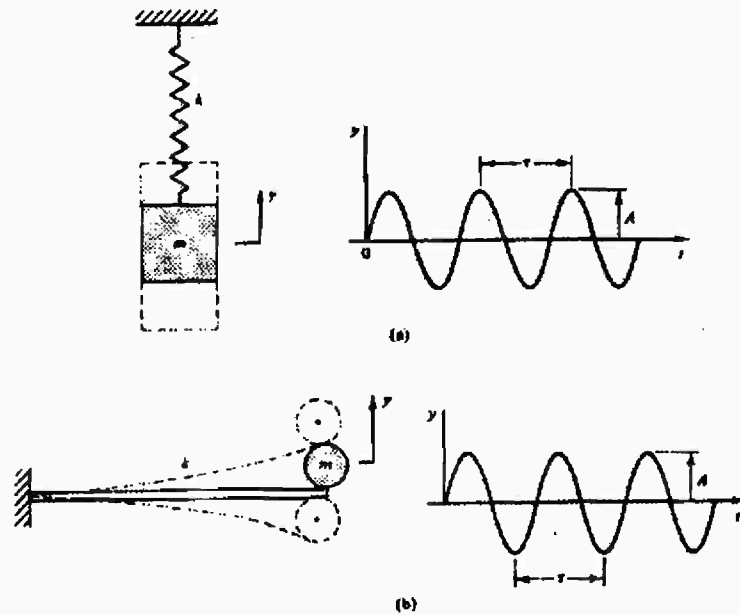


الباب الثاني

الاستراتيجيات الحرة أحياناً الشريرة غير النعمية

يوضح الشكل (2-1) أبسط مثال للحركة الاهتزازية وهو الهزاز الميكانيكى البسيط الذى يتكون من نابض *Spring* معاملته k وكتلة *Mass* ، وعند تعليق الكتلة m بالنابض تحدث استطالة فى النابض Δ وتتولد نتيجة لذلك قوة كامنة فى النابض نتيجة لخروج المجموعة (الكتلة والنابض) عن وضع الاتزان الاستاتيكي وهذه القوة الكامنة تتحول الى طاقة حركية تجعل المجموعة تتذبذب حول وضع التعدادل أو وضع الاتزان ثم تتحول الطاقة الحركية الى طاقة كامنة بالنابض عندما تصل الى موضع الاتزان الاستاتيكي الجديد مرة اخرى وتعمل المنظومة (المجموعة) تقف عن التذبذب (الحركة الاهتزازية) ويسمى هذا الاهتزاز بالاهتزاز الحر ذو درجة الحرية الواحدة لعدم تأثير أى قوى خارجية على المنظومة سوى وزن الكتلة وكذلك لوجود احداثى واحد فقط $x(t)$ يحدد موضع الكتلة فى الفراغ مع ملاحظة ان هذه الحركة الاهتزازية هى حركة توافقية بسيطة (*S.H.M.*) وكذلك الحال اذا كانت الحركة ناتجة من كابولى خفيف *A Light Cantilever Beam* كما بالشكل (2-1b) أى يكون شكل الحركة توافقية ايضا *Harmonic Motion*.



الشكل (2-1a,b) يوضح مثال لحركة توافقية بسيطة لكتلة ونابض وكتلة وكابولى.

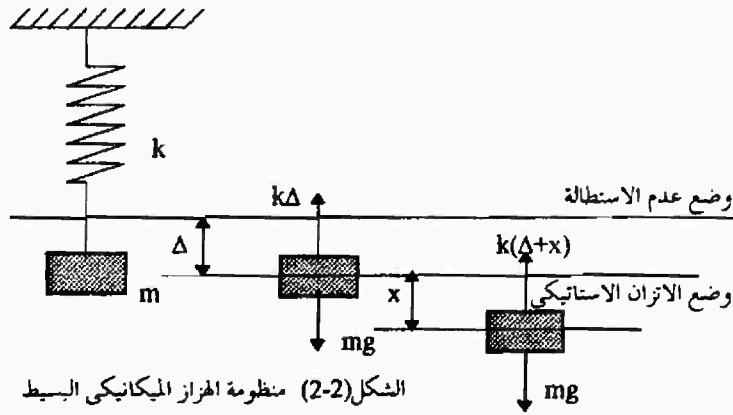
1-التذبذب التوافقي البسيط الحر Free Simple Harmonic Oscillation

أ-استنتاج التذبذب التوافقي البسيط بطريقة نيوتن. *Newton Mothed*

الشكل (2-2) يوضح الهزاز الميكانيكي البسيط وعند تعليق الكتلة بالنايخ تحدث استطالة مقدارها Δ في النايخ الذي معاملته k وبذلك تنتقل المجموعة من وضع الاتزان الاستاتيكي حيث ان الكتلة m تتحرك مسافة x وهي تمثل ازاحة الكتلة مع اهمال كتلة النايخ، عند وضع الاتزان الاستاتيكي نجد ان:

$$k.\Delta = m.g \quad \dots\dots\dots(2-1)$$

ونظرا لخروج المجموعة من وضع الاتزان الاستاتيكي وطبقا لقانون نيوتن الثاني نجد ان $\sum F = m.\ddot{x}$ حيث ان القوة الكامنة في النايخ يعبر عنها بالعلاقة $F_s = -k.x$ وبالتعويض حسب قانون نيوتن نجد ان $m\ddot{x} = -F_s = -k.x$ والاشارة السالبة تدل على ان F_s هي مقاومة وبذلك نستنتج معادلة الحركة والممثلة بالمعادلة $m\ddot{x} + k.x = 0$



الشكل(2-2) منظومة الهزاز الميكانيكي البسيط

ويقسمة معادلة الحركة على الكتلة m ينتج أن

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \therefore \ddot{x} + \omega^2.x = 0 \quad \dots\dots\dots(2-2)$$

$$\therefore \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad c.p.s. \quad \dots\dots\dots(2-3)$$

$$\therefore \frac{k}{m} = \frac{g}{\Delta} \quad \therefore f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\Delta}} \quad rad/sec \quad \dots\dots\dots(2-4)$$

وتمثل المعادلة (2-3) معادلة الحركة التفاضلية للمنظومة ، ω_n هي التردد الطبيعي الدائري *the natural circular frequency*

ب-أستنتاج التذبذب التوافقي البسيط بطريقة الطاقة: *Energy Method*

في المنظومة المبينة بالشكل (2-2) والتي تمثل الهزاز الميكانيكي البسيط نجد ان:

$$\text{الطاقة الكلية للمنظومة (T.E) = طاقة الحركة (K.E) + طاقة الوضع (P.E)}$$

$$\therefore K.E = \frac{1}{2} m v^2, v = \dot{x} = \frac{dx}{dt} \therefore K.E = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$$

$$\therefore P.E = \int_0^x (\text{total spring force}) dx - mgx$$

$$\therefore P.E = \int_0^x (mg + kx) dx - mgx = \frac{1}{2} kx^2$$

$$T.E = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} kx^2 = \text{const} \therefore \frac{d(T.E)}{dt} = 0$$

$$\therefore \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m \left(\dot{x} \right)^2 + \frac{1}{2} kx^2 \right] = 0, \therefore \frac{1}{2} m \left(2 \dot{x} \ddot{x} \right) + \frac{1}{2} k \left(2x \dot{x} \right) = 0$$

$$m \ddot{x} + kx = 0 \therefore \ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0 \therefore \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ c.p.s}, f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ (HZ)}$$

تفسير الحل لمعادلة الحركة التفاضلية للهزاز الميكانيكى البسيط:

بما أن معادلة الحركة للهزاز الميكانيكى البسيط $\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$ وهى معادلة تفاضلية متجانسة ومن الدرجة الثانية وتمثل الحركة التوافقية البسيطة ويكون حلها العام على الصورة التالية :

$$x = c_1 \cos \omega_n t + c_2 \sin \omega_n t \dots\dots\dots (2-5)$$

حيث c_1, c_2 ثوابت إختيارية وأن كل من $\cos \omega_n t, \sin \omega_n t$ هى دوال دورية تكرر نفسها كل فترة زمنية t_p ويمكن تعيين الزمن الدورى من العلاقة $\omega_n(t_p + t) - \omega_n t = 2\pi$ وبذلك يكون $\omega_n t_p = 2\pi$ وبالتالي يمكن تعيين الزمن الدورى من المعادلة $t_p = 2\pi / \omega_n$ وبذلك نجد أن دورة الاهتزاز تعتمد فقط على وزن الجسم المهتز ومعامل النابض وأن الاراحة Δ يمكن إيجادها كدالة فى الزمن الدورى t_p ، ولهذا نجد أن التردد الطبيعى للاهتزاز f_n يعرف بعدد الدورات بالنسبة لوحدة الزمن (ثانية) ، ولإيجاد الثوابت c_1, c_2 من المعادلة (2-5) نستخدم الشروط أو الظروف الابتدائية لحركة المنظومة ، أى أن الظروف الابتدائية *The Initial Condition* تكون عندما الزمن $(t = 0)$ وتكون إزاحة الجسم المهتز $x = x_0$ من وضع الاتزان الاستاتيكي وكذلك تكون السرعة الابتدائية للجسم $v = \dot{x} = \dot{x}_0$ وبالتعويض بهذه الظروف الابتدائية فى المعادلة (2-5) ينتج أن:

$$x = x_0 = c_1 \cos \omega_n(0) + c_2 \sin \omega_n(0) \therefore x_0 = c_1(1) + 0 \therefore x_0 = c_1$$

وبتفاضل المعادلة (2-5) نحصل على السرعة فى صورة المعادلة التالية:

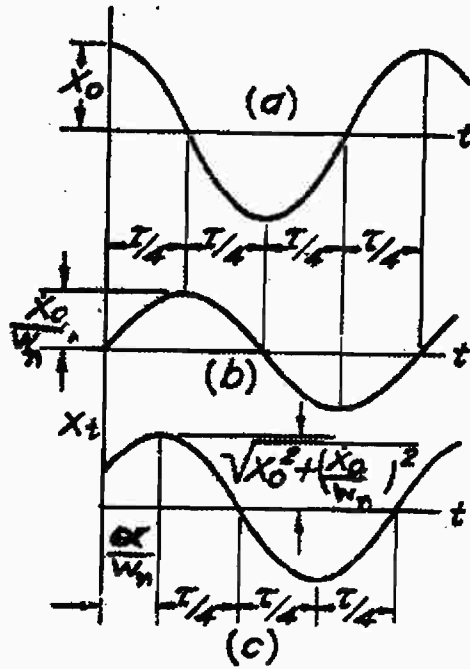
$$\dot{x}_0(t) = -c_1 \omega_n \sin(\omega_n t) + c_2 \omega_n \cos(\omega_n t)$$

$$\therefore \text{at } t = 0 \quad x_0 = c_2 \omega_n \quad c_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n}$$

أذن بالتعويض عن c_1, c_2 فى المعادلة (2-5) ينتج المعادلة التالية:

$$x = x_0 \cos(\omega_n t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \dots \dots \dots (2-6)$$

نلاحظ من المعادلة (2-6) ان الاهتزاز يتكون من جزئين أحدهما يتناسب مع $\cos(\omega_n t)$ ويعتمد على الازاحة الابتدائية لكتلة الجسم المهتز والجزء الاخر يتناسب مع $\sin(\omega_n t)$ ويعتمد على السرعة الابتدائية وكل من هذين الجزئين يمكن تمثيلهم بيانياً فى الشكل (2-3a,b,c). كدالة فى الزمن t ، والازاحة الكلية x للوزن W عند أى زمن t يمكن ايجادة بجمع كل من منحنى الازاحة (x_0, t) ومنحنى السرعة $(\dot{x}_0, t)$ والذي يمكن تمثيله بالمنحنى (2-3c)



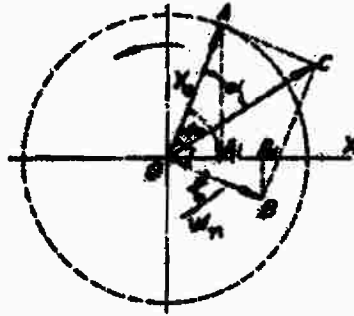
الشكل (2-3a,b,c) يوضح العلاقة بين $x_0, \frac{\dot{x}_0}{\omega_n}$ مع الزمن t وجمعهم بيانياً.

يلاحظ أن الشكل (2-3a) يوضح العلاقة بين الازاحة الابتدائية لكتلة المنظومة والزمن والشكل (2-3b)

يوضح العلاقة بين $\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}$ والزمن t ، بينما الشكل (2-3c) يوضح العلاقة بين الازاحة الكلية x والزمن t

حيث يمكن إيجاد الازاحة الكلية عند أى زمن t بجمع جزئى المعادلة (2-6) أو بجمع المنحنيين بالشكل (2-3c)

3a,b) عند الزمن t المناظر لذلك كما مبين بالمنحنى الممثل بالشكل (2-3c).
طريقة أخرى لتفسير الحل العام لمعادلة الحركة التفاضلية.



الشكل (2-4)

لشكل (2-4) يوضح أن المتجه $\overline{OA}$ الذى يمثل الازاحة الابتدائية x_0 حيث يدور هذا المتجه بسرعة زاوية ثابتة (ω_n) The Angular Frequency of Vibration حول النقطة الثابتة (o) وعندما الزمن $(t = 0)$ نجد أن مسقط المتجه $\overline{OA}$ الذى يمثل الازاحة x_0 يكون على صورة المعادلة $\overline{OA}_1 = x_0 \cdot \cos \omega_n \cdot t$ وكذلك المتجه $\overline{OB}$ العمودى على المتجه $\overline{OA}$ ويكون مساويا للمقدار $\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}$ ويكون مسقطه على محور x على صورة المعادلة

$$\overline{OB}_1 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n \cdot t$$

وبذلك نعين الازاحة الكلية بجمع مسقط المتجهين $\overline{OA}, \overline{OB}$ وتكون على صورة المعادلة الآتية

$$\text{The Total Displacement} = \overline{OC} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \right)^2}$$

$$\text{the angle } (\alpha) = \tan^{-1} \frac{\dot{x}_0}{\omega_n \cdot x_0}$$

وبذلك يمكن تعيين الازاحة x من المعادلة الآتية:

$$\text{the amplitude } (x) = \overline{OC} \cdot \cos(\omega_n \cdot t - \alpha)$$

ملاحظات:

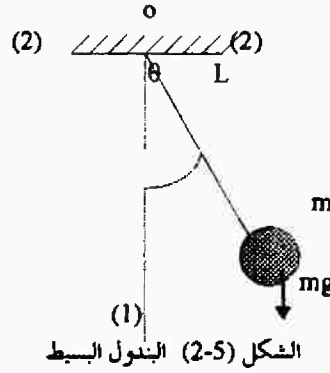
- أ- عند جمع التمثيل البياني لحركتين توافقيتين أحدهما يتناسب مع $\cos \omega_n \cdot t$ والاخرى تتناسب مع $\sin \omega_n \cdot t$ تكون النتيجة حركة توافقية بسيطة أيضا تتناسب مع $\cos(\omega_n \cdot t - \alpha)$.
- ب- سعة الحركة التى يدل عليها المتجه $\overline{OC}$ تساوى أقصى ازاحة للجسم الهزاز وذلك من وضع الاتزان الاستاتيكي.

ج- الزاوية α هى الاختلاف فى زاوية الطور بين المتجهين $\overline{OA}, \overline{OC}$

2-التذبذب الزاوي، للاجسام الحاسنة:

الحركة الزاوية لبندول بسيط. Angular Motion of Simple Pendulum

أبسط مثال على ذلك هو حركة البندول البسيط المبين بالشكل (2-5) , فإذا اعطى للبندول إزاحة زاوية صغيرة θ فأنه يتولد عزم اللي الكامن نتيجة انتقال البندول من وضع الاتزان الاستاتيكي الى الوضع الجديد ويعين من العلاقة $I_o \ddot{\theta}$ حيث I_o هو عزم القصور الذاتي , $\ddot{\theta}$ هي العجلة الزاوية ونتيجة لذلك يتولد عزم لي اخر مساوي لعزم اللي الكامن في المقدار ومضادة في الاتجاه ويسمى هذا العزم بعزم اللي الاسترجاعي (الرجوعي) *The Restoring Torque* والذي يعين بأخذ العزوم حول المفصل O أي ان:

$$\sum M_o = mg.l \sin \theta$$


وبتطبيق قانون نيوتن للحركة في شكل معادلة العزم

$$\sum M = I_o \ddot{\theta} \quad \therefore \sin \theta = \theta \quad \therefore I_o \ddot{\theta} + mg.l \theta = 0 \quad \therefore I_o = ml^2$$

$$\therefore \ddot{\theta} + \frac{mg.l}{ml^2} \theta = 0 \quad \therefore \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0 \quad \dots\dots\dots (2-7)$$

$$\therefore \omega_n = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad c.p.s. \quad , f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} \quad rad/sec.$$

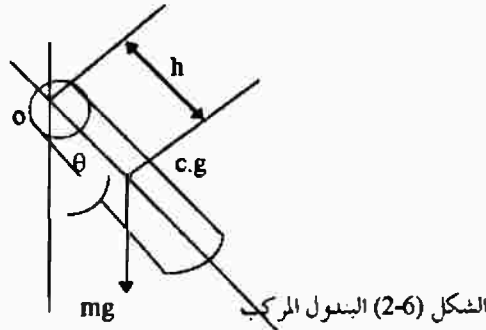
ملحوظة:

نتيجة حدوث الإزاحة الزاوية θ للبندول البسيط فأنه يتولد عزم لي كامن في البندول وعند إعتاقه وجعله حراً فإن هذا العزم يتحول الى طاقة حركية تجعل البندول يتذبذب حول المحور الرأسي ونتيجة لذلك يتولد عزم لي إسترجاعي يساوي عزم اللي الكامن في المقدار ومضادة في الاتجاه يعمل على إعادة البندول الى وضع الاتزان وإيقافة.

3-البندول المركب. Compound Pendulum

الشكل (2-6) يوضح حركة البندول المركب , وعند إعطاء البندول المركب إزاحة زاوية صغيرة θ فأنه يتولد عزم اللي الكامن وإذا ترك البندول حراً فإن هذا العزم يتحول الى طاقة حركية تجعل البندول

يتحرك حول المحور الرأسى بحركة اهتزازية ونتيجة لذلك يتولد عزم لى إسترجاعى يعمل على إعادة البندول الى وضع الاتزان الاستاتيكي الجديدة اخرى ولهذا يكون عزم اللى الكامن يساوى عزم اللى الاسترجاعى فى المقدار ويخالفة فى الاشارة.



$$\therefore m(r_g^2 + h^2) \ddot{\theta} = -mgh \theta \quad \therefore \ddot{\theta} + \frac{gh}{(r_g^2 + h^2)} \theta = 0 \quad \dots\dots\dots (2-8)$$

$$\therefore \omega_n = \sqrt{\frac{gh}{(r_g^2 + h^2)}} \quad c.p.s \quad \therefore t_p = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi \sqrt{\frac{r_g^2 + h^2}{gh}} \quad sec$$

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{gh}{r_g^2 + h^2}} \quad (HZ)$$

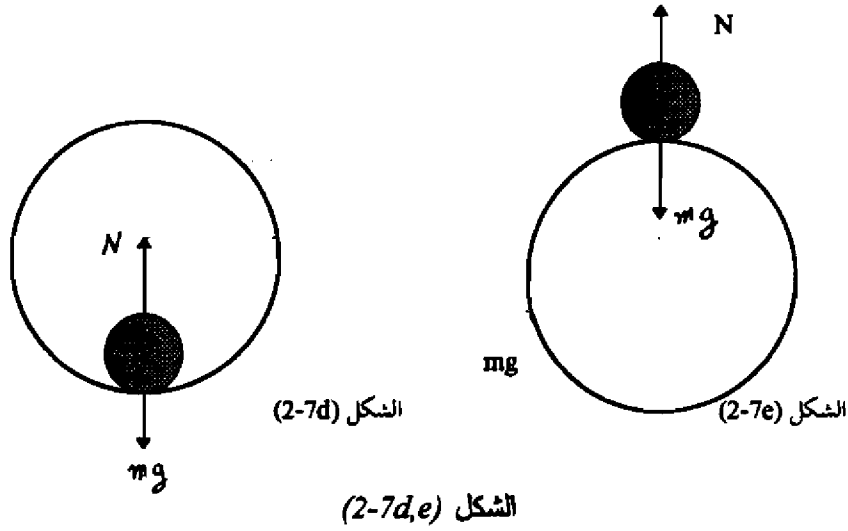
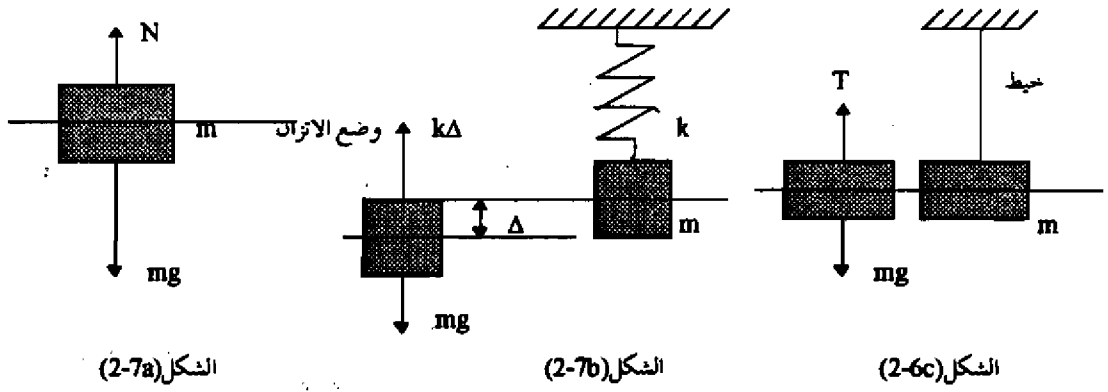
وبما أن عزم اللى الكامن $I_o \ddot{\theta}$ ، وعزم اللى الاسترجاعى يعين بأخذ العزوم حول المفصل o

$$\therefore \sum M_o = mgh \sin \theta = mgh \theta \quad \therefore I_o = m(r_g^2 + h^2)$$

حيث r_g هو نصف قطر الحركة التدويمية Radius of Gyration

4- الحركة الاهتزازية للجسم فى خط مستقيم. *The Vibration Motyon of A body in Straight Line*

الشكل (2-7a,b,c,d) يوضح أمثلة على الحركة الاهتزازية ونلاحظ فى كل هذه الامثلة ان الجسم متزن تحت تأثير وزنة وقوة مساوية موازنة لاعلى فإذا أعطينا للجسم المتزن فى الاشكال (2-7a,b,c) إزاحة صغيرة لتحركت حركة اهتزازية حول وضع إتزانها المستقر. أما اذا أعطينا للجسم المتزن فى الشكل (2-7d,e) إزاحة صغيرة فانها تتحرك مبتعدة جدا عن وضع إتزانها الغير مستقر ، ففى حالة وضع الاتزان المستقر يكون هناك قوة إسترجاعية *Restoring Force* تقاوم الازاحة الصغيرة عنة أى تحاول إرجاع الجسم الى وضع الاتزان المستقر *Stable Equilibrium* أما فى وضع أو حالة الاتزان غير المستقر فلا توجد هذه القوة الاسترجاعية فاذا إزيع الجسم أى إزاحة صغيرة فانها تزيد بلا مقلومة.



والقوة الاسترجاعية تتمثل في :

أ-جذب الأرض في حالة الجسم المعلق من خيط غير متزن.

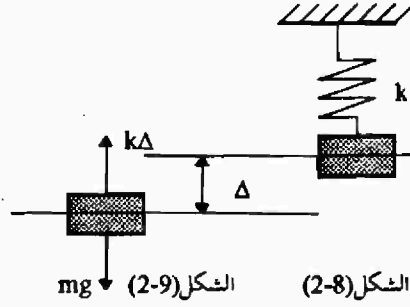
ب-شد الزنبرك (الناض) في حالة الجسم المعلق من نابض مرن (الهزاز الميكانيكي البسيط).

ج-قوة الطفو في حالة الجسم الطاف على سطح بحيرة.

ان وجود إتران مستقر هو الشرط الضروري لحدوث الحركة الاهتزازية ولكي تضاف الى صفة الاهتزازية صفة التوافقية *Harmonic* أو الدورية *Periodic* ، أن يجب توفر شرط إضافي وهو ان تكون القوة الاسترجاعية متناسبة طرديا مع الازاحة.

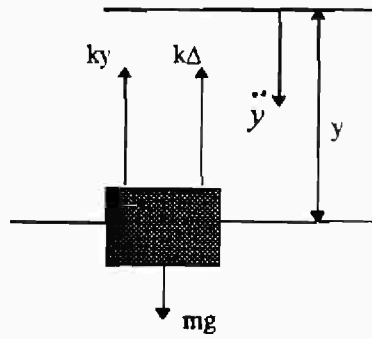
مثال توضيحي:

الشكل (2-8) يوضح الهزاز الميكانيكي البسيط حيث علق الجسم الذي كتلته m في النابض المرن الذي معاملته k ثم ترك حتى يتزن. أوجد الاستطالة الحادثة للنابض ، وإذا أزيح الجسم مسافة y أسفل وضع



الشكل (2-9)

الاتزان وأعطى سرعة ابتدائية v_0 ثم ترك ليتحرك بحرية. اكتب معادلة حركة الجسم ثم أوجد علاقة السرعة v بالازاحة y من وضع الاتزان وكذلك العلاقة بين كل من السرعة والازاحة والزمن.



الشكل (2-10)

أ- في حالة وضع الاتزان المستقر.

عند حدوث الاستطالة في النابض يكون الشد في مقدار $k \cdot \Delta$ وتكون معادلة إتزان الجسم ممثلة

بالمعادلة الآتية:

$$k \cdot \Delta - mg = 0 \quad (2-9)$$

ومنها يمكن إيجاد مقدار الازاحة Δ من العلاقة $\Delta = \frac{mg}{k}$ وذلك بعد أن يترك الجسم ليتحرك بحرية.

ب- في حالة إزاحة الجسم مسافة y_0 أسفل وضع الاتزان.

يوضح الشكل (2-10) القوى المؤثرة على الجسم في هذه الحالة حيث أنه في هذا الوضع تضاف قوة شد

في النابض مقدارها ky ويكون إتجاهها لأعلى.

إن معادلة الحركة للجسم يعبر عنها بالعلاقة التالية:

$$mg - k \cdot \Delta - ky = m \cdot \ddot{y} \quad (2-10)$$

وبالتعويض من المعادلتين (2-10) , (2-9) تنتج المعادلة التالية:

$$-ky = m \ddot{y} \quad (2-11)$$

وبما أن المعجلة y يعبر عنها بالمعادلة التالية

$$y = v \frac{dv}{dy} \quad \dots\dots\dots (2-12)$$

حيث $y = v$ هي سرعة الجسم وبالتعويض من المعادلة (2-11) فى المعادلة (2-12) نتج المعادلة التالية:

$$-ky = m \cdot v \frac{dv}{dy} \quad \dots\dots\dots (2-13)$$

اذن بفصل المتغيرات والتكامل نحصل على المعادلة التالية:

$$\begin{aligned} -\frac{k}{m} \cdot y dy &= v \cdot dv \quad \therefore -\int_{y_0}^y \frac{k}{m} \cdot y dy = \int_{v_0}^v v dv \\ \therefore -\frac{k}{m} \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y_0^2}{2} \right) &= \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} \quad \dots\dots\dots (2-14) \end{aligned}$$

والمعادلة (2-14) توضح علاقة السرعة v بالازاحة y ويمكن كتابة هذه العلاقة على صورة المعادلة

$$\text{التالية:} \quad \dots\dots\dots (2-15)$$

$$\frac{v^2}{\omega^2 A^2} + \frac{y^2}{A^2} = 1 \quad \dots\dots\dots$$

حيث ω, A بارامترين هامين ويعبر عنهم بالعلاقين الاتيين:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad A = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega} \right)^2} \quad \dots\dots\dots (2-16)$$

وبنفس البارامترات يمكن إعادة كتابة المعادلة (2-13) كعلاقة بين الازاحة والعجلة على الصورة التالية:

$$a = -\omega^2 \cdot y \quad \dots\dots\dots (2-17)$$

حيث y هي ازاحة الجسم ، a هي عجلة الجسم وذلك من وضع الاتزان.

