

الباب الرابع

أُتْزان الأجسام الجاسئة

Equilibrium of Rigid Bodies

- 1.4 مقدمة
- 2.4 حاصل الضرب المتجهي لقوتين .
- 3.4 التعبير عن حاصل الضرب المتجهي بواسطة المركبات الأفقية والعمودية
- 4.4 تعريف الجسم الجاسئ .
- 5.4 العزم.
- 1.5.4 عزم القوة حول نقطة.
- 2.5.4 المجموع الجبري لعزوم القوى.
- 3.5.4 عزم القوة حول محور.
- 4.5.4 عزم الارتدواج.
- 5.5.4 تحليل القوة إلى قوة ومزدوج.
- 6.5.4 تحويل منظومة من القوى إلى قوة واحدة ومزدوج.
- 6.4 أُتْزان الأجسام الجاسئة.
- 1.6.4 طرق الارتكاز وردود الأفعال في مستوى.
- 2.6.4 شروط أُتْزان الجسم الجاسئ.
- 3.6.4 طرق التثبيت وردود الأفعال في الفراغ.
- 4.6.4 شروط أُتْزان الجسم الجاسئ في الفراغ.

تقدم الدراسة في هذا الباب خصائص وتأثيرات الانواع المختلفة من القوى والعزوم على المنشآت والتركيبات الهندسية، حيث يعتبر هذا الباب أساس في دراسة علم الميكانيكا، ودراسة مواضيع أخرى. ويعتبر ذو أهمية كبيرة وعلى الطالب أن يفهم معنى القوى والعزوم باتقان. في الباب السابق تم التعامل مع الاجسام على أساس أن أبعادها الهندسية متناهية الصغر، أو مهملة وليست ذو أهمية في حل المسألة الميكانيكية، وأطلق عليها "الجسيمات".

لكن هذه النظرة الى الاجسام لا تكون دائماً ممكنة بشكل عام، وذلك عند النظر الى الجسم على أنه مجموعة أو منظومة من الجسيمات ذو مسافات ثابتة بين بعضها البعض، لذا فإنه في هذه الحالة يجب أن يؤخذ حجم الجسم (أبعاده) بعين الاعتبار بالإضافة الى حقيقة أن القوى سوف تؤثر على جسيمات مختلفة ولهذا تطبيقات مختلفة وهامة في علم السكون.

يمكن اعتبار الجسم جاسئاً اذا كان غير قابل للتشوه، مع أن بعض الآلات والتركيبات الهندسية الصناعية لا يمكن اعتبارها أجسام جاسئة بشكل مطلق لأنها تتشوه بفعل تأثير الحمولات المعرضة لها، لكن هذه التشوهات تعتبر صغيرة ولا تؤثر عادة على ظروف الاتزان أو الحركة للمنشئ المدروس.

أن الجسم الجاسئ يمثل حالة خاصة من منظومة جسيمات تكون فيها الابعاد النسبية لهذه الجسيمات ثابتة.

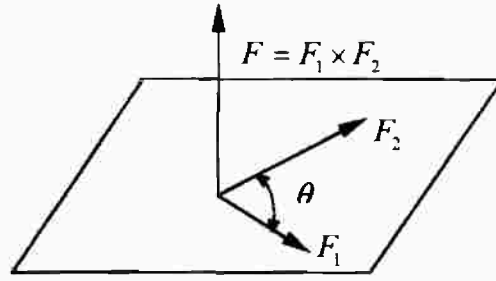
أن دراسة تأثير منظومات القوى على الاجسام الجاسئة تتضمن دائماً حساب حاصل الضرب المتجهي والقياس لقوتين، وخاصة عند ايجاد عزوم القوى حول نقطة أو محور، لذلك فإن اساسيات جبر المتجهات سيتم تقديمه في هذا الباب نظراً لأهميته في حلول المسائل والتطبيقات المختلفة.

2.4 حاصل الضرب المتجهي لقوتين

(Vector Product of Two Vectors)

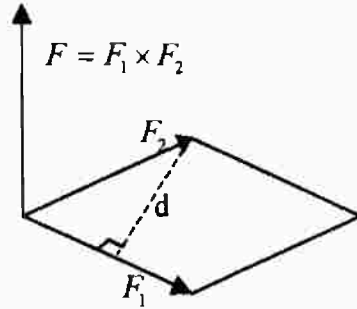
حاصل الضرب المتجهي لقوتين مثل $\vec{F}_1$ ، $\vec{F}_2$ هو متجه $\vec{F}$ الذي يحقق الشروط التالية:

1. خط تأثير المتجه $\vec{F}$ يجب أن يكون عمودي على المستوى الذي يحتوي القوتين $\vec{F}_1$ ، $\vec{F}_2$ كما هو مبين في الشكل (1.4)



الشكل (1.4)

2. قيمة حاصل الضرب المتجهي $\overline{F}$ هو عبارة عن مساحة متوازي الاضلاع المتكون من F_1 و F_2 كما هو مبين في الشكل (2.4) حيث أن:-



الشكل (2.4)

مساحة متوازي الاضلاع تساوي:-

$$|F| = \text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

$$|F| = F_1 \cdot d \dots\dots\dots (1.4)$$

لكن نلاحظ أن الارتفاع (d) هو عبارة عن المركبة العمودية للقوة F_2 وتساوي:

$$d = F_2 \sin \theta$$

ومنه نجد أن قيمة حاصل الضرب المتجهي العددي للقوتين F_1 ، F_2 هي:

$$|F| = |F_1 \times F_2| = F_1 \cdot d = F_1 F_2 \sin \theta \dots\dots\dots (2.4)$$

أي أن قيمة حاصل الضرب المتجهي للقوتين F_1 و F_2 يساوي حاصل ضرب قيمة القوة F_1 في قيمة القوة F_2 في جيب الزاوية المحصورة بينهما θ .
حيث أن الزاوية θ تقع ضمن القيم التالية:

$$0^\circ < \theta < 180^\circ$$

إذا كانت الزاوية θ تساوي 0° أو 180° فإن $F = 0$ ، أي أن القوتين $\overline{F_1}$ و $\overline{F_2}$ متوازيتان.

3. اتجاه حاصل الضرب المتجهي $\overline{F}$ ، يحدد حسب قاعدة اليد اليمنى (Right-handed tridad) والموضحة في الباب الثاني، حيث أن اتجاه المتجه الناتج (F) يكون باتجاه دوران اليد اليمنى عندما تدار من القوة الاولى $\overline{F_1}$ الى القوة $\overline{F_2}$ أي بعكس دوران عقرب الساعة.

وهكذا إذا تحققت الشروط الثلاث المذكورة أعلاه فإن المتجه (F) يعتبر ناتج حاصل الضرب المتجهي للقوتين $\overline{F_1}$ و $\overline{F_2}$:

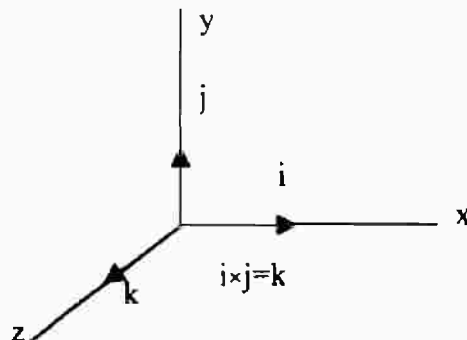
$$\overline{F} = \overline{F_1} \times \overline{F_2}$$

وطبقاً للشروط الثالث فإن الترتيب يعتبر مهم جداً في عملية الضرب حيث أن:

$$\overline{F_1} \times \overline{F_2} = -(\overline{F_2} \times \overline{F_1})$$

3.4 التعبير عن حاصل الضرب المتجهي بواسطة المركبات الأفقية والرأسية.

نقوم الآن بتطبيق عملية حاصل الضرب المتجهي على وحدات المتجهات (i, j, k) التي لها القيمة العددية تساوي واحد واتجاهها في تعامد كل منها على الآخر كما هو مبين في الشكل (3.4) حيث:



الشكل (3.4)

$$j \times i = 0$$

$$j \times i = -k$$

$$k \times i = j$$

$$i \times j = k$$

$$j \times j = 0$$

$$k \times j = -i$$

$$i \times k = -j$$

$$j \times k = i$$

$$k \times k = 0$$

أما بالنسبة لحاصل الضرب المتجهي لقوتين مثل F_1 ، F_2 معرفتان بدلالة المركبات على المحاور الكارتيزية كما يلي:

$$F_1 = F_{1x}i + F_{1y}j + F_{1z}k$$

$$F_2 = F_{2x}i + F_{2y}j + F_{2z}k$$

فيكون:-

$$\overline{F} = \overline{F_1} \times \overline{F_2} = (F_{1x}i + F_{1y}j + F_{1z}k) \times (F_{2x}i + F_{2y}j + F_{2z}k)$$

يمكن الحصول على ناتج حاصل الضرب باستخدام المحددات حيث:-

$$\overline{F} = \overline{F_1} \times \overline{F_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ F_{1x} & F_{1y} & F_{1z} \\ F_{2x} & F_{2y} & F_{2z} \end{vmatrix}$$

وبفك هذا المحدد نحصل على:

$$F = (F_{1y}F_{2z} - F_{1z}F_{2y})i + (F_{1z}F_{2x} - F_{1x}F_{2z})j + (F_{1x}F_{2y} - F_{1y}F_{2x})k \dots\dots\dots(3.4)$$

ومنه نجد أن المركبات الثلاث لمتجه حاصل الضرب المتجهي (F) هي:

$$\left. \begin{aligned} F_x &= F_{1y}F_{2z} - F_{1z}F_{2y} \\ F_y &= F_{1z}F_{2x} - F_{1x}F_{2z} \\ F_z &= F_{1x}F_{2y} - F_{1y}F_{2x} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.4)$$

4.4 تعريف الجسم الجاسئ

(Rigid Body)

أشرنا سابقاً على أن الجسم الجاسئ هو الجسم الذي لا يحدث فيه تشوه، بفعل تأثير القوى المختلفة عليه، وحيث أن الجسم الجاسئ يمثل حالة خاصة من مجموعة الجسيمات، فيمكن تعريفه على أنه:

"مجموعة أو منظومة الجسيمات، لا تتغير المسافة بين أي جسيمين فيها مهما كانت القوى المؤثرة عليها" أي أن الجسم الجاسئ يطلق على "تجمعاً من الجسيمات ذات المفهوم للجسم الجاسئ، فإن جميع النظريات والقواعد المشروحة بالنسبة للجسيمات في الباب السابق تكون أيضاً صحيحة بالنسبة للأجسام الجاسئة.

(Moment or Torque)

5.4 العزم

إذا أثرت قوة ما على جسم بحيث تدفع الجسم للدوران حول أي محور لا يقطع خط عمل هذه القوة ولا يكون موازياً لها، فإن هذا الدافع للدوران يسمى بعزم القوة ويرمز له بالرمز $\overline{M}$ ويصطلح عليه عادة بعزم التدوير أو الدوران.

أن تأثير القوى على الاجسام الجاسئة تدرس وتوضح من خلال دراستنا لمكثتان مهمتان وهما عزم القوة حول نقطة وعزم القوة حول محور، كما يعتبر تأثير العزوم على الاجسام الجاسئة من تركيبات والآليات هندسية اساس في دراسة علم الميكانيكا وخاصة الاستاتيكا وايضا في دراسة مواضيع أخرى لذا فإن هذا البند يعتبر ذو أهمية كبرى.

1.5.4 عزم القوة حول نقطة (Moment of a Force about a Point)

لنفرض أن القوة F تؤثر على الجسم الجاسئ في نقطة A ، كما هو مبين في الشكل (4.4)، فإن هذه القوة حول نقطة اختيارية مثل O يمكن الحصول عليه باستخدام حاصل الضرب المتجهي كما يلي:

$$\overline{M}_O = \overline{r} \times \overline{F} \dots\dots\dots (5.4)$$

حيث :

$\overline{M}_O$: عزم القوة F حول النقطة O .

$\vec{\tau}$: متجه الموضع وهو الخط الواصل بين نقطة تأثير القوة على الجسم الجاسئ (A) والنقطة المراد إيجاد العزم حولها (O).
 $\vec{F}$: القوة المؤثرة على الجسم الجاسئ.

كما أشرنا سابقاً عند تعريف حاصل الضرب المتجهي لمتجهين، فإن اتجاه ناتج حاصل الضرب المتجهي عمودي على المستوى الذي يحتوي القوة $\vec{F}$ ، ومتجه الموضع $\vec{r}$ وأن الترتيب مهم جداً حيث أن:

$$\vec{M}_o = \vec{r} \times \vec{F} = -(\vec{F} \times \vec{r})$$

وأن الاتجاه يحدد حسب قاعدة اليد اليمنى
 أما بالنسبة للقيمة القياسية لها العزم (magnitude of the moment) فيمكن الحصول عليها كما يلي:

$$M_o = F.d \dots\dots\dots(6.4)$$

حيث أن:

d: تمثل المسافة العمودية من النقطة المراد إيجاد العزم حولها (O) إلى خط تأثير القوة $\vec{F}$ ، كما هو مبين في الشكل (4.4).

نلاحظ أن المسافة (d) هي عبارة عن المركبة العمودية لمتجه الموضع $\vec{r}$ حيث:

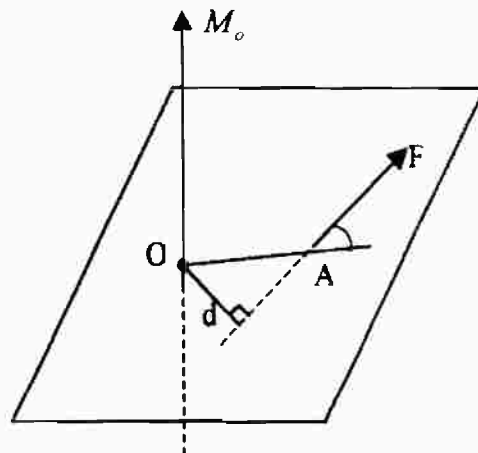
$$d = r \sin \theta$$

حيث: θ هي الزاوية المحصورة ما بين القوة $\vec{F}$ ومتجه الموضع $\vec{r}$.

ومنه نجد أن:

$$M_o = F.d = F.r.\sin \theta \dots\dots\dots(7.4)$$

هي القيمة القياسية (العديّة) لعزم القوة حول نقطة.

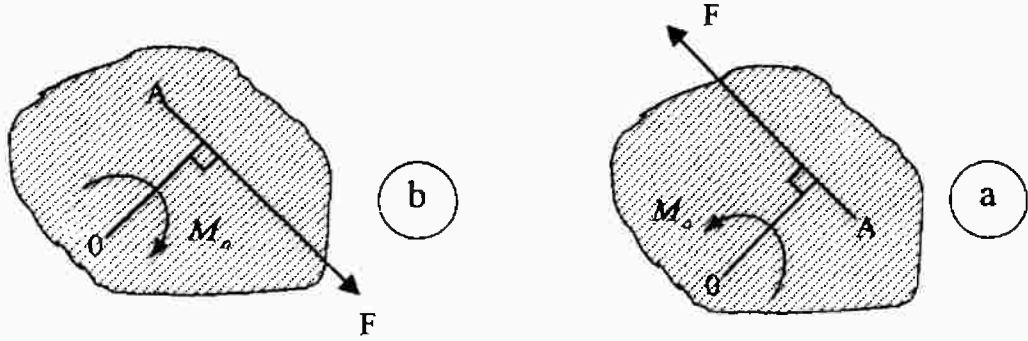


الشكل (4.4)

ويعرف عزم القوة حول أي نقطة بأنه حاصل ضرب القوة والمسافة العمودية بين تلك النقطة وخط تأثير القوة وتسمى المسافة العمودية (d) عاده بذراع القوة. ويمثل عزم القوة حول نقطة قابليتها لتدوير الجسم الذي تؤثر عليه حول المحور العمودي على المستوى الذي يحوي القوة وذراعها.

أن عزم القوة كمية متجهة لذا فإن هذه الكمية لها اتجاه ومقدار ونقطة تأثير حسب ما يتوجب لتحديد أي كمية متجهة أخرى.

أن اتجاه عزم القوة يكون موجباً اذا كانت القوة تعمل على تدوير الجسم حول النقطة المراد إيجاد العزم حولها بعكس دوران عقارب الساعة كما هو مبين في الشكل (a.5.4)، أما اذا كانت القوة تعمل على تدوير الجسم حول النقطة المراد إيجاد العزم حولها مع اتجاه عقارب الساعة فإن اتجاه العزم يكون سالباً كما هو مبين في الشكل (b.5.4).



$$M_o = -F d$$

دوران مع عقارب الساعة
ويلاحظ أن M_o داخل من الورقة

$$M_o = +F d$$

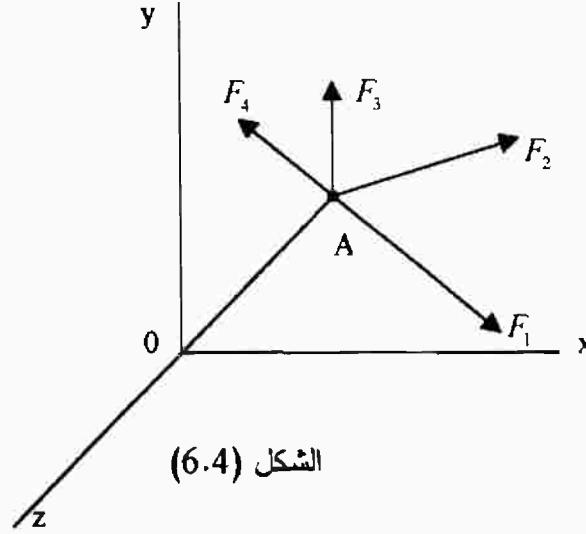
دوران عكس عقارب الساعة
ويلاحظ أن M_o خارج من الورقة

الشكل (5.4)

أما حالة في كون القوة لا تقع في مستوى عمودي على محور العزم كما أشرنا سابقاً، وخاصة بالنسبة للقوى المستوية فإنه يتوجب تحليل القوة الى مركباتها الأفقية والرأسية حيث يصبح عزم القوة مساوياً لمجموع عزوم المركبتين المذكورتين حسب ما يسمى بمبدأ العزوم (Principle of moments) بالنسبة للقوى المستوية والذي ينص على أن، عزم القوة حول أي نقطة يكون مساوياً لمجموع عزوم مركبات هذه القوة حول نفس النقطة... وهذا ما يعتبر من الأساسيات في علم الاستاتيكا النظرية.

