

الباب الخامس

التهرير الأعمدة

1- يوجد ثلاثة أنواع للأهتزاز الحر للأعمدة وهي كالآتي:

أ- الاهتزازات الطولية Longitudinal vibrations

يبين الشكل (5-1a) أن القضيب (العمود) يتمدد أو ينكمش في اتجاه محوره ولذلك يقع العمود

تحت إجهادي الشد والضغط .the tensile and compressive stress

ب- الاهتزازات العرضية Transverse vibrations

عندما يتحرك العمود أو القرص حركة إهتزازية عمودية تقريباً على محور طول العمود كما

بالشكل (5-1b) يسمى ذلك بالاهتزازات العرضية وفي هذه الحالة يتمدد وينحني القضيب بالتلويب

مما يؤدي إلى أن يقع القضيب تحت أجهادات الانحناء .the bending stresses

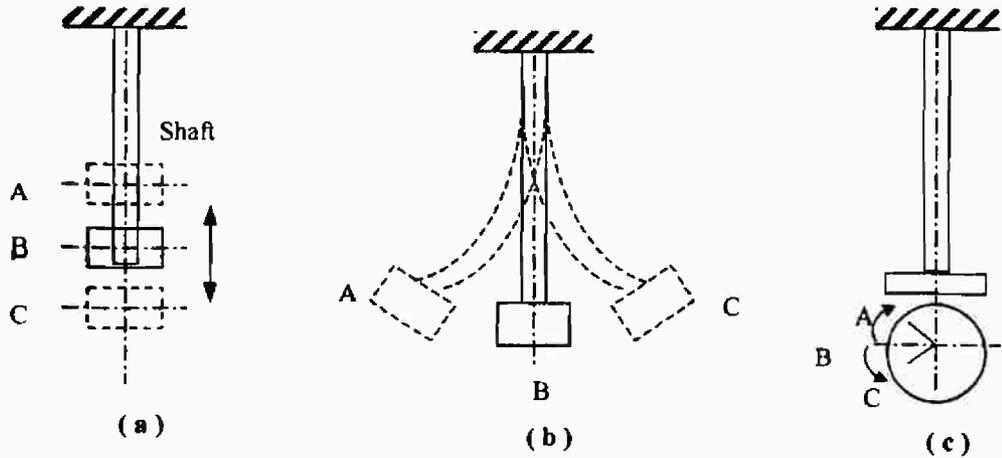
ج- الاهتزازات الأتوائية Torsional vibrations

يبين الشكل (5-1c) أن القرص والعمود يقع تحت تأثير الأجهاد الأتوائي عندما يتحرك حركة

دورانية في اتجاه عقرب الساعة من B إلى A وفي إتجاه ضد عقرب الساعة من B إلى C حيث

الوضع B يمثل الوضع المتوسط وكل من الوضعين C و A يمثل وضعي التغيير أي الوضع الجديد

للحركة الأهتزازية.

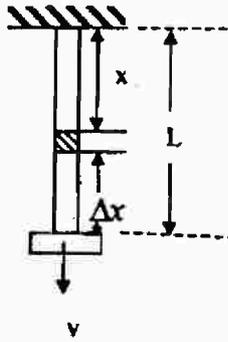


B=Mean position
A and C = Extreme position

الشكل (5-1)

2- تأثير القصور الذاتي للعمود في حالة الاهتزاز الطولي والعرضي

Effect of the inertia of the shaft in longitudinal and transverse vibrations



الشكل (5-2)

Longitudinal vibration أولاً: الاهتزاز الطولي

الشكل (5-2) يوضح عمود طوله (L) ومثبت من أحد طرفيه رأسياً وحر من الطرف الآخر ووزن العمود لوحدة الأطوال w فيكون الوزن الكلي للقضيب $W_c = wL$ فإذا ثبت في الطرف الحر للقضيب قرص (disc) وزنه W وبأخذ عنصر صغير للعمود وعلى مسافة x من الطرف المثبت به وطول العنصر Δx فتكون كتلة العنصر $\frac{w \cdot \Delta x}{g}$ وسرعة الطرف الحر من القضيب (v) وهي السرعة الطولية Longitudinal velocity وبذلك تكون السرعة الطولية للعنصر يعبر عنها بالعلاقة التالية:

$$\text{The velocity of the small element} = \frac{x}{L} \cdot v \dots \dots \dots (5-1)$$

وتكون طاقة الحركة للعنصر هي

$$\text{The kinetic energy possessed by the element} = \frac{1}{2} m v^2$$

$$K.E = \frac{1}{2} \left(\frac{w \cdot \Delta x}{g} \right) \left(\frac{x}{L} \cdot v \right)^2 = \frac{w v^2 x^2}{2 g L^2} \Delta x \dots \dots \dots (5-2)$$

∴ Total kinetic energy possessed by the shaft =

$$\therefore \text{Total (K.E)} = \int_0^L \frac{w \cdot v^2}{2 g L^2} \cdot x^2 dx = \frac{w \cdot v^2}{2 g L^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^L = \frac{w \cdot v^2}{2 g L^2} \cdot \frac{L^3}{3} = \frac{1}{2} \left(\frac{W_c}{3g} \right) v^2 \dots (5-3)$$

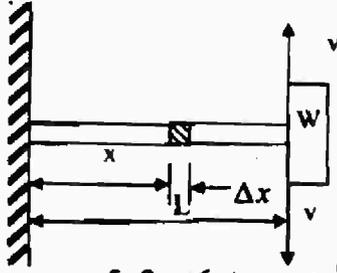
حيث $W_c = w \cdot L$ = الوزن الكلي للعمود أي أنه إذا وضعنا الوزن $\frac{W_c}{3}$ عند الطرف الحر للعمود وأهملنا وزن العمود فتكون طاقة الحركة الكلية هي :

$$\text{Total (K.E)} = \frac{1}{2} \left(\frac{W_c}{3g} \right) v^2$$

لهذا نجد أن القصور الذاتي I للعمود يسمح بإضافة ثلث وزنه إلى القرص المثبت في الطرف الحر. ولذلك عندما يؤخذ وزن القضيب W_c ووزن القرص W في الحساب نجد أن التردد الطبيعي يعين من العلاقة التالية:

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{W + \frac{1}{3} W_c}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m + \frac{m_c}{3}}} \text{ (c.p.s.)} \dots \dots \dots (5-4)$$

ثانياً الإمتزاز العرضي Transverse vibration



- 1- إيجاد التردد الطبيعي لعمود ذات حمل عند الطرف الحر
- 2- له بطريقة الطاقة:

الشكل (5-3) يبين عمود طوله (L) في وضع أفقي

ومثبت من أحد طرفيه وحر من الطرف الآخر ونفرضه إن الوزن يمكن للعمود $W_c = wL$ حيث w وزن العمود لوحده الطول والشكل (5-3)

وكانت السرعة في الاتجاه العرضي للعمود (v) Transverse velocity وإذا افترضنا عنصر صغير طوله Δx وعلى مسافة (x) من الطرف

المثبت من العمود فيمكن التعبير عن سرعة العنصر بالعلاقة $v_{element} = \frac{3Lx^2 - x^3}{2L^3} \cdot v$ ويمكن التعبير

عن طاقة العنصر من العلاقة:

$$(K.E) \text{ of element} = \frac{1}{2} \frac{w \cdot \Delta x}{g} \left[\frac{3Lx^2 - x^3}{2L^3} v \right]^2$$

$$\therefore \text{Total of (K.E) of the shaft} = \int_0^L \frac{1}{2} \cdot \frac{w \cdot \Delta x}{g} \left[\left(\frac{3Lx^2 - x^3}{2L^3} \right) v \right]^2$$

$$= \frac{w \cdot v^2}{8gl^6} \int_0^L (9L^2 x^4 - 6Lx^3 + x^6) dx = \frac{w}{8gl^6} \cdot v^2 \left[\frac{9L^2 x^5}{5} - \frac{6Lx^4}{4} + \frac{x^7}{7} \right]_0^L$$

$$\therefore \text{Total of (K.E)} = \frac{33}{280} \cdot \frac{W_c}{g} v^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{33}{140} \cdot \frac{W_c}{g} \right] v^2 \dots \dots \dots (5-5)$$

فاذا وضعنا الوزن $\frac{33W_c}{140}$ عند الطرف الحر للعمود مع إهمال وزن العمود فإن طاقة الحركة الكلية

للمعمود يعبر عنها بالعلاقة التالية:

$$\text{Total (K.E) possessed by the shaft} = \frac{1}{2} \left(\frac{33}{140} \frac{W_c}{g} \right) v^2$$

ومن ذلك يتضح أن القصور الذاتي للعمود يسمح بإضافة $\frac{33}{140}$ من كتلة العمود عند الطرف الحر.

وإذ ذلك عند حساب التردد الطبيعي للعمود كتلة العمود بعد تثبيت قرص disc وزنه W بالطرف الحر

للمعمود فإن وزن العمود W_c ووزن القرص W يؤخذ في الاعتبار ويعبر عنه بالعلاقة الآتية:

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{\frac{W}{g} + \frac{33}{140} \cdot \frac{W_c}{g}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m + \frac{33}{140} m_c}} \dots \dots \dots (5-6)$$

ملاحظات:

أ- إذا كان العمود مثبت من الطرفين والقرص مثبت بمنصف العمود فإن التردد الطبيعي يعبر عنه

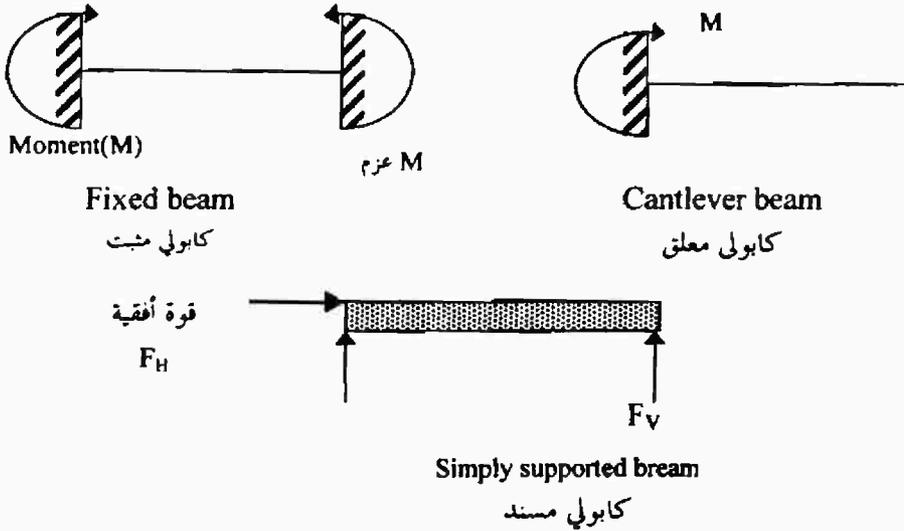
بالعلاقة التالية:

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m + \frac{13}{35} m_c}} \text{ (c.p.s.)} \dots \dots \dots (5-7)$$

ب- إذا كان طرفي الكابولي أو العمود موضوعين على حوامل وليس مثبتين من طرفي الكابولي اي الكابولي من نوع supported beam فإن التردد الطبيعي يعبر عنه بالعلاقة الآتية:

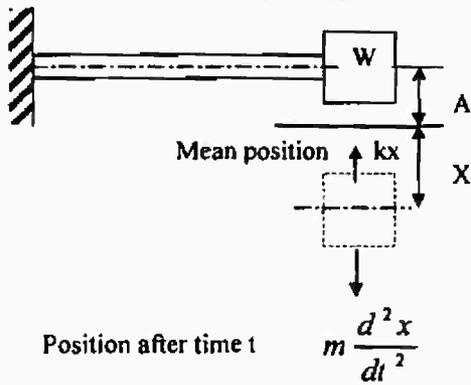
$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m + \frac{17}{35} m_c}} \text{ (c.p.s.)} \dots \dots \dots (5-8)$$

ج- لاحظ الأشكال التالية:



الشكل (5-3)

2- أيجاد التردد الطبيعي لعمود ذا حمل مركز عند الطرف الحر له بطريقة نيوتن



الشكل (5-4)

الشكل (5-4) يوضح عمود مهمل الوزن وفي وضع أفقي ومثبت من أحد طرفيه والطرف الآخر حر ومثبت به جسم وزنه W .

فإذا كانت جساءة العمود (K) حيث:

$k = \text{stiffness of the shaft}$

$\Delta = \text{static deflation of the body}$

الانحناء الاستاتيكي للعمود (X) :

$x = \text{displacement of the body from the mean position at time } t.$

الأراحة للجسم من وضع الأترن الاستاتيكي بعد زمن t :

The restoring force = القوة الكامنة = $-kx$

وبتطبيق القانون الثاني لنيوتن حيث:

$$m \ddot{x} = \sum F_x = -kx \quad \therefore m \ddot{x} + kx = 0 \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \dots \dots \dots (5-9)$$

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad \therefore \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad f_p = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

i.e

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\Delta}} \dots \dots \dots (5-10)$$

$$\Delta = \frac{WL^3}{3EI} \text{ ومن علم مقاومة المواد نجد أن:}$$

W= Load at the free end الحمل عند النهاية الحرة

L=Length of the shaft طول العمود

E= Young's modulus for the material shaft معامل المرونة لمعدن العمود

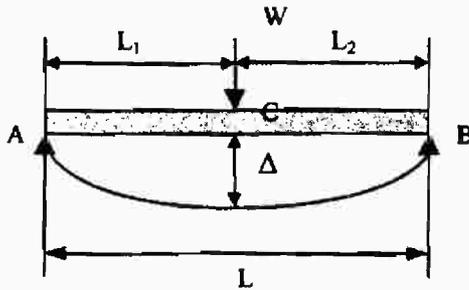
I= Moment of inertia of the shaft عزم القصور الذاتي للعمود

3-التردد الطبيعي للأهتزاز العرضي الحر نتيجة حمل يؤثر على عمود مسند.

Natural frequency of free Transverse vibration due to a point load acting over a simply supported shaft.

نفرض أن العمود AB طوله L ومسند عند

طرفيه وتحت تأثير حمل W عند نقطة (C) كما مبين بالشكل (5-5) فعند حدوث إنحناء للعمود ثم يترك فجأة فإنه يهتز إهتزاز عرضي ونجد أنحناء العمود Δ يتناسب مع الحمل W ، ويهتز العمود بحركة توافقية بسيطة (s.h.m) كما لو كان نابض حلزوني (a helical spring).



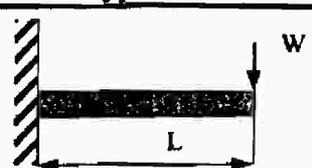
الشكل (5-5)

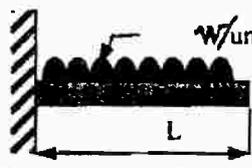
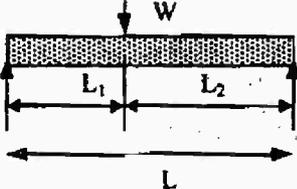
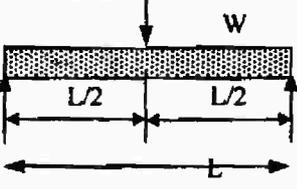
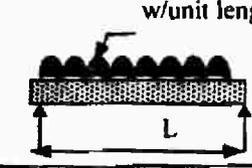
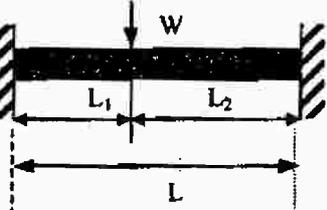
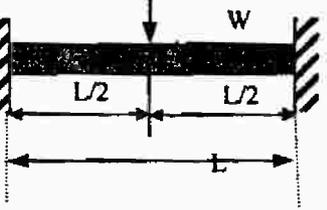
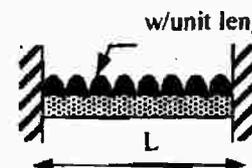
ويعين التردد الطبيعي للأهتزاز الحر العرضي من العلاقة التالية:

$$f_n = \text{the natural frequency of the free Transverse vibration} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\Delta}}$$

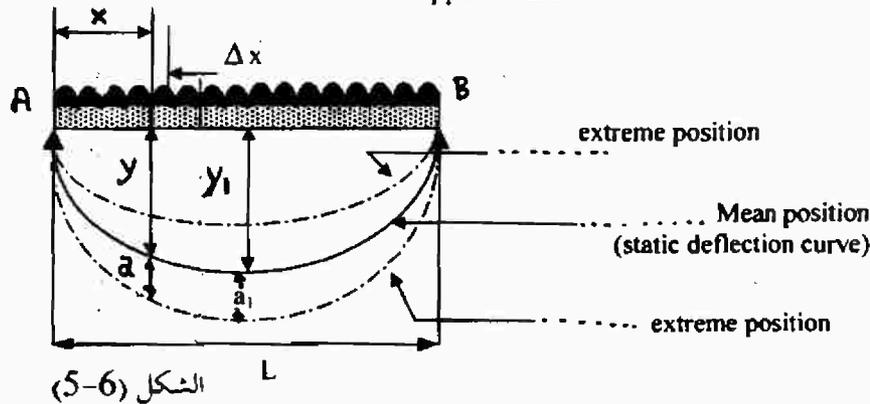
$$\therefore f_n = \frac{4.987}{\sqrt{\Delta}} \text{ (c.p.s.)} \dots \dots \dots (5-11)$$

والجدول (5-1) التالي يوضح قيم الأتحناء الأسناتيكي لأنواع مختلفة من الكابولي وتحت أحمال مختلفة.

S.NO	Type of beam	Deflection (Δ)	The effecting point
1		$\Delta = \frac{WL^3}{3EI}$	عند الطرف الحر at the free end

S.NO	Type of beam	Deflection (Δ)	The effecting point
2		$\Delta = \frac{wL^4}{8EI}$	(at the free end)
3		$\Delta = \frac{WL^2L_2^2}{3EI}$	(at the free end)
4		$\Delta = \frac{WL^3}{48EI}$	(at the center) في منتصف العود
5		$\Delta = \frac{5}{384} \cdot \frac{wL^4}{EI}$	(At the center)
6		$\Delta = \frac{WL_1^3L_2^3}{3EIL^3}$	(at the point load)
7		$\Delta = \frac{WL^3}{192EI}$	(at the center)
8		$\Delta = \frac{WL^4}{384EI}$	(at the center)

4- التردد الطبيعي للأهتزاز العرضي الحر الناتج من حمل منتظم التوزيع على عمود مسند
 Natural frequency of free Transverse vibration due to uniformly distributed load acting a simple support shaft.



الشكل (5-6)

العمود AB عليه حمل منتظم التوزيع (w) uniformly distributed load لكل وحده طول ونلاحظ من الشكل (5-6) مايلي:

y_1 = static deflection at the middle of the shaft عند منتصف العمود الأستاتيكي

a_1 = سعة الاهتزاز amplitude of vibration عند منتصف العمود

$w_1 = \frac{w}{y_1}$ = Uniformly distributed load per unit static deflection at the middle of the shaft

الحمل منتظم التوزيع لكل وحدة من الأحناء الأستاتيكي عند منتصف العمود

إعتبر أن مقطع العمود صغير وعلى مسافة x من إحدى طرفيه ولتكن A ويكون طول المقطع Δx ، y هي الأحناء الأستاتيكي على مسافة x من A ، a هي سعة الاهتزاز عند هذه النقطة.