ملاحظات هامة:

1- نلاحظ من علاقة الازاحة بالسرعة انه يوجد موضعين يتوقف فيهما الجسم لحظيا ، أى تنعدم فيهما السرعة وبوضع $v=0$ فى المعادلة (2-16) ينتج أن هذان الموضعان $y=A$, $y=-A$ ويسمى هذان الموضعان بالموضعين المتطرفين وتسمى A بالسعة وهى أقصى قيمة للازاحة y فإذا زادت y عن A تصبح v^2 سالبة أى ان v تخيلية.

اذن $v^2 = \omega^2 (A^2 - y^2)$ أى ان إزاحة الجسم تتراوح ما بين $-A$, $+A$ حول وضع الاتزان المستقر: ان $-A \leq y \leq A$ ونتيجة لذلك تسمى الحركة بالحركة الاهتزازية.

2- نلاحظ أيضا من علاقة الازاحة بالعجلة ان أقصى قيمة للعجلة هى عند الموضعين المتطرفين

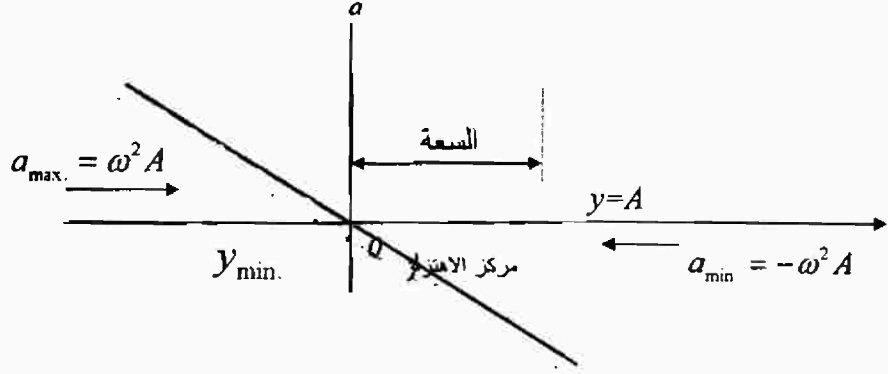
$$a_{\max} = \omega^2 A \quad \text{حيث ان العجلة تتراوح ما بين } \omega^2 A, -\omega^2 A \quad \text{اذن } \omega^2 A \geq a \geq -\omega^2 A$$

3- ونلاحظ أيضا من علاقة الازاحة بالسرعة ان أقصى قيمة للسرعة هى عندما تنعدم الازاحة ، أى

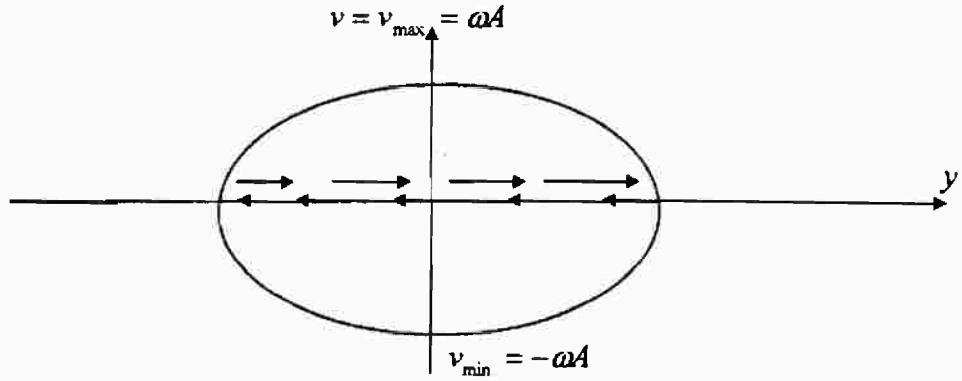
عندما يكون الجسم مارا بوضع الاتزان المستقر $y=0$ ان $v_{\max} = \omega A$ وتتراوح السرعة ما بين

$$-\omega A \leq v \leq \omega A$$

ويسمى وضع الاتزان المستقر بمركز الاهتزاز ، أى انه موضع إنعدام القوة الاسترجاعية (الحظيا).
4- يمكن رسم علاقة بيانية للمعادلتين (2-17) ، (2-15) بينما المعادلة (2-17) توضح العلاقة بين المجلية والازاحة وتمثل بخط مستقيم كما بالشكل (2-11) ، اما المعادلة (2-15) توضح العلاقة بين السرعة والازاحة وتمثل بقطع ناقص كما فى الشكل (2-12).



الشكل (2-11)



الشكل (2-12)

وتمثل الخطوط ذات الاسهم متجهات سرعة الجسم وهو يتذبذب بين الموضع المتطرف الاول $y = A$ مارا بمركز الذبذبة أو الاهتزازة (موضع الاتزان المستقر) حيث $y = 0$ حتى الموضع المتطرف الثانى $y = -A$ ويعود مرة ثانية ليكرر الحركة.

5- ونلاحظ أنه فى الموضع الواحد توجد سرعتان لهمانفس المقدار الاولى خاصة بحركة الجسم الصاعدة والاخرى خاصة بحركة الجسم الهابطة ، والحركة الصاعدة تمثل بالعلاقة $v = \omega\sqrt{A^2 - y^2}$ بينما الحركة الهابطة تمثل بالعلاقة $v = -\omega\sqrt{A^2 - y^2}$ ، أما المعجلة فلها قيمة واحد على الموضع الواحد.

6- السعة هي المسافة بين مركز الاهتزازة (موضع الاتزان المستقر) وأى من الموضعين المتطرفين (موضعى التوقف اللحظى للجسم)، والسعة لاتساوى الازاحة الابتدائية عن موضع الاتزان بل هي أكبر منها أى إن $A \geq y_0$ وهي تساويها فقط إذا كانت السرعة الابتدائية تساوى الصفر $v_0 = 0$ ، أما إذا كانت الازاحة الابتدائية تساوى الصفر والسرعة الابتدائية تساوى v_0 فإن السعة تعين من العلاقة $A = \frac{v_0}{\omega}$

5- العلاقة بين الازاحة والسرعة والزمن. *The Relationship between Displacement, Velocity and Time.*

$$\therefore v = \pm \omega \sqrt{A^2 - y^2} = \frac{dy}{dt} \dots\dots\dots (2-18)$$

وبفصل المتغيرات والتكامل نحصل على العلاقة التالية:

$$\int_{t=0}^t \pm \omega dt = \int_{y=y_0}^y \frac{dy}{\sqrt{A^2 - y^2}} \quad \therefore \pm \omega t = \sin^{-1} \left(\frac{y}{A} \right) - \sin^{-1} \left(\frac{y_0}{A} \right)$$

وبذلك تكون علاقة الازاحة بالزمن يعبر عنها بالعلاقة الآتية:

$$\phi = \sin^{-1} \left(\frac{y_0}{A} \right) \quad \text{حيث } y = A \sin(\omega t + \phi) \dots\dots\dots (2-19)$$

والزاوية ϕ تسمى بزاوية الطور وبتفاضل الازاحة بالنسبة للزمن نحصل على السرعة كما بالمعادلة التالية:

$$v = \omega A \cos(\omega t + \phi) \dots\dots\dots (2-20)$$

وبتفاضل السرعة بالنسبة للزمن نحصل على العجلة كما بالمعادلة التالية:

$$a = f = -\omega^2 \cdot A \sin(\omega t + \phi) \dots\dots\dots (2-21)$$

6- العلاقة بين الزمن الدورى والتردد:

توضح المعادلات (2-19,20,21) كيفية تغير الازاحة والسرعة والعجلة مع الزمن والعلاقة بينهما وبين

الزمن الدورى ، ويعبر عن الزمن الدورى بالعلاقة $t_p = \frac{2\pi}{\omega}$ ولايثبات ان الحركة الاهتزازية تكرر

نفسها كل فترة زمنية $t_p = \frac{2\pi}{\omega}$ ، نأخذ قيمة الزمن t_p التى تتباعد عن بعضها البعض بمقدار $t_p = \frac{2\pi}{\omega}$

ونظرا لان الحركة الاهتزازية او التوافقية هي حركة دورية ويمكن التعبير عن إزاحتها بالعلاقة التالية:

أى ان بفرض ان الازاحة الابتدائية تمثل بالعلاقة

$$y_0 = A \sin (\omega t + \phi) \text{ at } t = 0 \quad \therefore y_0 = A \sin (\phi)$$

$$\text{at } t = \frac{2\pi}{\omega} \quad \therefore y_1 = A \sin \left(\omega \cdot \frac{2\pi}{\omega} + \phi \right) = A \sin (2\pi + \phi) = A \sin (\phi)$$

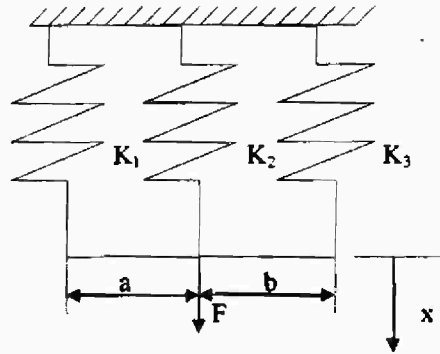
$$\text{at } t = \frac{4\pi}{\omega} \quad \therefore y_2 = A \sin (4\pi + \phi) = A \sin \phi$$

$$\text{at } t = \frac{n(2\pi)}{\omega} \quad \therefore y_n = A \sin (2n\pi + \phi) = A \sin (\phi)$$

اى عندما تكون n عدد صحيح اذن الازاحة تكرر نفسها بنفس المقدار كل فترة زمنية $t_p = \frac{2\pi}{\omega}$ وكذلك السرعة والعجلة وتسمى ω_n بالتردد الدورى أو التردد الزاوى (Angular Frequency) .

ثوابت النوابض المكافئة (Equivalent Spring Constant (k_{eq}))

أ- إذا كانت النوابض (اليابات) متصلة على التوازى *Springs Connected in Parallel* وكانت $a = b$ ، والقوة F تساوى الوحدة فانه يمكن استنتاج معامل النابض المكافئ k_{eq} من العلاقات التالية:



الشكل (2-13)

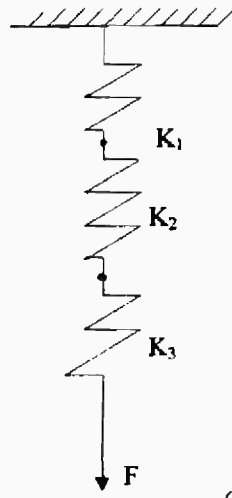
$$\because x = \frac{F_1}{k_1} = \frac{F_2}{k_2} = \frac{F_3}{k_3} \quad , \because F = F_1 + F_2 + F_3 = k_1 x + k_2 x + k_3 x = (k_1 + k_2 + k_3) x = k_{eq} x$$

$$\therefore k_{eq} = k_1 + k_2 + k_3 \quad \dots \dots \dots (2-22)$$

إذا كان عدد النوابض المتصلة على التوازى n فان معامل النابض المكافئ يمكن إيجادا من

$$k_{eq} = \sum_{i=1}^n k_i \quad \text{العلاقة:}$$

ب- إذا كانت النوابض متصلة على التوالى *Springs connected in Series*.



الشكل (2-14)

$$F = k_1 x_1 = k_2 x_2 = k_3 x_3 \quad \therefore x = x_1 + x_2 + x_3$$

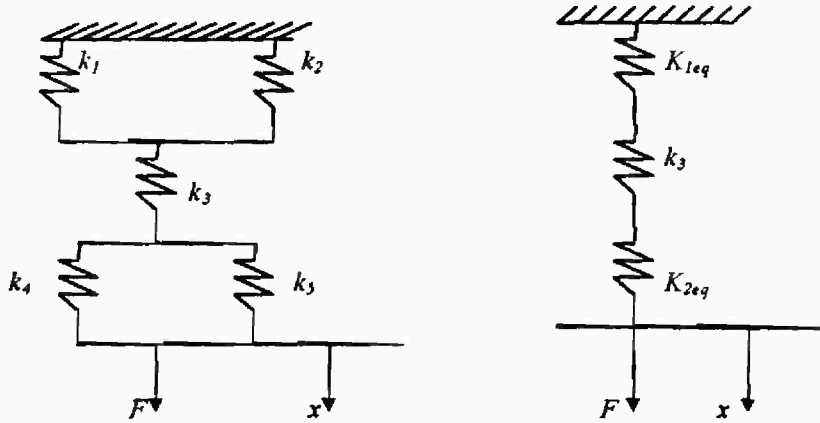
$$\therefore x_1 = \frac{F}{k_1}, \quad x_2 = \frac{F}{k_2}, \quad x_3 = \frac{F}{k_3} \quad \therefore x = F \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)$$

$$\therefore \frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \quad \therefore k_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}} \dots \dots \dots (2-23)$$

إذا كان عدد النوابض المتصلة على التوالي n فيمكن إيجاد معامل النابض المكافئ من العلاقة التالية:

$$k_{eq} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i}}$$

ج- إذا كانت النوابض متصلة على التوازي والتوالي. Springs in Parallel and Series Combination



الشكل (2-15a) توضيح المنظومة اتصال النوابض على التوالي والتوازي. الشكل (2-15b) المنظومة المكافئة.

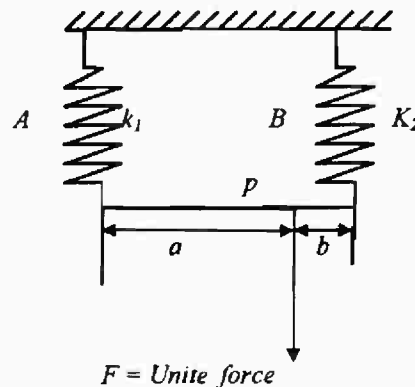
نلاحظ من المنظومة (2-15a) ان النابضان k_1, k_2 متصلان على التوازي وبذلك يكون معامل النابض المكافئ لهما هو مجموعهم كما بالعلاقة $k_{1eq} = k_1 + k_2$ ، والنابضان k_4, k_5 متصلان أيضا على التوازي ويكون معامل النابض المكافئ لهما هو مجموعهم أيضا ويعبر عنه بالعلاقة $k_{2eq} = k_4 + k_5$ ، ويمكن عمل منظومة مكافئة كما بالشكل (2-15b) تتكون من النابضان المكافئان k_{1eq}, k_{2eq} والنابض k_3 والمتصلة معا على التوالي.

وبذلك يمكننا إيجاد معامل النابض المكافئ للمنظومة وذلك حسب قانون التوصيل على التوالي كما بالعلاقة التالية:

$$k_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{k_{1eq}} + \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_{2eq}}} = \frac{1}{\frac{1}{k_1 + k_2} + \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_4 + k_5}}$$

حالة خاصة:

أوجد معامل النابض المكافئ للمنظومة المبينة بالشكل (2-18) .



الشكل (2-16)

نلاحظ من المنظومة المبينة بالشكل (2-16) ان النابضان k_1, k_2 متصلان على التوازي ، وإذا فرض ان قوة F مقدارها الوحدة $Unite$ تؤثر عند نقطة تبعد مسافة a عن k_1 وتبعد مسافة b عن k_2 ولايجاد معامل النابض المكافئ لهذه المنظومة نتبع الاتي:

مع إعتبار ان وحدة القوة تؤثر عند نقطة p فنجد أن

$$\left[\frac{b}{(a+b)} \cdot F \right] \text{ acts on spring } A$$

$$\left[\frac{a}{(a+b)} \cdot F \right] \text{ acts on spring } B$$

وبذلك تكون القوة المؤثرة إلى النابضان A, B يعبر عنهم بالعلاقات الاتية:

$$F_A = F_1 = \left(\frac{F \cdot b}{a+b} \right) , \quad F_B = F_2 = \left(\frac{F \cdot a}{a+b} \right)$$

ويمكن التعبير عن الاستطالة Δ لكل من النابضين (اليابين) بالعلاقين الاتيين:

$$\Delta_1 = \frac{F \cdot b}{k_1(a+b)} = \frac{F_1}{k_1} , \quad \Delta_2 = \frac{F \cdot a}{k_2(a+b)} = \frac{F_2}{k_2}$$

أما الاستطالة عند النقطة p يمكن تعينها من العلاقة التالية:

$$\Delta_p = \Delta_1 + \frac{a}{(a+b)} [\Delta_2 - \Delta_1]$$

وبالتعويض عن Δ_1, Δ_2 ينتج مايلي:

$$\begin{aligned}
\therefore \Delta_p &= \frac{F b}{k_1(a+b)} + \frac{F a^2}{k_2(a+b)^2} - \frac{F a b}{k_1(a+b)^2} \\
&= \frac{F}{(a+b)^2} \left[\frac{b(a+b)}{k_1} + \frac{a^2}{k_2} - \frac{a b}{k_1} \right] = \frac{F}{(a+b)^2} \left[\frac{a b + b^2 - a b}{k_1} + \frac{a^2}{k_2} \right] \\
\therefore \Delta_p &= \frac{F}{(a+b)^2} \left[\frac{a^2}{k_2} + \frac{b^2}{k_1} \right] \dots\dots\dots (2-24)
\end{aligned}$$

وإذا كانت القوة F لها قيمة معينة فانه يمكن إيجاد قيمة الاستطالة عند النقطة P باستخدام المعادلة (2-24) ، أما إذا كانت القوة F تساوى الوحدة ، فإن الاستطالة أو الانحراف عند النقطة p يعين من العلاقة التالية:

$$\Delta_p = \frac{1}{(a+b)^2} \left[\frac{a^2}{k_2} + \frac{b^2}{k_1} \right]$$

ولإيجاد معامل النابض نعوض فى العلاقة $k = \frac{F}{\Delta}$ فنتتج العلاقة التالية:

$$k_{eq} = \frac{F}{\Delta_p} = \frac{F(a+b)^2}{\left[\frac{a^2}{k_2} + \frac{b^2}{k_1} \right]} \dots\dots\dots (2-25)$$

وإذا كانت قيمة F الوحدة نعوض عن $F = 1$ فى المعادلة (2-25) .

طرق إيجاد معادلة الحركة للمنظومات الميكانيكية.

1-طريقة نيوتن للحركة . Newton Method

يمكن إيجاد معادلة الحركة لمنظومة ما باستخدام قانون نيوتن الثانى وذلك بان نعين كل من عزم اللي الكامن وعزم اللي الاسترجاعى (الرجوعى) للمنظومة ثم مساويتهم معا حيث ان عزم اللي الكامن يساوى عزم اللي الاسترجاعى فى المقدار ومضادة فى الاتجاه ، ونظرا لان معظم معادلات الحركة لكثير من المنظومات ، يمكن الحصول عليها بسهولة باستخدام قانون نيوتن الثانى للحركة و يصعب ذلك على بعض النظم الاخرى والتي يمكن استخدام طرق اخرى مثل طريقة الطاقة او طريقة رايبلى او طريقة لاجرانج لإيجاد معادلة الحركة لها.

2-طريقة الطاقة . Energy Method

نظرا لان المنظومة التى تتذبذب بحرية حول وضعها الاستاتيكي ، تبقى طاقتها الكلية ثابتة كما بالمعادلة التالية:

$$T.E = P.E + K.E + D.E = Const. \dots\dots\dots (2-26)$$

حيث : الطاقة الكلية $(T.E)$ ، طاقة الوضع $(P.E)$ ، طاقة الحركة

ولايجاد معادلة الحركة لمنظومة ما فأننا نعين كل من طاقات الحركة المختلفة ثم نفاضل الطاقة الكلية بالنسبة للزمن ونساويها بالصفر وذلك لان تفاضل الثابت = صفر. أى ان:

$$\therefore T.E = const \quad \therefore \frac{d}{dt}(T.E) = 0$$

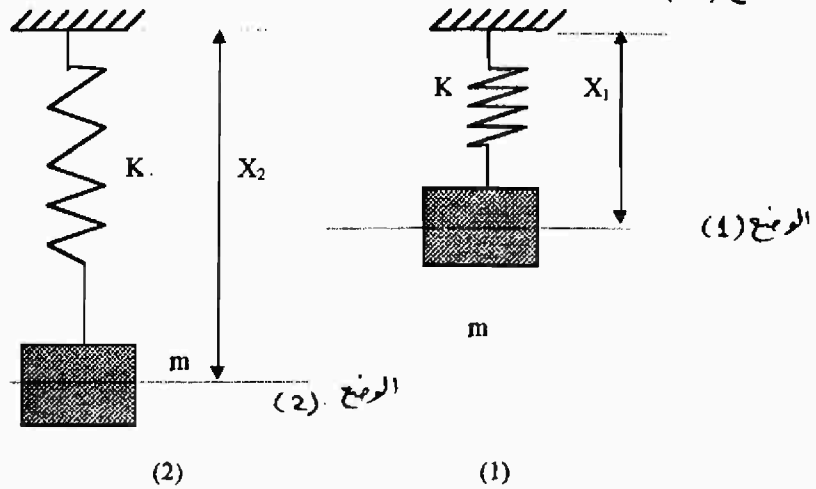
ولذلك يلزم معرفة كل من:-

1- الطاقة: تعرف الطاقة المخزونة فى اى جسم بأنها مقدرة الجسم على عمل شغل وتنقسم الطاقة الى ثلاث أنواع هى:-

أ- طاقة الحركة (K.E): هو الشغل الذى يبذله الجسم ضد القوة المقاومة حتى يسكن ، أو هو نصف حاصل ضرب كتلة الجسم فى مربع السرعة ويعبر عن ذلك بالعلاقة التالية:

$$K.E = \frac{1}{2}mv^2 \quad \left[kg \cdot \left(\frac{m}{s} \right)^2 \right] = \left(kg \cdot \frac{m}{s^2} \right) m = N \cdot m = joule \dots \dots \dots (2-27)$$

ب- طاقة الوضع (P.E): هى الطاقة التى يكتسبها الجسم أو يخترنها بموجب موضعة فى مجال الجاذبية الارضية أو نتيجة لارتفاعه عن سطح الارض أو يخترنها جسم مرن عند تغيير شكله كما فى حالة النوابض ويمكن تعريف طاقة حركة النابض بانها هى الشغل المبذول اثناء حركة النابض من الوضع (1) الى الوضع (2) كما بالشكل التالى:



الشكل (2-18)

الشكل (2-17)

$$W_{1-2} = \int_{x_1}^{x_2} F_s ds = \int_{x_1}^{x_2} -kx dx = -k \left(\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2} \right) = \frac{1}{2} kx_1^2 - \frac{1}{2} kx_2^2 = \frac{1}{2} kx^2 \dots (2-27)$$

ج-المجال المحافظ:هى طاقة الجسم التى لا يحدث لها اى تغيير عند إنتقال الجسم من وضع ما الى وضع آخر ، أى تكون طاقة الجسم ثابتة خلال إنتقاله من الوضع الاول الى الوضع الثانى.

$$(K.E)_1 + (P.E)_1 = (K.E)_2 + (P.E)_2$$

$$K.E + P.E = \text{const.}$$

د- طاقة الحركة الكلية ومعدل التغير في طاقة الوضع.

إذا تحرك مركز الكتلة لاي جسم بسرعة خطية قدرها v ، وكان الجسم يدور في نفس الوقت حول هذا المركز بسرعة زاوية قدرها ω عندئذ يكون : طاقة الحركة الكلية = طاقة حركة الانتقال + طاقة حركة الدوران أي ان

$$\text{Total}(K.E.) = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} m v^2 \dots\dots\dots (2-28)$$

حيث I هي عزم القصور الذاتي للجسم حول مركز الكتلة ، وان معدل التغير في طاقة $\text{The Rate of Change of } K.E$ الحركة يمكن كتابتها على الصورة التالية:

$$\begin{aligned} \text{The Rate of Change of } K.E. &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \right] = \frac{1}{2} m \left(2v \frac{dv}{dt} \right) + \frac{1}{2} I \left(2\omega \frac{d\omega}{dt} \right) = \\ &= mfv + I\alpha\omega = pv + T\omega = \text{The Work Done in Unit Time} \quad (2-29) \end{aligned}$$

حيث α هي العجلة الزاوية ، f هي العجلة الخطية.