أما بالنسبة لعزم محصلة مجموعة قوى ملتقية في نقطة واحدة في الفراغ فيمكن الحصول عليه حسب نظرية فاريجنون (Varignon's Theorem).

لنفرض أن القوى $F_1, F_2, F_3, \dots$ ملتقية في نقطة واحدة مثل (A) في الفراغ، كما هو مبين في الشكل (6.4).



باستخدام حاصل الضرب المتجهي لمتجهين يمكن إيجاد عزم هذه القوى حول النقطة 0 حيث:

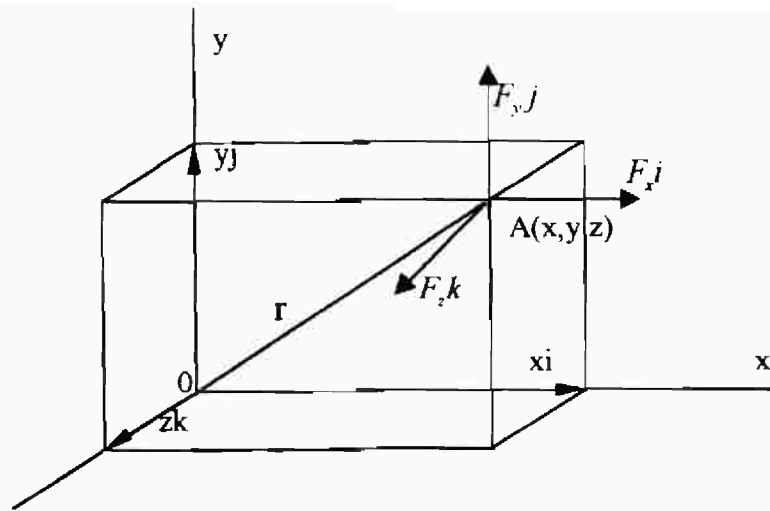
$$M_o = r \times (F_1 + F_2 + F_3 + \dots) = r \times F_1 + r \times F_2 + r \times F_3 + \dots \quad (8.4)$$

وذلك حسب نظرية فاريجنون التي تنص على أن العزم حول نقطة مثل (0) لمحصلة عدة قوى ملتقية في نقطة واحدة في الفراغ مساوياً لمجموع عزوم كل قوة من هذه القوى حول النقطة (0) كل على حدة.

2.5.4 المجموع الجبري لعزوم القوى

لمعرفة مقدار عزم قوة في الفراغ من الأفضل تحليلها إلى مركباتها، على المحاور الكارتيذية الثلاث x, y, z.

لنفرض أن المطلوب إيجاد عزم القوة F في الفراغ المعرفة بدلالة مركباتها الثلاث على المحاور الكارتيذية F_x, F_y, F_z والمؤثرة في النقطة (A) ذات الإحداثيات (x, y, z) حول النقطة (0) كما هو مبين في الشكل (7.4).



الشكل (7.4)

إذا القوة F معرفة بدلالة المركبات الثلاث كما يلي:

$$F = F_x i + F_y j + F_z k$$

أما متجه الموضع r فهو الخط الواصل بين النقطة $A(x, y, z)$ ونقطة $O(0, 0, 0)$ ويمكن

أيجاد مركباته أيضاً باستخدام التغير في الاحداثيات كما أشرنا سابقاً حيث:

$$d_x = x_2 - x_1 = x - 0 = x$$

$$d_y = y_2 - y_1 = y - 0 = y$$

$$d_z = z_2 - z_1 = z - 0 = z$$

ومنه:

$$\overline{r} = xi + yj + zk$$

وأخيراً العزم حول النقطة (0) يساوي:

$$\begin{aligned} \overline{M}_o &= \overline{r} \times \overline{F} \\ &= (xi + yj + zk) \times (F_x i + F_y j + F_z k) \\ &= (yF_z - zF_y)i + (zF_x - xF_z)j + (xF_y - yF_x)k \\ &= M_x i + M_y j + M_z k \end{aligned}$$

إذاً مركبات العزم الثلاث هي:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= yF_z - zF_y \\ M_y &= zF_x - xF_z \\ M_z &= xF_y - yF_x \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9.4)$$

وكما أشرنا سابقاً يمكن إيجاد حاصل الضرب المتجهي بطريقة المحدد حيث:

$$\overline{M}_o = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

لنحصل على نفس الناتج، حيث تعتبر هذه الطريقة أسهل وأسرع للوقت.

أما في حالة حساب عزم القوة F المؤثرة في نقطة (A) حول نقطة اختيارية مثل (B) أي ليست نقطة الاصل (0) فإن:

$$M_B = \overline{r_{A/B}} \times F$$

حيث أن:-

$\overline{r_{A/B}}$ هو الخط الواصل بين النقطة A الى النقطة B ، ومركباته هي:

$$x_{A/B} = x_A - x_B \quad , \quad y_{A/B} = y_A - y_B \quad , \quad z_{A/B} = z_A - z_B$$

أي العزم حول النقطة B هو عبارة عن:

$$M_B = \overline{r_{A/B}} \times F = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times F$$

أو باستخدام المحددات

$$M_B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

أما إذا كانت القوة F واقعة في مستوى واحد مثل (xy) ، أي الاحداثي $z=0$ ، ومركبة القوة $F_z = 0$ فإن العزم حول نقطة الاصل (0) هو:

$$M_o = M_z = xF_y - yF_x$$

وفي حالة نقطة اختيارية مثل $B(x_B, y_B)$ فإن العزم M_B هو:

$$M_B = (x_A - x_B)F_y - (y_A - y_B)F_x$$

3.5.4 عزم القوة حول محور

(Moment of a Force about a Given Axis)

بعد دراستنا للمفهوم الاول عزم القوة حول نقطة، وللمجموع الجبري لعزوم القوى، نقوم بدراسة المفهوم الثاني، الذي كما أشرنا يعمل على مساعدتنا على فهم تأثير القوى على الاجسام الجاسئة وتوازنها، الا وهو عزم القوة حول محور. لناخذ القوة F التي تؤثر على جسم جاسئ في نقطة A . أن عزم هذه القوة حول نقطة O يمكن الحصول عليه من خلال العلاقة:

$$\overline{M_o} = \overline{r} \times \overline{F} \dots\dots\dots(10.4)$$

كما هو مبين في الشكل (8.4) ولنفرض أن الخط OL هو محور يمر خلال النقطة O .

نقوم الان بتعريف عزم القوة F حول المحور (OL) M_{OL} على أنه مسقط العزم M_o على المحور (OL) ونرمز له بالرمز (OC) كما هو مبين في الشكل (8.4). أن متجه الوحدة على طول الخط OL يرمز له بالرمز λ وباستخدام العلاقات السابقة وحاصل الضرب القياسي والمتجهي يمكننا كتابة العلاقة بالنسبة لعزم القوة حول المحور كمايلي:

$$M_{OL} = \lambda M_o = \lambda(r \times F) \dots\dots\dots(11.4)$$

حيث أن:-

M_{OL} - عزم القوة F حول المحور OL .

M_o - عزم القوة F حول النقطة O .

r - متجه الموضع وهو الخط الواصل بين النقطة A إلى نقطة O .

λ - متجه الوحدة على طول المحور OL .

كما يمكن أيجاد العزم M_{OL} باستخدام المحددات حيث:

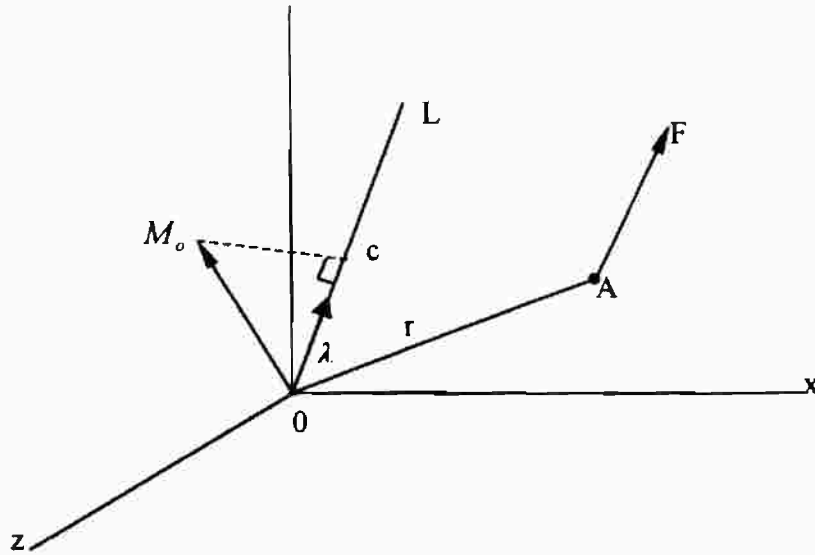
$$M_{OL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \dots\dots\dots(12.4)$$

حيث أن:

$\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$: عبارة عن اتجاه جيب L للمحور $0L$.

F_x, F_y, F_z : مركبات القوة F على المحاور الكارتيزية الثلاث.

x, y, z : أحداثيات التغيرات بين $0, A$.



الشكل (8.4)

أن المعنى الفيزيائي لعزم القوة F حول المحور $0L$ يظهر بشكل افضل اذا قمنا بتحليل القوة F إلى مركباتها الافقية و الرأسية (حسب قاعدة متوازي الاضلاع) F_1, F_2 كما هو مبين في الشكل (9.4). حيث أن F_1 تكون موازية للمحور $0L$ ، و F_2 تقع في المستوى (P) العمودي على المحور $0L$.

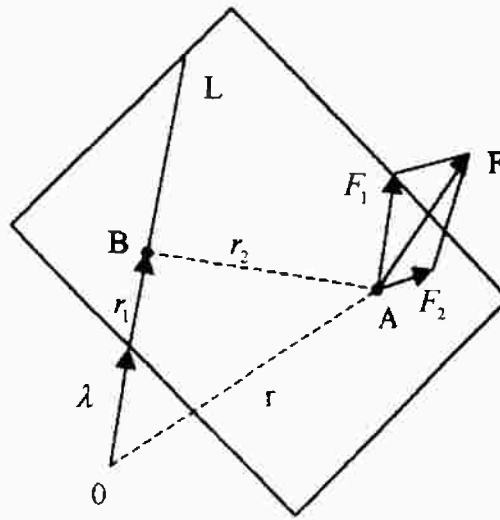
كما نقوم بتحليل متجه الموضع r إلى مركباته بنفس الطريقة إلى r_1, r_2 . وباستخدام هذه المركبات وطريقة التحليل نستطيع كتابة صيغة عزم القوة حول محور كمايلي:

$$M_{0L} = \lambda[(r_1 + r_2) \times (F_1 + F_2)] \\ = \lambda(r_1 \times F_1) + \lambda(r_1 \times F_2) + \lambda(r_2 \times F_1) + \lambda(r_2 \times F_2)$$

نلاحظ بان حاصل الضرب للحدود الثلاث الاولى سما عدا الحد الاخير الرابع - يكون مساوياً للصفر حيث أنها تتضمن متجهات متوازية وبذلك نحصل على:-

$$M_{0L} = \lambda(r_2 \times F_2) \dots \dots \dots (13.4)$$

أن حاصل الضرب المتجهي $(r_2 \times F_2)$ عمودي على المستوى P ويمثل عزم المركبة F_2 حول نقطة (B) نقطة تقاطع المحور OL مع المستوى P . لذلك فإن حاصل الضرب القياسي (M_{OL}) سوف يكون موجب إذا كان $(r_2 \times F_2)$ والمحور OL يكون لهما نفس السلوك. ويكون سالباً إذا كان ذو حالات أخرى. حيث أن F_2 تعمل على دوران الجسم الجاسئ حول المحور OL أما القوة F_1 فإنها تعمل على انتقال النقطة A موازية للمحور لأن المركبة F_1 موازية لمحور OL وعلى هذا فإن عزم القوة F يقدر بعزم المركبة F_2 حول هذا المحور وبناء على ذلك نستطيع القول أن عزم القوة F حول محور مثل OL هو عبارة عن مقياس دوران هذه القوة حول محور الثابت OL ، والتي تساهم في الحركة الدورانية للجسم الجاسئ حول هذا المحور.

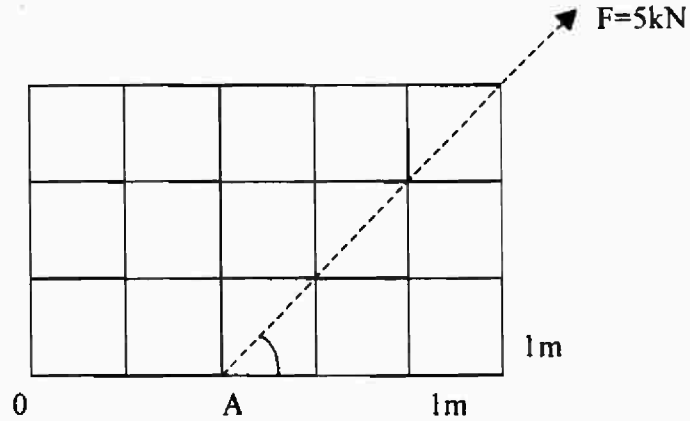


الشكل (9.4)

يلاحظ مما سبق أن عزم قوة ما حول محور موازي لها أو يقطعها في نقطة يساوي الصفر.

مثال (1.4)

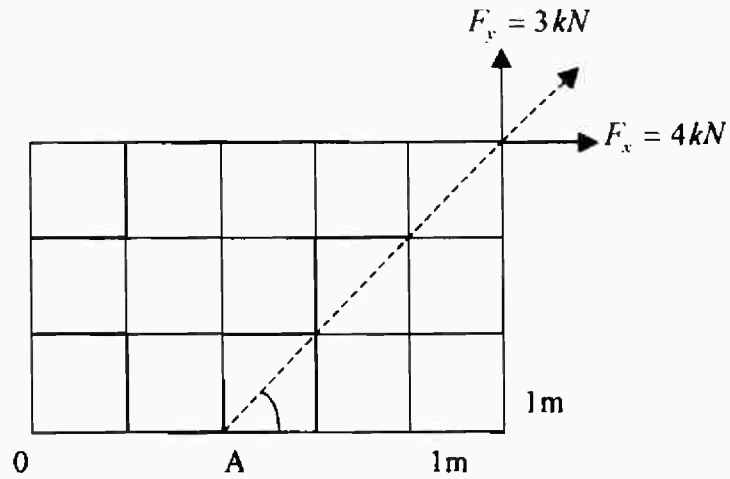
أوجد عزم القوة $F=5kN$ ، حول النقطة 0 كما هو مبين في الشكل (10.4).



الشكل (10.4)

الحل:--

نلاحظ أن القوة F لا تقع في مستوى عمودي على محور العزم، لذا يتوجب علينا تحليل القوة F إلى مركباتها الأفقية والعمودية F_x ، F_y كما هو مبين في الشكل (11.4).



الشكل (11.4)

$$F_x = F \cos \theta = 5 \left(\frac{4}{5} \right) = 4 \text{ kN}$$

$$F_y = F \sin \theta = 5 \left(\frac{3}{5} \right) = 3 \text{ kN}$$

وحسب نظرية فارينغتون فإن عزم القوة F حول النقطة O يساوي المجموع الجبري لعزوم مركباتها حول نفس النقطة حيث:

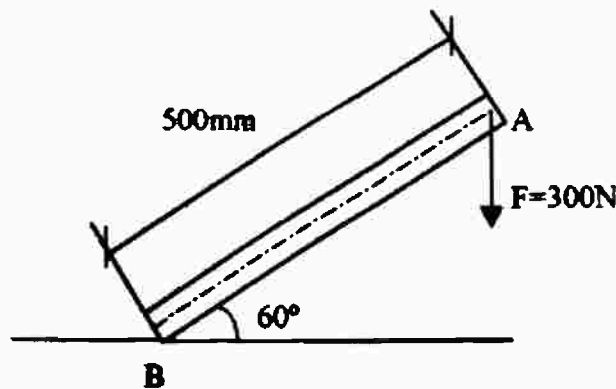
$$\begin{aligned} \sum M_O^+ &= F_x d_1 + F_y d_2 \\ &= 4(3) + 3(6) \\ &= 12 + 18 \\ &= 40 \text{ kNm} \end{aligned}$$

يلاحظ أن إشارة عزم القوة F موجب وذلك يعني أن عزم القوة F حول النقطة O بعكس اتجاه عقارب الساعة كما هو مبين في الشكل (11.4).

مثال (2.4)

في الشكل (12.4) أوجد ما يلي:

1. عزم القوة F حول النقطة B .
2. قيمة القوة الاقوية F الموضوعة في النقطة A والتي بموجبها نحصل على نفس قيمة العزم.
3. أصغر قوة نقوم بوضعها في نقطة A والتي بموجبها نحصل على نفس قيمة العزم في نقطة B .
4. كم بعد قوة مقدارها 750 N عمودية للحصول على نفس قيمة العزم.



الشكل (11.4)

الحل:

1. نقوم بتحويل القياس الى المتر حتى يتم الحصول على عزم بوحدة N.m.

