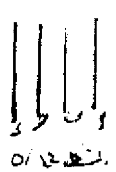
برهـانـه: انـا نأخذ لمقادير أ، جـ، هـ أضعافاً متساوية، أي الأضعاف

كانت، وهي ح، ط، ك. ولمقادير ب، د، ز أضعافاً متساوية، اي الأضعاف كانت، ولتكن ل، م، ن. فلأن في ح من أضعاف أ مثل ما في ط من أضعاف جـ، وفي ك من أضعاف هـ مثل [ذلك] فظاهر من برهان ١ من ٥ ان في ح من أضعاف أ مثل ما في جميع ح، ط، ك من أضعاف جميع أ، جـ، هـ. [٦٧ أ] وكذلك نبين ان في ل من أضعاف ب مثل ما في ل، م، ن من أضعاف جميع ب، د، ز. فإن كان مقدار ح زائداً على ل، فإن ح، ط، ك اذا جمعت تكون أيضاً زائدة على ل، م، ن مجموعة. وان كان ح ناقصاً عن ل، فإن ح، ط، ك اذا جمعت تكون أيضاً ناقصة عن ل، م، ن اذا جمعت. وان كان ح مساوياً لمقدار ل فإن ح، ط، ك مجموعة أيضاً مساوية لمجموع ل، م، ن. فنسبة أ الى ب اذن كنسبة أ، جـ، هـ اذا جمعت الى ب، د، ز اذا جمعت. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ١٤/ ٥]

الشكل الرابع عشر من المقالة الخامسة

اذا كانت اربعة مقادير متناسبة، وكان الأول أعظم من الثالث، فإن الثاني أعظم من الرابع وان كان مساوياً له، فهو مساوٍ له. وان كان أصغر منه فهو أصغر منه.



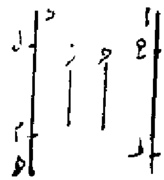
مثاله: ان مقادير أ، ب، جـ، د، الأربعة متناسبة: نسبة أ الى ب كنسبة جـ الى د. وَ أ أعظم من جـ. فأقول إن ب أعظم من د.

برهانه: ان أ أعظم من جـ، ب مقدار آخر. فظاهر من برهان ٨ من ٥ ان نسبة أ الى ب أعظم من نسبة جـ الى ب. ولكن نسبة أ الى ب كنسبة جـ الى د. فتصير اذن نسبة جـ الى د أعظم من نسبة جـ الى ب. فظاهر من برهان ١٠ من ٥ ان الذي اليه النسبة أعظم، فهو أصغر. فمقدار د اذن أصغر من ب. فمقدار ب أعظم من مقدار د.

وكذلك أيضاً نبين أن أ لو كان مساوياً لمقدار جـ، لكان ب مساوياً لمقدار د، باستشهاد شكل ١١ من ٥. وكذلك نبين ان أ إن كان أصغر من جـ، فإن ب أصغر من د، باستشهاد الشكلين الأولين، أعني ٨، ١٠ من هذه المقالة. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ١٥/ ٥]

الشكل الخامس عشر من المقالة الخامسة



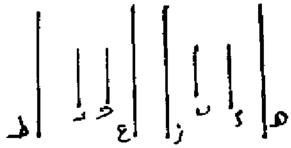
اذا كانت مقادير، وأخذ لها أضعاف متساوية، فإن نسبة المقادير بعضها الى بعض، كنسبة أضعافها بعضها الى بعض.

مثاله: ان مقداري جـ، ز مفروضان، وقد أخذ لهما أضعاف متساوية، وهي أ ب، د هـ. وفي أ ب من أضعاف جـ مثل ما في د هـ من أضعاف ز. فأقول ان نسبة جـ الى ز كنسبة أ ب الى د هـ.

برهانه: انا نفصل ما في أ ب، د هـ من أضعاف جـ، ز، وهي أ ح، ح ط، ط ب؛ د ل، ل م، م هـ. فمقادير أ ح، ح ط، ط ب متساوية لأن كل واحد منها مثل جـ. وأيضاً مقادير د ل، ل م، م هـ متساوية لأن كل واحد منها مثل ز. وعدة أ ح، ح ط، ط ب مساوية لعدة د ل، ل م، م هـ. فظاهر ان نسبة أ ح الى د ل كنسبة ح ط الى ل م، وكنسبة ط ب الى م هـ. فبين من برهان ١٣ من ٥ ان نسبة أ ح الى د ل كنسبة أ ب الى د هـ. وَأ ح مساوٍ لمقدار جـ؛ د ل مساوٍ لمقدار ز. فنسبة جـ الى ز كنسبة أ ب الى د هـ. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ١٦/ ٥]

الشكل السادس عشر من المقالة الخامسة



كل أربعة مقادير متناسبة، فانها اذا ابدلت تكون متناسبة.

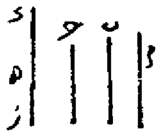
مثاله: ان مقادير أ، ب، جـ، د متناسبة، نسبة أ إلى ب كنسبة جـ إلى د. فأقول: انها اذا بدلت تكون نسبة أ إلى جـ كنسبة ب إلى د.

برهانه: انا نأخذ لمقداري أ، ب أضعافاً متساوية، أي الأضعاف كانت، ولتكن هـ، ز. ونأخذ لمقداري جـ، د أضعافاً متساوية أي الأضعاف كانت، ولتكن ح، ط. فمن أجل ان أ، ب قد أخذ لهما أضعاف متساوية، وهي هـ، ز فظاهر من برهان ١٥ أن نسبة المقدارين أحدهما إلى الآخر، كنسبة الأضعاف المأخوذة لهما، أحدهما إلى الآخر. فنسبة أ إلى ب كنسبة هـ إلى ز.

وكذلك نبين ان نسبة جـ إلى د كنسبة ح إلى ط. ولكن نسبة جـ إلى د كنسبة أ إلى ب، ونسبة أ إلى ب، كنسبة هـ إلى ز. فاذا [٦٧ ب] أسقطنا الوسائط، كما بين من برهان ١١، كانت نسبة هـ إلى ز كنسبة ح إلى ط. فظاهر من برهان ١٤ أن كل أربعة مقادير متناسبة، فإن الأول ان كان زائداً على الثالث، فإن الثاني زائد على الرابع، وان كان الأول ناقصاً عن الثالث، فإن الثاني ناقص عن الرابع. وان كان الأول مساوياً للثالث، فإن الثاني مساوٍ للرابع. فمقدارا هـ، ز إما زائدان معاً على ح، ط؛ وإما ناقصان معاً عنهما، واما مساويان معاً لهما. لكن هـ، ز فرضا أضعافاً متساوية لمقداري أ، ب؛ ح، ط أضعافاً متساوية لمقداري جـ، د. فيصير إذن ترتيب هذه الأضعاف: أ الأول، ب الثالث، جـ الثاني، د الرابع. فنسبته أ إلى جـ كنسبة ب إلى د. وذلك ما أردنا ان نبين.

شكل مضاف إلى السادس عشر من المقالة الخامسة

اذا كانت أربعة مقادير، وكانت نسبة الأول إلى الثاني أعظم من نسبة الثالث إلى الرابع، فانا اذا بدلنا تكون نسبة الأول إلى الثالث أعظم من نسبة الثاني إلى الرابع.



مثاله: ان أربعة مقادير أ، ب، جـ، د هـ، الأربعة: نسبة أ إلى ب أعظم من نسبة جـ إلى د هـ. فأقول انا اذا بدلنا تكون نسبة أ إلى جـ أعظم من نسبة ب إلى د هـ.

برهانه: انه لا يمكن غيره. فان امكن، فلتكن نسبة أ إلى جـ مثل نسبة ب إلى د هـ، أو أصغر منها. فلننزل اولاً انها مثلها. فتكون اذن نسبة أ إلى جـ كنسبة ب إلى د هـ. فاذا بدلنا تكون نسبة أ إلى ب كنسبة جـ إلى د هـ. وهذا محال لأن نسبة أ إلى ب أعظم من نسبة جـ إلى د هـ.

وأقول أيضاً انه لا يمكن ان تكون نسبة أ إلى جـ أصغر من نسبة ب إلى د هـ.

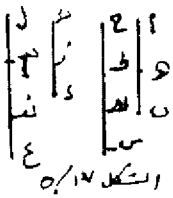
برهانه: انا نجعل نسبة أ إلى جـ كنسبة ب إلى د ز. فاذا بدلنا تكون نسبة أ إلى ب كنسبة جـ إلى د ز. وقد كنا فرضنا نسبة أ إلى ب أعظم من نسبة جـ إلى د هـ. فنسبة جـ إلى د ز اذن أعظم من نسبة جـ إلى د هـ. والذي النسبة اليه أعظم فهو أصغر. فمقدار د ز اذن أصغر من مقدار د هـ. الأعظم أصغر من الأصغر. هذا محال غير ممكن. وذلك ما اردنا ان نبين.

[المبرهنة ١٧/ ٥]

الشكل السابع عشر من المقالة الخامسة

اذا كانت مقادير مركبة متناسبة، فانها اذا فصلت تكون متناسبة.

مثاله: ان مقادير أ ب، ب هـ، جـ د، د ز مركبة متناسبة: نسبة أ ب إلى ب هـ كنسبة جـ د إلى د ز. فأقول انها اذا فصلت تكون متناسبة: نسبة أ هـ إلى هـ ب كنسبة جـ ز إلى ز د.



برهانه انا نأخذ لمقادير أ هـ، هـ ب، جـ ز، ز د: أضعافاً متساوية، وهي ح ط، ط ك، ل م، م ن. وننزل أن ح ط فيه من أضعاف أ هـ مثل ما في ط ك من أضعاف هـ ب؛ وفي ل م من أضعاف جـ ز مثل ما في م ن من أضعاف ز د. فمن أجل ان ما في ح ط من أضعاف أ هـ، مثل ما في ط ك من أضعاف هـ ب فظاهر من برهان ١ من ٥ ان ما في الواحد من اضعاف قرينه مثل ما في الجميع من أضعاف الجميع. فإذن ما في ح ط من أضعاف أ هـ مثل ما في ح ك من أضعاف أ ب. وبمثل هذا نبين ان ما في ل م من أضعاف جـ ز مثل ما في ل ن من أضعاف جـ د. وقد كنا فرضنا ان ما في ل م من أضعاف جـ ز مثل ما في ح ط من أضعاف أ هـ. فظاهر إذن ان ما في ل ن من أضعاف جـ د، مثل ما في ح ك من أضعاف أ ب. وقد تبين ان ح ك، ل ن أضعاف متساوية لمقداري أ ب، جـ د.

