البـــــاب الثـــاني

الكميـــات المتجهـــة والكميـــات القياسيـــة
Vectors and Scalars

1.2 مقدمة

في العلوم الهندسية كثيراً ماتقابلنا كميات طبيعية يمكن تحديدها أو وصفها وصفاً كـاملاً بعدد واحد فقط ، والى جانبه الوحده المستخدمة في القياس ، ويطلق على هذه الكميات القياسية (Scalars) . ومن أمثلة هذه الكميات الزمن (الزمن اللازم لقطع مسافة معينة هو 3 ساعات) والكتلة (كتلة جسم ما مثلاً تساوي 50 كيلو غرام) والطول (طول عمود ما يساوي 20 متر) .

وعندما يقال عن درجة حرارة الماء بإنها 70° م أو بأن كثافة الألومنيوم تساوي 2.7 غرام / سنتيمتر مكعب ، وأن مادة ما كتلتها 200 غرام ، فإن أوصاف هذه الكميات (درجة الحرارة والكثافة والكتلة) ليس لها علاقة بالإتجاه .

وفي علم الهندسة توجد كميات كثيرة قياسية مثل الطاقة (Energy) والسرعة القياسية (Speed) والشحنة الكهربائية (Electric charge) والحرارة النوعية (Specific heat) وما إلى ذلك .

كما وتوجد الكثير من الكميات في الطبيعة التي تتطلب لتحديدها بالكامل ليس فقط مقدار تلك الكمية ولكن ايضاً الإتجاه الذي تؤثر فيه ومثل هذا النوع من الكميات يعرف بالكميات المتجهة (Vector Quantiteis) ومن أمثلة هذه الكميات الازاحة (أزيح جسم ما على الأرض 20 متراً إلى الشمال الغربي) والقوة - Force - (جسم ما تؤثر عليه قوتان وزنه 40 كيلونيوتن رأسياً إلى أسفل والشد T كيلونيوتن الى اعلى) والتسارع (بدأ قطار حركته من محطة بتسارع مقداره 30 متر / ثانية في إتجاه الشرق) والسرعة (المركبة تسير إلى الشمال بسرعة 80 كيلو متر في الساعة) وعزم القوة (عزم الدوران يساوي 300 كيلونيوتن متر في إتجاه دوران عقرب الساعة) .

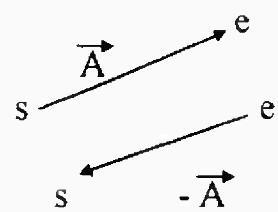
فإذا كانت المسافة من طرابلس الغرب إلى عمان تساوي 3500 كيلو متر فإن الإزاحة (Displacement) من طرابلس إلى عمان لها قيمة وإتجاه فلو قلنا أن المسافة 3500 كيلومتر فإن ذلك يعتبر كمية عددية قياسية ، أما إذا قلنا أن طرابلس تبعد عن عمان 350 كيلومتر شرقاً فإننا اصبحنا نتكلم عن كمية متجهه وهي الإزاحة .

تلعب المتحهات (Vectors) دوراً أساسياً ورئيسياً في العلوم الهندسية والفيزيائية عامة وسنحاول اعطاء الأساسيات التي يحتاجها القارئ ليكون مؤهلاً على أساس سليم للقيام بفهم جدي لعلم الميكانيكا وغيرها من العلوم .

2.2 تعريفات ومفاهيم أساسية (Definition)

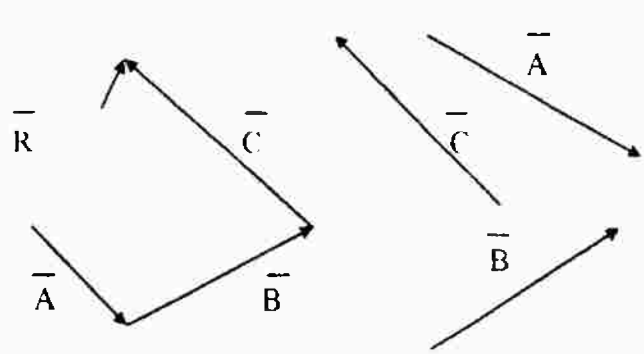
يرمز للمتجه (Vector) بسهم ⟶ طوله يحدد مقدار تلك القيمة التي يمثلها في نظام وحدات محددة واتجاه يمثل الاتجاه الذي تؤثر فيه الكمية.

نفترض أن هناك متجه $\vec{A}$ يمثل كمية فيزيائية كالإزاحة أو القوة ويؤثر بين نقطتين S ، e كما هو مبين بالشكل (1.2) فإنه عادة ما يميز المتجه عن مقداره وضع سهم ⟶ فوق الحرف الذي يمثل المتجه أثناء الكتابة اليدوية أي تمثل ($\vec{A}$) بينما تمثل A أو |A| مقدار المتجه أي قيمته العددية.



في الشكل (1.2) يمثل المتجه $\vec{A}$ كمية فيزيائية قيمتها العددية هي المسافة بين S و e واتجاهها من S إلى e ومعكوس هذا المتجه ($-\vec{A}$) له نفس المقدار واتجاهه من النقطة e إلى S.

من الخواص المهمة للمتجهات هو أنه لا يتطلب موضعاً معيناً ولكن يمكن تغيير مكان هذا المتجه في مواضع لا نهائية لكن بشرط أن تكون موازية لوضعه الأصلي دون أي تغيير في قيمته ، وهذه الخاصية لها دور هام في علم الفيزياء والميكانيكا حيث تستعمل للحصول على المحصلة الكلية ($\vec{R}$) لمجموعة من القوى المؤثرة على جسم ما كما هو موضح في الشكل (2.2).



الشكل (2.2) خاصية نقل المتجهات في اتجاهات موازية لنفسها

يتم تحديد متجه ما مثل $\vec{A}$ بتحديد مقداره وإتجاهه بالنسبة الى مجموعة احداثيات (Coordinate system) مختارة ، بحيث يكون مقدار هذا المتجه ثابتاً بغض النظر عن هذا الاختيار .

وكما هو معروف ، هناك أنواع مختلفة من مجموعة الاحداثيات (أو أنظمة الاحداثيات) مثل الاحداثيات الكارتيزية (نظام الديكارتية " كارتيسيات " المستعمل للاحداثيات ذو الثلاثة أبعاد) Cartesian Coordinates وهي احداثيات متعامدة (x , y , z) والاحداثيات القطبية المستوية (Plane polar coordinates) $(r ، \theta)$ والاحداثيات القطبية الكروية (Spherical polar coordinates) (r, θ , φ) .