عزم القوة F حول النقطة B يمكن أيجاده باستخدام العلاقة التالية:

$$M_B = F.d$$

حيث أن d هي المسافة العمودية بين خط تأثير القوة F والنقطة المراد إيجاد العزم حولها. إذا d تساوي:

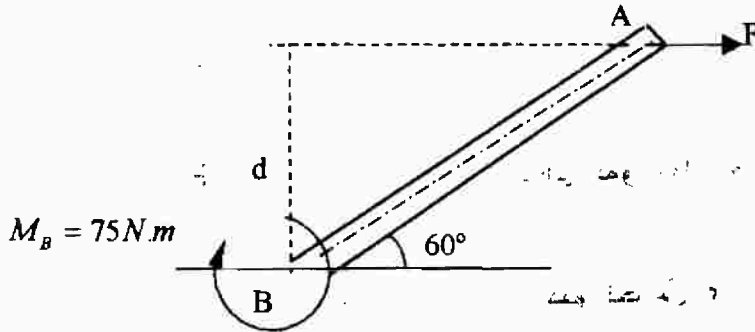
$$d = 0,5(m) \cdot \cos 60 - 0,25m$$

$$M_B = 300(N) \cdot 0,25m = -75(N.m)$$

ومنه:

واتجاه العزم M_B يتجه باتجاه عمودي على الورقة وداخل الورقة أي الاتجاه سالب (مع دوران عقارب الساعة).

2. الشكل (12.4) يبين القوة الأفقية الموضوعة في النقطة A والتي يمكن الحصول على قيمتها باستخدام العلاقة نفسها حيث:



الشكل (12.4)

$$M_B = F.d$$

لكن d المسافة العمودية (ذراع القوة F) بالنسبة لوضع القوة الأفقي ميبين في الشكل (12.4) ويساوي:

$$d = 0,5 \cdot \sin 60 = 0,433m$$

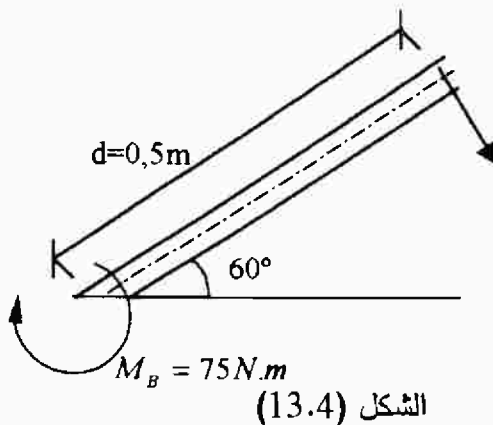
$$75(N.m) = F \cdot 0,433m$$

وبالتعويض في العلاقة السابقة:

ومنه:

$$F = \frac{75(N.m)}{0,433(m)} = 173.2N$$

3. نحصل على أصغر قوة موضوعة في النقطة (A) عندما تكون d أكبر ما يمكن. حيث نلاحظ أن d أكبر ما يمكن عندما تكون مساوية 0,5m. الشكل (13.4) يوضح ذلك حيث:



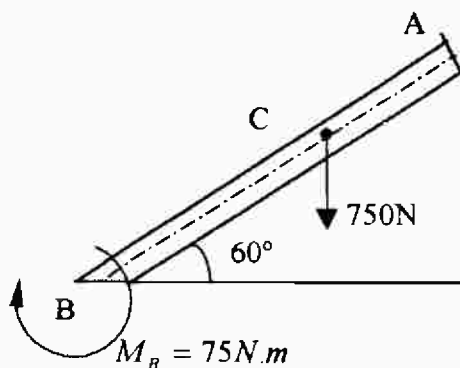
$$M_B = F d$$

$$75(N.m) = F \cdot 0,5(m)$$

ومنه:

$$F = \frac{75(N.m)}{0,5(m)} = 150N$$

4. نقوم بوضع القوة $F=750N$ في نقطة اختيارية مثل C كما هو مبين في الشكل (14.4) وباستخدام نفس العلاقة نحصل على:



$$M_B = F d$$

$$75(N.m) = 750.d$$

ومنه:

$$d = \frac{75}{750} = 0,1m$$

لكن d بالنسبة لوضع القوة العمودي هي:

$$d = BC \cdot \cos 60^\circ$$

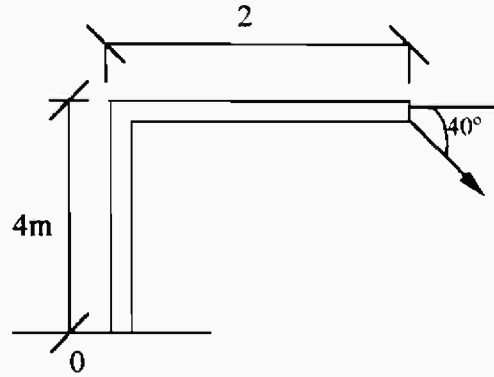
$$0,1 = BC \cdot 0,5$$

$$BC = \frac{0,1}{0,5} = 0,2m$$

ومنه:

مثال (3.4)

أوجد عزم القوة F حول النقطة O كما هو مبين في الشكل (15.4).



الشكل (15.4)

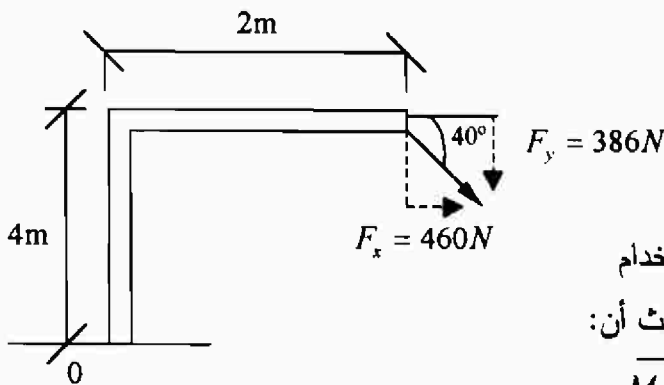
الحل:

نقوم بتحليل القوة أولاً إلى مركباتها الأفقية F_x ، والعمودية F_y حيث:

$$F_x = 600 \sin 40^\circ = 460 \text{ N} \rightarrow$$

$$F_y = 600 \cos 40^\circ = 386 \text{ N} \downarrow$$

الشكل (16.4) يوضح تحليل القوة $F=600\text{N}$ إلى مركباتها.



نقوم الآن بإيجاد العزم باستخدام

ضرب الكميات المتجهي حيث أن:

$$\overline{M_o} = \overline{r} \times \overline{F}$$

شكل (16.4)

حيث أن:-

$$\overline{r} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$$

$$\overline{F} = 460\mathbf{i} - 386\mathbf{j}$$

ومنه وبالتعويض:

$$\begin{aligned}M_o &= (2j + 4j) \times (460i - 386j) \\&= 0 + 722k - (-1840k) \\&= +2612k \text{ N.m}\end{aligned}$$

أما قيمة هذا العزم فيمكن أيجاده باستخدام العلاقة

$$|M_o| = F_x d_1 + F_y d_2$$

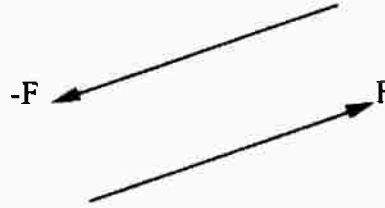
$$|M_o| = 460 \times 2 + 382.2 = 2612 \text{ N.m}$$

وما حصلنا عليه هو القيمة القياسية لعزم القوة $M_o = 2612 \text{ N.m}$ أما اتجاه هذا العزم فقد حصلنا عليه بواسطة ضرب الكميات المتجه F القوة و r متجه الموضع.

(Moment of Couple)

4.5.4 عزم الازدواج

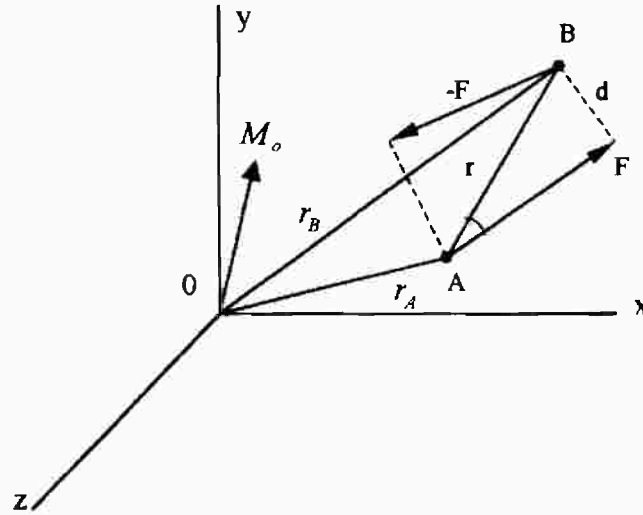
ينشأ الازدواج (Couple) عن قوتين متوازيتين ومتساويتين في المقدار ومتعاكستين في الاتجاه وخطوط عمليهما ليستا على استقامة واحدة كما هو مبين في الشكل (17.4). أن العزم الناشئ عن هاتين القوتين يسمى بعزم الازدواج (Moment of Couple) الذي له خصائص هامة وفريدة تطبيقية في علم الميكانيك الهندسي.



الشكل (17.4) قوى الازدواج

إذا أخذنا في الاعتبار أن القوتين متساويتين في المقدار ومتوازيتين ومتعاكستين في الاتجاه مثل $F, -F$ فإنه من الواضح أن محصلة هاتين القوتين أو مركباتها في أي اتجاه يساوي الصفر، أما تأثيرهما فيكون دافعا لاحداث دوران في الجسم الذي تؤثران عليه أي بمعنى آخر محصلة العزوم حول نقطة معينة لا يساوي الصفر وذلك لان هاتين القوتين تعملان على تدوير الجسم.

لنفرض لدينا قوتين مثل $F, -F$ متساويتين في المقدار ومتوازيتين ومتعاكستين في الاتجاه والمطلوب إيجاد مجموع العزوم لهاتين القوتين حول نقطة معينة مثل نقطة 0 كما هو مبين في الشكل (18.4).



الشكل (18.4)

أن مجموع العزوم للقوتين $F, -F$ حول النقطة 0 يمكن الحصول عليه كما يلي:

$$\vec{r}_A \times \vec{F} + \vec{r}_B \times (-\vec{F}) = (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \times \vec{F}$$

حيث أن $(r_A - r_B)$ يساوي (r) متجه الموضع بين نقطتي تأثير القوتين $F, -F$.

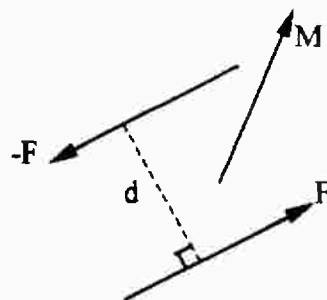
وبناء على ذلك نجد أن مجموع العزوم حول النقطة 0 يصبح:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \dots\dots\dots (14.4)$$

حيث: $\vec{M}$ يطلق عليه عزم الازدواج وهو متجه عمودي على المستوى الذي يحوي القوتين $F, -F$ أما بالنسبة لمقدار هذا العزم.

$$M = r F \sin \theta = F d \dots\dots\dots (15.4)$$

حيث أن d : هي المسافة العمودية بين خطي تأثير القوتين $F, -F$ كما هو مبين في الشكل (19.4).



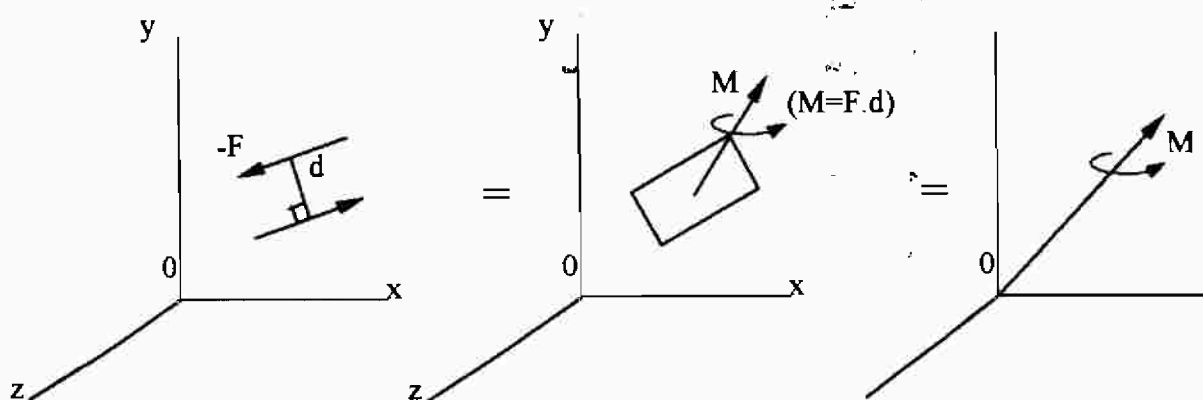
الشكل (19.4)

أن مقدار عزم الازدواج هو عبارة عن المجموع الجبري لعزوم القوتين F , $-F$ حول أي نقطة أو محور وهو متجه عمودي حر. وله نفس وحدات العزم لأنه ينتج عن حاصل ضرب القوة والمسافة فتكون وحدته، $(N.m)$.

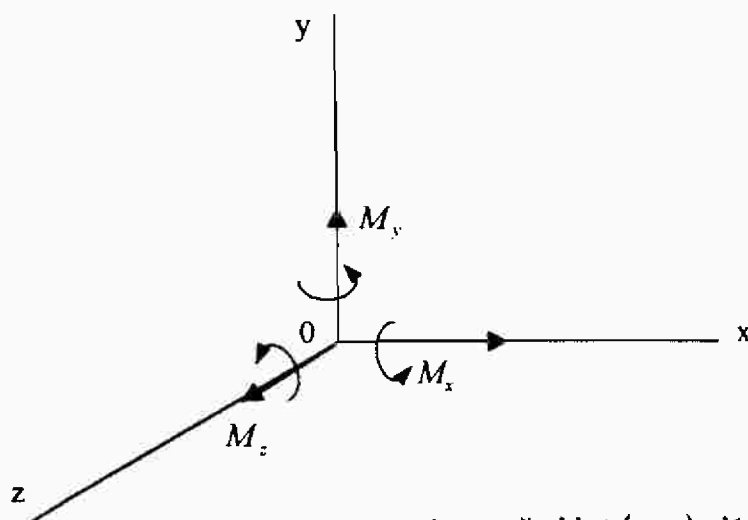
أن قيمة عزم الازدواج لا تعتمد على نقطة 0 نقطة الاصل وذلك لأنه كما أشرنا متجه حر فلو كانت النقطة 0 نقطة أخرى لكانت النتيجة نفسها.

كما يمكن نقله الى مستو مواز للمستوى الذي يحويه أو تدويره في نفس المستوي أو تغيير قيمتي F و d بحيث تكون قيمته ثابتة.

المزدوجات (Couples) يمكن تمثيلها بمتجهات كما هو مبين في الشكل (20.4) كما يمكن تحليلها الى مركبات متجه أيضا مؤثرة على المحاور الكارتيذية الثلاث M_x, M_y, M_z تمثل المستويات xy, xz, yz على التوالي كما هو مبين في الشكل (21.4).



الشكل (20.4) تمثيل المزدوجات



الشكل (21.4) تحليل المزدوجات

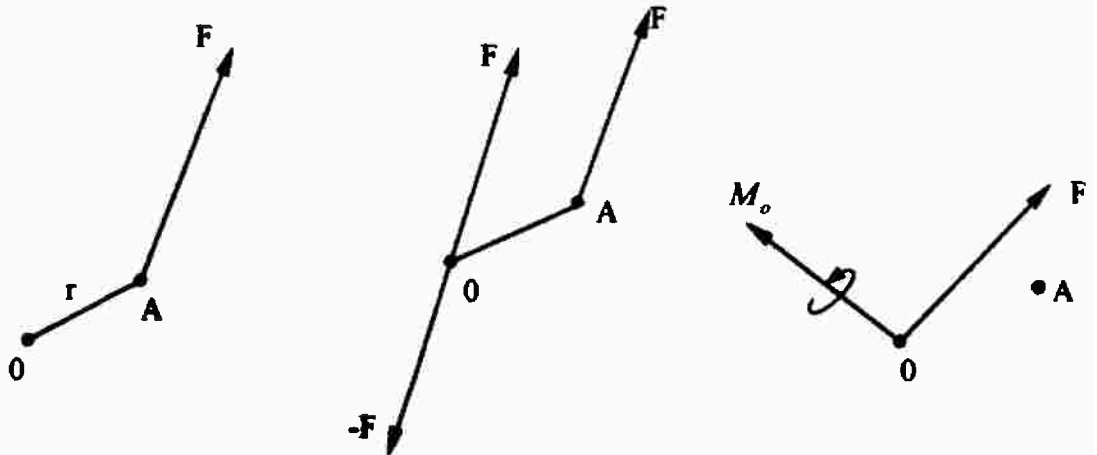
نلاحظ من الشكل (20.4) أن المزدوجات تمتلك نفس العزم سواء كانت في نفس المستوى أو في مستويات متوازية وتعتبر متكافئة لذلك لا حاجة لرسم القوى السولدة للمزدوج نفسه دائماً وإنما كفاية أن نرسم سهماً مساوياً بالقيمة والاتجاه لذلك المزدوج. وكما أشرنا سابقاً بأنه متجه حر لذلك عادة ما نختار نقطة تأثيره في نقطة الاصل 0.