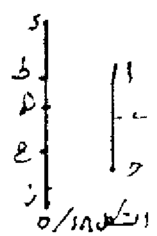
ونأخذ أيضاً لمقداري هـ ب، ز د أضعافاً متساوية، ولتكن ك س، ن ع. ففي ط ك الأول من أضعاف هـ ب الثاني مثل ما في م ن الثالث من أضعاف ز د الرابع. وفي ك س الخامس من أضعاف هـ ب الثاني مثل ما في ن ع السادس من أضعاف ز د الرابع. فظاهر اذن من برهان ٢ من ٥ ان ما في الأول والخامس

من أضعاف الثاني مثل ما في الثالث والسادس من أضعاف الرابع. ففي ط س اذن من أضعاف هـ ب مثل ما في م ع من أضعاف ز د.

ومن أجل ان نسبة أ ب إلى [٦٨ أ] ب هـ: كنسبة جـ د إلى د ز. وقد أخذ للأول الذي هو أ ب، وللثالث الذي هو جـ د: أضعاف متساوية، وهي ح ك، ل ن. وقد أخذ أيضاً للثاني الذي هو هـ ب، وللرابع الذي هو ز د أضعاف متساوية، وهي ط س، م ع. فظاهر مما قدمنا ان ح ك، ل ن إما زائدان معاً على ط س، م ع؛ وإما ناقصان معاً عنهما؛ وإما مساويان معاً لهما. فاذا أسقطنا ط ك، م ن المشتركين، فظاهر انه يبقى ح ط، ل م إما زائدين معاً على ك س، ن ع، وأما مساويين معاً لهما، وإما ناقصين معاً عنهما وَح ط، ل م أضعاف متساوية لمقداري أ هـ، جـ ز؛ ك س، ن ع أضعاف متساوية لمقداري هـ ب، ز د. فنسبة أ هـ إلى هـ ب كنسبة جـ ز إلى ز د. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ١٨/ ٥]

الشكل الثامن عشر من المقالة الخامسة



اذا كانت مقادير مفصلة متناسبة، فإنها اذا ركبت تكون متناسبة.

مثاله: ان مقادير أ ب، ب جـ، د هـ، هـ ز مفصلة متناسبة: نسبة أ ب إلى ب جـ كنسبة د هـ إلى هـ ز، فاقول انها اذا ركبت متناسبة: نسبة أ جـ إلى جـ ب كنسبة د ز إلى ز هـ.

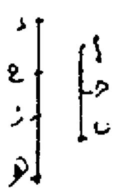
برهانه: انه ان امكن الا تكون نسبة أ جـ إلى جـ ب كنسبة د ز إلى ز هـ، فليس تخلو اذن من ان تكون نسبة أ جـ إلى جـ ب كنسبة د ز إلى مقدار آخر، اما أعظم من هـ ز، واما أصغر منه. فلننزل اولاً انها إلى مقدار أصغر من هـ ز،

فليكن مثل ز ح. فنسبة أ جـ إلى جـ ب كنسبة د ز إلى ز ح. فظاهر من برهان ١٧ انا اذا فصلنا تكون أيضاً متناسبة: نسبة أ ب إلى ب جـ كنسبة د ح إلى ح ز. وقد كنا فرضنا ان نسبة أ ب إلى ب جـ كنسبة د هـ إلى هـ ز فظاهر من برهان ١١ انا متى اسقطنا الواسطة بقيت نسبة د ح إلى ح ز كنسبة د هـ إلى هـ ز، واذا بدلنا، كالذي تبين من برهان ١٦ تكون نسبة د ح الأول إلى د هـ الثالث، كنسبة ح ز الثاني إلى هـ ز الرابع. ومن أجل ان د ح أعظم من د هـ يجب ان يكون ح ز أيضاً أعظم من ز هـ. فيكون الأصغر أعظم. من الأعظم. هذا محال. فليست إذن نسبة أ جـ إلى جـ ب كنسبة د ز إلى مقدار هو أصغر من مقدار هـ ز.

وأقول أيضاً: ولا إلى مقدار هو أعظم من مقدار هـ ز. فان امكن فانا ننزل ذلك المقدار ط ز. وننظم البرهان كنظمنا وتكون نسبة د ط إلى ط ز كنسبة د هـ إلى هـ ز. واذا بدلنا تكون نسبة د ط إلى د هـ كنسبة ط ز إلى هـ ز. وَد ط الأول أصغر من د هـ الثاني. فيجب ان يكون ط ز الثالث أيضاً أصغر من هـ ز الرابع: فيكون الأعظم أصغر من الأصغر. هذا محال فليست اذن نسبة أ جـ إلى جـ ب كنسبة د ز إلى أعظم من هـ ز، ولا إلى اصغر منه. فلم يبق الا ان تكون كنسبة د ز إلى ز هـ. وذلك ما اردنا ان نبين.

شكل مضاف إلى الشكل الثامن عشر من المقالة الخامسة

اذا كانت مقادير مركبة، فكانت نسبة الأول إلى الثاني أعظم من نسبة الثالث إلى الرابع، فانها اذا فصلت تكون نسبة الأول إلى الثاني أعظم من نسبة الثالث إلى الرابع.



مثاله: ان نسبة أ ب الأول إلى ب جـ الثاني أعظم من نسبة د هـ الثالث إلى هـ ز الرابع. فأقول انها اذا فصلت تكون نسبة أ جـ الأول إلى جـ ب الثاني أعظم من نسبة د ز الثالث إلى ز هـ الرابع.

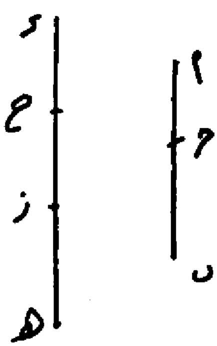
برهانه: انه ان لم يكن كذلك فليس يخلو من ان يكون كنسبة د ز إلى ز

هـ، أو أصغر منها. فلنتزل اولاً انها مثلها: فاذا ركبنا تكون نسبة أ ب إلى ب جـ كنسبة د هـ إلى هـ ز. وهذا محال، لأنا فرضناها أعظم منها.

وأيضاً فأقول انه لا يمكن ان تكون نسبة أ جـ إلى جـ ب أصغر من نسبة د ز إلى ز هـ، فلتكن، ونجعل نسبة أ جـ إلى ب جـ: كنسبة د ح إلى ح هـ. فاذا ركبنا تصير نسبة أ ب إلى ب جـ كنسبة د هـ إلى هـ ح. وقد كانت نسبة أ ب إلى ب جـ أعظم من نسبة د هـ إلى هـ ز، فيكون الذي نسبته إليها أعظم، هو أصغر بمقدار ح هـ، أصغر من مقدار ز هـ. هذا محال فليست اذن نسبة أ جـ إلى جـ ب أصغر من نسبة د ز إلى ز هـ. وقد كان تبين أيضاً ان نسبة أ جـ إلى جـ ب ليست مثل نسبة د هـ إلى ز هـ. فهي إذن أعظم منها. وذلك ما أردنا ان نبين.

[٦٨ ب] شكل ثانٍ مضاف إلى الشكل الثامن عشر

اذا كانت مقـادير مفصلة، وكانت نسبة الأول إلى الثاني أعظم من نسبة الثـالث إلى الـرابع، فانها اذا ركبت تكون نسبة الأول والثاني مجموعين إلى الثاني: أعظم من نسبة الثالث والرابع مجموعين إلى الرابع.



مثاله ان نسبة أ جـ إلى جـ ب أعظم من نسبة د ز إلى ز هـ. فأقول انا اذا ركبنا تكون نسبة أ ب إلى ب جـ أعظم من نسبة د هـ إلى هـ ز.

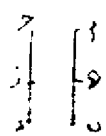
برهانه: انه لا يمكن غيره. فإن أمكن فلتكن نسبة أ ب إلى ب جـ كنسبـة د هـ إلى هـ ز، أو أصغر منها. فلنتزل أولا انها مثلها. فاذا فصلنا تكون نسبة أ جـ إلى جـ ب كنسبة د ز إلى ز هـ. وهذا محال لأنـا فرضناها أعظم منها.

وأقول أيضاً انه غير ممكن ان تكون نسبة أ ب إلى ب جـ أصغر من نسبة د هـ إلى هـ ز. فان امكن فلتكن كنسبة د هـ إلى هـ ح. فاذا فصلنا تكون نسبة

أ جـ إلى جـ ب كنسبة د ح إلى ح هـ. وكنا فرضنا نسبة أ جـ إلى جـ ب أعظم من نسبة د ز إلى ز هـ. فنسبة د ح إلى ح هـ أعظم من نسبة د ز إلى ز هـ. فاذا بدلنا تكون نسبة د ح إلى د ز أعظم من نسبة ح هـ إلى ز هـ وهذا محال لأن د ح أصغر من د ز، ح هـ أعظم من ز هـ. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ١٩/ ٥]

الشكل التاسع عشر من المقالة الخامسة



كل مقدارين يفصل منهما مقداران، فتكون نسبة المفصول إلى المفصول كنسبة الكل إلى الكل،[1] فان نسبة الباقي إلى الباقي كنسبة الكل إلى الكل.

مثاله: ان أ ب، جـ د قد فصل منهما أ هـ، جـ ز فصارت نسبة أ هـ إلى جـ ز كنسبة أ ب إلى جـ د فأقول ان نسبة هـ ب الباقي إلى ز د الباقي كنسبة أ ب إلى جـ د.

برهانه: من أجل ان نسبة أ هـ إلى جـ ز كنسبة أ ب إلى جـ د، فانا متى بدلنا، كالذي بين من برهان ١٦ تكون نسبة أ هـ إلى أ ب كنسبة جـ ز إلى جـ د. واذا عكسنا تكون نسبة ب أ إلى أ هـ كنسبة د جـ إلى جـ ز. واذا فصلنا كالذي تبين من برهان ١٧ تكون نسبة ب هـ إلى هـ أ كنسبة د ز إلى ز جـ. فاذا بدلنا أيضاً تكون نسبة ب هـ إلى د ز كنسبة أ هـ إلى جـ ز. وقد كانت نسبة أ هـ إلى جـ ز كنسبة أ ب إلى جـ د. فاذا أسقطنا الواسطة، كالذي تبين من برهان ١١، تبقى نسبة ب هـ إلى د ز، الباقي، كنسبة أ ب الكل إلى جـ د الكل. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٢٠/ ٥]

الشكل العشرون من المقالة الخامسة

اذا كانت مقادير ما، ومقادير أخر على عدتها، كل اثنين من الأول على [نسبة] اثنين من الأخر، وكانت النسبة منتظمة، فإن المقدار الأول من المقادير الأول، في نسبة المساواة، ان كان أعظم من الآخير منها، فان المقدار الأول من المقادير الآخر أعظم من المقدار الآخير منها. وان كان مساوياً، له فهو مساوٍ له. وان كان ناقصاً عنه فهو ناقص عنه.