∴ الشغل المبذول (W.D) لهذا المقطع (العنصر) يعين من العلاقة التالية:

$$W.D \text{ on this small section} = \frac{1}{2} w_1 \cdot a_1 \cdot \Delta x \cdot a = \frac{1}{2} \frac{w}{y_1} \cdot a_1 \cdot a \cdot \Delta x$$

وبالتالي فإن أقصى طاقة وضع عند أقصى موضع at the extreme position يساوي كمية الشغل المبذول (W.D) لحركة الكابولي من الوضع المتوسط إلى أقصى موضع كما يلي:

$$\therefore (P.E)_{\max} \text{ at the extreme position} = \int_0^L \frac{1}{2} \frac{w}{y_1} \cdot a_1 \cdot a \cdot dx \dots \dots \dots (5-12)$$

وباعتبار أن شكل منحنى اهتزاز العمود يكون متماثل مع منحنى الأحناء الأستاتيكي للعتب (beam) أي أن:

$$\frac{a_1}{y_1} = \frac{a}{y} = \text{const} = c \quad \therefore a = yc = \frac{y}{y_1} \cdot c \cdot a_1 \dots \dots \dots (5-13)$$

وبالتعويض في (5-12) ينتج أن:

$$\therefore (P.E)_{\max} = \int_0^L \frac{1}{2} w \cdot c \cdot y \cdot c \cdot dx = \frac{1}{2} w c^2 \int_0^L y^2 dx \dots \dots \dots (5-14)$$

∴ أقصى سرعة عند الوضع المتوسط يعبر عنه بالعلاقة ωa حيث ω هي تردد الأمتزاز الدوري (the circular frequency of vibration).

$$\therefore (P.E)_{\max} = \int_0^L \frac{1}{2} \frac{w dx}{g} (\omega a)^2 = \frac{1}{2} \frac{w}{g} \omega^2 c^2 \int_0^L y^2 dx \dots\dots\dots(5-15)$$

ونظراً لأن أقصى طاقة وضع عند الوضع المتوسط يساوي أقصى طاقة حركة عند نفس الوضع:

$$\therefore \frac{1}{2} \frac{w}{g} \omega^2 c^2 \int_0^L y^2 dx = \frac{1}{2} w c^2 \int_0^L y dx$$

$$\therefore \omega = \frac{\sqrt{\int_0^L g y dx}}{\sqrt{\int_0^L y^2 dx}} \quad \therefore \omega^2 = \frac{g \int_0^L y dx}{\int_0^L y^2 dx}$$

$$\text{Natural frequency } f_n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g \int_0^L y dx}{\int_0^L y^2 dx}} \dots\dots\dots(5-16) \therefore$$

1- عندما يكون العمود مُسند (a simply supported) فإن الأحناء الأستاتيكي عند مسافة x من النقطة A يعبر عنه بالعلاقة التالية:

$$y = \frac{w}{24EI} (x^4 - 2Lx^3 + L^3x) \dots\dots\dots(5-17)$$

حيث w هي الحمل على وحدة الطول للعمود ، E معامل يانج لمعدن العمود Young's modulus for the material of the shaft ويمكن أستنتاج ذلك من مقاومة المواد حيث أن أقصى عزم أنحناء عند المسافة x من النقطة (الطرف) A يعبر عنه بالعلاقة:

$$\therefore E.I. \frac{dy}{dx} = \frac{wx^3}{2(3)} - \frac{wLx^2}{2(2)} + c_1$$

بالتكامل نجد أن:

$$\therefore E.I.y = \frac{wx^4}{2(3)(4)} - \frac{wLx^3}{2(2)(3)} + c_1x + c_2$$

$$= \frac{wx^4}{24} - \frac{wLx^3}{12} + c_1x + c_2 \dots\dots\dots(5-18)$$

حيث c_1 و c_2 هي ثوابت التكامل ويمكن أيجادهم من الظروف أو الشروط المعطاه كما يلي:

$$\text{at } x=0, y=0 \quad \therefore c_2 = 0$$

$$\text{at } x=L, y=0, \quad \therefore c_1 = \frac{wL^3}{24}$$

وبالتعويض عن c_2 و c_1 في المعادلة (5) ينتج نفس المعادلة (4).

$$y = \frac{w}{24EI} [x^4 - 2Lx^3 + L^3x] \dots\dots\dots(5-18)$$

حيث w هي الحمل منتظم التوزيع لوحدة الطول.

E هي معامل يانج للمرونة لمادة العمود (young's modulus)

I عزم القصور الذاتي للعمود

وبتكامل المعادلة (5-17) نحصل على:

$$\begin{aligned} \int_0^L y dx &= \frac{w}{24EI} \int_0^L (x^4 - 2Lx^3 + L^3x) dx \\ &= \frac{w}{24EI} \left[\frac{x^5}{5} - \frac{2Lx^4}{4} + \frac{L^3x^2}{2} \right]_0^L \\ \therefore \int_0^L y dx &= \frac{w}{24EI} \left[\frac{L^5}{5} - \frac{2L^5}{4} + \frac{L^5}{2} \right] = \frac{w}{24EI} \cdot \frac{L^5}{5} = \frac{wL^5}{120EI} \dots\dots\dots(5-19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^L y^2 dx &= \left(\frac{w}{24EI} \right)^2 \int_0^L (x^4 - 2Lx^3 + L^3x)^2 dx \\ &= \frac{w^2}{576E^2I^2} \left[\frac{x^9}{9} + \frac{4L^2x^7}{7} + \frac{L^6x^3}{3} - \frac{4Lx^3}{8} - \frac{4L^4x^5}{5} + \frac{2L^3x^6}{6} \right]_0^L \\ &= \frac{w^2}{576E^2I^2} \left(\frac{31L^9}{630} \right) \dots\dots\dots(5-20) \end{aligned}$$

بالتعويض في f_n من المعادلة (5-16) في كل من المعادلتين (5-19) (5-20).

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{g \left(\frac{wL^5}{120EI} \times \frac{576E^2I^2(630)}{w^2 \times 31L^9} \right)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{24EI}{wL^4} \times \frac{(630)}{155} (g)} \dots\dots\dots(5-21) \end{aligned}$$

وبذلك يمكن أستنتاج Δ_{st} من العلاقة

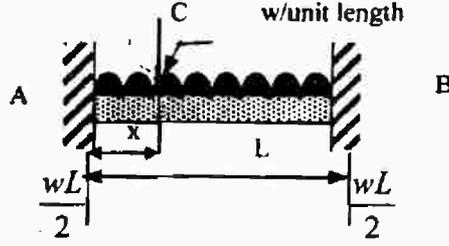
$$\Delta_{st} = \frac{5}{384} \cdot \frac{wL^4}{EI} \dots\dots\dots(5-22)$$

$$\therefore f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{24 \left(\frac{5}{384\Delta_{st}} \right) \times \frac{630}{155} g}$$

$$\therefore f_n = \frac{5.623}{\sqrt{\Delta_{st}}} \quad \text{at } g = 981 \text{ cm/sec}^2 \dots\dots\dots(5-23)$$

5- التردد الطبيعي للأمتزازات العرضية الحرة لعمود مثبت من طرفيه وتحت حمل منتظم التوزيع

Natural frequency of free transverse vibration of a shaft fixed at both ends carrying a uniformly distributed load.



الشكل (5-7)

نعتبر أن العمود AB مثبت من طرفيه وتحت حمل منتظم التوزيع مقداره w لكل وحدة طول
 ∴ الانحناء الاستاتيكي y_c عند مسافة x من الطرف A يعين من العلاقة:

$$y_c = \frac{w}{24EI} (x^4 + L^2 x^2 - 2Lx^3) \dots \dots \dots (5-24)$$

∴ بالتكامل نحصل على

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^L y_c dx &= \frac{w}{24EI} \int_0^L (x^4 + L^2 x^2 - 2Lx^3) dx \\ &= \frac{w}{24EI} \left[\frac{x^5}{5} + \frac{L^2 x^3}{3} - \frac{2Lx^4}{4} \right]_0^L = \frac{wL^5}{720EI} \end{aligned}$$

ويمكن إستنتاج المعادلة (5-24)

باعتبار أن عزم الانحناء M_c عند نقطة على مسافة x من الطرف A

$$M_c = EI \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{wL^2}{12} + \frac{wx^2}{2} - \frac{wLx}{2}$$

وبالتكامل نحصل على:

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{wL^2}{12} x + \frac{wx^3}{(2)(3)} - \frac{wLx^2}{(2)(2)} + c_1 \dots \dots \dots (5-25)$$

حيث c_1 ثابت التكامل وعندما $x=0$ فإن $\frac{dy}{dx} = 0$ وبذلك نجد أن $c_1 = 0$

$$\therefore EI \frac{dy}{dx} = \frac{wL^2}{12} x + \frac{wx^3}{6} - \frac{wLx^2}{4}$$

وبالتكامل مرة أخرى:

$$\therefore EI \cdot y = \frac{wL^2 x^2}{(12)(2)} + \frac{wx^4}{(6)(4)} - \frac{wL}{4} \left(\frac{x^3}{3} \right) + c_2$$

$$= \frac{wL^2x^2}{24} + \frac{wx^4}{24} - \frac{wLx^3}{12} + c_2 \dots \dots \dots (5-26)$$

حيث $c_2 = 0$ هي ثابت التكامل ونجد أن عندما $x=0$ فإن $y=0$ وبذلك يكون

$$\therefore EI \cdot y = \frac{w}{24} [L^2x^2 + x^4 - 2Lx^3]$$

$$\therefore y = y_c = \frac{w}{24EI} (x^4 + L^2x^2 - 2Lx^3)$$

$$\therefore \int_0^L y_c^2 dx = \left(\frac{w}{24EI} \right)^2 \int_0^L (x^4 + L^2x^2 - 2Lx^3)^2 dx$$

$$= \left(\frac{w}{24EI} \right)^2 \int_0^L (x^8 + L^4x^4 + 4L^2x^6 + 2L^2x^6 - 4Lx^7 - 2L^3x^9) dx$$

$$= \left(\frac{w}{24EI} \right)^2 \left[\frac{x^9}{9} + \frac{L^4x^5}{5} + \frac{6L^2x^7}{7} - \frac{4Lx^8}{8} - \frac{2L^3x^9}{9} \right]_0^L$$

$$= \left(\frac{w}{24EI} \right)^2 \left[\frac{L^9}{630} \right]$$

$$\therefore \omega^2 = \frac{g \int_0^L dx}{\int_0^L y^2 dx} = g \left(\frac{wL^5}{720EI} \right) \left[\frac{(24EI)^2 \times 630}{w^2L^9} \right]$$

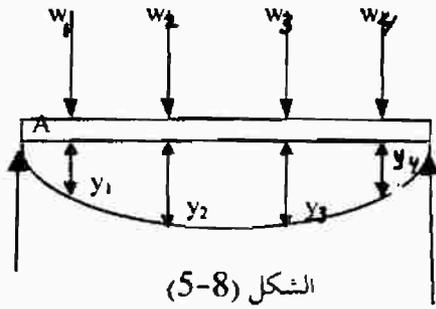
$$\therefore \omega = \sqrt{\frac{504EIg}{wL^4}} \dots \dots \dots (5-27)$$

$$\therefore f_n = \frac{\omega}{2\pi} = 3.573 \sqrt{\frac{EIg}{wL^4}} \dots \dots \dots (5-28)$$

$$\Delta_n = \frac{w \cdot L^4}{384EI} \dots \dots \dots (5-29)$$

$$\therefore f_n = \frac{4.3117}{\sqrt{\Delta_n}} \text{ where } g=981 \text{ cm/sec}^2 \dots \dots \dots (5-30)$$

6- التردد الطبيعي للأهتزازات العرضية الحرة لعمود موضوع تحت عدد من الأحمال و المؤثر كل منها في نقطة Natural frequency of free transverse vibration for a shaft subject to a number of point loads



نعتبر أن العمود AB مهمل الوزن وموضوع تحت عدد من الأحمال والتي تؤثر كل منها في نقطة كما في الشكل (5-8) والمطلوب إيجاد التردد الطبيعي بطريقتين:

1- طريقة الطاقة أو طريقة رايلى Energy method or (Rayleigh's method).

2- طريقة دنكرلي Dunkerley's method.

أولاً: طريقة الطاقة أو طريقة رايلى.

نعتبر أن الانحناء الكلي تحت تأثير الأحمال W_1, W_2, W_3, W_4 على الترتيب كما بالشكل (5-8) وبذلك فإن أقصى طاقة وضع يعبر عنها بالعلاقة:

$$(P.E.)_{\max} = \frac{1}{2}W_1y_1 + \frac{1}{2}W_2y_2 + \frac{1}{2}W_3y_3 + \dots = \frac{1}{2} \sum Wy \dots$$

وأقصى حركة يعبر عنها بالعلاقة التالية

$$(K.E.)_{\max} = \frac{1}{2} \frac{W_1}{g} (\omega \cdot y_1)^2 + \frac{1}{2} \frac{W_2}{g} (\omega \cdot y_2)^2 + \frac{1}{2} \frac{W_3}{g} (\omega \cdot y_3)^2 + \dots =$$

$$= \frac{\omega^2}{2g} (W_1y_1^2 + W_2y_2^2 + W_3y_3^2 + \dots) = \frac{\omega^2}{2g} \sum Wy^2$$

حيث ω هي التردد الدوري للأهتزاز circular frequency of vibration.

وطريقة الطاقة أو طريقة ريبلايت توضح إن أقصى وضع تساوي أقصى طاقة حركة أي أن:

$$(P.E.)_{\max} = (K.E.)_{\max}$$

$$\therefore \omega^2 = \frac{g \cdot \sum Wy}{\sum Wy^2}$$

$$\therefore \omega = \sqrt{\frac{g \sum Wy}{\sum Wy^2}} \dots \dots \dots (5-31)$$

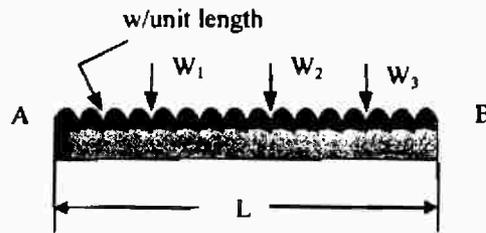
$$\therefore f_n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g \sum Wy}{\sum Wy^2}} \dots \dots \dots (5-32)$$

ثانيا: طريقة دنكرلي Dunkerley's method

التردد الطبيعي للأهتزاز العرضي للعمود الموضوع تحت حمل منتظم التوزيع وعدد من الأحمال التي يؤثر كل منها في نقطة.

$$\frac{1}{f_n^2} = \frac{1}{f_{n_1}^2} + \frac{1}{f_{n_2}^2} + \frac{1}{f_{n_3}^2} + \dots + \frac{1}{f_{n_s}^2}$$

حيث f_n هي التردد الطبيعي للأهتزاز العرضي للعمود الموضوع تحت حمل منتظم التوزيع وعدد من الأحمال المؤثر كل منها في نقطة حيث $f_{n_1}, f_{n_2}, f_{n_3}, \dots, etc$ هي التردد الطبيعي للأهتزاز العرضي لكل نقطة عليها حمل وأن f_{n_s} هي التردد الطبيعي للأهتزاز العرضي للحمل منتظم التوزيع أو نتيجة لوزن العمود.



الشكل (5-9)

أعتبر أن $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, etc$ هي الأحناء الأستاتيكي نتيجة الأحمال W_1, W_2, W_3 ، Δ_s هي الأحناء الأستاتيكي نتيجة الحمل منتظم التوزيع أو وزن العمود.

∴ يكون التردد الطبيعي للأهتزاز العرضي نتيجة الحمل المنتظم الأول W_1 يعبر عنه بالعلاقة:

$$f_{n_2} = \frac{4.987}{\sqrt{\Delta_2}} \dots \text{c.p.s.}, f_{n_1} = \frac{4.987}{\sqrt{\Delta_3}} \dots \text{c.p.s.}, f_{n_s} = \frac{4.987}{\sqrt{\Delta_1}} \text{ c.p.s}$$

وبذلك يكون التردد الطبيعي للأهتزاز العرضي نتيجة الحمل الموزع أو وزن العمود

$$f_n = \frac{5.623}{\sqrt{\Delta_s}} \text{ c.p.s.} \dots \dots \dots (5-33)$$

لذلك فإنه طبقا لعلاقة دنكرلي Dunkerley's empirical formula فإنه يمكن إيجاد التردد الطبيعي للمنظومة بالعلاقة التالية:

$$\frac{1}{f_n^2} = \frac{1}{f_{n_1}^2} + \frac{1}{f_{n_2}^2} + \frac{1}{f_{n_3}^2} + \dots + \frac{1}{f_{n_s}^2}$$

$$\frac{1}{(4.987)^2} [\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \dots + \Delta_s]$$

$$f_n = \frac{4.987}{\sqrt{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \dots + \frac{\Delta_s}{1.27}}} \text{ c.p.s}$$

ملاحظات:

1- عندما لا يوجد حمل منتظم التوزيع أو وزن للعمود فإن $\Delta_s = 0$ ويعين التردد الطبيعي من العلاقة:

$$\therefore f_n = \frac{4.987}{\sqrt{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \dots}} \text{ c.p.s}$$

2- القيم $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, etc$ للعمود بسيط مسند a simple supported shaft نعين من العلاقة:

$$\Delta = \frac{WL_1L_2}{3EI L} \dots \dots \dots (5-34)$$

حيث:

Δ = Static deflection due to load W الانحناء الاستاتيكي نتيجة الوزن

L_1 and L_2 = distance of load from the two ends بعد الحمل عن كل من طرفيه

E = Young's modulus for the material of the shaft معامل يانج لمادة العمود

I = Area moment of inertia of the shaft عزم القصور الذاتي للعمود

L = Total length of the shaft = $L_1 + L_2$ الطول الكلي للعمود

3- عزم اللي المؤثر (T) يعين من:

$$T = \frac{J.G}{L} \cdot \theta \dots \dots \dots (5-35)$$

J = Polar moment of inertia of the shaft cross-section

$$J = \frac{\pi D^4}{32}$$

G = Modulus of rigidity for the shaft material معاير أو معامل الصلادة لمادة العمود

T = عزم اللي المؤثر , θ = زاوية الانحراف , L = طول العمود , D = قطر العمود

(1)-A shaft 12 cm diameter and 140 cm long has one of its end fixed and the other end carries a disc of weight 600Kg. The young's modulus for the material of the shaft is $2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$. Determine the frequency of longitudinal.

1- عمود قطره 12 cm وطوله 140 cm مثبت من أحد طرفيه والطرف الآخر يحمل قرص وزنه 600kg فإذا كان معامل المرونة (the young's modulus) $2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ أوجد التردد الطبيعي

للأهتزاز الطولي the longitudinal vibration والأهتزاز العرضي Transverse vibration

الحل:

$$\therefore d = 12 \text{ cm} \text{ و } I = \text{the moment of inertia} = \frac{\pi}{4} d^4$$

$$\therefore A = \frac{\pi}{4} d^2 = \frac{\pi}{4} (12)^2 = 36\pi \text{ cm}^2 , I = \frac{\pi}{4} d^4 = \frac{\pi}{4} (12)^4 = 1017.36 \text{ cm}^4$$

(i)-Frequency of longitudinal vibration التردد الطبيعي للأمتزاز الطولي

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\Delta}} \text{ c.p.s} \quad , \quad g = 981 \text{ cm/sec}^2 \therefore f_n = \frac{\sqrt{981}}{2\pi\sqrt{\Delta}} = \frac{4.987}{\sqrt{\Delta}}$$

$$\therefore \Delta = \frac{WL}{AE} \therefore \Delta = \frac{600 \times 140}{36\pi(2 \times 10^6)} = 0.00037 \text{ cm} \therefore f_n = \frac{4.987}{\sqrt{0.00037}} = 258 \text{ c.p.s}$$

(ii)-Frequency of transverse vibration التردد الطبيعي للأمتزاز العرضي

$$\therefore \Delta = \frac{WL^3}{3EI} = \frac{600(140)^3}{3(2 \times 10^6)(1017.36)} = 0.27 \text{ cm} \quad , \quad f_n = \frac{4.981}{\sqrt{0.27}} = 9.5 \text{ cycle/sec}$$

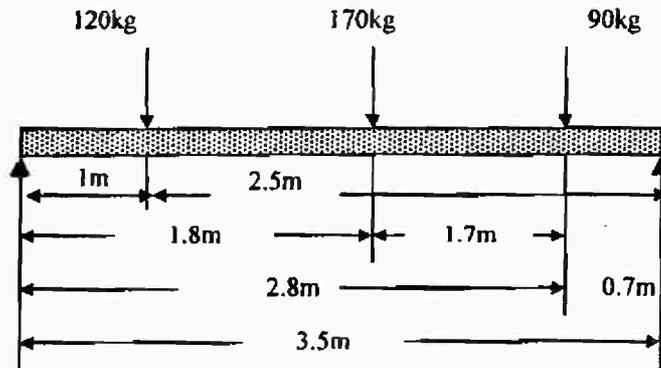
(2)-A shaft 6 cm diameter and 3.5 meters long is simply supported at the ends and carries three weights 120kg, 170kg, 90kg at 1m, 1.8m, and 2.8m from the left support. The young's modulus for shaft material is $2 \times 10^6 \text{ kg/m}^2$. Find the frequency of transverse vibration.

