الباب الثالث

اهتزاز المنظومات المتضائلة أحادية الدرجة

1-الاهتزاز الحر مع تضاؤل لزج: Free Vibration With Viscous Damping

الكبت او التضائل هو مقاومة الحركة فى جميع انواع الاحتكاك المختلفة ولكن هذه المقاومة تختلف عن مقاومة النابض او القصور الذاتى فى انها تكون مصحوبة بفقد فى الطاقة. وينتج الكبت او الخمد بطرق متعددة منها الاحتكاك وانزلاق الموائع وكذلك الحركه الداخلية فى الاجسام الصلبة فعندما تهتز منظومة ذات درجة واحدة من الحرية ستعتمد استجابتها على نوع الخمد الموجود بالمنظومه .

ويمكن كتابة معادلة الحركة على الصورة الاتية :

$$m\ddot{x} + F_d + kx = 0 \qquad (3-1)$$

حيث : قوة مقاومة الخمد او التضائل هى F_d

ومع ان الوصف الحقيقى لقوة مقاومة التضائل يكون صعبا ، فبالامكان فرض نماذج مثالية للتضائل التى غالبا ما ينتج عنها تنبأ مقنع للأستجابة . ومن بين هذه الامثلة قوة التضائل اللزج التى تتناسب طرديا مع السرعة ، حيث بقودنا هذا/ الافتراض الى ابسط الحلول الرياضية .

وفيما يلى اهم انواع الكبت او الخمد او التضائل :

أ ــ الكبت اللزج *Viscous Damping*

ب ــ الكبت الجاف او الكولومى *dry or Coulomb Damping*

ج ــ الكبت الصلب *Solid Damping*

2ــ الكبت او التضاؤل اللزج :

ينتج هذا الكبت عن حركة الاجسام بسرعة منخفضة او متوسطة فى مائع لزج . وتتناسب قوة مقاومة الكبت مع سرعة الحركة .

$$F_d \propto \dot{x} \qquad \therefore F_d = c\dot{x}$$

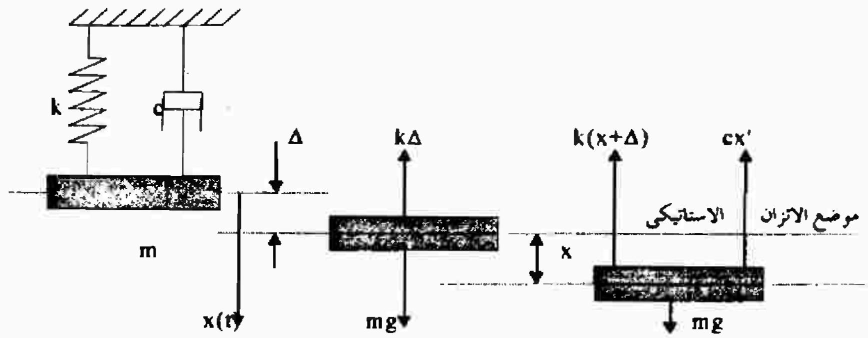
حيث $\dot{x}$ هي سرعة الجسم

c هى ثابت التناسب ويسمي معامل الخمد *Damping Coefficient*

وينتج هذا النوع من الكبت ايضا في الالات الكهرومغناطيسية حيث تتناسب مع معدل التقاطع مع خطوط المجال المغناطيسي .

اما ادا كانت حركة الجسم في المائع سريعة مما يسبب اضطراب المائع فان المقاومة في هذه الحالة تتناسب مع مربع السرعة ولايسمي الكبت فى هذه الحالة حرجا .

3-استنتاج معادلة الحركة لمنظومة مكونة من النابض والخامد والكتلة للاهتزاز الحر مع تضائل لزج:



الشكل (3-1) يوضح الاهتزاز الحر مع التضائل اللزج لمنظومة ذات درجة حرية واحدة

ان الكبت فى الحياة العملية يكون غالبا خليطا من الانواع السالفة الذكر و للتبسيط هنا سيؤخذ الكبت علي انة من النوع اللزج. ونلاحظ من الرسم انة يرمز للكبت بوعاء كبت *(Dash Pot)* ، ويمكن إستنتاج معادلة الحركة للمنظومة المبينة بالشكل (3-1) والتى تتكون من كتلة m ونابض معاملة k وخامد معامل الخمد لة c وهى تمثل الاهتزاز الحر مع تضائل لزج وبدلك يمكن إستنتاج المعادلة التفاضلية لحركة هدة المنظومة كما يلى:

طبقا لقانون نيوتن الثاني $m\ddot{x} = \sum F$ نجد ان :

$$\because m\ddot{x} = -k(x+\Delta) - c\dot{x} + mg \qquad ,\because k\Delta = mg$$

$$\therefore m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad \text{..........} (3-2)$$

والمعادلة(3-2) هى المعادلة التفاضلية للحركة من الدرجة الثانيه و متجانسة. ولحل هدة المعادلة يمكن

فرض الحل علي الصورة الاسية وذلك بوضع $x = e^{st} \quad ,\dot{x} = se^{st} \quad ,\ddot{x} = s^2e^{st}$

ثم بالتعويض من هدة العلاقات في معادلة الحركة للمنظومة ينتج مايلي :

$$ms^2e^{st} + cse^{st} + ke^{st} = 0$$

بالقسمة على e^{st} نحصل على

$$\therefore ms^2 + cs + k = 0$$

وحل هذه المعادلة باستخدام القانون العام $S_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ وذلك لايجاد جذور المعادلة كما يلى:

$$S_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

$$\therefore S_{1,2} = \frac{-c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad \text{..........} (3-3)$$

ويكون الحل العام للمعادلة فى الصورة التالية :

$x(t) = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}$ .... *(3-4)*

حيث A , B هما ثوابت تحدد قيمتها من الشروط الابتدائية $x(o)$ ، $\dot{x}(o)$ وتتوقف طبيعة الاهتزاز علـــى قيمة ما تحت الجذر فى المعادلة *(3-3)* وهى إما ان تساوى صفرا او قيمة موجبة او قيمة ســــالبة كمـــا سيلى شرحة:

<u>4 - الخمد او الكبت الحرج : *Critical Damping*</u>

يحدث ذلك اذا تلاشت قيمة ما تحت الجذر اى يساوى الصفر وذلك عندما يكون المقدار التالى :

أى ان $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0$

$$\left(\frac{c}{2m}\right)^2 = \frac{k}{m} \qquad \therefore \left(\frac{c}{2m}\right)^2 = \omega_n^2 \qquad \therefore \frac{c}{2m} = \omega_n$$

وتسمى c فى هذه الحالة بمعامل الكبت الحرج ويرمز لة بالرمز c_c حيث :

$c_c = 2m\,\omega_n$ = *critical damping coefficient* ....*(3-5)*

ومن المفضل ان نعبر عن قيمة اى تضائل بدلالة التضائل الحرج بواسطة النسبة اللابعدية التى تدعـــى بنسبة التضائل ζ او عامل الخمد (*the damping factor*) حيث :

$$\zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega_n} \qquad i.e \qquad c = c_c \qquad \therefore \zeta = 1$$

. c_c = *the critical dambing coefficient* $= 2\zeta m\,\omega_n = 2m\,\omega_n$ *where* $\zeta = 1$

وفى هذه الحالة يكون الجذران $s_{1,2}$ متساويان وقيمتهما سالبة أى ان.. $i.e..........s_{1,2} = \frac{-c}{2m} = -\omega_n$

ويكون الحل العام للمعادلة التفاضلية على الصورة التالية

$x = (A + B)e^{st}$ ....*(3-6)*

.($A+B$) هو ثابت واحد وعلى ذلك فهو ليس حلا عاما وقد لوحظ ان المقدار (te^{st}) هو ايضـــا احــد الحلول وذلك بالتعويض فى المعادلة $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ وعلى ذلك يمكن ايجاد الحل العام كالتالى:

$x = (A + Bt)e^{s.t}$ ....*(3-7)*

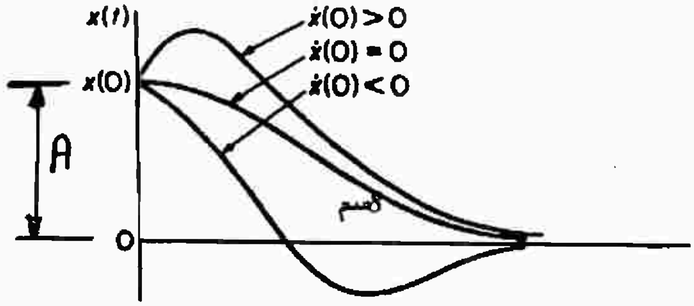
وباستخدام المعادلتين*(3-5)* ، *(3-6)* مع المعادلة *(3-7)* ياخذ الحل العام صورة المعادلة الاتية:.

$\therefore x = (A + Bt).e^{-\omega_n t}$ ....*(3..8)*.

ملاحظات على الكبت الحرج :

(أ) يمكن ايجاد الثابتين (*A* ,*B*) من شرطين حديين او ابتدائيين مثل ازاحة الكتلة $x(t)$ وســرعتها $\dot{x}(t)$ عند زمن معين t

(ب) الحركة لا ترددية (*a periodic*) ولكن تاخذ شكل دالة تؤل الى الصفر عندما يؤل الزمن الى ما لا نهاية ، وكذلك تبدأ باتساع مقدارة (*A*) عندما يكون الزمن صفر كما فى الشكل*(3-2)*.



الشكل *(3-2)*حركة تضائلية حرجة $\zeta = 1.0$

والشكل *(3-2)* يبين ثلاثة انواع من الاستجابة مع الازاحة الابتدائية $x(o)$ والكثير من العناصر المتحركـة للعدد الكهربائية والمقاييس تمتلك تضائلا او كبت حرج وذلك لمنع حـــدوث التنبـــذب وتجـــاوز حـــدود المقياس .

(ج) بمقارنة هذه الحالة بالحالتين التاليتين يتضح ان هذه هى اسرع حالة يعود فيها الجسم المـــهتز الـــى حالة السكون .

(د) قيمة الكبت الحرج يعبر عنها بالعلاقة $c_c = 2m\omega_n$ حيث عامل الخمد يساوى الوحدة $\zeta = 1$

<u>5 - الخمد او الكبت الاكبر من الحرج (over damped or large damping)</u>

يحدث هذا الكبت عندما تكون قيمة المقدار اسفل الجذر موجب ويكون ذلك عنـــدما $(\frac{c}{2m})^2 \succ \frac{k}{m}$ أى

إن $\frac{c}{2m} \succ \omega_n$ ومن ذلك يكون $c \succ c_c$, $\zeta = \frac{c}{c_c} \succ 1$ ولكن مـــن المعادلـــة يتضـــح ان المقـــدار الموجب اسفل الجذر يكون اقل من المقدار السالب $(\frac{-c}{2m})$ كما بالمعادلة *(3-3)*.وبالتالى نستنتج ان جذرى المعادلة فى هذه الحالة كمية سالبة ومختلفان فى المقدار ويكون الحل العام لهما على صورة المعادلة:

$$\because \zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega_n} \therefore c = 2\zeta .m\omega_n \quad \text{.......} (3-9)$$

وبالتعويض عن معامل الخمد c فى معادلتى الجذرين s_1, s_2 ينتج ان :

$$\therefore s_1 = \frac{-c}{2m} + \sqrt{(\frac{c}{2m})^2 - \frac{k}{m}} = -\frac{2\zeta m\,\omega_n}{2m} + \sqrt{(\frac{2\zeta m\,\omega_n}{2m})^2 - \omega_n^2}$$

$$\therefore s_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} = \omega_n\left[-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right] \quad \text{.......} (3\text{-}10)$$

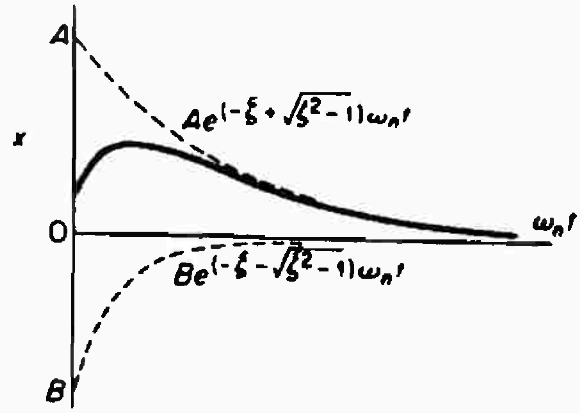
وبالمثل يمكن اثبات ان الجذر الثانى يكون على صورة المعادلة التالية:-

$$s_2 = \omega_n.\left[-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right] \quad \text{.......} (3\text{-}11)$$

وبالتعويض عن قيمة الجذرين S_1 , S_2 فى المعادلة التى تمثل الحل العام للمعادلـة *(3-4)* تنتـــج المعادلـــة التالية:

$$\therefore x(t) = A.e^{\left[-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right]\omega_n.t} + B.e^{\left[-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right]\omega_n.t} \quad \text{.......} (3\text{-}12)$$

يمكن ملاحظة ان الثابتين يتحددان بشرطين حديين او ابتدائين وان هذه الدالة لا ترددية ايضا مثل الحالة السابقة ، ولكن الكتل تاخذ وقتا اكثر لتعود الى وضع التعادل نظرا لزيادة الكبت ويبين الشكل *(3-3)* الاتجاه العام لدالة الحركة وهي دالة زمن اسية تنازلية وتسمى بالحركة الدورية وليست بالحركة الترددية او الاهتزازية.



الشكل*(3-3)* يوضح الحركة الدورية فى حالة الاهتزاز الحر مع التضائل الاكبر من الحرج*(ζ > 1.0)*

حيث يمكن تعيين كل من A،B من المعادلتين الاتيتين :

$$\therefore A = \frac{\dot{x}(o) + (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n x(o)}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}} \quad \text{.......} (3\text{-}13)$$

$$B = \frac{\dot{x}(o) - (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n x(o)}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}} \quad \text{.......} (3\text{-}14)$$

6-الخمد او الكبت الاصغر من الحرج *Underdamped or Light Damping*

تحدث هذة الحالة من الخمد عندما $\zeta \langle 1$ اي عندما تكون القيمة اسفل الجذر سالبة اي عندما تكون $\frac{k}{m} \rangle \left(\frac{c}{2m}\right)^2$ ولهذا تنتج كمية تخيلية ويكون الجذران علي الصورة التالية :

$$s_{1,2} = \frac{-c}{2m} \pm j\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} \quad \text{.......} (3\text{-}15)$$

. بالتعويض عن $c = 2\zeta m\omega_n$, $\omega_n^2 = \frac{k}{m}$ فى معادلة الجذور ينتج ان :

$$. s_{1,2} = \frac{-2\zeta m\omega_n}{2m} \pm j\sqrt{\omega_n^2 - \frac{4\zeta^2 m^2\omega_n^2}{4m^2}} = -\zeta\omega_n \pm j(\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n \text{.....}(3-16)$$

$$\therefore \ s_{1,2} = \omega_n \left[-\zeta \pm j(\sqrt{1-\zeta^2}) \right] \quad \text{.......} (3\text{-}17)$$

ويسمى المقدار $\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}$ بالتردد الطبيعي ذات الخمد (ω_d)

$$\omega_d = \text{ the natural frequency of damping vibration } = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \text{..........}(3-18)$$

وبالتعويض عن ω_d فى المعادلة *(3-16)* ينتج ان :

$$\therefore s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_d.t \quad \text{.......(3-19)}$$

وباستخدام صيغة اويلر *Euler's Formula* حيث :

$$e^{\pm j\theta} = \cos\theta \pm j\sin\theta \quad \text{.......(3-20)}$$

الحل المتمم x_c يكون على الصورة التالية $x_c = B_1 e^{s_1 t} + B_2 e^{s_2 t}$

$$\therefore x_c = B_1.e^{(-\zeta.\omega_n + j.\omega_d)t} + B_2.e^{(-\zeta.\omega_n - j.\omega_d)t}$$

$$= e^{-\zeta.\omega_n.t}\left[B_1.e^{j.\omega_d.t} + B_2.e^{-j.\omega_d.t}\right] \quad \text{.......(3-21)}$$

$$\therefore x_c = e^{-\zeta\omega_n t}\left[(B_1 + B_2)\cos\omega_d.t + j(B_1 - B_2)\sin\omega_d.t\right] \quad \text{.......(3-22)}$$

حيث الازاحة $x_c(t)$ هي كمية فيزيائية حقيقية وانهم مركبتين مترافقتين B_1, B_2 *are complex conjugates.*

. المعادلة السابقة *(3-22)* يمكن كتابتها على الصورة التالية

$$x_c = e^{-\zeta.\omega_n t}.\left[A_1.\cos\omega_d.t + A_2.\sin\omega_d.t\right] \quad \text{.......(3-23)}$$

$$\therefore x_c = A.e^{-\zeta.\omega_n.t}.\sin(\omega_d.t + \phi) \quad \text{.......(3-24)}$$

حيث A_1 , A_2 ثوابت حقيقية يمكن تعينهم من الظروف البدائية (*The Inital Conditions*)

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \quad , \quad \phi = \tan^{-1}\frac{A_1}{A_2} \quad \text{.......(3-25)}$$

ولهذا فان المعادلة *(3-24)* تعبرعن حركة توافقيةْ ذات تردد مُخمد ω_d والسعة يعبر عنها بالعلاقة $Ae^{-\zeta\omega_n.t}$

ملاحظات:

1-الحركة تكون اهتزازية عندما $\zeta < 1$

2-التردد الطبيعي يكون اكبر من التردد ذو الخمد اي ان $\omega_n \succ \omega_d$

3-الحل المتم $x_c(t)$ يعطي الحركة الانتقالية للمنظومة

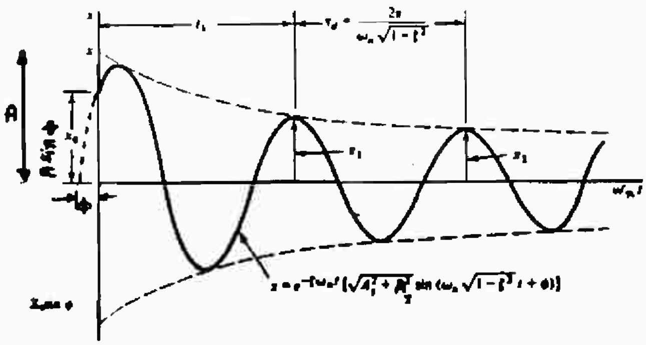
the complementry solution gives the transient motion of the system.