و- طاقة الانفعال أو التبديد $\text{Strain or Dissipation Energy}$

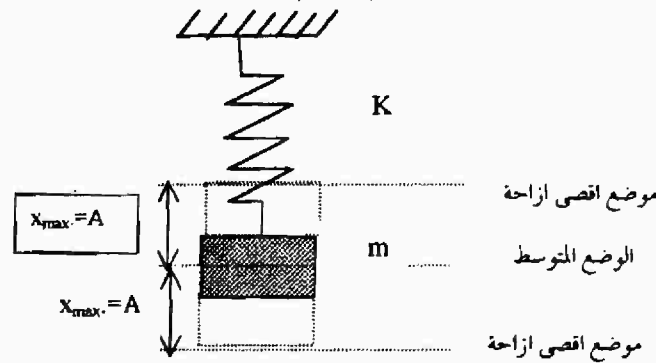
هي الطاقة المخزنة في جسم مرن نتيجة تشوهه ، ويعبر عنه بالعلاقة التالية:

$$D.E = \frac{1}{2} c v^2 = \frac{1}{2} c \left(\dot{x} \right)^2 \dots\dots\dots (2-30)$$

حيث c هو عامل الخمد Damping Factor

3- طريقة رايلي: Rayleigh's Method

تعتبر طريقة رايلي إمتداد لطريقة الطاقة حيث يوجد علاقة مشتركة أو تبادل ثابت $\text{Constant Interchange}$ للطاقة بين طاقة الوضع للباي $(P.E)$ وطاقة الحركة للكتلة $(K.E)$ ونظرا لان المجموعة أو المنظومة مثل الهزاز الميكانيكى البسيط المبين بالشكل (2-19)



الشكل (2-19)

يتحرك حركة دورية *Cyclic Motion* فان طاقة الوضع للكتلة تساوى صفر عند موضع الاتزان الاستاتيكي (الوضع المتوسط) *The Static Equilibrium Position* وذلك لانعدام الازاحة ($x=0$) عند تواجد الكتلة فى موضع الاتزان الاستاتيكي ولهذا فان طاقة الوضع للكتلة تساوى صفر أى ان $P.E = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} k(0) = 0$ وطبقا لنظرية بقاء الطاقة *Conservation of Energy* ، فان الطاقة الكلية *The Total Energy (T.E)* عند هذه اللحظة تساوى أقصى طاقة حركة لان سرعة الجسم تكون اكبر ما يمكن، أى ان :

$$T.E = (K.E)_{\max} = \frac{1}{2} m(v_{\max})^2 = \frac{1}{2} m(\dot{x}_{\max})^2 \dots\dots\dots (2-31)$$

واثناء الحركة الدورية وعندما تصل الكتلة الى أقصى إزاحة ($x_{\max}$) *Maximum Displacement* والتي تساوى سعة الدورة (A) *Maximum Amplitude* أى ان:

$$x_{\max} = A \dots\dots\dots (2-32)$$

وعند ذلك تغير الكتلة إتجاهها ولهذا تنعدم السرعة $\dot{x} = 0$ وبذلك تكون طاقة الحركة عند تلك اللحظة تساوى الصفر أى ان:

$$K.E = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m(0) = 0$$

وبذلك تكون الطاقة الكلية عند هذه اللحظة تساوى أقصى طاقة وضع ، أى ان

$$\therefore T.E = (P.E)_{\max} = \frac{1}{2} kx_{\max}^2 = \frac{1}{2} kA^2 \dots\dots\dots (2-33)$$

ومما سبق ذكره يمكن إستنتاج معادلة التردد f_n كما يلى: ان من المعادلتين (2-33) ، (2-31) ينتج ان:

$$\frac{1}{2} m(\dot{x}_{\max})^2 = \frac{1}{2} kx_{\max}^2 = \frac{1}{2} kA^2 \dots\dots\dots (2-34)$$

وبفرض ان الحركة التوافقية البسيطة للهاز الميكانيكى البسيط يعبر عنه بالعلاقة $x = A \sin \omega_n t$ وبالتالي تكون السرعة على صورة العلاقة $\dot{x} = A \cos \omega_n t$ ومن الشروط البدائية للحركة نجد انه عندما تكون الكتلة عند اقصى إزاحة تنعدم السرعة نظرا لان الكتلة تغير اتجاهها عند هذه اللحظة وبالتالي تنعدم طاقة الحركة وتكون طاقة الوضع عند هذه اللحظة اكبر مايمكن والطاقة الكلية للمنظومة تساوى اقصى طاقة وضع بينما عندما تكون الكتلة عند الوضع المتوسط فان السرعة تكون اكبر مايمكن ، بينما تنعدم الازاحة عند الوضع المتوسط وبالتالي تنعدم طاقة الوضع عند هذا الموضع والطاقة الكلية تتمثل فى اقصى طاقة حركة عند الموضع المتوسط ، وبذلك فان السرعة عند اقصى إزاحة تعين من العلاقة التالية:

$$x = A \cos \omega_n t \quad \text{at } x_{\max} \quad \cos \omega_n t = 1 \quad \therefore x_{\max} = \omega_n A \cos \omega_n t = \omega_n A \dots\dots\dots (2-35)$$

وبالتعويض من المعادلتين (2-34) , (2-35) ينتج أن:

$$\frac{1}{2}m(\omega_n \cdot A)^2 = \frac{1}{2}k \cdot A^2 \quad \therefore m\omega_n^2 = k$$

$$\therefore \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \dots\dots\dots (c.p.s) \dots\dots\dots (2-36)$$

$$\therefore f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \dots\dots\dots (HZ) \dots\dots\dots (2-37)$$

ويمكن تطبيق ذلك على البندول البسيط المبين بالشكل (2-5) حيث عند الوضع (1) تكون السرعة اكبر مايمكن وتكون الأزاحة الزاوية منعدمة وبالتالي تكون طاقة الوضع تساوى الصفر بينما الطاقة الكلية تساوى أقصى طاقة حركتيهما عند الوضع (2) تنعدم السرعة نظرا لان البندول يغير اتجاهه عند أقصى ازاحة زاوية اى عند الوضع (2) وبالتالي تنعدم طاقة الحركة وتكون طاقة الوضع اكبر مايمكن عند الوضع (2) والطاقة الكلية تساوى أقصى طاقة وضع فى هذه الحالة وقد اثبتنا ان التردد الطبيعي فى حالة البندول البسيط تعين من المعادلة (2-7)

4-معادلة لاجرانج. *Lagrange's Equations*

يمكن استخدام معادلة لاجرانج التالية فى إيجاد معادلة الحركة لمنظومة ما وذلك فى صورتها الاساسية للاحداثيات العمومية q_i :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial (K.E.)}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial (K.E.)}{\partial q_i} + \frac{\partial (P.E.)}{\partial q_i} + \frac{\partial (D.E.)}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \dots\dots\dots (2-38)$$

حيث ان:

$$K.E. = \frac{1}{2}m(\dot{x})^2 \text{ هى طاقة الحركة للمنظومة} , P.E. = \frac{1}{2}kx^2 \text{ هى طاقة الوضع} , D.E. = \frac{1}{2}c\dot{x}$$

هى الطاقة المتبددة فى المنظومة ، Q_i هى قوة خارجية عمومية مؤثرة على المنظومة. وفى حالة النظام المحافظ فانه يمكن كتابة معادلة لاجرانج على صورة المعادلة التالية:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \dots\dots\dots (2-39)$$

حيث ان : $L = K.E. - P.E.$

الطاقة الكلية المقابلة للحركة التوافقية البسيطة. *Totall energy corresponding to simple harmonic motion*

إذا تحرك جزئ من الموضع b الى الموضع c على محيط دائرة كما بالشكل (2-20) ونصف قطرها a فان مسقط الجزئ عند النقطة c على محور x يعبر عنه بالعلاقة : $x = A \cos(\omega t + \phi)$ وبالتالي يعبر عن السرعة والعجلة بالعلاقات الآتية:

$$\dot{x} = -A \cdot \omega \cdot \sin(\omega t + \phi) \quad , \quad \ddot{x} = -A \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t + \phi)$$

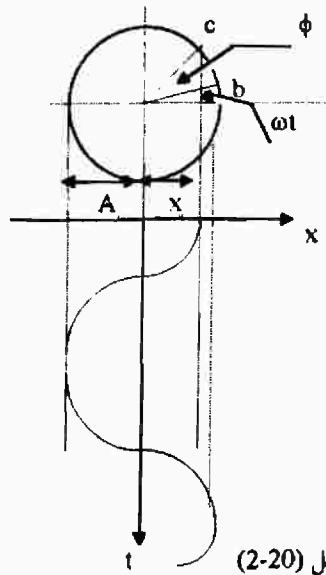
وبالتالى يعبر عن العجلة أيضا بالعلاقة التالية

$$\ddot{x} = -\omega_n^2 \cdot x \quad \therefore \ddot{x} + \omega_n^2 \cdot x = 0 \dots\dots\dots (1)$$

وهى المعادلة التفاضلية لحركة الجزئ حركة توافقية بسيطة ، وبالتالى يمكن كتابة معادلة طاقة الحركة على صورة العلاقة التالية:

$$K.E. = \frac{1}{2} m \left(\dot{x} \right)^2 = \frac{1}{2} m \left[-A \omega \cdot \sin(\omega t + \phi) \right]^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \cdot \sin^2(\omega t + \phi) \dots\dots\dots (2)$$

$$\therefore K.E. = \frac{1}{2} k \cdot x^2 \dots\dots\dots (3)$$



الشكل (2-20)

إن يمكن كتابة الطاقة الكلية على صورة المعادلة التالية:

$$T.E. = K.E. + P.E. = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \cdot \sin^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2} k \cdot A^2 \cdot \cos^2(\omega t + \phi)$$

$$\therefore \omega^2 = \frac{k}{m} \quad , \therefore k = m \omega^2$$

$$\begin{aligned} \therefore T.E. &= \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \phi) = \\ &= \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 [\sin^2(\omega t + \phi) + \cos^2(\omega t + \phi)] = \frac{1}{2} k A^2 (1) = \frac{1}{2} k \cdot x^2 \end{aligned}$$

$$\therefore T.E. = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} k A^2 \dots\dots\dots (4)$$

نجد من المعادلة (4) إن الطاقة الكلية تتناسب طردياً مع مربع التردد الدورى ومربع السعة ، ونظراً لأن طاقة الوضع تحدث عند $x=A$ أى إن x تكون أكبر ما يمكن وتتعدى السرعة عند ذلك الموضع وبالتالي تكون أقصى طاقة وضع تساوى نصف حاصل ضرب معامل النابض فى مربع أقصى سعة ويمكن

$$P.E._{max} = \frac{1}{2} kA^2 \quad \text{كتابة ذلك على الصورة التالية:}$$

وعند أى وضع نجد ان الطاقة الكلية تساوى مجموع طاقتى الحركة والوضع أى يمكن التعبير عن ذلك بالعلاقة التالية:

$$T.E. = \frac{1}{2} m \left(\dot{x} \right)^2 + \frac{1}{2} k x^2, \quad \therefore T.E. = \frac{1}{2} k A^2$$

$$\therefore m \left(\dot{x} \right)^2 + k x^2 = k A^2 \quad \therefore \left(\dot{x} \right)^2 = \frac{k}{m} A^2 - \frac{k}{m} x^2 = \omega_n^2 (A^2 - x^2)$$

$$\therefore \dot{x} = \pm \sqrt{\omega_n^2 (A^2 - x^2)} \dots \dots \dots (5)$$

وتكون أقصى سرعة عندما تنعدم الازاحة أى إن $x=0$ ويعبر عن ذلك بالعلاقة التالية:

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\omega_n^2 (A^2 - 0)} = \pm \omega_n \cdot A \dots \dots \dots (6)$$

ملحوظة:

ثابت او معامل النابض k يتناسب عكسياً مع طول النابض او مع عدد لفات النابض الحلزوني ، فاذا كان طول النابض L وعدد لفاته n فيكون $k \propto 1/L$ أى ان $k=c/L$ وذلك فى حالة تعليق كتلة m فى نابض معاملته k كما فى حالة الهزاز الميكانيكى البسيط واذا وضعنا نفس الكتلة m فى منتصف نفس النابض بحيث تم تثبيت طرفى النابض كما بالمنظومة المبينة بالشكل (2-21b) وبالتالي نلاحظ ان $k_1 \propto 1/0.5L$, $k_2 \propto 1/0.5L$ اذن يكون $k_1=2c/L$, $k_2=2c/L$ حيث c ثابت التناسب ونظراً لان النابضين متصلين التوازي فى هذه الحالة فيكون ثابت النابض المكافى لهما بعد تعليق الكتلة فى منتصف هذا النابض هو مجموعهم كما يلى:

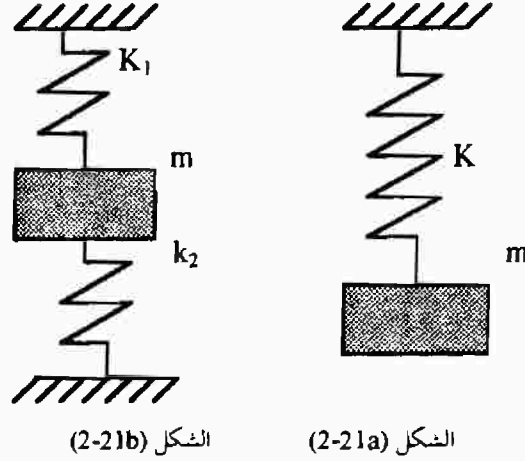
$$k_{eq} = k_1 + k_2 = 2c/L + 2c/L = 4c/L = 4k$$

اذن معامل النابض المكافى بعد تقسيمه الى نصفين ووضع الكتلة فى منتصفه يساوى اربعة امثال معامل النابض قبل التقسيم .

أمثلة محلولة

1- In the system shown in fig.(2-21a) , the spring has a stiffness of 10 kgf/cm and the mass weight of 20 kgf. Find the natural frequency of the system , and if one mass is attached to mid-point of one spring and the two ends of the spring are securely fixed as shown in fig.(2-21b) , determine the natural frequency of this system.

1- في المنظومة الموضحة بالشكل (2-21a) . معامل النابض 10 kgf/cm ووزن الكتلة 20 kgf ، أوجد التردد الطبيعي للمنظومة ، وإذا علقت الكتلة في منتصف نفس النابض مع ثبات نهايتي النابض كما في الشكل (2-21b) . أوجد التردد الطبيعي للمنظومة في هذه الحالة.



بالنسبة للمنظومة المبينة بالشكل (2-20a)

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{10}{20/981}} = 3.53 \text{ c.p.s (Hz)}$$

بالنسبة للمنظومة المبينة بالشكل (2-20b)

$$k_{eq} = k_1 + k_2 = 2k + 2k = 4k$$

$$\therefore f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4(10)}{20/981}} = 7.1 \text{ c.p.s (Hz)}$$

2-A 12 kgf body hung on the free end of the spring in the system as shown in fig.(2-21a) and the time of period to the vibration motion of this body is 0.85 sec. , Determined the spring stiffness and the time of period to the other body of 4.5 kgf when it is fixed at mid point of this spring as shown in fig.(2-21b).

2-جسم وزنه 12 kgf علق في الطرف الحر للنابض كما في المنظومة المبينة بالشكل (2-20a) وزمن الفترة الاهتزازية 0.85 sec. ، أوجد معامل النابض والفترة الزمنية لاهتزاز جسم آخر وزنه 4.5 kgf عندما يثبت في منتصف نفس النابض كما بالمنظومة المبينة بالشكل (2-21b).

الحل:

$$\omega_{n1} = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \quad , t_{p1} = \frac{2\pi}{\omega_{n1}} = 0.85 \quad \therefore \omega_{n1} = \frac{2\pi}{0.85} = 7.39 \text{ c.p.s}$$

$$\therefore k = \omega_n^2 \cdot m_1 \quad \therefore k = (7.39)^2 \cdot \left(\frac{12}{981}\right) = 0.67 \text{ kg}_f / \text{cm}.$$

فى حالة المنظومة المبينة بالشكل (2-21b)

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_2}} = \sqrt{\frac{4k}{m_2}} = \sqrt{\frac{4(0.67)}{4.5/981}} = 24.17 \text{ c.p.s.}$$

$$\therefore t_{p_2} = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{24.17} = 0.26 \text{ sec.}$$

3-A harmonic motion is expressed as $x=2.5 \sin(10\pi t-\pi/3)$ where x is measured in cm. , (t) in seconds and the angle in radians , determine (a) the frequency and the period of motion, (b) the maximum displacement, velocity and acceleration, (c) the displacement, velocity and acceleration at $t=0.3 \text{ sec}$.

3-حركة توافقية يعبر عنها بالمعادلة $x = 2.5 \sin(10\pi t - \pi/3)$ حيث x هي الإزاحة تقاس بالسنتيمتر ،

(t) الزمن بالثانية ، ω هي السرعة الزاوية وتقاس بالتقدير الدائرى radians ، أوجد:-

أ-التردد الطبيعي والزمن الدورى. ب-أقصى إزاحة وسرعة وعجلة.

ج-الإزاحة والسرعة والعجلة بعد فترة زمنية (0.3 sec)

الحل:-

أ-لايجاد التردد الطبيعي والزمن الدورى.

$$\therefore x = X \sin(\omega t - \theta) = 2.5 \sin(10\pi t - \pi/3) \quad \therefore \omega = 10\pi \text{ rad./sec}$$

$$\therefore f_n = \frac{\omega}{2\pi} = 5 \text{ (c.p.s)} \quad \therefore t_p = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f_n} = 0.2 \text{ sec}$$

ب-لايجاد أقصى إزاحة وسرعة وعجلة.

بما أن أقصى إزاحة هي أقصى سعة ويمكن إيجادها من المعادلة المعطاة ، أى أن

$$X_{\max} = \text{amplitude}(A) = 2.5 \text{ cm.}$$

$$v_{\max} = \omega X = (10\pi)(2.5) = 78.5 \text{ cm/sec}$$

$$a_{\max} = \omega^2 \cdot X = (10\pi)^2 (2.5/100) = 24.65 \text{ m/sec}^2$$

خ-لايجاد الإزاحة والسرعة والعجلة at $t=0.3 \text{ sec}$

$$x = 2.5 \sin[10\pi(0.3) - \pi/3] = 2.17 \text{ cm.}$$

$$v = \dot{x} = \left(\frac{2.5}{100}\right)(10\pi) \cos[(10\pi)(0.3) - \pi/3] = -0.38 \text{ m/sec}$$

$$a = \ddot{x} = \left(\frac{-2.5}{100}\right)(10\pi)^2 \sin[10\pi(0.3) - \pi/3] = -21.39 \text{ m/sec}^2$$

4-A body of mass 40 gm. excuting simple harmonic motion. The force constant is equall to 600 dyne/cm. The motion is started by displacing the body 16 cm to the right of its equilibrium position and imparting to it a velocity toward the right of 54cm/sec. Compute:-

(a) the period , (b) the frequency , (c) the angular frequency , (d) the total energy , (e) the amplitude , (f) the maximum velocity , (g) the maximum acceleration , (h) the phase angle , (i) the coordinate , velocity , and acceleration at time $\pi/10$ after the start of motion.

4-جسم كتلته 40 جرام يتحرك حركة توافقية بسيطة (s.h.m.) وكانت قوة الثابت (معامل النابض) 600 dyne/cm والحركة تبدأ بإزاحة الجسم مسافة 16 cm من جهة موضع الاتزان واعطى الجسم سرعة ابتدائية 54 cm/sec نحو تلك الجهة احسب: -

(a) زمن الدورة ، (b) التردد الطبيعي ، (c) التردد الدورى (d) الطاقة الكلية ، (e) السعة ، (f) أقصى سرعة (g) أقصى عجلة ، (h) زاوية الطور ، (i) الازاحة والسرعة والعجلة عند زمن $t=\pi/10$ بعد بداية الحركة.

الحل:-

$$(a) \because t_p = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{600}{40}}} = 1.6 \text{ sec}$$

$$(b) f_n = \frac{1}{t_p} = \frac{1}{1.62} = 0.617 \text{ (c.p.s)}$$

$$(c) \omega_n = 2\pi f_n = 2\pi(0.617) = 3.875 \text{ rad./sec}$$

$$(d) \text{The total energy (T.E.)} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(40)(54)^2 + \frac{1}{2}(600)(16)^2 = 135120 \text{ (erg.)}$$

$$(e) \text{The amplitude (A)} = \sqrt{\frac{2(T.E.)}{k}} = \sqrt{\frac{2(135120)}{600}} = 21.2 \text{ cm}$$

$$(f) \text{The max. velocity (v}_{\text{max.}}) = \sqrt{\frac{2(T.E.)}{m}} = \sqrt{\frac{2(135120)}{40}} = 82.2 \text{ (cm/sec)}$$

(g) $\because$ The maximum acceleration ($a_{\text{max.}}$) occurs at the ends of the path where the force is maximum.

$$\therefore a_{\text{max.}} = \omega^2 x_{\text{max}} = \omega^2 A = (3.875)^2 (21.2) = 318.33 \text{ cm/sec}^2$$

$$(h) \text{The phas angle } (\phi) \quad \because x_0 = A \sin \phi \quad \phi = \sin^{-1} \left(\frac{x_0}{A} \right)$$

$$\therefore \phi = \sin^{-1} \left(\frac{16}{21.2} \right) = \sin^{-1} (0.755) = 49^\circ$$

(j) The equation of motion $x = A \sin(\omega t + \phi) = 21.2 \sin(3.875t + 49^\circ)$

$$v = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \phi) = (3.875)(21.2) \cos(3.875t + 49^\circ) \\ = 82.15 \cos(3.875t + 49^\circ)$$

$$a = \ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \phi) = -318.3 \sin(3.875t + 49^\circ)$$

$$\therefore \text{at } t = \frac{\pi}{10} \therefore \text{the phase angle } (\omega t + \phi) = \left[3.875 \left(\frac{\pi}{10} \right) \left(\frac{180}{\pi} \right) + 49^\circ \right] = 118^\circ 75'$$

$$\therefore x = 21.2 \sin(118^\circ 75') = 18.587 \text{ cm}$$

$$\dot{x} = v = -39.51 \text{ cm/sec} \quad a = \ddot{x} = -279.1 \text{ cm/sec}^2$$

5-A 10 kg body hung on a spring displaces it 40 cm. , it is removed and then 200 gm. is hung on the same spring , the spring stretched and released.

(a) Find the stiffness coefficient of the spring .

(b) Find the period and frequency of the vibration.

(c) If the amplitude is equal to 5 cm. , calculate the total energy of the vibration . Find also the kinetic energy when the displacement is 2 cm. from the central position of vibration.

5-جسم كتلته 10 kg علق في نابض فحدث له إزاحة 40 cm . فإذا أزيلت الكتلة الأولى وعلق بدلا منها كتلة أخرى 200 gm. في نفس النابض فحدث له تمدد ثم ترك حرا .

(أ) أوجد معامل النابض (ب) أوجد الزمن الدوري والتردد الطبيعي للاهتزاز. (ج) إذا كانت

السعة A = 5 cm. ، احسب الطاقة الكلية للاهتزاز ، وايضا أوجد طاقة الحركة عندما تكون الإزاحة 2 cm. من مركز موضع الاهتزاز.

الحل:-

$$(a) F_s = k\Delta \quad \therefore k = \frac{F_s}{\Delta} = \frac{10(10^3)(980)}{40} = 245(10^3) \text{ dyn/cm}$$

$$(b) \therefore \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{245(10^3)}{200}} = 35 \text{ rad/sec} \quad \therefore t_p = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{35} = 0.179 \text{ sec}$$

$$\therefore f_n = \frac{1}{t_p} = 5.59 \text{ cycle/sec}$$

$$(c) \text{The total energy (T.E.)} = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kA^2 = \frac{1}{2} \omega^2 m A^2 = \frac{1}{2} (35)^2 (200) (5^2) = 3062500 \text{ ergs}$$

When the displacement is 2 cm. from the central position of vibration.

$$\therefore \text{The kinetic energy (K.E.)} = \frac{1}{2} k(A^2 - x^2) = \frac{1}{2} (245)(10^3) [5^2 - 2^2] = 2572.5(10^3) \text{ ergs.}$$

6-A body of mass 800 gm. is suspended from a coil spring of negligible mass , and stretches the spring 10 cm. Find the frequency and amplitude of the insuing motion if the body is displaced 5

cm. below its equilibrium position and given a downward velocity of 70 cm/sec

6-جسم كتلته 800 gm. علق في نابض حلزوني مهمل الكتلة فحدث تمدد للنابض 10 cm. أوجد التردد الطبيعي والسعة للحركة إذا حدث للجسم إزاحة 5 cm. اسفل وضع الاتزان واعطى له سرعة 70 cm/sec لأسفل.

الحل:

$$\therefore mg = k\Delta \therefore k = \frac{mg}{\Delta} = \frac{800(980)}{10} = 78400 \text{ dyn/cm.}$$

$$\therefore \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{78400}{800}} = 9.89 \text{ rad/sec}$$

$$\therefore \text{The initial potential (P.E.)} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(78400)(5^2) = 98(10^4) \text{ erg.}$$

$$\text{The initial kinetic energy (K.E.)} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(800)(70^2) = 196(10^4) \text{ erg.}$$

$$\text{The total energy (T.E.)} = K.E. + P.E. = (196 + 98)(10^4) = 294(10^4) \text{ ergs.}$$

$$\therefore T.E. = (P.E.)_{\max} \therefore 294(10^4) = \frac{1}{2}kA^2 \therefore A = \sqrt{\frac{2(294)(10^4)}{78400}} = 8.7 \text{ cm.}$$

7-A weight of 40 lb is vertically suspended on a steel wire of length 60 in. and crosssectional area 0.0015 in². Determine the frequency of free vibrations of the weight if the modulus for steel is $E = 30(10^6) \text{ lb. per in}^2$, Determine the amplitude of this vibration if the initial displacement

$x_0 = 0.02 \text{ in}$, and initial velocity $\dot{x}_0 = 1.5 \text{ in. per sec}$

7-علق وزن 40 lb راسيا في سلك من الصلب طوله 60 in ومساحة مقطعية $A = 0.0015 \text{ in}^2$. أوجد التردد الطبيعي للاهتزاز الحر للوزن إذا كان معامل المرونة للسلك $E = 30(10^6) \text{ Ib/in}^2$ أوجد سعة الاهتزاز إذا كانت الإزاحة الابتدائية $x_0 = 0.02 \text{ in}$ والسرعة الابتدائية $\dot{x}_0 = 1.5 \text{ in/sec}$.
الحل:

بما ان التمدد الطولي الاستاتيكي للسلك يعين من العلاقة التالية:

$$\Delta_{st} = \text{the static elongation of the wire} = \frac{W.L}{E.A}$$

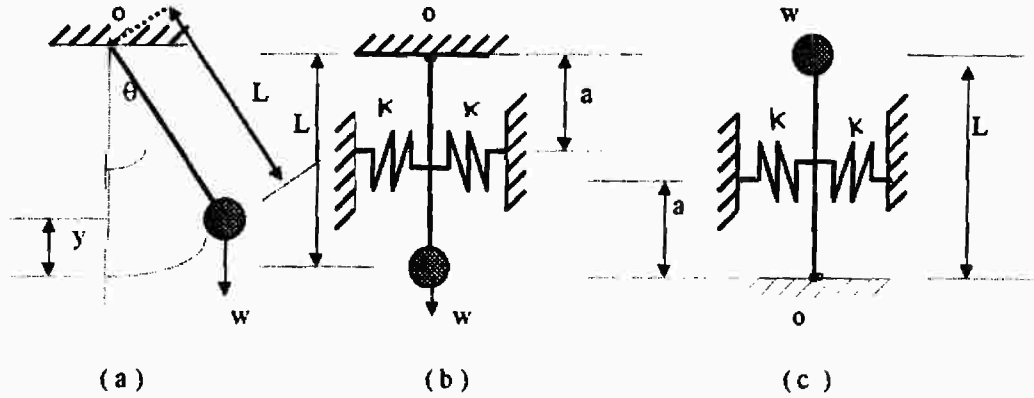
$$\therefore \Delta_{st} = \frac{40(60)}{30(10^6)(0.0015)} = 0.053 \text{ in} \quad \therefore \omega_n = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{st}}} = \sqrt{\frac{32.2(12)}{0.053}} = 85.4 \text{ c.p.s}$$

$$\therefore \text{the amplitude of vibration} = A = \sqrt{(0.02)^2 + \left(\frac{1.5}{85.4}\right)^2} = 0.027 \text{ in}$$

$$\text{where } A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)^2}$$

8- Find the frequencies of small vibrations of the pendulums shown in figs. (2-22a,b,c) by using the equation of energy (energy method). Neglect the mass of the bar and assume that in each case the mass of the weight W is concentrated in its center.

8- أوجد ترددات الاهتزازات الصغيرة للبندولات الموضحة بالشكل (2-22a,b,c) باستخدام معادلة الطاقة (طريقة الطاقة). أهمل كتلة القضيب مع فرض أن الكتلة W في كل حالة تكون متركزة في منتصفها.