5.5.4 تحليل القوة الى قوة ومزدوج

(Resolution of a Force into a Force and Couple)

في كثير من الاحيان وخاصة في بعض المسائل أتران الاجسام نحتاج الى تحويل موقع قوة ما وذلك لدراسة تأثيرها على الجسم الذي تؤثر عليه. يمكننا القيام بذلك بإضافة قوتين متساويتين في المقدار ومتعاكستين في الاتجاه ولهما نفس خط التأثير في موقع القوة الجديدة كما هو مبين في الشكل (22.4)، حيث يتشكل لدينا أزواج (مزدوج) من القوة الاصلية وإحدى القوتين المضافتين، وقوة واحدة تعمل في الموقع الجديد وبهذا نكون قد حللنا القوة الى نظام قوة ومزدوج.

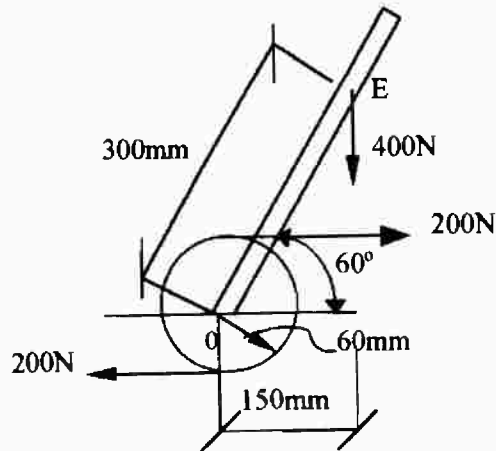
ولتوضيح ذلك نفرض أن قوة مثل $\vec{F}$ تؤثر على جسم جاسئ في نقطة A، فإنه من الممكن تحريكها الى نقطة اختيارية مثل (0)، شرط إضافة مزدوج له عزم مساوياً الى عزم القوة F حول النقطة (0) وهو (M_o) عمودي على المستوى الحاوي على F, r . ولأن M_o هو متجه حر كما أشرنا سابقاً فيمكن أن نضعه في أي مكان من الجسم الجاسئ. ولكننا عادة ما نضعه في نقطة (0) جنباً الى جنب مع القوة F وهذا الجمع بين القوة والمزدوج الذي حصلنا عليه يسمى نظام القوة-المزدوج (Force-Couple System). أن الشكل (22.4) يوضح كيفية الحصول على ذلك.



الشكل (22.4)

مثال (4.4)

عوض عن القوة والمزدوج في الشكل (23.4) بقوة واحدة مكافئة موضوعة على الذراع. وأوجد المسافة من المسند 0 الى نقطة تأثير هذه القوة المكافئة.



الشكل (23.4)

الحل:-

الخطوة الاولى:-

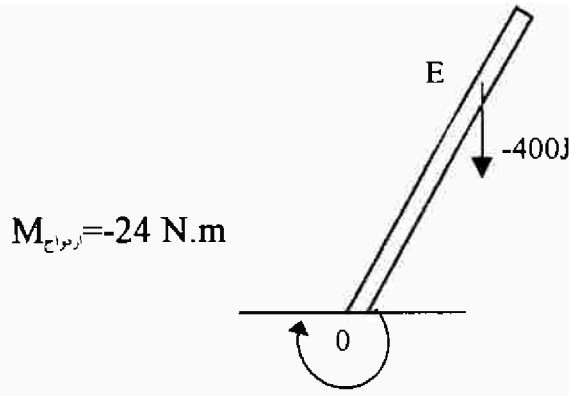
نقوم أولاً بإيجاد الازدواج الناتج من المزدوج للقوة 200N (مع التحويل من المليمتر الى المتر) حيث أن:

$$M_{\text{ازدواج}} = F \cdot d$$

حيث d:- المسافة العمودية بين خطي تأثير القوتين

$$\begin{aligned} M_{\text{ازدواج}} &= 200(0,06+0,06) \\ &= -24 \text{ N.m} \end{aligned}$$

كما هو مبين في الشكل (24.4)



الشكل (24.4)

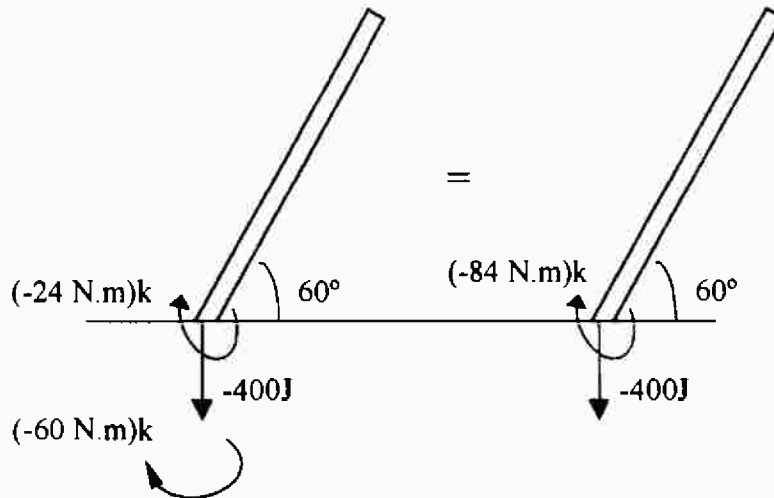
الخطوة الثانية:-

نقوم بنقل القوة (-400J) من النقطة E إلى النقطة 0 وذلك عن طريق إضافة قوتين متساويتين في المقدار ومتعاكستين في الاتجاه ولهما نفس خط التأثير حيث يتشكل لدينا أزواج (مزدوج) من القوة الأصلية (-400J) وأحدى هاتين القوتين المضافتين، وقوة واحدة تعمل في الموقع الجديد.

أي بمعنى أبسط نحرك القوة (-400J) من النقطة (E) إلى النقطة (0) ونضيف عزم هذه القوة (-400J) حول النقطة 0 كما يلي:

$$\begin{aligned} M_o &= OE \times F = [(0,3 \cos 60^\circ)j + (0,3 \sin 60^\circ)i] \times (-400J) \\ &= (0,15j + 0,26J) \times (-400J) \\ &= -60k \end{aligned}$$

وتصبح المنظومة كما هو موضح في الشكل (25.4).



الشكل (25.4)

حيث قمنا بإضافة العزم (-60 k) الى العزم (-24 k) الناتج من المزدوج 200N لنحصل على:-

$$(-24 \text{ N.m})\mathbf{k} - (60 \text{ N.m})\mathbf{k} = (-84 \text{ N.m})\mathbf{k}$$

وهذا العزم $(-84 \text{ N.m})\mathbf{k}$ يمكن حذفه بوضع القوة (-400J) في نقطة مثل C حسب الشرط التالي:

$$(-84 \text{ N.m})\mathbf{k} = OC \times F$$

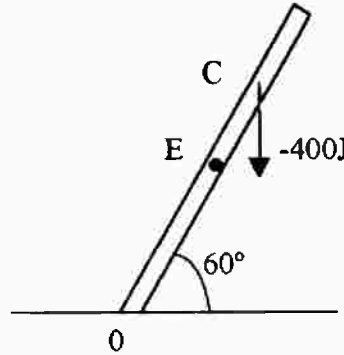
$$(-84 \text{ N.m})\mathbf{k} = [OC \cos 60^\circ \mathbf{i} + OC \sin 60^\circ \mathbf{j}] \times (-400 \text{ J})$$

$$(-84 \text{ N.m})\mathbf{k} = -OC \cos 60^\circ (400)\mathbf{k}$$

ومنه:

$$OC = \frac{(-84 \text{ N.m})\mathbf{k}}{-\cos 60^\circ (400 \text{ N})} = 0,42 \text{ m}$$

إذاً يجب نقل القوة (-400J) الى مسافة مقدارها $0,42\text{m}$ على الذراع حتى نحصل على نظام قوة واحدة مكافئة منا هو مبين في الشكل (26.4).



الشكل (26.4)

وهكذا عوضنا عن القوة والمزدوج في الشكل (23.4) بنظام قوة واحدة موضوعة على الذراع حيث أن المسافة بين المسند O ونقطة تأثير القوة المكافئة (-400J) هي $0,42\text{m}$ وهو ما أردنا الحصول عليه.

6.5.4 تحويل منظومة من القوى الى قوة واحدة ومزدوج (Reduction of System of Force to one Force and Couple)

في هذا الجزء من الباب سنقوم بدراسة كيفية تحويل منظومة من القوى المؤثرة على الجسم الجاسئ في عدة نقاط الى نظام قوة واحدة ومزدوج.

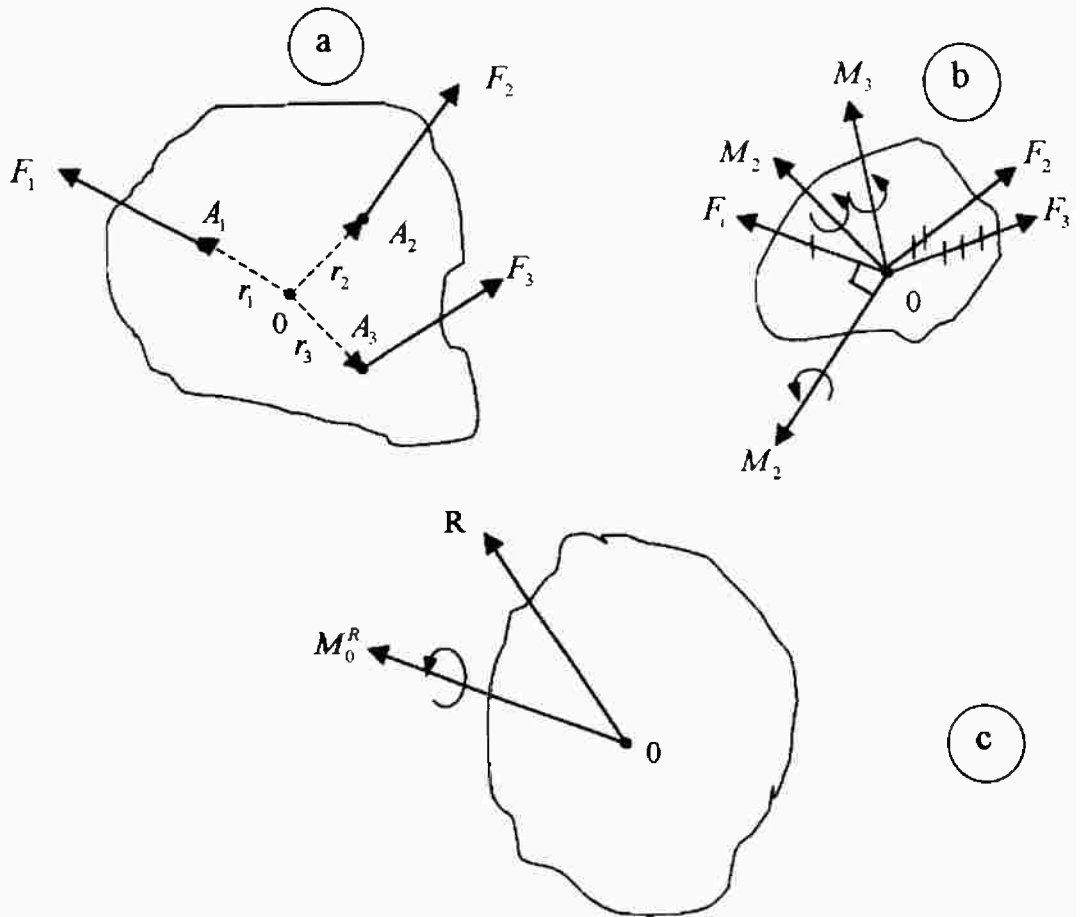
نفرض أن مجموعة من القوى مثل F_1, F_2, F_3 تؤثر على الجسم الجاسئ في نقاط مختلفة مثل A_1, A_2, A_3 كما هو مبين في الشكل (a.27.4).

لتحويل منظومة القوى الى نظام قوة ومزدوج مكافئ نقوم بنقل كل قوة من قوى المنظومة الى نقطة اختيارية مثل (0) مع اضافة عزم تلك القوة حول النقطة (0) ووضعه جنباً الى جنب مع القوة والذي يساوي $(r \times F)$ كما هو مبين في الشكل (b.27.4).

بعد ذلك نقوم بإيجاد محصلة مجموعة القوى المؤثرة في النقطة (0) والتي رمزنا إليها بـ (R) ، بالإضافة الى إيجاد عزم محصلة هذه القوى حول النقطة (0) والذي يرمز له (M_0^R) كما هو مبين في الشكل (c.27.4).

وبذلك نكون قد حولنا منظومة القوى المؤثرة على الجسم الجاسئ في عدة نقاط الى نظام قوة واحدة ومزدوج .

وعليه فإن أي منظومة من القوى مهما تكن معقدة من الممكن تحويلها الى ما يسمى بنظام قوة-مزدوج مكافئ (Equivalent force-couple System) مؤثران في نقطة اختيارية مثل نقطة (0)، وهذا يعتبر من الاساسيات والمميزات الفريدة والهامة في حسابات علم الميكانيكا.



الشكل (27.4)

يمكن التعبير عن نظام القوة-والمزدوج المكافئ باستخدام المعادلات حيث:

$$R = \sum F \dots\dots\dots(16.4)$$

$$M_0^R = \sum M_o = \sum (r \times F) \dots\dots\dots(17.4)$$

حيث أن:

$-R$ هي مجموع القوى (المحصلة).

$-M_0^R$ محصلة العزم للمنظومة.

أما إذا كانت القوى معرفة بدلالة مركباتها الثلاث على المحاور الكارتيزية حيث:

$$F = F_x i + F_y j + F_z k$$

$$r = x i + y j + z k$$

وبالتعويض في المعادلات (16.4) ، (17.4) عن r, F نجد أن:

$$R = R_x i + R_y j + R_z k \dots\dots\dots(18.4)$$

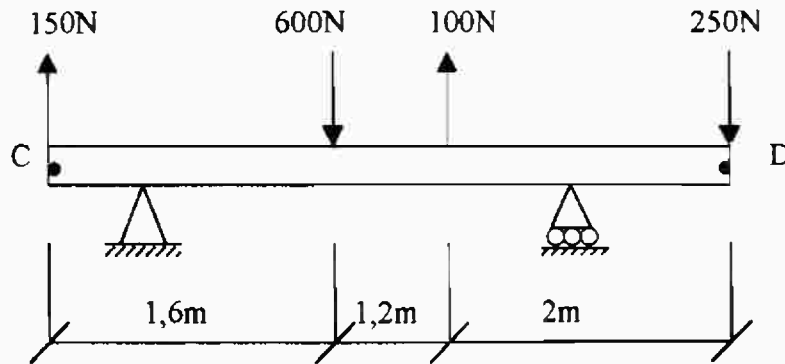
$$M_0^R = M_x^R i + M_y^R j + M_z^R k \dots\dots\dots(19.4)$$

حيث أن R_x, R_y, R_z - تعطي مقياس قابلية منظومة القوى التي تجعل الجسم الجاسئ يتحرك حركة أنتقالية باتجاه المحاور z و y و x .
تمثل مقدار قابلية القوى في النظام لتدوير الجسم حول المحاور z و y و x .

مثال (5.4)

قلل مجموعة القوى المؤثرة على الجسر المبين في الشكل (28.4) إلى:

1. نظام قوة-ومزدوج مكافئ في النقطة C.
2. نظام قوة-ومزدوج مكافئ في النقطة D.
3. إلى قوة واحدة مكافئة.



الشكل (28.4)

الحل:-

1. للحصول على منظومة أو نظام قوة-ومزدوج مكافئ في C نستخدم المعادلتين (15.4) ،

(16.4) حيث:-

$$R = \sum F$$

$$= 150j - 600j + 100j - 250j = -600J$$

$$M_C^R = \sum (r \times F)$$

$$= (1,6i) \times (-600J) + (2,8i) \times (100J) - (4,8i) \times (-250J)$$

$$= -(1880 \text{ N.m})k$$

$$R = -600J \downarrow , M_C^R = -1880k \curvearrowright \quad \text{إذا:}$$

وهكذا حصلنا على نظام قوة-ومزدوج مكافئ في نقطة C كما هو مبين في الشكل

(29.4).