4-ومن ذلك يتضح ان هذة الحركة هي حركة توافقية و بتردد ذات خمد او تضائل ω_d وتكون السـعة لهذة الحركة كما بالمعادلة التالية :

$$\text{the amplitude} = A.e^{-\zeta\omega_n.t} \quad \text{.......(3-26)}$$

والشكل (*3 - 4*) يوضح هذة الحركة وهي حركة توافقية تكرر نفسها كل فترة زمنية (t_d) حيث يعين الزمن من العلاقة التالية :

$$t_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_n.\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \text{.......(3-27)}$$

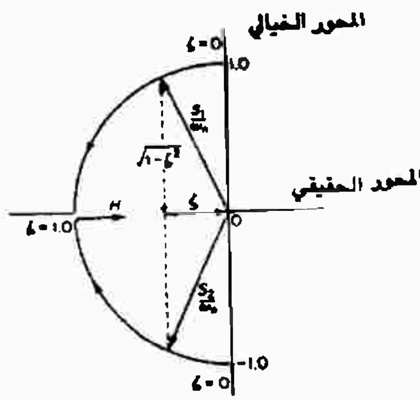


شكل (4 - 3) يوضح حركة توافقية اهتزازية ذات خمد عندما ($\zeta < 1$)

ونلاحظ ان الحالات الثلاثة للتضائل التي نوقشت سابقا تتحدد طبقا لقيمة ζ اي اذا كان عامل الخمد اكبر من او اقل او يساوى الوحدة. ويوضح الشكل (5 -3) المخطط البياني للمعادلة الخاصة بالجذور التالية:

$$s_{1,2} = \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right).\omega_n \qquad (3-28)$$

وذلك فى مستوي مركب مع عامل الخمد ζ كاحداثى افقي. فاذا كانت $\zeta = 0$ تختصر المعادلـــة الســابقة الخاصة بالجذور الى $s_{1,2} = \pm j$ وبهذا فان الجذور التي تقع على الاحداثي الخيالى توافق حالـــة انعـدام الخمد وللقيم $0 \leq \zeta \leq 1$ وبذلك يمكن كتابة المعادلة السابقة فى حالة وجود الجزء التخيلي بها كما يلى:



الشكل (5 -3) يوضح المخطط البياني لمعادلتي الجذورعلي المحور الحقيقي والتخيلي

$$\frac{s_{1,2}}{\omega_n} = \left(-\zeta \pm j\sqrt{1-\zeta^2}\right) \qquad (3-29)$$

والجذران هما نقضتان مركبتان مترافقتان واقعتان على القوس الدائرى ويتقاربان عند النقطة $\frac{s_{1,2}}{\omega_n} = 1$

حيث انة بازدياد اكثر من وحدة واحدة تفترق الجذور على طول الاحداثي الافقى وتبقى اعداد حقيقية .

ومن هذا المخطط نلاحظ ان الحل المعطي بالمعادلة وهى

$$x = e^{-\left(\frac{c}{2m}\right)t}.\left[Ae^{\left(\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2-\frac{k}{m}}\right)t} + Be^{-\left(\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2-\frac{k}{m}}\right)t}\right] \quad \text{.................................}(3-30)$$

تكون تحت الاختبار حيث الحد الاول $e^{-\left(\frac{c}{2m}\right)t}$ يمثل ببساطة دالة الزمن التناقصى الاســـى . مـــع ان تصرفات الحدود بين القوسين تعتمد على اشارة القيمة العددية داخل الجذر التربيعى ؛ اى هل تلك القيمة موجبة او سالبة او تساوى الصفر.

فعندما يكون حد التضائل $\frac{c^2}{4m^2}$ اكبر من $\left(\frac{k}{m}\right)$ تكون اسس المعادلة اعلاة اعدادا حقيقية. كذلـــك عـــدم امكانية حصول تذبذبات. ونشير الى هذة الحالة المتضائلة عندما يكون حد التضائل $\left(\frac{c}{2m}\right)^2$ اقـــل مـــن $\left(\frac{k}{m}\right)$ يصبح الاس عددا خياليا اي انة يساوي $t.\left[\pm j\sqrt{\frac{k}{m}-\left(\frac{c}{2m}\right)^2}\right]$ولذلك تؤل المعادلة الى:

$$e^{\left[\pm j\sqrt{\frac{k}{m}-\left(\frac{c}{2m}\right)^2}\right]t} = \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}-\left(\frac{c}{2m}\right)^2}\right).t \pm j\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}-\left(\frac{c}{2m}\right)^2}\right).t \quad \text{..............................}(3-31).$$

وبذلك تشير هذة الحالة الى حالة الخمد الناقص الاقل من الحرج .

ملاحظات علي الكبت (الخمد) الناقص الاقل من الحرج:-

1-يمكن ايجاد قيمة الثابتين A , ϕ وهما السعة وزاوية الطورمن شرطين من الشروط الحدية اوالابتدائية

2- تعتبر الحركة اهتزازية *Oscillatory Motion* بفترة زمنية ثابتة t_d حيث

$$t_d = \frac{2\Pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \text{...}(3\text{-}32)$$

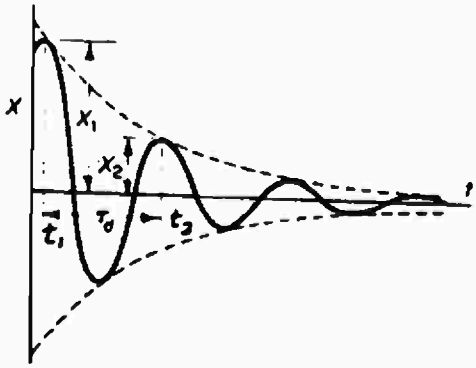
3 ــ اتساع الاهتزاز يتناقص بمرور الوقت نتيجة وجود الكبت ويمكن الاعتماد على هذه الظاهرة فـــى تقدير قيمة الكبت . فبقياس اتساع الذبذبة في دورتيـــن متتـــاليتين x_1,x_2 يمكـــن ايجـــاد التنـــاقص اللوغاريتمى (δ) .

7- التناقص اللوغارتمي (δ) : *Logarithmic Decrement*

ان اتساع الحركة الاهتزازية يتناقص تدريجيا بمرور الوقت نتيجة وجود الخمـــد فـــى المنظومـــة وان الطريقة المناسبة فى تحديد وتقدير قيمة الخمد هو الاعتماد على تلك الظاهرة وذلك بقياس اتساع الذبذبـــة فى دورتين متتاليتين وليكن x_1 ، x_2 وكذلك يمكن قياس معدل تلاشى الذبذبة الحرة بواسطة اجهزة القياس ولنتامل الاهتزاز المتضائل والمعبر عنه بالمعادلة العامة:

$$x = Ae^{-\zeta\omega_n.t}.\sin(\omega_d.t + \phi) \quad \text{..}(3-24)$$

ويكون اقصى سعة *(the maximum amplitude)* في الدورة عندما تكون $\sin(\omega_d.t + \phi) = 1$ فاذا كانت الحركة تمثل بالشكل *(3-6)* التالي:



الشكل (3-6)معدل تلاشي التذبذب مقاسة بالتناقص اللوغاريتمي

فان التناقص اللوغاريتمى والذي يعرف باللوغاريتم الطبيعى لنسبة اى سعتين متعاقبتين ويرمز لة بالرمز (δ) يمكن ايجادة بالصيغة الاتية::

$$\delta = \ln\frac{x_1}{x_2} = \ln\left(\frac{Ae^{-\zeta\omega_n t_1}}{Ae^{-\zeta\omega_n t_2}}\right) = \ln\left(\frac{e^{\zeta\omega_n t_2}}{e^{\zeta\omega_n t_1}}\right) = \ln\left(e^{\zeta\omega_n (t_2-t_1)}\right) = \ln e^{\zeta\omega_n t_d} \ldots\ldots\ldots\ldots(3-33)$$

$$\because t_d = \frac{2\pi}{\left(\sqrt{1-\zeta^2}\right)\omega_n} \qquad \therefore \delta = \ln e^{\zeta\omega_n \frac{2\pi}{\left(\sqrt{1-\zeta^2}\right)\omega_n}} \cong \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \ldots\ldots\ldots(3-34)$$

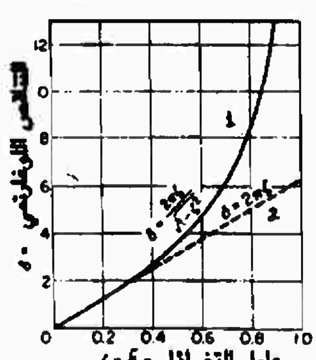
$$\therefore \frac{x_1}{x_2} = e^{\delta} = e^{\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3\text{-}35)$$

حيث $\frac{x_1}{x_2}$ هى النسبة بين اى سعتين متتاليتين *the consecutive amplitude ratio*

واذا كان عامل الخمد ζ اصغر بكثير من الواحد ويقترب من الصفر أى ان ($1 \ggg \zeta$) فانة يــهمل عامل الخمد الموجود اسفل الجذر لان قيمة الجذر فى هذة الحالــة يســاوى الوحــدة ويــؤل التنــاقص اللوغاريتمى δ الى المعادلة التالية:

$$\delta \cong 2\pi\zeta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3-36)$$

والشكل التالى يبين القيم الحقيقية والتقريبية للتناقص اللوغاريتمى δ كدالة فى عامل الخمد ζ



الشكل (3-7) يوضح العلاقة بين التناقص اللوغاريتمى δ وعامل الخمد ζ

يوضح الشكل $(3\text{-}7)$ العلاقة بين التناقص اللوغاريتمى δ وعامل الخمد ζ لحالتين وهما فى حالة عامل الخمد عندما يكون اصغر بقليل من الواحد $(\zeta < 1)$ فان شكل العلاقة ياخذ المنحنى (1) بينما اذا كان عامل الخمد اقل بكثير من الواحد $(\zeta <<< 1)$ فان شكل العلاقة توضح بخط مستقيم ومنقط (2) ويحدث انفصال بين الحالتين عندما $(\zeta \cong 0.3)$.

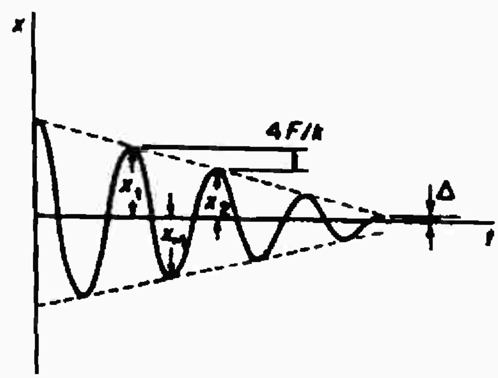
<u>8ـ الكبت الجاف او تضائل كولمب : Dry or Coulomb Damping</u>

1-ينتج هذا الكبت عن احتكاك الاجسام الصلبة الجافة وتتناسب المقاومة فى هذا النوع مع الضغط العمودى على سطح التماس بين السطحين.ويظل الكبت ثابتا بالنسبة للازاحة والسرعة والعجلة . اى ان قوة التضائل تساوى خاصل ضرب القوة العمودية فى معامل الاحتكاك

$$F_d = \mu . F_N \; .$$

حيث F_N هى القوة العمودية على السطحين (Vertical Force).

وقد افترصت قوة التضائل هنا بانها لا تعتمد على السرعة حال شروع الحركة . وبما ان قوة التضائل معاكسة دائما لاشارة السرعة . وتكون المعادلة التضائلية للحركة لكل اشارة سارية المفعول لكل فترة نصف دورة فقط . ولايجاد تلاشى السعة نلجأ الى مبدأ معادلة الشغل بالطاقة ، أى بمساواة الشغل المنجز بالتغير فى الطاقة الحركية . ونختار نصف دورة تبدأ من اقصى موقع وبسرعة تساوى صفر ولتكن السعة مساوية x_1كما فى الشكل$(3\text{-}8)$وبذلك يكون التغير فى الطاقة الحركية صفرا والشغل المنجز على الكتلة m يكون صفرا ايضا .



الشكل $(3\text{-}8a)$الاهتزاز الحر مع تضاؤل كولومب

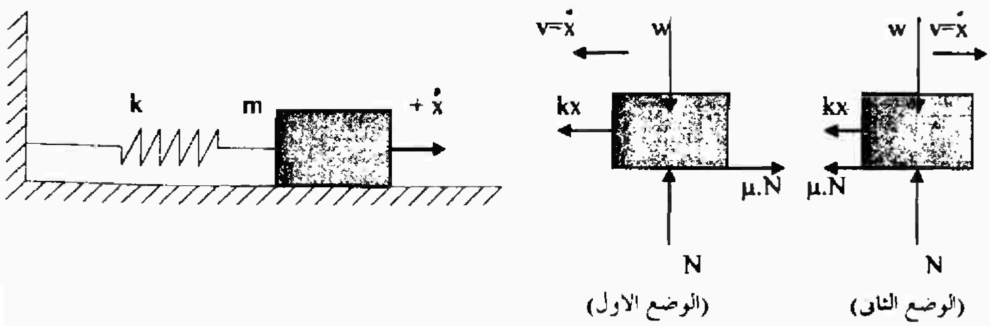
حيث:

$$\tfrac{1}{2}k(x_1^2 - x_{-1}^2) - F_d(x_1 + x_{-1}) = 0$$
$$\therefore \tfrac{1}{2}k(x_1 - x_{-1}) = F_d$$

حيث x_1 هى السعة بعد نصف دورة كما مبين فى الشكل$(3\text{-}8)$ ، وبإعادة هذا الاسلوب لنصف الدورة القادمة، سوف نجد تناقصا اكثر فى السعة قدرة $\frac{2F_d}{k}$ ، بحيث يكون التلاشى فى السعة لكل دورة ثابتا ومساويا الى $x_1 - x_2 = \frac{4F_d}{k}$

وبذلك سوف تتوقف الحركة عندما تصبح السعة اقل من ٤ وفى اى موقع تكون قوة النابض غير كافيـــة للتغلب على قوة الاحتكاك الاستاتيكى ، والتى تكون عموما اكبر من قوة الاحتكـــاك الحركـــى . كذلـــك نستطيع ان نبين ان تردد التذبذب هو $\omega_\mu = \sqrt{\frac{k}{m}}$ والذى يكون هو نفس التردد فى المنظومـــة عديمـــة التضاؤل .

2- الشكل *(3-8b)* يوضح القوى المؤثرة على المنظومة فى حالة الخمد الكولمب ومنها نلاحظ ما يلى:



الشكل *(3-8b)* يوضح الخمد الكولمب او الخمد ذات الاحتكاك الجاف

Coulomp Damping or Dry Friction Damping

نلاحظ من الشكل *(3-8b)* الخمد الكولمب او الخمد ذات الاحتكاك الجاف حيث قوة الخمد لاتعتمد علـــى الازاحة او تفاضلها وهو السرعة ، ولكن تعتمد على القوة بين السطوح المنزلقة ، وإتجاة قوة الاحتكـــاك تكون مقابلة لاتجاة الحركة وإشارة القوة تتغير عندما يتغير إتجاة الحركة. ولهذا يوجد حلان ضروريـــان لمعادلة الحركة والتى يعتمد كل منهما على إتجاة الحركة ، والحلان يكونوا خطيان وذلك بعد كل نصـــف دورة ، فعند الحركة لنصف دورة من اليمين الى الشمال كما فى الوضع الاول وتكون معادلة الحركـــة طبقا لقانون نيوتن كما يلى:

$$\because \sum F = m\ddot{x} \qquad \therefore m\ddot{x} = -kx + \mu.N \text{..............................}(1)$$

$$\therefore The\ \ soultion\ \ of\ \ equation(1):$$

$$x = A_1 \cos(\omega_n t) + B_1 \sin(\omega_n t) + \frac{\mu.N}{k} \text{..............................}(2)$$

وعند الحركة لنصف دورة من الشمال الى اليمين كما فى الوضع الثانى أى عكس الحركة بالوضع الاول تكون معادلة الحركة فى هذة الحالة وحلها كما يلى:

$$\therefore m x = -kx - \mu.N \text{..}(3)$$

$$\therefore The\ solution\ of\ equation(3): \quad x = A_2 \cos(\omega_n t) + B_2 \sin(\omega_n t) - \frac{\mu.N}{k} \text{........}(4)$$

$$where \qquad A_1\ ,B_1\ ,A_2\ ,B_2 \qquad are\ constant$$

وهذة الثوابت الاختيارية تعتمد على الشروط الابتدائية لكل نصف دورة ويكون العـــامل $\frac{\mu.N}{k}$ ثـــابت حيث μN يسمى بقوة الا حتكاك *Friction force* وتكون الحركة لكل نصف دورة حركة توافقيـــة ، ومنحنى الازاحة مع الزمن يكون منحنى نصف جيبى مع تغير موضع الاتزان من $+\mu N/k$ الـــى $\mu N/k -$ لكل نصف دورة. ، ومن الشروط الابتدائية نجد أن:

$$\because at \quad t=0 \ , x(0)=X_0 \ , \dot{x}(0)=0 \quad \therefore A_1 = X_0 - \frac{\mu.N}{k} \ , \quad B_1 = 0$$

$$\therefore x = \left(X_0 - \frac{\mu.N}{k}\right)\cos(\omega_n t) + \frac{\mu.N}{k} \qquad \text{..........}(5)$$

حيث بالتعويض بالثوابت فى المعادلة *(2)* تنتج المعادلة *(5)* والازاحة تكون على شكل منحنى جيب التمام *cosine wave* وفى الاتجاة الموجب للمقدار $\mu N/k$ ويكون ذلك عندما $0 \le t \le \frac{\pi}{\omega_n}$ وعندما يكون

$$i.e \quad at \quad t = \frac{\pi}{\omega_n} \quad \therefore x = \left(\frac{2\mu.N}{k}\right) - x_0$$

وبالنسبة لنصف الدورة الثانى تعكس الحركة إتجاهها وتكون الثوابت على الصورة التالية:

$$A_2 = X_0 - \frac{3\mu.N}{k} \qquad B_2 = 0$$

وبالتعويض بهذة الثوابت فى المعادلة *(4)* نحصل على المعادلة التالية:

$$\therefore x = \left(X_0 - \frac{3\mu.N}{k}\right)\cos(\omega_n.t) - \frac{\mu.N}{k} \qquad \text{..........}(6)$$

وهذة الازاحة تكون على شكل *cosine wave* وتكون فى الاتجاة السالب وتساوى المقـــدار $\mu N/k$ وتقل السعة ويعبر عنها بالعلاقة التالية:

$$i.e \quad X_0 - \frac{3\mu.N}{k} \qquad at \quad \frac{\pi}{\omega_n} \le t \le \frac{2\pi}{\omega_n}$$

وعندما يكون الزمن t كما بالمعادلة التالية:

$$at \quad t = \frac{2\pi}{\omega_n} \quad \therefore x = X_0 - \left(\frac{4\mu.N}{k}\right) \quad \therefore For\ the\ third\ half\ cycle \quad \frac{2\pi}{\omega_n} \le t \le \frac{3\pi}{\omega_n}$$

اى عند هذة الحالة ، فان الحركة تعكس إتجاهها ثانيا وتكون معادلة الحركة فى هذة الحلة كما بالمعادلة التالية:

$$x = \left(X_0 - \frac{5\mu.N}{k}\right)\cos\omega_n t + \frac{\mu.N}{k}$$

وفى كل دورة تقل السعة بمقدار يساوى $4(\mu N/k)$ وعند توقف الحركة فى نهاية نصف دورة واحـــدة فان السعة تقل بمقدار $(\mu N/k)$ وعند هذة النقطة فان قوة النابض الكامنة kx تكـــون اقـــل مـــن قـــوة

الاحتكاك $\mu.N$ ويعبر عن ذلك بالعلاقة $kx < \mu.N$ وهذاالتناقص الثابت للخمد لايكون لوغارتمى ولكنة خطى ويعبر عنة بالعلاقة التالية:

$$X_{n\_+1} = X_n - \frac{4\mu.N.}{k}$$

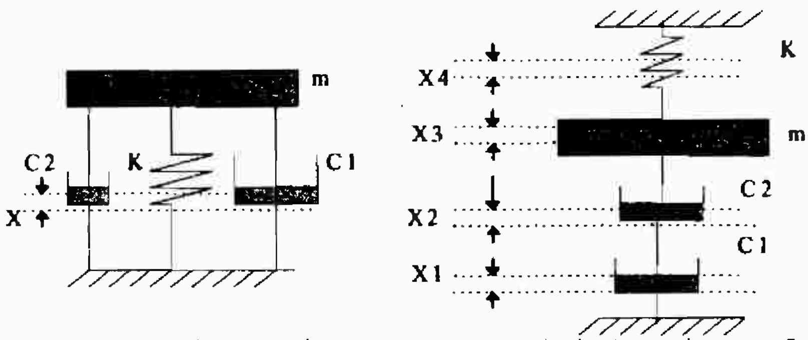
ومنحنىالازاحة مع الزمن كما مبين بالشكل *(3-8c)* يكون واقع بين غلاف مكون من زوج من الخط المستقيم التى يكونوا تقريبا فى موضع الاتزان مع ميل سالب ومقدارة $2(\frac{\mu.N,\omega_n}{\pi.k})$

9 – الكبت الصلب Solid Damping

ينتج هذا الكبت مع تشوة الاجسام الصلبة وما زال هذا النوع من الكبت موضع دراسة ، غير انه يبدو ان الكبت يكون متساويا لكل موجات الاهتزاز وكذلك يبدو ان قوى الكبت تتناسب مع شدة الاجهاد او الانحراف .