الشكل (2-22a,b,c)

أ- بالنسبة للبندول (a)

إذا كانت الزاوية θ هي زاوية ميل البندول على الرأسى فإن طاقة الحركة (K.E.) للبندول تعين من العلاقة الآتية:

$$\because x = l\theta, \quad \dot{x} = l\dot{\theta} \quad \therefore K.E. = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x})^2 = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta})^2 \dots\dots\dots(1)$$

حيث التعبير في طاقة الوضع للبندول ينتج من الازاحة الرأسية y للوزن w وبذلك يمكن كتابة لازاحة الرأسية كما يلي

$$\because y = l - l \cos \theta = l(1 - \cos \theta) \cong l \frac{\theta^2}{2} \quad \therefore P.E. = W.y = mg.L \left(\frac{\theta^2}{2} \right)$$

$$\therefore T.E. = K.E. + P.E. = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}mgl\theta^2 = \text{const} \dots\dots\dots(2)$$

ولإيجاد معادلة الحركة للبندول (a) بطريقة الطاقة نفاضل المعادلة (2) بالنسبة للزمن كما يلي:

$$\therefore \frac{1}{2}ml^2(2\dot{\theta}\ddot{\theta}) + \frac{1}{2}mg.l(2\theta\dot{\theta}) = 0 \quad \therefore \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{g}{l}} \dots\dots c.p.s$$

ويمكن إيجاد معادلة الحركة بطريقة نيوتن كما يلي:

بما أن عزم إلى الكامن يساوى في المقدار ويضاد في الاتجاه عزم اللي الاسترجاعى ، حيث يعين عزم

الى الكامن بأخذ العزوم للمنظومة حول محور الدوران 0 ، بينما عزم اللي الاسترجاعى يساوى حاصل ضرب عزم القصور الذاتى للبندول فى العجلة الزاوية ويعبر عن ذلك بالمعادلات الاتية:

$$\sum M_0 = -I\ddot{\theta} \quad \therefore \sum M_0 = mgl\theta, \quad \therefore I = ml^2$$

$$ml^2.\ddot{\theta} + mgl\theta = 0 \quad \therefore \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \quad \therefore \omega_n = \sqrt{\frac{g}{l}} \dots c.p.s$$

ب- بالنسبة للبندول المبين بالشكل (b) :

نجد إن طاقة الوضع لوزن الكتلة $W=mg$ تضاف الى طاقة الوضع للنوابض وبالتالي يمكن كتابة معادلة الطاقة الكلية للمنظومة كمايلى:

$$\therefore T.E. = K.E. + P.E. = const. \quad \therefore K.E. = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1)^2 = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta})^2$$

$$\therefore k_{eq.} = 2k \therefore P.E. = W.y + \left(\frac{1}{2}k_{eq.}x_2\right), \therefore y = l - l\cos\theta = l(1 - \cos\theta) = l \cdot \frac{(\theta)^2}{2}$$

$$\therefore P.E. = mgl \cdot \frac{(\theta)^2}{2} + \frac{1}{2}(2k)a^2 \cdot (\theta)^2 \quad \therefore \frac{d(T.E.)}{dt} = \frac{d}{dt}(K.E. + P.E.) = 0$$

$$\therefore \frac{1}{2}ml^2 \left(2\dot{\theta} \cdot \ddot{\theta} \right) + mgl \cdot \frac{(2\theta \cdot \dot{\theta})}{2} + k.a^2 \cdot (2\theta \cdot \dot{\theta}) = 0 \quad \therefore \ddot{\theta} + \left(\frac{mgl + 2k.a^2}{ml^2} \right) \theta = 0$$

$$\therefore \omega_n = \sqrt{\frac{mgl + 2k.a^2}{ml^2}} = \sqrt{\frac{2k.a^2}{ml^2} + \frac{g}{l}} \dots c.p.s$$

ج- بالنسبة للبندول المبين بالشكل (c) نجد أن طاقة الوضع لوزن الكتلة $W=mg$ عند إزاحة البندول من

الوضع الرأسى تقل أى تطرح من الطاقة الكلية وبالتالي يمكن كتابة معادلة الطاقة الكلية كما يلى:

$$\therefore T.E. = K.E. + P.E. = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta})^2 - mgl \cdot \frac{(\theta)^2}{2} + k.a^2 \cdot (\theta)^2 \quad \therefore \frac{d}{dt}(T.E.) = 0$$

$$\therefore \frac{1}{2}ml^2 \left(2\dot{\theta} \ddot{\theta} \right) + k.a^2 \cdot (2\theta \cdot \dot{\theta}) - mgl \cdot \frac{(2\theta \cdot \dot{\theta})}{2} = 0 \quad \therefore \ddot{\theta} + \left(\frac{2ka^2 - mgl}{ml^2} \right) \theta = 0$$

$$\therefore \omega_n = \sqrt{\frac{2ka^2}{ml^2} - \frac{g}{l}} \dots rad/sec.$$

9-Two equal masses which each mass of 6 kg are suspended in a free end of a coil spring has stiffness 3 kN. If one mass is suddenly removed and the system is released to vibrate.

1-Find the amplitude and the frequency of the vibration motion.

2-Find the speed, the acceleration of the mass when the mass at the middle position of the amplitude.

3-Find the kinetic energy of vibration (in jole units

9-كتلتين متساويتين كتلة كل واحدة منها 6 كيلو جرام علقوا في نهاية الطرف الحر لنابض حلزوني معاملة 3 كيلو نيوتن ، إذا إزيلت إحدى الكتلتين فجأة وتركّت المنظومة تهتز .

1-أوجد السعة والتردد للحركة الاهتزازية. 2-أوجد السرعة والعجلة للكتلة عندما تكون الكتلة في موضع منتصف السعة. 3-أوجد طاقة الحركة للاهتزاز بوحدة الجول.

الحل:-

1-عند موضع الاتزان نجد ان $Mg = k\Delta$ حيث M هي مجموع الكتلتين 12 كيلو جرام

$$\therefore \Delta = \frac{M \cdot g}{k} = \frac{12(9.81)}{3(10)^3} = 0.03924m$$

$$\Delta_1 = \frac{m \cdot g}{k} = \frac{6(9.81)}{3(10)^3} = 0.01962m \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta_1}}$$

وفي حالة تعليق أحد الكتلتين نجد أن

$$\therefore \omega_n = \sqrt{\frac{9.81}{0.01962}} = 22.36 \text{ rad/sec.}$$

2-عند مرور الكتلة عند موضع منتصف السعة.

$$\therefore v = \dot{x} = \omega_n \sqrt{a^2 - x^2}, \quad a = \ddot{x} = 0.01962m, \quad x = a \cos \varphi \quad \varphi = 60^\circ$$

$$\therefore x = 0.01962 \cos 60 = 0.00981, \quad v = 22.35 \sqrt{(0.01962)^2 - (0.00981)^2} = 0.38m/sec$$

$$f = \omega^2 x = (22.35)^2 (0.00981) = 4.905m/sec^2$$

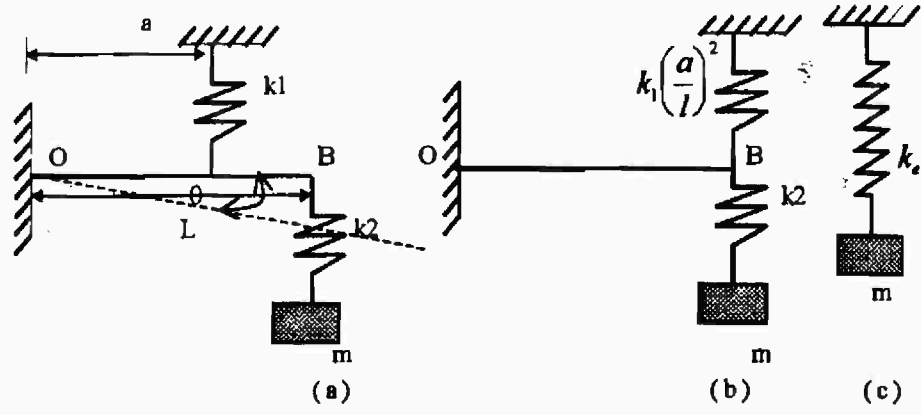
3-لايجاد سرعة الكتلة عند مرورها بالموضع المتوسط وإيجاد طاقة الحركة

$$\therefore v_{\max} = \omega^2 \cdot a = (22.35)^2 (0.01962) = 0.4385 m/sec$$

$$\text{at } x = 0, \therefore K.E. = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 = \frac{1}{2} (4) (0.4385)^2 = 0.3844 \text{ Jole}$$

10-Determine the natural frequency of vibration of the system shown in fig (23). Assume the bar OB to be rigid and weightless.

10- أوجد التردد الطبيعي المكافئ للاهتزاز للمنظومة الموضحة بالشكل (23 أ). إفرض ان القضيب OB جاسئ ومهمل الوزن.



(2-23-a,b,c)

يمكن نقل النابض k_1 من البعد a الى البعد L فيكون معامل النابض في هذه الحالة $k = k_1 \left(\frac{a}{L} \right)^2$

وباعتبار ان القضييب OB يحدث له إزاحة زاوية θ وبذلك يمكن إيجاد العزم الناتج ويعبر عنه بالعلاقة

$$k_1 \cdot a \theta \cdot a = k_1 \cdot a^2 \theta \quad (1)$$

وعندما ينقل النابض الى البعد L وباعتبار ان معامل k فيمكن كتابة العزم الجديد كما بالمعادلة الآتية:

$$k L \theta \cdot L = k L^2 \theta \quad (2)$$

وفي حالة المنظومة (2-23-b) المكافئة ينتج من المعادلتين (1),(2) معامل النابض بعد نقله الى النقطة B يكون

$$k = \left(\frac{a}{L} \right)^2 \cdot k_1 \quad (3)$$

وتكون المنظومة (b) هي المنظومة المكافئة للمنظومة (a) ويمكن إيجاد k_e للمنظومة (b) كما يلي:

$$\frac{1}{k_e} = \frac{1}{k_2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{L} \right)^2 \cdot k_1} = \frac{k_1 \left(\frac{a}{L} \right)^2 + k_2}{k_2 \left(\frac{a}{L} \right)^2 \cdot k_1}$$

وبذلك يمكن إيجاد معامل النابض المكافئ للمنظومة من العلاقة التالية:

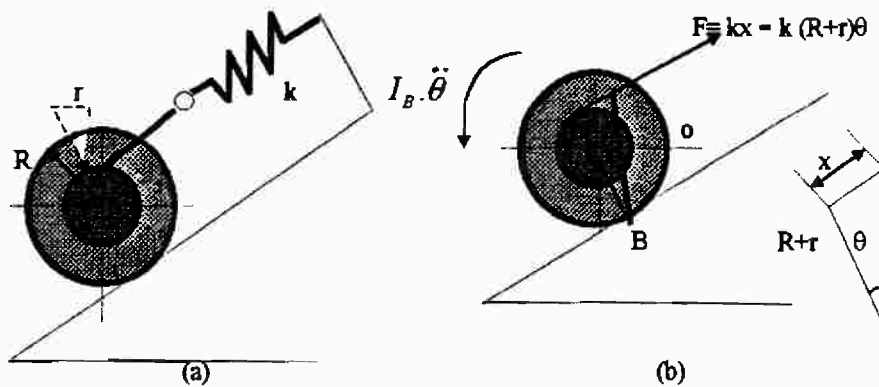
$$k_e = \frac{k_2 \left(\frac{a}{L} \right)^2 \cdot k_1}{k_1 \left(\frac{a}{L} \right)^2 + k_2}$$

وبذلك يمكن إيجاد التردد الطبيعي للمنظومة (c) من العلاقة التالية:

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_s}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 k_2 \left(\frac{a}{l}\right)^2}{m \left[k_2 + \left(\frac{a}{l}\right)^2 k_1 \right]}} \text{ Hz}$$

11- A uniform wheel of radius R can roll without slipping on an inclined plane. Concentric with the wheel, and fixed to it, is a drum of radius r around which is wrapped one end of a string. The other end of the string is fastened to an anchored spring, of stiffness k , as shown in fig. (2-24). Both spring and string are parallel to the plane. The total mass of the wheel / drum assembly is m and its moment of inertia about the axis through the centre of the wheel O is I . If the wheel is displaced a small distance from its equilibrium position and released, Determine the equation describing the ensuing motion and hence calculate the frequency of the oscillations. Damped is negligible

11- عجلة منتظمة نصف قطرها R تتدحرج بدون إنزلاق على مستوى مائل ، ومركز العجلة مثبت بـ قرص نصف قطرة r ولف إحدى طرفي خيط حول القرص والطرف الاخر بـ خطاف (هلب) ركب فيـة نابض معاملته k كما مبين بالشكل (24) وكل من النابض والخيط متوازيين للمستوى المائل ، وكتلة كل من العجلة والقرص مجمعة معا m وعزم القصور الذاتي لهما حول محور يمر بمركزهما O هو I ، وإذا إزاحت العجلة لمسافة صغيرة من وضع الاتزان ثم ترك . أوجد المعادلة التي تصف حركة المنظومة وكذلك احسب التردد الطبيعي للتذبذب مع إهمال الخمد.



(2-24-a,b)

شكل

بفرض أن الكتلة للمنظومة معا m وهي العجلة والقرص اعطى لهما إزاحة زاوية مقدارها θ في إتجاه عكس عقارب الساعة وذلك من موضع الاتزان فان النابض الذي معاملته k يحدث لـ إزاحة زاوية مقدارها $x = (R+r)\theta$ وبذلك تكون قوة مقاومة النابض تعين من العلاقة التالية $F = k(R+r)\theta$ وحيث ان الدوراني كون لحظي عند نقطة التماس B لذلك فان العزم حول B يعين من العلاقة التالية:

$$\sum M_B = -kx(R+r) = -k(R+r)^2 \theta$$

أ- طريقة نيوتن :

$$\therefore I_B \ddot{\theta} = -k(R+r)^2 \theta \quad \therefore I_B = mR^2 + I \quad \therefore \ddot{\theta} + \frac{k(R+r)^2}{I + mR^2} \theta = 0$$

$$\therefore \omega_n = \sqrt{\frac{k(R+r)^2}{mR^2 + I}} \dots \text{rad/sec} , \quad f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k(R+r)^2}{mR^2 + I}} \dots \text{Hz}$$

ب- طريقة الطاقة:

$$\therefore K.E. = \frac{1}{2} I_B (\dot{\theta})^2 , P.E = \frac{1}{2} k(R+r)^2 \theta^2 ,$$

$$\therefore T.E. = K.E. + P.E = \text{const}$$

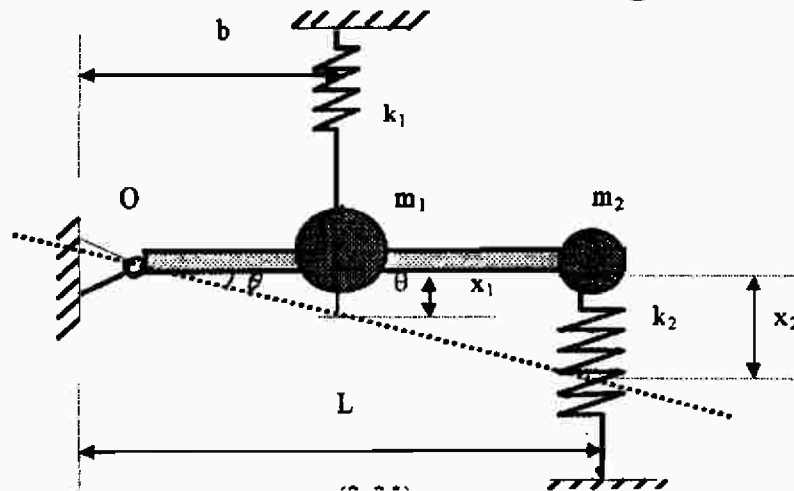
$$\therefore \frac{d(T.E.)}{dt} = 0, \quad \therefore \frac{1}{2} I_B \left(2\dot{\theta} \ddot{\theta} \right) + \frac{1}{2} k(R+r)^2 (2\theta \dot{\theta}) = 0$$

$$I_B \ddot{\theta} + k(R+r)^2 \theta = 0 \quad \therefore \ddot{\theta} + \left(\frac{k(R+r)^2}{mR^2 + I} \right) \theta = 0$$

$$\therefore f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k(R+r)^2}{mR^2 + I}} \dots \text{Hz}$$

12-Determine the equation of motion and the natural frequency of the system as shown in fig.(2-25) and also determine the equivalent mass and the equivalent stiffness of the spring.

12-أوجد معادلة الحركة والتردد الطبيعي للمنظومة المبينة بالشكل (25-2) وكذلك أيضا أوجد الكتلة المكافئة ومعامل النابض المكافئ.



الشكل (2-25)

$$\sin \theta = \frac{x_1}{b} = \frac{x_2}{l}, \because \theta \text{ is very small angle } \therefore \sin \theta \cong \theta, \therefore x_1 = b\theta, x_2 = l\theta$$

$$v_1 = \dot{x}_1 = b\dot{\theta}, v_2 = \dot{x}_2 = l\dot{\theta} \quad \therefore K.E. = \frac{1}{2}m_1.v_1^2 + \frac{1}{2}m_2.v_2^2 = \frac{1}{2}m_1.b^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_2.l^2\dot{\theta}^2$$

$$P.E. = \frac{1}{2}k_1.x_1^2 + \frac{1}{2}k_2.x_2^2 = \frac{1}{2}k_1.b^2.(\theta)^2 + \frac{1}{2}k_2.l^2.(\theta)^2$$

$$\therefore T.E. = K.E. + P.E. = \text{const.}, \frac{d(T.E. + K.E.)}{dt} = 0$$

$$\therefore \frac{1}{2}m_1.b^2 \left(2\dot{\theta}.\ddot{\theta} \right) + \frac{1}{2}m_2.l^2 \left(2\dot{\theta}.\ddot{\theta} \right) + \frac{1}{2}k_1.b^2 \left(2\theta.\dot{\theta} \right) + \frac{1}{2}k_2.l^2 \left(2\theta.\dot{\theta} \right) = 0$$

$$\therefore (m_1.b^2 + m_2.l^2)\ddot{\theta} + (k_1.b^2 + k_2.l^2)\theta = 0$$

$$\therefore \text{the equation of motion} \quad \ddot{\theta} + \left(\frac{k_1.b^2 + k_2.l^2}{m_1.b^2 + m_2.l^2} \right) \theta = 0$$

$$\therefore \omega_n = \sqrt{\frac{k_1.b^2 + k_2.l^2}{m_1.b^2 + m_2.l^2}} \quad \text{c.p.s}$$

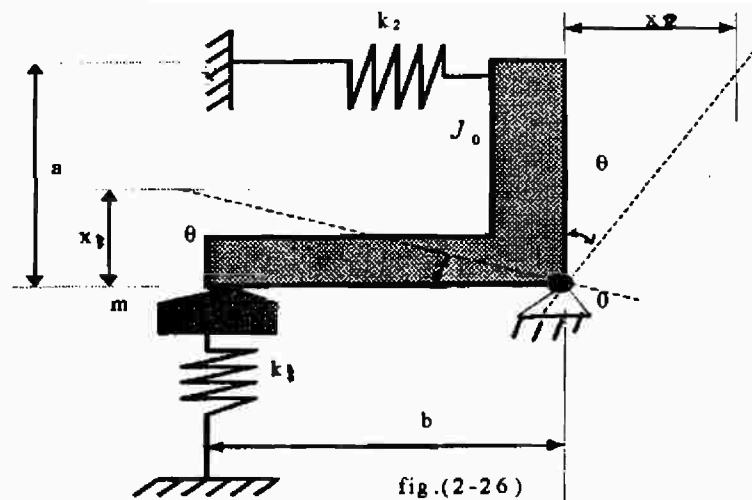
$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1.b^2 + k_2.l^2}{m_1.b^2 + m_2.l^2}} \quad \text{HZ}$$

$$\text{the mass equivalent} = m_{eqv.} = m_1.b^2 + m_2.l^2$$

$$\text{the equivalent of spring stiffness} = k_1.b^2 + k_2.l^2$$

13-Determine the equation of motion and the natural frequency of the system as shown in fig.(2-26) , also determine the equivalent of mass and the equivalent of the spring stiffness.

13-أوجد معادلة الحركة والتردد الطبيعي للمنظومة المبينة بالشكل (2-26) ، أيضا أوجد الكتلة المكافئة ومعامل النابض المكافئ.



$$\sin\theta \approx \theta = x_1/b = x_2/a \therefore x_1 = b\theta, x_2 = a\theta$$

$$\therefore v_1 = \dot{x}_1 = b\dot{\theta} \quad v_2 = \dot{x}_2 = a\dot{\theta} \quad \therefore T.E. = K.E. + P.E. = \text{const}$$

$$\therefore \frac{d(T.E.)}{dt} = \frac{d}{dt}(K.E. + P.E.) = 0 \quad \therefore K.E. = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2}J_0(\dot{\theta})^2$$

$$\therefore K.E. = \frac{1}{2}mb^2(\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}J_0(\dot{\theta})^2$$

$$P.E. = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2 = \frac{1}{2}k_1b^2(\theta)^2 + \frac{1}{2}k_2a^2(\theta)^2$$

$$\therefore \frac{1}{2}mb^2(2\dot{\theta}\ddot{\theta}) + \frac{1}{2}J_0(2\dot{\theta}\ddot{\theta}) + \frac{1}{2}k_1b^2(2\theta\dot{\theta}) + \frac{1}{2}k_2a^2(2\theta\dot{\theta}) = 0$$

$$(mb^2 + J_0)\ddot{\theta} + (k_1b^2 + k_2a^2)\theta = 0$$

$$\therefore \text{the equation of motion} \quad \ddot{\theta} + \left(\frac{k_1b^2 + k_2a^2}{mb^2 + J_0} \right) \theta = 0$$

$$\therefore f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1b^2 + k_2a^2}{mb^2 + J_0}} \dots \dots \text{HZ}$$

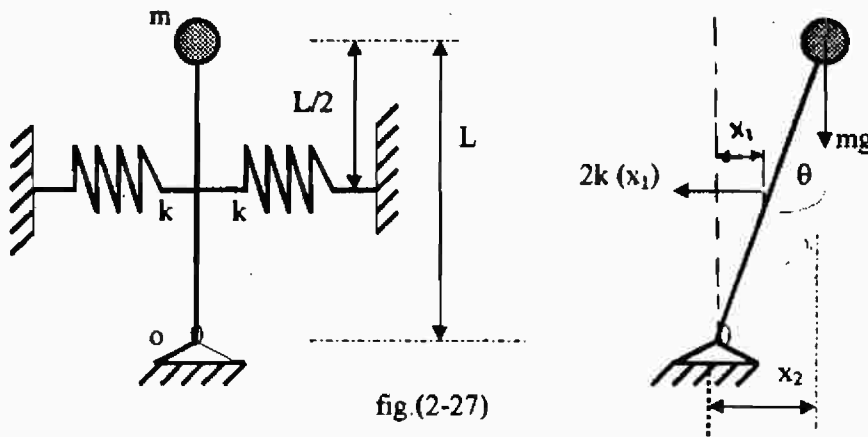
$$\text{the mass equivalent} = mb^2 + J_0$$

$$\text{the equivalent of the spring stiffness} = k_1b^2 + k_2a^2$$

14-A simple pendulum in position up side down as shown in fig. (2-27). Two springs are fixed at the mid-point of the simple pendulum, Each of the spring has stiffness (k), A mass (m) fixed in the free end of the simple pendulum. a-Determine the natural frequency of the system, when a small angle displacement (θ) give to the system. b-If the length of the simple pendulum can be change, Determine the length of the simple pendulum, when it can not be able to vibrate.

14-بندول بسيط في وضع مقلوب كما مبين بالشكل (2-27)، نابضين مثبتين عند منتصف البندول

البسيط، معامل كل نابض k ، كتلة (m) تثبت في الطرف الحر للبندول البسيط. (ا) أوجد التردد الطبيعي للمنظومة، إذا أعطى إزاحة زاوية (θ) صغيرة للمنظومة. (ب) إذا كان طول البندول البسيط يمكن تغييره ، أوجد طول البندول البسيط عندما لا يكون غير قادر على الاهتزاز.



بما أن عزم اللي الكامن يساوى فى المقدار ويضاد فى الاتجاه عزم اللي الاسترجاعى ، حيث عزم اللي الكامن يعين باخذ العزوم حول محور الدوران وعزم اللي الاسترجاعى يساوى حاصل ضرب عزم القصور الذاتى للمنظومة فى العجلة الزاوية.

$$\begin{aligned} \therefore x_1 &= \frac{1}{2}l\theta, \quad x_2 = l\theta, \quad \sum M_0 = -I\ddot{\theta} \\ \therefore \sum M_0 &= 2k \frac{l}{2} \theta \cdot \frac{l}{2} - mgl\theta \\ \therefore 0.5kl^2\theta - mgl\theta + I\ddot{\theta} &= 0 \quad \therefore I\ddot{\theta} + (0.5kl^2 - mgl)\theta = 0 \\ \therefore \ddot{\theta} + \left(\frac{0.5kl^2 - mgl}{I} \right) \theta &= 0, \quad \therefore I = ml^2 \\ \therefore \omega_n &= \sqrt{\frac{0.5kl - mg}{ml}} \dots \dots \dots r.p.s \end{aligned}$$

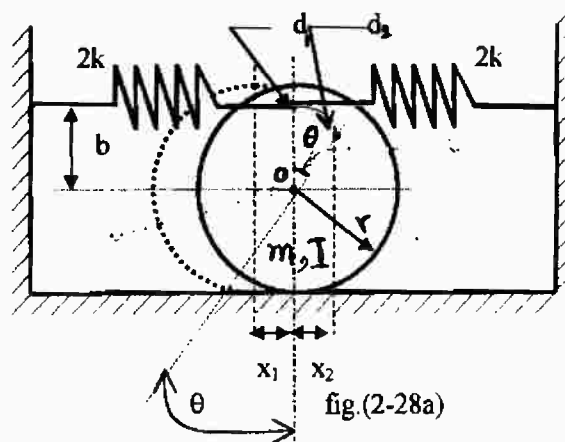
ويمكن إيجاد معامل الالتواء q وطول البندول عندما لا يكون غير قادر على الاهتزاز يكون التردد الطبيعي مساويا للصفر. كما يلى:

$$q = \frac{F \cdot \left(\frac{l}{2} \right)}{\theta} = \frac{kx_1 \cdot \left(\frac{l}{2} \right)}{\theta} = \frac{kl^2}{4\theta} \quad \therefore \sqrt{\frac{0.5kl - mg}{ml}} = 0 \quad \therefore 0.5kl - mg = 0 \quad \therefore l = \frac{2mg}{k}$$

15-Assuming that the cylinder shown in fig.(2-28) rolls on the support without slippage , the cylinder of mass m and the moment of inertia $I = \frac{mr^2}{2}$, determine the equation of motion of the system by the Energy Method and Newton s law of Motion.

15-افرض ان الاسطوانة المبينة بالشكل (28-2) تتدحرج بدون إنزلاق ، كتلة الاسطوانة m وعزم

القصور الذاتي لها I ، أوجد معادلة الحركة للمنظومة بطريقتي الطاقة وقانون نيوتن للحركة.