1- عمود قطره 6 cm ، وطوله 5m مسند عند طرفيه ومحمل عليه بثلاث قوى 120kg, 170kg, 90kg على مسافة 1 m , 1.8 m , 2.8 m على الترتيب وذلك من المسند الأيسر. معامل المرونة لمادة العمود $2 \times 10^6 \text{ kg/m}^2$ أوجد التردد للأمتزاز العرضي.

الحل:

$$\therefore d = 6 \text{ cm} \quad \text{و} \quad I = \text{Area moment of inertia of the shaft} = \frac{\pi}{64} d^4$$

$$\therefore I = \frac{\pi}{64} (6)^4 = 63.6 \text{ cm}^4$$



الشكل (10-5)

$$\therefore l = 3.5 \text{ m} , \Delta = \text{The static deflection due to point load of } W = \frac{W l_1^2 l_2^2}{3EI}$$

$$\text{Where } l_1 = 1.2 \text{ m} = 120 \text{ cm}$$

$$l_2 = l - l_1 = 350 - 100 = 250 \text{ cm}$$

$$\therefore \text{Static deflection due to 120kg} = \Delta_1 = \frac{120(100)^2(250)^2}{3(2 \times 10^6)(63.6)(350)} = 0.56 \text{ cm}$$

$$\Delta_2 = \text{Static deflection due to } 170\text{kg} = \frac{170(180)^2(170)^2}{3(2 \times 10^6)(63.6)(350)} = 1.2\text{cm}$$

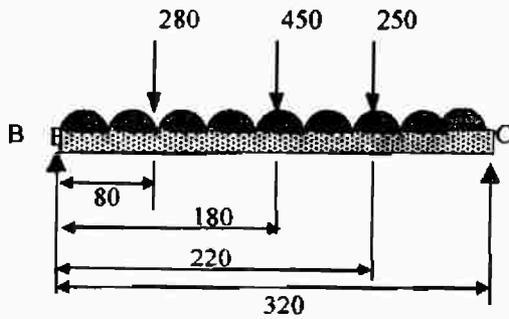
$$\Delta_3 = \text{Static deflection due to } 90\text{kg} = \frac{90(280)^2(70)^2}{3(2 \times 10^6)(63.6)(350)} = 0.26\text{cm}$$

Frequency of transverse vibration = $f_n = \frac{4.987}{\sqrt{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3}}$ with usual notations.

$$\therefore f_n = \frac{4.987}{\sqrt{0.56 + 1.2 + 0.26}} = \frac{4.987}{1.42} = 3.51\text{ cycle/sec}$$

(3)-A shaft 16cm diameter is supported in two bearings 320cm apart. It carries three discs of weight 280kg, 450kg, and 250kg at 80cm, 180cm and 220cm from the left hand. Assuming the shaft to weight 2kg/cm length, determine the critical speed of the shaft. Young's modulus for the material of the shaft is $2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$.

3-عمود قطره 18cm مسند من طرفيه على كرسين تحمل (two bearings) على مسافة 320cm ويحمل ثلاثة أقراص وزنهم على الترتيب 280kg ، 450kg ، 250kg وعلى مسافة 80cm ، 180cm ، 220cm على الترتيب من الجانب الأيسر. أفرض أن وزن العمود لكل وحدة طول. أوجد السرعة الحرجة للعمود إذا علم أن معامل المرونة لمعدن العمود $2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$.



الشكل (11-5)

$$\therefore d = 16\text{cm}$$

$$\therefore I = \frac{\pi}{64} d^4 = \frac{\pi}{64} (16)^4 = 3215.4\text{cm}^4$$

$$\therefore l = 320\text{cm} = \text{طول العمود}$$

$$\therefore \text{weight of the disc at } 80\text{cm from (B)} = W_1 = 280\text{kg}.$$

$$\text{weight of the disc at } 180\text{cm from (B)} = W_2 = 450\text{kg}.$$

$$\text{weight of the disc at } 220\text{cm from (B)} = W_3 = 250\text{kg}.$$

$$\therefore \text{Weight of the shaft } w = 2\text{kg/cm length, } E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}$$

$$\therefore \text{The static deflection due to a weight } W = \Delta = \frac{Wl_1^2 l_2^2}{3EIL}$$

$$\therefore \Delta_1 \text{ due to } 280\text{kg} = \frac{280(80)^2(240)^2}{3(2 \times 10^6)(3215.4)(320)} = 0.017\text{cm}$$

$$\text{Where } l_1 = 80\text{cm, } l_2 = 240\text{cm}$$

$$\Delta_2 \text{ due to } 450\text{kg} = \frac{450(180)^2(140)^2}{3(2 \times 10^6)(3215.4)(320)} = 0.046\text{cm}$$

$$\Delta_3 \text{ due to } 250\text{kg} = \frac{250(220)^2(100)^2}{3(2 \times 10^6)(3215.4)(320)} = 0.0196\text{cm}$$

وأيضا نجد أن الانحراف الاستكاثيكي نتيجة الحمل منتظم التوزيع Δ_s uniformly distributed load

$$\therefore \Delta_s = \frac{5}{348} \cdot \frac{wl^4}{EI} = \frac{5}{458} \cdot \frac{2(320)^4}{2 \times 10^6 \times 3215.4} = 0.047 \text{ cm}$$

N_c = The critical speed in r.p.m = $f_n(60)$ نعين السرعة الحرجة للعمود من العلاقة

Where f_n = Natural frequency of the transverse in rev./sec

$$\therefore f_n = \frac{4.987}{\sqrt{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \frac{\Delta_s}{1.27}}} \text{ with usual notations}$$

$$\therefore f_n = \frac{4.987}{\sqrt{0.017 + 0.046 + 0.0196 + \frac{0.047}{1.27}}} = \frac{4.987}{0.3458} = 14.42 \text{ rev/sec}$$

$$\therefore N_c = f_n(60) = 14.42(60) = 865 \text{ r.p.m}$$

ثالثا: الأهتزاز الأتوائي Torsional Vibration (التذبذبات الأتوائية لأعمدة الإدارة)

1- إيجاد التردد الطبيعي للأهتزازات الأتوائية الحرة

Natural frequency of free torsional vibrations

إذا أعطي جسم (قرص مثبت في الطرف الحر للعمود) كما بالشكل (5-12)

أزاحة زلوية صغيرة (θ) فإنه يتولد

داخله عزم كامن يسمى بعزم اللي الكامن

the restoring torque وعند اعتناق

القرص يتحول العزم الكامن إلى طاقة

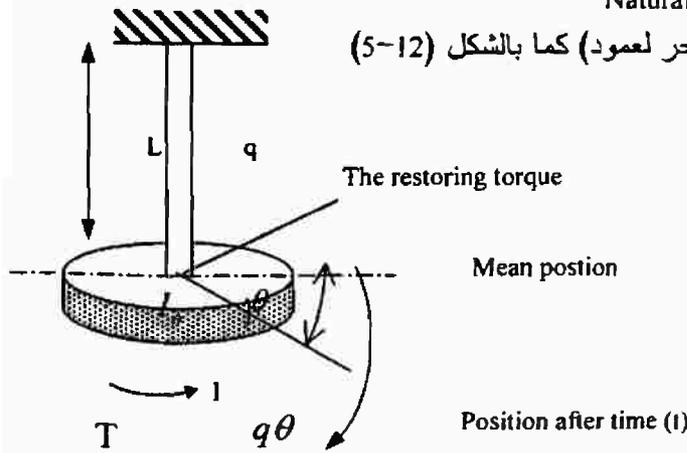
حركية تجعل العمود يتذبذب حول

المحور الرأسي وبالتالي يتولد عزم لبي

أسترجاعي (رجوعي) يعمل على إيقاف

القرص عند وضع التعادل الجديد نتيجة

تحول الطاقة الحركية إلى طاقة كامنة في



الشكل (5-12)

القرص ويكون اتجاه عزم اللي الكامن مساوي في المقدار ومضاد في الاتجاه لعزم اللي الأسترجاعي،

ومن ذلك نستنتج مايلي:

عزم اللي الأسترجاعي = $I\ddot{\theta}$

\therefore عزم اللي الكامن = $q\theta$

$$\therefore I\ddot{\theta} = -q\theta$$

$$\therefore I\ddot{\theta} + q\theta = 0$$

$$\therefore \ddot{\theta} + \frac{q}{I}\theta = 0 \dots \dots \dots (5-36)$$

$$\text{where } \omega_n = \sqrt{\frac{q}{I}} \quad , \quad f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$$

عزم القصور الذاتي للقرص $I = \frac{W}{g} R_g^2$ و معامل الأكتواء للعمود

q = Torsional stiffness of the shaft

و الأزاحة الزاوية للعمود θ = Angular displacement of the shaft , نصف قطر الحركة الترددية

R_g = Radius of gyration

ويمكن إيجاد q من العلاقة التالية:

$$\begin{aligned} \therefore \frac{T}{J} &= \frac{C\theta}{L} \quad \therefore \frac{T}{\theta} = \frac{CJ}{L} = q \quad , \quad \therefore q = \frac{I_p E}{L} = \frac{\pi d^4 E}{32L} \\ \therefore q &= \frac{T}{\theta} = \frac{CJ}{L} = \frac{\pi d^4 E}{32L} \dots\dots\dots(5-37) \end{aligned}$$

J = Polar moment of inertia of the shaft cross-section

L = Length of the shaft

E or C = Modulus of rigidity for the shaft material معامل الجساءة لمادة العمود

ملاحظات:

أ- في حالة القرص المنتظم السمك وقطره D يكون عزم القصور الذاتي له I ويمكن تعيينه من العلاقة

$$I = \frac{WD^4}{8g} \dots\dots\dots(5-38)$$

حيث W وزن القرص ، D قطر القرص

$$\therefore f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{q}{I}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi g d^4 \cdot E}{4WD^2}}$$

حيث d قطر العمود ، D قطر القرص.

ب- إذا كان العمود يتكون من جزئين طولهما L_1, L_2 وأقطارهما d_1, d_2 ويكون تحت تأثير عزم M_1 فإن زاوية اللي ϕ وطول العمود يمكن تعيينهم من العلاقاتين :-

$$\phi = \frac{32M_1}{\pi d_1^4 E} \left[L_1 + L_2 \frac{d_1^4}{d_2^4} \right] \dots\dots\dots(5-39)$$

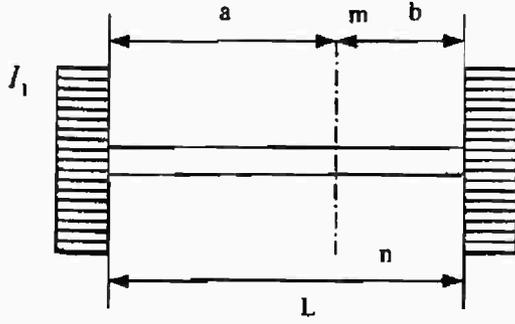
$$L = L_1 + L_2 \frac{d_1^4}{d_2^4} \dots\dots\dots(5-40)$$

ج- إذا كان العمود يتكون من عدة أجزاء مختلفة الأقطار وبدون تغيير في معامل اللي للعمود فلتنا نستبدل أي وضع للعمود عند طول L_n وقطره d_n ويمكن تعيين طول العمود من العلاقة:

$$L = L_n \cdot \frac{d^4}{d_n^4}$$

ويمكن تطبيق ذلك في حالة العمود الذي به جزئين دورانيين في نهايته كما بالشكل

المقابل (5-13) حيث:



الشكل (5-13)

$$\therefore \frac{q_1}{q_2} = \frac{I_1}{I_2} \sqrt{\frac{I_1}{q_1}} = \sqrt{\frac{I_2}{q_2}}$$

حيث q_1, q_2 هما معاملات اللي لكل من الجزئين للعمود

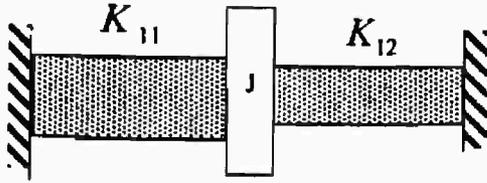
$$\frac{a}{b} = \frac{I_2}{I_1}, L = a + b$$

$$\therefore a = \frac{LI_1}{I_1 + I_2}, \quad b = \frac{LI_2}{I_1 + I_2},$$

$$\therefore f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi d^4 E (I_1 + I_2)}{32 L I_1 I_2}} \dots \dots \dots (5-41)$$

$$l_p = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi \sqrt{\frac{I_1}{q_1}} = 2\pi \sqrt{\frac{32 L I_1 I_2}{\pi d^4 E (I_1 + I_2)}} \dots \dots \dots (5-42)$$

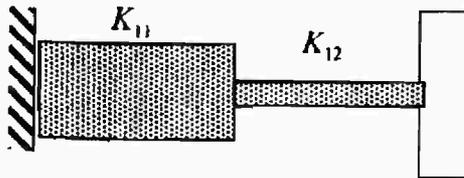
ع- معامل الألتوائى المكافئ للمنظومات الآتية (5-14a,b) يمكن أيجادهم كما يلي:



الشكل (5-14 b)

$$k_{i_e} = k_{i_1} + k_{i_2}$$

$\theta_i = \theta_{total}$ = total deflection of the desk



الشكل (5-14 a)

$$\theta_i = \theta_1 + \theta_2, \therefore \theta = \frac{T}{k_i}$$

$$\therefore \theta_1 = \frac{T}{k_{i_{eq}}} = \frac{T}{k_{i_1}} = \frac{T}{k_{i_2}}$$

$$\therefore \frac{1}{k_{i_{eq}}} = \frac{1}{k_{i_1}} + \frac{1}{k_{i_2}}$$

$$k_{i_{eq}} = \frac{k_{i_1} \cdot k_{i_2}}{k_{i_1} + k_{i_2}}$$

$k_{i_{eq}}$ = Equivalent spring coefficient

(4) A shaft of 12cm diameter and 120cm long has one of its end fixed and the other carries a disc of weight 580kg at a radius of gyration of 50cm. The modulus of rigidity for the shaft material is $0.8 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$. Determine the frequency of torsional vibration.

4- عمود قطره 12سم وطوله 120سم مثبت من أحد طرفيه والطرف الأخر يحمل قرص وزنه 580 كيلوجرام عند منتصف القطر للحركة التذبذبية 50سم، معامل الجساءة لمادة العمود 0.8×10^6 كيلوجرام/سم². أوجد التردد الطبيعي للأهتزاز الأتوائي.

الحل

∴ J = Polar moment of inertia of the shaft.

$$J = \frac{\pi}{32} d^4 = \frac{\pi}{32} (12^4) = 2034.7 \text{ cm}^4$$

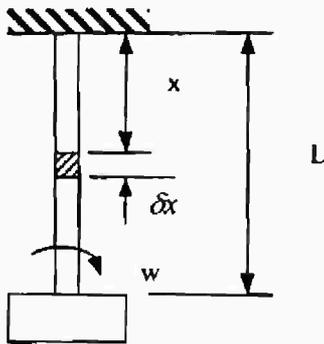
$$I = \frac{w}{g} R_g^2 = \frac{580}{980} (50)^2 = 1478 \text{ Kg.cm.sec}^2$$

$$\text{Torsional stiffness} = q = \frac{CJ}{l} = \frac{0.8 \times 10^6 (20347)}{120} = 13.6 \times 10^6 \text{ Kg/cm}$$

$$\therefore f_n = \text{Frequency of torsional vibratin} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{q}{I}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{13.6(10^6)}{1478}} = 15.3 \text{ Cycle/Sec}$$

2- تأثير عزم القصور الذاتي للعمود على الأهتزازات الأتوائية

Effect of inertia of a constraint on torsional vibrations



الشكل (5-15)

الشكل (5-15) يوضح عمود طوله l ومثبت من أحد طرفيه والطرف الأخر للعمود مثبت فيه قرص ولهذا يسمى بالعمود المقيد بين نقطة التثبيت والقرص.

∴ عزم القصور الذاتي للعنصر δx يعين من العلاقة
Mass moment of inertia of the element =

$$I_{\text{element}} = \frac{w \cdot \delta x}{g} R_g^2 = \frac{w \cdot \delta x}{l} \cdot \frac{w l R_g^2}{g} = \frac{\delta x}{l} \cdot I_c$$

طاقة الحركة المختزنة بالعنصر تعين من العلاقة التالية:

$$(K.E) \text{ possessed by the element} = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta x}{l} \times I_c \right) \left(\frac{\omega}{l} \cdot x \right)^2$$

$$(K.E)_{\text{element}} = \frac{I_c \omega^2 x^2}{2l^3} \delta x$$

وبالتكامل يمكن إيجاد طاقة الحركة الكلية كما يلي:

$$\text{Total kinetic energy of the constraint} = \int_0^l \frac{I_c \cdot \omega^2}{2l^3} \cdot x^2 dx$$

$$= \frac{I_c \omega^2}{2l^3} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^l = \frac{1}{2} \left(\frac{I_c}{3} \right) \omega^2 \dots \dots (5-43)$$

حيث R_g هو نصف قطر الحركة التدويمية ، السرعة الزاوية للعنصر = $\frac{\omega x}{l}$

ω الوزن لوحدة الطول، L طول العمود ، $\frac{I_c}{3}$ عزم القصور الذاتي للعمود ، W_c الوزن الكلي ، ω السرعة الزاوية للطرف الحر .

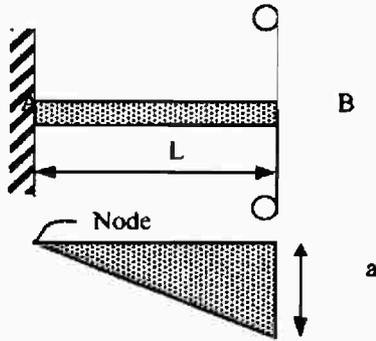
$$I_c = \text{Total mass moment of inertia of constraint} = \frac{W_c}{g} \cdot R_g^2$$

وبالتالي فإنه يمكن إضافة عزم القصور الذاتي الناتج من العمود $\left[\frac{1}{2} \left(\frac{I_c}{3} \right) \omega^2 \right]$ إلى عزم القصور الذاتي للقرص (1) وكذلك يكون التردد الطبيعي للمنظومة على صورة المعادلة:

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{q}{I + \frac{I_c}{3}}} \text{ cycle/sec} \dots \dots (5-44)$$

3- الأهرزازات الألتوائية الحرة لمنظومة ذات دوار واحد

Free torsional vibration of a single rotor system



الشكل (5-16)

نعتبر عمود مثبت من أحد طرفيه والطرف الأخر حر ويحمل دوار (carrying a rotor) والتردد الطبيعي لهذه المنظومة المبينة بالشكل (5-16) يعبر عنه بالعلاقة:

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{I}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{CJ}{II}} \dots (5-45)$$

حيث

$$q = \frac{CJ}{l} \quad , \quad I = \frac{W}{g} R_g^2$$

C = Modulus of rigidity for the shaft material. معامل القص لمادة العمود

J = Polar moment of inertia of the shaft = $\frac{\pi d^4}{32}$ عزم القصور القطبي للعمود

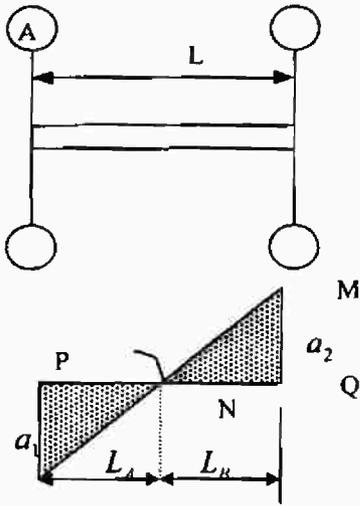
l = طول العمود ، d = diameter of shaft قطر العمود

I = Mass moment of inertia of the rotor الذاتي للدوار

R_g = Radius of gyration نصف قطر الحركة التدويمية

W=weight of rotor وزن الدوار

ونلاحظ أن السعة تساوي صفر عند A ، وتكون أكبر ما يمكن عند B كما مبين بالشكل (5-16) وتسمى النقطة التي تكون عندها السعة مساوية للصفر بالعقدة وعند هذه النقطة لا يتأثر العمود بالأهتزاز .