شكل ٥/٢٠، ٥/٢١

مثاله: ان أ، ب، جـ هي المقادير الأول؛ د، هـ، ز هي المقادير الأخر. وكل مقدارين من أ، ب، جـ على نسبة مقدارين من د، هـ، ز. فالنسبة منتظمة، أعني ان نسبة أ إلى ب كنسبة د إلى هـ؛ ونسبة ب إلى جـ كنسبة هـ إلى ز. فأقول ان أ في نسبة المساواة إن كان أعظم من جـ فان د أعظم من ز. وان كان مساوياً له، فهو مساوٍ له، وان كان أصغر منه فهو أصغر منه.

برهانه: انا ننزل اولاً ان أ أعظم من جـ، ونبين ان د أعظم من ز: فمن أجل برهان ٨، وهو: اذا كانت مقادير مختلفة فنسبت إلى مقدار آخر، فإن الأعظم أعـظم نسبة إليه من الأصغر، فمقدارا أ، جـ مختلفان: أ أعظم من جـ؛ ب مقدار آخر. فنسبة أ إلى ب أعظم من نسبة جـ إلى ب. لكن نسبة أ إلى ب كنسبة د إلى هـ؛ ونسبة جـ إلى ب كنسبة ز إلى هـ. فنسبة د إلى هـ إذن أعظم من نسبة ز إلى هـ. واذا كانت مقادير نسبتها إلى مقدار آخر مختلفة، فان الذي نسبتـه إليه [٦٩ أ] أعظم، فهو أعظمها، كما يتبين من برهان ١٠، فمقدار د أعظم من مقدار ز.

وبمثل هذا البرهان نبين أن أ ان كان مساوياً لمقدار جـ، فإن د مساوٍ لمقدار ز، باستشهاد شكلي ٧ و ٩. وبمثل هذا البرهان نبين ان أ ان كان أصغر من جـ

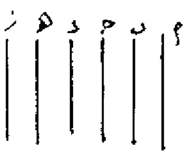
فإن د اصغر من ز، باستشهاد شكلي ٨ وَ ١٠ من هذه المقالة وذلك ما اردنا ان نبين.

[المبرهنة ٢١/ ٥]

الشكل الحادي والعشرون من المقالة الخامسة

اذا كانت مقادير ما، ومقادير أخر على عدتها، كل اثنين من الأول على نسبة اثنين من الآخر، واضطربت النسبة، فان الأول من المقادير الأول في نسبة المساواة: ان كان أعظم من الآخير، فإن الأول من الآخر أعظم من الآخير، وان كان مساوياً له فهو مساوٍ له. وان كان أصغر منه فهو أصغر منه.

مثاله: أن أ، ب، جـ هي المقادير الأول؛ د، هـ، ز هي المقادير الأخر؛ والنسبة مضطربة: أعني ان نسبة أ إلى ب كنسبة هـ إلى ز، ونسبة ب إلى جـ كنسبة د إلى هـ. فأقول: ان كان أ أعظم من جـ، فإن د أعظم من ز؛ وان كان مساوياً له فهو مساوٍ له؛ وان كان أصغر منه فهو أصغر منه.



الشكل ٢٠/٥، ٢١/

برهانه: انا ننزل أولاً أن أن أ أعظم من جـ، ب مقدار آخر. فظاهر من برهان ٨ ان نسبة أ إلى ب أعظم من نسبة جـ إلى ب. لكن نسبة أ إلى ب كنسبة هـ إلى ز. ونسبة جـ إلى ب كنسبة هـ إلى د. فمقدار هـ اذن أعظم نسبة إلى ز منه إلى د. والذي اليه النسبة أعظم فهو أصغر، كما يتبين من برهان ١٠. فمقدار ز إذن أصغر من مقدار د. فمقدار د اذن أعظم من مقدار ز. وكذلك نبين أنه ان كان أصغر من جـ. فإن د أصغر من ز باستشهاد هذين الشكلين؛ وان كان مساوياً له، فهو مساوٍ له، باستشهاد شكلي ٧ وَ ٩ من هذه المقالة. وذلك ما أردنا ان نبين.

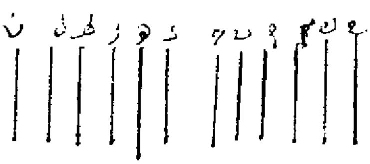
[تعقيب]: الشكل العشرون والحادي والعشرون قدمهما الرياضي ليتبين

له حال الأضعـاف المـأخوذة في الشكل الثالث والعشرين والرابع العشرين، ليتبين نسبة الأطراف، بعضها إلى بعض. وسماها نسبة الأطراف من أجل ان المقادير التي ترفعها من بين الأطراف هي متساوية العدة.

[المبرهنة ٢٢/ ٥]

الشكل الثاني والعشرون من المقالة الخامسة

اذا كانت مقادير ما، ومقادير أخرى على عدتها، كل مقدارين من الأول على نسبة مقدارين من الآخر، والنسبة منتظمة، فإنها في نسبة المساواة تكون متناسبة.



مثاله: ان أ، ب، جـ مقادير أول؛ د، هـ، ز مقـادير أُخر. وكل مقدارين من أ، ب، جـ على نسبـة مقـدارين من د، هـ، ز، والنسبة منتظمة، أعني ان أ إلى ب كنسبة د إلى هـ، ونسبة ب إلى جـ كنسبة هـ إلى ز. فأقول ان نسبة أ إلى جـ كنسبة د إلى ز.

برهانه: انا نأخذ لمقداري أ، د أضعافاً متساوية، أي الأضعاف كانت، ولتكن ح، ط؛ ونأخذ لمقداري ب، هـ أضعافاً متساوية، أي الأضعاف كانت، ولتكن ك، ل؛ ونأخذ لمقداري جـ، ز أضعافاً متساوية، اي الأضعاف كانت، ولتكن م، ن فمن أجـل ان نسبة أ إلى ب كنسبة د إلى هـ؛ ح، ط أضعاف متساوية لمقداري أ، د؛ ك، ل أضعاف متساوية لمقداري ب، هـ، فظاهر من برهان ٤ ان نسبة ح إلى ك كنسبة ط إلى ل.

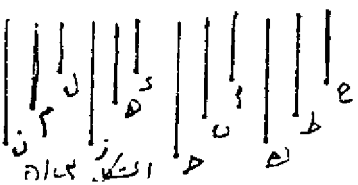
وأيضـاً فمن أجـل ان نسبة ب إلى جـ كنسبة هـ إلى ز؛ ك، ل أضعاف متساوية لمقداري ب، هـ؛ م، ن أضعاف متساوية لمقداري جـ، ز، فظاهر أيضاً من برهان ٤ ان نسبة ك إلى م كنسبة ل إلى ن.

وقد تبين ان نسبة ح إلى ك كنسبة ط إلى ل. فمقادير ح، ك، م الأول على نسبة مقادير ط، ل، ن: كل مقدارين على نسبة مقدارين في النسبة المنتظمة. فظاهر من برهان ٢٠ ان ح، ط إما زائدان معاً على م، ن، واما مساويان معاً لهما، واما ناقصان معاً عنهما. وَح، ط أضعاف متساوية لمقداري أ، د؛ م، ن أضعاف متساوية لمقداري جـ، ز. فظاهر من برهان ١٥ ان نسبة أ إلى جـ كنسبة د إلى ز وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٢٣/ ٥]

[٦٩ ب] الشكل الثالث والعشرون من المقالة الخامسة

اذا كانت مقادير ما، ومقادير أخر على عدتها، كل اثنين من الأول على نسبة اثنين من الأخر، واضطربت النسبة، فانها في نسبة المساواة تكون متناسبة.



مثاله: ان مقادير أ، ب، جـ أول؛ ومقادير د، هـ، ز أخر. وكل مقدارين من أ، ب، جـ على نسبة مقدارين من د، هـ، ز؛ والنسبة مضطربة، أعني ان نسبة أ إلى ب كنسبة هـ إلى ز؛ ونسبة ب إلى جـ كنسبة د إلى هـ. فأقول ان في نسبة المساواة تكون أ إلى جـ كنسبة د إلى ز.

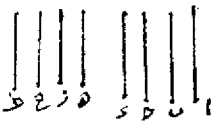
برهانه: انا نأخذ لمقادير أ، ب، د اضعافاً متساوية، وهي ح، ط، ل. ونأخذ لمقادير هـ، ز، جـ أضعافاً متساوية وهي م، ن، ك. فمن أجل ان ما في ح من أضعاف أ مساوٍ لما في ط من أضعاف ب، والمقادير التي اضعافها متساوية، فان نسبة المقادير بعضها إلى بعض كنسبة أضعافها، بعضها إلى بعض، كالذي تبين من برهان ١٥ فنسبة أ إلى ب كنسبة ح إلى ط. وكنا فرضنا نسبة أ إلى ب كنسبة هـ إلى ز. فاذا أسقطنا الواسطة، كالذي تبين من برهان ١١، فإن نسبة هـ إلى ز كنسبة ح إلى ط.

وأيضاً فمن أجل ان ما في م من أضعاف هـ مساوٍ لما في ن من أضعاف ز، فظاهر أيضاً من برهان ١٥ أن نسبة هـ إلى ز كنسبة م إلى ن. وكنا بينا ان نسبة هـ إلى ز كنسبة ح إلى ط. فاذا أسقطنا الواسطة، كالذي تبين من برهان ١١، تكون نسبة ح إلى ط كنسبة م إلى ن. وأيضاً فمن أجل ان نسبة ب إلى جـ كنسبة د إلى هـ؛ وقد أخذ لمقداري ب، د أضعاف متساوية هي ط، ل؛ ولمقداري جـ، هـ أضعاف متساوية وهي ك، م، فظاهر من برهان ١٥ مع برهان ١١ أن نسبة ط إلى ك كنسبة ل إلى م. وقد بينا ان نسبة ح إلى ط كنسبة م إلى ن. فمقادير ح، ط، ك أول، ومقادير ل، م، ن أخر. وكل اثنين من مقادير ح، ط، ك على نسبة كل اثنين من مقادير ل، م، ن، والنسبة مضطربة: أعني ان نسبة ح إلى ط كنسبة م إلى ن؛ ونسبة ط إلى ك كنسبة ل إلى م. فظاهر اذن من برهان ٢١ ان ح، ل إما زائدان معاً على ك، ن؛ واما مساويان معاً لهما؛ واما ناقصان معاً عنهما. لكن ح، ل أضعاف متساوية لمقداري أ، د؛ ك، ن أضعاف متساوية لمقداري جـ، ز. فظاهر من برهان ١٥ ان نسبة أ إلى جـ كنسبة د إلى ز. وذلك ما أردنا ان نبين.