عندما تتدحرج الاسطوانة التي كتلتها m وعزم القصور الذاتي لها $I = \frac{mr^2}{2}$ ، فإن الاسطوانة تتحرك مسافة x_1 بينما نقطة إتصال النوابض d_1 تتحرك نفس المسافة x_1 بالإضافة إلى المسافة x_2 وذلك لأن نقطة d_1 ليست في مركز الاسطوانة ولكنها على بعد b من مركز الاسطوانة O وبالتالي فنقطة d_1 تتحرك حركة زاوية نتيجة دحرجة الاسطوانة وتأخذ الموضع d_2 وبالتالي يمكن إيجاد قيمة كل من x_1, x_2 بدلالة الزاوية θ كما يلي:

$$x_1 = r \sin \theta \approx r \theta, \quad x_2 = b \sin \theta \approx b \theta$$

وبذلك تكون إزاحة الاسطوانة هي $x_1 = r \theta$ ، وإزاحة النوابض هي مجموع الازاحتين x_1, x_2 أي إن $x_1 + x_2 = (r+b)\theta$

ونظراً لأن النوابض متصلة على التوازي فيكون معامل النوابض المكافئ هو مجموعهم ويعين من العلاقة

$$k_{eq} = 2k + 2k = 4k \text{ التالية:}$$

$$\therefore T.E. = K.E + P.E. = const \quad \therefore K.E. = \frac{1}{2}m(\dot{x})^2 + \frac{1}{2}I(\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}mr^2(\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}I(\dot{\theta})^2$$

$$\therefore P.E = \frac{1}{2} k_{eq} x_1^2 = 2k(r+b)^2 \theta^2$$

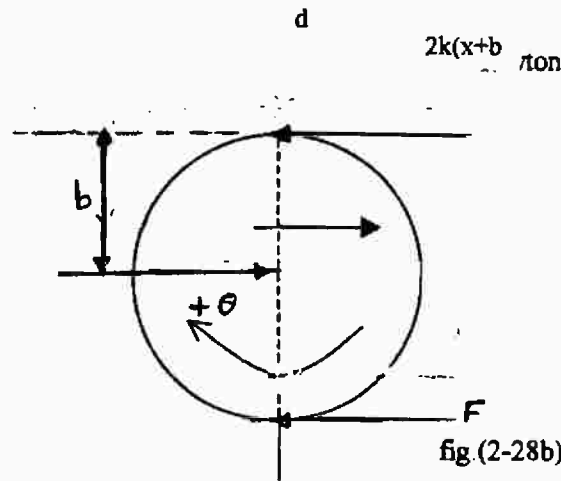
$$\therefore \frac{d(K.E.)}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m r^2 (\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} I (\dot{\theta})^2 + 2k(r+b)^2 (\theta)^2 \right] = 0$$

$$\therefore \frac{1}{2} m r^2 (2\dot{\theta} \ddot{\theta}) + \frac{1}{2} I (2\dot{\theta} \ddot{\theta}) + 2k(r+b)^2 (2\theta \dot{\theta}) = 0$$

$$\therefore (m r^2 + I) \ddot{\theta} + 4k(r+b)^2 \theta = 0 \quad \therefore \ddot{\theta} + \left(\frac{4k(r+b)^2}{m r^2 + I} \right) \theta = 0$$

$$\therefore \omega_n = \sqrt{\frac{4k(r+b)^2}{m r^2 + I}} = 2(r+b) \sqrt{\frac{2k}{3m r^2}} \dots \dots \dots r.p.s$$

$$\therefore f_n = \frac{(r+b)}{\pi r} \sqrt{\frac{2k}{3m}} \dots \dots \dots Hz$$



$$\therefore m \ddot{x} = \sum F \text{ in } x \text{ direction} \quad \therefore m \ddot{x} = -F - 4k(x+b\theta) = -F - 4k(r+b)\theta \quad (1)$$

$$\therefore I \ddot{\theta} = \sum \text{Troque about } (o) \quad \therefore I \ddot{\theta} = F r - 4k(x+b\theta)b = F r - 4k(r+b)b\theta$$

$$\therefore \frac{m r^2}{2} \ddot{\theta} = F r - 4k(r+b)b\theta \dots \dots \dots (2)$$

بضرب المعادلة (1) على r ينتج ان

$$mr^2 \ddot{\theta} = -F r - 4k(r+b)b\theta \dots\dots\dots(3)$$

$$\text{from (2), (3)} \quad \left(mr^2 + \frac{mr^2}{2} \right) \ddot{\theta} = -4k(r+b)b\theta - 4k(r+b)\theta$$

$$\therefore 3mr^2 \ddot{\theta} + 8k(r+b)^2 \theta = 0 \quad \therefore \ddot{\theta} + \left(\frac{8k(r+b)^2}{3mr^2} \right) \theta = 0 \dots\dots\dots(4)$$

$$\therefore \omega_n = \sqrt{\frac{8k(r+b)^2}{3mr^2}} = \frac{2(r+b)}{r} \sqrt{\frac{2k}{3m}} \text{ r.p.s.}, f_n = \frac{(r+b)}{\pi.r} \sqrt{\frac{2k}{3m}} \text{ Hz} \dots\dots\dots(5)$$

16-Acylinder mass m and the moment of inertia I as shown in fig.(2-29) , rolls on the roughness support without slippage , Determine the equation of motion and the natural frequency by Energy

Method and $I = \frac{mr^2}{2}$ Newton's law of Motion. where

16-إسطوانة كتلتها m وعزم القصور الذاتي لها I كما مبين بالشكل (2-29) تتدحرج على سطح خشن بدون إنزلاق ، أوجد معادلة الحركة والتردد الطبيعي بطريقة الطاقة وقانون نيوتن للحركة. حيث

$$I = \frac{mr^2}{2}$$

أولاً-طريقة الطاقة:

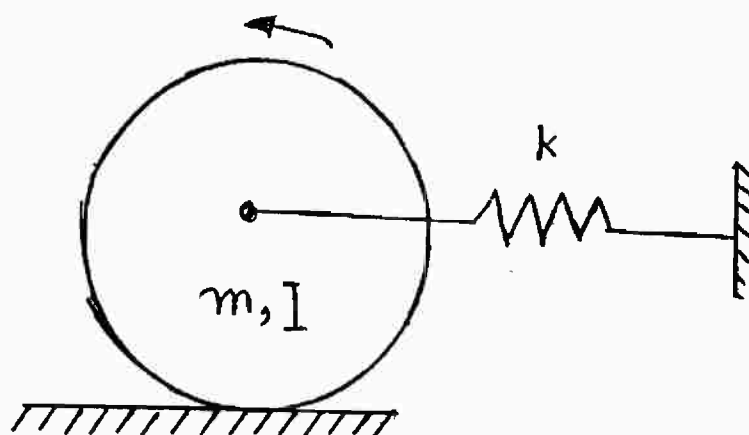
عندما تتدحرج الاسطوانة لازاحة خطية x فانها تتناظر إزاحة

زاوية يعبر عنها بالعلاقة $r\theta$ حيث $x = r\theta$ ، وبذلك تكون

$\dot{x} = r\dot{\theta}$ ، $\ddot{x} = r\ddot{\theta}$ ونظرا لان الطاقة الكلية تكون ثابتة

لاى منظومة عند اى موضع ، وبالتالي يمكن التعبير عن الطاقة

الكلية لهذه المنظومة بالعلاقة التالية: T.E.=K.E.+P.E.=const.



الشكل (2-29)

$$\therefore K.E. = \frac{1}{2} m \left(\dot{x} \right)^2 + \frac{1}{2} I \left(\dot{\theta} \right)^2 = \frac{1}{2} m r^2 \left(\dot{\theta} \right)^2 + \frac{1}{2} I \left(\dot{\theta} \right)^2$$

$$P.E. = \frac{1}{2} (2k) (x)^2 = kx^2 = kr^2 (\theta)^2$$

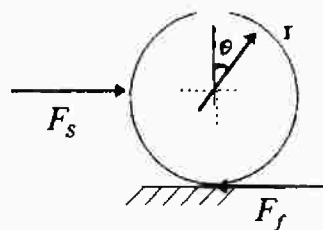
$$\therefore \frac{d(T.E.)}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m r^2 \left(\dot{\theta} \right)^2 + \frac{1}{2} I \left(\dot{\theta} \right)^2 + k r^2 (\theta)^2 \right] = 0$$

$$\therefore m r^2 \cdot \dot{\theta} \ddot{\theta} + I \dot{\theta} \cdot \ddot{\theta} + 2k r^2 \cdot \theta \cdot \dot{\theta} = 0$$

$$\therefore (m r^2 + I) \ddot{\theta} + 2k r^2 \cdot \theta = 0 \quad \therefore \ddot{\theta} + \left(\frac{2k r^2}{m r^2 + I} \right) \theta = 0, \quad \therefore I = \frac{m r^2}{2}$$

$$\therefore \omega_n = \sqrt{\frac{4k r^2}{3m r^2}} = 2 \sqrt{\frac{k}{3m}} \dots \dots \dots r.p.s$$

ب- طريقة نيوتن (قانون نيوتن الثاني للحركة)



الشكل (2-30)

طبقاً لقانون نيوتن الثاني نجد أن:

$$\therefore \sum F = m \ddot{x} \quad , \therefore x = r \theta \quad \therefore \dot{x} = r \dot{\theta} \quad \ddot{x} = r \ddot{\theta}$$

$$\therefore \sum F = F_f - F_s \quad , \therefore F_s = 2kx = 2kr\theta$$

$$\therefore F_f - 2kr\theta = mr \ddot{\theta} \dots \dots \dots (1)$$

وبما أن عزم اللي الكامن يساوى فى المقدار ويضاد فى الاتجاه عزم اللي الاسترجاعى (الرجوعى) ،
حيث عزم اللي الكامن يعين بأخذ العزوم حول مركز الدوران 0 ، عزم اللي الاسترجاعى يساوى حاصل ضرب عزم القصور الذاتى فى المعجلة الزاوية.

$$\therefore \sum M_0 = F_f r \quad , \therefore \sum M_0 = -I \ddot{\theta} \quad \therefore F_f = -\frac{I \ddot{\theta}}{r} \dots \dots \dots (2)$$

وبالتعويض من المعادلة (2) فى المعادلة (1) ينتج أن:

$$\therefore -\frac{I\ddot{\theta}}{r} - 2kr\theta = mr\ddot{\theta}$$

$$\therefore mr\ddot{\theta} + \frac{I\ddot{\theta}}{r} + 2kr\theta = 0 \quad \therefore \left(mr + \frac{mr^2}{2r} \right) \ddot{\theta} + 2kr\theta = 0$$

$$\therefore \left(\frac{3mr}{2} \right) \ddot{\theta} + 2kr\theta = 0 \quad \therefore \ddot{\theta} + \left(\frac{4kr}{3mr} \right) \theta = 0 \quad \omega_n = 2\sqrt{\frac{k}{3m}} \dots r.p.s$$

17-Determine the equation of motion and the natural frequency of the system as shown in fig. (2-31) , by Energy Method , where it is composed from a mass m , a spring has a stiffness coefficient k and a disc has moment of inertia I.

17-أوجد معادلة الحركة والتردد الطبيعي للمنظومة المبينة بالشكل (2-31) ، بطريقة نيوتن حيث تتكون من كتلة m ونابض معاملته k وقرص عزم القصور الذاتي I.

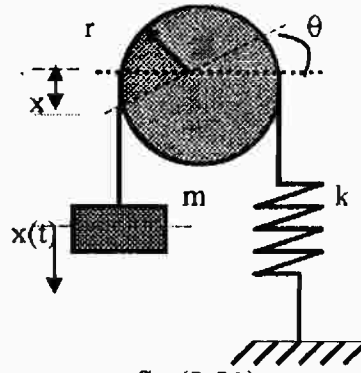


fig.(2-31)

$$\therefore x = r\theta \quad \therefore \dot{x} = r\dot{\theta} \quad \ddot{x} = r\ddot{\theta}$$

$$\therefore T.E. = K.E. + P.E. = \text{const} \quad , \quad \frac{d(T.E.)}{dt} = \frac{d}{dt} [K.E. + P.E.] = 0$$

$$\therefore K.E. = \frac{1}{2}m(\dot{x})^2 + \frac{1}{2}I(\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}mr^2(\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}I(\dot{\theta})^2$$

$$P.E. = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kr^2(\theta)^2$$

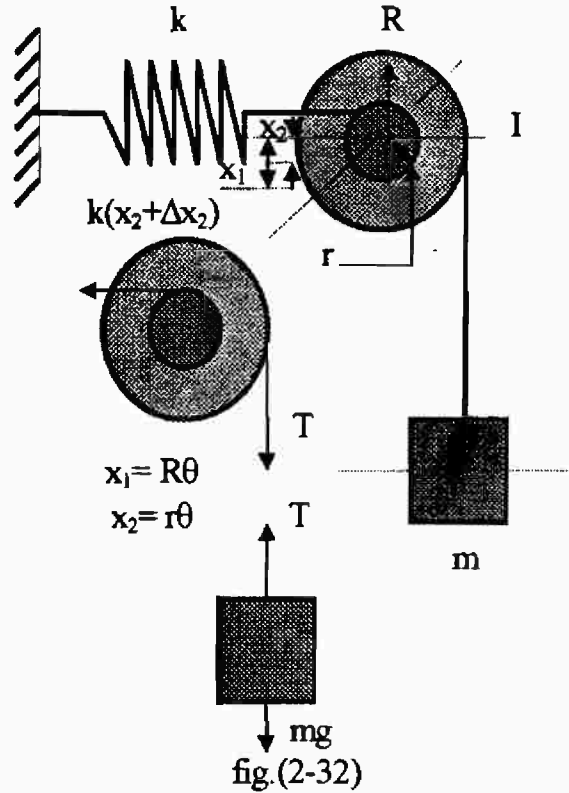
$$\therefore \frac{d(T.E.)}{dt} = \left[\frac{1}{2}mr^2 \left(2\dot{\theta}\ddot{\theta} \right) + \frac{1}{2}I \left(2\dot{\theta}\ddot{\theta} \right) + \frac{1}{2}kr^2 \left(2\theta\dot{\theta} \right) \right] = 0$$

$$\therefore (mr^2 + I)\ddot{\theta} + kr^2\theta = 0 \quad \therefore \ddot{\theta} + \left(\frac{kr^2}{mr^2 + I} \right) \theta = 0$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{kr^2}{mr^2 + I}} \dots r.p.s$$

18-Determine the equation of motion and the natural frequency of oscillation of the system shown in fig.(2-32). by Newton s Method.

18-أوجد معادلة الحركة والتردد الطبيعي لتذبذب المنظومة المبينة بالشكل (2-32) بطريقة نيوتن.



بتطبيق قانون نيوتن نجد أن

$$\therefore \sum F = m\ddot{x}, \quad x_1 = R\theta, \quad x_2 = r\theta, \quad \dot{x}_1 = R\dot{\theta}, \quad \ddot{x}_1 = R\ddot{\theta}, \quad \dot{x}_2 = r\dot{\theta}, \quad \ddot{x}_2 = r\ddot{\theta}$$

$$\therefore m\ddot{x}_1 = mg - T \quad \therefore T = mg - m\ddot{x}_1 = mg - mR\ddot{\theta}$$

$$\therefore \sum M_O = -I\ddot{\theta} \quad \therefore \sum M_O = k(x_2 + \Delta x_2)r - T.R$$

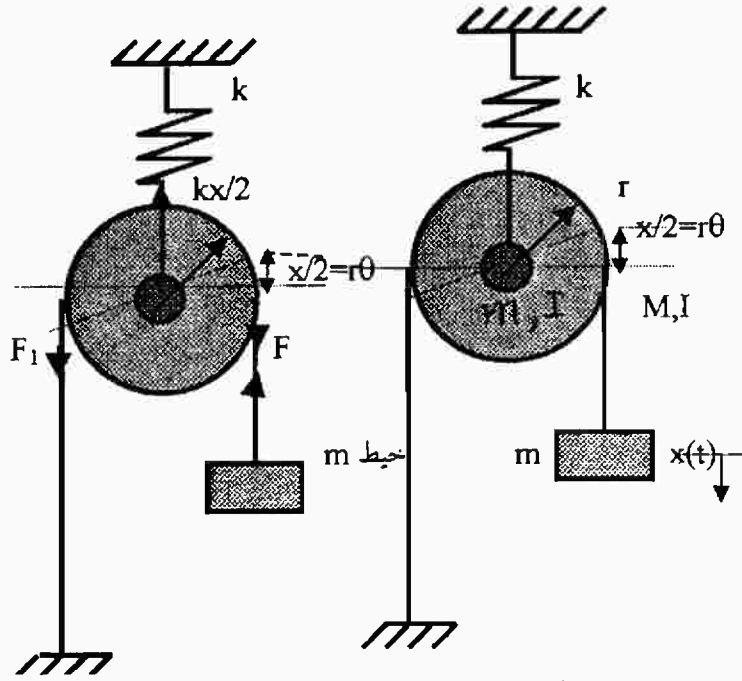
$$\therefore I\ddot{\theta} + kx_2.r + k\Delta x_2.r - (mg - mR\ddot{\theta})R = 0$$

$$\therefore (I + mR^2)\ddot{\theta} + k\Delta x_2.r - mgR + k.r^2.\theta = 0, \quad \therefore k\Delta x_2.r = mgR$$

$$\therefore \ddot{\theta} + \left(\frac{k.r^2}{I + mR^2} \right) \theta = 0 \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k.r^2}{I + mR^2}} \dots \dots \dots c.p.s$$

19-Determin the equation of motion and the natural frequency of the system shown in fig.(2-33) , the system composed of a mass m , spring has stiffness k , and a disc of mass M and the moment of inertia of the disc I.

19- أوجد معادلة الحركة والت تردد الطبيعي للمنظومة المبينة بالشكل (2-33) ، المنظومة تتكون من كتلة m ونابض معاملته k وقرص كتلته M وعزم القصور الذاتي له I .



الشكل (2-33b)

الشكل (2-33a)

أ-طريقة الطاقة:

عندما تتحرك الكتلة m إزاحة خطية x فان مركز القرص يتحرك إزاحة زاوية قدرها $x/2 = r\theta$ أى ان كل من القرص والنابض يتحرك مسافة $x/2$ ، وبتطبيق طريقة الطاقة نجد أن:

$$T.E. = K.E. + P.E. = \text{const.}$$

$$\therefore K.E. = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}\right)^2 + \frac{1}{2}M\left(\frac{\dot{x}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}I\left(\dot{\theta}\right)^2, \quad \because \frac{x}{2} = r\theta \quad \therefore \theta = \frac{x}{2r} \quad \therefore \dot{\theta} = \frac{\dot{x}}{2r}$$

$$\therefore K.E. = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}\right)^2 + \frac{1}{2}M\left(\frac{\dot{x}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{\dot{x}}{2r}\right)^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}\right)^2 + \frac{M}{8}\left(\dot{x}\right)^2 + \frac{I}{8r^2}\left(\dot{x}\right)^2$$

$$P.E. = \frac{1}{2}k\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{k}{8}(x)^2, \quad \therefore \frac{d(T.E.)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\left(\dot{x}\right)^2 + \frac{M}{8}\left(\dot{x}\right)^2 + \frac{I}{8r^2}\left(\dot{x}\right)^2 + \frac{k}{8}(x)^2\right] = 0$$

$$\therefore \frac{1}{2}m(2\dot{x}\ddot{x}) + \frac{M}{8}(2\dot{x}\ddot{x}) + \frac{I}{8r^2}(2\dot{x}\ddot{x}) + \frac{k}{8}(2x\dot{x}) = 0$$

$$\therefore (m + \frac{M}{4} + \frac{I}{4r^2})\ddot{x} + \frac{k}{4}x = 0 \quad \therefore (4m + M + \frac{I}{r^2})\ddot{x} + kx = 0$$

$$\therefore \ddot{x} + \left(\frac{k}{4m + M + \frac{I}{r^2}} \right) x = 0 \dots\dots\dots(1)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{4m + M + \frac{I}{r^2}}} \dots\dots\dots c.p.s. \dots\dots\dots(2)$$

ب-طريقة نيوتن: من الشكل (2-33b) نلاحظ مايلي:

$$\therefore m\ddot{x} = -F \dots(1) \quad , M\left(\frac{\ddot{x}}{2}\right) = F + F_1 - k\frac{x}{2} \dots(2) \quad , \therefore I = Fr - F_1r \dots(3)$$

$$\text{from(1) in (2) , (3)} \quad \therefore M\left(\frac{\ddot{x}}{2}\right) = -m\ddot{x} + F_1 - k\left(\frac{x}{2}\right) \dots\dots\dots(4)$$

$$I\ddot{\theta} = -m\ddot{x}r - F_1r \quad , \therefore \frac{I\ddot{\theta}}{r} = -m\ddot{x} - F_1 \dots\dots\dots(5) \quad \therefore \frac{x}{2} = r\theta \quad \therefore \frac{\ddot{x}}{2} = r\ddot{\theta} \quad , \ddot{\theta} = \frac{\ddot{x}}{2r}$$

$$\therefore \text{put } \ddot{\theta} = \frac{\ddot{x}}{2r} \text{ in equation(5)} \quad \therefore \frac{I\ddot{x}}{2r^2} = -m\ddot{x} - F_1 \dots\dots\dots(6)$$

$$\therefore \frac{M\ddot{x}}{2} + \frac{I\ddot{x}}{2r^2} = -2m\ddot{x} - k\frac{x}{2} \quad \therefore \left(M + \frac{I}{r^2} + 4m \right) \ddot{x} + kx = 0 \quad \therefore \omega_n = \sqrt{\frac{k}{M + I/r^2 + 4m}}$$

20-Determine the equation of motion and the natural frequency shown in fig.(2-34).by the Energy method , Solveth problems by Newton smethod also.

20-أوجد معادلة الحركة والتردد الطبيعي للمنظومة المبينة بالشكل (2-34) بطريقة الطاقة ، حل هذه المسألة (المشكلة) بطريقة نيوتن أيضا

$$\therefore \sum M_0 = -I\ddot{\theta}, \quad \therefore \sum M_0 = q\theta + 4k.xl = q\theta + 4kl\theta$$

$$\therefore \sum M_0 = q\theta + 4kl^2\theta \quad \therefore I\ddot{\theta} + q\theta + 4kl^2\theta = 0$$

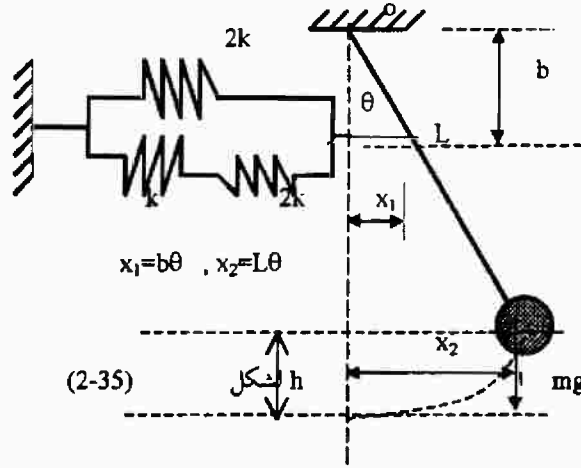
$$\therefore \ddot{\theta} + \left(\frac{q + 4kl^2}{I} \right) \theta = 0, \quad \therefore \omega_n = \sqrt{\frac{q + 4kl^2}{I}} \dots \dots \dots c.p.s$$

21-Determine the equation of motion and the natural frequency as shown in fig.(2-35).

21-أوجد معادلة الحركة والتردد الطبيعي للمنظومة المبينة بالشكل (2-35)

الحل: المنظومة المبينة بالشكل (2-35) هي بندول بسيط متصل بثلاث نوابض وهما النابض العلوى 2k والمتصل على التوازي مع النابضين الآخرين وهما k, 2k وهما متصلان على التوالي معاً، ولهذا نعين معامل النابض المكافئ للمنظومة كما يلي.

$$k_{eq} = 2k + \frac{1}{\frac{1}{k} + \frac{1}{2k}} = 2k + \frac{2k}{3} = \frac{8k}{3}$$



أ-طريقة نيوتن: بما أن عزم اللي الكامن $\sum M_0$ يساوى عزم اللي الاسترجاعى $I\ddot{\theta}$ فى المقدار ويخالفه فى الاتجاه.

$$\therefore \sum M_0 = -I\ddot{\theta}, \quad \therefore \sum M_0 = mgl\theta + k_{eq}.b\theta.b = mgl\theta + \frac{8k.b^2}{3}\theta$$

$$\therefore I\ddot{\theta} + \left(mgl + \frac{8k.b^2}{3} \right) \theta = 0 \quad \therefore \ddot{\theta} + \left[\frac{3mgl + 8kb^2}{3I} \right] \theta = 0 \quad \therefore I = ml^2$$

$$\therefore \omega_n = \sqrt{\frac{3mgl + 8kb^2}{3I}} = \sqrt{\frac{3mgl + 8kb^2}{3ml^2}} \dots \dots \dots r.p.s$$

ب-طريقة الطاقة:

الطاقة الكلية للمنظومة تتمثل فى طاقة الحركة للكتلة بينما طاقة الوضع تتمثل فى طاقة الوضع لوزن

الكتلة mg أى تساوى وزن الكتلة مضروب فى إرتفاع الوزن h عن موضع الاتزان الاستاتيكي ،
بالإضافة الى طاقة الوضع للنابض المكافئ للمنظومة يوعبر عن ذلك بما يلي:

$$\therefore T.E. = K.E. + P.E. = \text{const.}, \quad \therefore K.E. = \frac{1}{2}m(\dot{x}_2)^2 = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta})^2$$

$$\therefore P.E. = W h + \frac{1}{2}k_{eq}.x_1^2 = mgh + \frac{1}{2}\left(\frac{8k}{3}\right)b^2(\theta)^2$$

$$\therefore h = l - l.\cos\theta = l(1 - \cos\theta) = l.\frac{(\theta)^2}{2} \quad \therefore P.E. = mgl\frac{(\theta)^2}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{8k}{3}\right)b^2(\theta)^2$$

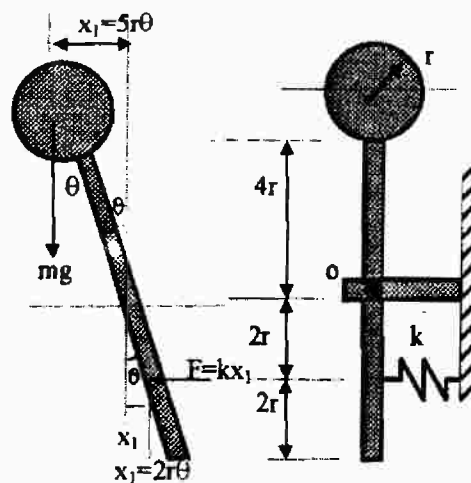
$$\therefore \frac{d(T.E.)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta})^2 + mgl\frac{(\theta)^2}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{8k}{3}\right)b^2(\theta)^2\right] = 0$$

$$\therefore \frac{1}{2}ml^2(2.\dot{\theta}\ddot{\theta}) + \frac{1}{2}mgl(2.\theta.\dot{\theta}) + \frac{1}{2}\left(\frac{8k}{3}\right)b^2(2.\theta.\dot{\theta}) = 0$$

$$\therefore ml^2.\ddot{\theta} + \left(mgl + \frac{8k}{3}b^2\right)\theta = 0 \quad \therefore \omega_n = \sqrt{\frac{3mgl + 8kb^2}{3ml^2}} \dots\dots\dots r.p.s.$$

22-A component in a machine is schematically shown in fig.(2-36). in its static equilibrium position , where the mass of uniform bar is $3m$ and it is length $8r$, the mass of uniform disc is $2m$ and it is radius r , and the spring has stiffness k , assume $kr=3mg$, Determine the equation of motion and the natural frequency of this system.

22-تركيبية فى آلة موضحة فى الشكل (2-36) وفى وضع الاتزان الاستاتيكي ، حيث كتلة القضيب المنتظم $3m$ وطوله $8r$ ، وكتلة القرص المنتظم $2m$ ونصف قطرة r ، ونابض معاملته k ، إترض أن $kr=3mg$ ، أوجد معادلة الحركة والتردد الطبيعى للمنظومة.



الشكل (2-36)

بما إن عزم اللي الكامن يساوى فى المقدار ويضاد فى الاتجاه عزم اللي الاسترجاعى

$$\therefore \sum M_0 = -I \ddot{\theta}, \quad \therefore \sum M_0 = kx_1(2r) - 2mg(5r\theta) = 4k.r^2.\theta - 5mgr\theta$$

$$\therefore kr = 3mg \quad \therefore \sum M_0 = 12mgr\theta - 10mgr\theta = 2mgr\theta$$

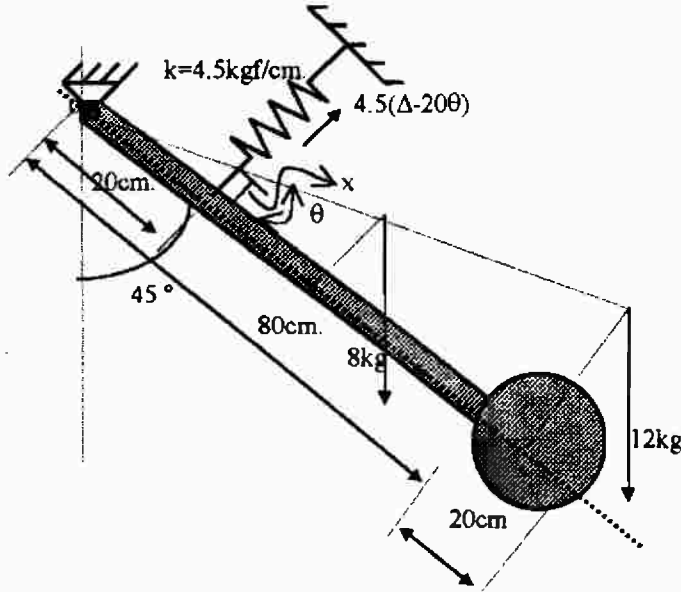
$$I_{total} = I_{bar} + I_{disc} \quad \therefore I_{bar} = \frac{m_{bar} I_{bar}}{12} = \frac{3m.(8r)^2}{12} = 16mr^2$$

$$\therefore I_{disc} = \frac{m_{disc} r^2}{2} + m_{disc} (5r)^2 = \frac{2m.r^2}{2} + 2m.(5r)^2 = 51mr^2 \quad I_{total} = 67mr^2$$

$$\therefore 2mgr\theta = -67mr^2 \ddot{\theta} \quad \therefore \ddot{\theta} + \frac{2g}{67r} \theta = 0 \quad \therefore \omega_n = \sqrt{\frac{2g}{67r}} \dots \dots \dots \text{c.p.s}$$

23-A rigid rod of length 80 cm. and mass 8 kg. is pinned at one end (o) and has a cylinder of weight 12 kg. and of diameter 20 cm. attached at the other end. The rod inclined by 45 degree about the vertical axis when it on equilibrium position. A spring of stiffness 4.5 kgf/cm. connected to the rod at a distance 20 cm. from the support. Determine the equation of motion and the natural frequency of the system when give a small angular displacement (θ) to the system as shown in fig.(2-37).