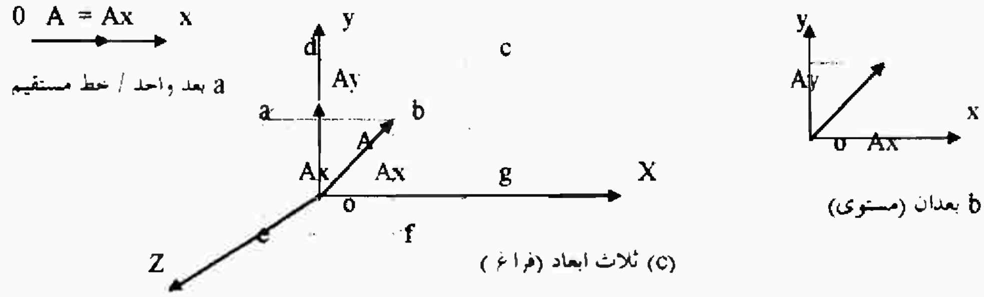
لعل ابسط أنظمة الاحداثيات واكثرها إنتشاراً واقلها غرابة مجموعة الاحداثيات الكارتيزية ، حيث يمكن تحديد متجه ما مثل المتجه $\vec{A}$ في هذا النظام بتحديد مساقطه على المحاور المختلفة ، بحيث تكون هذه المساقط هي : A_x , A_y , A_z على المحاور Oz ,Oy , Ox على التوالي كما هو مبين بالشكل (3.2) والنقطة (O) هي نقطة اصل الاحداثيات التي عادة ما تختار عند بداية المتجه .

والشكل (3.2 – c) يمثل الحالة العامة ومتوازي المستطيلات(abcdefgo) الذي قطره ob يمثل المتجه $\vec{A}$ واضلاعه تمثل مساقط هذا المتجه على محاور الاحداثيات الكارتيزية ، وهو ناتج عن تقاطع المستويات المختلفة $(x - y)$ ، $(y - z)$ ، $(x - z)$ ومن هذا الشكل تعطي مركبات المتجه $\vec{A}$ كما يلي :

$$oe = A_x$$
$$og = A_y$$
$$od = A_z$$

وحيث ان المساقط او مركبات المتجه A على المحاور المختلفة هي كميات قياسية عددية ، ولذا يصبح لزاماً إيجاد طريقة لكتابة المتجه كدالة في مساقط ويتم ذلك بإستخدام ما يعرف بوحدة المتجه (Unit Voector) . هناك نوعين من المتجهات هي :

1- المتجهات الحرة (Free Vector) وهذه المتجهات لها قيمة واتجاه ولكن ليس لها موقع خاص مرتبط بها ، فمثلا ازاحة مقدارها 20 كيلو متر (km) شمالا هي نفس الكمية سواء كانت في شمال مدينة ما أو في جنوبها .



الشكل (3.2) نظام الاحداثيات الكارتيزية في أبعاد مختلفة

2- المتجهات الموقعية (المحدد موقعها خطياً) Localized Vectors :

وهذه المتجهات تعين على خط مستقيم ، فمثلاً تستطيع القوة المؤثرة على جسم جاسئ أن تسيره على خطها أي على خط تأثير عملها .

3.2 وحدات المتجهات (Unit Vectors)

الوحدة الديكارتية للمتجهات (Cartesian unit vector)

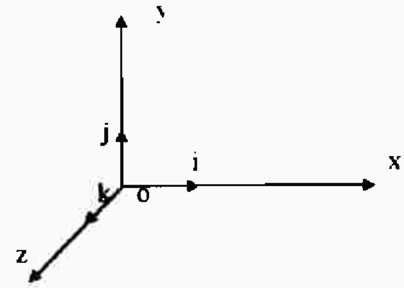
تعرف وحدة المتجه بإنها المتجه الذي مقداره العددي هو الواحد وإتجاهه هو إتجاه المتجه الذي يمثله . ففي حالة المتجه $\overrightarrow{B}$ مثلاً تعرف وحدته كما يلي :-

$$B = \frac{\overrightarrow{B}}{|B|} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (1.2)$$

أي أن وحدة المتجه هي عبارة عن حاصل قسمة المتجه على مقداره .

وحيث أنه كما أشرنا سابقاً توجد هناك أنظمة مختلفة من الأحداثيات فإنه عادة مايتم اختيار وحدة متجه لكل محور من مجموعة الاحداثيات .

وبالنسبة للأحداثيات الكارتيزية تستعمل وحدات المتجهات I , j , k في اتجاه المحور Ox, Oy , Oz على التوالي كما هو مبين بالشكل (2.4) ووحدات المتجهات في هذه الحالة ثابتة مقداراً واتجاهاً .



الشكل (4.2) وحدات المتجهات للاحداثيات الكارتيزية

4.2 قوانين المتجهات

لقد تطور علم المتجهات حتى أصبح يكون شبه فرع من فروع الرياضيـــات ، حيـــث يعتبر هذا العلم اللغة التي يتكلم بها الدارسين للميكانيكا والنظرية الكهرومغناطيســية حيــث ان الغالبية من الكميات الفيزيائية التي نتعرض لها هي في الواقع كميات متجهة وهي تحتوي علـى قواعد ونظريات متفرقة ومستقلة .

لنركز انتباهنا على كميتين متجهتين مثل $\vec{B}$, $\vec{A}$ على سبيل الاختبار وبحيث يمثــلان بمجموعة احداثيات كارتيزية أي بمعنى معرفتان بدلالة الاحداثيات الكارتيزيـــة علـــى النحـــو التالي :

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} \quad \ldots\ldots (2.2)$$

$$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k} \quad \ldots\ldots (3.2)$$

نرى أن Bz , By , Bx , Az , Ay , Ax هي مساقط المتجهين على المحـــاور الثلاثـــة وهي كميات عددية كما أشرنا سابقاً لـــــ k , j , I فهي وحدات المتجهات في اتجاه المحاور Oz , Oy , Ox على التوالي .

1.4.2 جمع المتجهات (Vector Addition)

في كثير من الحالات نحتاج الى جمع متجهين أو أكثر للحصول على المحصلة الكليـــة (Resultant) ويرمز لها بالرمز $(\vec{R})$ لمجموعة من القوى المؤثرة علـــى جســم مــا ، لــو افترضنا ان حاصل جمع متجهين مثل $\vec{A}$, $\vec{B}$ هو متجه جديد نرمز له بالرمز C أو ان :

$$\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$$

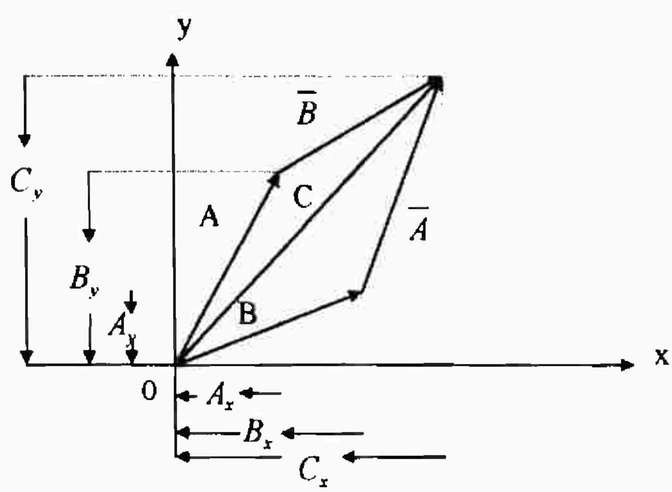
فإن :

$$(A_x+B_x)\hat{i}+(A_y+B_y)\hat{j}+(A_z+B_z)\hat{k}=C_x\hat{i}+C_y\hat{j}+C_z\hat{k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4.2)$$