مضاف إلى الشكل الثالث والعشرين: هذان الشكلان، أعني الثاني والعشرين والثالث والعشرين، يعمان كل المقادير التي على نسبة مقادير أخر، كم كانت؛ والرياضي انما بين على أقل المقادير أعداداً، التي فيها أقل النسب. فمن أجل ان اقل ما تكون النسبة في ثلاثة مقادير، ابان عن ثلاثة مقادير إلى ثلاثة مقادير، لأن سبيل الأصول ان يحضر البرهان من أقل المقدمات في العدد، وعلى أقل الأوضاع في العدد أيضاً، اذا كان أمرها يعم ذلك الجنس بأسره.

واما الشكلان الأولان، أعني العشرين والحادي والعشرين، فليس يمكن ان يبين في أكثر من ثلاثة مقادير؛ ولو امكن، لم يكن ينتفع به اذ كانا مقدمتين لهذين الشكلين. وهذان الشكلان، أعني الثاني والعشرين والثالث والعشرين، يعمان كل المقادير. ففرض أربعة مقادير أول عليها أ، ب، جـ، د؛ وأربعة

مقادير توالي عليها هـ، ز، ح، ط؛ وكل اثنين من الأول على نسبة اثنين من التوالي، نسبة متسقة، أعني ان نسبة أ إلى ب كنسبة هـ إلى ز؛ ونسبة ب إلى جـ كنسبة ز إلى ح، ونسبة جـ إلى د كنسبة ح إلى ط. فأقول ان نسبة أ إلى د كنسبة هـ إلى ط.



ملحق ٢٢/٥

برهانه: ان نسبة أ إلى ب كنسبة هـ إلى ز، ونسبة ب إلى جـ كنسبة ز إلى ح. ففي نسبة المساواة تكون نسبة أ إلى ب كنسبة هـ إلى ح كالذي تبين من برهان **٢٢**. وأيضاً فمن اجل ان نسبة أ إلى جـ كنسبة هـ إلى ح ونسبة جـ إلى د كنسبة ح، [٧٠ أ] إلى ط. ففي نسبة المساواة تكون نسبة أ إلى د كنسبة هـ إلى ط. وكذلك يتبين الحال في أكثر من أربعة مقادير، كم فرضت من العدد. وذلك ما أردنا ان نبين.

شكل ثانٍ مضاف إلى الثالث والعشرين: في النسبة المضطربة اذا كانت نسبة أ إلى ب كنسبة ح إلى ط، ونسبة ب إلى جـ كنسبة ز إلى ح، ونسبة جـ إلى د كنسبة هـ إلى ز، فأقول ان نسبة أ إلى د كنسبة هـ إلى ط.

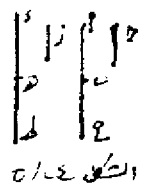
برهانه: ان نسبة أ إلى ب كنسبة ح إلى ط؛ ونسبة ب إلى جـ كنسبة ز إلى ح. فظاهر من برهان **٢٣** أنها في نسبة المساواة تكون متناسبة: نسبة أ إلى جـ كنسبة ز إلى ط. فمن أجل ان نسبة أ إلى جـ كنسبة ز إلى ط، ونسبة جـ إلى د فرضت كنسبة هـ إلى ز، ففي نسبة المساواة، كالذي تبين من برهان **٢٣**، تكون أ إلى د كنسبة هـ إلى ط. وكذلك تبين في سائر المقادير التي هي أكثر عدة من أ، ب، جـ، د، هـ، ز، ح، ط، أي عدة كانت. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٢٤/ ٥]

الشكل الرابع والعشرون من المقالة الخامسة

اذا كانت نسبة الأول إلى الثاني كنسبة الثالث إلى الرابع، ونسبة الخامس

إلى الثاني كنسبة السادس إلى الرابع، فإن نسبة الأول والخامس مجموعين، إلى الثاني: كنسبة الثالث والسادس مجموعين إلى الرابع.



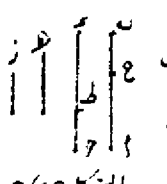
مثاله: ان نسبة أب الأول إلى جـ الثاني: كنسبة د هـ الثالث إلى ز الرابع؛ ونسبة ب ح الخامس إلى جـ الثاني كنسبة هـ ط السادس إلى ز الرابع. فأقول ان نسبة أ ب، ب ح مجموعين إلى جـ كنسبة د هـ، هـ ط مجموعين إلى ز.

برهانه: ان نسبة أ ب إلى جـ كنسبة د هـ إلى ز. لكن نسبة جـ إلى ب ح كنسبة ز إلى هـ ط. فظاهر من برهان **٢٢** ان نسبة أ ب إلى ب ح كنسبة د هـ إلى هـ ط. واذا ركبنا، كالذي بينا ببرهان ١٨، تكون نسبة أ ح إلى ح ب كنسبة د ط إلى ط هـ. وكنا فرضنا نسبة ب ح إلى جـ كنسبة هـ ط إلى ز. فظاهر من برهان **٢٢**، أعني نسبة المساواة، ان نسبة أ ح إلى جـ كنسبة د ط إلى ز. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٢٥/ ٥]

الشكل الخامس والعشرون من المقالة الخامسة

اذا كانت أربعة مقادير متناسبة، وكان الأول أعظمها، والأخير أصغرها، فإن الأول والأخير مجموعين أعظم من الباقيين.



مثاله: ان أ ب، جـ د، هـ، ز أربعة مقادير متناسبة: نسبة أ ب إلى جـ د كنسبة هـ إلى ز. وَ أ ب الأول أعظمها، ز الآخير أصغرها. فأقول ان أ ب، ز مجموعين أعظم من د جـ، هـ الباقيين.

برهانه: انا نفصل من أ ب: أ ح مثل مقدار هـ؛ ونفصل من جـ د: جـ ط مثل مقدار ز.

فمن أجل ان نسبة أ ب إلى جـ د كنسبة هـ إلى ز، أ ح مثل هـ، جـ ط مثل ز، فنسبة أ ب إلى جـ د كنسبة أ ح إلى جـ ط. فظاهر من برهان **١٩** ان

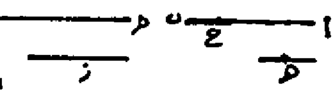
نسبة ح ب الباقي إلى د ط كنسبة أ ب إلى جـ د. فمن أجل ان أ ب أعظم من جـ د، فإن ح ب أعظم من ط د. فاذا أخذنا أ ح، جـ ط مشتركين، يكون ب ح، ح أ، جـ ط، الثلاثة، أعظم من أ ح، جـ ط، ط د الثلاثة، اذا جمعت. فمقدارا أ ب، جـ ط مجموعين اذن أعظم من مقداري جـ د، أ ح مجموعين وَ أ ح فصلناه مثل هـ؛ جـ ط فصلناه مثل ز. فإذن أ ب، ز مجموعين أعظم من جـ ط، هـ مجموعين. وذلك ما أردنا ان نبين.

تمت المقالة الخامسة من كتاب الأصول لاوقليدس ـ اصلاح النيريزي والحمد لله حمد الشاكرين، والصلاة على محمد وآله الطاهرين

ج ـ مبرهنات النسوي

[المبرهنة ١/ ٥ تقابل ١/ ٥ عند الحجاج]

اذا كانت مقادير، كم كانت، وفي كل واحد منها أضعاف متساوية لمقادير أخر على عدتها، فإن ما في الواحد من أضعاف قرينه مثل ما في الجميع من أضعاف الجميع.



الشكل ١/٥

فليكن مثلاً أ ب ضعف هـ، جـ د ضعف ز. أقول: إن أ ب، جـ د جميعاً: ضعف هـ، ز جميعاً.

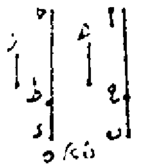
برهانه: أن نقسم أ ب بقدر هـ، ولتكن أقسامه أ ح، ح ب. ونقسم جـ د بقدر ز، ولتكن أقسامه ح ط، ط د. فَـ. أ ح مثل هـ، جـ ط مثل ز. فجميع أ ح، جـ ط مثل هـ، ز جميعاً؛ وكذلك ح ب، ط د مثل جميع هـ، ز. فَـ أ ب، جـ د إذن ضعف هـ، ز جميعاً. وتبين أنه اذا كان أ ب ثلاثة أمثال هـ، جـ د ثلاثة أمثال ز، فان أ ب، جـ د جميعاً [ثلاثة أمثال هـ، ز جميعاً] بأن نسلك الطريق الذي سلكناه في الضعف. وكذلك جميع الأضعاف.

ونبين أيضاً انه اذا كانت المقادير، اكثر من أربعة، كم كانت، فإنه يكون ما في الواحد من أضعاف قرينه، مثل ما في الجميع [٣١ ظ] من أضعاف الجميع، بإن نسلك في جميع المقادير ما سلكناه في المقادير الأربعة.

[المبرهنة ٢/ ٥ وتقابل ٢/ ٥ عند الحجاج]

وأيضاً اذا كانت مقادير، وكان في الأول من أضعاف الثاني: مثل ما في

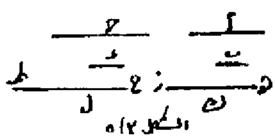
الثالث من أضعاف الرابع، وفي الخامس من أضعاف الثاني: مثل ما في السادس من أضعاف الرابع، كما في أ ح، الأول، من أضعاف هـ، الثاني، مثل ما في جـ ط، الثالث، من أضعاف [ز، الرابع]؛ وما في ح ب [الخامس من أضعاف هـ الثاني، مثل ما في ط د] السادس من أضعاف ز الرابع. أقول: ان ما في أ ب، الأول والخامس جميعاً، من أضعاف هـ الثاني: مثل ما في جـ د، الثالث والسادس جميعاً، من أضعاف ز الرابع.



برهانه: ان أ ح مثلاً ثلاثة أضعاف هـ، جـ ط ثلاثة أضعاف ز، ح ب ضعف هـ، ط د ضعف ز، فكل أ ب خمسة أمثال هـ، وكل جـ د خمسة امثال ز وذلك ما أردنا ان نبين.