الشكل (5-17)

B 4- الأهتزاز الأنتوائي لعمود يحمل دورا عند كل من طرفيه Free torsional vibration of a two rotor system

نفترض عمود يحمل دورا واحدا عند كل من طرفيه كما بالمنظومة المبينة بالشكل (5-17)، ويحدث الأهتزاز الأنتوائي فقط عندما يدور الدورانين A ، B في اتجاهين متقابلين (متضادين)، فإذا دار الدوار A في ضد اتجاه عقرب الساعة والدوار B يدور في اتجاه عقارب الساعة في نفس اللحظة (والعكس صحيح) فإنه يلاحظ أن الدورين لهم نفس التردد فنلاحظ أن العقدة (node) تقع عند النقطة N .

ولذلك نفترض أن العمود ينقسم إلى قسمين NQ وPN وكل منهما مثبتان عند نهايتهما ويحمل كل منها دوار عند النهايتين الحرتين، ويمكن إيجاد التردد الطبيعي للأهتزاز الأنتوائي للدوار A والدوار B من العلاقة:

$$f_{n_1} = \frac{1}{2\pi} = \sqrt{\frac{CJ}{L_A J_A}}$$

والقرص B من العلاقة

$$f_{n_2} = \frac{1}{2\pi} = \sqrt{\frac{CJ}{L_B J_B}} \dots \dots \dots (5-46)$$

مع ملاحظة أن $f_{n_1} = f_{n_2}$ وبالتالي ينتج أن:

$$\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{CJ}{L_A J_A}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{CJ}{L_B J_B}}$$

$$\therefore L_A J_A = L_B J_B$$

$$\therefore L_A = \frac{J_B L_B}{J_A} \dots \dots \dots (5-47)$$

حيث طول العمود $L = L_A + L_B$ ويحدد كل من L_B و L_A فإنه يمكن إيجاد f_{n_1}, f_{n_2}

J_A, J_B = Mass moment of inertia of rotor A and B

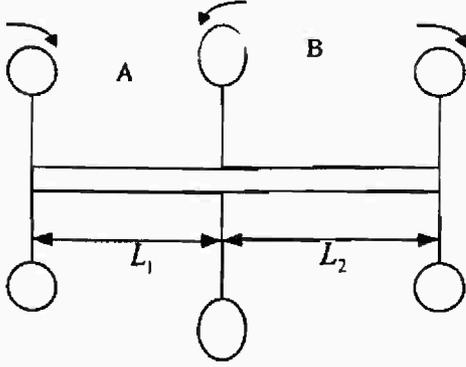
d=Diameter of the shaft

J= Polar moment of inertia of the shaft

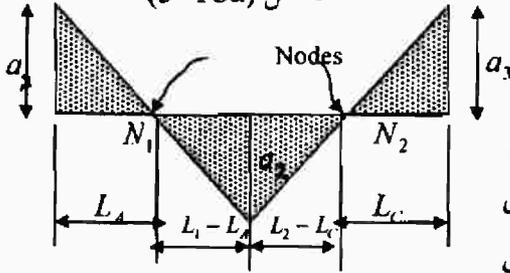
C=Modulus of rigidity for the shaft material

5- الأهرزازات الألتوائية الحرة لمنظومة ذات ثلاث أعضاء دواره

Free torsional vibration of a three rotor system



الشكل (5-18a)



الشكل (5-18b)

المنظومة المبينة بالشكل (5-18a) هي عمود عليه ثلاثة أعضاء دواره وهي (A,B,C)، يحدث الأهرزاز الألتوائي بطريقتين وهما إما عقدة واحدة أو عقدتان، وفي كلا الحالتين فإن الدورانيين يدوران في اتجاه واحد والدوار الثالث يدور في الاتجاه المقابل بنفس التردد، فإذا اعتبرنا أن الدوار A والدوار C بهذه المنظومة يدوران في نفس الاتجاه، بينما الدوار B يدور في الاتجاه المضاد.

وبفرض أن العقدتين تقع عند N_2, N_1 حيث نفرض أن العمود مثبت عند هاتين النقطتين N_2, N_1 ولذلك يكون التردد الطبيعي للدوار A في حالة الأهرزاز الألتوائي يعبر عنه بالعلاقة:

$$f_{n_1} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{CJ}{L_A I_A}} \dots \dots \dots (5-48)$$

وبالنسبة للدوارين (B) ، (C) يكون

$$f_{n_B} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{CJ}{I_B \left(\frac{1}{L_1 - L_A} + \frac{1}{L_2 - L_C} \right)}} \dots \dots \dots (5-49)$$

$$f_{n_C} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{CJ}{L_C I_C}} \dots \dots \dots (5-50)$$

حيث نعوض في حالة العزم المقاوم (the resisting torque) للدوار B بالبعدين $(L_2 - L_C)$ و $(L_1 - L_A)$ بين العقدتين N_1 and N_2 ، لذلك فإن جساءة الألتواء (torsional stiffness) خلال

$$.CJ = \left(\frac{1}{L_1 - L_A} \right) = (L_1 - L_A)$$

وكذلك جساءة الألتواء خلال $(L_2 - L_C)$ $CJ \left(\frac{1}{L_2 - L_C} \right) = (L_2 - L_C)$

∴ معامل الألتواء الكلي للدوار (B) يعين من العلاقة التالية:

$$\therefore \text{Total torsional stiffness of the rotor B} = CJ \left(\frac{1}{L_1 - L_A} + \frac{1}{L_2 - L_C} \right)$$

ونظرا لان التردد الطبيعي سيكون متساوي في كل دوار

$$\therefore f_{n_A} = f_{n_B} = f_{n_C}$$

ومن المعادلتين (5-48) ، (5-50) نجد أن:

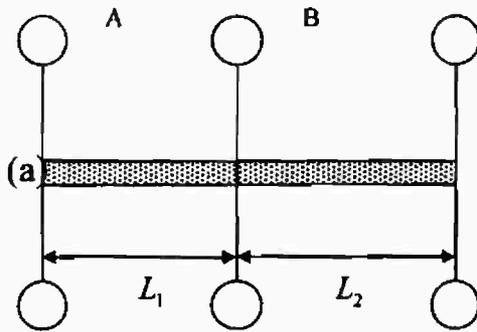
$$L_A I_A = L_C I_C$$

$$\therefore L_A = \frac{L_C I_C}{I_A} \dots \dots \dots (5-51)$$

ومن المعادلتين (2) ، (3) ينتج أن:

$$\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{CJ}{I_B} \left(\frac{1}{L_1 - L_A} + \frac{1}{L_2 - L_C} \right)} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{CJ}{L_C I_C}}$$

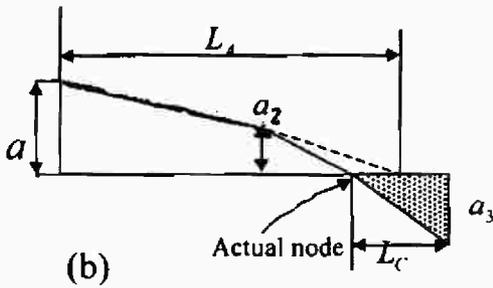
$$\therefore \frac{1}{I_B} = \left(\frac{1}{L_1 - L_A} + \frac{1}{L_2 - L_C} \right) = \frac{1}{L_C I_C} \dots \dots \dots (5-52)$$



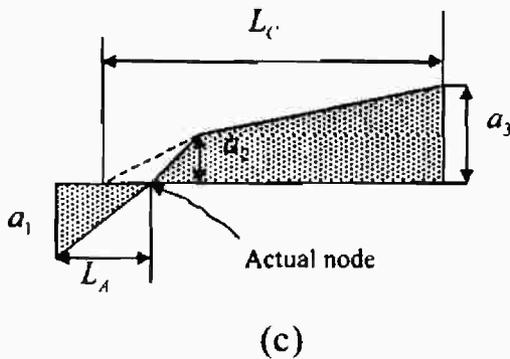
C بالتعويض عن قيمة L_A في المعادلة (5-51) يمكن إيجاد L_C ولذلك فإنه توجد قيمتين لكل من L_A و L_C فإن كل من قيمتي L_A والقيمة المناظرة لها L_C تعطي موضع العقدتين وبذلك فإن التردد يمكن إيجاده بالتعويض عن كل من L_C ، L_A في المعادلتين (5-48) ، (5-50).

ملاحظات:

1- عندما يدور كل من الدوارين A و B في اتجاه واحد والدوار C في إتجاه مضاد لهما فإن الأهتزاز الألتواني يحدث عند عقدة واحدة كما بالشكل (5-19b) وفي هذه الحالة يكون $L_A > L_1$ أي أن العقدة تقع بين الدوار (B) والدوار (C) ولكنها لاتعطي قيمة العقدة الفعلية.



2- عندما يدور الدواران C و B في اتجاه واحد والدوار A يدور في إتجاه مضاد فإن الأهتزاز الألتواني يحدث عند عقدة واحدة كما بالشكل (C) وفي هذه الحالة يكون $L_C > L_2$ ، أي أن العقدة تقع بين الدوار A والدوار B ولكن لاتعطي القيمة الفعلية للعقدة.



الشكل (5-19 a,b,c)

3- عندما تكون سعة الأهتزاز للدوار A معروفة فإن سعة الدوار B تعين من العلاقة:

$$a_2 = \frac{L_A - L_1}{L_A} (a_1) \dots \dots \dots (5-53)$$

وكذلك سعة الدوار C من العلاقة:

$$a_1 = \frac{L_C}{L_C - L_2} (a_2) \dots \dots \dots (5-54)$$

حيث a_1 = Amplitude of rotor A

Torsionally equivalent shaft

6- العمود المكافئ للأنتواء

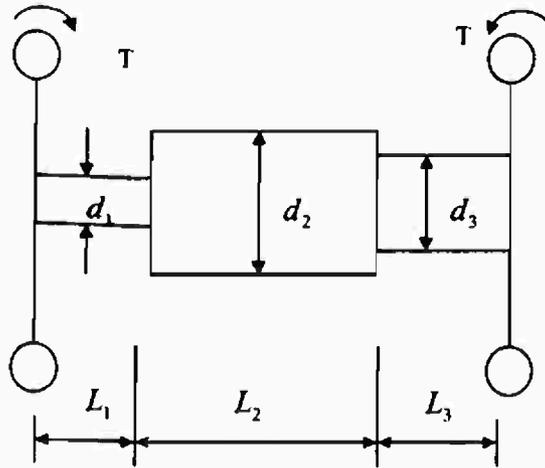
نجد في الحياة العملية أن معظم الأعمدة تكون ذات أقطار مختلفة وأطوال مختلفة، لذلك فإن العمود المتغير الأقطار يمكن تبديله بعمود آخر ذات قطر وطول واحد، ولهذا نأخذ العمود المختلف الأقطار d_1, d_2, d_3 وأطوال L_1, L_2, L_3 على الترتيب كما بالشكل (5-20a)، وهذا العمود يمكن تبديله بعمود آخر ذات قطر واحد d وطول واحد L كما بالشكل (5-20b) ويكون لهم نفس زاوية اللي الكليّة وعندما يطبق على كل دوار عزم مقدار T عند طرفيه وفي اتجاهين متضادين فإن زاوية اللي الكليّة يعبر عنها بالعلاقة الآتية:

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \dots \dots \dots (5-55)$$

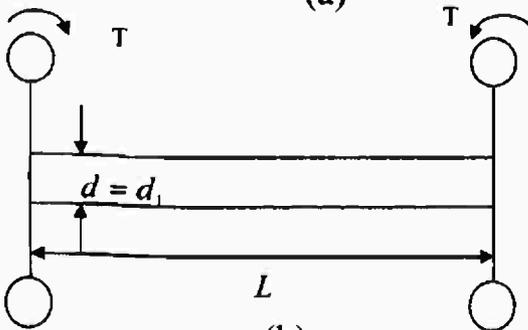
$$\begin{aligned} \therefore \frac{T.L}{CJ} &= \frac{T.L_1}{CJ_1} + \frac{T.L_2}{CJ_2} + \frac{T.L_3}{CJ_3} \\ \therefore \frac{L}{J} &= \frac{L_1}{J_1} + \frac{L_2}{J_2} + \frac{L_3}{J_3} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{L}{\frac{\pi}{32} d^4} = \frac{L_1}{\frac{\pi}{32} d_1^4} + \frac{L_2}{\frac{\pi}{32} d_2^4} + \frac{L_3}{\frac{\pi}{32} d_3^4}$$

$$\therefore \frac{L}{d^4} = \frac{L_1}{d_1^4} + \frac{L_2}{d_2^4} + \frac{L_3}{d_3^4} \dots \dots \dots (5-56)$$



(a)



(b)

مع فرض أن القطر d هو القطر المكافئ للعمود ويساوي أحد الأقطار الفعلية وليكن d_1 أي أن $d = d_1$ وبالتعويض في المعادلة (5-56) ينتج أن طول العمود المكافئ كما بالمعادلة التالية:

الشكل (5-20 a,b)

$$\therefore L = L_1 + L_2 \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^4 + L_3 \left(\frac{d_1}{d_3} \right)^4 \dots\dots(5-57)$$

حيث:

d_1, d_2, d_3 هي أقطار العمود للأطوال L_1, L_2, L_3 على الترتيب.

$\theta_1, \theta_2, \theta_3$ هي زاوية اللي للأطوال L_1, L_2, L_3 على الترتيب .

θ هي زاوية اللي الكلية

J_1, J_2, J_3 هي عزم القصور القطبي عند الأقطار d_1, d_2, d_3 على الترتيب.

5- Two rotors A and B are attached to the end of the shaft 70cm long the weight of the rotor A is 450Kg and its radius of gyration is 44cm. The corresponding values of rotor B are 580Kg and 56cm respectively. The shaft is 6cm diameter for the first 26cm, 12cm for next 20cm and 8cm for the remaining length. Modulus of rigidity for the shaft material is $0.8 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ find:

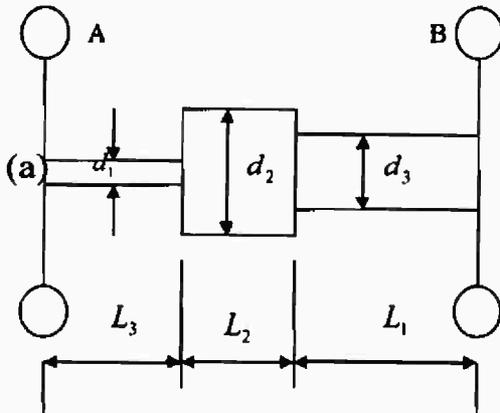
(i)-The position of the node.

(ii)-he frequency of the torsional vibration.

5- الدورانيان A، B متصلين بطرفي عمود طوله 70cm. ووزن الدوران A 450Kg ونصف قطر الحركة التويجية له $R_g = 44\text{cm}$ والدوران B وزنه 580Kg، ونصف قطر الحركة التدرجية له $R_g = 56\text{cm}$ على الترتيب، قطر العمود 6cm خلال الطول 26cm، وقطره 12cm خلال الطول 20cm وقطره 8cm لبقية طول العمود، فإذا كان معامل الجساءة للعمود $C = 0.8 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ أوجد:

(1) موضع العقدة.

(2) التردد الطبيعي للأمتزاز الأتوائي.



$$\therefore W_A = 450 \text{ Kg}, R_{g_A} = 44 \text{ cm}$$

$$\therefore W_B = 580 \text{ Kg}, R_{g_B} = 56 \text{ cm}$$

$$C = 0.8 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$$

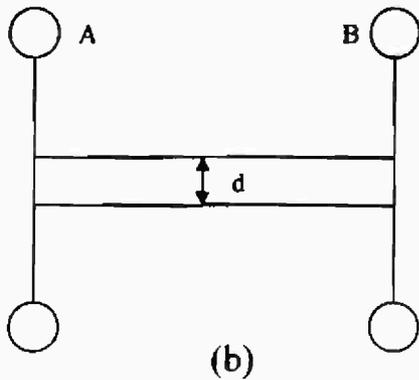
$$\therefore I_A = \frac{W_A}{g} R_{g_A}^2 = \frac{450}{981} (44)^2 = 888 \text{ Kg.cm.sec}^2$$

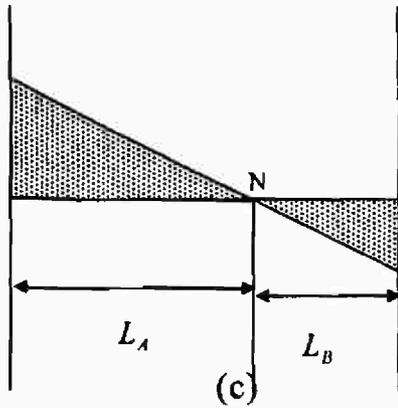
$$I_B = \frac{W_B}{g} R_{g_B}^2 = \frac{580}{981} (56)^2 = 1854.1 \text{ Kg.cm.sec}^2$$

$$d_1 = 6 \text{ cm}, L_1 = 26 \text{ cm}, d_2 = 12 \text{ cm}, L_2 = 20 \text{ cm}$$

$$d_3 = 8 \text{ cm}, L_3 = 24 \text{ cm}$$

الشكل (5-21a) يوضح العمود الفعلي - ولأيجاد المطلوب





نفرض أن $d = d_1$ والتعويض في المعادلة التالية:

$$L = L_1 + L_2 \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^4 + L_3 \left(\frac{d_1}{d_3} \right)^4$$

حيث L هو الطول المكافئ للعمود، J_B, J_A هما

عزم القصور الذاتي لكل من الدوار A والدوار B.

$$\therefore L = 26 + 20 \left(\frac{6}{12} \right)^4 + 24 \left(\frac{6}{8} \right)^4 = 34.84 \text{ cm}$$

لتعيين موضع العقدة: نفرض أن العقدة تقع عند N كما بالشكل

(5-21 c) فيكون L_A هو بعد العقدة عن الدوار A.

. L_B هو بعد العقدة عند الدوار B

$$\therefore L_A \cdot J_A = L_B \cdot J_B \text{ with usual notation}$$

$$\therefore L_A = \frac{L_B \cdot J_B}{J_A} = \frac{1854.1}{888} = 2.1 L_B$$

$$\therefore L_A + L_B = L = 34.84$$

$$\therefore 2.1 L_B + L_B = 43.84 \therefore L_B = 11.24 \text{ cm}$$

$$L_A = L - L_B = 23.6 \text{ cm}$$

العقدة تقع على مسافة 11.24 cm من الدوار A

ولإيجاد التردد الطبيعي للاهتزاز الألتواني نجد أن:

$$f_n = f_{n_1} = f_{n_2}$$

$$\therefore f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{CJ}{L_A \cdot J_A}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{0.8 \times 10^6 \left(\frac{\pi}{32} \right) (6)^4}{23.6 \times 888}} = 11 \text{ cps}$$

6- A steel shaft ABCD 1.8m long has flywheels at its end A and D the weight of the flywheel A is 640Kg and has a radius of gyration of 0.7m, The weight of the flywheel D is 860Kg and has a radius of gyration of 0.95m. The connecting shaft has a diameter of 60mm for portion AB which is 0.5m long and has a diameter of 65mm for the portion BC which is 0.6m long, and has a diameter of d mm for the portion CD which is 0.7m long. Determine:

(a)-The diameter (d) of the portion CD so that the node of the torsional vibration of the system will be at the center of the length BC, and

(b)-The natural frequency of the torsional vibrations, the modulus of rigidity for the shaft material is 80 GN/m^2

6- عمود من الصلب ABCD طوله 1.8m به حدافتان على نهايته A, D وزن الحدافة A 640 كجم

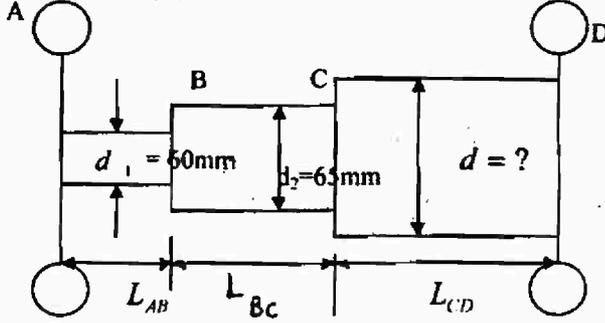
ونصف قطر الحركة التويجية لها 0.75 متر. وزن الحدافة D 860 كجم ونصف قطر الحركة التويجية

لها 0.95 متر ، وصلة العمود AB قطره 60مم وطولها 0.5 متر والوصلة BC قطرها 65مم وطولها

0.6 متر وصلة العمود CD قطرها (d)م وطولها 0.7 متر أوجد:

- أ-القطر (d) للوصلة CD حيث العقدة للأهتزاز العرضي للمنظومة سوف تكون في منتصف الوصلة BC.
ب-التردد الطبيعي للأهتزاز العرضي- مع إعتبار إن معامل الجساءة لمادة العمود $C = 80 \text{ GN/m}^3$.