10-الخوامد المكافئة Equivalent Dampers

أ- توصيل او ترتيب الخوامد على التوازى. Dampers are connected or arranged in Parallel



(C) توصيل الخوامد على التوازى. (D)توصيل الخوامد على التوالى

الشكل (3-8C,D) يوضح توصيل الخوامد على التوازى والتوالى

المنظومة المبينة بالشكل *(8-c)* توصيل الخوامد على التوازى ولايجاد الخامد المكافئ نتبع الاتى:..............

$$C_{eq} = Equivalent \quad of \quad Viscous \quad Damping \quad \because Damping \quad force = F_d = c\,x \,......(1)$$

$$\therefore F_{eq} = F_1 + F_2 \quad \therefore C_{eq}\,\dot{x} = c_1.\dot{x} + c_2.\dot{x} \,..(2)$$

$\because$ *The displacement x is equall for spring ,mass and dampers*

$\therefore$ *Velocity* $\left(\dot{x}\right)$ *is also equall for spring ,mass and dampers*

$$\therefore from \quad equation \ (2) \qquad C_{eq} = c_1 + c_2 \,..(3)$$

(3-8c) Dampers are connected or arrangment in Series ب-توصيل او ترتيب الخوامد على التوالى

توصيل النوابض على التوالى موضح بالمنظومة المبينة بالشكل السابق والتى تتكون من الكتلة ونـــابض وخامدان تحدث لهما إزاحات مختلفة ولهذا فان الازاحة الكلية للخامدان تكون هى مجموع ازاحـــة كــل خامد كما مبين بالمعادلات الاتية:

$$From\ \ fig.(3-8d) \therefore The\ \ total\ \ displacement\ \ for\ \ c_1\ ,c_2 = x_1 + x_2 \qquad \because v = \dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

$$,\because F_{damping} = F_d = c.\dot{x} \qquad \therefore \dot{x}_1 = \frac{F_{d1}}{c_1} \quad ,\dot{x}_2 = \frac{F_{d2}}{c_2}$$

$$\therefore v_{total} = v_1 + v_2 = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = \dot{x}_{eq.} \qquad ,\because F = c_{eq.}.\dot{x}_{eq.} \qquad \therefore \dot{x}_{eq.} = \frac{F_d}{C_{eq.}} = \frac{F_{d1}}{c_1} + \frac{F_{d2}}{c_2}$$

$$\because The\ \ force\ \ is\ \ effected\ \ on\ \ mass\ \ ,spring\ \ and\ \ two\ \ dampers\ \ c_1, c_2\ \ is\ \ equall$$

$$\therefore F_d = F_{d1} = F_{d2} \qquad \therefore \frac{1}{C_{eq.}} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \qquad \therefore C_{eq.} = \frac{1}{\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}} = \frac{1}{\frac{c_1 + c_2}{c_1.c_2}} = \frac{c_1.c_2}{c_1 + c_2}$$

$$\therefore C_{eq.} = \frac{c_1.c_2}{c_1 + c_2}$$

11-حل المعادلة التفاضلية

- صورة المعادلة العامة المتجانسة لمنظومة ذات درجة حرية واحدة تحتوى على نابض معاملة k وخامد معاملة C وكتلة المنظومة m يمكن كتابتها على صورة المعادلة التالية :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

وهى معادلة تفاضلية متجانسة لان الطرف الايمن للمعادلة يساوى الصفر وهى من الرتبة الثانية (اكــبر درجة تفاضل)

ومن الدرجة الاولى وهو اكبر اس فى المعادلة . ويمكن ايجاد حل المعادلة (1) بوضـــــع $x = e^{st}$ ثــم بالتفاضل ينتج ان $\dot{x} se^{st} \quad ,\ddot{x} = s^2 e^{st}$

وبالتعويض من هذه العلاقات فى المعادلة (1) ينتج ان :

$$ms^2 e^{st} + cse^{st} + ke^{st} = 0$$

$$\therefore ms^2 + cs + k = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

ويمكن حل المعادلة (2) باستخدام القانون العام التالى :

$$s_{1,2} = \frac{-c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2 - 4mk}{4m^2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

وتحدد قيمة الحل من المميز $c^2 - 4mk$ كما يلي:-

ا- اذا كانت جذور المعادلة (3) حقيقية مختلفة يكون $c^2 > 4mk$ ويكون الحل علي الصورة الاتية:

$x(t) = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}$

ب- اذا كانت جذور المعادلة (3) حقيقية ومتساوية يكون $c^2 = 4mk$ ويكون الحل علي الصورة الاتية:

$x(t) = (A + Bt)e^{st}$

ج- اذا كانت جذور المعادلة (3) تخيلية يكون $c^2 < 4mk$ ويكون الحل علي الصورة الاتية:

$x(t) = [A_1.\cos(bt) + A_2 \sin(bt)]e^{at} \qquad \therefore s_{1,2} = a \pm bj$

$where \; a = -\zeta\omega_n \qquad ,b = \omega_d \qquad \therefore x(t) = Ae^{-\zeta\omega_n t}.\sin(\omega_d .t + \varphi)$

12-مسائل محلولة

1-اذا كانت معادلة الحركة لمنظومة ما هي $\ddot{x} + 4\dot{x} + kx = 0$ اوجد حل هذة المعادلة عندما $x(0)=0.4$, $\dot{x}(0)=1$ m/s وذلك في الحالات الاتية: (1) k=3 , (2) k=4 , (3) k=5

الحل:

نضع $x = e^{st}, \dot{x} = se^{st}, \ddot{x} = s^2e^{st}$ فى معادلة الحركة ثم بالقسمة على e^{st} نحصـــل علـــى المعادلـــة التفاضلية المتجانسة والتى من الدرجة الثانية وهى $s^2 + 4s + k = 0$ وباستخدام معادلة الجـذور (3 -3) حيث $a = 1$, $b = 4$, $c = k$

ويمكن ايجاد قيمة الجذور كما يلى

$$s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)k}}{2(1)} = -2 \pm \sqrt{2^2 - k} \quad ....(1)$$

(1) at k = 3

$\because s_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-3} = -2 \pm 1$

$\therefore s_1 = -1, s_2 = -3$

اى ان الجذور حقيقية مختلفة وسالبة ويكون حل المعادلة على الصورة التالية

$\therefore x(t) = Ae^{-t} + Be^{-3t}$ و at $t = 0$ $x(0) = 0$ $\therefore$ $0 = A + B$ i.e $A = -B$

وبتفاضل هذةالمعادلة بالنسبة للزمن (t) ينتج ان $\dot{x}(t) = -Ae^{-t} - 3Be^{-3t}$

ie at $t = 0$, $\dot{x}(0) = 1$ m/s i.e $1 = -A - 3B = B - 3B = -2B$ $\therefore$ $b = -0.5$ i.e $A = 0.5$

ويكون الحل فى الصورة التالية:

$$x(t) = 0.5e^{-t} - 0.5e^{-3t}$$

اى ان الجذران متساويان وسالبان (2) at $k = 4$ $\therefore s_{1,2} = -2$

$\therefore x(t) = (A + Bt)e^{-2t}$ i.e at $t = 0$, $x(0) = 0$ $\therefore A = 0 \therefore x(t) = Bte^{-2t}$

وبتفاضل دالة الازاحة $x(t)$ بالنسبة للزمن (t) تنتج دالة السرعة التالية:

$\dot{x}(t) = Bt(-2e^{-2t}) + Be^{-2t}$

$at\ t=0 \qquad \dot{x}(t)=1\ m/s \qquad i.e \qquad B=1$

ويكون الحل على الصورة التالية: $x(t)=t.e^{-2t}$

$(3)\ at\ k=5 \quad , \because s_{1,2}=a\pm bj \quad \therefore s_{1,2}=-2\pm\sqrt{-1}=-2\pm j \quad i.e\ a=-2, b=1$

ويكون الحل على الصورة التالية:

$$x(t)=[A.\sin(t)+B\cos(t)]e^{-2t}$$

$at\ t=0\ , x(0)=0\ \ i.e\ \ 0=\{A\sin(0)+B\cos(0)\}e^{0} \qquad i.e \quad B=0$

وتكون معادلة الازاحة على الصورة الاتية: $x(t)=A\sin(t)e^{-2t}$

وبتفاضل الازاحة بالنسبة للزمن (t) تنتج معادلة السرعة الاتية:

$$\dot{x}(t)=\left(Ae^{-2t}\right)\cos(t)-2Ae^{-2t}.\sin(t) \qquad at\ t=0 \quad , \dot{x}(0)=1\ m/s$$

$i.e \quad 1=A(1)\cos(0)-2B(1)\sin(0)=A \qquad i.e \qquad A=1$

ويكون الحل على الصورة التالية: $x(t)=e^{-2t}.\sin(t)$

2-اوجد معادلة الحركة للمنظومة المبينة بالشكل (3-9) بطريقة نيوتن وطريقة الطاقة وطريقة لاجرانج .

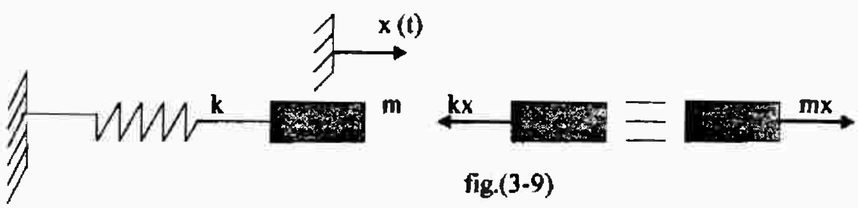


fig.(3-9)

(أ) بطريقة نيوتن :

$\because \sum F=m\ddot{x} \qquad F_S=-kx$

$\therefore -kx=m\ddot{x} \qquad \therefore m\ddot{x}+kx=0$ وبذلك تكون معادلة الحركة على الصورة

(ب) بطريقة الطاقة: $T.E.=K.E+P.E=const$

$$K.E=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}\right)^2 \qquad , \qquad P.E=\frac{1}{2}kx^2$$

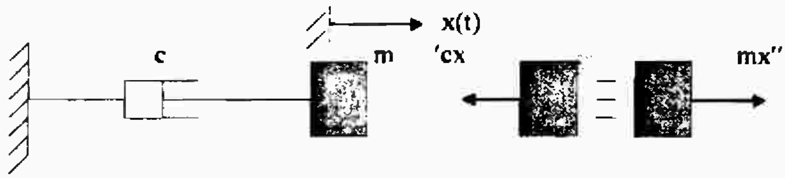
$$\because \frac{d(T.E)}{dt}=\frac{d(K.E+P.E)}{dt}=0$$

$$\therefore \frac{1}{2}m\left(2\dot{x}\ddot{x}\right)+\frac{1}{2}k\left(2x\dot{x}\right)=0..., \qquad \because \dot{x}\neq 0 \qquad \therefore m\ddot{x}+kx=0$$

(ج) بطريقة لاجرانج:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{d(K.E)}{\partial\dot{x}}\right]+\frac{\partial(P.E)}{\partial x}=0\ , \because K.E=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}\right)^2 ......, \because P.E=\frac{1}{2}kx^2 \quad \therefore m\ddot{x}+kx=0$$

3-إكتب معادلة الحركة للمنظومة المبينة بالشكل(3-10).



(3-10) شكل

أ-طريقة نيوتن:

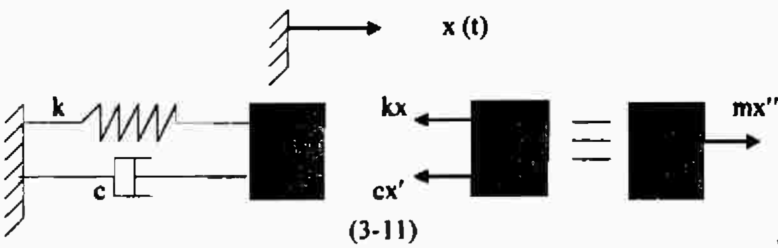
$$\because \sum F = m\ddot{x},\quad \because \sum F = F_d = -c\dot{x}\quad \therefore m\ddot{x} = -c\dot{x}\quad \therefore m\ddot{x} + c\dot{x} = 0$$

ب-طريقة لاجرانج:

$$\because K.E. = \frac{1}{2}m(\dot{x})^2\ ,D.E. = \frac{1}{2}c\left(\dot{x}\right)^2\quad ,\because \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{x}}(K.E.) + \frac{\partial}{\partial \dot{x}}(D.E)\right] = 0$$

$$\therefore \frac{1}{2}m\left(2\ddot{x}\right) + \frac{1}{2}c\left(2\dot{x}\right) = 0\qquad \therefore m\ddot{x} + c\dot{x} = 0$$

4-أوجد معادلة الحركة للمنظومة المبينة بالشكل *(3-11)*.



(3-11) شكل

أ-طريقة نيوتن:

$$\because \sum F = m\ddot{x}\ ,\because \sum F = kx + c\dot{x}\quad \therefore m\ddot{x} = -c\dot{x} - kx\quad \therefore m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = o$$

ب-طريقة لاجرانج:

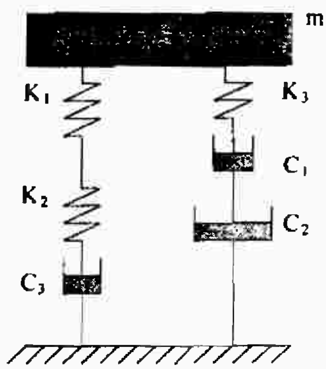
$$\because K.E. = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}\right)^2\ ,P.E. = \frac{1}{2}kx^2\ ,D.E. = \frac{1}{2}c\left(\dot{x}\right)^2$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial.(K.E.)}{\partial.\left(\dot{x}\right)}\right] + \frac{\partial.(D.E.)}{\partial.\left(\dot{x}\right)} + \frac{\partial.(P.E.)}{\partial.(x)} = 0$$

$$\therefore \frac{1}{2}m.\left(2\ddot{x}\right) + \frac{1}{2}c.\left(2\dot{x}\right) + \frac{1}{2}k.(2x) = 0\qquad \therefore m.\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

5-A vibrating system as shown in fig. (3-12) is consists of a weight 16 kg compound upon the three dampers of damping coefficient C_1=0.095 kgf.cm/sec ,C_2=0.08 kgf.cm/sec, and C_3= 0.0106 kgf.cm/ sec and also three springs has stiffness coefficient k_1=9kgf/cm , k_2=6 kgf/cm ,k_3=4.4kgf/cm.
Determine:- (a) the equation of motion and the equivalent of the spring stiffness coefficient the values of damping factor ζ, and the logarithmic decrement and the ratio of any two consecutive amplitudes.

5-المنظومة المبينة بالشكل (3-12) تتكون من كتلة وزنها 16 kgf مركبة على ثلاث خوامد معامل كـل منهم c_1=0.095kgf .cm/sec , c_2=0.08kgf.cm/sec , c_3=0.0106kgflsec. وثلاث نوابــض حيــث K_1=9 kgf/cm , K_2=6 kgf/cm, and K_3 = 4.4kgf/cm، أوجد : أ- معادلة الحركة ومعامل النابض المكافئ؛
ب-أوجد قيمة كل من معامل الخمد ζ والتناقص اللوغارتمى δ والنسبة بين أى سعتين متتاليتين.



fig(3-12)

$$\because k_{eq.} = k_3 + \frac{1}{\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}} = 4.4 + \frac{1}{\frac{1}{9}+\frac{1}{6}} = 4.4 + 3.6 = 8 kgf/cm$$

$$c_{eq.} = c_3 + \frac{1}{\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}} = 0.0106 + \frac{1}{\frac{1}{0.095}+\frac{1}{0.08}} = 0.0106 + 0.0434 = 0.0540 kgf.cm/\sec$$

$$\therefore m\ddot{x} + c_{eq}\dot{x} + k_{eq.}x = 0, \quad \therefore \omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq.}}{m}} = \sqrt{\frac{8(981)}{16}} = 22.15 rad/\sec$$

$$\therefore \zeta = \frac{c_{eq.}}{2m.\omega_n} = \frac{0.054}{2\left(\frac{16}{981}\right)(22.15)} = 0.075$$

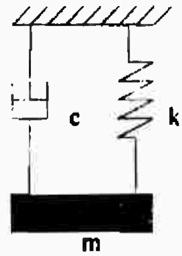
$$\therefore \delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{2\pi(0.075)}{\sqrt{1-(0.075)^2}} = 0.472 \quad ,\therefore \frac{x_1}{x_2} = e^{\delta} = e^{0.472} = 1.6$$

6-In the system as shown in fig. (3-13) , If the mass is displacement to 10 cm down the equilibrium position and released to vibrate, assume the natural frequency ω=1 rad/sec
a-Determine the equation of motion when the damping factor ζ=2 , 1 , 0.2
b-Compare between the three cases by sketch.