وقد تبين انه ان كان في السابع أيضاً من أضعاف الثاني، مثل ما في الثامن من أضعاف الرابع فإن ما في الأول والخامس والسابع جميعاً من أضعاف [الثاني مثل ما في الثالث والسادس والثامن جميعاً] من أضعاف الرابع؛ اذا سلكنا في البرهان الطريق الذي سلكناه. وكذلك الى ما لا نهاية.

[المبرهنة ٣/ ٥ وتقابل ٣/ ٥ عند الحجاج]



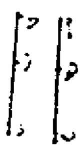
اذا كان في الأول، وهو أ، من أضعاف الثاني، وهو ب، مثل ما في الثالث، وهو جـ، من أضعاف الرابع، وهـو د؛ وقد أخذ للأول أضعاف، وهو هـ ز، وللثالث أضعاف على عدتها، وهو ح ط، أقول: ان ما في هـ ز، وهي أضعاف أ، من أضعاف ب الثاني، مثل ما في ح ط، وهي أضعاف جـ، من أضعاف د الرابع.

برهانه: [٣٢ و] ان نقسم هـ ز بقدر أ، ولتكن أقسامه هـ ك، ك ز؛ نقسم ح ط بقدر جـ، ولتكن أقسامه ح ل، ل ط. فعدة ما في هـ ز من أضعاف أ مثل عدة ما في ح ط من أضعاف جـ. وما في أ من أضعاف ب مثل ما في جـ من أضعاف د. وَ أ مثل هـ ك، جـ مثل ح ل. فما في هـ ك، وهو الأول، من أضعاف

ب، الثـاني، مثل ما في ح ل، الثالث، من أضعاف د، الرابع. وفي ك ز، الخامس، من أضعاف ب: مثل ما في ل ط، السادس، من أضعاف د. فإذن جميع ما في هـ ز، وهو الأول والخامس من أضعاف ب: مثل ما في ح ط، وهو الثالث والسادس من أضعاف د. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٤/ ٥ تقابل ٥/ ٥ عند الحجاج]

اذا كان قدران أحدهما أضعاف الآخر، ونقص منهما قدران في أحدهما من أضعـاف الآخـر: مثـل ما في الكـل من أضعاف الكل، فان اضعاف الباقي للباقي: كأضعاف الكل [للكل].



مثل أ ب، فانه أضعاف جـ د، ونقص منهما أ هـ، جـ ز، وأضعاف أ هـ لقدر جـ ز: كأضعاف أ ب لقدر جـ د: أقول: إن اضعاف هـ ب، الباقي، لِـ د ز، الباقي: كأضعاف أ ب لقدر جـ د.

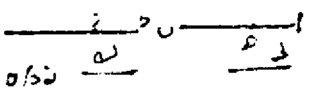
برهانه: ان نجعل أضعاف [٣٢ ظ] هـ ب لقدر جـ ح كأضعاف أ هـ لقدر جـ ز. ولكن أضعاف أ هـ لقدر ز جـ كأضعاف أ ب لقدر جـ د. فقدر ز جـ مثل [قدر] جـ د. وننقص جـ ز المشترك، فيبقى جـ ح مثل ز د، فأضعاف أ هـ لقدر جـ ز، كأضعاف هـ ب لقدر جـ ح أعني ز د. واضعاف أ هـ لقدر ز جـ كأضعاف أ ب لقدر جـ د. فأضعاف هـ ب لقدر ز د الباقي [كأضعاف] أ ب لقدر جـ د.

[المبرهنة ٥/ ٥ تقابل ٦/ ٥ عند الحجاج]

وأيضاً اذا كان في قدرين أضعاف متساوية للقدرين الآخرين، فالباقيان اما مساويان لذينك الآخرين، واما مساويان لأضعاف لهما.

كما في أ ب، جـ د أضعاف متساوية لقدري ط، ك، كما [لوكان] ب ثلاثة أضعاف ط، جـ د ثلاثة أضعاف ك. وننقص منهما أ هـ، جـ ز، وهما أضعاف متساوية لقدري ط، ك. فيبقى في هـ ب من أضعاف [ط].

مثل ما في د ز من أضعاف ك. فإن كان هـ ب



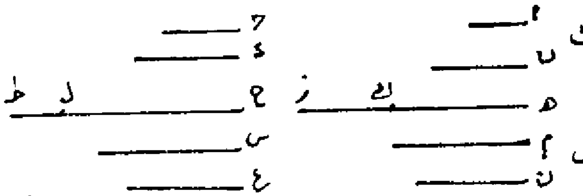
ن٥/٥

مثل ط، كان د ز مثل ك. لأننا نجعل ح د مثل ك، فأضعاف أ هـ لقدر ط، كأضعاف جـ ز لقدر ك. وَ هـ ب مثل ط، جـ ح مثل ك. فأضعاف ز ح لقدر ك أضعاف ح د لقدر ك. واضعاف أ ب لقـدر ط كأضعـاف جـ ز لقـدر ك. فقـدر ز ح مثل جـ د. وننقص ز ح المشترك. فيبقى ح جـ مثل ز د. ولكن ح جـ مثل ك. فـَ ز د أيضاً مثل [٣٣ و] ك. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٦/ ٥ وتقابل ٤/ ٥ عند الحجاج]

اذا كانت نسبـة الأول الى الثاني كنسبة الثالث الى الرابع، وأخذ للأول والثـالث أضعـاف متساوية المرات، أي أضعاف كانت [وأخذ للثاني والرابع أضعـاف متسـاوية المرات، أي اضعاف كانت] فان نسبة أضعاف الأول الى أضعاف الثاني كنسبة أضعاف الثالث الى أضعاف الرابع:

مثل الأول أ، ونسبته إلى ب الثاني، كنسبة جـ الثالث إلى د الرابع.



ن٦/٥

وَ ك هـ أضعاف أ، ح ل أضعـاف جـ، مثـل عدة أضعاف أ.

وَ ك ز أضعاف ب، ل ط أضعاف د، مثل عدة أضعاف ب. أقول:

ان نسبة هـ ك إلى ح ل كنسبة ك ز إلى ل ط.

برهانه: ان نأخذ م، س أضعافاً متساوية لقدري هـ ك، ح ل؛ وَ ن، ع أضعافاً متساوية لقدري ك ز، ل ط.

فأضعاف م لقدر أ كأضعاف س لقدر جـ؛ واضعاف ن لقدر ب كأضعاف ع لقدر د ونسبة أ إلى ب كنسبة جـ إلى د. فان زاد م على س: زاد ن على ع؛

وإن نقص م من س، نقص ن من ع؛ وان تساوى م، س: تساوى ع، ن.

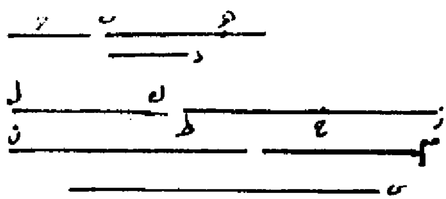
لكن م، س أضعاف متساوية لقدري هـ ك، ح ل؛ ن، ع أضعاف متساوية لقدري ك ز، ل ط فنسبة هـ ك إلى ح ل كنسبة ك ز إلى ل ط وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٧/ ٥ وتقابل ٨/ ٥ عند الحجاج]

الأقدار المختلفة اذا نسبت إلى [٣٣ ظ] قدر آخر: فنسبة الأعظم منها إليه، أكبر من نسبة الأصغر. [واذا] نسب القدر الآخر إليها، فنسبته إلى الأصغر أكبر من نسبته إلى الأكبر

كقدري أ ب، ج: وَ أ ب أعظم من جـ. وَ د قدر آخر.

أقول: ان نسبة أ ب إلى د اكبر من نسبة جـ إلى د، وإن نسبة د إلى جـ اكبر من نسبته إلى أ ب.



برهانه: ان نجعل هـ ب مثل جـ. وليكن أ هـ أصغر من هـ ب. فقد يمكن ان يضاعف حتى يزيد على د. وليكن ز ح أضعافه الزائدة على د، ولتكن [مثل] أضعاف ح ط لقدر هـ ب [ومثل أضعاف ك ل لقدر جـ] ونجعل م ضعفي د، ن ثلاثة أضعافه، وكل واحد من الأضعاف التي بعد ذلك، يتلو الآخر، حتى ننتهي إلى أول أضعاف لقدر د يكون أعظم من ك ل. فليكن ذلك س.

فأضعاف ز ح لقدر أ هـ: كأضعاف ح ط لقدر هـ ب. فأضعاف ز ح لقدر أ هـ كأضعاف ز ط لقدر أ ب. وأضعاف ز ح لقدر أ هـ كأضعاف ك ل لقدر جـ. وأضعاف ز ط، ك ل لقدري أ ب، جـ: متساوية.

وأيضاً فإن أضعاف ح ط لقدر هـ ب كأضعاف ك ل لقدر جـ؛ وَ هـ ب مثل

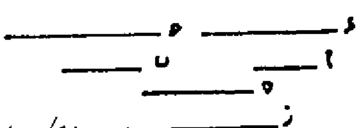
جـ. فَـ ح ط مثل ك ل؛ س أعظم من ك ل، وَكـ ل [٣٤ و] [أعني] ح ط ليس بأصغر من ن، لأن ن أصغر من أول أضعاف لقدر د يكون أعظم من ك ل. وَ ز ح أعظم من د؛ وَس مثل د، ن لأن د مع ن أربعة أضعاف د، التي هي س. فَـ ز ط أعظم من س. فهو زائد عليه. وَكـ ل ليس بزائد على س. وَ ز ط، ك ل أضعاف متساوية لِـ أ ب، جـ. وَس أضعاف د. فنسبة [أ ب] إلى د أكبر من نسبة جـ إلى د.

وأقول ان نسبة د إلى جـ أكبر من نسبته إلى أ ب:

لأنا نعيد التدبير فيتبين ان س زائد على ك ل، وليس بزائد على ز ط. وَ س أضعاف د، وَك ل وَ ز ط أضعاف متساوية لقدري أ ب، جـ. فنسبة د إلى جـ أكبر من نسبة د إلى ب. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٨/ ٥ وتقابل ٧/ ٥ عند الحجاج]

الأقدار المتساوية نسبتها إلى قدر آخر واحدة، ونسبته إليها أيضاً واحدة. كقدري أ، ب المتساويين، جـ قدر آخر. أقول: ان نسبة أ إلى جـ [كنسبة ب إلى جـ، ونسبة جـ إلى أ] كنسبته إلى ب.