الحل:



$$L = 1.8\text{m}, W_A = 640\text{Kg}, R_{g_A} = 0.7\text{m}$$

$$W_D = 860\text{Kg}, R_{g_D} = 0.95\text{m}$$

$$d_{AB} = 60\text{mm}, L_{AB} = 0.5\text{m}$$

$$d_{BC} = 65\text{mm}, L_{BC} = 0.6\text{m}, d_{CD} ?$$

$$L_{CD} = 0.7\text{m}$$

$$I_A = \frac{W_A}{g} R_{g_A}^2 = \frac{640}{9.81} (0.7)^2 = 31.97 \text{ Kg.m.sec}^2$$

$$I_D = \frac{W_D}{g} R_{g_D}^2 = \frac{860}{9.81} (0.95)^2 = 79.12 \text{ Kg.m.sec}^2$$

$$L_1 = L_{AB} = 0.5\text{m}, L_2 = L_{BC} = 0.6\text{m}, L_3 = L_{CD} = 0.7\text{m}$$

وبفرض أن الطول المكافئ للعمود (L) وأن قطر العمود

المكافئ $d_1 = 60\text{mm}$

$$\therefore L = L_1 + L_2 \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^4 + L_3 \left(\frac{d_1}{d_3} \right)^4$$

$$\therefore L = 0.5 + 0.6 \left(\frac{60}{65} \right)^4 + 0.7 \left(\frac{60}{d} \right)^4$$

$$\therefore L = 0.5 + 0.44 + \frac{907.2 \times 10^4}{d^4} = 0.94 + \frac{907.2(10)^4}{d^4} \dots (1)$$

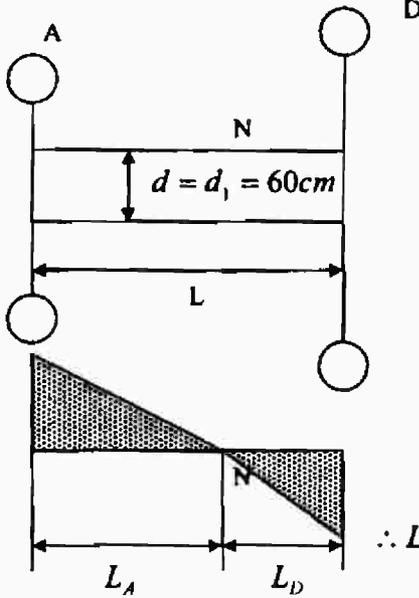
ولتعيين القطر (d) للوصلة CD من العمود وبفرض أن العقدة N للمنظومة المكافئة تقع على مسافة

L_A من الحداقة (A) وعلى مسافة L_D من الحداقة D.

$$\therefore L_A I_A = L_D I_D$$

$$\therefore L_D = L_A \left(\frac{I_A}{I_D} \right) = L_A \left(\frac{31.97}{79.12} \right) = 0.404 L_A$$

ولهذا فإن العقدة تقع في منتصف الطول BC في المنظومة الاصلية للعمود الاصلى.



الشكل (5-22)

$$\therefore L_A = L_1 + \frac{L_2}{2} \left(\frac{d}{d_2} \right)^4 = 0.5 + \frac{0.6}{2} \left(\frac{60}{65} \right)^4 = 0.718 \text{ m} = 71.8 \text{ cm}$$

$$\therefore L_D = 0.404 L_A = 71.8(0.404) = 29 \text{ cm} \dots \dots (2) \quad \therefore L = 0.94 + \frac{907.2(10)^4}{d^4} = 1 \text{ m}$$

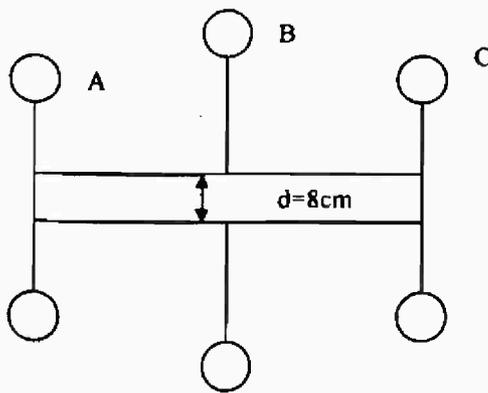
$$\therefore \frac{907.2(10)^4}{d^4} = 0.06 \quad \therefore d = \sqrt[4]{\frac{907.2(10)^4}{0.06}} = 110.9 \text{ mm}$$

$$\therefore f_n = \text{Natural frequency of torsional vibrations} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{CJ}{L_A J_A}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{(80)(10^9) \left[\frac{\pi}{32} (0.06)^4 \right]}{0.718(31.97)}} = 10.6 \text{ Hz}$$

7- A Single cylinder oil engine drives directly a centrifugal pump. The rotating mass of the engine, flywheel and the pump with the shaft is equivalent to three rotor system as shown in fig(5-23) where $d = 8 \text{ cm}$, $L_{AB} = 180 \text{ cm}$, $L_{BC} = 120 \text{ cm}$. The mass moment of inertia of the rotors A, B and C are 1200, 2800 and 700 Kg.cm^2 . Find the natural frequency of the torsional vibration. The modulus of rigidity for the shaft material is $0.84 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$.

7- محرك بنزول مفرد الأسطوانة يدير مباشرة مضخة مركزية وكتلة الجزء الدوار بين المحرك والحدافة والمضخة مع العمود تكافئ منظومة ذات ثلاث دورانيات كما مبين بالشكل (5-23) عزم القصور الذاتي الكتلي للدورانيات A, B, and C هي 1200, 2800, 700 كجم.سم^2 على الترتيب أوجد التردد الطبيعي للاهتزاز الأنتوائي. حيث معامل الجساءة لمادة القضيب $0.84 \times 10^6 \text{ كجم/سم}^2$.



الشكل (5-23)

$$\therefore I_A = \frac{1200}{981} = 1.22 \text{ Kg.cm.sec}^2$$

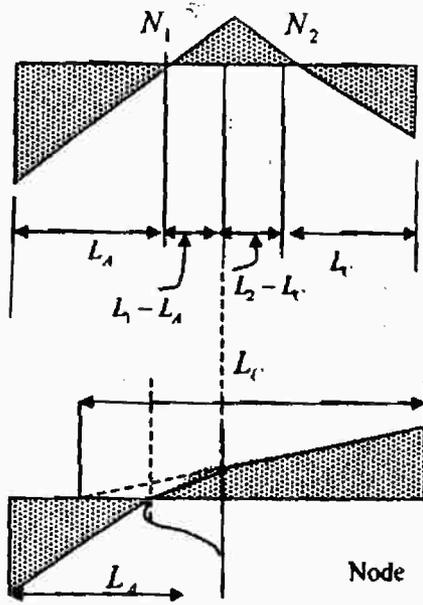
$$I_B = \frac{2800}{981} = 2.85 \text{ Kg.cm.sec}^2$$

$$I_C = \frac{700}{981} = 0.714 \text{ Kg.cm.sec}^2$$

$$\therefore d = \text{diameter of the shaft} = 8 \text{ cm}$$

$$L_1 = L_{AB} = 180 \text{ cm}, L_2 = L_{BC} = 120 \text{ cm}$$

حيث نلاحظ أن L_A هي المسافة بين العقدة N_1 والدوار A، L_C هي المسافة بين العقدة N_2 والدوار C.



الشكل (5-23)

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{L_C \cdot I_C} &= \frac{1}{I_B} = \left[\frac{1}{L_1 - L_A} + \frac{1}{L_2 - L_C} \right] \\ \therefore L_A &= \frac{L_C \cdot I_C}{I_A} = L_C \left(\frac{0.714}{1.22} \right) = 0.59 L_C \\ \therefore \frac{1}{L_C (0.714)} &= \frac{1}{2.85} \left[\frac{1}{180 - 0.59 L_C} + \frac{1}{120 - L_C} \right] \\ \therefore \frac{2.85}{L_C (0.714)} &= \frac{120 - L_C + 180 - 0.59 L_C}{(180 - 0.59 L_C)(120 - L_C)} \end{aligned}$$

$$\frac{3.99}{L_C} = \frac{300 - 1.59 L_C}{0.59 L_C^2 - 250.8 L_C + 21600}$$

$$\therefore L_C^2 - 329 L_C + 21874 = 0$$

$$\therefore L_C = 236.5 \text{ cm}, L_C = 92.5 \text{ cm}$$

$$\therefore L_A = 0.59 L_C$$

$$\text{at } L_C = 236.5 \text{ cm} \rightarrow L_A = 139.54 \text{ cm}$$

$$L_C = 92.5 \text{ cm} \rightarrow L_A = 54.6 \text{ cm at}$$

ونلاحظ أنه عندما تكون $L_C = 92.5 \text{ cm}$ فإن $L_A = 54.6 \text{ cm}$ وهذا يوضح موضع العقدتين كما في الشكل (5-23 b) ونلاحظ أيضاً عندما $L_C = 236.5 \text{ cm}$ فإن $L_A = 139.5 \text{ cm}$ وهذا يعطي العقدة الوحيدة وتكون على بعد $L_A = 139.5 \text{ cm}$ كما بالشكل (5-23 c). ويمكن إيجاد التردد الطبيعي f_n للأمتزاز الأكتواني كما يلي:

$$\text{At } L_A = 139.5 \text{ cm}$$

$$f_{n_1} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{CJ}{L_A \cdot I_A}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{(0.84 \times 10^6) \left[\frac{\pi}{32} (8)^4 \right]}{(139.5)(1.22)}} = 224.3 \text{ Cycle / sec}$$

$$\text{at } L_A = 54.6 \text{ cm}$$

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{(0.84 \times 10^6) \left[\frac{\pi}{32} (8)^4 \right]}{54.6(1.22)}} = 358.5 \text{ cycle / sec}$$

8- Determine the frequency of torsional vibration of a shaft with two circular discs of uniform thickness at the ends in the system as shown in Fig(5-13), if the weights of the discs are $W_1 = 800 \text{ lb}$ and $W_2 = 1600 \text{ lb}$ and their outer diameter are $D_1 = 40 \text{ in}$, ar $D_2 = 75 \text{ in}$ respectively. The length of the shaft is $L = 100 \text{ in}$ and its diameter $d = 5 \text{ in}$. Modulus in shear

$$G = 12 \times 10^6 \text{ lbpersq.in.}$$

8- أوجد التردد الطبيعي للاهتزاز الأنتوائي لعمود متصل به قرصين متماثلين في السمك بنهايته كما بالشكل (5-13). إذا كان الوزن والقطر الخارجي لكل من القرصين هما $D_1 = 40 \text{ in}, D_2 = 60 \text{ in}$ و $W_1 = 800 \text{ lb}, W_2 = 1600 \text{ lb}$ وطول العمود $L = 100 \text{ lb}$ وقطره $d = 5 \text{ in}$ حيث $E = 12 \times 10^6 \text{ lb/in}$

الحل

$$\therefore a = \frac{LI_1}{I_1 + I_2}, \quad I_1 = W_1 \cdot D_1^2 = (800)(40)^2$$

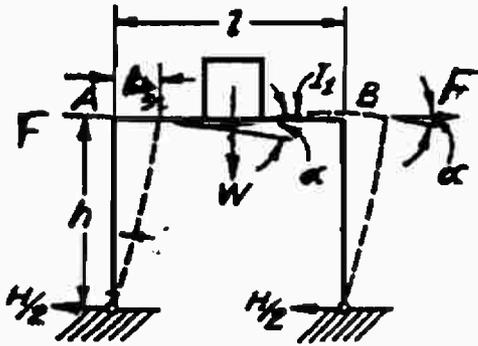
$$I_2 = W_2 \cdot D_2^2 = (1600)(60)^2$$

$$\therefore a = \frac{100(800)(40)^2}{800(40)^2 + (1600)(60)^2} = 18.18 \text{ in}$$

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi g d^4 E}{4W_2 D_2^2 a}} = \sqrt{\frac{\pi(386)(5)^4 \cdot 12 \times 10^6}{4(1600)(60)^2(1818)}} = 32.46 \text{ cycles/sec}$$

9- Determine the period horizontal vibration of the frame, shown in Fig(5-24), supporting a load W applied at the center. The mass of the frame should be neglected in this calculation.

9- أوجد الزمن الدوري للاهتزاز الأفقي للهيكل المبين بالشكل (5-24) حيث وضع حمل W على منتصف الهيكل مع إهمال الهيكل.



الشكل (5-24)

الحل:

نوجد الأزاحة الأفقية للهيكل والتي تقع تحت تأثير القوة الأفقية F وبإهمال الانحناء الناتج من الشد والضغط لأعضاء الهيكل مع الأخذ في الاعتبار فقط الانحناء للعضو AB والذي ينحني بزوج من العزوم مقدار كل منهم $\left(F \cdot \frac{h}{2}\right)$ الزاوية α لدوران

الوصلات A, B تعين من العلاقة:

$$\alpha = \frac{F h L}{12 E I}$$

والانحناء الأفقي يتكون من جزئين أحدهما نتيجة إنحناء الكابولي والثاني نتيجة دوران وصلات الهيكل A, B بزاوية α

$$\Delta_w = \frac{F h^3}{6 E I} + \frac{F h^2 L}{12 E I} = \frac{F h^3}{6 E I} \left(1 + \frac{L I}{2 h I_1}\right)$$

$$\therefore k = \text{The spring constant} = \frac{F}{\Delta} = \frac{6EI}{h^3 \left(1 + \frac{LI}{2hI_1}\right)}$$

$$\tau_p = \text{الزمن الدوري} = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi \sqrt{\frac{Wh^3}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{Wh^3 \left(1 + \frac{LI}{2hI_1}\right)}{6gEI}}$$

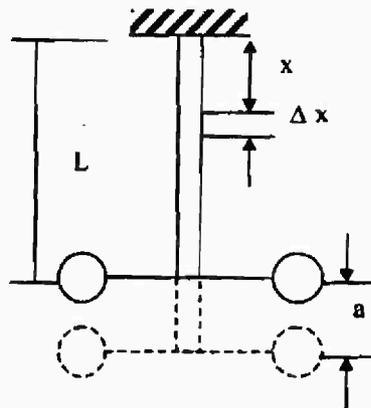
إذا كانت جساءة العضو الألفى من الهيكل كبيراً نسبياً بالمقارنة بجساءة الرأسية فإن $\frac{LI}{2hI_1}$ يمكن إهماله لصغرها.

$$\therefore \tau_p = 2\pi \sqrt{\frac{Wh^3}{6gEI}} \text{ sec}$$

$$\therefore f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{6gEI}{Wh^3}} \text{ c.p.s}$$

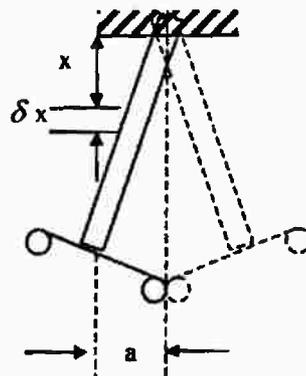
10- For the system shown in Fig(5-25), the weight of the flywheel is 0.4ton, the radius of gyration is 16in., the shaft is 4in. diameter and 5ft. long to the flywheel boss. For the shaft material Young's modulus is 30×10^6 lb. per sq. in. and the modulus of rigidity is 12×10^6 lb. per sq. in. Find the frequency of the free longitudinal, transverse and torsional vibration.

10- المنظومة المبينة بالشكل (5-25) وزن الحدافة 0.4 طن ، ونصف قطر الحركة الترددية 16 بوصة ، وقطر العمود 4 بوصة وطوله 5 قدم إلى صرة الحدافة - ونصف قطر الحركة الترددية $10^6 \times 30$ باوند لكل بوصة مربعة ومعامل الجساءة $10^6 \times 12$ باوند لكل بوصة مربعة. أوجد التردد الطبيعي لكل من الأمتزاز الطولي والعرضي والألتوائي.



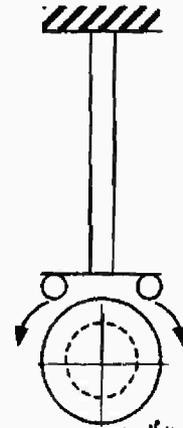
الأهتزاز الطولي

(a)



الأهتزاز العرضي

(b)



الأهتزاز الألتوائي

(c)

الشكل (5-25)

a-Longitudinal vibration الأمتزاز الطولي

$$\Delta = \text{Static extension of the shaft} = \frac{WL}{AE}, A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi}{4} (4)^2 = 12.6m^2$$

$$\therefore \Delta = \frac{0.4(2240)(60)}{\frac{\pi}{4} (4)^2 [30 \times 10^6]} = 0.000143in, \therefore f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{kg}{W}}$$

$$\therefore f_n = \frac{1878}{\sqrt{\Delta}} \text{ c/min} = \frac{187.8}{\sqrt{0.000143}} = 15710 \text{ c/min}$$

b- Transverse vibration الأمتزاز العرضي

$$\therefore \text{Static deflection of cantilever } \Delta = \frac{WL^3}{3EI}$$

$$\therefore \Delta = \frac{0.4(2240)(5 \times 10^3)^3}{3[30 \times 10^6] \frac{\pi}{64} (4)^4} = 0.17$$

$$\therefore f_n = \frac{187.8}{\sqrt{0.17}} = \frac{187.8}{0.4123} = 455 \text{ c.p. min}$$

c- Torsional vibration

$$\therefore J = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$\therefore q = \frac{CJ}{L} = \frac{(12 \times 10^6) \pi (4)^4}{(5 \times 12)(32)} = 5 \times 10^6 \text{ lb/in}$$

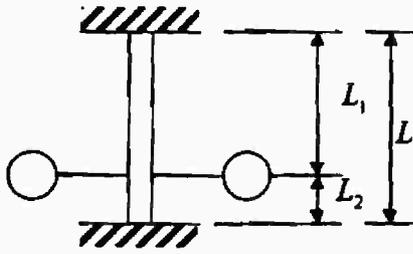
$$\therefore f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{q \cdot g}{W \cdot R_g^2}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{(5 \times 10^6)(32.2)(12)}{[0.4][224](16)^2}} = 46.2 \text{ cps}$$

$$\therefore f_n = 2772.8 \text{ cycle per min.}$$

11- A flywheel is mounted on a vertical shaft as shown in Fig(5-26), the ends of the shaft being fixed. The shaft is 3 in diameter, The length L_1 is 4 ft. and the length L_2 is 3 ft. The flywheel weight 50.6ton and its radius of gyration is 20in. Find the natural frequencies of the longitudinal, the transverse and the torsional vibration of the system. (assume $E = 30 \times 10^6 \text{ lb/in}$)

11- حذافة مركبة على عمود رأسي كما بالشكل (5-26) مثبت من نهايته قطر العمود 3 بوصة ، والطول L_1 4 قدم، والطول L_2 3 قدم ونصق قطر الحركة الترددية 20 بوصة، أوجد التردد الطبيعي لكل من الأمتزاز الطولي والعرضي والألتواشي. أعتبر أن معامل المرونة لمسادة العمود (E) $10^6 (30)$ باوند لكل بوصة مربعة.