6-المنظومة المبينة بالشكل (3-13) ، إذا إزيحت الكتلة 10سم أسفل موضع الاتزان ثم تركـــت تـــهتز، إفرض ان التردد الدورى الطبيعى يساوى زاوية واحدة نصف قطرية لكل ثانية:-

(أ) أوجد معادلة الحركة عندما يكون عامل الخمد $\zeta=2, 1, 0.2$

(ب) قارن بين الثلاث حالات بالرسم.



شكل (3-13)

أولا: عندما $\zeta=2$ أى فى حالة الخمد الاكبر من الحرج أى ان $(\zeta>1)$ ، ونظرا لانه يعبر عن الازاحـة x بالعلاقة التالية:

$$x=e^{-\zeta\omega_n t}\left[Ae^{(\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t}+Be^{(-\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t}\right]. \quad \because \omega_n=1\ rad/\sec\ ,\zeta=2$$

$$\therefore x=e^{-2t}\left[Ae^{(\sqrt{3})t}+Be^{(-\sqrt{3})t}\right]....(1)\quad \therefore \dot{x}=A\left[-2+\sqrt{3}\right]e^{(-2+\sqrt{3})t}+B\left[-2-\sqrt{3}\right]e^{(-2-\sqrt{3})t}...(2)$$

$$\therefore from\ the\ frist\ condition\ and\ equation(1)\quad at\ t=0\ ,\ x=10\quad \therefore A+B=10....(3)$$

$$from\ the\ second\ condition\ and\ equation(2)\ \ i.e\ \ at\ \ t=0\ ,\ \dot{x}=v=0$$

$$\therefore 0=A(-2+\sqrt{3})e^{(0)}+B(-2-\sqrt{3})e^{(0)}\quad \because e^{(0)}=1\ \ \therefore from\ equ.(3)$$

$$\therefore A=10.8cm\ ,\ B=-0.8cm\ from\ equ.(1)\quad \therefore x=e^{-2t}\left[10.8e^{(\sqrt{3})t}-0.8e^{(-\sqrt{3})t}\right].....(4)$$

او المعادلة (4) تمثل معادلة الازاحة فى هذة الحالة.

ثانيا: عندما $\zeta=0.2$ أى فى حالة الكبت الأقل من الحرج

كما يمكن إيجاد قيمة كل من A , ϕ من الشرطين الابتدائين كما يلى:

$$x=Ae^{\zeta\omega_n t}.\sin(\sqrt{1-\zeta^2}\,t+\phi)=Ae^{-0.2t}.\sin(\sqrt{0.96}\,t+\phi)....(5)$$

فى حالة الشرط الاول اى عندما $t=0$, $x=10$ cm وبالتعويض فى المعادلة (5) نحصل على:

$10=A\sin\phi$ ....(6)

وفى حالة الشرط الثانى اى عندما $t=0$, $v=x'=0$ ، وبتفاضل المعادلة (5) بالنسبة للزمن والتعويـــض بالشرط الثانى نحصل على:

$$\dot{x}=Ae^{-0.2t}\left[\left(\sqrt{0.96}\cos\left(\sqrt{0.96}\,t+\phi\right)-0.2\sin\left(\sqrt{0.96}\,t+\phi\right)\right)\right]$$

$$\therefore 0=A\left(\sqrt{0.96}\cos\phi-0.2\sin\phi\right)\quad \therefore \tan\phi=\frac{\left(\sqrt{0.96}\right)}{0.2}=78^0\ 28'$$

إذن الزاوية ϕ تساوى 1.37 زاوية نصف قطرية.

إذن يمكن بالتعويض فى المعادلة (6) إيجاد قيمة (A) كما يلى: $A = \dfrac{10}{\sin\left(78^0\ 28'\right)} = 10.2\ cm$

وعلى ذلك تصير معادلة الحركة كما بالمعادلة التالية:

$\therefore x = 10.2e^{-0.2t}.\sin\left(\sqrt{0.96}t + 1.37\right)$..(7)

ثالثا: عندما ζ=1 أى فى حالة الخمد الحرج.

تكون معادلة الحركة فى حالة الخمد الحرج على الصورة التالية:

$x = (A + Bt)e^{-\omega_n t} = (A + Bt)e^{-t}$ ....(8)

$from\ the\ frist\ condition \quad at\ \ t = 0\ \ , x = 10\ \ , \omega_n = 1$

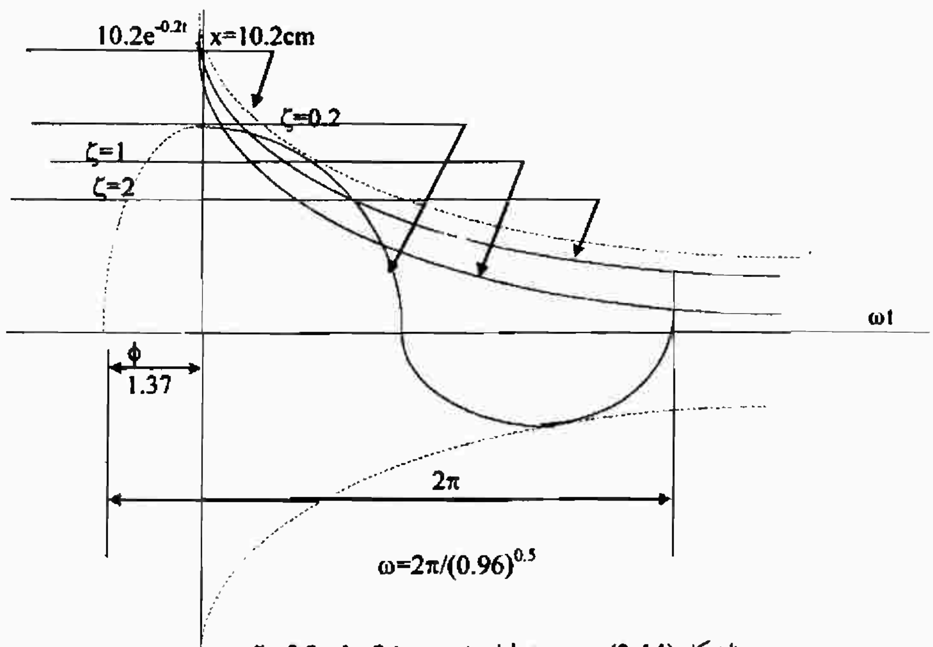
$\therefore 10 = (A + B(0))e^{0} \qquad \therefore A = 10\ \ cm.$

$\because from\ the\ \ second\ \ condition \qquad \therefore at\ \ t = 0 \qquad , x = 0$

$\because from\ \ equation(8)$

$\therefore x = \dfrac{dx}{dt} = -Ae^{-t} + B\left(-t.e^{-t} + e^{-t}\right) \qquad \therefore 0 = -Ae^{0} + B\left(0 + e^{0}\right) \qquad \because e^{0} = 1$

$\therefore -A + B = 0 \qquad \therefore A = B = 10\ \ cm. \qquad \therefore x = 10(1 + t)e^{-t}$ ....(9)

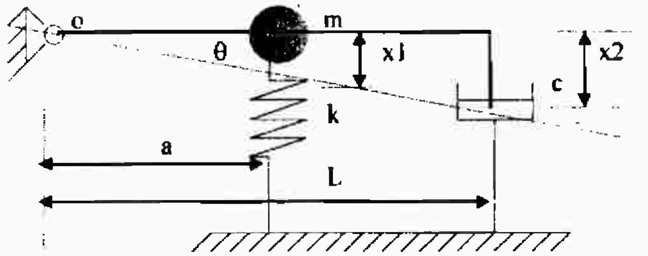


الشكل (3-14) يوضح مخطط بيانى عندما ζ= 0.2 , 1 , 2

7-Determine the differential equation of motion , the natural frequency of damped oscillation and the critical damping co-efficient for the system in fig.(3-15),when it is giving a small angular displacement θ.

7-أوجد معادلة الحركة التفاضلية ،والتردد الطبيعى ذات الخمد ، ومعامل الخمد الحرج للمنظومة المبينة

بالشكل (3-15) ، عندما تعطى المنظومة إزاحة زاوية صغيرة(θ).



الشكل (3-15)

$$x_1 = a.\sin\theta \cong a\theta \quad \therefore \dot{x}_1 = a\dot{\theta} \quad , \ddot{x} = a.\ddot{\theta} \qquad \textit{where } \theta \textit{ is very small angle}$$

$$, \quad x_2 = l.\sin\theta \cong l.\theta \quad \therefore \dot{x}_2 = l.\dot{\theta} \quad \ddot{x}_2 = l.\ddot{\theta}$$

$$\because \sum M_0 = 0 \qquad \therefore m.\ddot{x}_1.a + k.x_1.a + c\dot{x}_2.l = 0$$

$$\therefore ma^2.\ddot{\theta} + cl^2.\dot{\theta} + ka^2.\theta = 0$$

$$\therefore \ddot{\theta} + \frac{cl^2}{ma^2}.\dot{\theta} + \frac{ka^2}{ma^2}.\theta = 0 \text{...} (1)$$

وبمقارنة المعادلة (1) بالمعادلة العامة (2) للاهتزاز فى هذه المنظومة وهى:

$$\ddot{\theta} + \frac{c}{m}\dot{\theta} + \omega_n\theta = 0 \text{..} (2)$$

$$\because \frac{c}{m} = 2\zeta.\omega_n \therefore \quad \frac{cl^2}{ma^2} = 2\zeta.\omega_n \qquad c = \frac{2\zeta.\omega_n.ma^2}{l^2} \therefore \zeta.\omega_n = \frac{cl^2}{2ma^2}$$

$$\because \omega_n = \sqrt{\frac{ka^2}{ma^2}} = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \therefore c = \frac{2\zeta.a^2\sqrt{km}}{l^2}$$

$$\because \omega_d = \omega_n.\sqrt{1-\zeta^2} \qquad \therefore \omega_d^2 = \omega_n^2 - \zeta^2.\omega_n^2 = \frac{k}{m} - \left(\frac{cl^2}{2ma^2}\right)^2$$

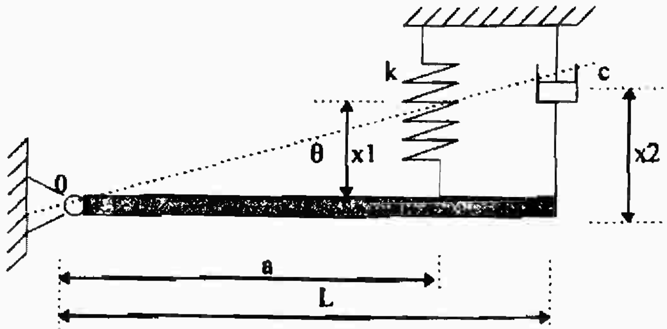
$$\therefore \omega_d = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{cl^2}{2ma^2}\right)^2} \qquad \therefore f_d = \frac{\omega_d}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{cl^2}{2ma^2}\right)^2} \text{..........} HZ$$

$$\because \textit{at critical damping } \zeta = 1 \qquad \therefore c_c = 2m.\omega_n = 2m.\sqrt{\frac{k}{m}} = 2\sqrt{km}$$

8-For the system as shown in fig.(3-16), Determine the differential equation of motion ,the undamped natural frequency and critical viscous damping co-efficient . And if the system is less than critical damped , determine the frequency of the damping oscillation , assume the moment of inertia of the bar $\left(I = \frac{ml^2}{3}\right)$ around (o) .

8-من المنظومة المبينى بالشكل (3-16) ، أوجد المعادلة التفاضلية للحركة والتردد الطبيعي عديم الخمـد

ومعامل الخمد الحرج اللزج- واذا كانت المنظومة فى حالة الخمد الاقل من الحــرج ، أوجـد الــتردد الطبيعى للاهتزازات ذات الخمد.



الشكل(١-١٦)

بما ان عزم اللى الكامن يساوى فى المقدار وبضاد فى الاتجاة عزم اللى الاسترجاعى أى إن

$$I\ddot{\theta}=-\sum M_0 \quad ,\because x_1=a\theta \quad \dot{x}_1=a\dot{\theta} \quad \ddot{x}_1=a\ddot{\theta} \quad x_2=l\theta \quad \dot{x}_2=l.\dot{\theta} \quad \ddot{x}_2=l.\ddot{\theta}$$

$$\because \sum M_0=kx_1.a+c\dot{x}_2.l=ka^2.(\theta)+cl^2.\left(\dot{\theta}\right)$$

$$\therefore I.\ddot{\theta}=-\left[cl^2.\left(\dot{\theta}\right)+ka^2.(\theta)\right] \quad \therefore \frac{ml^2}{3}.\ddot{\theta}+cl^2.\dot{\theta}+ka^2.\theta=0.......(1)$$

$$\therefore \ddot{\theta}+\frac{3c}{m}.\dot{\theta}+\frac{3ka^2}{ml^2}.\theta=0...(2)$$

وتمثل المعادلة (1) معادلة الحركة التفاضلية ومنها يمكن إيجاد مايلى:

$$\omega_n^2=\frac{3ka^2}{ml^2} \quad \therefore \omega_n=\sqrt{\frac{3ka^2}{ml^2}}=\frac{a}{l}\sqrt{\frac{3k}{m}}.................c.p.s$$

ولايجاد معامل الخمد الحرج c_c نعوض عن الازاحة الزاوية θ بالعلاقة التالية $\theta=e^{s.t}$ وبالتالى نفاضل الازاحة الزاوية بالنسبة للزمن لنعين كل من السرعة والعجلة الزاوية كما يلى:

$$\dot{\theta}=se^{s.t} \quad \ddot{\theta}=s^2.e^{s.t} \quad \therefore \frac{ml^2}{3}s^2.e^{s.t}+cl^2.se^{s.t}+ka^2.e^{s.t}=0$$

$$\therefore \frac{ml^2}{3}.s^2+cl^2.s+ka^2=0 \quad ,\because s_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$where \ a=\frac{ml^2}{3} \quad ,b=cl^2 \quad ,c=ka^2$$

$$\therefore s_{1,2}=\frac{-cl^2\pm\sqrt{\left(cl^2\right)^2-\frac{4ml^2.ka^2}{3}}}{2\left(\frac{ml^2}{3}\right)}=\frac{-3c}{2m}\pm\sqrt{\frac{9c^2}{4m^2}-\frac{3ka^2}{ml^2}}$$

وفى حالة الخمد الحرج أى عندما $\zeta=1$ يتلاشى المقداراسفل الجذروعامل الخمد الحقيقى c يؤل الى معامل الخمد الحرج c_c ويحدث ذلك عندما $\frac{3ka^2}{ml^2}=\frac{9c_c^2}{4m^2}$ ومن ذلك يمكن إيجاد معامل الخمد الحرج كمايلى:

$$\therefore c_c=\frac{2a}{l}\sqrt{\frac{km}{3}} \quad ,$$

ولتعيين التردد الطبيعى ذات الخمد ω_d نتبع الاتى:

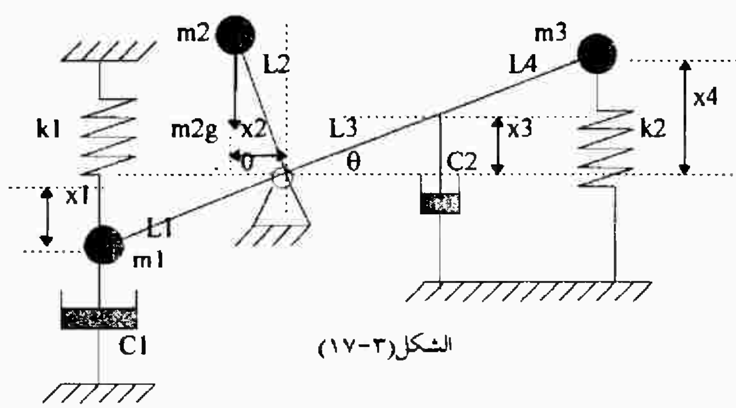
$$\because \zeta=\frac{c}{c_c} \qquad \therefore \zeta=\frac{\sqrt{3}cl}{2a\sqrt{km}}$$

$$\because \omega_d=\omega_n\sqrt{(1-\zeta^2)}=\frac{a}{l}\sqrt{\frac{3k}{m}}\left[\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}.cl}{2a\sqrt{km}}\right)^2}\right]=\sqrt{\frac{3ka^2}{ml^2}-\frac{9c^2}{4m^2}}$$

$$\therefore \omega_d=\frac{1}{2ml}\sqrt{12kma^2-9c^2l^2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots c.p.s$$

9-A component of a machine is represented schematically in fig.(3-17)., Determine:-
a-The differential equation of motion , b-The equivalent mass and the equivalent spring stiffness, c-The natural frequency and damping factor.

9-تركيبة لآلة تمثل بالشكل (3-17) ، أوجد:- أ-المعادلة التفاضلية للحركـــة ، ب-الكتلـة المكافئـة ومعامل النابض المكافئ ج-التردد الطبيعى وعامل الخمد.



الشكل(٣-١٧)

$$\because x_1=l_1.\theta \quad ,x_2=l_2.\theta \quad ,x_3=l_3.\theta \quad ,x_4=(l_3+l_4)\theta$$

$$\therefore \dot{x}_1=l_1.\dot{\theta} \quad , \quad \dot{x}_3=l_3.\dot{\theta} \quad \because J_0.\ddot{\theta}=\sum(Torque)_0=\sum M_0$$

$$\therefore \left[m_1l_1^2+m_2l_2^2+m_3(l_3+l_4)^2\right]\ddot{\theta}=-k_1x_1l_1-c_1\dot{x}_1l_1+m_2gx_2-c_2\dot{x}_3l_3-k_2x_4(l_3+l_4)$$

$$\therefore \ddot{\theta}+\frac{(c_1l_1^2+c_2l_3^2)}{\left[m_1l_1^2+m_2l_2^2+m_3(l_3+l_4)^2\right]}.\dot{\theta}+\frac{\left[k_1l_1^2+k_2(l_3+l_4)^2-m_2gl_2\right]}{\left[m_1l_1^2+m_2l_2^2+m_3(l_3+l_4)^2\right]}.\theta=0\ldots\ldots\ldots(1)$$

والمعادلة (1) هي المعادلة التفاضلية لحركة المنظومة ، ويمكن إيجاد التردد الطبيعي والكتلة المكافئة ومعامل النابض المكافئ وعامل الخمد كما يلي:

$$\therefore \omega_n = \sqrt{\frac{\left[k_1 l_1^2 + k_2(l_3+l_4)^2 - m_2 g l_2\right]}{\left[m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + m_3(l_3+l_4)^2\right]}} = \sqrt{\frac{k_{eq.}}{m_{eq.}}} \qquad \text{.......(2)}$$

$$\therefore k_{eq.} = k_1 l_1^2 + k_2(l_3+l_4)^2 - m_2 g l_2 \qquad , m_{eq.} = m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + m_3(l_3+l_4)^2$$

ولايجاد عامل الخمد ζ نقارن المعادلة (1) بالمعادلة العامة للحركة الزاوية التالية:

$$\because \ddot{\theta} + \frac{c}{m}\dot{\theta} + \frac{k}{m}\theta = 0$$

$$\therefore \frac{c}{m} = \frac{c_1 l_1^2 + c_2 l_3^2}{\left[m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + m_3(l_3+l_4)^2\right]} = 2\zeta\omega_n \quad , where \qquad \frac{c}{m} = 2\zeta\omega_n$$

$$\therefore \zeta = \frac{c_1 l_1^2 + c_2 l_3^2}{2 m_{eq.}\omega_n} = \frac{c_1 l_1^2 + c_2 l_3^2}{2 m_{eq.}\sqrt{\frac{k_{eq.}}{m_{eq.}}}} = \frac{c_1 l_1^2 + c_2 l_3^2}{2\sqrt{m_{eq.} k_{eq.}}}$$

10-A vibrating system consists of a weight of 12 kgf , a spring of stiffness 8kgf/cm and damper of damping co-efficient 0.024 kgf.cm/sec , Find the damping factor , the logarithmic decrement and the ratio of any two consecutive amplitudes.