23- قضيب جاسى طوله 80 سم ووزنه 8 كجم ممسوك (متصل) من إحدى نهايتيه بمفصل (o) واسطوانة وزنها 12 كجم وقطرها 20 سم متصلة بالنهاية الأخرى للقضيب الذى يميل بزاوية 45 درجة على المحور الرأسى عندما يكون فى موضع الاتزان ، نابض معاملته 4.5 kgf/cm. متصل بالقضيب على مسافة 20 سم من موضع تركيبه . أوجد معادلة الحركة والتردد الطبيعى للمنظومة عند إعطائها إزاحة زاوية (θ) صغيرة للمنظومة المبينة بالشكل (2-37)



الشكل (2-37)

عند وضع الاتزان للمنظومة وذلك عندما تكون زاوية ميل المنظومة على الرأسى 45° يكون مجموع العزوم حول المفصل (o) يساوى الصفر .

$$i.e \quad \sum M_o = 0 \quad \therefore k \cdot \Delta \cdot b - W_{rod} \cdot \sin(45) \left(\frac{l}{2} \right) - W_{cyl} \cdot \sin(45)(l+r) = 0$$

$$\therefore 4.5\Delta(20) - 8\sin(45) \left(\frac{80}{2} \right) - 12\sin 45(90) = 0 \quad \therefore \Delta = 11 \text{ cm.}$$

عندما يعطى المنظومة إزاحة زاوية صغيرة (θ) تكون زاوية ميل المنظومة على الرأسى ($45^\circ + \theta$) ومن ذلك نستنتج أن:

$$\therefore \sum M_o = -I \ddot{\theta}$$

$$\therefore \sum M_o = k(\Delta - x) \cdot b - 8\sin(45 + \theta) \left(\frac{l}{2} \right) - 12\sin(45 + \theta)(l+r)$$

$$= 4.5(11 - x) \cdot (20) - 8\sin(45 + \theta)(40) - 12\sin(45 + \theta)(90)$$

$$\therefore x = b\theta = 20\theta \quad , \therefore \sin(45 + \theta) = \sin(45) \cdot \cos(\theta) + \cos(45) \cdot \sin(\theta)$$

$$\therefore \theta \text{ is very small } \therefore \sin \theta \cong \theta , \cos \theta \cong 1$$

$$\therefore \sum M_o = 990 - 1800\theta - 1400[\sin(45) \cdot \cos(\theta) + \cos(45) \cdot \sin(\theta)]$$

$$\therefore \sum M_o = 990 - 1800\theta - 1400[0.7071(1) + 0.7071(\theta)] = 2790(\theta)$$

$$\therefore I_{total} = I_{rod} + I_{cylinder} = \frac{m_{rod} l^2}{3} + \frac{m_{cylinder} r^2}{2} + m_{cylinder} \cdot (l+r)^2$$

$$\therefore I_{total} = \frac{(8)(80)^2}{3(981)} + \frac{(12)(10)^2}{2(981)} + \left(\frac{12}{981} \right) (90)^2 = 117 \text{ kgf.cm.sec}^2$$

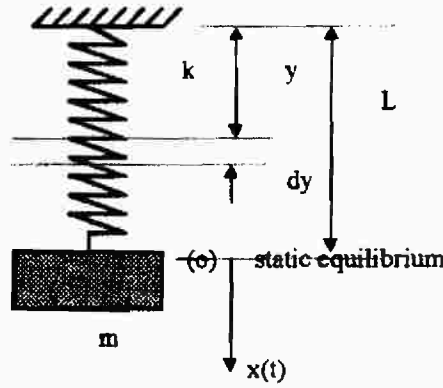
$$\therefore I \ddot{\theta} + 2790(\theta) = 0 \quad \therefore 117 \ddot{\theta} + 2790\theta = 0 \quad \therefore \omega_n = \sqrt{\frac{2790}{117}} = 4.9 \text{ c.p.s}$$

$$\therefore f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{4.9}{2\pi} = 0.777 \text{ c.p.s}$$

24-By Rayleigh's method , Determine the natural frequency of the mass and spring system shown in fig.(2-38). taking into account the mass of the spring , and assume L is the length of the spring , k is the stiffness of the spring, and ρ is the density of the material of the spring per unit length

24 بطريقة رايلي أوجد التردد الطبيعي لكتلة ونابض المنظومة المبينة بالشكل (2-38) ، بفرض أن L

طول النابض ، k معامل النابض ، ρ كثافة معدن النابض لكل وحدة طول.



الشكل (2-38)

إذا حدث للطرف الحر بالنايىض إزاحة ولتكن x عند نقطة على بعد y فإن الإزاحة بالنايىض تقدر بالعلاقة $\left(\frac{y}{l}x\right)$ وتمثل الحركة بالعلاقة $x = A \sin(\omega_n \cdot t)$ ويتفاضل هذه الدالة بالنسبة للزمن ينتج ان

$$\therefore \dot{x} = \omega_n A \cos(\omega_n \cdot t) \quad \text{at max. displacent, } \therefore \cos \omega_n \cdot t = \cos(0) = 1 \therefore \dot{x}_{\max} = \omega_n \cdot A$$

بما ان الطاقة الحركية للمنظومة هي مجموع طاقة الحركة للكتلة والنايىض ، حيث طاقة الحركة للعنصر dy من النايىض يعطى بالعلاقة $\frac{1}{2} \rho \cdot dy \cdot \left(\frac{y}{l} \dot{x}\right)^2$ واذا اخذنا كتلة النايىض فى الاعتبار فان

the max. of (K.E.) = K.E of mass + K.E of spring

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} m (\dot{x}_{\max})^2 + \int_0^l \frac{1}{2} \rho \cdot \left(\frac{y}{l} \dot{x}_{\max}\right)^2 dy = \frac{1}{2} m (\dot{x}_{\max})^2 + \frac{1}{2} \rho \cdot \left(\frac{\dot{x}_{\max}}{l}\right)^2 \int_0^l y^2 dy \\ &= \frac{1}{2} m (\dot{x}_{\max})^2 + \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\dot{x}_{\max}}{l}\right)^2 \left(\frac{y^3}{3}\right)_0^l = \frac{1}{2} m (\dot{x}_{\max})^2 + \frac{1}{2} \rho l \left(\frac{\dot{x}_{\max}^2}{3}\right) = \frac{1}{2} \left(m + \frac{\rho l}{3}\right) (\dot{x}_{\max})^2 \\ \therefore (K.E)_{\max} &= \frac{1}{2} \left(m + \frac{\rho l}{3}\right) (\omega_n A)^2 \dots \dots \dots (1) \end{aligned}$$

$$\therefore (P.E)_{\max} = \frac{1}{2} k x_{\max}^2 = \frac{1}{2} k A^2 \dots \dots \dots (2)$$

$$\therefore \text{from (1) , (2)} \quad \frac{1}{2} \left(m + \frac{\rho l}{3}\right) \omega_n^2 A^2 = \frac{1}{2} k A^2$$

$$\therefore \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m + \frac{\rho l}{3}}} \text{ c.ps } \therefore f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m + \frac{\rho l}{3}}} \text{ Hz}$$

اى ان تأثير القصور الذاتى للنايىض يحسب باضافة ثلث كتلة النايىض المكافئة وذلك للكتلة الجاسنة.

25- a-If a mass M is suspended in the free end of a coil spring has stiffness of k and of mass m , Prove that the work done in the tension of the spring at its lowest position can be calculated by the following relation:

$$\frac{\left(Mg + \frac{mg}{2}\right) + \left(Mg + \frac{mg}{2} + ka\right).a}{2}$$

where: a is the amplitude of vibration.

b-A spring has a stiffness of 400 N/m and a mass of 2 kg . If a mass of 8 kg is hung in the free end of this spring and then released to vibration. Find the natural frequency and the time of the period of the system, when (1)the mass of spring is negligible. (2)the mass of spring is considered into account. ...

25-أ-إذا علقت كتلة M في النهاية الحرة لتأبض حلزوني معاملته k وكتلته m ، أثبت ان الشغل المبذول في شد التأبض عند ادنى موضع يمكن حسابة من العلاقة التالية:

$$\frac{\left(Mg + \frac{mg}{2}\right) + \left(Mg + \frac{mg}{2} + ka\right).a}{2}$$

حيث a هي سعة الاهتزاز.

ب-تأبض معاملته $400 \text{ نيوتن لكل متر}$ ، وكتلته 2 كيلوجرام ، إذا علقت كتلة 8 كيلوجرام في نهاية التأبض ثم ترك يهتز.

أوجد التردد الطبيعي والزمن الدورى للمنظومة عندما:

(1) تهمل كتلة التأبض.

(2) تؤخذ كتلة التأبض في الاعتبار.

الحل:

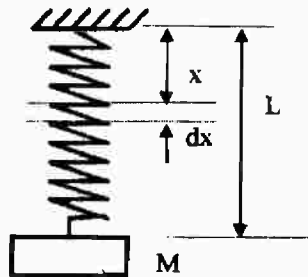


fig.(2-39)

نفرض ان السرعة الزاوية للحركة التوافقية ω مع اخذ عنصر من التأبض سمكة dx وعلى بعد x من النهاية المثبتة للتأبض.

ان سرعة الكتلة M عند الوضع المتوسط = $\omega . a$ ، بينما سرعة عنصر التأبض عند الوضع المتوسط =

$$(\omega . a . x)/L$$

ان طاقة الحركة للعنصر dx (element) من التأبض عند الوضع الاوسط يعين من العلاقة التالية:

$$(K.E)_{element(dx)} = \frac{m\left(\frac{dx}{l}\right)}{2} \left(\frac{\omega \cdot a \cdot x}{l}\right)^2$$

اذن طاقة الحركة الكلية (Total of K.E.) للنايـض عند الوضع المتوسط تعين من العلاقة التالية:

$$Total\ of\ K.E = \frac{m \cdot \omega^2 \cdot a^2}{2l^3} \int_0^l x^2 dx = \frac{m}{6} \cdot \omega^2 \cdot a^2$$

اذن طاقة الحركة الكلية للمنظومة عند الوضع المتوسط تعين من العلاقة التالية:

$$The\ total\ of\ K.E.\ of\ the\ system = \frac{\omega^2 \cdot a^2}{2} \left(M + \frac{m}{3}\right)$$

وبأخذ أقصى وضع سفلى كمرجع إسناد يمكن تعيين طاقة الوضع للمنظومة عند الوضع المتوسط من العلاقة التالية:

$$(P.E)\ for\ system = Mg + \frac{mg}{2}$$

وذلك لان مركز ثقل النايـض قد ازيح مسافة (a / 2) فقط. وعند الوضع الاوسط يكون متوسط قوة الشد في النايـض = Mg + (mg/2)

وبذلك عند أقصى وضع سفلى يكون متوسط قوة الشد في النايـض = Mg + (mg/2) + ka

اذن الشغل المبذول (W.D) في شد النايـض الى أقصى وضع سفلى من العلاقة التالية:

$$\therefore W.D = \frac{\left(Mg + \frac{mg}{2}\right) + \left(Mg + \frac{mg}{2} + ka\right) \cdot a}{2}$$

وبما ان الشغل المبذول في شد النايـض الى أقصى وضع = الطاقة المخزونة في النايـض عند أقصى وضع سفلى.

اذن بمساواة مجموع طاقتي الحركة والوضع للمنظومة في وضعها الاوسط بالطاقة المختزنة في النايـض عند أقصى وضع سفلى ، ولهـذا لان الطاقة الكلية للمنظومة لا تتغير فان ذلك يحقق المعادلة التالية:

$$\frac{1}{2} \omega^2 \cdot a \left(M + \frac{m}{3}\right) + Mga + \frac{mga}{2} = Mga + \frac{mga}{2} + \frac{k \cdot a^2}{2}$$

$$\therefore \omega^2 = \frac{k}{\left(M + \frac{m}{3}\right)} \dots\dots\dots c.p.s \quad \therefore t_p = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{M + \frac{m}{3}}{k}} \dots\dots\dots sec$$

ويمكن إخذ كتلة النايـض في الاعتبار باضافة ثلث كتلتها للكتلة المثبتة عليه وبذلك يكون:

1- في حالة إهمال كتلة النايـض ، فان:

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{M}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{400}{8}} = 1.126 \text{ HZ} \quad , t_p = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{400}{8}}} = 0.89 \text{ sec}$$

2- في حالة أخذ كتلة النابض في الاعتبار :

$$\therefore f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{M + \frac{m}{3}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{400}{8 + \frac{2}{3}}} = 1.082 \text{ HZ} \quad , t_p = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{8 + \frac{2}{3}}{400}} = 0.924 \text{ sec}$$

26-Determine the equation of motion and the natural frequency of the simple pendulum as shown in fig. (2-40). by:-

(1)-Newton's method , Energy method , Rayleigh's method and Lagrange's equation ,if the mass of the rod L is negligible.

(2)- Newton's method and Energy method if the mass of the rod M is not negligible.

26- أوجد معادلة الحركة والتردد الطبيعي للبندول البسيط المبين بالشكل (2-40) ، (1) - بطريقة نيوتن

وطريقة الطاقة وطريقة رايليت ومعادلة لاجرانج اذا إهملت كتلة القضيب. (2) - بطريقة نيوتن

وطريقة الطاقة اذا لم تهمل كتلة القضيب M.

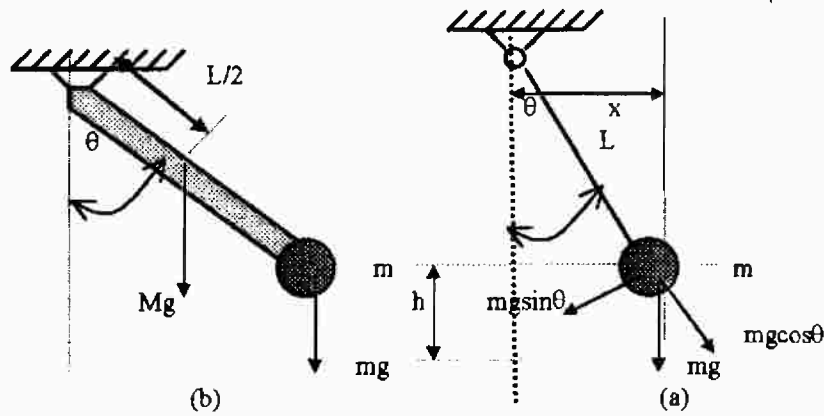


fig (2-40)

(1) في حالة إهمال كتلة القضيب ، حيث طول القضيب L

1- طريقة نيوتن Newton method

$$\therefore \sum M_o = -I \ddot{\theta} \quad \therefore mgl\theta + I \ddot{\theta} = 0 \quad \therefore I = ml^2 \quad \therefore \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

$$\therefore f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \text{Hz}$$

2- طريقة الطاقة Energy method

$$\therefore K.E. = \frac{1}{2} m \left(\dot{x} \right)^2 = \frac{1}{2} m \left(l \dot{\theta} \right)^2, \text{ where } x = l \sin \theta \approx l \theta$$

$$P.E. = \frac{1}{2} m g h = m g (l - l \cos \theta) = m g l - m g l \theta \quad \text{where } \sin \theta \approx \theta$$

$$\therefore \text{Total Energy (T.E.)} = K.E. + P.E. = \text{const} \quad \therefore \frac{d(T.E.)}{dt} = 0$$

$$\therefore \frac{1}{2} m l^2 \left(2 \dot{\theta} \ddot{\theta} \right) + m g l (0) + m g l \left(\theta \dot{\theta} \right) = 0$$

$$\therefore \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0 \quad \therefore f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} \text{ HZ}$$

3- طريقة رابلايت Rayleigh's method

بما ان البندول يتحرك حركة توافقية وبذبذبات صغيرة ذات سعة زاوية (θ) وتردد دائري ω_n وتكون أقصى سرعة يعبر عنها بالعلاقة $\omega_n \theta$ ، وبالتالي يمكن تعيين أقصى طاقة حركة وأقصى طاقة وضع كما يلي:

$$\therefore (K.E.)_{\max} = \frac{1}{2} J_o \left(\dot{\theta}_{\max} \right)^2 = \frac{1}{2} m l^2 (\omega_n \theta)^2 \quad \text{where } \dot{\theta}_{\max} = \omega_n \theta$$

وتكون أقصى طاقة وضع عندما تنعدم السرعة وتكون السعة اكبر ما يمكن

$$\therefore (P.E.)_{\max} = \frac{1}{2} m g h = m g \frac{l(\theta)^2}{2} \quad \therefore (K.E.)_{\max} = (P.E.)_{\max}$$

$$\therefore l \omega_n^2 = g \quad \therefore \omega_n = \sqrt{\frac{g}{l}} \text{ c.p.s}$$

4- باستخدام معادلة لاگرانج Lagrange's equation

$$\therefore K.E. = \frac{1}{2} m \left(l \dot{\theta} \right)^2 = \frac{1}{2} m l^2 \left(\dot{\theta} \right)^2, \quad \therefore P.E. = m g \frac{l(\theta)^2}{2} = \frac{1}{2} m g l (\theta)^2$$

$$\therefore \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial (K.E.)}{\partial \dot{\theta}} \right] + \frac{\partial (P.E.)}{\partial \theta} = 0 \quad \therefore \frac{1}{2} m l^2 \left(2 \ddot{\theta} \right) + \frac{1}{2} m g l (2\theta) = 0$$

$$\therefore m l^2 \ddot{\theta} + m g l \theta = 0 \quad \therefore \omega_n = \sqrt{\frac{g}{l}} \text{ c.p.s}$$

ب- في حالة أخذ وزن القضيب M في الحساب:

1- طريقة نيوتن Newton method

$$\therefore \sum M_o = -I \ddot{\theta} \quad \therefore \sum M_o = -mg \sin \theta - Mg \frac{l}{2} \sin \theta$$

$$\therefore I = ml^2 + \frac{1}{3} Ml^2 = \left(m + \frac{M}{3}\right) l^2 \quad \therefore I \ddot{\theta} + mgl \sin \theta + \frac{1}{2} Mgl \sin \theta = 0$$

$$\therefore \left(m + \frac{M}{3}\right) l^2 \ddot{\theta} + g \left(m + \frac{M}{2}\right) \theta = 0 \quad \therefore \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \left[\frac{m + \frac{M}{2}}{m + \frac{M}{3}} \right] \theta = 0 \quad f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l} \left[\frac{m + \frac{M}{2}}{m + \frac{M}{3}} \right]} \text{ cps}$$

2- طريقة الطاقة Energy method

باعتبار ان كتلة القضيب M موزعة بانتظام فيكون عزم القصور الذاتي للقضيب كما يلي:

$$I = ml^2 + \frac{ML^2}{3} \quad \therefore K.E. = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \left(m + \frac{M}{3}\right) l^2 \left(\dot{\theta}\right)^2$$

$$\therefore K.E. = \frac{1}{2} I \left(\dot{\theta}\right)^2 = \frac{1}{2} \left(m + \frac{M}{3}\right) l^2 \left(\dot{\theta}\right)^2$$

$$\therefore P.E. = mgh + \frac{1}{2} Mgh = mgl(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2} Mgl(1 - \cos \theta)$$

$$\therefore P.E. = gl \left(m + \frac{M}{2}\right) (1 - \cos \theta) \quad \therefore T.E. = K.E. + P.E. = \text{const}$$

$$\therefore \frac{d(T.E.)}{dt} = \frac{d}{dt}(\text{const}) = 0$$

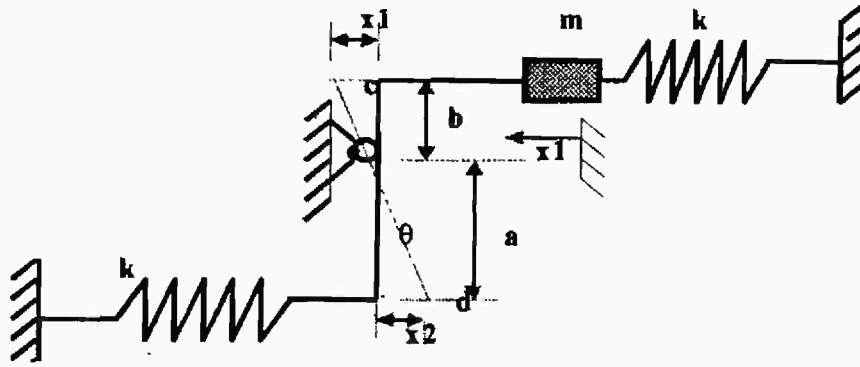
$$\therefore \frac{1}{2} \left(m + \frac{M}{3}\right) l^2 (2\dot{\theta}\ddot{\theta}) + gl \left(m + \frac{M}{2}\right) (0 + \sin \theta \dot{\theta}) = 0$$

$$\therefore \left(m + \frac{M}{3}\right) l^2 \ddot{\theta} + gl \left(m + \frac{M}{2}\right) \theta = 0 \quad \therefore \ddot{\theta} + \left[\frac{m + \frac{M}{2}}{m + \frac{M}{3}} \right] \frac{g}{l} \theta = 0$$

$$\therefore f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l} \left[\frac{m + \frac{M}{2}}{m + \frac{M}{3}} \right]} \text{ HZ}$$

27-The system as shown in fig.(2-41). , find the equation of motion , the equivalent of spring stiffness and the equivalent of mass ,by Energy method and Newton's method

27- المنظومة المبينة بالشكل (2-41) ، أوجد معادلة الحركة ومعامل النابض المكافئ والكتلة المكافئة



شكل (41-2)

1- طريقة الطاقة:

$$\therefore \sin \theta \cong \theta = \frac{x_1}{b} = \frac{x_2}{a} \quad \therefore x_1 = b\theta, \dot{x}_1 = b\dot{\theta}, x_2 = a\theta, \dot{x}_2 = a\dot{\theta}$$

$$\therefore K.E. = \frac{1}{2}m(\dot{x})^2 = \frac{1}{2}mb^2(\dot{\theta})^2, P.E. = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2 = \frac{1}{2}k_1b^2\theta^2 + \frac{1}{2}k_2a^2\theta^2$$

$$\therefore \frac{d}{dt}[K.E. + P.E.] = 0 \quad \therefore mb^2\ddot{\theta} + (k_1b^2 + k_2a^2)\theta = 0$$

$$\therefore \ddot{\theta} + \left(\frac{k_1b^2 + k_2a^2}{mb^2} \right) \theta = 0 \quad \therefore f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{(k_1b^2 + k_2a^2)}{mb^2}}$$

$$\therefore k_{eq} = k_1b^2 + k_2a^2, m_{eq} = mb^2$$

2- طريقة نيوتن:

$$\therefore m \ddot{x}_1 \cdot b = -k_1x_1b - k_2x_2a \quad \therefore mb^2\ddot{\theta} + (k_1b^2 + k_2a^2)\theta = 0$$

$$\therefore \ddot{\theta} + \left(\frac{k_1b^2 + k_2a^2}{mb^2} \right) \theta = 0 \quad \therefore f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{(k_1b^2 + k_2a^2)}{mb^2}}$$

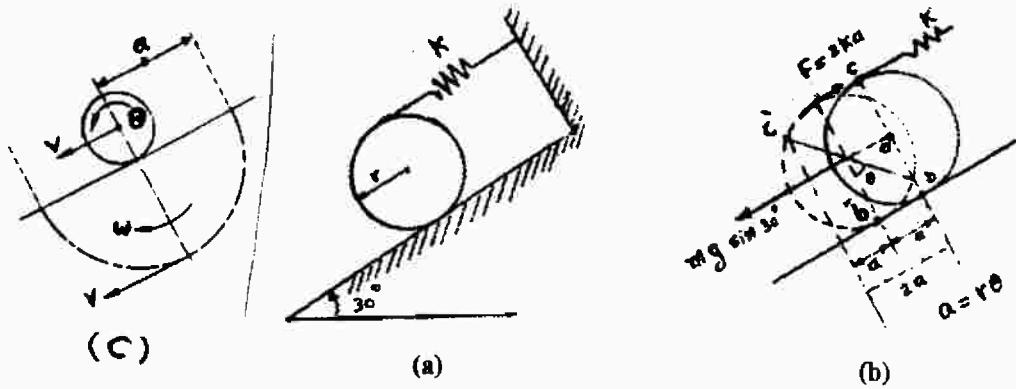
$$k_{eq} = \text{the equivalent spring stiffness} = k_1b^2 + k_2a^2$$

$$m_{eq} = \text{mass equivalent mass} = mb^2$$

28-A uniform cylinder of radius r is constrained to roll without slipping to upward and downward on an inclined plane, a one end of spring stiffness k is wrapped on the cylinder as shown in fig.(2-42), and the other end of the spring is fixed on the frame of the system, where spring is parallel to the inclined plane (a)-If the cylinder is released at position when the spring is not tense, What is the natural frequency of the cylinder when slipping is not occur? (b)-Find the maximum friction force?

28-إسطوانة منتظمة نصف قطرها r مقيدة لتتدحرج بدون إنزلاق لاعلى ولأسفل على مستوى مائل، إحدى نهايتي نابض معاملته k مربوط بالإسطوانة كما موضح بالشكل (42-2) والطرف الآخر للنابض مثبت في إطار (هيكل) المنظومة، حيث النابض يكون موازى للمستوى المائل:

(أ) إذا تركت الاسطوانة عند موضع يكون النابض غير مشدود ، أوجد التردد الطبيعي للاسطوانة عندما لا يحدث إنزلاق. (ب) أوجد أقصى قوة للاحتكاك.