الشكل ٧/٥

برهـانه: أنا نأخذ د، هـ أضعافاً متساوية لقدري أ، ب. فأضعاف د لقدر أ كأضعاف هـ لقدر ب، وَ أ مثل ب. فَـ د مثل هـ. وَ ز قدر آخر [من أضعاف جـ].

فكل واحد من د، هـ إما أن يساوي ز، أو يزيد عليه، أو ينقص عنه. وهما أضعاف متساوية لقدري أ، ب، ز أضعاف جـ. فنسبة أ إلى جـ [كنسبة ب إلى جـ].

واذ قـد تبين ان د، هـ متساويان، وان ز إما يساويهما، أو ينقص عنهما،

أو يزيد عليهما. وَ ز أضعاف جـ، وَ د، هـ أضعاف متساوية لقدري أ، ب، فنسبة جـ إلى أ كنسبته إلى ب.

[المبرهنة ٩/ ٥ وتقابل ٩/ ٥ عند الحجاج]

ويتبين عكس ذلك، وهو [٣٤ ب] ان الأقدار التي نسبتها إلى قدر آخر واحدة، فهي متساوية. واذا كان قدر نسبته إلى أقدار أخر واحدة، فهي متساوية، كقدري أ، ب: نسبتهما إلى قدر جـ واحدة. أقول: إن أ مثل ب. فإن لم يكن مثله، فهو أعظم أو أصغر منه. ولو كان أعظم منه، لكانت نسبته إلى جـ أكبر. ولو كان أصغر منه، لكانت نسبته إلى جـ أصغر. وليست كذلك. فقدر أ مثل ب.

وأيضاً فإن [كانت] نسبة جـ إلى أ وإلى ب واحدة أقول: إن أ مثل ب. فإن لم يكن مثله فهو أصغر أو أعظم منه. ولو كان أعظم منه لكانت نسبة جـ إليه [أصغر، ولو كان أصغر منه، لكانت نسبة جـ إليه] أعظم. وليس كذلك. فقدر أ مثل ب.

[المبرهنة ١٠/ ٥ وتقابل ١٠/ ٥ عند الحجاج]

وأيضاً: الأقدار المختلفة: ما كان منها نسبته إلى قدر آخر أكبر، فهو أعظم. وما كان منها نسبة القدر إليه أكبر، فهو أصغرها.

مثل أ: فإن [كانت] نسبته إلى جـ أكبر من نسبة ب إلى جـ، أقول إن أ أعظم من ب لأنه لو كانت مثله، لكانت نسبتهما إلى جـ واحدة؛ ولو كان أصغر منه، لكانت نسبته إلى جـ أصغر.

وأيضاً فلتكن نسبة جـ إلى ب أكبر من نسبته إلى أ. أقول: إن أ أعظم من ب. لأنه لو كان مثله لكانت نسبته إليهما واحدة؛ ولو كان أصغر منه لكانت نسبة جـ [إليه] أكبر. وليست كذلك. فإذن أ أعظم [٣٥ و] من ب. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ١١/ ٥ وتقابل ١١/ ٥ عند الحجاج]

الأقدار التي نسبها مساوية لنسبة [واحدة] فإن نسبها متساوية. كما لو ان نسبة أ إلى ب كنسبة جـ إلى د، [ونسبة جـ إلى د] كنسبة هـ إلى ز. أقول إن نسبة أ إلى ب كنسبة هـ إلى ز.

برهانه: أنا نأخذ ح، ط، ك أضعافاً متساوية لأقدار أ، جـ، هـ، ونأخذ ل، م، ن أضعافاً متساوية لأقدار ب، د، ز.

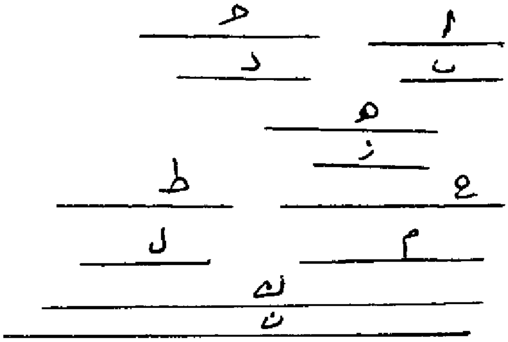
فلأن نسبة أ إلى ب كنسبة جـ إلى د، يكون ح، ط، وهما أضعاف متساوية لقدري أ، جـ إما ان يزيدا على ل، م وهما أضعاف متساوية لقدري ب، د، أو ينقصا منهما، أو يساويانهما.

ولأن نسبة جـ إلى د كنسبة هـ إلى ز، يكون ط، ك، وهما أضعاف متساوية لقدري جـ، هـ إما زائدين على م، ن، وهما أضعاف مأخوذة لقدري هـ، ز أو ينقصان منهما، أو يساويانهما.

[وقد رأينا انه اذا زاد ط عن م، يزيد ح عن ل، وان نقص ينقص، وان ساواه يساويه وأيضاً اذا زاد ح عن ل يزيد ك عن ن، وان نقص ينقص، وان ساواه يساويه. ولكن ح، ك أضعاف متساوية لقدري أ، هـ]، فنسبة أ ل إلى ب كنسبة هـ إلى ز.

[المبرهنة ١٢/ ٥ وتقابل ١٣/ ٥ عند الحجاج]

اذا كانت نسبة الأول إلى الثاني كنسبة الثالث إلى الرابع، ونسبة الثالث إلى الرابع أكبر من نسبة الخامس إلى السادس، كما [لو] ان نسبة أ إلى ب كنسبة جـ إلى د، ونسبة جـ إلى د أكبر من نسبة هـ إلى ز، أقول: إن نسبة أ إلى ب [أكبر] من نسبة هـ إلى ز.



برهانه: فلأن نسبة جـ إلى د أكبر من نسبة هـ إلى ز، فقد يمكن أن نأخذ ط، ك أضعافاً متساوية لقدري جـ، هـ وَم، ن أضعافاً متساوية لقدري د، ز؛ ويكون ط يزيد على م، ك لا يزيد على ن. فليكن ذلك ونجعل أضعاف ح لقدر أ كأضعاف ط لقدر جـ، وأضعاف ل لقدر ب كأضعاف م لقدر د. ونسبة أ إلى ب كنسبة جـ إلى د وَح، ط أضعاف متساوية لقدري [٣٥ ظ] أ، جـ؛ ل، م أضعاف متساوية لقدري ب، د. فقدرا ح، ط إما ان يزيدا على ل، م أو ينقصا منهما، أو يساويانهما. وَط يزيد على م، ك لا يزيد على ن. فقدرح أيضاً يزيد على ل، ك لا يزيد على ن، وَح، ك أضعاف متساوية لقدري أ، هـ؛ ل، ن أضعاف متساوية لقدري ب، ز فنسبة أ إلى ب أعظم من نسبة هـ إلى ز.

[المبرهنة ١٣/ ٥ وتقابل ١٢/ ٥ عند الحجاج]

وأيضاً الأقدار التي نسبتها إلى أقدار أخر تقارنها، واحدة، كم كانت، فإن نسبة الواحد إلى قرينه: كنسبة الجميع إلى الجميع.

كما أن نسبة أ إلى ب، جـ إلى د، هـ إلى ز: واحدة: أقول إن نسبة أ إلى ب كنسبة أ، جـ، هـ مجموعة، إلى ب، د، ز مجموعة.

برهانه: أنا نأخذ ح، ط، ك أضعافاً متساوية لأقدار أ، جـ، هـ؛ ونأخذ ل، م، ن أضعافاً متساوية لأقدار ب، د، ز.

فنسبة أ إلى ب كنسبة جـ إلى د، وكنسبة هـ إلى ز. فأقدار ح، ط، ك إما أن تزيد معاً على ل، م، ن أو تنقص عنها، أو تساويها. فإن زاد ح على ل، زاد مجمـوع ح، ط، ك على مجمـوع ل، م، ن؛ وإن نقص منه، نقص المجموع من المجموع؛ وإن ساواه تساوى المجموعان. فأضعاف ح لقدر أ:

كأضعاف مجموع ح، ط، ك, لأقدار أ، جـ، هـ مجموعة. وأضعاف ل لقدر ب: كأضعاف مجموع ل، م، ن لأقدار ب، د، ز مجموعة. فنسبة أ إلى ب كنسبة جميع أ، جـ، هـ إلى جميع ب، د، ز. وذلك ما أردنا ان نبين.

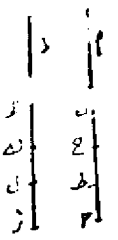
[المبرهنة ١٤/ ٥ وتقابل ١٥/ ٥ عند الحجاج]

نسبه الأجزاء مثل نسبة أضعافها المتساوية.

مثاله: أن جزء أ من ب جـ مثل جزء د من هـ ز. والجزء يقدر الكل. فَـ أ، د يقدران ب جـ، هـ ز، مرات متساوية. وليقدر أ: ب جـ على ب ح، ح ط، ط جـ وليقدر د: هـ ز على هـ ك، ك ل، ل ز.

فعـدة أقسام ب جـ مثل عدة أقسام هـ ز. وأقسام كل واحدة منهمـا متساوية. فنسبة ب ح إلى هـ ك، كنسبة ح ط إلى ك ل، وكنسبة ط جـ إلى ل ز. فنسبة ب ح، أعني أ، إلى هـ ك، أعني د، كنسبة جميع ب جـ إلى جميع هـ ز.

فنسبة أ إلى د كنسبة ب جـ إلى هـ ز وذلك ما أردنا ان نبين.



ن ١٤/٥

[المبرهنة ١٥/ ٥ وتقابل ١٤/ ٥ عند الحجاج]

اذا كانت أربعة أقدار متناسبة، مثل أ، ب، جـ، د، وكان أ الأول أعظم من جـ الثالث، كان ب الثاني أعظم من د الرابع، وإن تساوى أ، جـ، تساوى ب، د. وإن كان أ أصغر من جـ، كان ب أصغر من د.

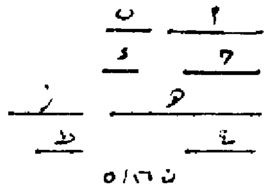
فليكن أ أعــظم من جـ. فنسبـة أ إلى ب أعـظم من نسبـة جـ إلى ب [٣٦ ظ]، ولكن نسبة أ إلى ب كنسبة جـ إلى د. فنسبة جـ إلى د أعظم من نسبة جـ إلى ب. فَـ د أصغر من ب. فقدر ب أعظم من د.

وبمثل ذلك نبين ان أ لو كان مثل جـ لكان ب مثل د؛ ولو كان أ أصغر من جـ لكان ب أصغر من د.