10-منظومة إهتزازية تتكون من كتلة وزنها 12kgf ونابض معاملة 8kgf/cm وخامد (ماص الصدمات) معامل الخمد لة 0.024kgf.cm/sec ، أوجد عامل الخمد والتناقص اللوغارتمي والنسبة بين أى سعتين متتاليتين.

الحل:

$$\because \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{8(981)}{12}} = 25.57 \quad rad./\sec \qquad , f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = 4.07\,HZ$$

$$\therefore \zeta = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{0.024}{2\left(\frac{12}{981}\right)(25.57)} = 0.038 \therefore \quad \zeta \prec\prec 1 \quad , \delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cong 2\pi\zeta$$

$$\therefore \delta = 2\pi(0.038) = 0.23 \qquad \because \delta = \ln\frac{x_1}{x_2} = 0.23 \qquad \therefore \frac{x_1}{x_2} = e^{\delta} = e^{0.23} = 1.26$$

11-A vibrating system consists of a weight of 160kgf, a spring of stiffness 50 kgf/cm , and damper with a damping co-efficient of 0.4 kgf.cm/sec. Determine the damping factor and the natural frequency of damped vibration.

11-منظومة إهتزازية تتكون من كتلة وزنها 160kgf ونابض معاملة 50 kgf/cm ، وخامد معامل الخمد لة 0.4 kgf.cm/sec ، أوجد عامل الخمد ζ والتردد الطبيعي المتضائل ω_d.

الحل:

$$\because \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{50(981)}{160}} = 17.51 \ rad./\sec \quad \therefore f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = 2.79 \ c.p.s$$

$$\therefore c_c = 2m\omega_n = 2\left(\frac{160}{981}\right)(17.51) = 5.71 \ ,kgf.cm/\sec \quad \therefore \zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{0.4}{5.71} = 0.07$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 17.51\sqrt{1-(0.07)^2} = 17.467 \quad rad./\sec$$

12-A vibrating system with viscous damping consists of a weight of 8.5 kgf ,a spring of stiffness 6 kgf/cm. and the amplitude decreases to 0.25 of the initial value after five consecutive cycles. Determine the damping coefficient of the damper in the system.

12–منظومة إهتزازية ذات خمد لزج تتكون من كتلة وزنها 8.5 kgf. ونابض معاملة 6 kgf/cm، وان السعة تقل الى 0.25 من السعة البدائية وذلك بعد خمس دورات متتالية. أوجد عامل الخمد للخامد فى هذة المنظومة.

الحل:

$$\because \text{the amplitude ratio of any two consecutive amplitude} = e^{\delta}$$

$$\therefore e^{\delta} = \frac{x_0}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \frac{x_3}{x_4} = \frac{x_4}{x_5} \qquad \therefore \frac{x_0}{x_5} = \frac{x_0}{x_1}.\frac{x_1}{x_2}.\frac{x_2}{x_3}.\frac{x_3}{x_4}.\frac{x_4}{x_5} = e^{5.\delta} = \frac{1}{0.25}$$

$$\therefore \delta = \frac{1}{5}\ln\frac{1}{0.25} = 0.278 \qquad \because \delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cong 2\pi\zeta = 0.278 \qquad \therefore \zeta = 0.0441$$

13- Prove that is the solution to the crtical damping of vibration . $b.t.e^{-\omega_n.t}$

13–إثبت إن $b.t.e^{-\omega_n.t}$ هو الحل للاهتزازذات الخمدالحرج .

الحل:

نفرض ان الازاحة x يعبر عنها بالعلاقة التالية :

$$i.e \qquad x = bt.e^{-\omega_n.t} \text{..}(1)$$

$$, \quad \therefore \dot{x} = b\left[t.\left(-\omega_n.e^{-\omega_n.t}\right) + e^{-\omega_n.t}\right] = b.\left[-\omega_n t.e^{-\omega_n.t} + e^{-\omega_n.t}\right]$$

$$\therefore \dot{x} = b.e^{-\omega_n.t}(1-\omega_n t) \text{..}(2)$$

$$\therefore \ddot{x} = b.\left[\omega_n^2 t.e^{-\omega_n.t} - \omega_n.e^{-\omega_n.t} - \omega_n.e^{-\omega_n.t}\right] = b.e^{-\omega_n.t}\left[\omega_n^2 t - 2\omega_n\right] \text{..........}(3)$$

$$m\ddot{x} + c_c.\dot{x} + kx = 0 \text{..}(4)$$

$$m.b.e^{-\omega_n.t}\left(\omega_n^2 t - 2\omega_n\right) + c_c.b.e^{-\omega_n t}(1-\omega_n t) + k.bt.e^{-\omega_n t} = 0$$

$$\therefore m.\left(\omega_n^2 t - 2\omega_n\right) + c_c.(1-\omega_n t) + kt = 0 \text{..................................}(5)$$

$$\because \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad ,c_c = 2m.\omega_n = 2\sqrt{k.m} \text{..}(6)$$

$$\therefore m\left[\frac{k}{m}t - 2\sqrt{\frac{k}{m}}\right] + 2\sqrt{km}\left(1-\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + kt = kt - 2\sqrt{km} + 2\sqrt{km} - 2kt + kt = 0$$

أى ان بالتعويض من العلاقات بالمعادلة (6) فى المعادلة (5) نجد انها تحقق المعادلة وبالتالى يثبت المطلوب.

14-A machine of 30 kgf is mounted on sprigs and dampers as shown in fig.(3-18). , The totall stiffness of the springs is 15 kgf/cm and the totall dampingis 0.2 kgf.cm/sec. Find:-
(a)The natural frequency,the damping factor and the damping natural frequency.(b)If the system is initially at rest and a velocity of 10 m/sec is imparted to the mass , Find the displacement and velocity of the mass as a time function. ,(d)The displacement and velocity at the time (t=1 sec).

14-ماكينة وزنها 30 kgf مركبة على نوابض وخامد كما مبين بالشكل (3-18) فاذا كان معامل (الكزازة) النوابض الكلى 15 kgf/cm ومعامل الخمد الكلى 0.2 kgf.cm/sec أوجد:- (أ) التردد الطبيعى وعامل الخمد والتردد الطبيعى ذات الخمد.

(ب) اذا كانت المنظومة مستقرة فى البداية ثم إعطى للكتلة سرعة 10 m/sec ، أوجد كل من الازاحة والسرعة للمنظومة كدالة فى الزمن ،(ج) أوجد الازاحة والسرعة عندما يكون الزمن واحد ثانية.

الحل:

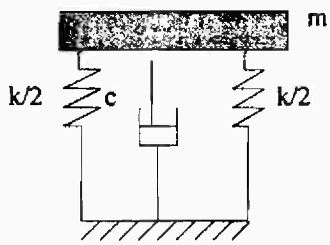


fig.(3-18)

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{15(981)}{30}} = 22.15 \ rad/\sec \quad \zeta = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{0.2}{2\left(\frac{30}{981}\right)(22.15)} = 0.148$$

$$\therefore \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 22.15\sqrt{1-(0.148)^2} = 21.91 \ rad./\sec$$

$$\therefore \zeta.\omega_n = (0.148)(22.15) = 3.28 \ rad./\sec$$

$$\because x(t) = e^{-\zeta.\omega_n.t}.[A_1\cos(\omega_d.t) + A_2\sin(\omega_d.t)] \ldots\ldots (1)$$

$$\therefore x(t) = e^{-3.28t}.[A_1\cos(21.91t) + A_2\sin(21.91t)] \quad \therefore at \ t=0 \ ,x(0)=0$$

$$\therefore 0 = A_1(1) + A_2(0) \quad \therefore A_1 = 0$$

وبتفاضل المعادلة (1) بالنسبة للزمن (t)كمايلى:

$$\therefore at \ A_1 = 0 \quad \therefore x(t) = e^{-\zeta.\omega_n.t}.A_2\sin(\omega_d.t)$$

$$\therefore \dot{x}(t) = A_2.\left[e^{-\zeta.\omega_n.t}\,\omega_d.\cos(\omega_d.t) + \sin(\omega_d.t)(-\zeta.\omega_n)e^{-\zeta.\omega_n.t}\right] \ldots\ldots (2)$$

$$\therefore \dot{x} = e^{-3.28t}.A_2[21.91\cos(21.91t) - 3.28\sin(21.91t)]$$

$$from \ boundary \ condition \ \therefore \dot{x} = 10m/\sec \quad at \ t=0$$

$$\therefore 10 = e^0.A_2[21.91\cos(0) - 3.28\sin(0)] \quad \therefore 10 = A_2[21.91 - 0]$$

$$\therefore A_2 = \frac{10}{21.91} = 0.456$$

اذن بالتعويض فى معادلة الإزاحة (1) ومعادلة السرعة عن قيمة A1 ,A2 ينتج أن:

$$\therefore x = e^{-3.28t}.(0.456)[21.91\cos(21.91t) - 3.28\sin(21.91t)]$$

$$\therefore at \;\; t = 1\sec \qquad \therefore x = 0.64cm.$$

$$\therefore \dot{x} = e^{-3.28t}.(0.456)[(21.91)\cos(21.91t) - 3.28\sin(21.91t)]$$

$$\therefore at \;\; t = 1\sec \qquad \therefore \dot{x} = 0.314m/\sec.$$

15-Determine the logarithmic decrement of damped vibrating simple pendulum of length 45 cm. , if it loses 95 % of its initial energy after 6 minutes form starting vibration.

15-أوجد التناقص اللوغارتمى للاهتزاز المخمد لبندول بسيط طولة 45 سم إذا فقد البندول 95 % من الطاقة البدائية لة بعد 6 دقائق من بداية الاهتزاز.

الحل:بفرض ان طاقة البندول بعد 6 دقائق هى E_t

$$\therefore \frac{E_t}{E_{100}} = \frac{5}{100} \qquad ,\because the\ vibration\ energy \ \propto \ (displacement)^2$$

$$\therefore \frac{A_t}{A_0} = \sqrt{\frac{5}{100}} = 0.224$$

وبفرض ان A_0 هى السعة عندما الومن t=0 وان A_t هى السعة عند الزمن t

$$\therefore A_t = A_0.e^{-\frac{\delta.t}{t_p}} \qquad \therefore \frac{A_t}{A_0} = e^{\frac{-\delta.t}{t_p}} = 0.224$$

$$\because the\ equation\ of\ motion\ of\ simple\ pendulum \qquad \ddot{x} + \left(\frac{g}{l}\right)x = 0$$

$$\therefore the\ time\ of\ period \ = t_p = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \ \sec.$$

$$\therefore \delta = \frac{t_p}{t}\ln\left(\frac{A_0}{A_t}\right) = \frac{2\pi}{t}\sqrt{\frac{l}{g}}.\ln\left(\frac{1}{0.224}\right) = \frac{2\pi}{6(60)}\sqrt{\frac{45}{981}}.\ln\left(\frac{1000}{224}\right)$$

$$\therefore \delta = 0.00374(1.496) = 0.0056$$

16-A mass suspended from a helical spring vibrates in a viscous fluid medium whose resistance varies directly with the speed. it is observed that the frequency of damped vibrations 85 per minute and that the amplitude decreases to 25% of its initial value in one complete vibration. Find the frequency of the free undamped vibration of the system.

16-كتلة معلقة فى تابض حلزونى تهتز فى وسط مائع لزج حيث المقاومة تتغير مباشرة مع سرعته ويلاحظ أن تردد الاهتزاز ذات الخمد يكون 85 لكل دقيقة وان سعة الاهتزاز تقل الى25 % عن القيمة البدائية لاهتزازة واحدة كاملة. أوجد التردد الحر لمنظومة ذات اهتزاز حر بدون خمد.

الحل:نفرض ان التردد الطبيعى للاهتزاز ذات الخمد f_d والزمن الدورى للاهتزاز ذات الخمد t_d

والتردد الطبيعي للاهتزاز الحر الغير مخمد f_n ، x_1 , x_2 هما السعة الابتدائية والنهائية قبل وبعد عمل إهتزازة واحدة كاملة ، ولايجاد التردد الطبيعي ذات الخمد نتبع الاتي:

$$\because f_d = 85 \ \ per \ \ \min ute = \frac{85}{60} \ \ c.p.s \ \ , t_d = \frac{1}{f_d} = \frac{60}{85} \ , \ f_d = \frac{\omega_d}{2\pi}$$

$$\therefore x_2 = final \ \ amplitude \ \ after \ \ one \ \ complete \ \ vibration = \frac{25}{100} x_1$$

$$\therefore x_2 = \frac{1}{4} x_1 \qquad assume \ \ a = \frac{c}{2m} = \zeta . \omega_n \ \ \because t_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_n^2 - (\zeta . \omega_n)^2}}$$

$$\therefore t_d = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_n^2 - a^2}} \ \ \because \frac{x_1}{x_2} = e^{\zeta . \omega_n . (t_d)} = e^{a . t_d} \ \therefore \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = a . t_d = a . \left(\frac{60}{85}\right) = a . \left(\frac{12}{17}\right)$$

$$\therefore \ln(4) = \frac{12}{17} a \qquad \therefore 1.39 = 0.71 a \ \ \therefore a = 1.96 \qquad , \because f_d = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\omega_n^2 - a^2}$$

$$\therefore \frac{85}{60} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\omega_n^2 - (1.96)^2} \ \ \therefore \omega_n = 9.1 \ \ c.p.s \qquad \therefore f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{9.1}{2\pi} = 1.45 \ \ c.p.s$$

17-A coil of spring stiffness 50 N/mm. supports vertically a load of 230 N at the free end.. The motion is resisted by the coil dashpot. It is found that the amplitude at the beginning of the fourth cycle is $\frac{4}{5}$ of the ampplitude of the previous vibration. Determine the damping force per unit velocity. Also find the ratio of the frequencies of damped and undamped vibration.

17–نايض حلزوني معاملة 50 نيوتن لكل مم (علق راسيا من احد طرفية) ركب بة رأسيا حمل 230 نيوتن بالطرف الحر لة ، الحركة تقاوم بخامد زيتي فوجد ان السعة الابتدائية للدورة الرابعة تكون $\frac{4}{5}$ من السعة السابقة. أوجد قوة الخمد لكل وحدة سرعة ،وايضا أوجد نسبة الترددات ذات الخمد الى الترددات الطبيعية للاهتزاز.

الحل:

$$\because k = 50 \ \ N/mm = 50(10)^3 \ \ N/m \qquad \therefore \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{50(10)^3}{230}} = 14.74 \ \ rad./\sec.$$

وباعتبار ان c هي قوة الخمد لكل وحدة سرعة Damping force per unit velocity let x_n = *Amplitude at the beginning of the third cycle*

x_{n+1} = *Amplitude at the beginning of the fourth cycle* $= \frac{4}{5} x_n$

f_n = *Frequency of undamped vibration* $= \frac{\omega_n}{2\pi}$

f_d = *Frequency of damped vibration* $= \frac{\omega_d}{2\pi}$

$$\because \ln \frac{x_n}{x_{n+1}} = a t_d = \frac{2\pi a}{\omega_d} = \frac{2\pi a}{\sqrt{\omega_n^2 - a^2}} = \frac{2\pi a}{\sqrt{(14.74)^2 - a^2}}$$

$$\therefore \ln \frac{x_n}{\frac{4}{5} x_n} = \ln \frac{5}{4} = 0.223 = \frac{2\pi a}{\sqrt{(14.74)^2 - a^2}} \qquad \therefore a = 0.52 \quad \therefore a = \frac{c}{2m} = 0.52$$

$$\therefore c = 2(230)(0.52) = 240.6 \ N.\sec/m = 0.2406 \ N.\sec/mm.$$

$$\therefore \text{Ratio of frequency} = r = \frac{F_d}{F_n} = \frac{\omega_d}{\omega_n} = \frac{\sqrt{(14.74)^2 - (0.52)^2}}{14.74} = 0.99$$

18-A machine weighting 90 kgf is mounted on springs and is fitted with a dashpot to damp out vibrations. There are three springs each of stiffness 15 kgf per cm. and it is found that the amplitude of vibration diminishes from 4.5 cm. to 0.8 cm. in two complete oscillations. Assuming that the damping force varies as the velocity , determine the resistance of the dashpot at unit velocity and compare the frequency of the damped vibration with the frequency when dashpot is not in operation.

18-ماكينة وزنها 90 كيلوجرام مركبة على نوابض وماص للصدمات لخمد الاهتزاز ، يوجد ثلاث نوابض معامل كل نابض 15 كيلوجرام لكل سم ووجد 'بعد سعة الاهتزاز تتراوح من 4.5 سم الى 8., سم فى دورتين (ذبذبتين) كاملتين ، إفرض ان قوة الخمد تتغير مع السرعة. أوجد مقاومة الخامد (ماص الصدمات) لكل وحدة سرعة ، وقارن تردد الخمد مع التردد عندما لايعمل ماص الصدمات.