ومن شرط التساوي نجد أن :

$$C_x=A_x+B_x \quad , \quad C_y=A_y+B_y \quad , \quad C_z=A_z+B_z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5.2)$$

ويوضح الشكل (5.2) قانون جمع المتجهات في الحالة المبسطة في المستوى (x -y)



الشكل (5.2) جمع المتجهات في المستوى

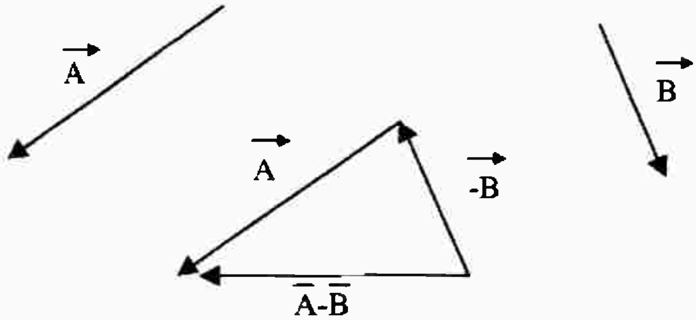
2.4.2 طرح المتجهات (Vector Subtraction)

حاصل طرح متجهين مثل $\vec{A}$, $\vec{B}$ هو متجه جديد نرمز له بالرمز $\vec{D}$ مســاقطه على المحاور الكارتيزية تساوي الفرق بين مساقط المتجهين $\vec{A}$, $\vec{B}$ أي ان :-

$$\vec{D}=\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (6.2)$$

$$\vec{D}_x=\vec{A}_x-\vec{B}_x\ ,\ \vec{D}_y=\vec{A}_y-\vec{A}_y\ ,\ \vec{D}_z=\vec{A}_z-\vec{B}_z \ \ldots\ldots\ldots\ (7.2)$$

وكما هو واضح يمكن اعتبار عملية الطرح على انها عملية جمع للمتجـــه ($\vec{A}$) والمتجــه ($-\vec{B}$) كما هو موضح على الشكل (6.2) .



الشكل (2.6) توضيح لقانون جمع المتجهات

اما اذا كان المتجهات $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ متساويين أي ان ($\vec{A} = \vec{B}$) فان محصلـــة الفــرق بيــن المتجهين ($\vec{A} - \vec{B}$) تساوي صفرا (Zero Resultant) هذه الحالة يكون هناك نظام فــي حالة اتزان (Equilibrium) والذي سيدرس فيما بعد في فصل تحت عنوان الاتزان .

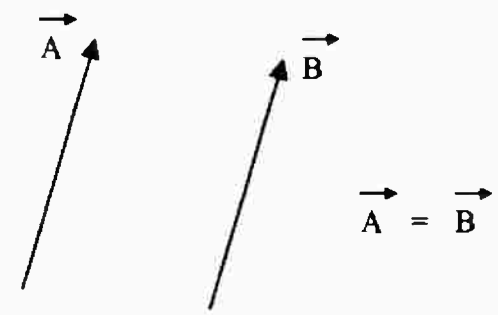
3.4.2 تساوي المتجهات (Vector Equality)

يكون المتجهان $\vec{A}$ و $\vec{B}$ متساويين اذا كان لهما نفس المقدار والاتجاه بصرف النظـر عن نقطتي بدايتهما او بمعنى آخر نقول ان المتجه $\vec{A}$ يساوي المتجه $\vec{B}$ اذا كانت مســاقط المتجهات المتماثلة متساوية أي ان :

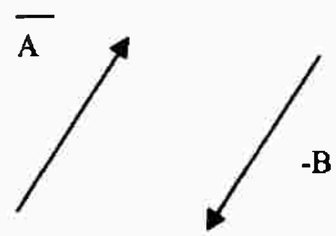
$$\vec{A} = \vec{B} \qquad A_x = B_x \, , \, A_y = B_y \, , \, A_z = B_z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \; (8.2)$$

وهنا يكون التساوي في القيمة العددية والاشارة كما هو مبين في الشكل (7.2) .

اما اذا المتجهان متساويين في المقدار ويعملان في اتجاهين متعاكسين فيمكن تمثيـــل المتجــه الثاني بنفس صيغة تمثيل المتجه الاول ولكن بعكس الاشارة كما في شكل (8.2) .



شكل (7.2) متجهان متساويان في المقدار والاتجاه .



الشكل (8.2) متجهان متساويان في المقدار ولكن متعاكسان في الاتجاه .

4.4.2 قانون التنسيق (The Associative Law)

لو كان لدينا ثلاث كميات متجهة مثل $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ فان قانون التنسيق يســاعدنا بما يلي:

$$\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} \quad \text{.................. (9.2)}$$

ومعنى هذا ان اجراء حاصل جمع المتجهين $\vec{B}$, $\vec{C}$ واضافة الناتج الى المتجهة $\vec{A}$ هو تماما كاجراء حاصل جمع المتجهين $\vec{A}$, $\vec{B}$ اولاً ثم اضافة $\vec{C}$ الى الناتج .

وهذا القانون له اهمية في دراسة علم الميكانيكا من حيث الحصول على المحصلة الكلية $(\vec{R})$ الناتجة عن تأثير عدد من القوى على جسم حيث يمكن تعميم هذا القانون ليشمل عــدداً كبــيراً من الكميات المتجهة .

مثال (1.2) :

اثبت صحة قانون التنسيق للمجموعة من الكميات المتجهة .