[المبرهنة ١٦/ ٥ وتقابل ١٦/ ٥ عند الحجاج]

وأيضاً اذا كانت أربعة أقدار متناسبة، مثل أ، ب، جـ، د فإنها إذا بدلت تكون متناسبة: أعني ان يكون أيضاً نسبة أ إلى جـ الثالث كنسبة ب إلى د الرابع.

برهانه: أن نأخذ هـ، ز أضعافاً متساوية لقدري أ، ب. ونأخذ ح، ط أضعافاً متساوية لقدري جـ، د.



والأجزاء التي أضعافها متساوية فهي متناسبة.

فنسبة أ إلى ب كنسبة هـ إلى ز. وكذلك نسبة جـ إلى د كنسبة ح إلى ط.

فقدرا هـ، ز إما أن يساويا معاً ح، ط أو يزيدا معاً عليهما، أو ينقصا معاً منهما.

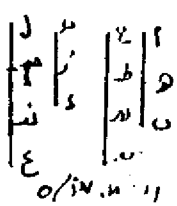
وَ هـ، ز أضعاف أ، ب المتساوية. وَح، ط أضعاف جـ، د المتساوية.

فنسبة أ إلى جـ كنسبة ب إلى د. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ١٧/ ٥ وتقابل ١٧/ ٥ عند الحجاج]

اذا كانت أقدار مركبة متناسبة، فإنها إذا فصلت متناسبة.

مثل أ ب، ب هـ، جـ د، د ز: فإن نسبة أ ب إلى ب هـ كنسبة جـ د إلى د ز أقـول ان نسبة أ هـ إلى هـ ب كنسبة جـ ز [٣٧ و] إلى ز د.



برهانه: أنا نأخذ ح ط، ط ك، ل م، م ن أضعافاً متساوية لأقدار أ هـ، هـ ب، جـ ز، ز د. فأضعاف ح ط لقدر أ هـ كأضعاف ح ك لقدر أ ب لكن أضعاف ح ط لقدر أ هـ كأضعاف ل م لقدر جـ ز. فأضعاف ح ك لقدر أ ب كأضعاف ل م لقدر جـ ز. واضعاف ل م لقدر جـ ز كأضعاف ل ن لقدر د جـ. فإذن أضعاف ح ك لقدر أ ب كأضعاف ل ن لقدر جـ د. فقدرا

ح ك، ل ن أضعاف متساوية لقدري أ ب، جـ د.

ونأخذ ك س، ن ع أضعافاً متساوية لقدري هـ ب، ز د. وقد كانت أضعاف ك ط لقدر هـ ب كأضعاف م ن لقدر ز د. فاضعاف مجموع الأول والخامس، وهو ط س، لقدر هـ ب الثاني، كأضعاف مجموع الثالث والسادس، وهو م ع، لقدر ز د الرابع.

وقدرا ح ك، ل ن أضعاف متساوية لقدري أ ب، جـ د.

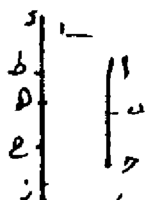
وَ ط س، م ع أضعاف متساوية لقدري هـ ب، ز د. ونسبة أ ب إلى ب هـ، كنسبة جـ د إلى د ز. فقدرا ح ك، ل ن إما أن يزيدا معاً على ط س، م ع، أو ينقصا منهما، أو يساويانهما.

وننقص ط ك، م ن المشتركين. فيبقى ح ط، ل م، وهما أضعاف متساوية لقدري هـ ب، ز د، أو ناقصين منهما، أو مساويين لهما. فنسبة أ هـ إلى هـ ب كنسبة جـ ز إلى ز د.

[المبرهنة ١٨/ ٥ وتقابل ١٨/ ٥ عند الحجاج]

وأيضاً اذا كانت أقدار منفصلة متناسبة، . فإنها اذا ركبت متناسبة.

كما أن نسبة جـ ز إلى ز د كنسبة ل م إلى م ع. أقول ان نسبة جـ د [٣٧ ظ] إلى ز د كنسبة ل ع إلى م ع.


الشكل ١٨/٥

والا فلتكن نسبة جـ د إلى ز د كنسبة ل ع إلى ما هو أصغر، أو أكبر من م ع، فليكن إلى ن ع الأصغر، فنسبة جـ د إلى ز د كنسبة ل ع إلى ن ع. [فنسبة جـ ز إلى ز د كنسبة ل ن إلى ن ع] فنسبة ل ن إلى ن ع كنسبة ل م إلى م ع. واذا بدلنا تكون نسبة ل ن الأعظم إلى ل م الأصغر كنسبة ن ع إلى م ع فإذن ن ع أعظم من م ع. وذلك خلف.

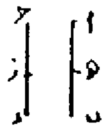
وكذلك نبين ان نسبة جـ د إلى ز د ليست كنسبة ل ع إلى ما هو أكبر منه.

ويتبين من ذلك أيضاً قلب النسبة: وهو أنه اذا كانت نسبة جـ د إلى ز د كنسبة ل ع إلى م ع، كانت أيضاً نسبة جـ د إلى جـ ز كنسبة ل ع إلى ل م:

لأنا نفصل فنسبة جـ ز إلى ز د كنسبة ل م إلى م ع. ونركب فنسبة جـ د إلى جـ: كنسبة ل ع إلى ل م.

[المبرهنة ١٩/ ٥ وتقابل ١٩/ ٥ عند الحجاج]

وأيضاً اذا نقص من قدرين قدران على نسبتهما، فإن نسبة الباقي إلى الباقي كنسبة الكل [٣٨ و] إلى الكل.



الشكل ١٩/٥

مثل أ ب، جـ د نقص منهما أ هـ، جـ ز؛ ونسبة أ ب إلى جـ د كنسبة أ هـ إلى جـ ز. أقول ان نسبة ب هـ إلى ز د كنسبة أ ب إلى جـ د.

برهانه: إن نسبة أ ب إلى جـ د كنسبة أ هـ إلى جـ ز. ونبدل: فنسبة أ ب إلى أ هـ كنسبة جـ د إلى جـ ز. ونفصل فنسبة ب هـ إلى أ هـ كنسبة ز د إلى جـ ز، ثم نبدل فنسبة هـ ب إلى ز د كنسبة أ هـ إلى جـ ز. ولكن نسبة أ هـ إلى جـ ز كنسبة أ ب إلى جـ د. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٢٠/ ٥ وتقابل ٢٠/ ٥ عند الحجاج]

اذا كانت ثلاثة أقدار، وثلاثة أخر، وكل قدرين من الأُول على نسبة قدرين من الأُخر، وكانت نسبها على نظام، فإن الأول في نسبة المساواة ان كان أعظم من الثالث، فإن الرابع أعظم من السادس، وان كان مثله فهو مثله، أو أصغر منه فهو أصغر منه.

كأقدار أ، ب، جـ وأقدار د، هـ، ز؛ ونسبة أ إلى ب كنسبة د إلى هـ، ونسبة ب إلى جـ كنسبة هـ إلى ز. ونجعل أ أعظم من جـ: أقول ان د أعظم من ز؛

لأن أ أعظم من جـ، ب قدر آخر، تكون نسبة أ إلى ب أعظم من نسبة جـ إلى ب، ولكن نسبة أ إلى ب كنسبة د إلى هـ، ونسبة جـ إلى ب كنسبة ز إلى هـ. فنسبة د إلى هـ أعظم من نسبة ز إلى هـ. فقدر د أعظم من ز.

وكذلك نبين ان لو كان أ مثل جـ لكان د مثل ز، ولو كان أ أصغر من جـ لكان د أصغر من ز.

[المبرهنة ٢١/ ٥ وتقابل ٢١/ ٥ عند الحجاج]

وان اختلفت بالتقديم والتأخير، وزالت عن النظام فكانت نسبة أ إلى ب كنسبة [٣٨ ظ] هـ إلى ز، ونسبة ب إلى جـ كنسبة د إلى هـ. فإن الأول أيضاً في نسبة المساواة، إن كان أعظم من جـ الثالث، فإن د الرابع أعظم من ز السادس؛ وإن كان مثله فهو مثله؛ وإن كان أصغر منه فهو أصغر منه.

فنجعل أ أعظم من جـ، وَب قدر آخر. فنسبة أ إلى ب أعظم من نسبة جـ إلى ب. ولكن نسبة أ إلى ب كنسبة هـ إلى ز، ونسبة جـ إلى ب كنسبة هـ إلى د. فنسبة هـ إلى ز أعظم من نسبة هـ إلى د. فَـ ز أصغر من د. فَـ د أعظم من ز.

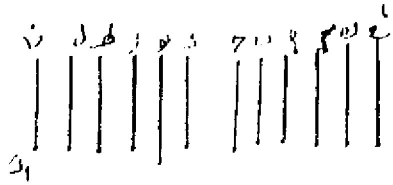
وكذلك نبين ان لو كان مثل جـ، لكان د مثل ز؛ ولو كان أصغر من جـ لكان د أصغر من ز وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٢٢/ ٥ وتقابل ٢٢/ ٥ عند الحجاج]

اذا كانت ثلاثة أقدار، وثلاثة أقدار أُخر معها، وكل اثنين من الأولى على نسبة اثنين من الآخرة، ونسبتها على نظام، فانها على نسبة المساواة متناسبة.

كأقدار أ، ب، جـ؛ وأقدار د، هـ، ز ونسبة أ إلى ب كنسبة د إلى هـ، ونسبة ب إلى جـ كنسبة هـ إلى ز. أقول ان نسبة أ إلى جـ كنسبة د إلى ز:

فنأخذ ح، ط أضعافاً متساوية لقدري أ، د؛ ك، ل أضعافاً متساوية



لقدري ب، هـ؛ م، ن أضعافاً متساوية لقدري جـ، ز.

فنسبة أ إلى ب كنسبة د إلى هـ؛ ح، ط أضعاف متساوية لقدري أ، د؛ ك، ل أضعاف متساوية لقدري ب، هـ؛ فنسبة ح إلى ك كنسبة ط إلى ل. وكذلك نسبة ك إلى م كنسبة ل إلى ن؛ لأن نسبة ب إلى جـ كنسبة هـ إلى ز. فقد تبين ان نسبة ح إلى ك كنسبة ط إلى ل.