الحل:

بفرض ان السعة الابتدائية x_1 ، وان x_2 هى السعة بعد ذبذبة واحدة كاملة ، وان x_3 هى السعة النهائية بعد عمل ذبذبتين

$$W = 90 \ kgf \quad , k = 15 \ kg/cm. \ \therefore \text{mass of the machine} = \frac{90}{9.81} = 9.2 \ kg.$$

$\because$ 3 *springs are connected in parell*

$$\therefore \text{the equivalent spring} = k_{eq} = 3(15) = 45 kg/cm = 4500 \ kg./m.$$

$$\therefore \omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} = \sqrt{\frac{4500}{9.2}} = 22.12 \ rad./\sec \qquad \because \text{intial amplitude} = x_1 = 4.5 \ cm.$$

وبفرض ان c هى مقاومة الخمد أو معامل الخمد لكل وحدة سرعة Resistance of daspot or damping coefficient per unit velocity

$$\because x_3 = 0.8\ cm. \qquad ,\because \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} ....(1)$$

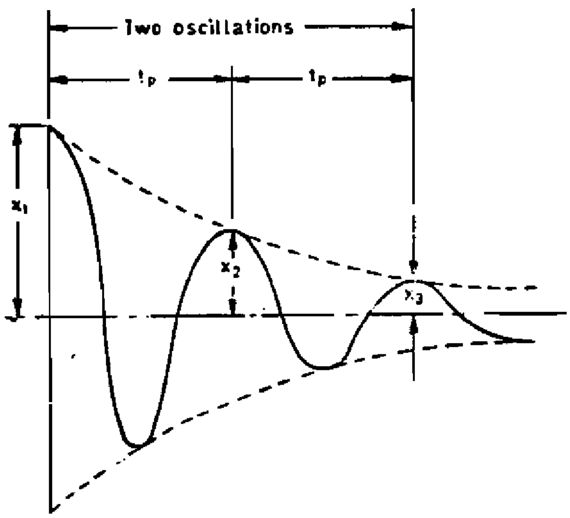
$$\because \left(\frac{x_1}{x_2}.\frac{x_1}{x_2}\right) = \left(\frac{x_2}{x_3}.\frac{x_1}{x_2}\right) \quad \therefore \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 = \left(\frac{x_1}{x_3}\right) .....(2)$$

$$\therefore \left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \sqrt{\frac{x_1}{x_3}} = \sqrt{\frac{4.5}{0.8}} = 2.37 \qquad \therefore \ln\frac{x_1}{x_2} = .\frac{2\pi.a}{\omega_d} = \frac{2\pi.a}{\sqrt{\omega_n^2 - a^2}}$$

$$\therefore \ln(2.37) = 0.863 = \frac{2\pi.a}{\sqrt{(22.12)^2 - a^2}} \quad \therefore a = 3 = 2\omega_n$$

$$\because a = \frac{c}{2m} \quad \therefore a = 6.(9.2) = 55.2 kg.\sec/cm.$$

$$\therefore r = \frac{\omega_d}{\omega_n} = \frac{\sqrt{\omega_n^2 - a^2}}{\omega_n} = \frac{\sqrt{(22.12)^2 - (3)^2}}{22.12} = 0.991$$



الشكل(3-19)

19-A body weighting 25 lb is suspended from a spring with a scale k=10 lb/in. Adashpot is attached between the weight and the ground and has a resistance of 0.1ib at a velocity of 2 ips. Determine:- (a)The natural frequency of the system. , (b)The critical damping factor of the dashpot , (c)The ratio of successive amplitudes. , (d)The amplitude of the body 10 cycle after it was released from an initial displacement of (3/4) in. , (e)The displacement of the body exactly 1.25 sec after it was released from the initial displacement of (3/4) in.

19-جسم وزنة 25 باوند علق في نابض معاملة 10 باوند لكل بوصة ، و'صـــل خـــامد بيـــن الجســـم والارض ومقاومتة (معامل الخمد لماص الصدمات) 1, . باوند عند سرعة 2 بوصة لكل ثانية. أوجد:- أ-التردد الطبيعي للمنظومة. (ب)معامل الخمد الحرج لماص الصدمات. (ج)النســـبة بيـــن أى ســـعتين. (ء)سعة الجسم للدورة العاشرة بعد تركها لعمل إزاحة إبتدائية (4\3) بوصة.(و)سعة الجسم عند الزمـــن 25, 1 ثانية بعد تركة عند الازاحة الابتدائية (4\3) بوصة.

الحل:-

(أ)- لايجاد معامل الخمد (c) نتبع الاتى:

$$the\ damping\ factor = c = \frac{resistance\ of\ dashpot}{velocity} = \frac{0.1}{2} = 0.05\ ib-\sec/in$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_n^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{10(386)}{25}\right) - \left(\frac{0.05(386)}{2(25)}\right)^2} = 12.42\ rad/\sec\quad where\ \omega_n^2 = \frac{k}{m}$$

$$\therefore f_d = \frac{\omega_d}{2\pi} = \frac{12.42}{2\pi} = 1.977\ c.p.s = 118.6\ c.p.m.$$

(ب)لايجاد معامل الخمد الحرج c_c نتبع الاتى:

$$\because c_c = 2\sqrt{km} = 2\sqrt{\frac{10(25)}{386}} = 1.6\ ib.\sec/in\quad \therefore \zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{0.05}{1.61} = 0.031$$

(ج)لايجاد التناقص اللوغارتمى (δ) The logarithmic decrement

$$\therefore \delta = \frac{2\pi.\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{2\pi(0.031)}{\sqrt{1-(0.031)^2}} = 0.195\quad or\ \ \delta = \frac{\pi.c}{m.\omega_{dn}} = \frac{\pi(0.05)(386)}{25(12.42)} = 0.195$$

$$\therefore \frac{x_1}{x_2} = e^{-\delta} = e^{-0.195} = 0.822$$

(ء)لايجاد الزمن الدورى t_p The time of period ونسبة إنخفاض السعة للدورة العاشرة والسعة عند نهاية الدورة العاشرة

$$\therefore t_p = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{12.42} = 0.506\ \ \sec$$

$\therefore$ *The time required for* 10 *complete cycle is* $10t_p = 10(0.506) = 5.06\ \sec.$

$\therefore$ *The amplitude reduction ratio in* 10 *cycles* $= e^{-1.95} = 0.1417$

$\therefore$ *The amplitude at the end of* 10 *cyclesis* $x_{10} = \frac{3}{4}(0.1417) = 0.106\ in$

$$or\qquad x_{10} = \frac{3}{4}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{10} = \frac{3}{4}(0.822)^{10} = 0.106\ in$$

(و)لايجاد الازاحة بعد 1.25 ثانية وبعد تركها عند إزاحة إبتدائية

$$\therefore x = x_o.e^{-\left(\frac{c}{2m}\right)t}\left[\cos\omega_d.t + \frac{c}{2m\omega_d}.\sin\omega_d.t\right] =$$

$$\therefore x = \frac{3}{4}e^{-\left[\frac{(0.05)(386)}{2(25)}\right](1.25)}.\left[\cos(12.42*1.25) + \frac{0.05*386}{2*25*12.42}\sin(12.42*1.25)\right] = -0.428\ in$$

20-If the logarithmic decrement of oscillating pendulum is 0.03 , How many times the amplitude of the vibration decreased after 95 complete oscillation.

20-إذا كان التناقص اللوغارتمى لاهتزاز بندول (δ=0.03) ، كم من الزمن الذى يمضى حتى تقل سعة الاهتزازبعد 95 دورة كاملة.

الحل:

عند بداية الاهتزاز يكون الزمن t=0 وتكون نسبة السعة كما بالعلاقة التالية:

$$\because \frac{A}{A_\circ}=e^{-\zeta\omega_n}=e^{-\frac{\delta}{t_d}t} \quad ,\because t_d=\frac{2\pi}{\omega_d}$$

$\because$ *after 95 complete oscillation* $t=95t_d$ *and the amplitude is given by*

$$A_{95}=A_\circ.e^{-\frac{\delta}{t_d}t} \quad \therefore \frac{A_\circ}{A_{95}}=e^{-\frac{\delta}{t_d}(95t_d)}=e^{-95.\delta}$$

$$\therefore \frac{A_\circ}{A_{95}}=\frac{1}{e^{-95.\delta}}=e^{95(0.03)}=e^3=20.1$$

If $y=A_0.e^{\zeta\omega_n.t}.\sin\omega.t$ 21-Amass undergoes damped motion given by the equation

$A_\circ=10\ cm.\ ,\omega=\pi\quad 1/\sec\ \ and\ \ \zeta.\omega_n=0.8\quad 1/\sec$

Find the periodic time of the vibration and the logarithmic decrement

20-كتلة تتحرك لاسفل بحركة ذات خمد يعبر عنها بالمعادلـــة $y=A_0.e^{\zeta.\omega_n.t}.\sin\omega.t$ ، اذا كـانت $A_\circ=10\ cm.\ ,\omega=\pi\quad 1/\sec\ \ and\ \ \zeta.\omega_n=0.8\quad 1/\sec$ أوجد الزمن الدورى والتناقص اللوغارتمى.

الحل:

$$\because t=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\pi}=2\ \sec$$

$$\therefore \delta=\ln\frac{x_{n-1}}{x_n}=\ln e^{\zeta.\omega_n.t}=\zeta.\omega_n t=(0.8)(2)=1.6$$

22-A light rigid rod of mass 4 kg and length L= 1.8 m. is pinned at one end (o) and has a disc of mass m=8 kg attached at the other end and the radius of the disc is very small if it is compare with the length of the rod. Three spring and Three viscous dampers connected in the system as shown in fig.(3-19), where are fastened to the rod at a distance b=1.2 m. from the support. The system is set up in a horizontal plane with neglect the weight of the rod, a plane view is shown. where:

$k_1=4\ ^{kN}/_m\ ,k_2=6\ ^{kN}/_m\ ,\ k_3=2.6^{kN}/_m\ \ and\ c_1=0.15^{kN.s}/_m\ ,c_2=0.25\ ^{kN.s}/_m\ \ and\ \ ,c_3=0.03\ ^{kN.s}/_m$

Determine (a)The equivelent spring stiffness coefficient , and the equivalent damping coefficient.

(b)The differential equation of motion and the natural frequency, and the damping factor. Assuming that the dampers are adjusted to provide critical damping , obtain the motion of the rod as a function of time if it is rotated through a small angle (θ) and then released. If (θ=3 degree) and the undamped natural frequency of the system is 4 rad/sec.

(c) Calculate the displacement at 1 sec after release. (d) Explain the term logarithmic decrement as applied to such a system and calculate its value assuming that the damping is reduced to 70 % of its critical value

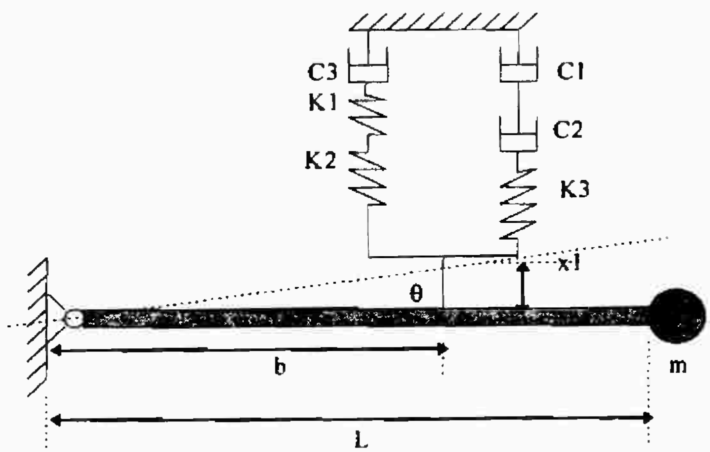
22–قضيب خفيف جاسئ كتلتة 4كيلو جرام وطولة 8, 1 متر ممسوك عند إحدى نهايتية فى مفصل (o)، وقرص كتلتة 8كيلوجرام متصل بالنهاية الاخرى لة ونصف قطر القرص صغيرجدا إذا ما قورن بطـول القضيب، ثلاث نوابض وثلاث خوامد متصلة بالمنظومة كما مبين بالشكل (3–20) ومتصلة بالقضيب علـــى مسافة 2, 1 متر من موضع التركيب والمنظومة موضوعة فى مستوى افقى مع إهمال وزن القضيب، حيث:

$$k_1, k_2, k_3 = 4\,,\, 6\,,\, 2.6\ {}^{kN}\!/_{m}\ \text{and}\ c_1\,,\ c_2\,,\ c_3 = 0.15\,,\, 0.25\,,\, 0.03\ {}^{kN\ sec}\!/_{m}\ \text{are respectively}$$

أوجد:(أ)–معامل النابض المكافئ ومعامل الخمد المكافئ. (ب)–المعادلة التفاضلية للحركة والتردد الطبيعى وعامل الخمد. افرض ان الخوامد موضوعة تماما فى حالة الخمد الحـــرج – أوجـد معادلـة الحركة كدالة فى الزمن ، إذا دار القضيب زاوية صغيرة ثم ترك. واذا كانت الازاحة الزاويـــة θ = 3 degree ، والتردد الطبيعى $\omega_n = 4\ rad./\sec$

(ج) أوجد الازاحة بعد ثانية واحدة من ترك القضيب.

(د) استنتج الجزء الخاص بالتناقص اللوغارتمى واحسب قيمتة بفرض ان الخمد يقل 70% من الخمد الحرج.



الشكل (3-20)

الحل:

$$\because k_{eq} = k_3 + \frac{1}{\dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2}} = k_3 + \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} = 2.6 + \frac{4*6}{10} = 5\ {}^{kN}\!/_{m}$$

$$\because c_{eq} = c_3 + \frac{1}{\dfrac{1}{c_1} + \dfrac{1}{c_2}} = c_3 + \frac{c_1 . c_2}{c_1 + c_2} = 0.03 + \frac{0.15 * 0.25}{0.40} = 0.124\ {}^{kN.s}\!/_{m}$$

$$\because I\ddot{\theta} = -\sum M_0 \qquad ,\because \sum M_o = k_{eq} x_1 .b + c_{eq} \dot{x}_1 .b = k_{eq} b^2 .\theta + c_{eq} b^2 .\dot{\theta}$$

$$\therefore I\ddot{\theta} + c_{eq} b^2 .\dot{\theta} + k_{eq} b^2 .\theta = 0 \qquad \therefore \ddot{\theta} + \left(\frac{c_{eq} b^2}{I}\right).\dot{\theta} + \left(\frac{k_{eq} b^2}{I}\right).\theta = 0$$

وعزم القصور الذاتى للمنظومة (I) يساوى عزم القصور الذاتـــى للقضيـــب $I_{bar}=\frac{m_{rod}.l^2}{3}$ وعـــزم

القصور الذاتى للكرة $I_{sphere}=\frac{2m_{sphere}.r^2}{5}+m_{sphere}.(l^2)$

أى ان عزم القصور الذاتى للكرة حول محو الدوران (o) يساوى عزم القصور الذاتـــى للكـــرة حـــول مركزها بالاضافة الى عزم القصور الذاتى حول المحور o والذى يساوى كتلة الكرة فـــى مربـــع بعـــد مركزها عن محور الدوران l^2 ونظرا لان نصف قطر الكرة r يكون صغير جدا إذا ما اقورن بطـــول القضيب L لذلك يهمل المقدار $\frac{2m_{sphere}.r^2}{5}$

$$\therefore I=\frac{m_{rod}.l^2}{3}+m_{sphere}.(l^2)=\frac{4*(1.8)^2}{3}+8*(1.8)^2=30.24\ kg.m^2$$

$$\therefore \ddot{\theta}+\frac{(124)*(1.2)^2}{30.24}.\dot{\theta}+\frac{(500)*(1.2)^2}{30.24}.\theta=0 \qquad \therefore \ddot{\theta}+5.9\ \dot{\theta}+238\ \theta=0$$

$$\therefore \omega_n=\sqrt{238}=15.4\ rad./\sec\ ,\ \because \frac{c}{m}=2\zeta.\omega_n=5.9 \qquad \therefore \zeta=\frac{5.9}{2\omega_n}=\frac{5.9}{2(15.4)}=0.192$$

ج-عندما تكون المنظومة تماما فى وضع الكبت الحرج فان ζ=1 ويكون الحل لمعادلة الحركة علـــى صورة المعادلة التالية

$$\theta=(A+B.t)e^{-\zeta.\omega_n.t}$$

$$\text{from the initial condition } \because at\ t=0\ \therefore \theta=\theta_0\ ,\dot{\theta}=\frac{d\theta}{dt}=0$$

$$\therefore \theta=(A+B.t)e^{-\omega_n.t} \qquad \therefore \dot{\theta}=(A+B.t)\left[-\omega_n.e^{-\omega_n t}\right]+(0+B).e^{-\omega_n.t}$$

$$\therefore at\ t=0 \quad \dot{\theta}=0=(A+0)\left[-\omega_n.e^0\right]+(0+B)e^0=-\omega_n.A+B$$

$$\therefore B=\omega_n.A \qquad ,\because A=\theta_0 \quad \therefore B=\omega_n.\theta_0$$

$$\therefore at\ A=\theta_0 \qquad B=\theta_0.\omega_n \qquad ,after\ 1\ \sec\ \therefore t=1 \qquad \therefore \theta=\theta_0\left[1+\omega_n\right]e^{-\omega_n}$$

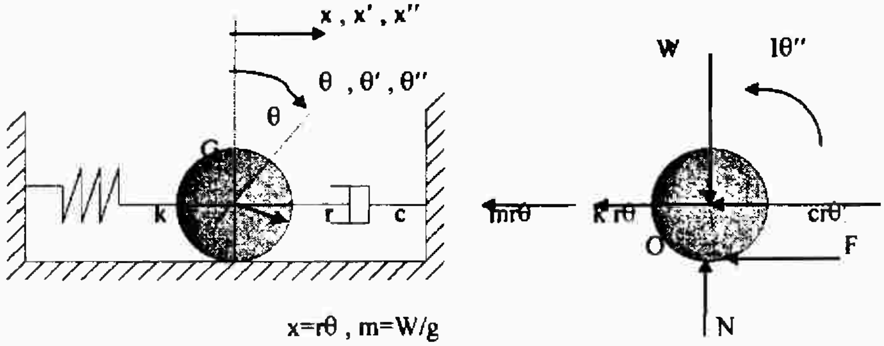
$$\therefore at\ \omega_n=4\ rad/\sec\ ,\ \theta_0=3^\circ \qquad \therefore \theta=3(1+4)e^{-4}=15(0.018)=0.27^\circ$$

(د)-لايجاد التناقص اللوغارتمى δ عندما يقل الخمد 70 % عن الخمد الحرج يكـــون معـــامل 70 % =ζ وبالتالى يعين التناقص اللوغارتمى من العلاقة التالية:

$$\delta=\ln\frac{x_1}{x_2}=\frac{2\pi.\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}=\frac{2\pi(0.7)}{\sqrt{1-(0.7)^2}}=6.16$$

23-Determine the differential equation of motion of the solid cylinder shown in fig.(3-21) which is of radius r and mass m. It is attached to a spring of stiffness k and a dashpot of damping coefficient c which provides viscous damping in the system. Assume that there is sufficient friction for the wheel to roll without slipping. Find the natural frequency and damping factor.

23-أوجد المعادلة التفاضلية للحركة لاسطوانة مصمتة كما مبين بالشكل (3-21) حيث نصف قطرها r وكتلتها m ، متصلة بنابض معاملة k وخامد معاملة c حيث المنظومة ذات خمد لزجز افرض انة يوجد إحتكاك كافى يجعل العجلة (الاسطوانة) تتدحرج بدون إنزلاق أوجد التردد الطبيعى وعامل الخمد.



(a)Oscillating cylinder (b) Cylinder in dynamic equilibrium.