الشكل (29.4)

2. نظام قوة-ومزدوج مكافئ في النقطة D يمكن الحصول عليه بنفس الطريقة حيث:

$$R = \sum F$$

$$= 150J - 600J + 100J - 25J = -600J$$

$$M_D^R = \sum (r \times F)$$

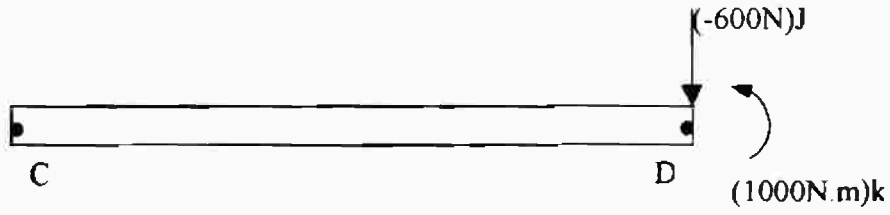
$$= -(2i) \times (100J) + (3,2i) \times (-600J) - (4,8i) \times (150J)$$

$$= +(1000 \text{ N.m})k$$

إذا

$$R = -600J \downarrow , M_D^R = 1000k \curvearrowright$$

أن نظام قوة - ومزدوج مكافئ في النقطة D ميبين في الشكل (30.4)



الشكل (30.4)

3. قوة واحدة مكافئة يمكن الحصول عليها كما يلي:-

يتم أزاحة المحصلة ($R = -600j$) الى مسافة مجهولة معينة مثل x_i والتي بموجبها نحصل على نفس قيمة العزم ($M_C^R = -1880k$) حيث:

$$\begin{aligned} M_C^R &= r \times R \\ -1880k &= x_i \times (-600j) \\ -1880k &= -x(600)k \end{aligned}$$

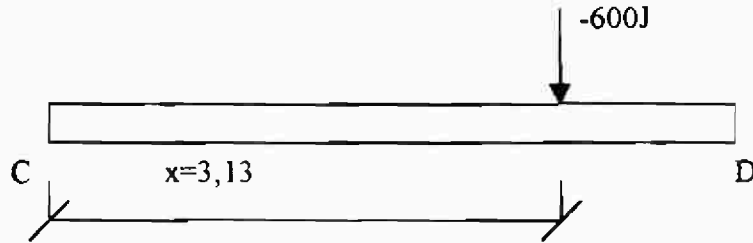
ومنه:

$$x = \frac{1880k(N.m)}{600k(N)} = 3.13m$$

وهكذا حصلنا على نظام قوة واحدة مكافئة:

$$R = -600N \downarrow, \quad x = 3.13$$

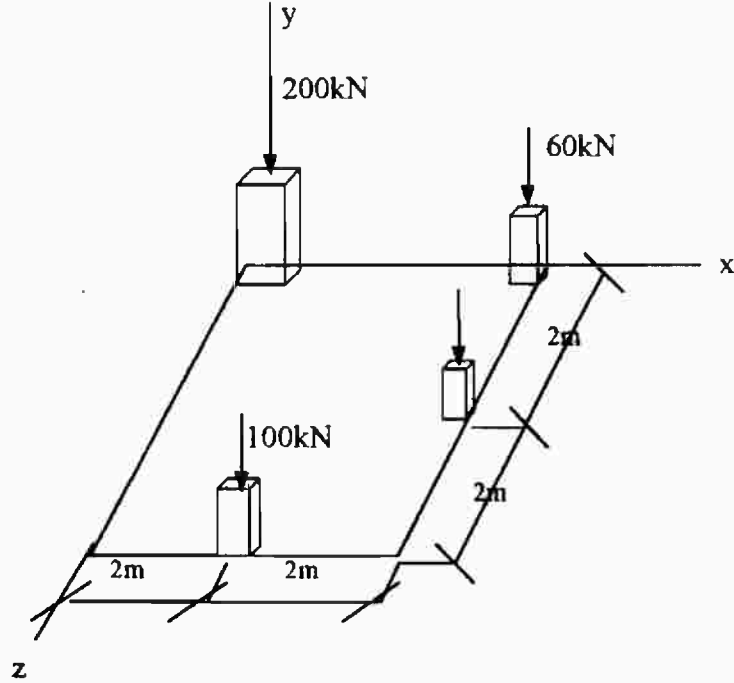
كما هو موضح في الشكل (31.4)



الشكل (31.4)

مثال (6.4)

الشكل (32.4) يبين أساس خرساني مستند عليه أربعة أعمدة. أحسب متجه ونقطة محصلة الأثقال الأربعة المسلطة على الأعمدة.



الشكل (32.4)

الحل:-

لايجاد متجه ونقطة تأثير محصلة الأثقال الأربعة المؤثرة على الأعمدة نقوم كخطوة أولى بتحويل منظومة القوى الأربعة إلى نظام قوة-ومزدوج مكافئ في نقطة (0) باستخدام المعادلتين:

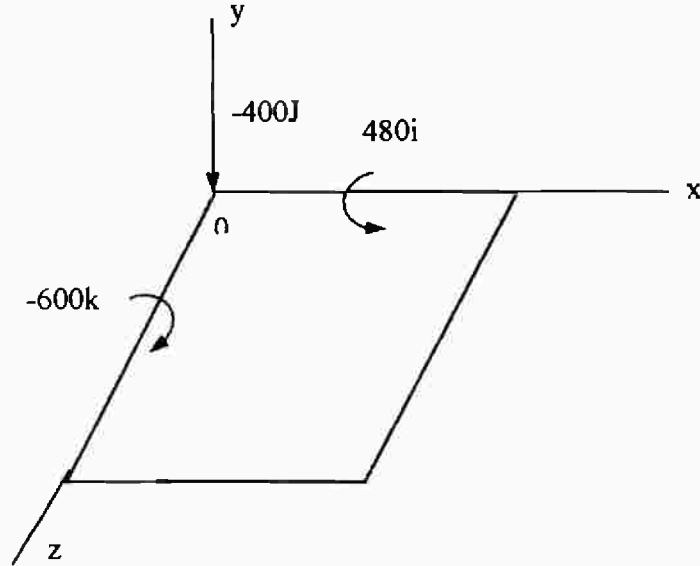
$$R = \sum F$$

$$M_o^R = \sum M_o = \sum (r \times F)$$

ومن الافضل عمل جدول لتسهيل الحل كما يلي:

متجه الموضع $r, (m)$	القوة $F, (kN)$	عزم الازدواج $M_o^R = \sum (r \times F), (N.m)$
0	-200J	0
4i	-60J	-240k
4i+2k	-40J	-160k+80i
2i+4k	-100J	-200k+400i
	$R = \sum F = -400J$	$M_o^R = 480i - 600k$

أن الشكل (33.4) يبين نظام القوة-والمزدوج المكافئ الذي حصلنا عليه في النقطة (0)



الشكل (33.4)

نقوم الآن كخطوة ثانية بتحويل نظام القوة-والمزدوج المكافئ الى قوة واحدة مؤثرة في مستوى الاساس الخرساني في نقطة مثل (C) بحيث نحصل بموجبها على نفس العزم في النقطة (0).

لذلك يجب علينا إيجاد أحداثيات النقطة (C) التي تحقق ذلك حيث:

$$M_o^R = r \times R$$

$$480i - 600k = (xi + zk) \times (-400J)$$

$$480i - 600k = -400 \times k + 400zi$$

ومنه نجد:

$$-400 \times k = -600k$$

$$x = \frac{-600k}{-400k} = 1,5m$$

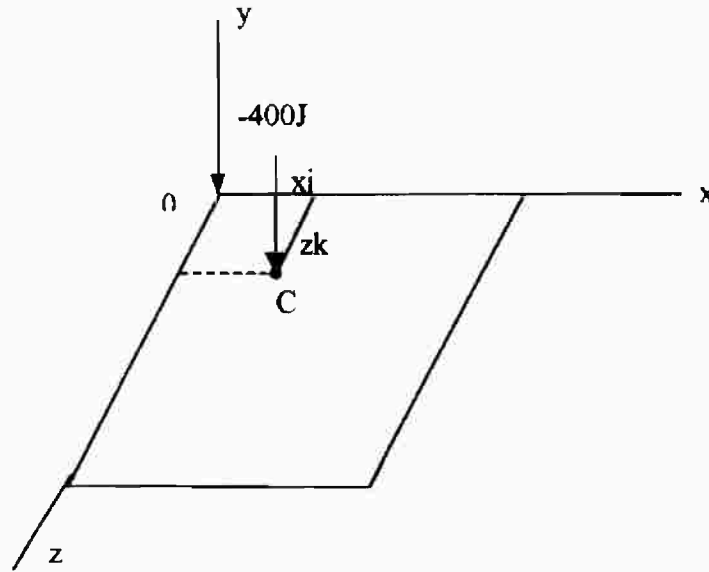
$$400zi = 480iz$$

$$z = \frac{480i}{400i} = 1,2m$$

وبذلك نكون قد حصلنا على نقطة تأثير محصلة الانتقال الاربعة حيث:

$$R = -400J$$

وتؤثر في النقطة $C(1.5,0,1.2)$ كما هو مبين في الشكل (34.4).



الشكل (34.4)

6.4 أتران الاجسام الجاسئة

(Equilibrium of Rigid Bodies)

أن دراسة أتران الاجسام الجاسئة يعتبر من المبادئ الاساسية في علم الاستاتيكا.

ذلك يجب علينا معرفة نوعية القوى المؤثرة على الجسم الجاسئ من قوى عاملة (Acting Forces)، والقوى المعروفة برودود الافعال (Reations) في الرتكزات (الدعائم) والمساند والاتصالات.

أن حل المسائل المتعلقة بتوازن الاجسام الجاسئة يتطلب إنشاء وتوضيح القوى التي تؤثر على هذه الاجسام وتعد هذه الخطوة البداية السليمة والمهمة في حل مسائل الاتزان والتي تعتمد عليها شروط الاتزان الاستاتيكي بعد ذلك، لذلك يتم وضع مخطط الجسم الحر (Free-Body Diagrams) لهذا الجسم المدروس والذي يعتبر تمثلاً تخطيطي للجسم معزولاً عن بقية الاجسام يتضمن كافة القوى التي تؤثر بها الاجسام على الجسم محل الدراسة.

ولغرض رسم تخطيطات الجسم الحر لابد من التعرف على نوع القوة التي تؤثر على الجسم لكافة انواع (الدعائم) المساند والاتصالات. كما يجب تعريف كل قوة بمقدارها المعلوم أو برمز عندما تكون القوة غير معلومة. ويمكن افتراض اتجاه القوى غير المعلوم على أن يصحح هذا الافتراض فيما بعد إذا أظهر أنه غير صحيح.

سنقوم بالتعرف على طرق الارتكاز وردود الافعال في المنشآت ثنائية الابعاد أولاً ومن ثم دراسة شروط الاتزان لهذه المنشآت كما سنقوم بدراسة طرق التثبيت لجسم جاسئ في الفراغ وشروط أترانه وذلك كما أشرنا سابقاً بأن دراسة علم السكون في الفراغ ذي الابعاد الثلاثة تجعل عملية الدراسة أكثر وضوحاً ومنطقية.

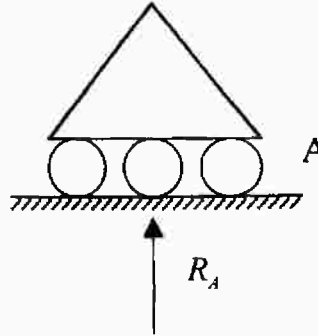
1.6.4 طرق الارتكاز وردود الافعال في مستوى

أي أن الجسم الجاسئ والقوى المؤثرة عليه تكون في مستوى واحد (ثنائي الابعاد)، وبالتالي فإن ردود الافعال التي تجعل هذا الجسم يبقى في موقعه سوف تكون في نفس المستوى.

أن ردود الافعال تتوقف على نوع الارتكاز (الدعائم) والتثبيت (Supports and connection) والتي تقسم الى أنواع مختلفة، ثنائية الابعاد ومنها:-

1. الارتكاز البسيط ويعتبر أبسط انواع الارتكاز، كحالة تلامس الاجسام الملساء، ويكون رد الفعل عمودي على مستوى التلامس، أو عمودي على اتجاه أیه حركة نسبية بينهما مثل: المتدحرجات - مسند متدحرج - (Roller support) ووصلة حبل، وتلامس مع سطح أملس.

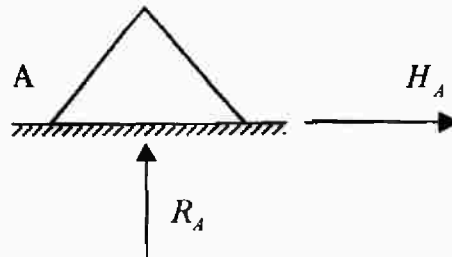
أن الشكل (35.4) يبين المسند المتدحرج أو المختلفة. ونظراً لأن اتجاه رد الفعل في المركز البسيط محدد فهو يعتبر مجهولاً واحداً في معادلات الاتزان.



الشكل (35.4) مسند متدحرج (Roler)

حيث R_A - رد الفعل العمودي في المسند A.

2. الارتكاز المفصلي: المفصل (Hinge) عبارة عن تثبيت نقطة من الجسم بحيث يمكن أن يدور حولها. ورد الفعل في المفصل يكافئ قوة خط عملها مجهول كتلامس جسم مع سطح خشن وعلى ذلك ينطوي رد فعل المفصل على مجهولين هما مقداره وميله أو مركبتيه المتعامدين H_A, R_A كما هو مبين في الشكل (36.4).



الشكل (36.4) مفصل (Hinge)

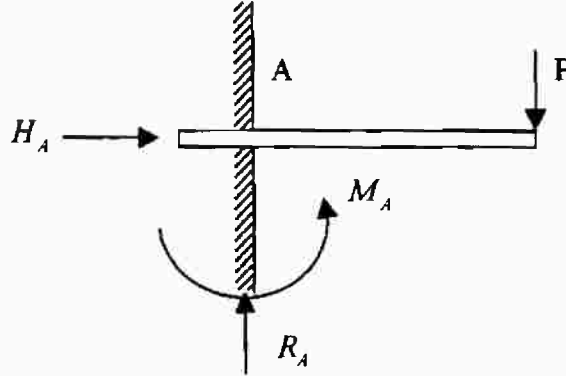
حيث:

H_A - رد الفعل الافقي في المفصل A

R_A - رد الفعل الافقي في المفصل A

3. التثبيت: مسند ثابت أو مثبت (Fixed support)

ويعني منع الحركة سواء خطياً أو دورانياً أي أن رد الفعل يكون مكافئ لقوة وعزم ازدواج، كحامل مثبت، (عمود كهربائي). وعلى هذا يتألف رد فعل التثبيت من مجاهيل ثلاثة هي: M_A, R_A, H_A . كما هو مبين في الشكل (37.4).



الشكل (37.4) مسند ثابت (Fixed support)

حيث:

H_A - رد الفعل الأفقي في المسند الثابت A.

R_A - رد الفعل العمودي في المسند الثابت A.

M_A - عزم التثبيت في المسند A.

2.6.4 شروط أتران الجسم الجاسئ

كما أشرنا في البند السابق انه لدراسة أتران الجسم الجاسئ يستكمل أولاً شكل القوى المؤثرة وهي القوى الخارجية العاملة وردود الافعال الداخلية المجهولة في المراكز والدعائم.

نعلم أن القوى الخارجية المؤثرة على جسم جاسئ ممكن تحويلها الى قوة-ومزدوج يؤثران في نقطة اختيارية مثل 0.

فاذا كانت هذه القوة والمزدوج مساوية للصفر، فإن مجموعة القوى الخارجية تكون منظومة ومساوية للصفر ايضاً، وعندئذ يقال للجسم الجاسئ بأنه متزن أو في حالة أتران استاتيكي.

أي أنه لكي يكون الجسم متزن يجب أن تكون محصلة القوى مساوية للصفر، ومجموع العزوم لهذه القوى حول نقطة معينة مساوية للصفر.

يمكن التعبير عن شروط الاتزان جبرياً باستخدام المعادلات حيث:

$$\sum F_x = 0 \dots\dots\dots(20.4)$$

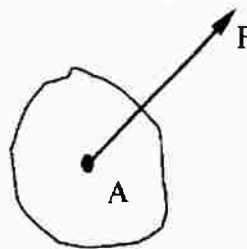
$$\sum F_y = 0 \dots\dots\dots(21.4)$$

$$\sum M_A = 0 \dots\dots\dots(22.4)$$

أن المعادلات المبينة أعلاه تبين أن الجسم الجاسئ يكون في حالة أتران عندما تكون مجوع القوى المؤثرة على المحور (x) مساوية للصفر، ومجموع القوى على محور (y) مساوية للصفر، ومجموع عزوم القوى حول أي نقطة أختيارية من الجسم الجاسئ مثل (A) مساوية للصفر. وهذه الشروط تسمى بشروط الاتزان الاستاتيكي وهي لازمة وكافية للأتران.

وأخيراً يجدر الإشارة الى أن القوى (الحمولات) الخارجية العاملة المؤثرة على الاجسام الجاسئة يمكن أن تكون ذو أشكال مختلفة ومنها:-

1. قوة مركزه في نقطة أو جزء من الجسم الجاسئ مثل القوة F ،،المركزه،، المبينة في الشكل (38.4) والتي تؤثر على الجسم الجاسئ في نقطة A.



الشكل (38.4)

2. القوى (الحمولات) الموزعة ومن بينها نوعان مهمان:-

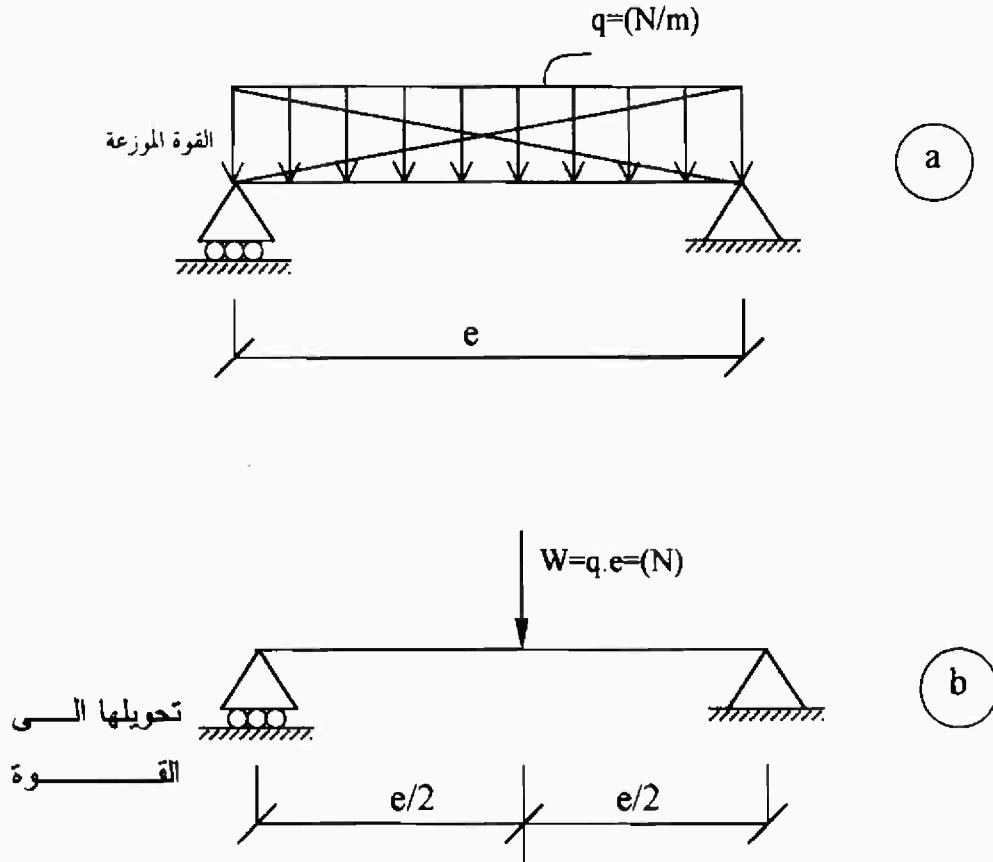
(a) الاحمال الموزعة بانتظام (uniformly distributed load).