فقدرا ح، ط إما ان يزيدا معاً على م، ن؛ أو يساوياهما؛ أو ينقصا منهما. وَح، ط أضعاف أ، د المتساوية؛ م، ن [٣٩ أ] أضعاف جـ، ز المتساوية. فنسبة أ إلى جـ كنسبة د إلى ز. وذلك ما اردنا ان نبين

[المبرهنة ٢٣/ ٥ وهي في نسخة الظاهرية فقط]

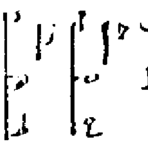
وان اختلفت النسب بالتقديم والتأخير فكانت نسبة أ إلى ب كنسبة هـ إلى ز؛ ونسبة ب إلى جـ كنسبة د إلى هـ فإنها في نسبة المساواة أيضاً متناسبة: نسبة أ إلى جـ كنسبة د إلى ز.

برهانه: انا نأخذ ح، ك، م أضعافاً متساوية لأقدار أ، ب، جـ؛ ط، ل، ن أضعافاً متساوية لأقدار د، هـ، ز. فأضعاف ح لقدر أ كأضعاف ك لقدر ب. ونسبة الأجزاء على نسبة أضعافها المتساوية. فنسبة أ إلى ب كنسبة ح إلى ك؛ وكذلك نسبة هـ إلى ز كنسبة ل إلى ن. ولكن نسبة أ إلى ب كنسبة هـ إلى ز. فنسبة ح إلى ك كنسبة ل إلى ن.

وأيضاً فان نسبة ب إلى جـ كنسبة د إلى هـ. وقد أخذ ك، م أضعافاً متساوية لقدري ب، جـ؛ ط، ل أضعافاً متساوية لقدري د، هـ. فنسبة ك إلى م كنسبة ط إلى ل. وقد تبين ان نسبة ح إلى ك كنسبة ل إلى ن. فقدرا ح، ط اما ان يزيدا معاً على م، ن؛ أو يساوياهما؛ او ينقصا منهما؛ ح، ط أضعاف أ، د المتساوية؛ م، ن أضعاف جـ، ز المتساوية. فنسبة أ إلى جـ كنسبة د إلى ز. وذلك ما اردنا ان نبين

[المبرهنة ٢٤/ ٥]

اذا كانت نسبة الأول إلى الثاني : كنسبة الثالث إلى الرابع ، ونسبة الخامس إلى الثاني كنسبة السادس إلى الرابع ؛ فإن نسبة الأول والخامس مركبين إلى الثاني : كنسبة الثالث والسادس مركبين إلى الرابع .



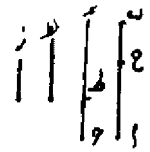
الشكل ٥/٢٤

فليكن أ ب الأول، ونسبته إلى جـ الثاني : كنسبة د هـ الثالث إلى ز الرابع. ونسبة ب ح الخامس إلى جـ الثاني : كنسبة هـ ط السادس إلى ز الرابع ؛ أقول ان نسبة أ ح ، وهو الأول والخامس ، إلى جـ الثاني : كنسبة د ط ، وهو الثالث والسادس، إلى ز الرابع .

برهانه : ان نسبة أ ب إلى جـ كنسبة د هـ إلى ز، ونسبة جـ إلى ب ح كنسبة ز إلى هـ ط . فبالمساواة: نسبة أ ب إلى ب ح كنسبة د هـ إلى هـ ط . واذا ركبنا، فنسبة أ ح إلى ح ب كنسبة د ط إلى ط هـ، ولكن نسبة ح ب إلى جـ كنسبة هـ ط إلى ز. فبالمساواة: نسبة أ ح إلى جـ كنسبة د ط إلى ز.

[المبرهنة ٢٥/ ٥]

وأيضاً اذا كانت أربعة مقادير متناسبة، فان مجموع أعظمها وأصغرها: أعظم من مجموع الباقيين: كأقدار أ ح، د ط، جـ، ز؛ وليكن أعظمها أ ح، وأصغرها ز؛ أقول [٣٩ ب].



الشكل ٥/٢٥

ان مجموع أ ح، ز أعظم من مجموع د ط، ح. فنفصل أ ب من أ ح: مثل جـ؛ ونفصل د هـ من د ط مثل ز. فنسبة أ ح إلى د ط كنسبة جـ إلى ز، أعني أ ب إلى د هـ. وَ أ ح أعظم من د ط. فَـ أ ب أعظم من د هـ. ونفصل فتكون نسبة أ ب إلى د هـ كنسبة ب ح إلى هـ ط. فَـ ب ح أعظم من هـ ط.

ونجعل مجموع أ ب، د هـ مشتركاً: فَـ أ ح مع د هـ، أعني مع ز: أعظم من د ط مع أ ب، أعني مع جـ. وذلك ما أردنا ان نبين

[المبرهنة ٢٦/ ٥]

اذا كانت ثلاثة مقادير، مثل أ، ب، جـ، أقول ان نسبة الأول منها، وهو أ، إلى الثالث، وهو جـ، مؤلفة من نسبة أ إلى ب، ومن نسبة ب إلى جـ.

برهانه: نجعل مقدار د، مساوياً ب. فنسبة أ إلى ب و إلى د واحدة. ونسبة ب، د إلى جـ: أيضاً واحدة. فقد وجد بين مقداري أ، جـ: مقدار وهو د، ويتوالى الجميع على نسبتي أ إلى ب، ب إلى جـ. فنسبة أ إلى جـ اذن مؤلفة من نسبة أ إلى ب، ومن نسبة ب إلى جـ.

[المبرهنة ٢٧/ ٥]

وأيضاً اذا كانت ثلاثة مقادير متناسبة، مثل أ، ب، جـ: نسبة أ الى ب كنسبة ب الى جـ، أقول: ان نسبة أ الى جـ كنسبة أ الى ب مثناة.

برهانه: نفرض مقدار د مساوياً ب. فنسبة أ الى جـ مؤلفة من نسبة أ الى د ومن نسبة د الى جـ. لكن نسبة أ الى د كنسبة أ الى ب؛ ونسبة د الى جـ أيضاً مثل نسبة أ الى ب، لأن نسبة د الى جـ كنسبة ب الى جـ، ونسبة ب الى جـ كنسبة أ الى ب. فنسبة أ الى جـ مؤلفة من نسبتين مساويتين [٤٠ أ] لنسبة أ الى ب. فنسبة أ الى جـ إذن كنسبة أ الى ب مثناة.

عكسه: نسبة أ الى جـ كنسبته الى ب مثناة، أقول ان مقادير أ، ب، جـ متناسبة.

برهانه: ان نسبة أ الى جـ كنسبته الى ب مثناة. فنسبة أ الى جـ مؤلفة من نسبتين مساويتين لنسبة أ الى ب. فقد يوجد بين أ، ب مقدار، ويتوالى الجميع على نسبة أ الى ب. وليكن د. فنسبة أ الى د كنسبة أ الى ب. فَـ د مثل ب. فنسبة د الى جـ كنسبة ب الى جـ. لكن نسبة د الى جـ أيضاً كنسبة أ الى ب فنسبة ب الى جـ كنسبة أ الى ب. فالمقادير متناسبة. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٢٨/ ٥]

اذا كانت نسبة ما مؤلفة من نسب مفروضة، كم كانت، فانها مؤلفة من كل نسب مساوية لتلك النسب المفروضة.

مثاله: نسبة أ الى ب مؤلفة من نسبة جـ الى د، وَ هـ الى ز؛ ونسبة جـ الى د كنسبة ح الى ط؛ ونسبة هـ الى ز كنسبة ك الى ل. أقول ان نسبة أ الى ب مؤلفة من نسبة ح الى ط وَ ك الى ل.

برهانه: ان نسبة أ الى ب مؤلفة من نسبة جـ الى د، ومن هـ الى ز. فقد يوجد بين أ، ب مقدار [٤٠ ب] ويتوالى الجميع على نسبتي جـ الى د وَ هـ الى ز؛ فليكن م. فنسبة أ الى م كنسبة جـ الى د. [وهي] نسبة ح الى ط. فنسبة أ الى م كنسبة ح الى ط. وكذلك نبين ان نسبة م الى ب كنسبة ك الى ل. فقد وجد بين مقداري أ، ب مقدار م، ويتوالى الجميع على نسبتي ح الى ط، ك الى ل. فنسبة أ الى ب مؤلفة من نسبتي ح الى ط، ك الى ل. وذلك ما أردنا ان نبين.

[المبرهنة ٢٩/ ٥]

اذا كانت نسبة ما مؤلفة من نسب مفروضة، كم كانت، فإن كل نسبة مساوية لتلك النسبة تكون أيضاً مؤلفة من تلك النسب [٤١ أ] المفروضة.

مثاله: نسبة أ الى ب مؤلفة من نسبتي هـ الى ز وَح الى ط. ونسبة جـ الى د كنسبة أ الى ب. أقول ان نسبة جـ الى د أيضاً مؤلفة من نسبتي هـ الى ز وَح الى ط.

برهانه: انا نجد مقداراً بين مقداري أ، ب ويتوالى الجميع على نسبتي هـ الى ز وَح الى ط؛ فليكن ذلك المقدار ك. فنسبة أ الى ك كنسبة هـ الى ز؛ ونسبة ك الى ب كنسبة ح الى ط.

ولتكن نسبة ك الى أ كنسبة ل الى جـ. ونسبة أ الى ب كنسبة جـ الى د. فبالمساواة: نسبة ك الى ب كنسبة ل الى د. ونسبة ك الى ب كانت كنسبة ح الى ط. فنسبة ل الى د كنسبة ح الى ط.

وكـذلك نبين ان نسبة جـ الى ل كنسبة هـ الى ز. فقد وجد بين جـ، د مقدار، وهو ل، ويتوالى الجميع على نسبتي هـ الى ز، ح الى ط. فنسبة جـ الى د إذن مؤلفة من نسبتي هـ الى ز، وَح الى ط. وذلك ما أردنا ان نبين.

تمت المقالة الخامسة بحمد الله وعونه والحمد لله حق حمده.

المقالة الخامسة في موازنة ختامية

تقــع هذه المقالة في ٢٥ مبرهنة. اتفق في ذلك الحجاج وهيث، عدداً وطـريقـة برهـان واختلفـا قليلاً في الترتيب إختلافاً قد يكون سببه النيريزي. وأضاف النيريزي بعضاً من الزيادات. اما النسوي فالمقالة الخامسة عنده من ٢٩ مبـرهنة، منها ٢٥ تتفق مع مبرهنات الحجاج عدداً ومحتوى وأشكالاً مع بعض التغييرات في الترتيب، ومع ايجاز في البرهان، ثم يزيد اربع مبرهنات على ما عند الحجاج وهيث، وهذه تبرهن حقائق ذكرها اقليدس من غير برهان.

ولا عجب. فالمقالة الخامسة من كمال الصنع بما لا يسهل الزيادة فيه او تجميله.