$\vec{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{K}$

$\vec{B} = 3\hat{i} + 3\hat{K}$

$\vec{C} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{K}$

الجواب : حيث ان :

$$\vec{B} + \vec{C} = \left(3\hat{i} + 3\hat{K}\right) + \left(\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{K}\right)$$
$$= 4\hat{i} + 2\hat{j}$$

فان :

$$\vec{A} + \left(\vec{B} + \vec{C}\right) = \left(2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{K}\right) + \left(4\hat{i} + 2\hat{j}\right)$$
$$= 6\hat{i} - \hat{j} + \hat{K} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10.2)$$

ايضاً :

$$\vec{A} + \vec{B} = \left(2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{K}\right) + \left(3\hat{i} + 3\hat{K}\right)$$
$$= 5\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{K}$$
$$\left(\vec{A} + \vec{B}\right) + \vec{C} = \left(5\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{K}\right) + \left(\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{K}\right)$$
$$= 6\hat{i} - \hat{j} + \hat{K} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11.2)$$

من المعادلتين (10.2) و (11.2) نرى ان :

$$(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$$

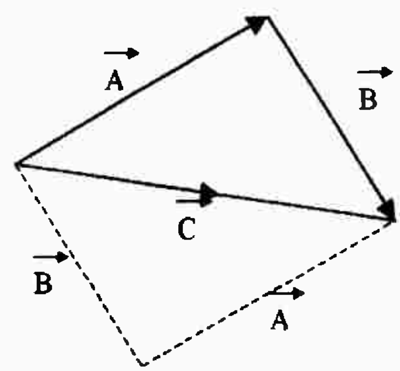
وهكذا تم التحقق من صحة قانون التنسيق

5.4.2 قانون التبديل (The Commutative Law)

يعرف قانون التبديل لمتجهين $\vec{A}$, $\vec{B}$ كالاتي :

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12.2)$$

ويمكن فهم قانون التبديل اذا تفحصنا الشكل (9.2) نرى ان حاصل الجمع هـــو المتجــه $\vec{C}$ والذي هو قطر متوازي الاضلاع وان كل ضلعين فيه يمثلان المتجه $\vec{A}$ بينمـــا الآخــران يمثلان المتجه $\vec{B}$ (قاعدة متوازي الاضلاع لجمع المتجهات) .



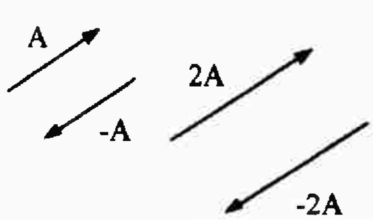
الشكل (9.2) قانون التبديل .

6.4.2 ضرب المتجهات (Vector Multiplication)

لو فرضنا ان المتجه ($\vec{A}$) كمية متجهة (α) كمية عددية فـــان حـــاصل ضـــرب المتجهة α في $\vec{A}$ هي كمية متجهة جديدة لها نفس اتجاه المتجهة A بينما مقدارها يزيــد او ينقص من مقدار A حسب قيمة (α) فاذا كانت $1 > \alpha$ فان ذلك يمثل عملية انكمـــاش للمتجه ويكون المتجه الناتج اصغر في المقدار من A بينما لو كانت $1 < \alpha$ فان النـــاتج اكبر في القيمة من A وتعتبر هنا عملية الضرب تكبير للمتجهة A

$$\alpha \vec{A} = \vec{A}\alpha = \alpha A_X \hat{i} + \alpha A_Y \hat{j} + \alpha A_Z \hat{K} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(13.2)$$

أي ان كل مسقط من مساقط المتجه الناتج يمثل المسقط الاصلي مضروبا في العدد α كمـــا هو موضح في الشكل (10.2)



اذا فرضنا ان $\alpha = 2$

والمتجهة $\vec{A}$ ممثلا بالكمية المتجهة التالية

$\vec{A} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{K}$ الشكل (10.2) ضرب كمية عددية في متجه A

فان النتجه الجديد $C = \alpha\ A$ هو :

$$\vec{C} = 6\hat{i} - 4\hat{j} + 6\hat{K}$$

7.4.2 حاصل الضرب العددي (النقطي) Dot Product Or Scalar Product

هذه الخاصية لها اهمية بالغة في تطبيق المتجهات على الظواهر الفيزيائية المختلفة ، وتستعمل هذه الطريقة عندما يكون حاصل ضرب كميتين متجهتين ناتجهما كمية غير متجهة (قياسية) .

نفترض وجود متجهين A , B والزاوية بينهما هي (θ) كما هو مبين بالشكل (11.2)

يعرف حاصل الضرب العددي كما يلي : ـ

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta \quad \text{.................................} \quad (14.2)$$

وهي كمية عددية تنتج من حاصل ضرب مقدار A ومقدار المتجه B وجيب تمام الزاوية (θ) بين المتجهين . كما يمكن النظر الى هذه العملية على انها اجراء حاصل ضرب قيمة احد المتجهين في مسقط الآخر عليه ، وبذلك ان قيمة $A\cos\theta$ هو مسقط A على المتجه B وهناك عدة امثلة على هذا النوع من الضرب فمثلا الشغل الذي هو كمية غير متجهة ناتج من حاصل ضرب القوة (كمية متجهة) مع المسافة (كمية متجهة) .

$$W.D = F \cdot d$$

حيث ان : $W.D$ هو الشغل

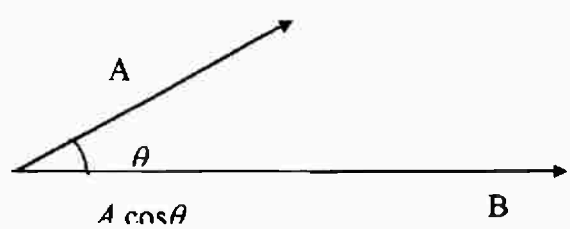
F القوة المتجهة

d المسافة الاتجاهية على طول خط القوة .

كذلك القدرة (POWER) التي تعتبر كمية قياسية وناتجة عن حاصل ضرب القوة مع السرعة

$$\text{(POWER)} \text{ القدرة} = \vec{F} \cdot \vec{V}$$

حيث ان $\vec{V}$ السرعة الاتجاهية .



الشكل (11.2) حاصل ضرب العددي (النقطي) لمتجهين $\vec{A}$, $\vec{B}$

ويمكن كتابة حاصل الضرب العددي كدالة في المساقط المختلفة ولكن قبل ذلك نطبق قاعدة حاصل الضرب العددي على وحدات المتجهات i , j , k .