(b) الاحمال المتغيرة بانتظام (uniformly varying load)

ويعبر عن هذه القوى والاحمال أعتيادياً بالنيوتن لكل متر طول، ما لم يشار خلافأً لذلك ويرمز لها بالرمز (N/m).

أن النوع الاول وهو الحمل الموزع بانتظام يكون على شكل مستطيل ومن الامثلة على ذلك وزن عتبة مسنده أسناداً بسيطاً كما هو مبين في الشكل (a.39.4) حيث يعبر (W) للعتبة حمولة موزعة بانتظام على المتر الطولي لهذه العتبة.

عند حل المسائل المختلفة ورسم مخططات الاجسام الحرة (F.B.D) يجب علينا تحويل الحمل الموزع بقوة مركزه مكافئة كما هو مبين في الشكل (b.39.4)

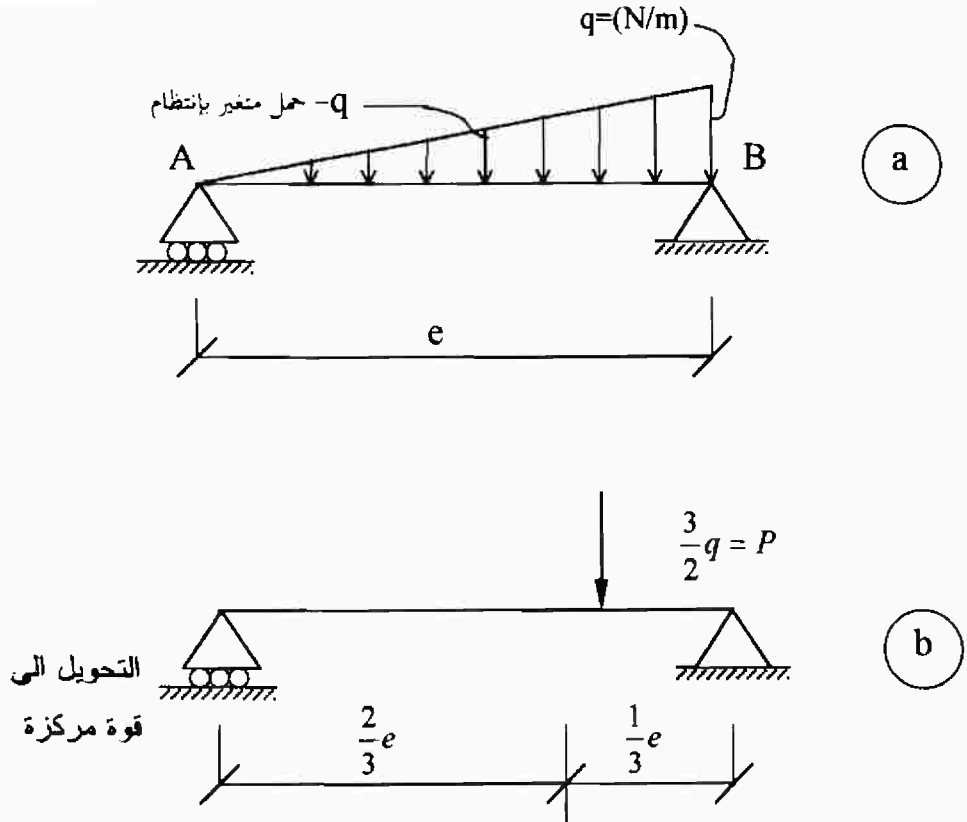


الشكل (39.4)

نلاحظ انه تم تحويل الحمولة الموزعة الى قوة مركزة تؤثر في مركز الثقل بالنسبة للمستطيل أي في منتصفه.

أما النوع الثاني فهو الحمولة الموزعة ,, المتغيرة بانتظام,, وتكون هذه الحمولة على الشكل مثلث كما هو مبين في الشكل (a.40.4) ويجب أن نعوض عنها عند رسم مخطط الجسم الحر بقوة مركزه مكافئة الشكل (b.40.4).

أن الاحمال المتغيرة بانتظام تعمل على الجدران الرأسية والمائلة للخزانات المحتوية على السوائل، كما تعمل أيضا على العتبات والابنية المختلفة.



الشكل (40.4)

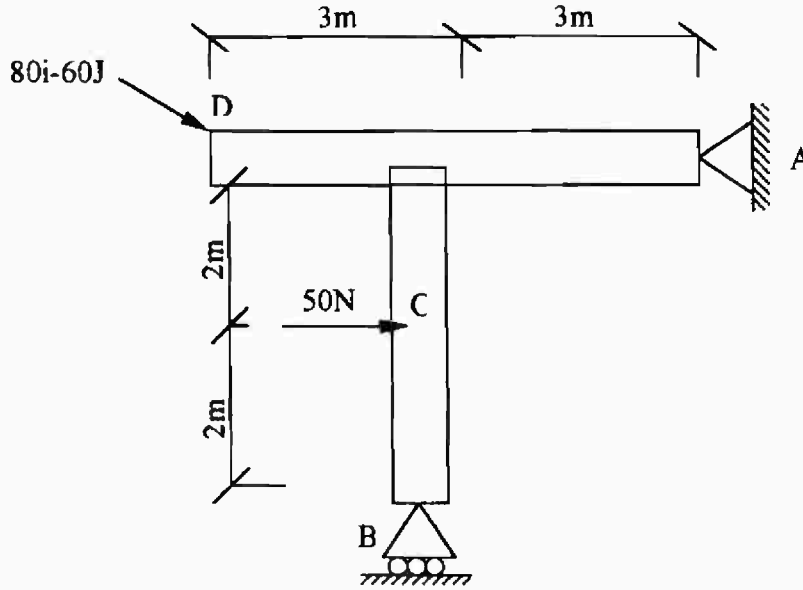
نلاحظ أن الحمل المتغير بانتظام (q) تم استبداله بقوة مكافئة (P) حيث:

$$P = \frac{1}{2} e \cdot q = (N)$$

وهي مساحة مثلث الحمل الذي قاعدته e وارتفاعه q وتؤثر هذه القوة في مركز ثقل المثلث الذي يبعد عن المسند المتدرج A مسافة $\left(\frac{2}{3}e\right)$ وعن المفصل B $\left(\frac{1}{3}e\right)$.
 أن الامثلة ستوضح كيفية استبدال ونحويل هذه الانواع من الاحمال الى قوى مركزة في نقطة واحدة.

مثال (7.4)

في الشكل (41.4) إطار أنشائي مسلط عليه قوتين مركبتين الاول تؤثر في النقطة (C) وتساوي 50N، والثانية معرفة بدلالة المركبات على المحاور الكارتيزية وتساوي (80i-60j) وتؤثر في النقطة (D). أوجد ردود فعل المسند المتدحرج B والمسند المفصلي A على الإطار.



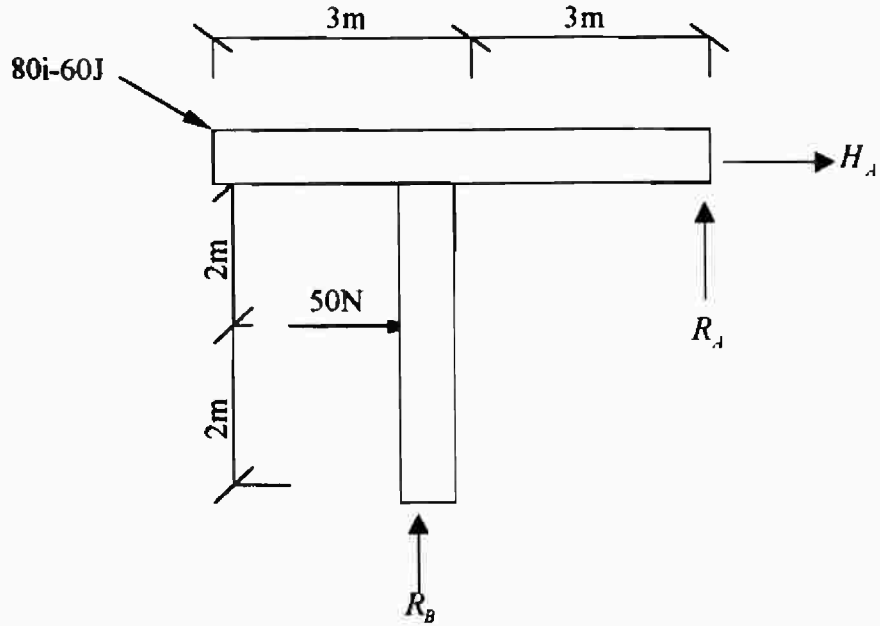
الشكل (41.4)

الحل:

نرسم نخطط الجسم الحر (F.B.D) للإطار موضحاً عليه كافة القوى الخارجية العاملة والداخلية من ردود أفعال كما هو مبين في الشكل (42.4). بالنسبة لرد فعل المسند المتدحرج B فهو قوة عمودية مفردة وتفرض اتجاهها الى أعلى ويرمز لها بالرمز (R_B) . أما رد فعل المسند المفصلي A فيتكون من مركبتين الاولى عمودية الى أعلى (R_A) والثانية أفقية اتجاهها بالاتجاه الموجب لمحور (x) ويرمز لها بالرمز (H_A) .

ولإيجاد ردود الأفعال بعد رسم مخطط الجسم الحر نضع شروط الاتزان الاستاتيكي

الثلاث حيث:



الشكل (42.4) مخطط الجسم الحر للأطوار

$$\sum F_x = \rightarrow = 0; \dots\dots\dots(1)$$

$$80 + 50 + H_A = 0$$

$$H_A = -130 \text{ N} \leftarrow$$

ومنه

إذا رد الفعل الأفقي في المسند (A) يعكس اتجاه المفروض

$$\sum F_y \uparrow = 0; \dots\dots\dots(2)$$

$$R_A + R_B - 60 = 0$$

$$\sum M_A \curvearrowright = 0;$$

$$-R_B(3) + 50(2) + 60(6) = 0 \dots\dots\dots(3)$$

$$R_B = 153,3 \uparrow$$

ومنه نجد:

وبالرجوع الى الشرط الثاني للاتزان وبالتعويض عن قيمة (R_B) نجد رد الفعل R_A حيث:

$$R_A + 153,3 - 60 = 0$$

ومنه:

$$R_A = -93,3 N$$

$$= 93,3 N \downarrow$$

أذا رد الفعل R_A في المسند A يعكس اتجاه أيضا ويعدل على مخطط الجسم الحر. وهكذا حصلنا على ردود الافعال المجهولة الثلاث حيث نلاحظ أن المسائل المتعلقة بإيجاد ردود الافعال تحتاج الى عدم التسرع في الحل وفهم كيفية إيجاد العزوم حول نقطة بدقة وأتقان.

أن الخطوة الأخيرة في الحل هي التأكد من الحل ولذلك تستخدم معادلة المجموع الجبري للقوى بالاتجاه العمودي:

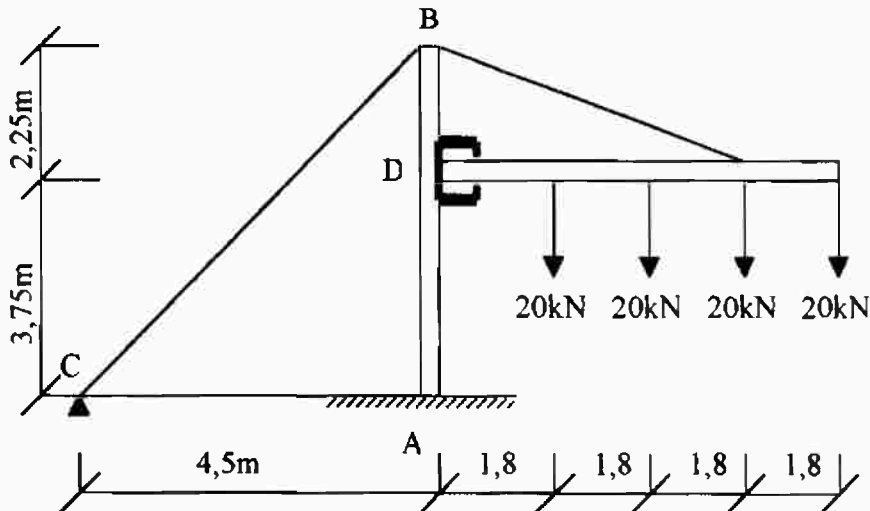
$$\sum F_y = 0;$$

$$R_A + R_B - 60 = 0$$

$$-93,3 + 153,3 - 60 = 0 \quad (Check)$$

مثال (8.4)

الشكل (43.4) هيكل مبین فيه أجزاء لسقف بناية. تؤثر عليه أربعة قوى مركزه مقدار الواحدة منها (20kN) مستقر بواسطة المسند المثبت عند النقطة (A) والسلك BC. إذا كان الشد في السلك BC=150kN. أوجد ردود الافعال في المسند المثبت (الثابت) (A).

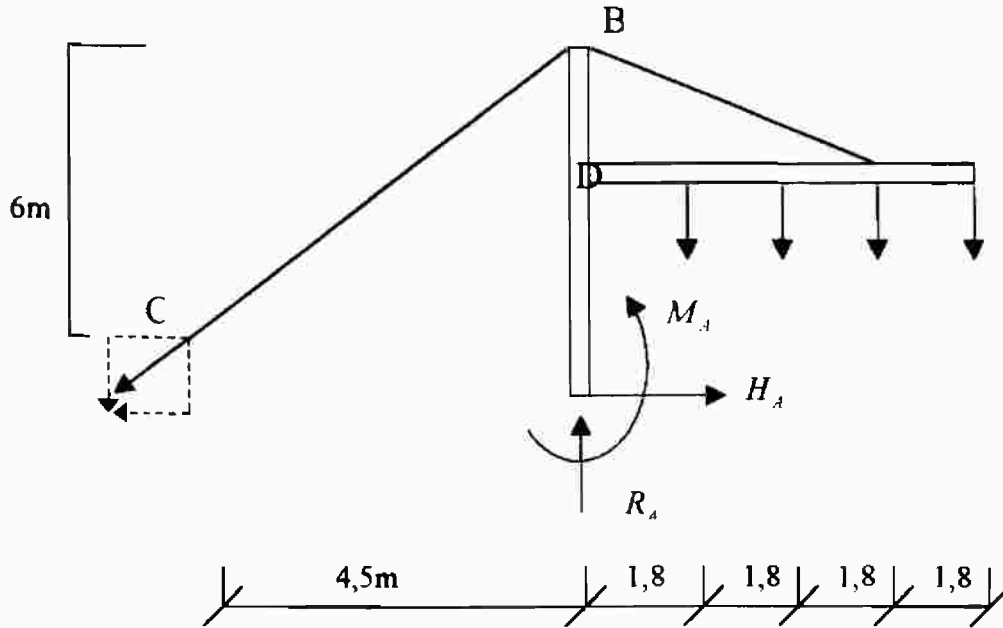


الشكل (43.4)

الحل:

نرسم مخطط الجسم الحر (F.B.D) للهيكل موضعاً عليه كافة القوى من خارجية عاملة وداخلية كردود أفعال وشد في الاسلاك وغيره، وبعد ذلك نضع شروط الاتزان الاستاتيكي الثلاث لأيجاد القيم المجهولة المراد إيجادها. أن مخطط الجسم الحر مبين في الشكل (44.4). حيث نلاحظ أن رد فعل المسند المثبت (الثابت) (Fixed support) يتكون من قوة عمودية R_A وقوة أفقية (H_A) وعزم (M_A) ، وأربعة حمولات خارجية كل منها (20kN) وقوة الشد في السلك $BC=150\text{N}$ والتي يتم تحليلها باستخدام الأبعاد الهندسية (نظرية فيثاغورس) إلى مركبتين أفقية تؤثر على محور (x) وعمودية تؤثر على محور (y) وذلك لأخذها بعين الاعتبار عند وضع شروط الاتزان حيث:

$$BC = \sqrt{(4,5)^2 + (6)^2} = 7,5\text{m}$$



الشكل (44.4) مخطط الجسم الحر (F.B.D)

نضع شروط الاتزان الاستاتيكي الثلاث:

$$\sum F_x \rightarrow = 0 ;$$

$$H_A - \frac{4,5}{7,5}(150) = 0$$

ومنه:

$$H_A = 90 \text{ kN} \rightarrow$$

$$\sum F_y \uparrow = 0;$$

$$R_A - 4(20) - \frac{6}{7.5}(150) = 0;$$

$$R_A = +200 \text{ kN} = 200 \text{ kN} \uparrow$$

$$\sum M_A \uparrow = 0;$$

$$-20(7.2) - 20(5.4) - 20(3.6) - 20(1.8) + \frac{6}{7.5}(150)(4.5) + M_A = 0$$

ومنه نجد:

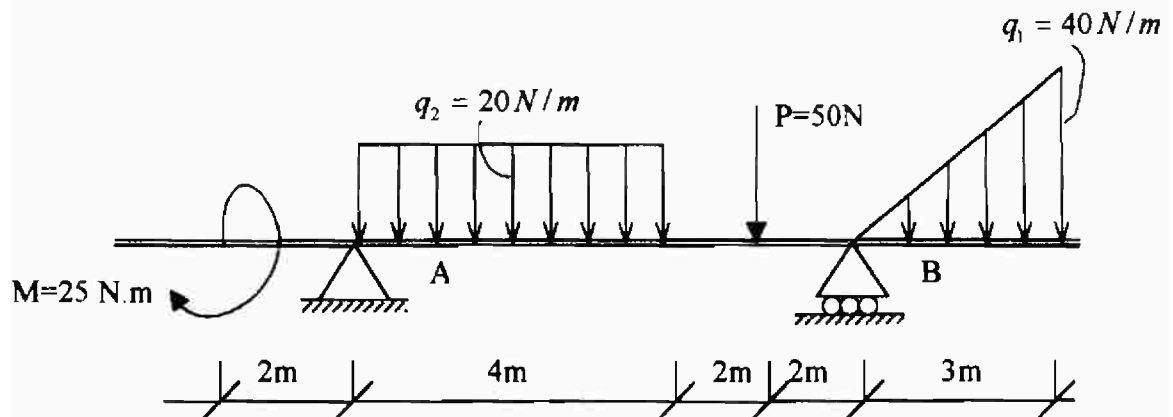
$$M_A = 360 - 540 = -180 \text{ kN.m}$$

$$= 180 \text{ kN} \downarrow$$

حصلنا على قيمة العزم M_A سالبة لذا تعكس أشارته وتعديل على مخطط الجسم الحر. للتأكد من الحل نستخدم معادلة المجموع الجبري للقوى بالاتجاه العمودي والذي يجب أن يساوي الصفر.