أولاً: الأمتزاز الطولي



الشكل (5-26)

باعتبار أن الوزن W_o هو جزء من الوزن الكلي W للحدافة ويؤثر خلال الطول L_1 من العمود ويكون الوزن $(W - W_o)$ هو الوزن المؤثر خلال الطول L_2

$$\therefore \text{The extension of length } (L_1) = \frac{W_o \cdot L_1}{AE}$$

حيث A هي مساحة مقطع العمود، وأن الأتضاغط في

العمود يعين من العلاقة التالية:

$$\text{The compression of the length } (L_2) = \frac{(W - W_o)L_2}{AE}$$

التمدد في العمود خلال (L_1) = الأتضاغط في العمود خلال (L_2)

$$\therefore W_o \cdot L_1 = (W - W_o)L_2$$

$$W_o(4) = (W - W_o)(3) \quad \therefore W_o = \frac{3}{7}W$$

$$\therefore L_1 = \frac{W_o \cdot L_1}{AE} = \frac{\frac{3}{7}(0.6 \times 2240)(4 \times 12)}{\frac{\pi}{4}(3)^2 [30 \times 10^6]} = 0.00013 \text{ in}$$

$$\therefore f_n = \frac{187.8}{\sqrt{0.00013}} = 16474 \text{ C per min.}$$

ثانياً- الأمتزاز العرضي:

الانحراف الاستاتيكي تحت الحمل W يعين من العلاقة التالية:

$$\Delta = \frac{WL_1^3 L_2^3}{3EIL^3} = \frac{(0.6)(2240)(4 \cdot 12)^3 (3 \cdot 12)^3}{3(30 \cdot 10^6) \left[\frac{\pi(3)^2}{64} \right] [7 \cdot 12]^3} = 0.294 \text{ in}$$

$$\therefore f_n = \frac{187.8}{\sqrt{\Delta}} = \frac{187.8}{\sqrt{0.294}} = 346.5 \text{ c.p.m}$$

ثالثاً الأمتزاز الأنتوائي

$$q_1 = \frac{CJ}{L_1}, q_2 = \frac{CJ}{L_2}$$

العزم الكلي المطلوب للحدافة لأنتاج أزاحة زاوية (1 radian)

$$q = q_1 + q_2 = CJ \left[\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right] = (12 \times 10^6) \left[\frac{\pi(3)^2}{32} \right] \left[\frac{1}{12} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right) \right]$$

$$\therefore q = 0.52 \times 10^6 \text{ lb.in}$$

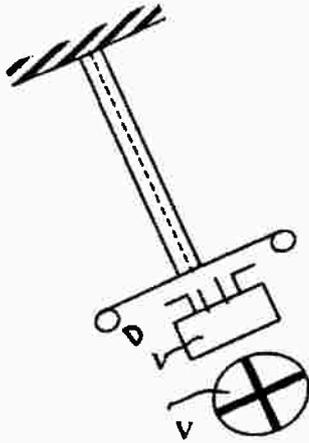
$$\therefore f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{q \cdot g}{W \cdot R_k^2}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{0.52 \times 10^6 \times (32.2 \times 12)}{(0.6 \times 2240)(20)}}$$

$$\therefore f_n = 13.77 \text{ cycle per sec} \\ = 826 \text{ cycle per min.}$$

12- A flywheel of moment of inertia 500 lb.ft² is fixed to one end of a vertical shaft, diameter 1 in. and length 3ft. the other end of the shaft is fixed. The torsional oscillations of the flywheel are damped by means of a vane V, Fig(5-27) which moves in a dashpot D filled with oil. The amplitude of oscillation is found by experiment to diminish to $\frac{1}{20}$ of its initial value in 3

complete oscillations. Assuming the damping torque to be directly proportional to the angular velocity, find its magnitude at a speed of 1 radn.p.s The modulus of rigidity of the shaft material is 12×10^6 lb per sq.in.

12- عزم القصور الذاتي لحدافة 500 باوند. قدم² والمثبتة في نهاية عمود رأسي قطره 1 بوصة وطوله 3 قدم.. الطرف الآخر للعمود ثابت. الأمتزاز الألتوائي للحدافة تم خمدته بواسطة دواره الهواء (V) كما بالشكل (5-27) التي تتحرك في خامد D مملوء بالزيت. وجد سعة الأمتزاز بالتجربة تقل إلى $\frac{1}{20}$ من القيمة البدائية في ثلاث دورات أمتزازية كاملة. إفرض أن عزم الخمد يتناسب مباشرة مع السرعة الزاوية وأوجد قيمته عند سرعة 1 rad.p.sec معامل الجساءة لمادة العمود 10×12^6 باوند لكل بوصة مربعة.



الشكل (5-27)

الحل:

$$\therefore f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{q}{I}}, q = \frac{CJ}{L} = \frac{12(10^6)}{36} \cdot \frac{\pi}{32} (1)^4$$

$$\therefore q = 3.27(10)^4 \text{ lb.in. per radn}$$

$$\therefore f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{(3.27)(10)^4 (32.2 \times 12)}{(500)(12)^2}} = 2.11 \text{ per sec}$$

بالنسبة للأمتزازات ذات الخمد فإن معادلة الحركة لهذه المنظومة يمكن كتابته على صورته المعادلة التالية:

$$I\ddot{\theta} + T_f \dot{\theta} + q\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{T_f}{I} (\dot{\theta}) + \frac{q}{I} (\theta) = 0 \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{Put } a_1 = \frac{T_f}{I} \text{ and } b_1 = \frac{q}{I} = (2\pi f)^2$$

حيث θ هي الأزاحة الزاوية من وضع الأتزان عند الزمن t.

q معامل الألتواء (معامل اللي) للعمود. T_f عزم الخمد لكل وحدة سرعة زاوية.

T_f = damping torque per unit angular velocity.

وحل هذه المعادلة (1) يكون على صورة المعادلة التالية:

$$y = Ae^{-\frac{c}{2m}t} \cdot \cos \sqrt{\omega_n^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} t \dots\dots\dots(2)$$

$$\therefore t_p = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_n^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_n^2 - (\zeta\omega_n)^2}} = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\therefore f_d = \frac{1}{t_p} = \frac{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{2\pi}$$

without damping $c = 0, \zeta = 0, \therefore f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\Delta}}$

وإذا كانت x_1, x_2 هي النسبة بين أي سعتين متتاليتين فيمكن تعيين نسبة السعات أو النسبة بين أي سعتين متتاليتين كما يلي:

$$\therefore \frac{x_1}{x_2} = \frac{Ae^{-\frac{c}{2m}t_1}}{Ae^{-\frac{c}{2m}(t+t_p)}} = e^{\frac{c}{2m}t_p} = e^{\frac{c}{2m} \cdot \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}} = e^{\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

وإذا كانت A هي السعة الابتدائية للأهتزاز الأتوائي وأن a_1, b_1 يمكن التعويض عنها بـ a, b ونكون نسبة السعات عند البداية وعند نهاية ثلاث دورات أهتزازية كاملة يمكن إيجادها من المعادلة التالية:

$$\frac{20}{1} = e^{\frac{a_1}{2}(3t_p)} \quad , \quad \frac{3}{2}a_1t_p = \log_e 20$$

$$\therefore t_p = \frac{2\pi}{\sqrt{b_1 - \left(\frac{a_1}{2}\right)^2}} \quad , \quad \text{where } a_1 = \frac{T_f}{I}, b_1 = \frac{q}{I} = (2\pi f_n)^2$$

$$b_1 = \frac{q}{I} = \frac{(3.27)(10^4)(32.2)(12)}{(500)(12)^2} = 175.5$$

$$\therefore \frac{(3)(2\pi a_1)}{2\sqrt{b_1 - \left(\frac{a_1}{2}\right)^2}} = \log_e 20 = 2.9957 \dots\dots\dots(3)$$

$$\therefore \frac{3\pi a_1}{2.9957} = \sqrt{b_1 - \left(\frac{a_1}{2}\right)^2} \quad , \therefore 9.895a_1^2 = b_1 - \frac{a_1^2}{4}$$

$$\therefore a_1 = \sqrt{10.15}$$

$$\therefore a_1 = \sqrt{10.15} = 4.16, \text{ but } a_1 = \frac{T_f}{I} \quad \therefore T_f = \frac{500(4.16)}{32.2} = 64.8$$

$$\therefore T_f = 64.8 \text{ lb. ft. per radn.p.s}$$

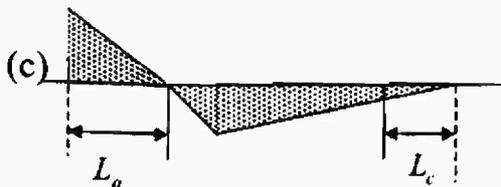
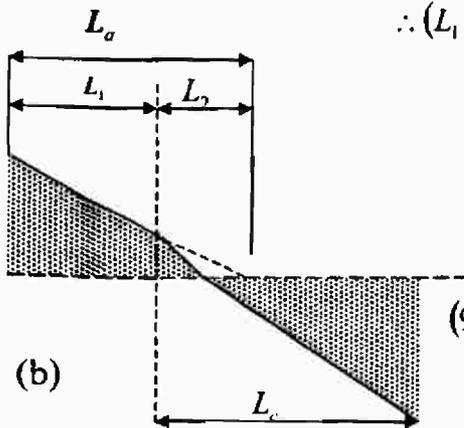
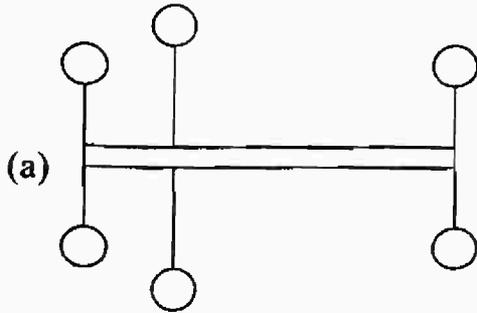
$\therefore f_n =$ The frequency of the damped vibration.

$$\therefore f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{b_1 - \left(\frac{a_1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{175.5 - \left(\frac{4.16}{2}\right)^2} = 2.08 \text{ c.p.s}$$

$$\therefore \text{Ratio} = \frac{f_d}{f_n} = 0.988 = 98.8\%$$

13- The moment of inertia of 3 rotors A,B and C are respectively 2.5ton.ft², 7.5ton.ft² and 3.0ton.ft². The distance between A and B is 9ft. 6in. and between B and C is 25ft. The shaft is 8.5in. diameter and the rigidity for the shaft material is 11.8×10⁶ lb. per sq.in. Find the frequencies if the free torsional vibration of the system.

13- عزم القصور الذاتي لثلاث دورانيات A, B and C على الترتيب 2.5, 7.5 and 3.0ton.ft² المسافة بين الدوار A والدوار B 9 قدم والمسافة بين الدوار B والدوار C 25 قدم العمود قطره 8.5 بوصة ومعامل الجساءة لمادة العمود 11.8×10⁶ باوند لكل بوصة مربعة. أوجد الترددات للأهتزازات الألتوائية الحرة لهذه المنظومة.



الشكل (5-28)

الحل:

$$\therefore L_a I_a = L_c I_c \dots\dots\dots(1)$$

$$\therefore \frac{1}{L_a I_a} = \frac{1}{I_b} \left(\frac{1}{L_1 - L_a} + \frac{1}{L_2 - L_c} \right)$$

$$\therefore (L_1 - L_a)(L_2 - L_c) = \frac{I_a \cdot L_a}{I_b} [L_1 + L_2 - (L_a - L_c)] \dots\dots(2)$$

$$\therefore L_a = \frac{3}{2.5} L_c = 1.2 L_c$$

بالتعويض في (2) نحصل على:

$$(9.5 - 1.2 L_c)(25 - L_c) = \frac{(2.5)(1.2 L_c)(34.5 - 2.2 L_c)}{7.5}$$

$$\therefore L_c^2 - 25.6 L_c + 114.1 = 0$$

$$\therefore L_c = 19.88 \text{ ft or } 5.74 \text{ ft}$$

$$L_a = 23.86 \text{ ft or } 6.89 \text{ ft}$$

∴ the torsional stiffness of the length L_c of shaft $= q_c = \frac{CJ}{L_c}$

$$\text{When } L_c = 19.88 \text{ ft.}, \quad q_c = \frac{(11.8)(10^6)}{(19.88)(12)} \left[\frac{\pi}{32} (8.5)^4 \right]$$

$$\therefore q_c = 2.54(10^7) \text{ lb. in. per radn}$$

$$I_c = \frac{(3)(0.2240)(12)^2}{(32.2)(12)} = 2.5 \times 10^3 \text{ lb. in. sec}^2$$

$$\therefore f_{n_c} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{q_c}{I_c}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{(2.54)(10)^7}{(2.5)(10)^3}} = 16 \text{ per sec.}$$

$$\therefore f_{n_c} = 16 \text{ per sec or } 960 \text{ per min.}$$

$$\therefore \text{the two node frequency} = (16) \sqrt{\frac{19.88}{5.74}} = 29.8 \text{ per sec.}$$

$$= 29.8 \text{ per sec or } 1788 \text{ per sec.}$$

السعة للدوار A نفترض أنها 1 radn ولذلك فإن سعة الدوار B تعين من العلاقة التالية:

$$\text{The amplitude of rotor B} = \frac{L_a - L_1}{L_a} = \frac{23.86 - 9.5}{23.86} = 0.602 \text{ radn}$$

$$\therefore \text{the amplitude of rotor C} = \frac{L_c}{L_c - L_2} \cdot \text{amplitude of B}$$

$$= \frac{19.88}{19.88 - 25} (0.602) = -2.34 \text{ radn}$$

∴ For the two-node vibration, the amplitude rotor B

$$= \frac{L_a - L_1}{L_a} = \frac{6.89 - 9.5}{6.89} = -0.379 \text{ radn}$$

$$\text{and the amplitude of rotor C} = \frac{L_c}{L_c - L_2} \cdot \text{amplitude of B}$$

$$= \frac{5.74}{5.74 - 25} (-0.379) = 0.113 \text{ radn}$$

والشكل (5-28) يوضح ذلك.

7- الأهتزاز الأنتوائي لمنظومة ترسية Free torsional vibration of a geared system

المنظومة المبينة بالشكل (5-29) تتكون من عمود إدارة (C) الذي يحمل الدوار A ويدير العمود المنقاد

D الذي يحمل الدوار B خلال (pinion) الترس الصغير ، (Gear) الترس الكبير E. نلاحظ إن

المنظومة بالشكل (5-29a) يمكن أن تبدل بمنظومة مكافئة أخرى (b) التي تتكون من عمود يحمل

الدوار A في أحد طرفيه والدوار B في الطرف الآخر كما مبين بالشكل (5-29b) ونفرض أن

(a)-The gear teeth are rigid and are always in contact.

أ- أسنان الترس تكون جاسئة (صلدة) وتكون دائماً في حالة تماس.

(b) There is no backlash in the gearing.

ب- لا يوجد تفويت في الترس.

ج- يهمل كل من عم القصور الذاتي للعمود والترس.

وبفرض أن أقطار كل من العمود D, C على الترتيب وأن L_2, L_1 هي طول كل من العمود D, C على الترتيب.

I_B, I_A عزم القصور الذاتي الكتلي لكل من الدوار A ، والدوار B على الترتيب.

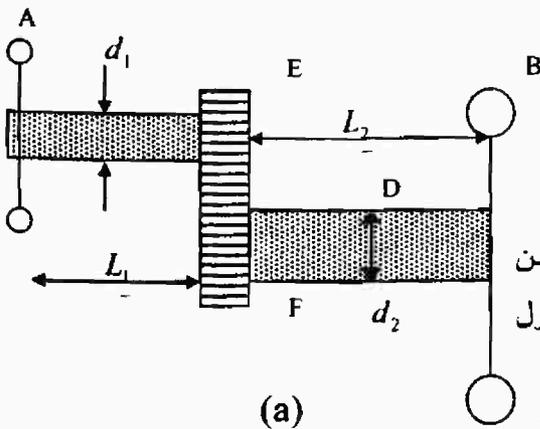
ω_B, ω_A هي السرعة الزاوية لكل من الدوار A و الدوار B

∴ نسبة التروس تعين من العلاقة (G)

$$G = \text{Gear ratio} = \frac{\text{Speed of pinion E}}{\text{Speed of wheel F}}$$

$$\therefore G = \frac{\omega_A}{\omega_B} = \text{Gear ratio}$$

∴ سرعة كل من F, E تكون متساوية عند كل من الدوار A ، والدوار B حيث d و L هي قطر وطول العمود المكافئ.



I_B هي عزم القصور الذاتي الكتلي المكافئ للدوار B.

ونظراً لأن طاقة الحركة (K.E) وطاقة الأنفعال (S.E) للمنظومة المكافئة يجب أن تساوي طاقة الحركة وطاقة الأنفعال للمنظومة الأصلية.

$$\therefore K.E. \text{ of section } L_1 + K.E. \text{ of section } L_3 =$$

$$K.E. \text{ of section } L_1 + K.E. \text{ of section } L_2$$

$$\therefore \frac{1}{2} I_B \omega_B^2 = \frac{1}{2} I_B \omega_B^2$$

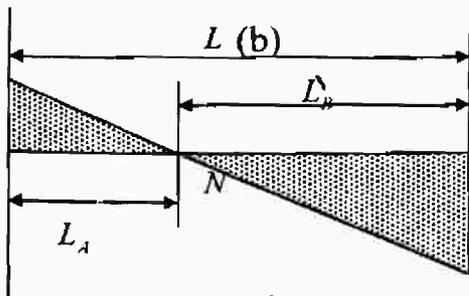
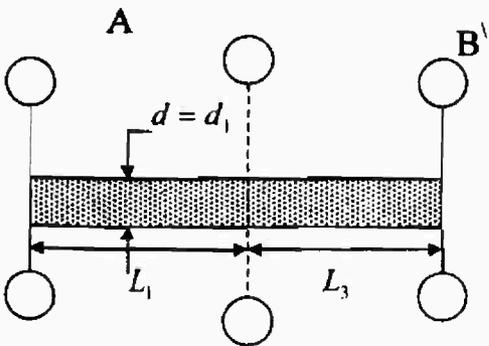
$$\therefore I_B^* = I_B \left(\frac{\omega_B}{\omega_A} \right)^2 = \frac{I_B}{G^2} \dots \dots \dots (1)$$

$$G = \frac{\omega_A}{\omega_B} \text{ حيث}$$

$$\therefore (S.E) \text{ of } L_3 = (S.E) \text{ of } L_1 \text{ and } L_2$$

$$\therefore (S.E) \text{ of } L_3 = S.E \text{ of } L_2$$

$$\therefore \frac{1}{2} T_3 \theta_3 = \frac{1}{2} T_2 \theta_2$$



(c)

الشكل (5-29)

$$\therefore \frac{T_3}{T_2} = \frac{\theta_2}{\theta_3} \dots\dots\dots(2)$$

حيث T_2, T_3 هو العزم لمقطع العمود الذي طوله L_2, L_3 على الترتيب θ_2, θ_3 هي زاوية اللي لمقطع العمود الذي طوله L_2, L_3 على الترتيب وبفرض أن القدرة المنقولة خلال المقطعين الذي طولهما L_3, L_2 يكونوا متساويين.

$$\therefore T_3 \omega_A = T_2 \omega_B, \quad \frac{T_3}{T_2} = \frac{\omega_A}{\omega_B} = \frac{1}{G} \dots\dots\dots(3)$$

∴ من المعادلتين (3) و (2) ينتج أن

$$\frac{T_3}{T_2} = \frac{\omega_B}{\omega_A} = \frac{1}{G} = \frac{\theta_2}{\theta_3}$$

$$\therefore \frac{T_3}{T_2} = \frac{\theta_2}{\theta_3} = \frac{1}{G} \dots\dots\dots(4)$$

∴ معامل اللي q (جساءة اللي) يعبر عنها بالعلاقة:

$$q = \frac{T}{I} = \frac{C\theta}{L} \dots\dots\dots(5)$$

وكذلك بالنسبة للمقطع الذي طوله L_2 نجد أن:

$$\frac{T_2}{I_2} = \frac{C\theta_2}{L_2} \dots\dots\dots(6)$$

∴ من المعادلتين (5) ، (6) ينتج أن:

$$\frac{T_3}{T_2} \times \frac{I_2}{I_3} = \frac{\theta_3}{L_3} \times \frac{L_2}{\theta_2}$$

$$\therefore \frac{T_3}{T_2} = \frac{I_3 \theta_3 L_2}{I_2 \theta_2 L_3}$$

ومن المعادلة (6) نجد أن:

$$\frac{1}{G} = \frac{I_3}{I_2} \times G \times \frac{L_2}{L_3}$$

$$\therefore L_3 = \frac{I_3}{I_2} \times G^2 \times L_2 \dots\dots\dots(7)$$

وبفرض أن القطر للعمود المكافئ للعمود C هو $d=d_1$

$$\therefore I_3 = \frac{\pi}{64} d_1^4, I_2 = \frac{\pi}{64} d_2^4, \therefore \frac{I_3}{I_2} = \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^4$$

∴ المعادلة (7) يمكن كتابتها على صورة العلاقة الآتية:

$$L_3 = G^2 L_2 \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^4 \dots\dots\dots(8)$$

ولهذا فإن المنظومة ذات العمود المفرد تكافئ المنظومة الأصلية الترسية وأذا كان عزم القصور الذاتي الكتلي للدوار B يعطى بالعلاقة (1) وبالإضافة إلى الطول للعمود المكافئ L_3 المعطى من العلاقة (8) نجد أن:

بفرض أن طول العمود المكافئ (L)

$$\begin{aligned} \therefore L &= L_1 + L_3 \\ &= L_1 + G^2 L_2 \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^4 \dots\dots\dots(9) \end{aligned}$$

∴ التردد الطبيعي للاهتزاز الأكتواني للمنظومة الترسية يمكن إيجاده كما يلي:

فإذا اعتبرنا أن العقدة (N) في المنظومة المكافئة كما في الشكل (29-c) فإن التردد الطبيعي للاهتزاز الأكتواني للدوار (A) يعين من العلاقة التالية:

$$f_{n_A} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{CJ}{L_A I_A}} \dots\dots\dots(10)$$

و التردد الطبيعي للاهتزاز الأكتواني للدوار B يعين من العلاقة:

$$f_{n_B} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{CJ}{L_B I_B}} \dots\dots\dots(11)$$

∴ التردد = التردد $f_{n_A} = f_{n_B}$

$$\therefore \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{CJ}{L_A I_A}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{CJ}{L_B I_B}}$$

$$\therefore L_A I_A = L_B I_B \dots\dots\dots(12)$$

$$L = L_A + L_B \dots\dots\dots(13)$$

ملحوظة عندما يؤخذ في الاعتبار عزم القصور الذاتي للترس - فإن الدوار المضاف المبين في الشكل (29-b) يجب أن يعطى introduced للمنظومة المكافئة عند المسافة L_1 من الدوار A.

$$I_E + \frac{I_F}{G^2}$$

حيث I_F, I_E هما عزم القصور الذاتي للترس الصغير pinion والترس الكبير wheel على الترتيب وبذلك تصبح المنظومة ذات ثلاث أعضاء دواره.