كما هو معروف ان هذه الوحدات هي في اتجاه المحاور المتعامدة أي ان الزاوية بين كل زوجين منها هي 90 أي أن :

$$\hat{i}.\hat{j} = \hat{j}.\hat{i} = 1.1\cos 90^{o} = 0$$

$$\hat{i}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{i} = 1.1\cos 90^{o} = 0$$

$$\hat{j}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{j} = 1.1\cos 90^{o} = 0$$

أما بالنسبة للمتجه نفسه فإن الزاوية بينه وبين نفسه تساوي صفرا أي ان :

$$\hat{i}.\hat{i} = 1.1\cos 0^{0} = 1$$

$$\hat{j}.\hat{j} = 1.1\cos 0^{0} = 1$$

$$\hat{k}.\hat{k} = 1.1\cos 0^{0} = 1$$

ونلخص ماتقدم على النحو التالي :-

$$\hat{i}.\hat{j} = \hat{i}.\hat{k} = \hat{j}.\hat{k} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15.2)$$

$$\hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16.2)$$

نعود الآن للعلاقة السابقة (14.2) لنجد أن :-

$$\begin{aligned}
\vec{A}.\vec{B} &= (A_X \hat{i} + A_y \hat{j} + A_Z \hat{k}).(B_X \hat{i} + B_y \hat{j} + B_Z \hat{k}) \\
&= A_X B_X (\hat{i}.\hat{i}) + A_X B_y (\hat{i}.\hat{j}) + A_X B_z (\hat{i}.\hat{k}) + A_y B_X (\hat{j}.\hat{i}) \\
&\quad + A_y B_X (\hat{j}.\hat{i}) + A_y B_y (\hat{j}.\hat{j}) + A_y B_Z (\hat{j}.\hat{k}) + A_Z B_X (\hat{k}.\hat{i}) \\
&\quad + A_Z B_y (\hat{k}.\hat{j}) + A_Z B_Z (\hat{k}.\hat{k})
\end{aligned}$$

وبتطبيق العلاقتين (15.2) و (16.2) نحصل على :

$$\vec{A}.\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17.2)$$

وكذلك يمكننا الحصول على الزاوية بين المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ وذلك بإستخدام العلاقتين (17.2) (14.2)

$$\cos\theta = \frac{A_X B_X + A_y B_y + A_Z B_Z}{AB} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (18.2)$$

او أن

$$\theta = \cos^{-1} \left[\frac{A_X B_X + A_y B_y + A_Z B_Z}{AB}\right] \quad ....(19.2)$$

اما اذا كان المتجهان متعامدين ($\theta = 90$) فإن حاصل الضرب العددي هو الصفـو

أما اذا كان المتجهان متوازيان فإن حاصل الضرب العددي يساوي :

$$\vec{A} . \vec{B} = A. B \cos \theta = AB$$

والآن نقوم بكتابة حاصل الضرب العددي كدالة كما يلي :

$$\left.\begin{array}{ll} A . B = 0 & , \theta = 90 \\ \quad = AB & , \theta = 0 \end{array}\right] \quad ....(20.2)$$

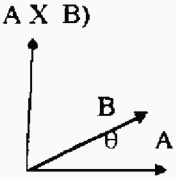
(8.4.2) حاصل الضرب المتجهي (The vector cross product)

حاصل الضرب المتجهي او التقاطعي هو احدى العمليـــات المهمـــة جـــدا فـــي علـــم المتجهات ، وتستعمل هذه الطريقة عندما يكون حاصل الضرب كميات متجهة ، ويتوقف عليـــه فهم الكثير من العمليـــات والظواهـــر الفيزيائيـــة خاصـــة فـــي علـــم الميكانيكـــا والنظريـــة الكهرومغناطيسية وتعرف هذه العملية لمتجهين $\vec{A}$, $\vec{B}$ بالقانون التالي :

$$A \times B = (AB \sin\theta)\hat{n} \quad .... (21.2)$$

أي ان حاصل الضرب المتجهي يساوي حاصل ضرب مقدار A في مقـــدار B فـــي جيـــب الزاوية بينهما (θ) مضروبا في (n) والذي يمثل وحدة متجه فـــي الاتجـــاه العمـــودي علـــى المستوى الذي يتكون منه المتجهين $\vec{A}$, $\vec{B}$ كما هو مبين في الشكل (12.2) .

(A X B)



(A x B)

يجب التأكيد على ان الاشارة ($\times$) لا يقصد بها الضرب الجبري المعتاد وانما هي عملية خاصة وجديدة في علم المتجهات وان الترتيب هم جدا في هذه العملية حيث ان :

$$A \times B \neq B \times A$$

لذا فان

$$A \times B = -B \times A \quad \text{.......................................} \quad (22.2)$$

كما هو موضح على الشكل (12.2) .

من ناحية اخرى يمكن تفهم ايجاد اتجاه حاصل الضرب المتجهي عن طريق تطبيق اعدة اليد اليمنى ـ (Right hand Rule) . فلو جعلنا اصبع الابهام في اليد اليمنى يشير في اتجاه المحور العمودي على المستوى المكون من المتجهين A , B وان بقية الاصابع لفت بحيث تشير في اتجاه دوران المتجه A نحو المتجه B حول المحور فان اتجاه اصبع الابهام يحدد اتجاه وحدة المتجه (n) .

اذا افترضنا الان وجود متجهين مثل A , B بحيث يمثلان بمجموعة احداثيات كارتيزية على النحو :

$$\vec{A} = A x I + Ay I + Az . K \quad \text{..............................} \quad (23.2)$$

$$\vec{B} = B x I + By j + Bz K \quad \text{..............................} \quad (24.2)$$

فان حاصل الضرب المتجهي للمتجهين A , B هو :

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A \times I + A_y I + A_z K) \times (B \times I + B_y j + B_z K)$$

$$= A \times B \times (I \times I) + A \times B_y (I \times I) + A \times B_z (I \times K)$$

$$+ A_y B_y (j \times I) + A_y B_y (j \times j) + A_y B_z (j \times K)$$

$$+ A_z B_x (K \times I) + A_z B_y (K \times j) + A_z B_z (K \times K)$$

وبالاستمرار في عملية الضرب المتجهي وربط الحدود نحصل على :

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y) I + (A_z B_x - A_x B_z) j +$$

$$(A_x B_y - A_y B_x) K \quad \text{.......................................} \quad (25.2)$$

كما يمكننا كتابة حاصل الضرب المتجهي (التقاطعي) بطريقة المحددات أي ان :

$$A \times B = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_X & A_y & A_Z \\ B_X & B_y & B_Z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\begin{vmatrix} A_y & A_Z \\ B_y & B_Z \end{vmatrix} + \hat{j}\begin{vmatrix} A_X & A_Z \\ B_X & B_y \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} A_X & A_y \\ B_X & B_y \end{vmatrix}$$

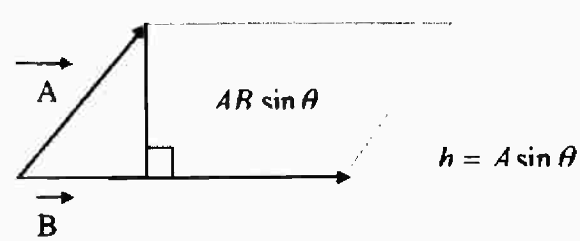
$$= (A_y B_Z - A_Z B_y)\hat{i} + (A_Z B_X - A_X B_y)\hat{j} + (A_X B_y - A_y B_X)\hat{k}$$

وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها من قبل . غير انه من الواضـــح ان طريقـــة المحـــددات اسهل بكثير واكثر توفيرا للوقت والجهد .