مثال (9.4)

الشكل (45.4) يبين عتبة (عارضة) ذات بروز جانبي ومسلط عليها القوة (الحمولة) الموزعة المتغيرة بانتظام $(q_1 = 40 \text{ N/m})$ ، والقوة المركزة $(P=50 \text{ N})$ ، والحمولة الموزعة بانتظام $(q_2 = 20 \text{ N/m})$ ، وعزم ناتج عن أزواج $(M=25 \text{ N.m})$. العتبة مسندة عند النقطة A بمسند مفصلي وعند النقطة B بمسند متدحرج (عجلة). أوجد ردود الافعال عند A ، B على العتبة.



الشكل (45.4)

الحل:

نرسم مخطط الجسم الحر شكل (46.4) للعتبة موضعاً عليه كافة القوى المؤثرة حيث نقوم بتحويل الحمولات الموزعة (q_2, q_1) الى قوى مركز تؤثر في نقطة واحدة حتى نستطيع وضع شروط الاتزان الاستاتيكي.

يؤخذ الحمل الموزع بانتظام على شكل مستطيل q_2 كقوة عمودية مفردة في مركز ثقل الحمل (أي في منتصف المستطيل)، وتساوي:

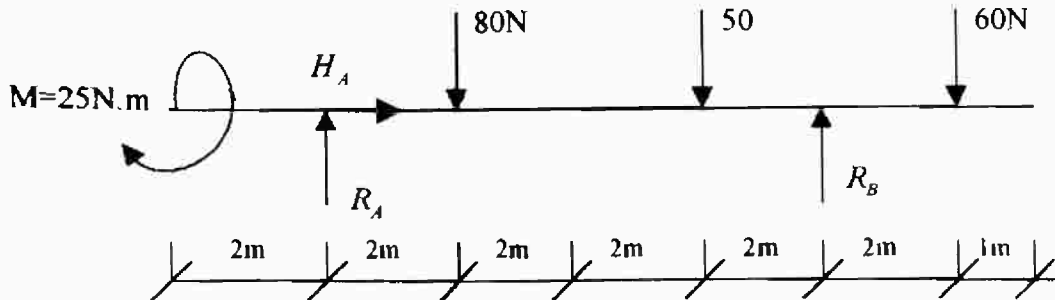
$$q_2 \cdot 2e = 20(N/m) \cdot 4(m) = 80N$$

أما بالنسبة للحمولة المتغيرة بانتظام (على شكل مثلث) تستبدل بقوة مفردة تساوي:

$$\frac{3}{2}q_1 = \frac{3}{2} \times 40 = 60N$$

وهي مساحة مثلث الحمل الذي قاعدته $(3m)$ وأرتفاعه $40N/m$ وتؤثر هذه القوة في مركز ثقل المثلث الذي يبعد $(2m)$ من المسند المتدحرج B.

العزم $M=25 N.m$ يظهر على مخطط الجسم الحر كما هو ويدخل في معادلة العزم الشرط الثالث للاتزان حسب أشارته إذا كان باتجاه عقارب الساعة سالب، وإذا كان بعكس عقارب الساعة موجب.



الشكل (46.4) مخطط الجسم الحر (F.B.D)

نقوم الآن بوضع شروط الاتزان الاستاتيكي الثلاث لأيجاد ردود الافعال المجهولة حيث:-

$$\sum F_x \longrightarrow = 0 ;$$

$$H_A = 0 \dots\dots\dots(1)$$

$$\sum F_y \uparrow = 0 ;$$

$$R_A + R_B - 80 - 50 - 60 = 0 \dots\dots\dots(2)$$

$$\sum M_A \quad + = 0 ;$$

$$- 60(10) + R_B(8) - 50(6) - 80(2) - 25 = 0 \dots\dots\dots(3)$$

ومنه نجد رد الفعل (R_B) :

$$8 R_B = 600 + 300 + 160 + 25$$

$$R_B = \frac{600 + 300 + 160 + 25}{8} = 135,6 N$$

وبالرجوع الى معادلة رقم (2) نجد قيمة رد الفعل R_A :

$$R_A + 135,6 - 80 - 50 - 60 = 0$$

$$R_A = 54,4 N$$

للتأكد من الحل نستخدم معادلة المجموع الجبري للقوى بالاتجاه العمودي أو نجد عزوم القوى وردود الافعال حول نقطة اختيارية أخرى مثل B حيث يجب أن يكون مجموع العزوم مساوياً للصفر.

3.6.4 طرق التثبيت وردود الافعال في الفراغ

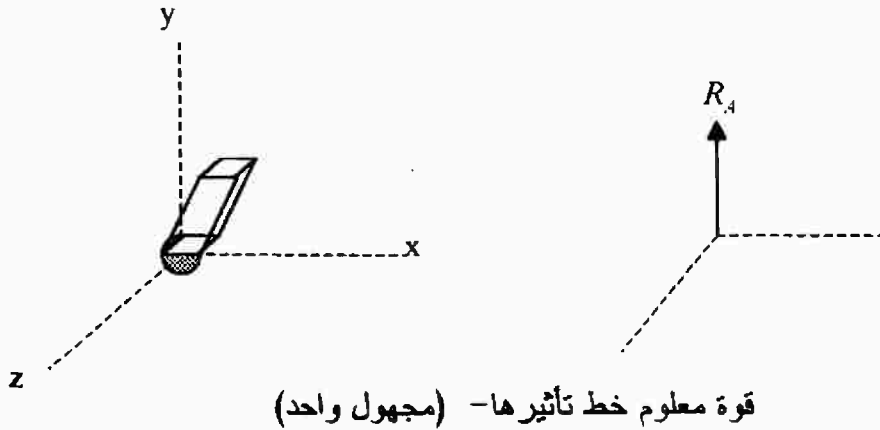
Reactions at support and connection

تقسم الارتكازات والدعائم الفراغية إلى:

1. أرتكاز حر (بسيط-أملس):

مثل أرتكاز مستوى أملس على وتد وفيه رد فعل عمودي على المستوى. كما هو مبين في

الشكل (47.4)



قوة معلوم خط تأثيرها - (مجهول واحد)

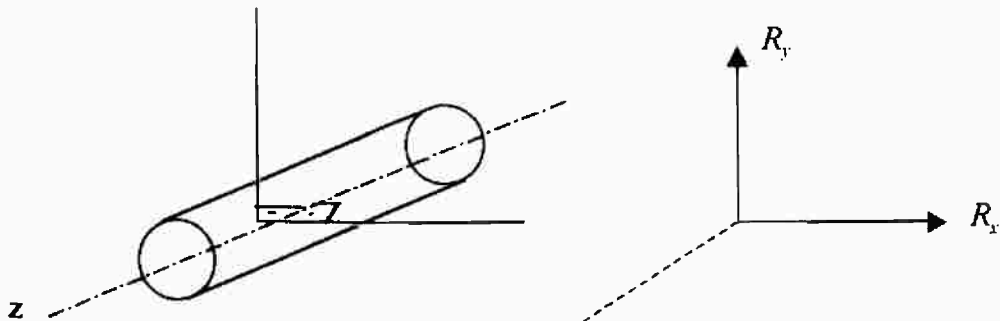
الشكل (47.4)

2. أرتكاز مفصلي أسطواناني:

-مثل تلامس عجلة مع سطح خشن أو عجلة على سكة حديد-

وفيه يتواجد رد الفعل في المستوى العمودي على محور الاسطوانة. فإذا كان مثلاً

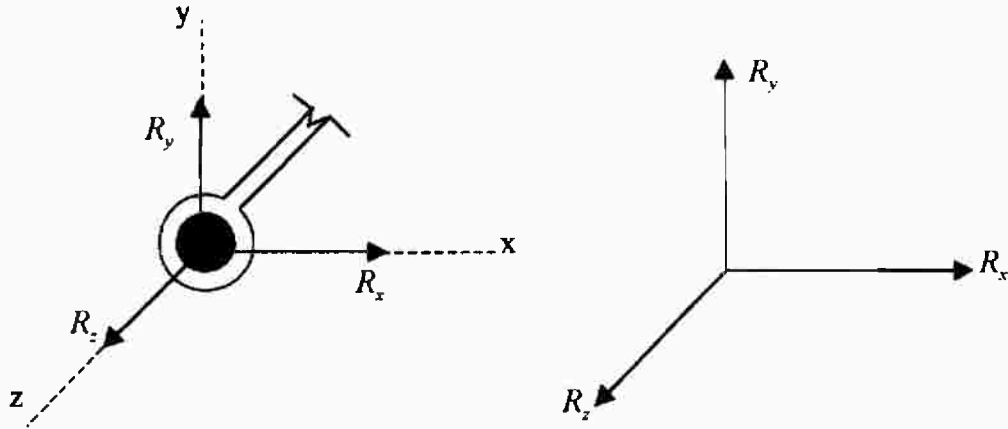
محور الاسطوانة يطابق محور z يكون لرد الفعل مركبتين R_x ، R_y في اتجاه محوري O_x ، O_y على الترتيب كما هو مبين في الشكل (48.4).



عدد المجاهيل اثنان ردين فعل في اتجاهين O_x ، O_y

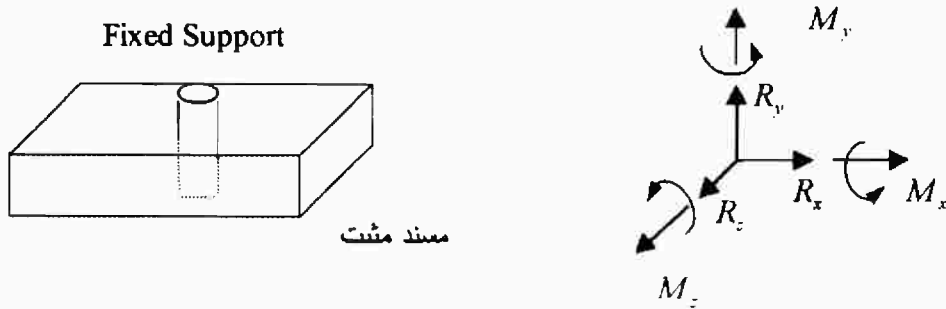
الشكل (48.4)

3. أرتكاز مفصلي كروي (أو ما يسمى مسند كروي: كرة-وتجويف).
وفيه يتألف رد الفعل من قوة عامة يمكن تحليلها الى ثلاث مركبات عند مركز المفصل.
كما هو مبين في الشكل (49.4).



الشكل (49.4)

4. مسند مثبت في الفراغ (Fixed Support) يمنع الحركة الانتقالية والدوران وفيه تتألف ردود الأفعال من ثلاثة ردود أفعال وثلاثة مزدوجات كما هو مبين في الشكل (50.4).



ثلاثة ردود أفعال قوى وثلاثة مزدوجات

الشكل (50.4)

أن أنواع المراكز المشار إليها أعلاه هي الأكثر انتشاراً وشيوعاً بالإضافة الى وجود أنواع أخرى من الدعام والمراكز في الفراغ لم نتعرض لذكرها.

4.6.4 شروط أتران الجسم الجاسئ في الفراغ

-Equilibrium of a Rigid Body in space-

قبل عرض شروط الأتران لجسم جاسئ مثبت في الفراغ يجب التأكيد على أن حلول المسائل المتعلقة بأتران جسم جاسئ في الفراغ تتطلب قراءة المسألة بإتقان، وتحديد المعلومات المعطاة والنتائج المطلوب الحصول عليها، وبعد ذلك رسم الرسم البياني لمخطط الجسم الحر (F.B.D) حيث يتم تعيين عدد المعادلات الأتران بعد أن يستكمل شكل القوى العاملة وردود الأفعال في الدعائم والاتصالات المختلفة.

يقال للجسم الجاسئ في الفراغ بأنه في حالة أتران عندما يكون مجموع القوى المؤثرة في الاتجاهات الثلاثة مساوياً للصفر، ومجموع العزوم حول أي ثلاثة محاور متعامدة على بعضها البعض. وعلى ذلك فلاأتران أي جسم جاسئ ست شروط يعبر عنها جبرياً بالمعادلات التالية:

$$R_x = \sum F_x = 0 \quad , \quad R_y = \sum F_y = 0 \quad , \quad R_z = \sum F_z = 0 \dots\dots\dots(24.4)$$

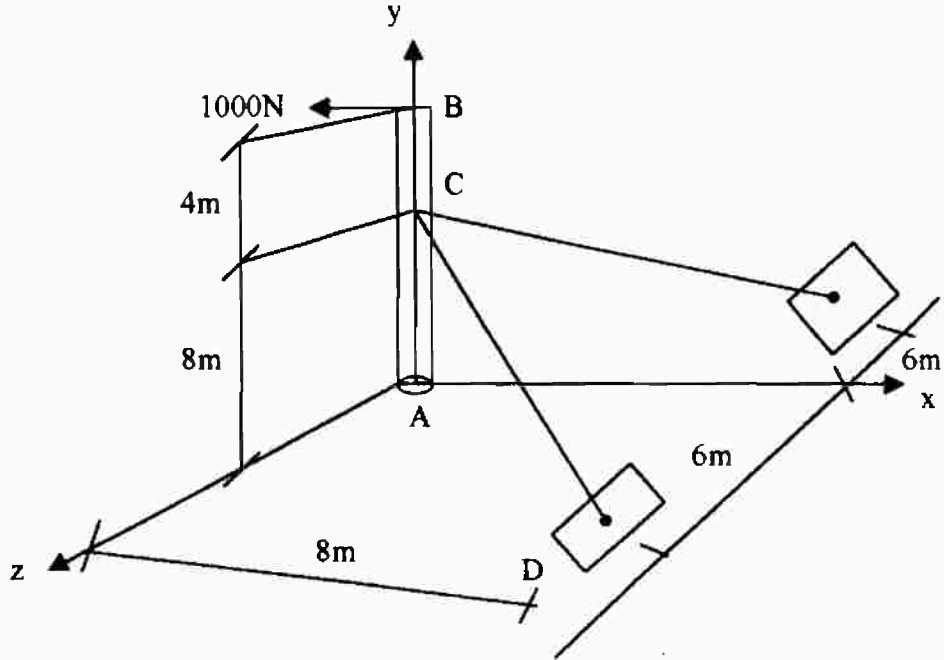
$$\sum M_x = 0 \quad , \quad \sum M_y = 0 \quad , \quad \sum M_z = 0 \dots\dots\dots(25.4)$$

أن المعادلات (24.4) ، (25.4) مستقلة بحد ذاتها حيث يمكن أستخدام أحدهما بصرف النظر عن المعادلات الأخرى.

وبفضل هذه الشروط يمكننا الحصول على ستة مجاهيل مثل ردود أفعال في المرتكزات والدعائم أو قوى شد مجهولة وغيره.

مثال (10.4)

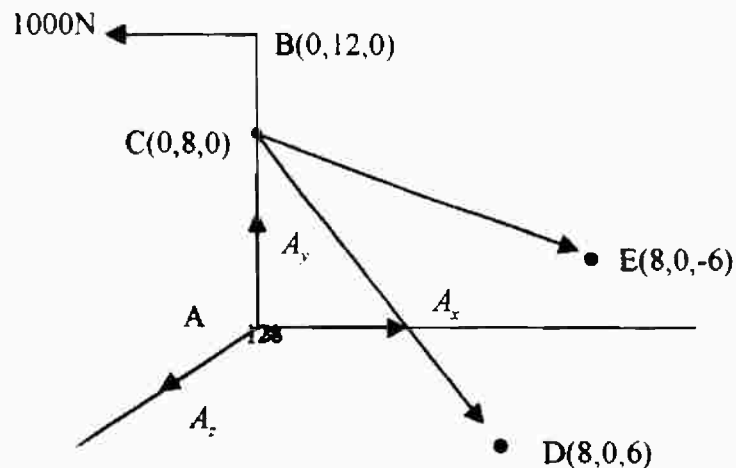
في الشكل (51.4) عمود AB مثبت بواسطة أرتكاز مفصلي كروي (كرة وتجويف) في نقطة A بسلكين CE ، CD ومسلط عليه قوة مقدارها (1000N) في النقطة B. عيّن ردود الافعال في المفصل الكروي A والشد في السلكين.