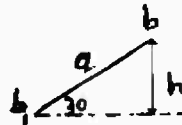


شكل (2-42a,b)

نفرض ان وضع الاتزان يقع على مسافة a اسفل الوضع الابتدائي ومقاسة على إمتداد السطح المائل كما بالشكل (2-32) فتكون قوة الشد فى النابض 2ka وبأخذ العزوم حول نقطة b فان:

$$2k(a(2r) = mg \sin 30^\circ(r) \quad \therefore a = \frac{mg}{8k}$$

اذن عند إعتاق الاسطوانة من وضعها الابتدائي فانها سوف تتذبذب حول وضع الاتزان بسعة ذنبية (a). كما بالشكل وفى الوضع الاوسط تكون السرعة الخطية لمركز الاسطوانة هي $v = \omega \cdot a = \dot{\theta} \cdot r$ حيث ω هي التردد الدائرى للذنبية ، θ هي السرعة الزاوية لتدحرج الاسطوانة. ، وعند التحرك من أقصى وضع أعلى المستوى تجاه الوضع الاوسط فان الطاقة الكلية تظل ثابتة وفى أقصى وضع أعلى المستوى نجد أن طاقة الوضع (K.E.) تعين من العلاقة التالية:



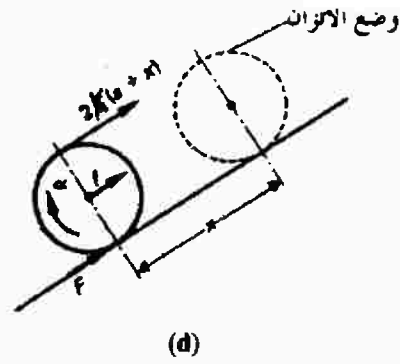
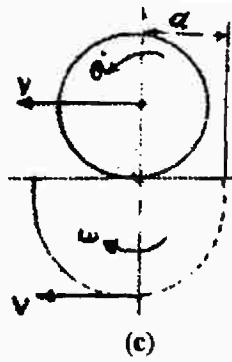
$$K.E. = W.h = mga \cdot \sin 30 = 0.5mga$$

وبما أن طاقة الحركة عند الوضع المتوسط تساوى الصفر لان السرعة تساوى صفر لانها تغير اتجاهها عند ذلك الموضع وطاقة الانفعال ايضا تساوى الصفر لانعدام الازاحة اى ان طاقة الوضع تنعدم.

$$\therefore K.E. = \frac{1}{2}m.v^2 + \frac{1}{2}I.(\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}m(\omega.a)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{mr^2}{2}\right)\left(\frac{\omega.a}{r}\right)^2 = \frac{3}{4}m\omega^2.a^2$$

$$\therefore D.E. = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k(2a)^2 = 2ka^2 \quad \therefore \frac{1}{2}mga = \frac{3}{4}m\omega^2.a^2 + 2ka^2$$

$$\therefore a = \frac{mg}{8k} \quad \therefore \omega^2 = \frac{8k}{3m} \quad \therefore f_n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{8k}{3m}} \text{ HZ}$$



شكل (2-42c,d)

اعتبر وضعاً تكون فيه الاسطوانة قد انتقلت الى مسافة x من وضع الاتزان كما بالشكل (2-42d) فيكون الشد في النابض $2(a+x)$ وتكون قوة الشد في النابض $2k(a+x)$ ، وبما العجلة الزاوية للاسطوانة تكون في إتجاه عقارب الساعة ، وعليه فان قوة الاحتكاك تكون متجهة لافى المستوى ، وذلك لتجنب حدوث إنزلاق.

وبالنسبة للحركة الخطية نجد ان $2k(a+x)+f=mf$ وللحركة الزاوية

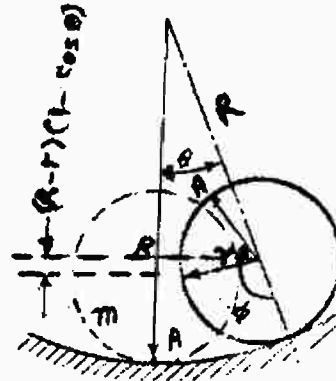
$$[2k(a+x)-f]r = I\dot{\theta} = \frac{m.r^2}{2} \cdot \frac{f}{r} \quad \therefore 2k(a+x)-f = \frac{m.f}{2}$$

$$\therefore f = \frac{m.f}{4} = \frac{m.\omega^2.x}{4} \quad \therefore \text{the maximum friction force occurs at } x = a$$

$$\therefore f_{\max} = \frac{m.\omega^2.a}{4} = \frac{m}{4} \left(\frac{8k}{3m} \right) \left(\frac{mg}{8k} \right) = \frac{mg}{12}$$

29-A cylinder of weight W and radius r rolls without slipping on a cylindrical surface of radius R , as shown in fig. (2-43). , Determine its natural frequency for small oscillations about the lowest point.

29-إسطوانة وزنها W ونصف قطرها r تتحرك بدون إنزلاق على سطح اسطوانى نصف قطره R كما مبين بالشكل (2-43) ، اوجد التردد الطبيعى لنهضة صغيرة حول اسفل موضع.



الشكل (2-43)

عند حركة الاسطوانة الميمنة بالشكل (2-43) تحدث إزاحة خطية وإزاحة زاوية ، حيث السرعة الخطية للاسطوانة تعين من العلاقة التالية:

$$\therefore \text{The translational velocity of the center of the cylinder} = (R-r)\dot{\theta}$$

$$\therefore \text{The rotational velocity} = (\dot{\phi} - \dot{\theta}) \quad \therefore R\dot{\theta} = r\dot{\phi} \quad \therefore \dot{\phi} = \frac{R\dot{\theta}}{r}$$

$$\therefore K.E. = \frac{1}{2}m.v^2 = \frac{W}{g} \left[(R-r)\dot{\theta} \right]^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{W r^2}{2g} \right) \left(\frac{R}{r} - 1 \right)^2 (\dot{\theta})^2$$

$$I_{\text{cylinder}} = \frac{W r^2}{2g} \quad P.E. = W h = W(R-r)(1 - \cos \theta)$$

where P.E. = work done in lifting through the vertical height (h)

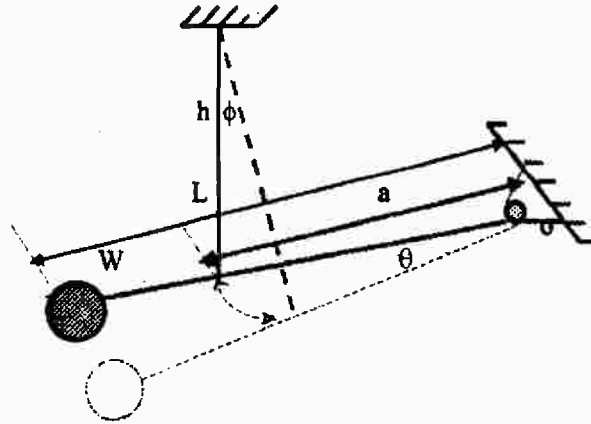
$$\therefore \frac{d}{dt}(T.E.) = \frac{d}{dt}(K.E + P.E) = 0$$

$$\therefore \frac{W}{2g}(R-r)^2(2\dot{\theta}\ddot{\theta}) + \frac{W r^2}{4g} \left(\frac{(R-r)^2}{r^2} \right) (2\dot{\theta}\ddot{\theta}) + W(R-r)\dot{\theta} = 0$$

$$\therefore \frac{3}{2} \left(\frac{R-r}{g} \right) \ddot{\theta} + \theta = 0 \therefore \ddot{\theta} + \left(\frac{2g}{3(R-r)} \right) \theta = 0 \therefore f_n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2g}{3(R-r)}} \text{ Hz}$$

30-Determine the natural frequency of the system shown in fig.(2-44) for small oscillations , where the bar L is assumed to be rigid and weightless , and supported by the inextensible cord (h)

30-أوجد التردد الطبيعي للمنظومة الميمنة بالشكل (2-44) لنذبنة صغيرة ، حيث القضيب طوله L وجاسئ ومهمل الوزن ، ومركب في خيط مشدود وطوله h.



شكل (2-44)

$$\therefore (K.E.)_{\max} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{W}{2g} \left(\dot{x} \right)^2 = \frac{W}{2g} l^2 \left(\dot{\theta} \right)^2 \text{ assume } \theta = \theta_0 \cos \omega t$$

$$\therefore \dot{\theta}_{\max} = \omega \theta_0 \quad \therefore (K.E.)_{\max} = \frac{W}{2g} l^2 \omega^2 \theta_0^2$$

$$\therefore (P.E.)_{\max} = Wh(1 - \cos \phi_0) \frac{l}{a} = Wh \left[1 - \left(1 - \frac{\phi_0^2}{2} + \dots \right) \right] \frac{l}{2} \cong Wh \frac{\theta_0^2}{2} \cdot \frac{l}{2}$$

$$\therefore a\theta_0 = h\phi_0 \quad \phi_0 = \frac{a\theta_0}{h} \quad \therefore (P.E.)_{\max} = \frac{Whl}{2a} \left(\frac{a\theta_0}{h} \right)^2$$

$$\therefore \text{by Rayleigh's method } (K.E.)_{\max} = (P.E.)_{\max}$$

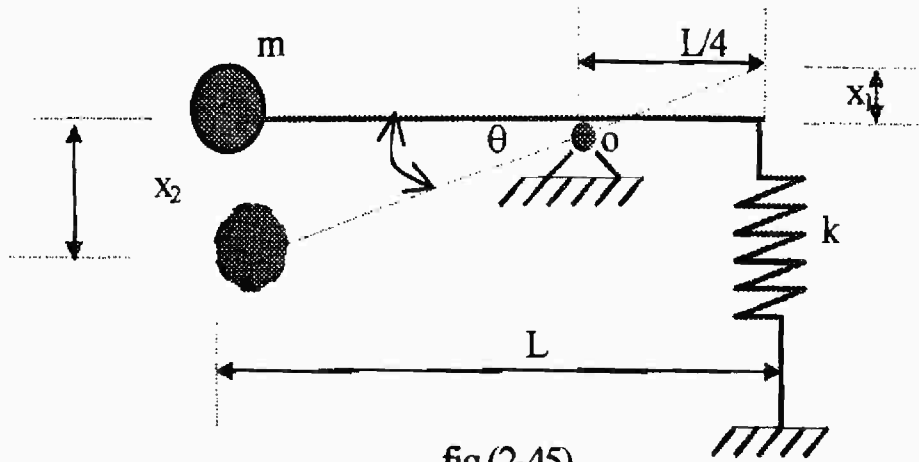
$$\therefore \frac{W}{2g} l^2 \omega_n^2 \theta_0^2 = \frac{1}{2} Wl \left(\frac{a}{h} \right) \theta_0^2 \quad \therefore \omega_n = \sqrt{\frac{ag}{lh}} \text{ c.p.s} \quad \therefore f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{ag}{lh}} \text{ HZ}$$

31-From the system as shown in fig(2-45) , Find the displacement Δ , the equation of motion and the natural frequency by Newton's method and The energy method .

31-من المنظومة المبينة بالشكل (2-45) ، أوجد الازاحة Δ ومعادلة الحركة والتردد الطبيعي بطريقة

نيوتن وطريقة الطاقة.

الحل:



fig(2-45)

1-طريقة نيوتن:

$$\therefore \sin \theta \cong \theta \cong \frac{x_1}{l/4} = \frac{x_2}{3l/4} \therefore x_1 = \frac{1}{4}l\theta, x_2 = \frac{3}{4}l\theta$$

$$\therefore \sum M_o = -I\ddot{\theta}, \sum M_o = kx_1\left(\frac{l}{4}\right) = \frac{kl^2}{16}\theta \therefore I = m\left(\frac{3l}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}ml^2$$

$$\therefore \frac{9}{16}ml^2\ddot{\theta} + \frac{kl^2}{16}\theta = 0 \therefore \ddot{\theta} + \frac{k}{9m}\theta = 0 \therefore \omega_n = \sqrt{\frac{k}{9m}} \text{ c.p.s}$$

$$\therefore k\Delta = mg \therefore \Delta = \frac{mg}{k} = \frac{g}{\omega_n^2} = \frac{9mg}{k}$$

2-طريقة الطاقة:

$$\therefore (K.E.) = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_2\right)^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{3l\dot{\theta}}{4}\right)^2 = \frac{9}{32}ml^2\left(\dot{\theta}\right)^2$$

$$\therefore (P.E.) = \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{l}{4}\theta\right)^2 = \frac{kl^2}{32}\theta^2 \therefore \frac{d}{dt}(T.E.) = \frac{d}{dt}(K.E. + P.E.) = 0$$

$$\therefore \frac{9}{32}ml^2\left(2\dot{\theta}\ddot{\theta}\right) + \frac{1}{32}kl^2\left(2\theta\dot{\theta}\right) = 0 \therefore \ddot{\theta} + \frac{k}{9m}\theta = 0 \therefore \omega_n = \sqrt{\frac{k}{9m}} \text{ c.p.s}$$

$$\therefore k\Delta = mg \therefore \Delta = \frac{mg}{k} = \frac{m}{\omega_n^2} = \frac{9mg}{k}$$

32-A Body of mass 10 kg was placed on two springs as shown in fig (2-46) , one of them has a stiffness of 960 N/m. , After a displacement of 5 cm down , the system has been brought to equilibrium , fin the stiffness of the second spring. If the body moved upwards , a distance of 8 cm. , then subjected to a initial velocity of 2.1 m/sec and left freely ,then:

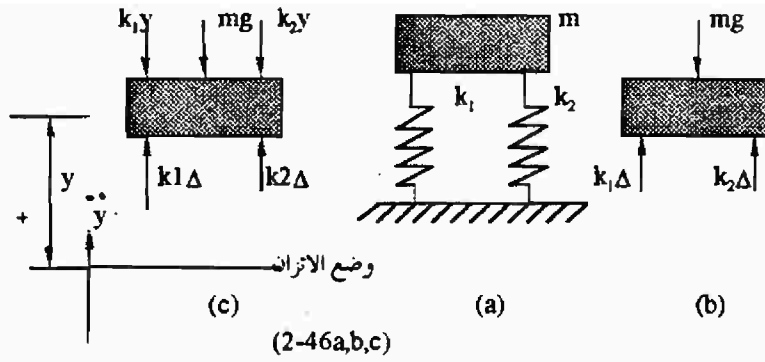
(1) Prove that the motion is a simple harmonic motion , its amplitude and time of period.

(2) Find its amplitude and the time of period

32-وضع جسم كتلته 10 kg فوق نابضين كما بالمنظومة المبينة بالشكل (2-46) ، معامل أحدهما $kl=960 \text{ N/m}$ ، فاتزن بعد ان انضغط مسافة 5 cm ، أوجد معامل النابض الثانى ، واذا رفع الجسم بعد ان اتزن مسافة 8 cm ثم اعطى له سرعة ابتدائية مقدارها 2.1 m/sec ثم ترك ليترك بحرية:

(1) إثبت ان حركته هي حركة توافقية بسيطة واوجد سعتها وزمنها الدورى.

(ب) اوجد الازاحة مقيسة من وضع الاتزان واوجد السرعة بعد مرور ثانيتين على بدء الحركة.



الحل:

أولاً في حالة وضع الاتزان المستقر: نفرض أن Δ هي الإزاحة الانضغاطية في كل من النابضتين في وضع الاتزان المستقر كما بالشكل (2-46 b) وبذلك تكون معادلة الحركة هي

$$k_1\Delta + k_2\Delta - mg = 0 \dots\dots\dots(1)$$

$$\therefore k_2 = \frac{1}{\Delta} [mg - k_1\Delta]$$

$$\therefore k_2 = \frac{mg}{\Delta} - k_1 = \frac{10(9.81)}{0.05} - 960 = 1002 \text{ N/m}$$

ولاثبات أن الحركة توافقية نتبع الآتي:

أثناء الحركة نفرض أن اللوح كان في يبعد مسافة y أعلى موضوعة أثناء الاتزان وهذه الإزاحة ستنتج قوى شد إضافية لأسفل في النابضين فتكون القوى المؤثرة في الجسم مبينة بالشكل (4-16c) وتكون معادلة الحركة:

$$k_1\Delta + k_2\Delta - mg - k_1y - k_2y = m\ddot{y} \dots\dots\dots(2)$$

$$\text{from equation (1)} \quad \therefore k_1\Delta + k_2\Delta - mg = 0 \quad \therefore m\ddot{y} + (k_1 + k_2)y = 0$$

$$\therefore \ddot{y} + \frac{k_1 + k_2}{m}y = 0 \quad \therefore \ddot{y} + \omega_n^2 y = 0 \dots\dots\dots(3)$$

والمعادلة (3) هي معادلة حركة الجسم وهي معادلة تفاضلية متجانسة ومن الدرجة الثانية وهي أيضاً تمثل الحركة التوافقية البسيطة لأن الإزاحة (y) تتناسب مع العجلة $\ddot{y}$ وبذلك يثبت أن الجسم يتحرك حركة توافقية بسيطة، ويمكن إيجاد الزمن الدوري والسعة ويمكن إيجاد التردد والزمن الدوري كما يلي:

$$\therefore \omega_n^2 = \frac{k_1 + k_2}{m} = \frac{1962}{10} \quad \therefore \omega_n = 14 \text{ rad/sec} \quad \therefore t_p = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{14} \text{ sec}$$

وبتكامل المعادلة (3) كما بالمثال التوضيحي فانه يمكن الحصول على السرعة والإزاحة كما يلي:

$y = A \sin(\omega t + \phi)$ حيث A هي سعة الحركة، ϕ هي زاوية الطور ويمكن $y = \omega \cos(\omega t + \phi)$

إيجاد قيمتهما من الشروط الابتدائية للحركة وهي $\dot{y}_0 = 210 \text{ cm/sec}$, $y_0 = 8 \text{ cm}$. ويمكن إيجاد السعة الكلية كما يلي

$$\text{Totall amplitude} = A = \sqrt{(y_0)^2 + \left(\frac{\dot{y}}{\omega}\right)^2} = \sqrt{(8)^2 + \left(\frac{210}{14}\right)^2} = 17 \text{ cm}$$

ويمكن إيجاد السعة A بطريقة الطاقة الكلية كما يلي:

$$\therefore A = \sqrt{\frac{2(T.E.)}{k_{eq}}} \quad \therefore T.E. = K.E. + P.E. = \frac{1}{2} m (\dot{y})^2 + \frac{1}{2} k y^2$$

$$\therefore T.E. = \frac{1}{2} (10) (210)^2 + \frac{1}{2} (1962) (8)^2 = 283220 \text{ N}$$

$$\therefore A = \sqrt{\frac{2(283220)}{1962}} = 17 \text{ cm}$$

ولإيجاد الإزاحة والسرعة بعد ثانيتين $(t=2 \text{ sec})$:

$$\therefore \phi = \sin^{-1}\left(\frac{y}{A}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{8}{17}\right) = 28^\circ = 0.488 \text{ rad}$$

$$y = A \sin(\omega t + \phi) = 17 \sin((14)(2) + 0.488) = 17(0.51) = 8.67 \text{ cm}$$

$$\therefore \dot{y} = A \omega \cos(\omega t + \phi) = 17(14) \cos(14(2) + 0.488) = 17(14)(0.8616) = 205.06 \text{ cm/sec}$$

33-A body $abcd$ with sides $ad=bc=6\text{cm}$. , and a body of mass 5kg suspended by two levels of distance 1m . , the springs are $L_1=40\text{cm}$. , $L_2=52\text{cm}$. , and $k_1=120 \text{ N/m}$. Find the stiffness coefficient of the other spring in equilibrium position for distance $h=34 \text{ cm}$. (1) A Vertical velocity of $(40)(2)^{1/2} \text{ cm/sec}$ imposed on the body and then left to freely vibrate. prove that the motion is a simple harmonic motion and find its time of period and phase angle.

(2) Find the distance when the speed is half the maximum velocity.

33-حسيم $abcd$ طولها $ad=bc=6\text{cm}$ وكتلتها 5kg معلق بين مستويين أفقيين المسافة بينهما متر واحد

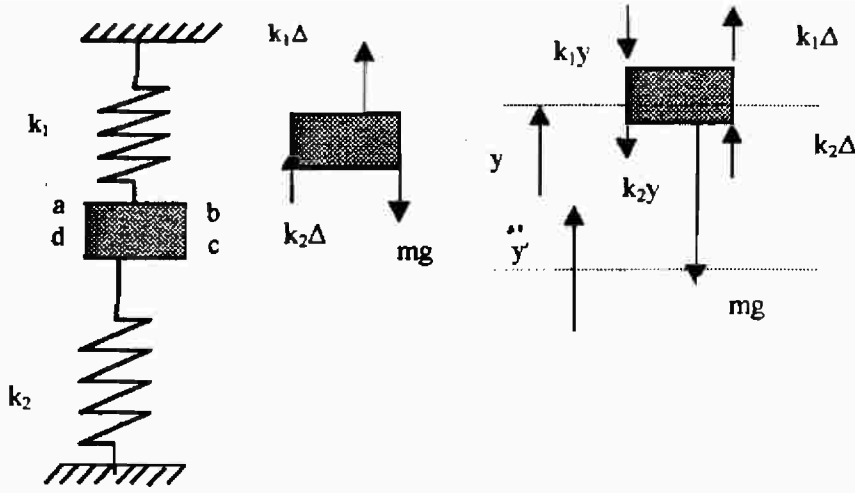
بواسطة نابضين طولهما الطبيعي $L_1=40\text{cm}$, $L_2=44\text{cm}$ وكان ثابت الزنبرك (النابض) الأول $k_1=120 \text{ N/m}$.

أوجد ثابت النابض الثاني والتي تجعل المسافة $h=34\text{cm}$ في وضع الاتزان. ، أعطى الجسم بعد

ان إترن سرعة رأسية الى أعلى مقدارها $(40)(2)^{1/2} \text{ cm/sec}$ ثم ترك ليتحرك بحرية.

(1)-إثبت ان حركته ستكون حركة توافقية بسيطة وأوجد سعتها وزمنها الدوري وزاوية طورها.

(2)-أوجد المسافة h عندما تصل سرعة الجسم الى نصف سرعتها القصوى ، وزمن حدوثها.



الشكل (2-47)

الحل: 1-وضع الاتزان المستقر:

يلاحظ انه لا تحدث إستطالة في كل من النابضين قبل ربط الجسم بهما وبالتالي تكون المسافة بين المستويين (40+54+6=100cm) وبعد ربط الجسم وتركه حر يحدث إنضغاط مقداره Δ في النابض الثاني k_2 ، بينما تحدث إستطالة مقدارها Δ في النابض الاول k_1 وتكون القوى المؤثرة على الجسم كما مبين بالشكل (46-b) ، وإذا اعتبرنا ان الاتجاه الموجب لاعلى وبذلك يمكن كتابة معادلة الاتزان للقوى كما يلي

$$k_1\Delta + k_2\Delta - mg = 0 \quad (1)$$

وبما انه يحدث إتزان بعد تعليق الجسم عندما يكون الجسم على بعد $h=34cm$ من موضع الاتزان ، وبالتالي يمكن ايجاد مقدار الاستطالة او الانضغاط Δ من المعادلة $\Delta = L_2 - h = 54 - 34 = 20cm$ المعادلة (1) نجد ان

$$\Delta(k_1 + k_2) = \Delta k_{eq} mg \quad \therefore k_{eq} = \frac{mg}{\Delta} = \frac{5(9.81)}{0.2} = 245.25 N/m$$

لأشياء ان الحركة اهتزازية :

نفرض ان الجسم اثناء الحركة يبعد مسافة x (اعلى موضوعة أثناع الاتزان) في الوضع العام عند الزمن t وهذه الازاحة تنتج قوى إضافية في النابضين حيث يستطيل النابض k_2 وينضغط النابض k_1 بمقدار x وبذلك يمكن توضيح القوى المؤثرة على الجسم كما بالشكل (47-c) ويمكن كتابة معادلة الحركة والتي تمثل القوى المؤثرة على الكتلة كما يلي:

$$\therefore m\ddot{y} = k_1\Delta + k_2\Delta - k_1y - k_2y - mg \dots\dots\dots(2)$$

$$\text{from (1), (2)} \therefore m\ddot{y} = -k_1y - k_2y + (k_1\Delta + k_2\Delta - mg) \therefore m\ddot{y} = -(k_1 + k_2)y \dots\dots\dots(3)$$

$$\therefore m\ddot{y} + k_{eq}y = 0 \therefore \ddot{y} + \frac{k_{eq}}{m}y = 0 \therefore \ddot{y} + \omega_n^2y = 0 \therefore \ddot{y} = -\omega_n^2y \dots\dots\dots(4)$$

المعادلة (4) هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية ونلاحظ ان العجلة تتناسب مع الازاحة وثابت التناسب هو مربع التردد الطبيعي للمنظومة والاشارة سالبة وبذلك مان الجسم يتحرك حركة توافقية بسيطة. ، ويمكن تعيين الزمن الدورى والازاحة الكلية وزاوية الطور من العلاقات التالية:

$$\therefore t_p = \frac{2\pi}{\omega_n}, \omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} = \sqrt{\frac{245.25}{5}} = 7 \text{ rad/sec} \therefore t_p = \frac{2\pi}{7} = 0.89 \text{ sec} \therefore$$

$$y_o = \text{displacement} = 0 \therefore \text{total amplitude} = A = \sqrt{(y_o)^2 + \left(\frac{v_o}{\omega_n}\right)^2}$$

$$\therefore v = 40\sqrt{2} \therefore A_{total} = \sqrt{(0)^2 + \left(\frac{40\sqrt{2}}{7}\right)^2} = 8 \text{ cm} , T.E = K.E + P.E$$

$$\therefore T.E = \frac{1}{2}m(y)^2 + \frac{1}{2}ky^2 = \frac{1}{2}(5)(40\sqrt{2})^2 + 0 = 8000$$

$$\therefore A = \sqrt{\frac{2(T.E)}{k_{eq}}} = \sqrt{\frac{2(8000)}{245.25}} = 8 \text{ cm} \quad \phi = \text{Phase angle} = \sin^{-1}\left(\frac{y_o}{A}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{0}{8}\right) = 0^\circ$$

ب- إيجاد السرعة القصوى:

يمكن إيجاد السرعة القصوى والمسافة h وزمن حدوثها كما يلى:

$$\therefore v_{max} = \omega.A = (5\sqrt{2})(8) = 40\sqrt{2} \therefore \text{half of velocity occurs at acceleration } x$$

$$\therefore v = \omega\sqrt{A^2 - (y)^2} \therefore 20\sqrt{2} = 7\sqrt{(8)^2 - (y)^2} \therefore y = \pm 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\therefore h = 34 \pm 4\sqrt{3} = 40.92 \text{ cm}, h = 27.13 \text{ cm}.$$

$$\therefore v = \omega A \cos(\omega.t) \therefore 20\sqrt{2} = 40\sqrt{2} \cos(\omega.t) \therefore \omega.t = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} + 2n\pi$$

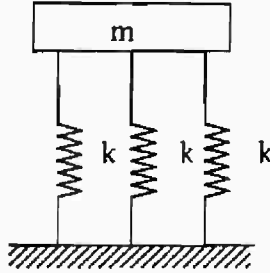
$$\therefore t_o = \frac{\pi}{3\omega} = \frac{\pi}{3(7)} = 0.148 \text{ sec}$$

مسائل الباب الثاني

1- حركة توافقية بسيطة يعبر عنها بالمعادلة $x = 4 \sin\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{10}\right)$ ، أوجد التردد بالدورات في الثانية إذا كانت (x) بالسنتيمتر (cm) والزمن (t) بالثانية (sec) والزاوية نصف قطريه. أوجد أيضاً الأزاوية والسرعة والعجلة عندما تكون $t = 2sec$.

2- نابض معاملته $k = 100 \text{ Kg/cm}$. علقت به كتلة مقدارها 2 Kg فإذا أعطيت الكتلة سرعة مقدارها 10 cm/sec عند وضع التعادل، أوجد:

- أ- التردد في الثانية. ب- معادلة الحركة. ج- اتساع الذبذبة.



شكل (2-1)

3- المنظومة المبينة بالشكل (2-1) عبارة عن جهاز وزنه 3000 Kg مركب على ثلاث نابض معامل كل منها k فإذا حدث ترخيماً أستانتيكياً مقدار 1 mm . أوجد:

1- التردد الطبيعي للمجموعة .

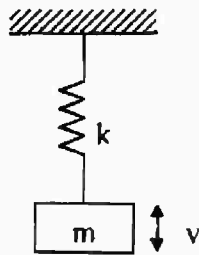
2- معامل كل من النابض الثلاثة.

3- أوجد معامل النابض المكافئ للمنظومة.

4- نابض حدث به إستطالة مقدارها 2 cm تحت تأثير وزن ما فإذا جذب الوزن إلى أسفل مسافة مقدارها 3 cm وأعطى سرعة لأعلى مقدارها 10 cm/sec ، أوجد:

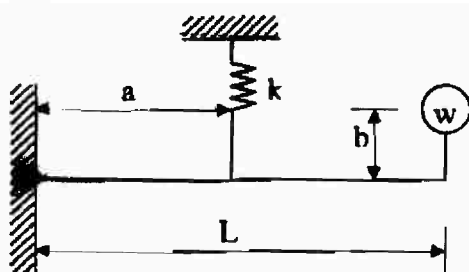
- أ- الشريطين الابتدائيين ب- معادلة الحركة. ج- اتساع الذبذبة.