اما مقدار حاصل الضرب المتجهي فهو :

$$|A \;\; x \;\; B| = AB \, SIN \, \theta \; .... \; (26.2)$$

والذي يمكن النظر اليه على اعتبار انه مساحة متوازي الاضلاع المتكون من المتجهين A x B كما هو مبين في الشكل (13.2) .



الشكل (13.2) قيمة الضرب المتجهي ومساحة متوازي الاضلاع

الان نطبق قاعدة حاصل الضرب المتجهي على وحدات المتجهات i , j , K والتي لـــها القيمة العددية تساوي الواحد واتجاهها في تعامد كل على الآخر ، لنحصل على :

$$I \times j = -j \times I = K , \quad j \times K = -K \times j = I$$

$$K \times I = -j \times K = j , \quad I \times I = j \times j = K \times K = 0$$

ومنها نحصل على العلاقة :

$$A \times A = O$$

وذلك لاي متجه A . الصفر O في هذه الحالة يعامل وكأنـــه متجـــه ويعـــرف بالمتجـــه الصفري (Null Vector)

9.4.2 القانون التوزيعي : (The Distributive Law)

ان هذا القانون يربط بين ثلاثة متجهات $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{D}$ حيث يمكن دمـــج عمليتـــي جمع المتجهات وضربها في عملية واحدة ويمكن تلخيصه بالمعادلة التالية :

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{D}) = (\vec{A} \times \vec{B}) + (\vec{A} \times \vec{D}) \qquad (27.2)$$

من المهم ملاحظة ان الترتيب الحقيقي للضرب المتجهي (التعارضي) لهذه المعادلة يجـــب ان يحافظ عليه وهذه هي الصورة الاولى للقانون ، اما الصورة الثانية نســـتخدم فيــها الضـــرب العددي على النحو التالي :

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{D}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{D} \qquad (28.2)$$

مثال (2.2)

متجهان $\vec{A}$, $\vec{B}$ ممثلان بمجموعة احداثيات كارتيزية على النحو التالي :

$$\vec{A} = 2I + 2j - K \quad , \quad \vec{B} = 6I - 3j + 2K$$

اوجد مايلي :

1. حاصل الضرب العددي $\vec{A} \cdot \vec{B}$
2. الزاوية θ بينهما
3. حاصل الضرب المتجهي $\vec{B} \times \vec{A}$

الجواب :

1. للحصول على ناتج حاصل الضرب العددي نستخدم المعادلة (17.2)

وحيث : $A_z = -1 \;,\; A_y = 2 \;,\; A_x = 2$

$B_z = 2 \;,\; B_y = -3 \;,\; B_x = 6$

نجد

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 2 \cdot 6 + 2(-3) + (-1) \cdot 3$$
$$= 3$$

2 . للحصول على الزاوية θ بين المتجهين نستعمل المعادلة (18.2) لنحصل على :

اذا

$$Cos\theta = \frac{(2)(6)+(2)(-3)+(-1)(2)}{3 \times 7} = \frac{4}{21} = 0{,}1906$$

$$\theta = Cos^{-1}(0{,}1906) = 79^{O}$$

أي ان الزاوية بين المتجهين A , B هي 79^{0}

3. حاصل الضرب المتجهي A x B يمكننا الحصول عليه باستعمال طريقة المحددات

$$A \times B \begin{vmatrix} i & j & K \\ 2 & 2 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

كالاتي :

$$= i\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + j\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + K\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 6 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(4-3) + \hat{j}(-6-4) + \hat{k}(-6-12)$$

$$= \hat{i} - 10\hat{j} - 18\hat{k}$$

نلاحظ ان ايجاد حاصل الضرب المنهجي بواسطة طريقة المحدودات تعتبر سهلة واكثر توفيرا للوقت والجهد من الطرق الاخرى .

10.4.2 مقدار المتجه (Vector Magnitude)

الآن وبعد ان قمنا بدراسة حاصل الضرب العددي نستطيع تحديد مقدار المتجه والذي سبق وان تعرضنا الى ذكره ولكن لم نوضح الطريقة التي يتم بها الحصول على مقدار متجه ما وذلك لتعلق ذلك 6 بقانون حاصل الضرب العددي والذي يمكننا من ذلك

لنفترض ان المطلوب هو ايجاد مقدار المتجه A الممثل بمجموعة احداثيات كارتيزية على النحو التالي :

$$\vec{A} = Ax\, i + Ay\, j + Az\, K$$

من قانون حاصل الضرب العددي ومن الحقيقة ان الزاوية بين المتجه $\vec{A}$ ونفسه هي 0^0 نرى ان :

$$\vec{A}.\vec{A} = AA\cos\theta = AA\cos 0^0 = AA = A^2$$

$$= A_x A_x + A_y A_y + A_z A_z$$

$$= A^2x + A^2y + A^2z$$

$$A^2 = A^2x + A^2y + A^2z$$

ومنها نحصل على مقدار المتجه A حيث

$$A = |A| = \sqrt{(A_X)^2 + (A_Y)^2 + (A_Z)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (29.2)$$

مثال (3.2) :

اوجد مقدار المتجه A حيث :

$$A = 6I + 3j - 2K$$

الجواب :

للحصول على مقدار المتجه A نستعمل المعادلة (29.2) وحيث ان

$$Ax = 6 \quad , \quad Ay = 3 \quad , \quad Az = -2$$

$$|A| = \sqrt{(A_X)^2 + (A_y)^2 + (A_Z)^2}$$
$$= \sqrt{(6)^2 + (3)^2 + (-2)^2}$$
$$= \sqrt{49} = 7$$

5.2 انظمة الاحداثيات المختلفة (Different Systems of coordinates)

كما هو معروف هناك انواع مختلفة من مجموعات الاحداثيات الكارتيزية (نظام الكارتيزية) والقطبية المستوية والقطبية الكروية والاسطوانية . وهنا يجب توضيح ماهية هذه الانظمة واسباب تعددها .

ان ضرورة اللجوء الى استعمال مجموعة معينة من الاحداثيات تحمل معاني هامة واساسية ، فهي تتعلق بالحقائق المعروفة في علم اليزياء والتي تقول بان كل الاشياء نسبية (Relative) وليست مطلقة (Absolute) كما كان يعتقد قبل ظهور النظرية النسبية للعالم البرت اينشتاين.

وما دامت الظواهر مثل الحركة نسبية فانه يجب ان يحدد نسبتها الى شئ ما . وهنا نصل الى ما يعرف بمناط اسناد (Frame of Reference) حيث يتم اختيار احدى مناطات الاسناد هذه كمرجع بتحديد مجموعة من الاحداثيات (set of axes) يستعمل مركزها كنقطة مرجع (reference Point) تقاس بالنسبة لها الابعاد المطلوبة كانت طولية او زاوية ، والواقع ان كيفية اختيار مكان او نقطة اصل هي عملية اختيارية .