الشكل(3-21)

الحل: طبقا لنظرية المحاور المتوازية فان عزم القصور الذاتى لجسم ما حول اى محور يساوى عزم القصور الذاتى للجسم حول محور موازى يمر بمركز الكتلة ومضافا اليةحاصل ضرب الكتلة فى مربع البعد بين المحوريين.

$$\because x = r\theta \quad ,\dot{x} = r\dot{\theta} \quad ,\ddot{x} = r\ddot{\theta} \quad ,F_{spring} = kx = kr\theta \quad F_d = c\dot{x} = cr\dot{\theta}$$

$$\because I\ddot{\theta} = -\sum M_0 \quad \because \sum M_0 = F_S.r + F_d.r = kr^2.\theta + cr^2.\theta$$

$$\because I = I_G + m.r^2$$

$$\therefore (I_G + m.r^2).\ddot{\theta} + kr^2.\theta + cr^2.\dot{\theta} = 0$$

$$\therefore \ddot{\theta} + \left(\frac{cr^2}{I_G + mr^2}\right).\dot{\theta} + \left(\frac{kr^2}{I_G + mr^2}\right).\theta = 0$$

$$\therefore \omega_n = \sqrt{\frac{kr^2}{I_G + mr^2}} ....c.p.s \qquad \therefore \frac{c}{m} = 2\zeta.\omega_n = \frac{c.r^2}{I_G + mr^2}$$

$$\therefore 2\zeta.\omega_n = \frac{cr^2}{I_G + mr^2} \qquad \therefore \zeta = \frac{cr^2}{(I_o + mr^2).\omega_n}$$

24-In the system shown in fig.(3-21) , If weight(w) of rod =16 ib , Spring constant (k)=6 ib/in ,Length(L) of the rod =26 in , b= 20 in (Location of dashpot from o), The damping coefficient (c)=0.18 ib.sec/in , Determine (a)the differential equation of motion. (b)the undamped natural circular frequency (c)the damping fa.tor. (d)the damped natural frequency.

24-المنظومة المبينة بالشكل (3-21) ، إذا كان وزن القضيب 16 باوند ، ثابت النابض 6باوند/ بوصة ، طول القضيب 26 بوصة ، نقطة إتصال الخامد (ماص الصدمات) تبعد 20 بوصة من المفصل o ، معامل الخمد 18, 0 باوند0ثانية/ بوصة ،أوجد:-

(أ) المعادلة التفاضلية للحركة. (ب) التردد الطبيعى الدائرى الغير مخمد. (ج) عامل الخمد. (د) التردد الطبيعى ذات الخمد.

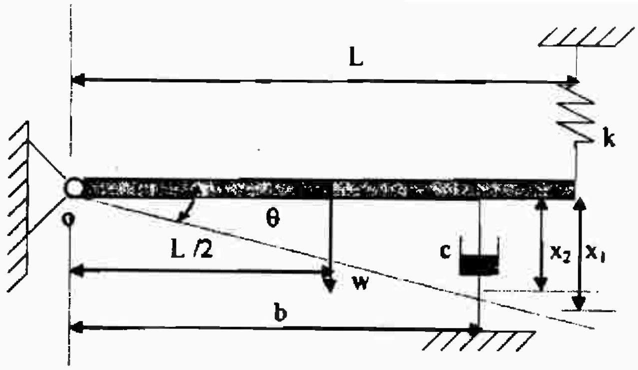


fig.(3-22)

بما ان عزم اللى الكامن يساوى فى المقدار ويضاد فى الاتجاة عزم اللى الاسترجاعى.

$$\therefore \sum M_o = -I\ddot{\theta} \ , \ \because \sum M_o = kx_1 l + c\dot{x}_2 .b = kl^2.\theta + cb^2.\dot{\theta}$$

$$\because I = \frac{ml^2}{3} = \frac{wl^2}{3g} = \frac{(16)*(26)^2}{3(386)} = 9.34 \ ib.in.\sec^2$$

$$\therefore I\ddot{\theta} + kl^2.\theta + cb^2.\dot{\theta} = 0 \qquad \therefore \ddot{\theta} + \frac{cb^2}{I}\dot{\theta} + \frac{kl^2}{I}\theta = 0$$

$$\therefore \omega_n = \sqrt{\frac{kl^2}{I}} \ c.p.s \qquad \therefore \frac{c}{m} = 2\zeta.\omega_n = \frac{cb^2}{I} \qquad \therefore \zeta = \frac{cb^2}{2I.\omega_n}$$

$$\therefore \ddot{\theta} + \frac{(0.18)*(20)^2}{9.34}\dot{\theta} + \frac{(6)*(26)^2}{9.34}\theta = 0 \qquad \therefore \ddot{\theta} + 7.71\dot{\theta} + 434.26\theta = 0$$

$$\therefore \omega_n^2 = 434.26 \quad \therefore \omega_n = \sqrt{434.26} = 20.84 \ rad./\sec$$

$$\therefore f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{20.84}{2\pi} = 3.32 \ HZ \qquad , \zeta = \frac{(0.18)*(20)^2}{2(9.34)*(20.84)} = 0.185$$

$$\because f_d = \frac{\omega_d}{2\pi} = \frac{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{2\pi} = \frac{(20.84)\sqrt{1-(0.185)^2}}{2\pi} = 3.26 \quad HZ$$

25-The inverted pendulum shown in fig.(3-23) consists of a sphere of mass m and raduis r attached to a slender rod of length L and mass , The rod is pinned at o and a spring and dashpot are attached to the sphere as shown in figure. If it is giving a small angular displacement (θ)to the pendulum from its static -equilibrium position , Determine:-
(a)The differential equation of motion of the system. (b)The natural frequency and the damping factor.

24-البندول المقلوب المبين بالشكل (3-23) يتكون من كرة كتلتها m ونصف قطرها r متصلة بذراع طولة L وكتلتة M ، والذراع ممسوك بالمفصل o ، والنابض والحامد متصل بالكرة كما بالشكل. فإذا إعطى للبندول إزاحة زاوية صغيرة (θ) من موضع الاتزان الاستاتيكى أوجد:- (أ)-المعادلة التفاضلية لحركة المنظومة. (ب)-التردد الطبيعى وعامل الخمد.

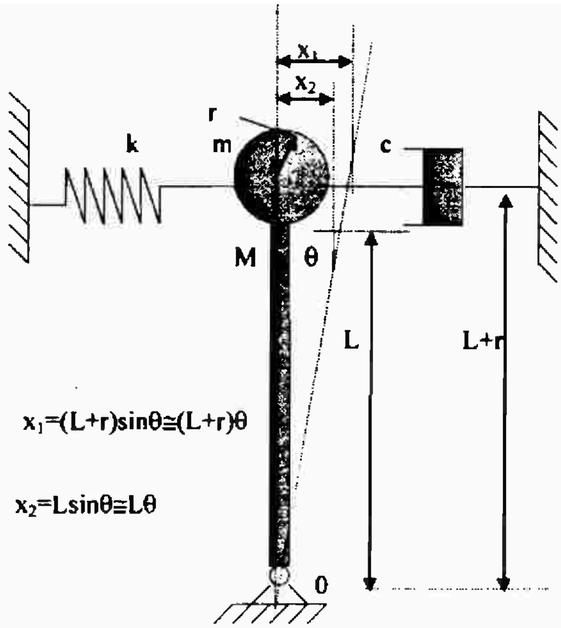


fig.(3-23)

الحل:

$$\because \sum M_o = -I\ddot{\theta}$$

$$,\because \sum M_0 = kx_1.(l+r) - mg(l+r).\theta - Mg\left(\frac{l}{2}\right).\theta + c\dot{x}_1(l+r)$$

$$\therefore \sum M_0 = k(l+r)^2.\theta - mg(l+r) - Mg\left(\frac{l}{2}\right).\theta + c(l+r)^2.\theta$$

$$\therefore I = I_{rod} + I_{spher} = \frac{Ml^2}{3} + \frac{2mr^2}{5} + m(l+r)^2 \quad ,\because r <<< l$$

$$\therefore I_{spher} = m(l+r)^2 \quad only$$

$$\therefore I.\ddot{\theta} + \left[k(l+r)^2 - mg(l+r) - Mg\left(\frac{l}{2}\right)\right].\theta + c(l+r)^2.\dot{\theta} = 0$$

$$\therefore \omega_n = \sqrt{\frac{k(l+r)^2 - mg(l+r) - Mg(l/2)}{I}} \quad rad/\sec$$

$$\because \frac{c}{m} = 2\zeta.\omega_n = \frac{c(l+r)^2}{I} \qquad \therefore \zeta = \frac{c(l+r)^2}{2I.\omega_n}$$

26-Part of a structure can be modelled as a torsional system comprising a bar of stiffness 15 kN.m/ rad and a beam of moment of inertia about the axis of rotation of 60 kg.m^2, The bottom guide imposes a friction torque of 15 N.m as shown in fig.(3-24). If the beam is displaced through 0.08 rad from its equilibrium position and released , find the frequency of the oscillation, the number of cycles executed before the beam motion ceases.

26-جزء من تركيبة تكون نموذج لمنظومة ذات إهتزاز التوائي وتشمل قضيب معاملـــة 15 kN.m/rad. كما بالمنظومة المبينة بالشكل (3-23)، وعتبة عزم القصور الذاتي لها $50 kg.m^2$ حول محور الدوران بشرط ان يكون عزم الاحتكاك عند الدليل الأسفل 10 N ، فاذا حدثت إزاحة زاوية للعتب قدرهـــا 0.05 rad من وضع الاتزان ، أوجد التردد الطبيعي وعدد الدورات التى نفذت قبل توقف حركة العتب.

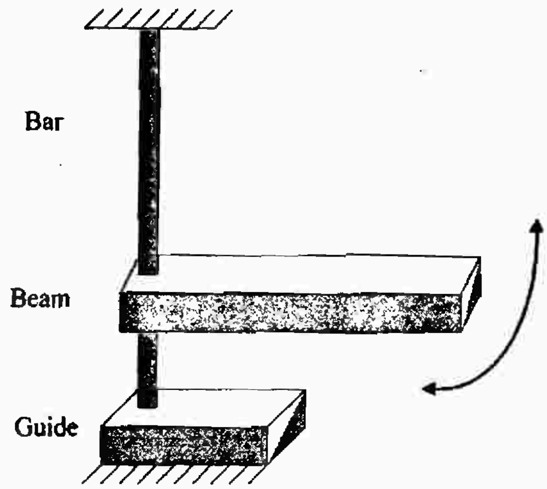


fig.(3-24)

$$\because \omega_n = \sqrt{\frac{k_T}{I}} = \sqrt{\frac{15(10)^3}{60}} = 15.81 \quad rad/\sec \ , \because f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = 2.52 \ HZ$$

$$loss\ in\ amplitude/cycle = \frac{4F_d}{k_T} = \frac{4*(15)}{15*(10)^3} = 0.004 \quad rad.$$

$$\therefore Number\ of\ cycles\ for\ motion\ to\ cease = \frac{angula\ rdisplasment}{loss\ in\ amplitude/cycle} = \frac{0.08}{0.004} = 20$$

27-In the system as shown in fig.(3-25). , One third of the mass iscontained in a rotor that rotates at an angular speed (ω) with an eccentricity of 2 mm. The kinetic coefficient of dry friction is 0.2. The mass is 10 kg and the spring modulus is 1600N/m. What is the amplitude of motion at (ω=100 1/cycle)?
What happens when (ω=10 1/cycle). What does this physiculy mean.?

25-فى المنظومة المبينة بالشكل (3-25) كتلة الدوار تساوى ثلث الكتلة m التى التى تدار عند سرعة ω حول نقطة لامركزية 2mm معامل الاحتكاك الجاف للحركة 0.2 ، الكتلة 10 kg ومعامل النابض 1600 N/m ، أوجد سعة الحركة إذا كانت السرعة الزاوية 1/ cycle ω=100 ؟ ، ماذا يحـــدث عندمـــا تكـــون 1/ cycle ω=10 ؟ ، ماذا يعنى ذلك عمليا ؟

الحل:

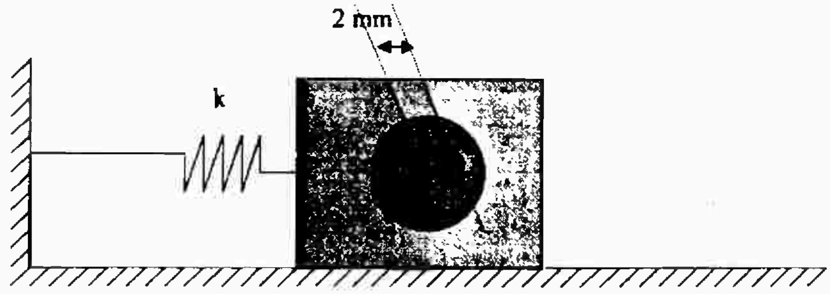


fig.(3-25)

$\because The\ applied\ Force\ F(t)=m_\circ e\omega^2.\sin\omega t \quad , \ at\ \omega=10 \quad 1/\sec \quad \sin\omega t=1$

$$\therefore F_1=m_\circ e\omega^2=\left(\frac{10}{3}\right)(0.002)(10)^2=0.667 \quad N \quad ,\therefore \frac{\mu.N}{F_1}=\frac{(0.2)*(10)*(9.81)}{0.667}=29.72$$

أى ان الحركة تكون غير محتملة الحدوث عندما يكون $\frac{\mu.N}{F_1}\succ\frac{\pi}{4}$ ولهذا فان القوة المؤثرة تكون غير كافية للتغلب على الاحتكاك الاستاتيكى ، وعندما تكون ω=100 1/sec نلاحظ مايلى:

$$F_1=m_\circ e\omega^2=\frac{(10)*(0.002)*(100)^2}{3}=66.7 \quad N$$

$$\therefore \frac{\mu.N}{F_1}=\frac{(0.2)*(10)*(9.81)}{66.7}0.294 \quad N \qquad i.e \quad \frac{\mu.N}{F_1}\prec\frac{\pi}{4}$$

وتكون الحركة فى هذة الحالة محتملة وتكون مستمرة ، وبذلك يمكن إيجاد السعة من المعادلة التالية:

$$\frac{x}{F_1/k}=\sqrt{\frac{1-\left(\frac{4\mu.N}{\pi.F_1}\right)^2}{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2}}=\sqrt{\frac{1-\left[\frac{4}{\pi}(0.294)\right]^2}{\left[1-(0.625)^2\right]^2}}=1.52$$

$$where \quad \omega_n^2=\frac{k}{m}=\frac{1600}{10}=160 \quad 1/\sec^2 \quad \therefore r^2=\frac{\omega^2}{\omega_n^2}=\frac{100}{160}=0.625$$

إذن بالتعويض فى هذة العلاقات ينتج أن:

$$\therefore \frac{x}{F_1/k}=1.52 \quad , \quad x=1.52\left(\frac{F_1}{k}\right)=1.52\left(\frac{66.7}{1600}\right)=0.064$$

28-A single degree of freedom system has viscous damping, with ζ=0.03, Find the energy dissipated per cycle as a function of the energy in the system at the start of that cycle. Also find the amplitude of the 14th cycle if the amplitude of the 4th cycle is 1.6 mm.

28-منظومة ذات درجة حرية واحدة مع خمد لزج (ζ=0.03). ،أوجد الطاقة المبددة لكل دورة كدالة فى طاقة المنظومة عند بداية الدورة الرابعة عشرة اذا كانت سعة الدورة الرابعة 1.6 mm .

الحل:

$$\because \zeta \prec\prec 1\ ,\therefore \delta = \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \cong 2\pi\zeta = 2\pi(0.03) = 0.1884\ \therefore \frac{x_1}{x_2} = e^{\delta} = e^{0.1884} = 1.207$$

$$\therefore Energy\ at\ start\ of\ cycle = \frac{1}{2}kx_1^2 = (stored\ as\ strain\ energy\ in\ spring)$$

$$Energy at end of cycle = \frac{1}{2}kx_2^2$$

$$\therefore \frac{Energy\ dissipated\ during\ cycle\ (E.D)}{Energy\ at\ start\ of\ cycle\ (E_1)} = \frac{\frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2}{\frac{1}{2}kx_1^2}$$

$$= 1 - \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 = 1 - \left(\frac{1}{1.207}\right)^2 = 0.3136$$

ای ان حوالی % 31.36 من الطاقة البدائية مبددة فی دورة واحدة.

$$\because \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \frac{x_3}{x_4} = \cdots\cdots = \frac{x_{n-1}}{x_n} = 1.207$$

$$\therefore \frac{x_4}{x_{14}} = (1.207)^{10} = 6.56 \qquad \therefore x_{14} = \frac{x_4}{\frac{x_4}{x_{14}}} = \frac{1.6}{6.56} = 0.243\ mm.$$

29-A 300 gm body is hung to a spring. 30 gm can stretch this spring 1 cm. The logarithmic decrement of damped vibration of the oscillating body is 1.4 , Find (a) the period of oscillation at resonance.(b) the resonance amplitude if the amplitude of the driving force equals to 170 cm.

29 –جسم كتلته 300جرام علق فی نابض ، علقت كتلة 30جرام فی نفس النابض فأ مكـن تمـدد هـذا النابض 1سم والتناقص اللوغارتمیللجسم المهتز إهتزازا ذات خمد 1.4 أوجد (أ)الزمن الـدوری عنـد الرنين. (ب)السعة عند الرنين $(A_{res.})$ أذا كانت السعة لقوة الاستثارة تساوی 170سم.

الحل:عندما يكون الخمد صغير فان $\omega_n = \omega_d$ ولتعيين الزمن الدوری والسعة عند الرنييم نتبع الاتی:

$$\because \delta = \frac{2\pi}{\omega_d}.B \qquad ,\therefore B = \frac{\omega_n.\delta}{2\pi} \qquad where\ t_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$$

$$\because mg = k\Delta\ \ \therefore k = \frac{mg}{\Delta} = \frac{30(981)}{1}$$

$$\therefore \omega_{resonance} = \omega_{res.} = \sqrt{\omega_n^2 - 2B^2} = \omega_n\sqrt{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{\pi}\right)^2} = \omega_n\sqrt{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1.4}{\pi}\right)^2} = 0.95\omega_n$$

$$\therefore t_{res} = \frac{1}{0.95}t_0 = 1.053t_0 \qquad \because t_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{300(1)}{30(981)}} = 0.634\ \ \sec$$

$$\because \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{30(981)}{300}} = 9.9\ \ rad./\sec \qquad B = \frac{9.9(1.4)}{2\pi} = 2.21$$

$$\therefore t_{res} = 1.053(0.643) = 0.667\ \ \sec$$

$$\because A_{res} = \frac{h}{2B\sqrt{\omega_n^2 - B^2}} = \frac{\frac{H}{m}}{\omega_n^2\frac{\delta}{\pi}\sqrt{1 - \frac{1}{4}\left(\frac{\delta}{\pi}\right)^2}} = \frac{170}{(9.9)^2\sqrt{1 - \frac{1}{4}\left(\frac{1.4}{\pi}\right)^2}} = 1.78cm$$

مسائل على الباب الثالث

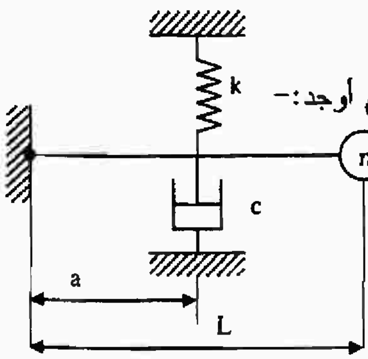
1- نظام مهتز متكون من وزن 22.25N ونابض بجساءة 1750N/m ومتضائل لزوجياً بحيث تجعل النسبة بين أي سعتين متعاقبتين تكون 1.0 إلى 0.98 أوجد التردد الطبيعي للمنظومة المتضائلة والتناقص اللوغارتمي وعامل ومعامل التضاؤل.