14- An electric motor is to drive a centrifuge, running at four times the motor speed through a spur gear and pinion. The steel shaft from the motor to the gear wheel is 6cm diameter and L cm long. The shaft from the pinion to the centrifuge is 5 cm diameter and 45 cm long. The weights and radii of gyration of motor and centrifuge are respectively 40 kg, 12 cm and 34kg and 14cm. Neglecting the inertia effect of the gears. Find the value of L if the gears are to be at the node for torsional oscillation of the system and thence determine the frequency of torsional oscillation. Assume modulus of rigidity for material of shaft as $0.84 \text{ million Kg per Cm}^2$.

14- محرك كهربائي يدير جهاز طرد مركزي بسرعة تعادل أربعة مرات سرعة المحرك خلال كرسبي إسطوانتي عدل وترس صغير. عمود من الصلب قطره 6 cm يصل ما بين المحرك والترس الأسطوانتي العدل وطوله L cm. وقضيب يصل ما بين الترس الصغير وجهاز الطرد المركزي قطره 5 cm وطوله 45 cm، وزن المحرك 40 kg ونصف قطر الحركة الترددية له 12 cm ووزن جهاز الطرد المركزي 34 kg ونصف قطر الحركة الترددية له 14 cm، أهمل تأثير عزم القصور الذاتي للترس، أوجد قيمة (L) عندما تكون التروس عند عقدة التذبذب الألتواتي للمنظومة وكذلك أوجد التردد الطبيعي للأهتزاز (التذبذب) الألتواتي. إفرض أن معامل جساءة مادة العمود $0.84 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$.

$$\therefore G = \text{Gear ratio} = \frac{\text{Speed of motor}}{\text{Speed of centrifuge}} = \frac{1}{4}$$

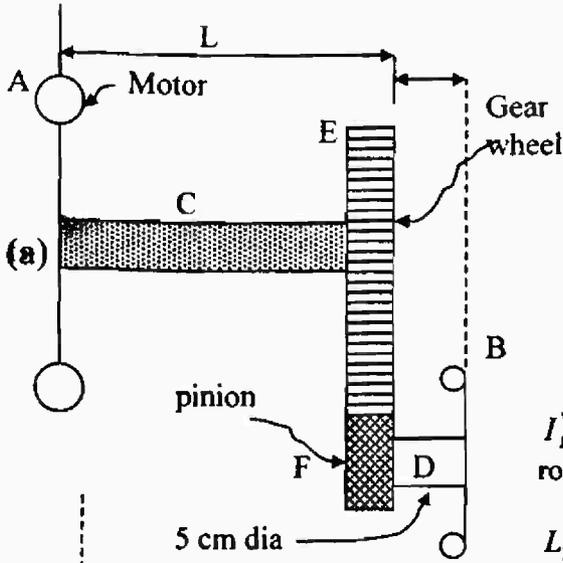
d_1 = قطر العمود خلال الطول بين المحرك إلى الترس حيث $d_1 = 6 \text{ cm}$ وطوله (L) بالسنتيمتر.
Length of the shaft from pinion to the centrifuge = 45cm and its diameter $d_2 = 5 \text{ cm}$.

وزن المحرك (A) ($W_A = 40 \text{ Kg}$) ونصف قطر الحركة الترددية له $R_{K_A} = 12 \text{ cm}$
وزن جهاز الطرد المركزي ($W_B = 34 \text{ Kg}$) ونصف قطر الحركة الترددية له $R_{K_B} = 14 \text{ cm}$.

$$\therefore I_A = \frac{W_A}{g} \times R_{K_A}^2 = \frac{40}{981} (12)^2 = 5.86 \text{ Kg.cm.sec}^2$$

$$\therefore I_B = \frac{W_B}{g} \times R_{K_B}^2 = \frac{34}{981} (14)^2 = 6.79 \text{ Kg.cm.sec}^2$$

Modulus of rigidity = $C = 0.84 \times 10^6 \text{ Kg/Cm}^2$



(a) المنظومة الأصلية توضح بالشكل

والمظومة المكافئة توضح بالشكل

لتعيين قيمة (L) نتبع الأتي:-

نوجد عزم القصور الذاتي للدوار

B' المكافئ وكذلك الطول المكافئ

للعמוד مع إعتبار أن القطر المكافئ

$$d_1 = 6cm$$

I_B' = Mass moment of inertia of the equivalent rotor B'.

L_3 = Additional length of the equivalent shaft.

$$\therefore I_B' = \frac{I_B}{G^2} = \frac{6}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 6 \times 16 = 96 Kg.cm.sec^2$$

$$L_3 = G^2 L_2 \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 \text{ with usual notations}$$

$$\therefore L_3 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 (45) \left(\frac{6}{5}\right)^4 = 5.83 Cm$$

لذلك نفرض أن العقدة N لتذبذب أو الأهتزاز الأكتواني

للمنظومة. تقع على بعد L_A مسن الدوار A حيث

$$L_A = L$$

$$\therefore L_B' = L_3 = 5.83 Cm$$

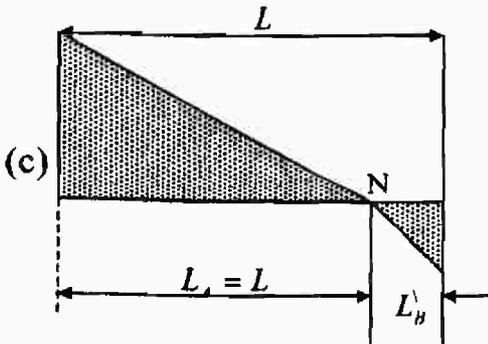
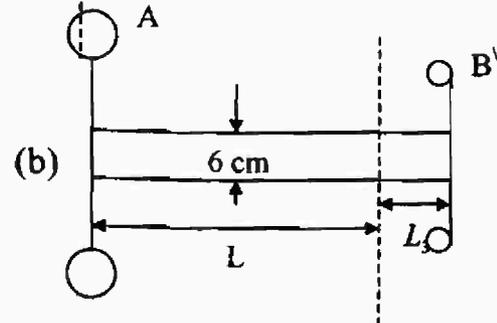
$$\therefore L_A \cdot I_A = L_B' \cdot I_B'$$

$$\therefore L = L_A = \frac{5.83(96)}{5.87}$$

$$\therefore L = L_A = 95.35 Cm$$

∴ يمكن إيجاد التردد الطبيعي f_n كما يلي:

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{CJ}{L_A \cdot I_A}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{0.84 \times 10^6 \left[\frac{\pi}{32} (6)^4 \right]}{95.35 \times 5.87}} = 69.6 cps$$



الشكل (5-30)

15-A 12-Cylinder aero engine gear drive to the airscrew is equivalent torsionally to the system shown in Fig(5-31a). The shafts L_1 and L_2 are respectively 39.5in and 25.5in. long and 2.75in. and 3.5in. diameter. The airscrew runs at 0.6 of the speed of the engine crankshaft and the moments of inertia of the rotors are: for the combined engine masses A, 1500lb.in² for the pinion B, 54 lb.in, for the gear wheel C, 850 lb.in² and for the airscrew D, 50000lb.in². If the modulus of rigidity of the shaft material is 12×10^6 lb per sq.in., Find the natural frequencies of torsional vibration of the system (a) when the inertia of the gearing is neglected, and (b) when the inertia of the the gearing is taken into account.

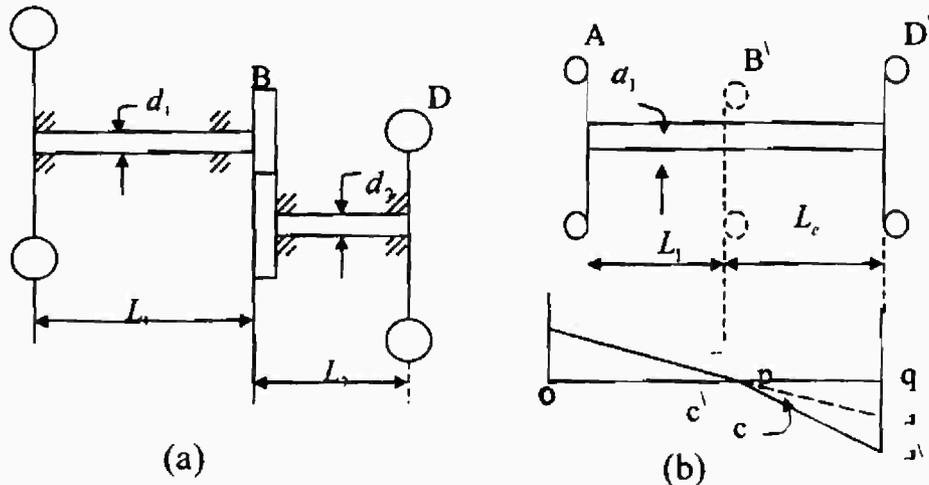
15- محرك طائرة يتكون من 12 أسطوانة وصندوق تروس يدبر المحور الخارجي للرفاص يكافئ منظومة ألتوائية كما بالشكل (5-31a). الأعمدة L_1, L_2 طولهما 39.5 بوصة ، 25.5 بوصة على الترتيب وقطرهما 2.75 بوصة، 3.5 بوصة على الترتيب. عمود أو محور إدارة الرفاص يدار عند 0.6 من عمود الكرنك للمحرك وعزم القصور الذاتي للدورات تكون لكتلة المحرك المركبة A 1500 باوند.بوصة.مربعة. وللترس الصغير B 54 باوند بوصة مربعة، وللترس الكبير C 850 باوند.بوصة.مربعة. وبالنسبة للرفاص D 50000 باوند.بوصة.مربعة. إذا كان معامل اللجساءة لمادة العمود 12×10^6 باوند لكل بوصة مربعة، أوجد التردد الطبيعي للأهتزاز الألتوائي للمنظومة:-
 أ- عندما يهمل عزم القصور الذاتي للتروس. ب- عندما يؤخذ عزم القصور الذاتي للتروس.
 الحسل:- 1- العمود المنظومة المكافئة ذات الدورانيين قطره 2.75in.

$$\therefore L_e = G^2 \cdot L_2 \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^4 = \left(\frac{1}{0.6} \right)^2 \cdot (25.5) \left(\frac{2.75}{3.5} \right)^4 = 27in$$

$$I_d' = \frac{I_d}{G^2} = 50000(0.6)^2 = 18000lb.in^2$$

$$\therefore \text{the distance from the rotor A} = L_a = \frac{I_d'}{I_d' + I_a} (L_1 + L_e)$$

$$\therefore L_a = \frac{18000}{18000 + 1500} (39.5 + 27) = \frac{18000}{18000 + 1500} (66.5) = 61.4in$$



الشكل (5-31)

The torsional stiffness of this length of shaft = $q_a = \frac{CJ}{L_a}$

$$\therefore q_a = \frac{(12)(10^6)}{61.4} \left[\frac{\pi}{32} \left(\frac{11}{4} \right)^4 \right] = 1.1 \times 10^6 \text{ lb in / rad in}$$

\therefore the frequency of the torsional vibration = f_n

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{q_a}{I_a}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{(1.1)(10)^6 (32.2)(12)}{1500}} = 84.8 \text{ cycle / sec}$$

$$= 5090 \text{ cycle / min}$$

(ب) بالنسبة للعمود الذي قطره 2.75in والترس بها فأن يكون مكافئ للدوار B كما مبين عند النقطة P في الشكل (b) (5-31).

$$\therefore I_b = I_h + I_c / C^2 = 54 + 850(0.6)^2 = 360 \text{ lb.in}^2$$

لذلك فإن المنظومة المكافئة والمكون من ثلاث دورات A، D عند نهائي العمود الذي قطره 2.75in وطوله 66.5in مع الدوار الثالث B عند النقطة 39.5 بوصة من A، 27 بوصة من D. أو من المملكات أ، المعادلات التي سبق أستنتاجها في المنظومة الترسية نجد أن المسافة بين العقدة وبين الدوار A هي 63.15in، 3.661in.

$$\therefore \text{The fundamental frequency} = 84.8 \sqrt{\frac{61.4}{63.15}} = 83.5 \text{ cycle / sec}$$

$$= 5010 \text{ cycle / min}$$

وأن التردد للمعدتين يتعين من العلاقة:

$$f_n = 84.8 \sqrt{\frac{61.4}{3.661}} = 347 \text{ cycle / sec} = 20800 \text{ cycle / min}$$

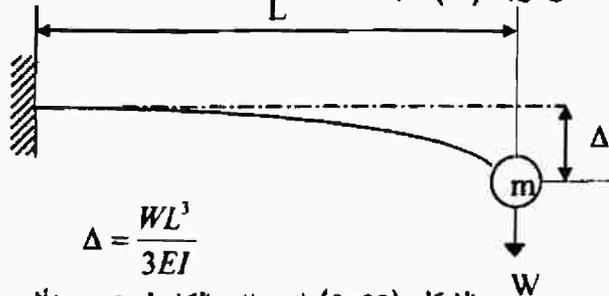
وبذلك نجد أنه عند إهمال عزم القصور الذاتي للتروس فأننا نحصل على نتيجة تقريبية للتردد الأساس كما في هذا المثال الخاص بذلك.

ملاحظات هامة:

* يمكن على سبيل المثال أخذ الكابول أو العتب (cantilever) المبين بالشكل (5-32) وذلك بأعتبره

عديم الوزن ويحمل كتلة مركزة عند طرفيه ولهذا يحدث في الكابول انحراف أو تراخيم أسناتيكي

Δ من جراء تأثير القوة المركزية (W) حيث:



$$\Delta = \frac{WL^3}{3EI}$$

الشكل (5-32) انحراف الكابول تحت تأثير القوة W

∴ الانحراف أو الاستطالة أو الترخيم Δ للكابول تحت تأثير الوزن المركز W يعين من العلاقة:

$$\Delta = \frac{WL^3}{3EI}$$

Where E = Modulus of elasticity معامل المرونة

I = Moment of inertia عزم القصور الذاتي

L = Length of cantilever طول الكابول

W = Weight الوزن.

وبذلك يعتبر الكابول كنباض له معامل k ويعين من العلاقة التالية:

$$k = \frac{W}{\Delta} = \frac{W}{\frac{WL^3}{3EI}} = \frac{3EI}{L^3}$$

وتكون معامل حركة الكابول هي نفس معادلة الحركة للهاز الميكانيكي البسيط الذي يتكون من الكتلة m والنباض الذي معامل k وذلك كما بالمعادلة التالية:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

حيث x هي إزاحة طرف الكابول ويكون حل هذه المعادلة هو نفس حل معادلة الحركة للهاز

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ cps}$$

الميكانيكي البسيط ويكون التردد الطبيعي لها هو

$$\therefore f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3EI}{mL^3}} \dots\dots\dots (\text{HZ})$$

$$t_p = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi \sqrt{\frac{mL^3}{3EI}} \text{ sec}$$

ويتوقف العزم I على قطاع الكابولي كما يلي:-

أ- في حالة الكابول ذات المقطع المستدير على محور التعادل يكون عزم القصور الذاتي كما

$$\text{بالعلاقة: } I = \frac{\pi D^4}{64} \quad \text{حيث } D \text{ هي قطر المقطع المستدير.}$$

ب- وفي حالة القطاع المستطيل الذي يكون إرتفاعه العمودي على محور التعادل (a) وعرضه b،

فإن عزم القصور الذاتي يكون كما بالعلاقة: $I = \frac{ab^3}{12}$ ومعامل المرونة E يتوقف على المادة

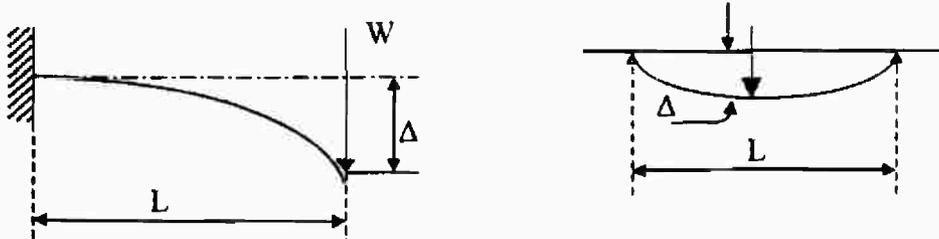
المصنوع منها الكابول فمثلاً بالنسبة للحديد الصلب نجد أن $E = 2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$.

ج- علاقة الانحراف Δ تختلف تبعاً لأختلاف وضع العمود وطريقة التحميل عليه. ويبين الشكل

(5-33a,b) بعض الحالات الهامة والانحراف ومعامل النابض الخاص بكل منهما، وفي أي من هذه

الحالات يكون تحليل الاهتزازات مماثلاً لحالة النابض والكتلة مع إستبدال معامل النابض بدلالة

معادلة الانحراف كما تم عمله في حالة الكابول.



الشكل (5-33) الأتحراف والمعامل (ثابت النابض) للكابول والكمرة البسيطة

$$\Delta = \frac{WL^3}{3EI}$$

$$k = \frac{3EI}{L^3}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{3EIg}{L^3W}} \text{ (cps)}$$

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3EIg}{L^3W}} \text{ (HZ)}$$

$$\Delta = \frac{WL^3}{48EI}$$

$$k = \frac{48EI}{L^3}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{48EIg}{L^3W}} \text{ (cps)}$$

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{48EIg}{L^3W}} \text{ (HZ)}$$

16- A vibration device consist of a light steel beam, at its end a mass of 0.35Kg the beam receives vibration from electromagnate, the natural frequency for the system should be 60c.p.s, Determine the stiffness coefficient and the length of the beam if $EI = 10^6 \text{ Kg.cm}^3 / \text{sec}^2$.

17- جهاز هزاز عبارة عن كابول من الصلب الخفيف وعلى نهايته كتلة مقدارها 0.25Kg يستمد الكابول إهتزازة من مغناطيس كهربى ويجب أن يكون التردد الطبيعي للمجموعة 60cps، أوجد معامل النابض وطول الكابول بالاستميتير إذا كان $EI = 10^6 \text{ Kg.cm}^3 / \text{sec}^2$.