الا انه يجب التاكيد على نوعية الاختيار تلعب دورا هاما في تسهيل حل المسائل الفيزيائية في كثير من الحالات . وعلى سبيل المثال تعتبر الارض مناط اسناد ولكن يمكننا اختيار عدد لا نهائي من الاحداثيات بعضها فوق سطح الارض وبعضها عند مركزها وهكذا .

ان التنوع في شكل الاحداثيات التي سبق وان اشرنا اليها يقتضيه تسهيل طرق الحل الكثير من المسائل الفيزيائية . ورغم ان الاحداثيات الكارتيزية هي الاكثر انتشارا ، الا انه في حالة

الحركة الدائرية في مستوى ، على سبيل المثال فانه من الاجدى ان نستعمل الاحداثيات القطبية المستوية .

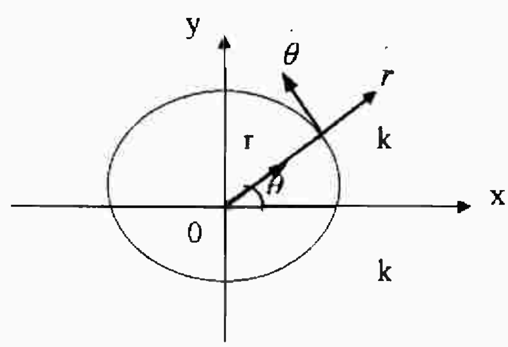
كما انه في حالة كون الشكل الفيزيائي للمسألة المراد حلها تحمل نوعا من التناسق (Symmetry) كالشكل الكروي او الاسطواني فيجب اختيار نوعية الاحداثيات التي تتناسب مع المسألة .

ان الدقة في اختيار الانظمة الاحداثيات اثناء دراسة ظاهرة من الظواهر الطبيعية الفيزيائية يوفر الكثير من الوقت والعناء في حين ان الاختيار الخاطئ قد جعل حل المسألة غير ممكن وفي بعض الاحيان مستحيلا .

سنقوم وبعد دراستنا لنظام الاحداثيات الكارتيزية بدراسة مجموعتين اخرتين من انظمة الاحداثيات التي لها اهمية خاصة في دراسة علم الميكانيكا .

1.5.2 الاحداثيات القطبية المستوية (Plane Polar Coordinates)

هذا النظام من الاحداثيات يستخدم لوصف الحركة ذات المسار المنحني في مستوى او الحركة الدائرية ويرمز في العادة بالاحداثيات r , θ حيث ان r تمثل طول موضع الجسيم بالنسبة لنقطة الاصل θ هي الزاوية التي تقع بين r والمحور ox والموضحة بالشكل (14.2)



الشكل (14.2) نظام الاحداثيات القطبية المستوية (r , θ)

والان لنفترض ان النقطة (K) تتحرك على محور الدائرة التي ينطبق مركزها مع نقطة الاصل (o) . فانه يمكن تحديد موضع هذه النقطة بالنسبة لاصل الاحداثيات اما باستخدام نظام الاحداثيات القطبية المستوية r , θ او باستخدام نظام الاحداثيات الكارتيزية x , y .

الان وباستخدام قواعد حساب المثلثات يمكن اشتقاق العلاقات التي تربط بين هذين النظـــامين من الاحداثيات والذي يمكننا التحويل من نظام الى آخر وبالنظر الى الشكل (14.2) نجد ان :

$$X = r\cos\theta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (30.2)$$

$$y = r\sin\theta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (31.2)$$

وهاتان المعادلتان تعرفان بمعادلات التحويـل (Transformation Equations) وبـالطبع يمكن الحصول على معكوس هاتين المعادلتين كما يلي :ـ

$$X = r^2 \cos^2\theta$$

$$Y = r^2 \sin^2\theta$$

ومنها نرى ان :

$$r^2 = x^2 + y^2$$

حيث ان :

$$\sin^2\theta + \cos^2 = 1$$

ايضا بقسمة المعادلتين نرى ان :

$$\frac{y}{x} = \frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \tan\theta$$

وهنا يكون التحويل العكسي مصطى بالعلاقتين التاليتين :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (32.2)$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (33.2)$$

كما ان وحدات المتجهات في هذه الحالة هما r , θ في اتجـــاه زيـــادة المتجهـــة r والزاوية θ . كما يجب الاخذ في الاعتبار ان وحدات المتجهات هذه متغيرة وليست كما هـــي الحال بالنسبة لوحدات المتجهات I , j , K الثابتة مقدارا واتجاها ، والسبب هـــو ان اتجـــاه R واتجاه θ يتغيران باستمرار كنتيجة لتغير موضع النقطة (K) بالنسبة لنقطة الاصـــل ممـــا ينتج عنه تغير اتجاه وحدات المتجهات R , θ بحيث يصبحان دالة في الزمن كما هو الحال

فان:

$$r\,r = \theta\,.\,\theta = 1$$
$$r\,.\,\theta = O$$
$$r \times r = \theta \times \theta = O$$
$$r \times \theta = n$$

حيث ان n هو وحدة المتجه العمودي على المستوي r , θ .

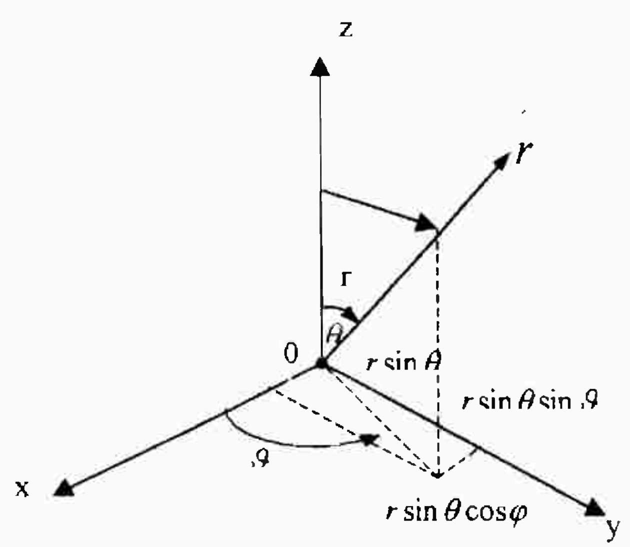
2.5.2 الاحداثيات القطبية الكروية (Spherical Polar Coordinates)

تستعمل هذه المجموعة من الاحداثيات عندما يكون هناك تناسب كـــروي حيـــث يمكـــن تحديد موضع نقطة ما (K) بتحديد متجه الموضع r من اصـــل الاحداثيـــات (O) ولنقطـــة المعينة K وذلك بتحديد ثلاثة كميات هي (r , θ ,) المبينة بالشكل (2 . 15) حيث ان :

r ــ هي المسافة (OK) أي مقدار المتجه r

θ ــ هي الزاوية بين اتجاه r والاتجاه الموجب للمحور Z .