5- كتلة وزنها $(W \text{ Ib})$ متصلة بنهاية نابض معاملته k فكان التردد الطبيعي 94 c.p.m . فإذا أضيف وزن آخر مقدار $11b$ إلى الكتلة الأولى لوحظ إنخفاض التردد الطبيعي إلى 76.7 c.p.m أوجد الوزن المجهول $(W \text{ Ib})$ للكتلة وكذلك معامل النابض $(k \text{ Ib/in})$.



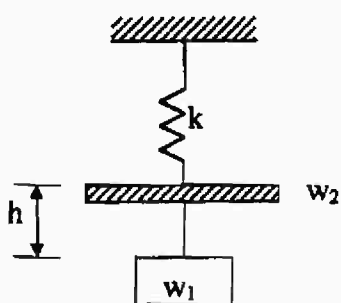
الشكل (2-2)

6- كتلة وزنها 3 Ib معلقة في طرف سلك طوله (50 in) والطرف الآخر العلوي للسلك المصنوع من الصلب مثبت كما مبين بالشكل (2-2) ومساحة مقطع السلك 0.001 in^2 فإذا أعطيت عند هذا الوضع سرعة في اتجاه السلك إلى أعلى مقدارها 1 m/sec أوجد التردد وسعة الذبذبة مع إعتبار أن معامل المرونة للصلب $E = 30 \times 10^6 \text{ Ib/in}^2$.



الشكل (2-3)

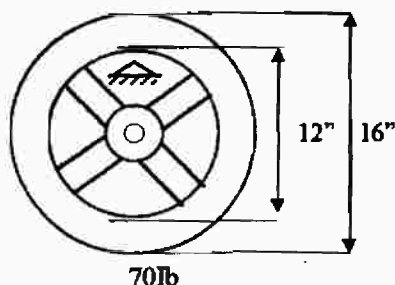
7- المنظومة المبينة بالشكل (2-3) أوجد المعادلة التفاضلية لحركة المنظومة إذا كان عزم القصور الذاتي للوزن w والقضيب حول المفصل (O) هو J_O وضح أن المنظومة تصبح غير مستقرة عندما يكون $b \geq ka^2 / w$.



الشكل (2-4)

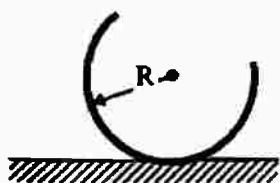
8- علق وزن w_1 في نابض معامل صلابته k وفي حالة توازن أستاكي. إسقط وزن ثانوي w_2 خلال الارتفاع h والتصق بالوزن w_1 بدون ارتداداً. كما مبين بالشكل (2-4). أوجد التردد الطبيعي للمنظومة

9- ربط وزن $44.5N$ بالنهاية السفلى لنابض تثبيت نهايته العليا، يهتز بزمان دوره طبيعي 0.45 ثانية. أوجد زمن الدورة الطبيعي عندما يربط وزن $122.25N$ إلى منتصف نفس النابض مع تثبيت النهايات العليا والسفلى.



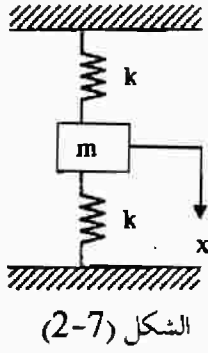
الشكل (2-5)

10- لقد سمح للحدافة التي تزن $311.5N$ أن تتأرجح كبدول على حافة سكين وعند الجانب الداخلي للطوق كما مبين بالمنظومة الموضحة بالشكل (2-5). إذا كان زمن دورة التذبذب المقاس $1.22 sec$ ، أوجد عزم القصور الذاتي للحدافة حول محورها الهندسي.



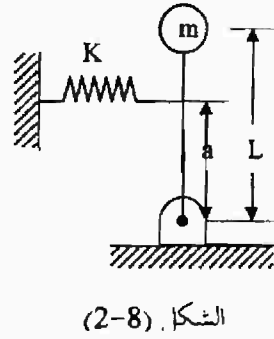
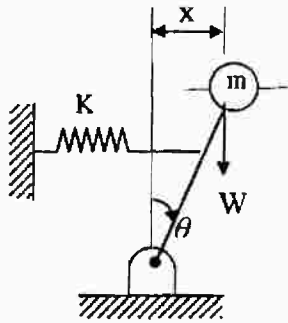
الشكل (2-6)

11- تثبت صفيحة نحيفة مستطيلة إلى أسطوانة نصف دائرية كما مبينة بالشكل (2-6) أوجد من دورة التذبذب إذا سمح للأسطوانة أن تتأرجح على سطح أفقي.



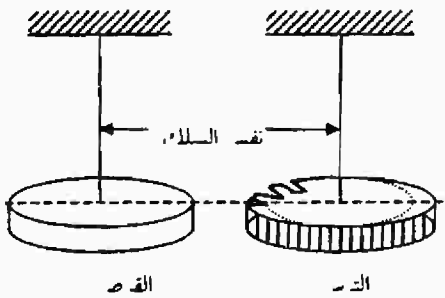
12- المنظومة المبينة بالشكل (2-7). أوجد المعادلة التفاضلية للحركة للأهتزاز الحر الغير مخمد وأوجد التردد الطبيعي للمنظومة.

$$Ans: \omega_n = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$



13- المنظومة المبينة بالشكل (2-8) يبين بندولاً مقلوباً طوله L وفي آخره كتلة m . والمطلوب إيجاد التردد الحر في الثانية إذا علم بأن النابض له معامل مرونة بحيث أن الذراع يكون في حالة إتزان من وضع رأسي كما هو مبين. وإذا كانت المسافة L متغيرة فأوجد طول البندول L بحيث يكون الذراع غير قاصر على عمل نبضات.

14- أثبت أن البندول البسيط يهتز بحركة توافقية بسيطة بحيث يكون تردد الاهتزاز $\sqrt{\frac{g}{L}}$ حيث (g) هي عجلة الجاذبية و L هو طول البندول وذلك بفرض أن زاوية الاهتزاز صغيرة.



15- قرص مستدير وزنه (20lb) ونصف قطره (8") معلق من سلك كما في الشكل (2-9). وجد إن القرص يهتز ألتوائياً بفترة مقدارها زمنيته (1.13 sec). فإذا ركب ترس بدلاً من القرص وأهتز بفترة زمنية (1.93 sec) فأوجد:

1- معامل التوائي للسلك.

2- عزم القصور الذاتي لكتلة الترس حول محوره.

$$(عزم القصور الذاتي لكتلة القرص = \frac{m.r^2}{2})$$

16- كتلة مقدارها 25kg معلقة بسوستة كزارتها في الشد 14KN/m وتهتز بحرية بسعة 12mm ، أوجد الزمن الدوري، والسرعة والعجلة عندما تكون الكتلة على بعد 8mm من وضع الأتزان وعين الزمن الذي ينقضي لتعبر من هذا الوضع إلى موضعها في الأراحة القصوى (الجواب: 0.0356 s و 4.48 m/s^2 و 0.212 m/s و 0.226 s).

17- في آلية ماكينة تعبئة تتحرك وصلة منزلقة في دليلها المستقيم بحركة توافقية بسيطة عند مسافتين 125 mm و 200 mm من وضعها الأوسط كانت للوصلة المنزلقة السرعتان 3 m/s و 6 m/s على الترتيب أوجد:

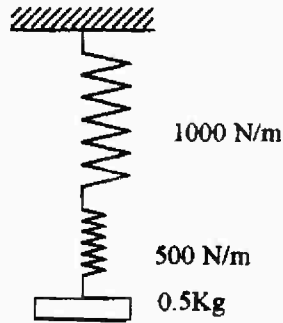
(أ) سعة الحركة. (ب) السرعة القصوى. (ج) الزمن الدوري. إذا كانت:

كتلة الوصلة المنزلقة 0.2Kg ، فما هي القيمة القصوى لقوة القصور الذاتي.

(الجواب: 48.6 N و 0.1875 و 7.3 m/s و 219.5 mm)

18- سوستة حلزونية ثبتت نهايتها بحيث كانت إحداهما رأسية فوق الأخرى. وركبت كتلة على السوستة عند نقطة بينهما. إثبت أن تردد الاهتزاز تكون له قيمة دنيا عندما تكون الكتلة في منتصف المسافة بين النهايتين.

سوستة حلزونية كزارتها 3.5N/m عندما تكون إحدى نهايتها مثبتة، والحمل يؤثر على النهاية الحرة. أوجد أقل قيمة للتردد عندما تكون كلتا النهايتين مثبتتين وكتلة قدرها 8Kg تؤثر على السوستة. (الجواب: 4.44Hz)



الشكل (2-10)

19- في المنظومة المبينة بالشكل (2-10) السوستة

العلوية كزارتها 1000 N/m والسوستة السفلية كزارتها

500 N/m والكتلة المعلقة قدرها 0.5Kg أوجد التردد

الطبيعي للاهتزاز.

(الجواب: 4.11 Hz)

20- كتلة m عندما تؤثر تدريجياً على سوستة ذات قوة

مرنة k لوحدة الأمتطاط، تحدث ترخيماً مقداره δ بين

أنه عند أستثارتها، فإن الحركة الناجمة تكون توافقية

بسيطة، وأن التردد هو n ويمكن إيجاد من العلاقة

$$2\pi n = \sqrt{g/\delta}$$

عمود أفقي - يتركز على محملين عند نهايتيه - يحدث به ترخيخ عند منتصفه قدره 0.005 mm لكل

100N من الحمل الواقع عند هذا المنتصف وعند تركيب طاره كتلتها 300 Kg عند المنتصف، فإن

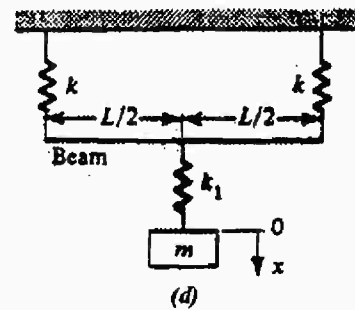
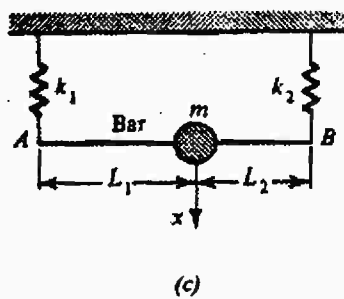
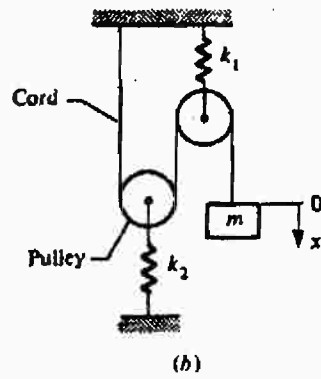
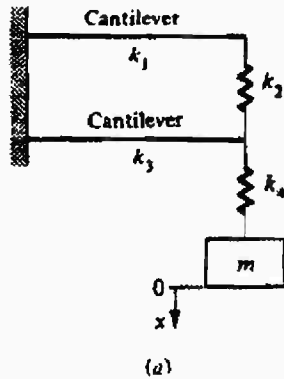
المنظومة تستجيب للأستثارة الخارجية، وتهتز رأسياً بسعة قدرها 0.25mm وأحسب قيم التردد، والسرعة القصوى، والعجلة القصوى لهذا الاهتزاز.

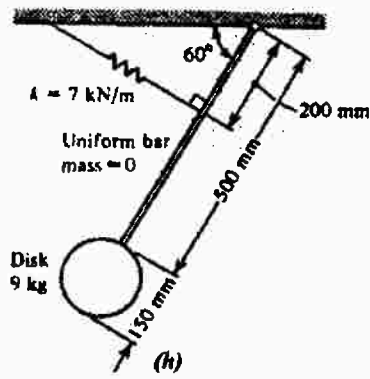
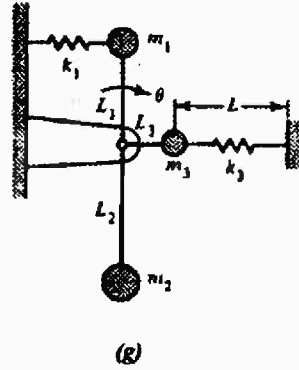
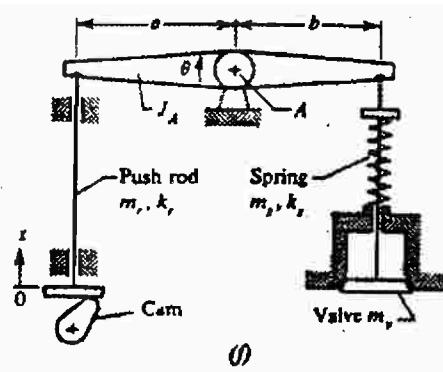
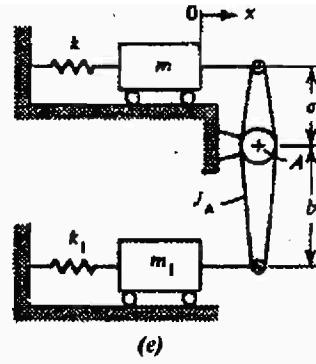
21- بندول ألتوائي يتكون من سلك طوله 0.5m ، وقطره 10mm ، نهايته العلوية مثبتة، أما النهاية السفلية، فمركب عليها قرص ثقيل عزم قصوره الذاتي 0.06Kg.m^2 ، ومعامل جساءة السلك 44GN/m^2 ، أوجد تردد الذبذبة الألتوائية للقرص وإذا كانت الأراحة القصوى على أحد جانبي وضع الثبات الحر هي 5° فأوجد أقصى قيمة لكل من السرعة الزاوية والعجلة الزاوية للقرص.
(الجواب: 125.5 rad/s^2 و 3.31 rad/s و 6.04Hz)

22- أسطوانة معدنية مصممة قطرها 450mm معلقة رأسياً على امتداد محورها بسلك مثبت فيها بإحكام - فإذا كانت مقاومة السلك للألتواء 22Nm/rad ، فأوجد كتلة الأسطوانة الألتزمة لكي تهتز بمعدل 40vib/min إذا أعطيت أراحة زاوية صغيرة حول محورها. (الجواب: 49.5 Kg)

23- علقت حدافة مركزة بالسطح الداخلي لإطارها على ساند أفقي ذي حافة حادة، بحيث يمكن أرجحتها في مستواها الرأسي - وزن الحدافة 350Kg والحافة الحادة للساند الأفقي موازية لمحور الحدافة، وتبعد عنه 350mm ويبلغ زمن نبذبة صغيرة واحدة 1.77s ، بفرض أن مركز ثقل الحدافة يقع على محورها. أوجد نصف قطر الحركة الترددية حول هذا المحور. أيضاً أوجد عزم اللي اللازم لزيادة سرعة الحدافة بمعدل منتظم من 240 إلى 250 rev/min خلال 0.75s عندما تكون الحدافة مداره حول محورها. (الجواب: 73.25Nm و 387.2mm)

24- أوجد معادلة الحركة والتردد الطبيعي للمنظومات المبينة بالشكل (2-11a,b,c,d,e,f,g and h)

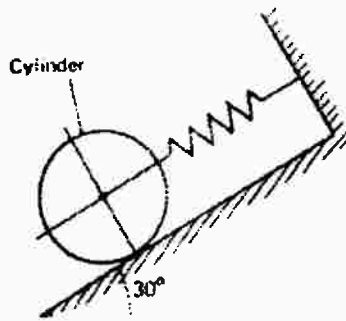




أشكال (2-11a,b,c,d,e,f,g and h)

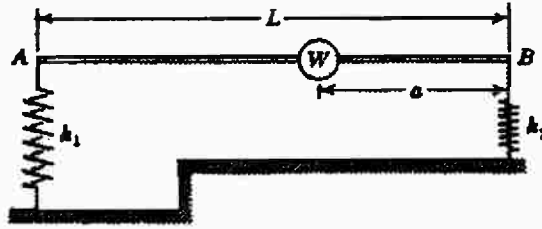
25- اسطوانة قطرها 200 mm ، وكتلتها 2 Kg ، ونصف قطر حركتها التكويمية حول محورها 80 mm ، تستقر على سطح يميل 30° على المستوى الأفقي، وتتصل بها سوسته (نابض) معاملته 1200 N/m ، كما هو مبين بالشكل (2-12).

أ- إذا كانت الاسطوانة تتدحرج على السطح بدون انزلاق، فأوجد تردد حركتها إذا ما أزيلت عن وضع اتزانها ثم أعتقت. (ب) إذا كان معامل الاحتكاك بين الاسطوانة والسطح هو 0.2 ، فأوجد أكبر سرعة لحركة مركز الاسطوانة، بدون انزلاقها على السطح. (الجواب: 3.04 Hz , 7.27 mm).



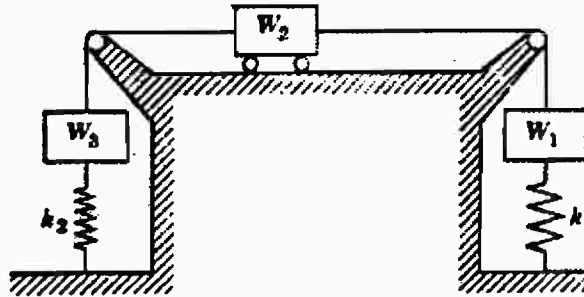
شكل (2-12)

26- أوجد التردد الطبيعي للمنظومة المبينة بالشكل (2-13) إذا تحركت المنظومة في الاتجاه الرأسي مع اعتبار أن القضيب AB جاسئ ومعمل الوزن وأن الوزن المركز (W) هو المؤثر في المنة.

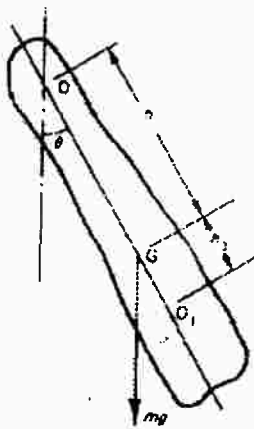


شكل (2-13)

27- أوجد التردد الطبيعي ومعادلة الحركة للمنظومة المبينة بالشكل (2-14) وذلك عند حدوث نبذبة صغيرة للوزان W_1, W_2, W_3 مع اعتبار أن الحبل المتصل بعناصر المنظومة غير قابل للاستطالة وأن معاملات النوابض هي K_1, K_2 .



شكل (2-14)



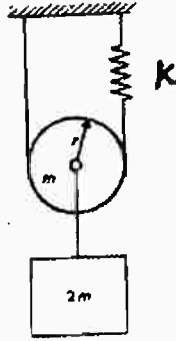
شكل (2-15)

28- جسم ذو سمك منتظم، وبه ثقب أسطوانى على مسافة h من مركز ثقله G علق الجسم من هذا الثقب ليتأرجح فى مستواه كبندول مركب كما هو مبين بالشكل (2-15) بين - لذنبات ذات سمعة صغيرة - أن الزمن الدورى مساو للزمن الدورى لبندول بسيط طوله $h + R_G^2/h$ حيث R_G هو نصف قطر الحركة التوافقية حول محور يمر خلال G ، موازياً لذلك المحور المار خلال O ، إذا كان الجسم عبارة عن قرص قطره 400 mm ، والمسافة $h = 150 \text{ mm}$ أوجد الزمن الدورى، وحدد مكان نقطة بديله O_1 والتي لها نفس زمن التآرجح.

(الجواب: 1.068 s , $h_1 = 133 \text{ mm}$).

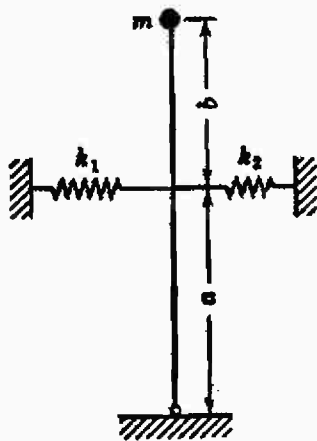
29- حدافة قرصية مصممة قطرها 600 mm مركبة بين ذنبتين عديمتي الاحتكاك، بحيث كان محورها أفقياً، ربطت عليها - بمسامير - كتلة أسطوانية قدرها 5 Kg ، وقطرها 200 mm ، بحيث كان محور الكتلة موازياً لمحور الحدافة، ويبعد عنه مسافة 200 mm ، فوجد أن المنظومة تتأرجح بزمن دورى 3.18 sec ، ما هي كتلة الحدافة؟

(الجواب: 50.8 Kg).



شكل (2-16)

30- المنظومة المبينة بالشكل (2-16) تتكون من بكرة كتلتها m ، ونصف قطرها r ، عزم قصورها الذاتي حول محورها هو I ، محمولة على حبل غير مرن على التوالي مع نابض معاملته K ، وتتدلى كتلة $2m$ حرة الاتصال مع مركز البكرة، إذا كان الحبل لا ينزلق على البكرة فاستنبط تعبيراً رياضياً بدلاله القيم المعطاة للتردد الطبيعي للذبذبات الرأسية.



شكل (2-17)

31- المنظومة المبينة بالشكل (2-17) عبارة عن بندول مقلوب: أ- أوجد التردد الطبيعي للمنظومة في حالة حدوث سعة صغيرة إثشاء الاهتزاز. ب- إذا كانت الكتلة m والنوابض $K1, K2$ ، والبعد $a + b$ (أى طول البندول) جميعها ثابتة تحقق من قيمة البعد a عندما لا يحدث اهتزاز أى أن ج- إذا كانت السعة للكتلة يعبر عنها بـ $(X \text{ inches})$ ما هي أقصى عجلة.

د- كم تصبح قيمة التردد الطبيعي F_n لهذه المنظومة عندما تصبح الجاذبية تقريباً مساوية سدس عجلة الجاذبية الأرضية. الجواب:

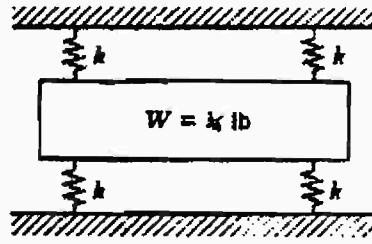
$$(a) f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{a^2(k_1 + k_2) - mg(a + b)}{m(a + b)^3}}$$

$$(b) a = \sqrt{\frac{mg(a + b)}{k_1 + k_2}}$$

$$(c) A = X \left(\frac{a^2(k_1 + k_2) - mg(a + b)}{m(a + b)^3} \right)$$

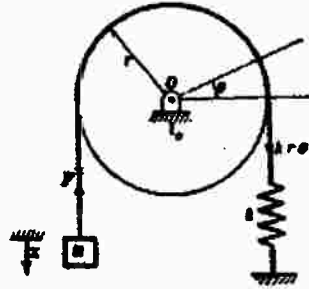
$$(d) f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{a^2(k_1 + k_2) - \frac{1}{6}mg(a + b)}{m(a + b)^3}}$$

32- المنظومة المبينة بالشكل (2-18) إذا كانت وزن الكتلة ($0.25lb$) متصل بأربعة نوابض معامل كل منهم K وكان التردد الطبيعي أثناء الاهتزاز في الاتجاه الرأسى (6 c.p.s) أوجد قيمة K لكل نابض ومعامل النابض المكافئ.



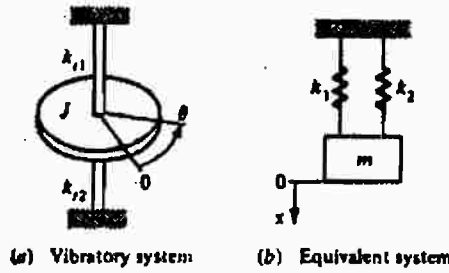
شكل (2-18)

33- أوجد معادلة الحركة والتردد الطبيعي بطريقتى الطاقة ونيوتن للمنظومة المبينة بالشكل (2-19).



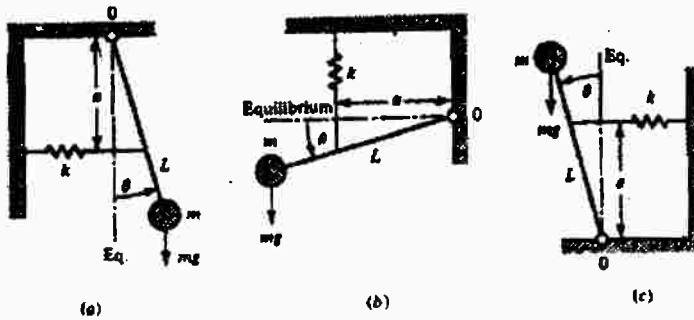
شكل (2-19)

34- أوجد التردد الطبيعي f_n للمتظومة المبينة بالشكل (2-20).



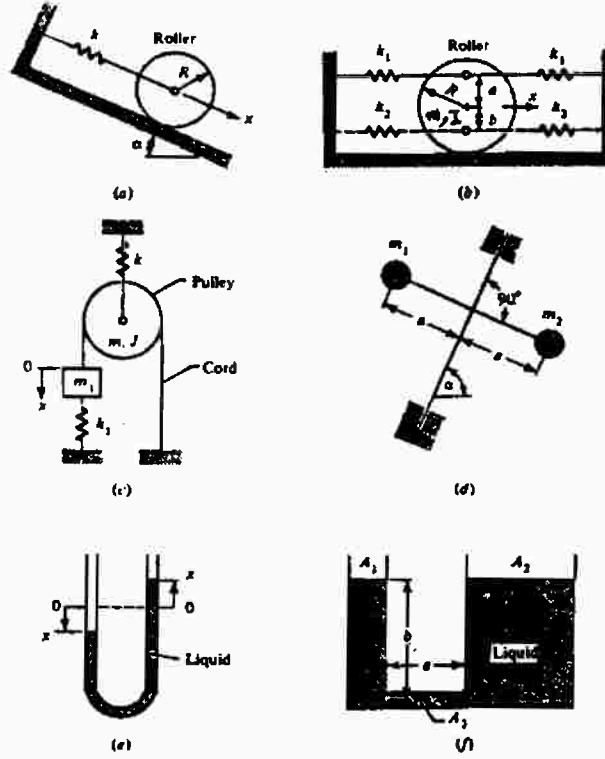
شكل (2-20)

35- أوجد معدلات الحركة للمنظومات المبينة بالشكل (2-20a,b,c).



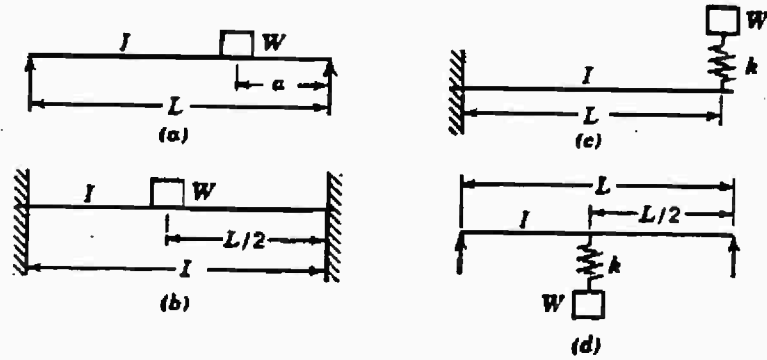
شكل (2-20)

36- اوجد معادلة الحركة لكل من المنظومات المبينة بالشكل (2-22a, b, c, d, e and f).



شكل (2-22a, b, c, d, e and f)

37- اوجد معادلة الحركة والتردد الطبيعي للمنظومات المبينة بالشكل (2-23a, b, c and d)



شكل (2-23a, b, c and d)

الجواب:

$$(a) \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3EI Lg}{W a^3 b^3}} \text{ cps}$$

$$(b) \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{192EIg}{WL^3}} \text{ cps}$$

$$(c) \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3EI k g}{(3EI + kL^3)W}} \text{ cps}$$

$$(d) \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{48EI k g}{(48EI + kL^3)W}} \text{ cps}$$