2- يتكون نظام مهتز من وزن 44.5N ونابض ذي جساءة 3500N/m ونبيطه متضائلة معامل تضاؤلها 12.4N.s/m أوجد: أ- عامل التضاؤل. ب- التناقص اللوغارتمي. ج- النسبة بين أي سعتين متعاقبتين.

3- نظام مهتز يملك الثوابت الأتية W=172N ، k=7000 N/m ، C=70 N.s/m أوجد:

أ- عامل التضاؤل و التردد الطبيعي للتذبذب المتضائل.

ب- التناقص اللوغارتمي والنسبة بين أي سعتين متعاقبتين.



الشكل(3-1)

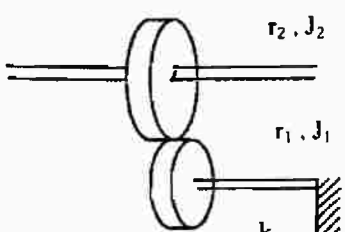
4 - كون المعادلة التفاضلية لحركة النظام المبين في الشكل (3-1) ثم أوجد:-

1-معامل التضاؤل الحرج.

2-التردد الطبيعي للتذبذب المتضائل.

5- أوجد عزم القصور الذاتي للكتلة الفعالة للعمود (1) في النظام المبين بالشكل (3-2).

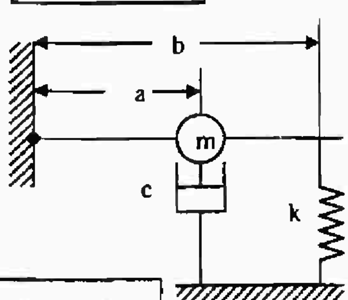
6- ربط وزن مقداره 9N إلى نهاية النابض الذي جساءته 1700N/m، اوجد معامل التضاؤل الحرج



الشكل(3-2)

7- لتدريج نبيطة متضائلة، تقاس سرعة الكباس عند تسليط القوة عليه. أذا كان 2.22N ينتج سرعة ثابتة 30.5mm/sec أوجد عامل التضائل ξ عندما يستعمل مع النظام في المسألة (6).

8- أكتب المعادلة التفاضلية لحركة النظام المبين بالشكل (3-3) وأوجد التردد الطبيعي للتذبذب المتضائل ومعامل التضاؤل الحرج.



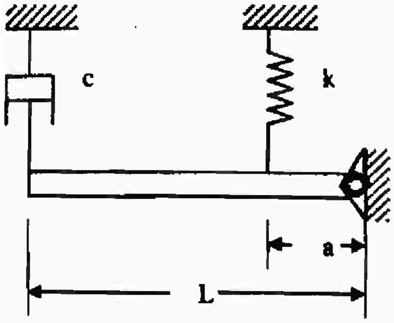
الشكل(3-3)

9- أزيح نظام كتلة - نابض وبالتضاؤل اللزج من موقع التوازن ثم ترك كي يتذبذب. إذا تضاءلت السعة بـ5% لكل دورة ماذا يجب أن يكون كسر التضاؤل الحرج الذي يمتلكه النظام.

10- يبين الشكل(3-4) قضيباً منتظماً وصلباً كتلته m وطوله

L قد ثبت بمسمار عند النقطة o وحمل بواسطة نابض ومضائل لزج. قياس θ من موقع التوازن الأستاتيكي، أوجد (أ)المعادلة التفاضلية للمنظومة مع أعتبار أن عزم القصور الذاتي للقضيب حول (o) هو mL^2.

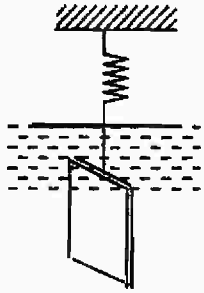
(ب) أوجد التردد الطبيعي ومعامل التضاؤل الحرج.



الشكل (3-4)

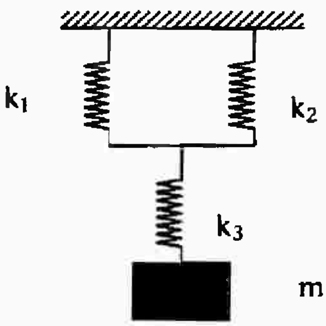
11- صفيحة نحيفة ذات مساحة A ووزن W ربطت إلى نهاية النابض ثم تركت تتذبذب في مائع لزج كما مبين بالشكل (3-5) إذا كان τ_1 هو زمن الدوره الطبيعية التذبذب غير المتضائل والذي يكون مع نظام متذبذب في الهواء و τ_2 زمن الدوره المتضائلة عندما تغمس الصفيحة في المائع بين أن $\mu = \frac{2\pi w}{gA\tau_1\tau_2}\sqrt{\tau_2^2 - \tau_1^2}$

حيث إن قوة التضاؤل على الصفيحة هي $F_d = \mu 2Av$ ، 2A هي المساحة السطحية الكلية للصفيحة، v سرعة الصفيحة.



الشكل (3-5)

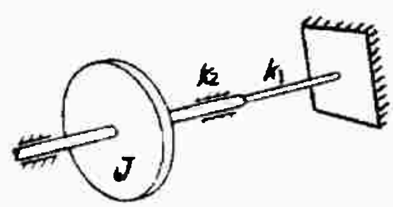
12- أوجد الجساءة الفعالة للنوابض المبينة بالشكل (3-6).



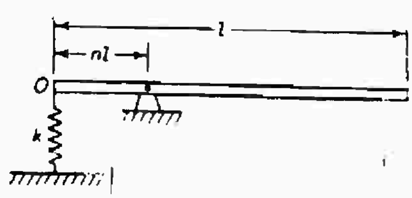
الشكل (3-6)

13ــ أوجد الجساءه الفعالة للنظام الالتوائى المبين بالشكل (3-7) حيث الجساءه الالتوائيه للمحورين المربوطين على التوالى K_1, K_2.

14ــ أوجد مقدار الكتلة الفعالة عند النقطة (5) لقضيب منتظم كتلته m طوله L مرتكز عند المسافة nl من 0 كما مبين بالشكل (3-8).



الشكل (3-7)



الشكل (3-8)

15ــ أوجد قيمة ع لمجموعة اهتزازية حرة الحركة فيها $\omega/\omega_d=0$

16ــ مجموعة تتذبذب تحت تأثير الخواص الآتية: m=17.5kg , k=7.5 kg/cm , c= 7.5 kg/cm /sec

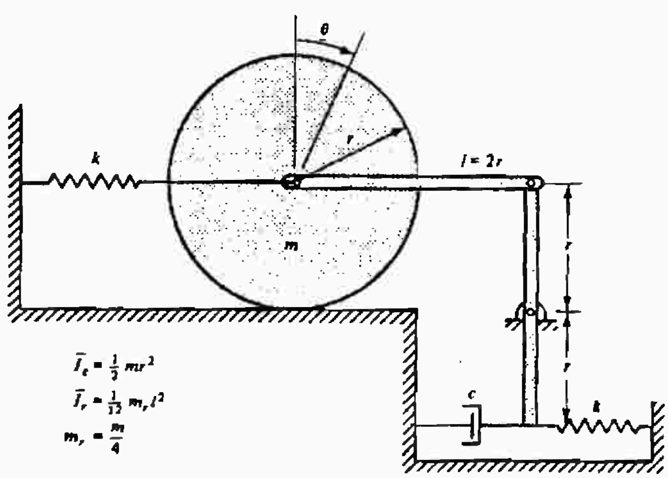
أوجد: (أ) نسبة الكبت. (ب) تردد المجموعة تحت تأثير الكبت.

(جــ) معامل التناقص للوغارتمى. (د) نسبة سعتى إهتزازين متتاليين.

17ـ جسم يزن 40 Ib معلق من نابض يحدث به استطاله 0.625 بوصة تحت هذا الحمل. أحسب تـــردد الاهتزازات الحرة وحقق أن قوة كبت لزجة بقيمة تقريبية 5 رطل/ قدم/ ث كافية لجعل الحركة دورية.

18ـ كتلة تزن 50 رطل معلقة من ياى معامله 100 رطل/ بوصة. ركب للمجموعة وعاء كبت مما أدى إلى تناقص سعة الاهتزاز الأولى من قيمتها (1) بوصة إلى 0.25 بوصة فى دورتين. أوجد معـــامل الكبت (c)، والسرعة الزاوية (ω) والنسبة ω/ω_d.

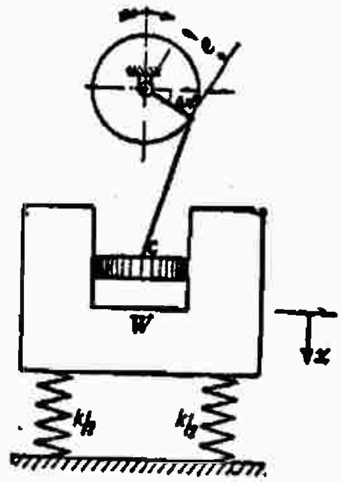
19ـ المنظومة المبينة بالشكل (3-9) عبارة عن اسطوانة نصف قطرها r وكتلتـــها m تتدحـــرج بـــدون انزلاق ومتصلهبقضيب طوله 2r من مركزها ومتصل بالقضيب قضيب آخر من الطـــرف الحـــر وعمونكاعليه وطوله 2r أيضاً والقضيب الرأس يتحرك بحرية حول مفصل فى منتصف القضيـــب الرأسى والنهاية السفلى للقضيب الرأس مثبت فى أحد جانبيه نابض معاملةk وخامد معامل الخمـــد له c ، وكذلك يتصل بابض آخر معاملة k أيضاً بمركز الاسطوانة والطرف الأخر مثبـــت بجـــدار كما مبين بالرسم. وكتله كل قضيب تساوى mr حيث $m_r = 1\backslash 4m$ فأذا أعطـــى حركـــة تذبذبيـــه θ للمنظومة. أوجد معادلة الحركة التفاضلية والتردد الطبيعي للدورة وعامل الخمد ξ وذلك باعتبـــار أن $I_r = m_r L^2/12$ و $I_c = 0.5mr^2$

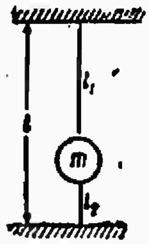


الشكل (3-9)

20ـ أوجد المعادلة التفاضلية للحركة للمنظومة المبينة بالشكل (3-10) أخر من وجود خمد لـــزج بيـــن الكبس والجسم.

21ـ الكتلة m فى المنظومة المبينة بالشكل(3-11) متصل من طرفيها بسلك مع وجود قوة شد (T Kgf) بفرص حدوث سعة صغيرة للمنظومة أوجد التردد الطبيعى للاهتزاز فى المستوى العمودى للسلك، وأيضاً وضح أن دورة الاهتزاز تزداد عندما يكون $L_1 = L_2$.





الشكل (3-11)　　　　　　　　　　الشكل(3-10)

22ـ ما سورة مدفع كتلتها 400 Kg مركبة على ياى ارتداد معاملة 300 Kg\cm أوجـد الكبـت اللـزج اللازم تركيبه (c) حتى تعود الماسورة إلى وضعها بعد الإطلاق بأسرع ما يمكن.

23ـ المنظومة المبينة بالشكل (3-12) إذا أعطى لها إزاحة زاوية صغيرة θ أوجد ما يلى مـع إهمـال كتلة القضيب الجاسئ ويتحرك فى الاتجاه حول المفصل p.

أـ المعادلة التفاضلية للحركة. ب ـ التردد الطبيعى F_n ومعمل الخمد الحرج C_c.

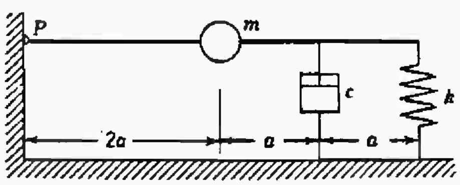
جـ ـ عامل الخمدع. دـ التردد الطبيعى المخمد ω_d.

الجواب

$$4m\ddot{x} + 9c\dot{x} + 16kx = 0$$

$$f_{nd} = \frac{60}{2\pi}\sqrt{\frac{4k}{m} - \left(\frac{9c}{8m}\right)^2}$$

$$c_c = \frac{16}{9}\sqrt{mk}$$



الشكل (3-12)

24ـ المنظومة المبينة بالشـكل (3-13) إذا أعطـى للعمـود أو القضيب الجاسئ المهمل الوزن إزاحة زاوية حـول المفصـل P أوجد:

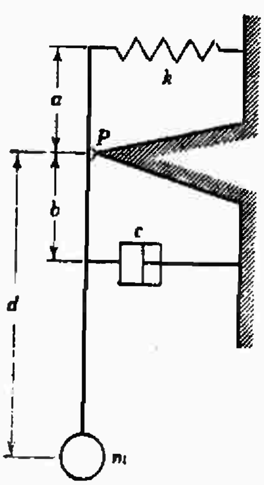
أـ معادلة الحركة للمنظومة ب ـ التردد الطبيعى المخمـدω_d.

جـ ـ معامل الخمد الحرج C_c.

الجواب

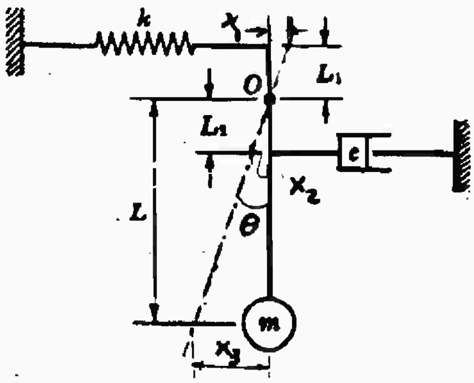
$$\omega_{nd} = \sqrt{\frac{ka^2 + mgd}{md^2} - \left(\frac{b^2c}{2md^2}\right)^2}$$

$$c_c = \frac{2}{b^2}\sqrt{md^2(ka^2 + mgd)}$$



الشكل (3-13)

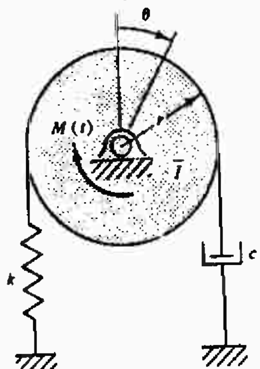
25-المنظومة المبينة بالشكل (3-14) هى بندول هى بندول بسيط ذىمفصل عند o فاذا كانت كتلة القضيب مهملة ، وكانت الذبذبات صغيرة أوجد معادلة الحركة والتردد الطبيعى ω_n وعامل الخمد ξ والترددالطبيعى المخمودω_d



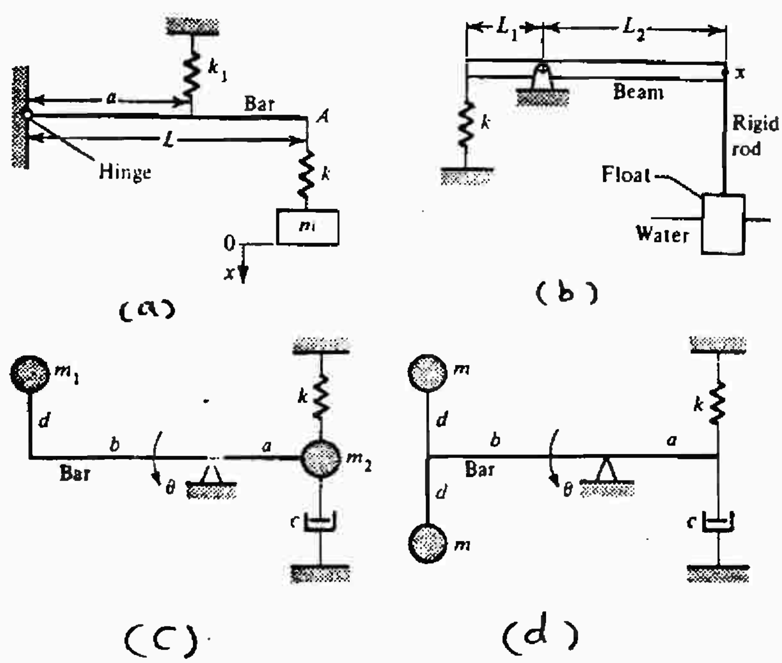
الشكل (3-14)

25-لمنظومة المبينة بالشكل (3-15) تتكون من قرص عزم القصور الذاتى لة I ويقع تحت تأثير عزم M_t ومن نابض معاملة k وخامد معامل الخمد لة c ، اوجد معادلة الحركة والتردد الطبيعى f_n وعامل الخمدξ.

26-اوجد معادلة الحركة والتردد الطبيعى للمنظومات المبينة بالشكل (3-16a,b,c and d)

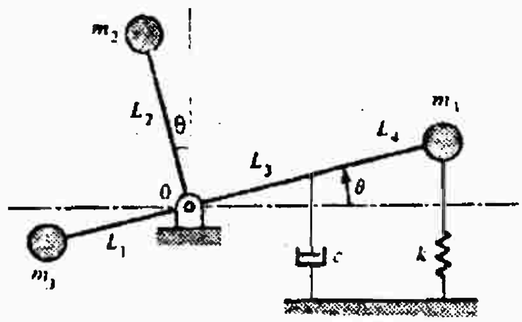


الشكل (3-15)



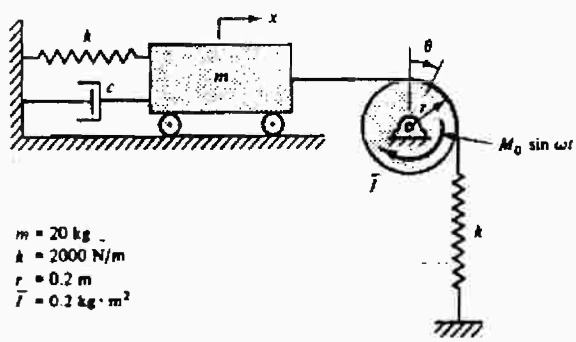
الشكل (3-16 a,b,c and d)

27-اوجد معادلة الحركة والتردد الطبيعي ومعامل النابض المكافئ والكتلة المكافئة للمنظومة المبينة بالشكل (3-17).



الشكل (3-17)

28-Adamping factor of ζ=0.12 is determined experimentally fromits damped free vibrations for the system shown in the figure (3-18) . Assuming that there is no slippage between the light cable and the cylinder and that the is subjected to the moment M_o sinωt shown , determine(a)the differential equationof motion of the system and (b)the amplitude $|X|$ of the forced response of the mass m if M_o=10 N.m and ω =10rad/sec



الشكل (3-18)