الحل:

نرسم مخطط الجسم الحر (F.B.D) موضحا عليه القوى المعروفة والمجهولة ، حيث نلاحظ أن المسند عند النقطة (A) يؤثر بثلاثة مركبات (ردود أفعال) A_x, A_y, A_z باتجاه المحاور الكارتيزية الثلاث x, y, z على التوالي. الشكل (52.4).

الشد في السلكين يتطلب تحليل القوة المعرفة بنقطتين T_{CD}, T_{CE} .



الشكل (52.4) مخطط الجسم الحر

نحلل الشد بالاسلاك حيث:

$$\overline{CE} = 8i - 8j - 6k$$

$$|CE| = 12,8m$$

$$\overline{CD} = 8i - 8j + 6k$$

$$|CD| = 12,8m$$

نجد مركبات قوى الشد في الاسلاك حيث:

$$\overline{T_{CE}} = |T_{CE}| = \frac{\overline{CE}}{|CE|} = T_{CE}(0,62i - 0,62j - 0,46k)$$

$$\overline{T_{CD}} = |T_{CD}| = \frac{\overline{CD}}{|CD|} = T_{CD}(0,62i - 0,62j + 0,46k)$$

بعد تحليل قوى الشد في الاسلاك نقوم بوضع شروط الاتزان حيث:-

$$\sum F_x \rightarrow = 0 ;$$

$$A_x + 0,62T_{CE} + 0,62T_{CD} - 1000 = 0 \dots\dots\dots(1)$$

$$\sum F_y \uparrow = 0 ;$$

$$A_y - 0,62T_{CE} + 0,62T_{CD} = 0 \dots\dots\dots(2)$$

$$\sum F_z \swarrow = 0 ;$$

$$A_z - 0,46T_{CE} - 0,46T_{CD} = 0 \dots\dots\dots(3)$$

$$\sum M_A = \sum r \times F = 0;$$

$$(8j) \times (0,62T_{CE}i - 0,62T_{CE}j - 0,46T_{CE}k) + (8j) \times (0,62T_{CD}i - 0,62T_{CD}j - 0,46T_{CD}k) + (12j) \times (-1000i) = 0$$

$$-5T_{CE}k - 3,88T_{CE}i - 5T_{CD}k + 3,88T_{CD}i + 12000k = 0$$

$$-3,88T_{CE}i + 3,88T_{CD}i = 0 \Rightarrow T_{CE} = T_{CD}$$

$$-5T_{CE} - 5T_{CD} + 12000 = 0 \Rightarrow T_{CE} = T_{CD} = 12000N$$

وبالتعويض عن قيم الشد في الاسلاك في المعادلات الثلاث نحصل على قيم ردود
الافعال الثلاث A_x, A_y, A_z حيث أن:-

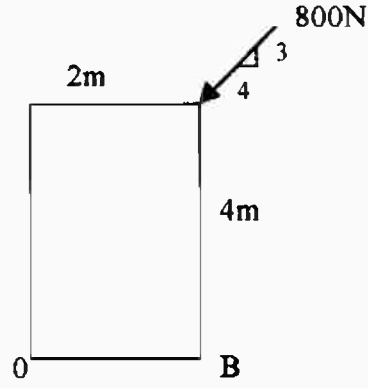
$$A_x = -500\text{ N} = 500\text{ N} \leftarrow$$

$$A_y = 1500\text{ N} \uparrow$$

$$A_z = 0$$

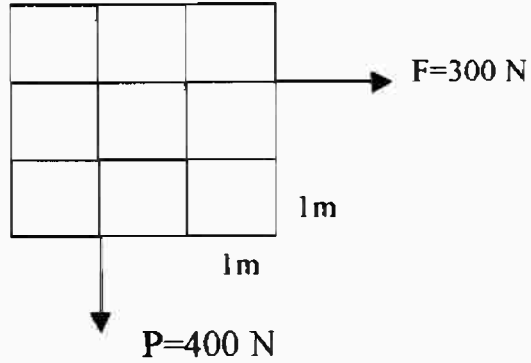
تمارين (4)

س1:- أوجد عزم القوة 800N في الشكل (54.4) حول النقطة 0.



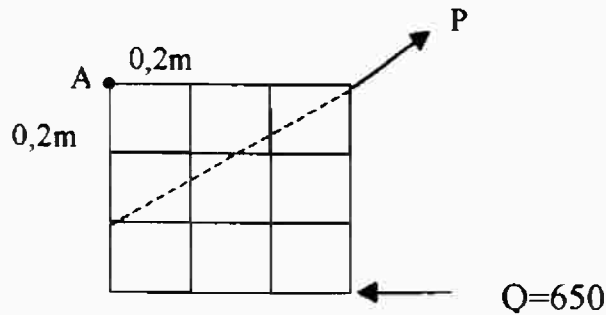
الشكل (53.4)

س2:- أوجد مجموع عزوم القوتين P ، F في الشكل (54.4) حول النقطة 0.



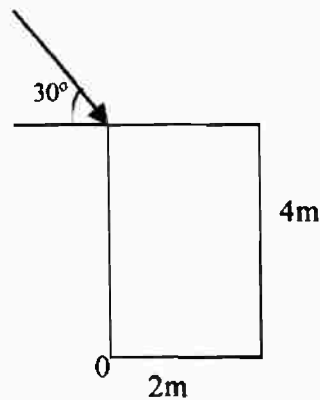
الشكل (54.4)

س3:- إذا كان مجموع عزوم القوتين P ، Q حول نقطة A في الشكل (55.4) مساوياً للصفر. أوجد مقدار القوة P .



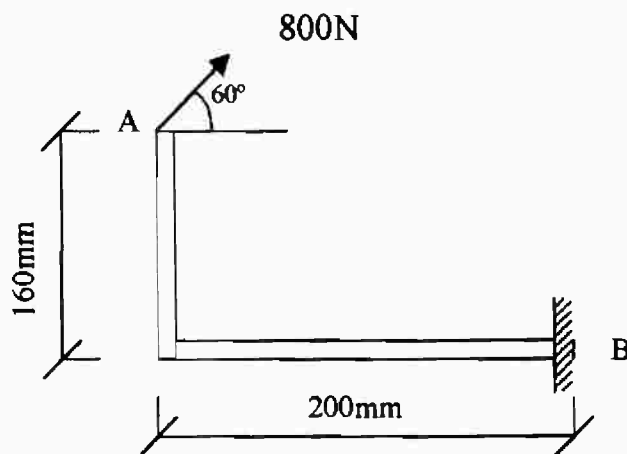
الشكل (55.4)

س4:- إذا كان عزم القوة P حول النقطة O يساوي 800N.m باتجاه عقارب الساعة. أوجد مقدار القوة P في الشكل (56.4).



الشكل (56.4)

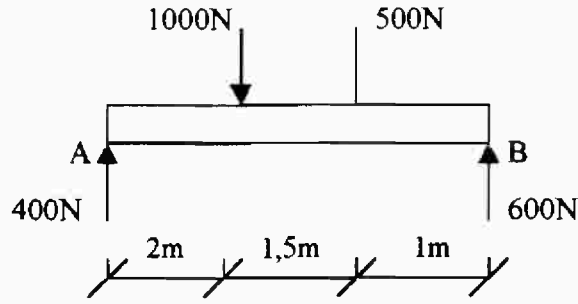
س5:- أوجد عزم القوة $P=800\text{N}$ حول النقطة B كما هو مبين في الشكل (57.4)



الشكل (57.4)

س6:- عوض عن منظومة القوى في الشكل (58.4) بقوة واحدة مفردة. حدد موقع هذه القوة

بالنسبة لنقطة A.

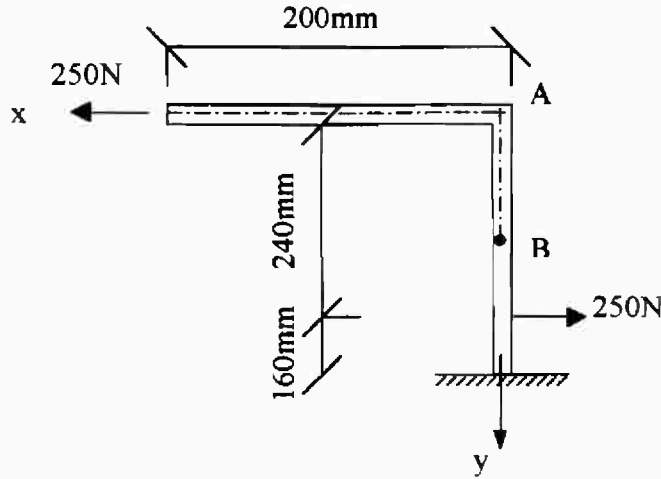


الشكل (58.4)

س7:- يبين الشكل (59.4) لوح على شكل زاوية معرض لقوتين كل منها 250N. المطلوب

منظومة القوى المؤثرة على اللوح بمنظومة مكافئة تتكون من قوة واحدة مقدارها 200N

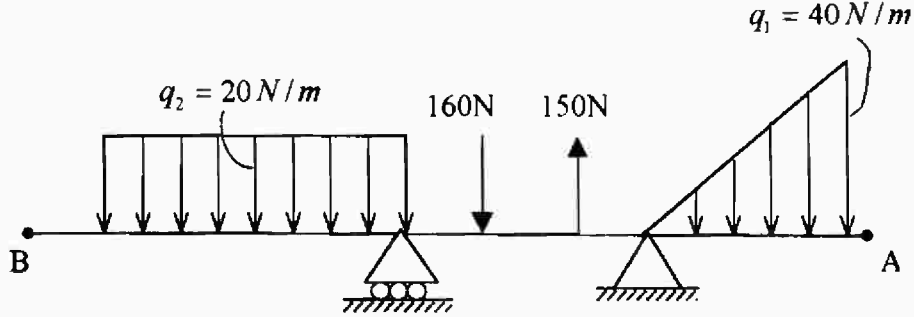
مسلمة عن النقطة B. أوجد الاحداثي y للنقطة B.



الشكل (59.4)

س8:- في الشكل (60.4) قلل منظومة القوى المؤثرة على الجسر إلى:-

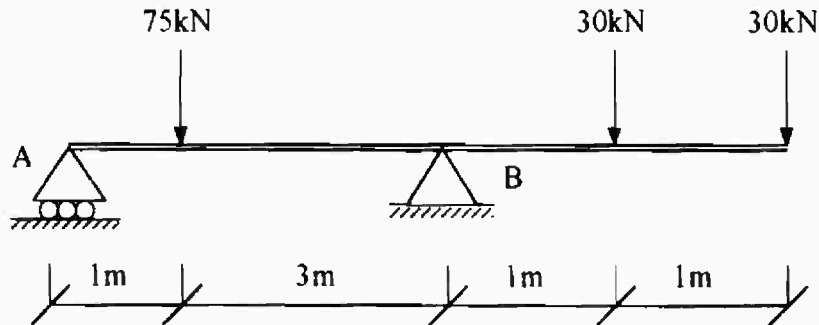
1. منظومة قوة-ومزدوج مكافئ في النقطة A.
2. منظومة قوة-ومزدوج مكافئ في النقطة B.
3. قوة واحدة مكافئة.



الشكل (60.4)

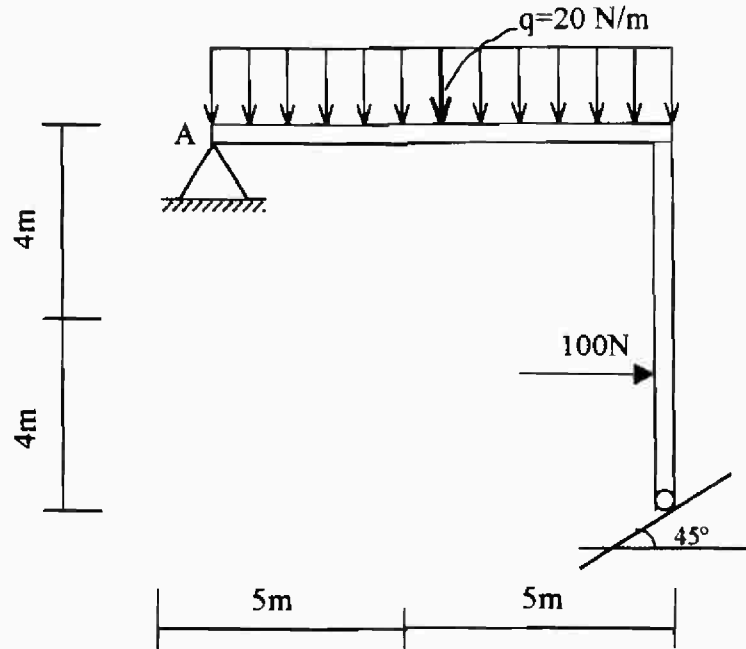
س9:- ثلاثة أتقال مسلطة الى الجسم المبين في الشكل (61.4). الجسر مسند بمسند فسي

النقطة A (عجلة) ومفصل في النقطة B. أوجد ردود الافعال في A ، B على الجسر.



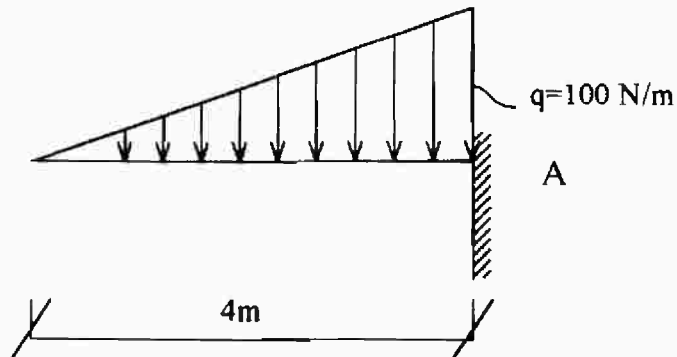
الشكل (61.4)

مس 10:- الشكل (62.4) يبين إطار أنشائي مثبت بمفصل عند النقطة A ومسند (عجلة) في النقطة B. أوجد ردود الأفعال في A ، B على الإطار.



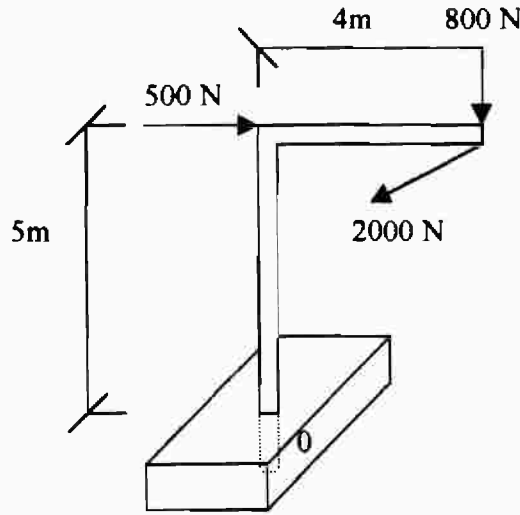
الشكل (62.4)

مس 11:- العتبة الميينة في الشكل (63.4) محملة بحمل متغير بانتظام حيث $(q=100 \text{ N/m})$ ومسند عند النقطة A بمسند مثبت (ثابت). أوجد ردود الأفعال في المسند المثبت A.



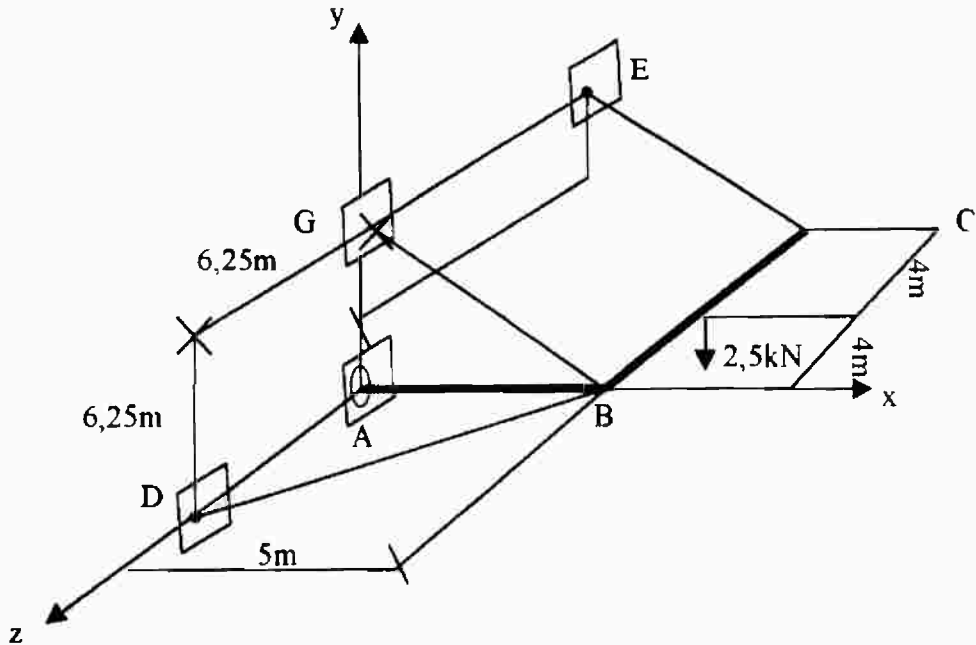
الشكل (63.4)

س12:- عمود مثبت بواسطة مسند ثابت في قاعدته (النقطة 0) تؤثر عليه قوى موزاةة للمحاور x, y, z كما هو مبين في الشكل (64.4). أوجد ردود الافعال في المسند 0.



الشكل (64.4)

س13:- الجسم الجاسئ ABC مسند بواسطة (كرة وتجويف) في النقطة A وثلاثة أسلاك، BG ، BD ، CE كما هو مبين في الشكل (65.4). أوجد ردود الافعال في المسند A والشد في الاسلاك الثلاثة.



الشكل (65.4)