ــ الزاوية بين الاتجاه الموجب للمحور OZ ومسقط r على المستوى (y - x)



الشكل (2 . 15) نظام الاحداثيات القطبية الكروية

يمكننا أشتقاق علاقات محددة بين نظام الاحداثيات الكارتيزية (x,y,z) ونظام الاحداثيات الكروية وهي:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi \quad \text{.......................................} (34.2)$$

$$y = r\sin\theta\sin\varphi \quad \text{.......................................} (35.2)$$

$$z = r\cos\varphi \quad \text{.......................................} (36.2)$$

ومن هذه المعادلات يمكن الحصول على معكوس لها وهي:-

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{.......................................} (37.2)$$

$$\theta = \tan^{-1}\sqrt{\frac{(y^2 + z^2)}{z^2}} \quad \text{.......................................} (38.2)$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{.......................................} (39.2)$$

وأيضا من خواص حاصل الضرب المتجهي:-

$$\hat{r}\times\hat{\theta} = \hat{\varphi} \quad , \quad \hat{\theta}\times\hat{\varphi} = \hat{r} \quad , \quad \hat{\varphi}\times\hat{r} = \hat{\theta}$$

أما بالنسبة لوحدات المتجهات فهي متغيرة نتيجة لتغير أتجاه كل من φ,θ,r ونذكر أيضا:

$$\hat{r}\cdot\hat{r} = \hat{\theta}\cdot\hat{\theta} = \hat{\varphi}\cdot\hat{\varphi} = 1$$

$$\hat{r}\cdot\hat{\theta} = \hat{\theta}\cdot\hat{r} = \hat{\theta}\cdot\hat{\varphi} = 1$$

كما يمكننا أيجاد العلاقة التي تربط بين وحدات المتجهات المختلفة وذلك بالرجوع للشكل (15.2) السابق كما يلي:-

$$\hat{r} = \sin\theta\cos\varphi\,\hat{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{j} + \cos\theta\,\hat{k} \quad \text{.......................................} (40.2)$$

$$= \cos\theta\cos\varphi\,\hat{i} + \cos\theta\sin\varphi\,\hat{j} + \sin\theta\,\hat{k} \quad \text{.......................................} (41.2)$$

$$\hat{\varphi} = \sin\varphi\,\hat{i} + \cos\varphi\,\hat{j} \quad \text{.......................................} (42.2)$$

ونفس الطريقة نحصل على:

$$\hat{x} = \sin\theta\cos\theta\,\hat{r} + \cos\theta\cos\varphi\,\hat{\theta} + \sin\varphi\,\hat{\varphi} \quad \text{.......}(43.2)$$

$$\hat{y} = \sin\theta\sin\theta\,\hat{r} + \cos\theta\sin\varphi\,\hat{\theta} + \cos\varphi\,\hat{\varphi} \quad \text{.......}(44.2)$$

$$\hat{z} = \cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta} \quad \text{.......}(43.2)$$

علاقات أخرى:

خلال دراسة علم الميكانيكا بشكل عام سنتعرض باجراء بعض العمليات التفاضلية على الكميات المتجهة وللتأكيد على أهمية هذه العملية وأيضا لتجميعها في حيز واحد للرجوع إليها في حالة الحاجة ونذكر منها مايلي:-

1. $\frac{d}{dt}(\vec{A}+\vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{d\vec{B}}{dt}$

2. $\frac{d(\alpha\vec{A})}{dt} = \frac{d\alpha}{dt}\vec{A} + \alpha\frac{d\vec{A}}{dt}$

   حيث: α هو عدد.

3. $\frac{d}{dt}(\vec{A}.\vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt}.\vec{B} + \vec{A}.\frac{d\vec{B}}{dt}$

4. $\frac{d}{dt}(\vec{A}\times\vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B} + \vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt}$

مثال (4.2)

أذا كان مقدار السرعة $\overrightarrow{V}$ هو

$$\overrightarrow{V} = 2t^2\,\hat{i} + 4t^5\,\hat{j} + \sin 3t\,\hat{k}$$

أوجد قيمة التسارع $\overrightarrow{a}$.

الحـــــل:-

$$\overrightarrow{a} = \frac{\overline{dv}}{dt} = 4t\,\hat{i} - 25t^4\,\hat{j} + 3\cos 3t\,\hat{k}$$

تمارين (2)

س 1 . ماهو الفرق بين الكميات المتجهة والكميات العددية؟ قدم أمثلة على ذلك؟

س 2 . وضح متى يتساوى أي متجهين؟ وهل يمكن أن يتساوى المجهان

$\vec{A} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ و $\vec{B} = 4\hat{i} - 3\hat{j}$؟

س 3 .بين أن جمع المتجهات يكون تبادليا أي أن

$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$

س 4 .متجهان A ، B معطيان بالعلاقتين:

$\vec{B} = 4\hat{i} + 2\hat{j}$ و $\vec{A} = 3\hat{i} - 5\hat{j} - \hat{k}$

أوجد مايلي:

أ-مقدار وأتجاه كل من المتجهين مع الاتجاه الموجب للمحور ox.

ب-حاصل الضرب العددي $\vec{A}.\vec{B}$.

ج-حاصل الضرب المتجهي $\vec{A} \times \vec{B}$.

ء-وحدة المتجه $\vec{B}$.

س 5 .أذا كانت المتجهات الثلاثة C,B,A هي:

$\vec{C} = 2\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{B} = 3\hat{i} + 2\hat{k}$, $\vec{A} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$

أوجد مايلي:

أ-$\vec{A}+\vec{B}-\vec{C}$

ب- وحدة المتجه للمتجه $\vec{A} \times \vec{B}$.

ج-الزاوية بين المتجهين $\vec{B}$ و $\vec{C}$.

س 6 .وضح الفرق بين قانوني التبديل والتنسيق؟ طبق هذاين القانونين على المتجهات

$\vec{A} = 3\hat{k}$, $\vec{B} = -2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{C} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$

س 7 .أكتب المتجه $\vec{A} = -2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ كمتجه بدلالة وحدات المتجهات القطبية الكروية.

س 8 .أوجد وحده المتجه لمحصلة المتجهات $\vec{A}$,$\vec{B}$, $\vec{C}$ أذا علمت أن:

$$A = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k} \quad , \quad B = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k} \quad , \quad C = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$$

س 9 . أثبت أنه لو كان مقدار فرق المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ يساوي مقــدار حــاصل جمــع نفــس المتجهين فإن $\vec{A}$ عمودي على $\vec{B}$.