الحل:

$$\therefore k = \frac{3EI}{L^3} \quad \therefore L = \sqrt[3]{\frac{3EI}{k}} = \sqrt[3]{\frac{3(10^6)}{k}}, \therefore \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\therefore k = \omega_n^2 \cdot m = [2\pi(60)]^2 (0.35) = 49692.4 \text{ Kg / sec}^2$$

$$\therefore L = \sqrt[3]{\frac{3(10^6)}{49692.4}} = 3.92 \text{ Cm}$$

17- A disc with moment of inertia (I_G). Suspended at one end by a wire, and allowed freely vibrates to produce 48rpm, If the disc requires a moment of 2Kg.cm to rotor 15° . Find the moment of inertia of the disc.

17- علق قرص عزم القصور الذاتي لـ I_G في نهاية سلك رفيع يهتز إهتزاز حراً بمعدل 48 دوره في الدقيقة، فإذا كان القرص يلزمه عزم مقداره 2 كجم.سم لادارته 15° . أوجد عزم القصور الذاتي I_G .

الحل:

$$k_T = \frac{I}{\theta} = \frac{2(980)}{15 \left(\frac{\pi}{180} \right)} = 7490 \text{ Kg.cm}^2 / \text{rad.sec}$$

$$\therefore \omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{k_T}{I_G}} \quad \therefore I_G = \frac{k_T}{4\pi^2 \omega^2} = \frac{7490}{4(\pi)^2 \left(\frac{48}{60}\right)^2}$$

$$\therefore I_G = 296.75 \text{ Kg.cm}^2$$

18- An electrical generator coupled to an engine by a shaft of 1cm diameter and 35cm long. If the moment of inertia of the rotor is 40kg.cm find the natural amplitude for the torsional vibration.

18- مولد كهربى ملحق بمحرك بواسطة عمود قطره اسم وطوله 25سم. إذا كان عزم القصور الذاتى لدوار المولد 40كجم.سم، فأوجد التردد الطبيعي للاهتزاز الأكتوائى.

الحل:

$$I = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{3.14(1)^4}{32} = 0.0983 \text{ cm}^4, \quad \therefore E = 0.8 \times 10^6 \text{ Kg/cm}$$

$$\therefore k_T = \frac{I.E}{L} = \frac{0.0983(0.8 \times 10^6)}{25} = 3145.6 \text{ Kg.cm/radn}$$

أي أن $k_T = 3145.6$ كجم.سم/زاوية نصف قطريه

$$\therefore k_T = 3.08 \times 10^6 \text{ Kg.cm}^2 / \text{radn.sec}^2$$

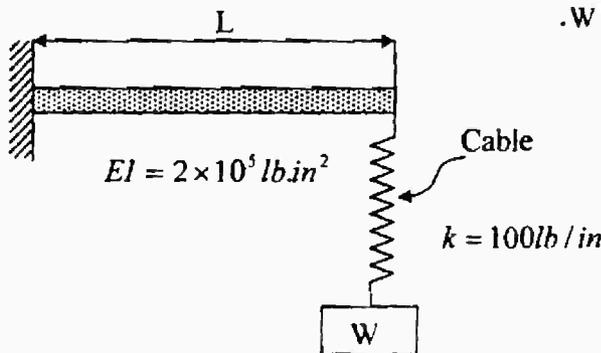
$$f_n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_T}{I}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3.08 \times 10^6}{40}} = 277.48 \text{ cycle/sec}$$

19- A weight W is attached to the end of a small cantilever beam of length L by a cable of stiffness K as shown in Fig(5-34). If W=100 lb, EI = 2×10⁵ lb.in² (for beam) k=100 lb/m, determine the length L of the beam that will make the system's undamped natural frequency f_n = 2Hz, consider the mass of both cable and beam as negligible compared with the mass of the weight W.

19- وزن W معلق في نهاية كابولي صغير طوله L بواسطة سلك معاملته k كما بالشكل (5-34). إذا كان:

$$k_{\text{cable}} = 100 \text{ lb/m}, \quad W = 100 \text{ lb}, \quad EI = 2 \times 10^5 \text{ lb.in}^2 \text{ (للكابول)}$$

أوجد طول الكابول حتى يجعل تردده الطبيعي بدون خمد 2 Hz مع إهمال كتلة كل من السلك والكابولي إذا ما قورن بكتلة الوزن W.



الشكل (5-34)

الحل

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}}$$

where k_{eq} = المعامل المكافئ للنايظ والكابول

$$\therefore f_n^2 = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{k_{eq}}{m}\right)$$

$$\therefore k_{eq} = (2\pi f_n)^2 \cdot m = (4\pi)^2 \left(\frac{100}{386}\right) = 40.87 \text{ lb/in}$$

وباعتبار أن ثابت النايظ للكابول k_h

$$\therefore \frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_{cable}} + \frac{1}{k_h} = \frac{1}{40.87}, \quad \therefore k_h = 69.12 \text{ lb/m}$$

$$\therefore k_h = 69.12 \text{ lb/m} \quad k_h = \frac{3EI}{L^3} = \frac{3(2 \times 10^5)}{L^3} = 69.12 \text{ lb/m}$$

$$\therefore L = 20.6 \text{ in.}$$

20- A body has a weight of 40lb is vertically suspended on a steel wire of length $L=60$ in and of cross-sectional area $A=0.002 \text{ in}^2$. Determine the frequency of free vibrations of the weight if the modulus for steel is $E = 30 \times 10^6 \text{ lb/in}^2$. Determine the amplitude of vibration if the inertia displacement $X_o = 0.02$ in and initial velocity $\dot{X}_o = 1$ in per sec.

20- جسم وزنه 40 باوند علق رأسياً في سلك من الصلب طوله 60 بوصة ومساحة مقطعه 0.002 بوصة² - أوجد التردد الاهتزاز الحر للوزن W إذا كان معامل المرونة للصلب 30×10^6 باوند لكل بوصة²، أوجد سعة الاهتزاز إذا كانت الأراحة الابتدائية ($X_o = 0.02 \text{ in}$) والسرعة الابتدائية ($\dot{X}_o = 1 \text{ in/sec}$)

الحل:

$$\therefore \Delta_s = \frac{W.L}{E.A} \quad \therefore \Delta_s = \frac{40 \times 60}{30 \times 10^6 \times 0.002} = 0.04 \text{ in}$$

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\Delta_s}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{(32.2)(12)}{0.04}} = 15.6 \text{ cps}$$

$$\therefore \omega_n = 2\pi f_n = 98.3 \text{ rad/sec}$$

$$X_o = 0.02, \quad \dot{X}_o = 1 \text{ in/sec}$$

$$\therefore \text{the amplitude of vibration} = \sqrt{X_o^2 + \left(\frac{\dot{X}_o}{\omega_n}\right)^2} = \sqrt{(0.02)^2 + \left(\frac{1}{98.3}\right)^2} = 0.0224 \text{ in.}$$

21- The simply supported beam in Fig(3-35) has a static deflection of $\Delta_s = 0.1 \text{ in.}$ when it supports a weight W at its center. The weight W is then dropped from a height of $h = 10\Delta_s$ onto the middle of the beam. The weight remains in contact with the beam after striking it, so plastic impact can be assumed. Neglecting the energy lost during the impact, determine:

(a) The ratio of the maximum beam deflection y_M to the static deflection Δ_s with damping neglected, and (b) the same ratio if the damping factor $\xi = 0.1$

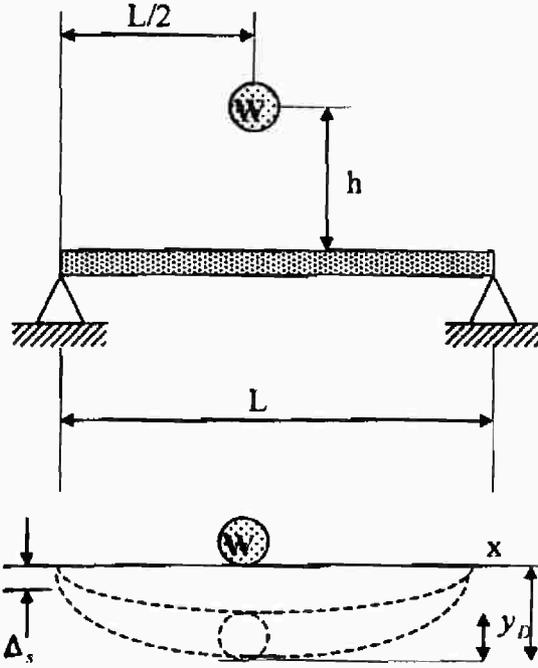
21- كابولي بسيط مسند كما مبين بالشكل (3-35) حدث له إنحراف أو أنحناء أسناتيكي $\Delta_s = 0.1 \text{ in.}$

عندما وضع وزن W عند منتصفه. الوزن W سقط من إرتفاع $h = 10 \text{ in}$ عند منتصف الكابول، الوزن

بقي ملامس للكابول بعد إصطدامه مع فرض أن التصادم لدن. إهمل الطاقة المفقودة أثناء التصادم. أوجد (أ) نسبته أقصى إنحناء للكابول إلى الانحناء الاستاتيكي Δ_s مع إهمال الخمد، (ب) نفس النسبة إذا كان عامل الخمد $\xi = 0.1$.

الحل

$$k = \frac{W}{\Delta_s} = \frac{48EI}{L^3} \text{ lb/in}$$



E =modulus of inertia of elasticity(psi).
 I =moment of inertia of beam cross section about neutral axis(in^4).
 L =Length of beam(in.).
 y =displacement of beam from static equilibrium position(in).
 y_D =maximum displacement of beam from static equilibrium position(in).static equil. position.
 y_M =maximum deflection of beam from X axis (in.)

Δ_s =static deflection of beam due to W(in.)

$$\therefore \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{386}{0.1}} = 62.13 \text{ rad/sec}$$

$$\Delta_s = \frac{WL^3}{48EI} \text{ in}$$

$$\therefore \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} = 62.13 \sqrt{1 - (0.1)^2} = 61.82 \text{ rad/sec}$$

الشكل (5-35)

إزاحة الكابولي من وضع الأتزان الاستاتيكي وباعتبار أن الأراحة أسفل ذلك الوضع وأن السرعة تقل ويكون الوضع

لأسفل هو الوضع الموجب ومن الظروف الابتدائية نجد أن الأراحة هي $y_o = -\Delta_s = -0.1 \text{ in}$ وعند اصطدام الوزن W مع الكابولي فإن طاقة الحركة تساوي طاقة الوضع

$$\therefore \frac{1}{2}mv^2 = mgh \quad \therefore v^2 = 2gh$$

$$\therefore v = \sqrt{2gh} = \dot{y}_o \dots \dots \dots (1)$$

∴ أقصى انحناء في منتصف الكابولي يعين من العلاقة:

$$y_{\max} = \Delta_s + y_D$$

حيث y_{\max} هي أقصى إزاحة.

من الشكل (5-35) يمكن تعيين أقصى إزاحة y_D عند منتصف الكابولي وهي أقصى إزاحة مقاسة من موضع الأتزان الاستاتيكي.

$$\therefore y_M = \Delta_s + y_D$$

(X) y_D هي أقصى انحناء للكابولي من المحور

ومن معادلة الأزاحة نجد أن:

$$x = y = e^{-\xi\omega_n t} \left[A \cos \omega_n \left(\sqrt{1 - \xi^2} \right) t + B \sin \omega_n \left(\sqrt{1 - \xi^2} \right) t \right] \dots \dots \dots (2)$$

∴ يمكن إيجاد أقصى أزاحة y_D من منتصف الكابولي وعند موضع الأتزان الأستاتيكي وبالتعويض من الظروف الابتدائية عن $\xi = 0$ و $t = 0$ نحصل على الثوابت A و B.

i.e. at $t=0, x=0, \therefore \xi = 0$

$$\therefore y_0 = x = e^{(0)} [A \cos(0) + B \sin(0)] = -\Delta_s \quad \therefore A = -\Delta_s \dots \dots \dots (3)$$

وبتفاضل الأزاحة y_D بالنسبة للزمن t نحصل على الآتي:

$$\dot{y}_D = A \left[e^{-\xi\omega_n t} \left(-\sin \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \right) t \cdot \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} - \xi \omega_n t e^{-\xi\omega_n t} \cdot \cos \omega_n \left(\sqrt{1 - \xi^2} \right) t \right] + B \left[e^{-\xi\omega_n t} \cdot \cos \omega_n \left(\sqrt{1 - \xi^2} \right) t \cdot \left(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \right) - \xi \omega_n t e^{-\xi\omega_n t} \cdot \sin \omega_n \left(\sqrt{1 - \xi^2} \right) t \right]$$

وبالتعويض عن

At $t = 0, \dot{x} = 0, \therefore \xi = 0$

$$\therefore \dot{y}_0 = B \omega_n$$

$$\therefore B = \frac{\dot{y}_0}{\omega_n} = \frac{\sqrt{2gh}}{\omega_n} \dots \dots \dots (4)$$

وبالتعويض عن الثوابت A و B في معادلة الأزاحة (2) نحصل على:

$$y_D = -\Delta_s \cdot \cos \omega_n t + \frac{\sqrt{2gh}}{\omega_n} \sin \omega_n t \dots \dots \dots (5)$$

ومن المتطابقات المثلثية نجد أن:

$$\therefore y = -A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t$$

$$\therefore y = \left(\sqrt{A^2 + B^2} \right) \sin(\omega_n t + \phi) = \left(\sqrt{\Delta_s^2 + \frac{2gh}{\omega_n^2}} \right) \sin(\omega_n t + \phi) \dots \dots \dots (6)$$

وعندما تكون $\left(\omega_n t + \phi = \frac{\pi}{2} \right)$ نجد أن الأزاحة y للكابولي من وضع الأتزان الأستاتيكي أكبر ما يمكن:

$$\therefore y_D = \sqrt{\Delta_s^2 + \frac{2gh}{\omega_n^2}}$$

∴ أقصى انحناء يكون في منتصف الكابولي ويعين من العلاقة التالية:

$$y_M = \Delta_s + y_D = \Delta_s + \sqrt{\Delta_s^2 + \frac{2gh}{\omega_n^2}}$$

بالتعويض عن قيم Δ_s, h, ω_n نحصل على

$$y_M = 0.1 + \sqrt{(0.1)^2 + \left(\frac{27.78}{62.13} \right)^2} = 0.56 \text{ in}$$

تكون النسبة القصوى لانحراف الكابولي y_M إلى الانحراف الأستاتيكي Δ_s وذلك في حالة إهمال الخمد ($\xi = 0$) كما يلي:

$$\frac{y_M}{\Delta_s} = \frac{0.56}{0.1} = 5.6$$

تمارين للباب الخامس

1- A steel bar 3.5cm wide and 6 cm deep is freely supported at two points 1 meter apart, and carries a load of 220kgf mid-away between them. Find the frequency of the natural transverse vibration, neglecting the weight of the bar. $E = 28 \times 10^5 \text{ Kgf/cm}^2$. What will be the frequency of vibration, if an additional load of 210Kgf is distributed uniformly along the length of the shaft?

2- A beam supported at the ends has a load of 200Kgf placed 24cm from one end. Find the frequency of the natural transverse vibration. The length of the beam is 95cm. $E = 2 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ and the cross-section of the beam is $3.5 \times 6 \text{ cm}^2$.

3- Referring to fig (5-36). Let the moment of inertia of the rotors A and B, be 62 kg.m^2 and 38 kg.m^2 and the length L_1, L_2, L_3, L_4 and L_5 be respectively 24.0cm, 20cm, 30cm, 8cm, and 20cm and diameter d_1, d_2, d_3, d_4 and d_5 be 6.0cm, 10cm, 8cm, 14cm, and 10cm respectively.

Find the frequency of natural torsional oscillation of the system. $C = 83 \times 10^4 \text{ Kgf/cm}^2$.

4- The shaft shown in fig (5-37) carries two masses A and B. The mass at A is 420Kg and its radius of gyration is 64.0cm. Corresponding values for B are 540Kg and 76cm. Shaft diameter between C and B is undecided. Assuming it to be 8cm, (a) determine the frequency of torsional oscillations thereafter. (b) determine what it should be if the node is to be in the plane CC' as shown. $C = 84 \times 10^4 \text{ Kgf/cm}^2$.

5- A shaft 2.6 meters long has a diameter of 8cm for half the length and 8cm diameter for the remaining length. If one end of the shaft is fixed and the other end carries a rotor of 280Kgf with radius of gyration of 60cm, calculate the frequency of free torsional oscillation. Neglect inertia of the shaft. $C = 82 \times 10^4 \text{ Kgf/cm}^2$.

6- A motor generator set consists of two armatures A and D as shown in fig (5-38) with a flywheel between them at B. The modulus of rigidity of the material of the shaft is 0.83 million Kg per sq. cm. The system can vibrate with one node at C 12.0cm from A, the wheel B being at antinode. Using the data of rotors given below, take data of rotors:-

Weight of rotor A is 480Kg and radius of gyration is 28cm.

Weight of rotor B is 570Kg and radius of gyration is 32cm.

Weight of rotors D is 380Kg.

Find:

- The position of the other node.
- The natural frequency of the free torsional vibration, for the given positions of the nodes and.
- The radius of gyration of the rotor R.

7- A shaft of 12cm diameter and 120cm long is fixed at one end and other end carries a flywheel of weight 0.8 tone. Taking Young's modulus for the shaft material as $2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$. Find the natural frequency of :

- Longitudinal vibration.

(ii) Transverse vibration.

8- A flywheel is mounted on a vertical shaft as shown (5-39). The both ends of the shaft are fixed and its diameter is 60mm. The flywheel has a mass of 450Kg. Find the natural frequencies of:

(i) Longitudinal vibration.

(ii) Transverse vibration, take $E = 200GN / m^2$.

9- A small turbine rotor and its shaft are equivalent to a shaft of 100cm long and 10cm diameter. It carries three discs weighting 250Kg, 300Kg and 375Kg at 25cm, 43cm and 70cm from left end bearing. The total deflection under the loads are found to be 0.012cm, 0.017cm and 0.013cm respectively.

Neglecting the weight of the shaft, determine the critical speed by energy method and compare it with the value obtained by Dunkerley's method.

10- A marine engine, shaft and propeller are equivalent to a torsional system as shown (5-40). Determine the frequencies of torsional vibrations and the position of the nodes and find the amplitudes of vibrations for both the nodes of vibrations. $C = 84 \times 10^4 \text{ Kgf} / \text{cm}^2$.

11- A motor generator set consists of two armatures A and C connected as shown in Fig (5-41) with flywheel between them at B. modulus of rigidity $C = 8410^4 \text{ Kgf} / \text{cm}^2$. The system can vibrate torsionally with one node at $x=8\text{cm}$ from A, the flywheel being at antinode. Find:

(i) The position of another node.

(ii) The natural frequency of vibration and (c) the radius of gyration of the armature C.

	A	B	C
k	32cm	38	-
m	440Kg	520	360

12- Fig (5-42) shows the engine, the transmission and the propeller for motor ship. The crank shaft may be assumed equivalent torsionally to a solid shaft of uniform diameter 30cm. The combined reciprocating and revolving masses of each crank have a moment of inertia of 460Kg.m^2 . The moments of inertia of the flywheel and the propeller are respectively 6000 Kg.m^2 and 3200Kg.m^2 . Reduce the arrangement to an equivalent three-mass system on a shaft of uniform diameter 28cm and determine the frequency of torsional vibration system. $c = 830000 \text{ Kgf} / \text{cm}^2$.

13- A torsional system in fig (5-43). Has the following particulars, moment of inertia of motor= 30Kg.m^2 , moment of inertia of flywheel and pinion= 120Kg.m^2 , Gear ratio= $\frac{N_B}{N_C} = G=4$,

moment of inertia of the gear wheel= 35Kg.m^2 . Determine the moment of inertia of the pump so that the frequency of torsional oscillation of the system is equal to 6.5cycles/sec.

14- A reciprocating internal combustion engine is coupled to centrifugal pump through gearing. The shaft from the flywheel of the engine to the gear wheel is 7cm diameter and 85cm long.

Shaft from the pinion to the pump is 3cm diameter and 28cm long. Engine speed is $\frac{1}{3}$ th the

pump speed. Other particular are the following:

Moment of inertia of the flywheel= 750 Kg.m^2 .

Moment of inertia of the gear wheel= 12 Kg.m^2 .

Moment of inertia of the pinion= 3 Kg.m^2 .

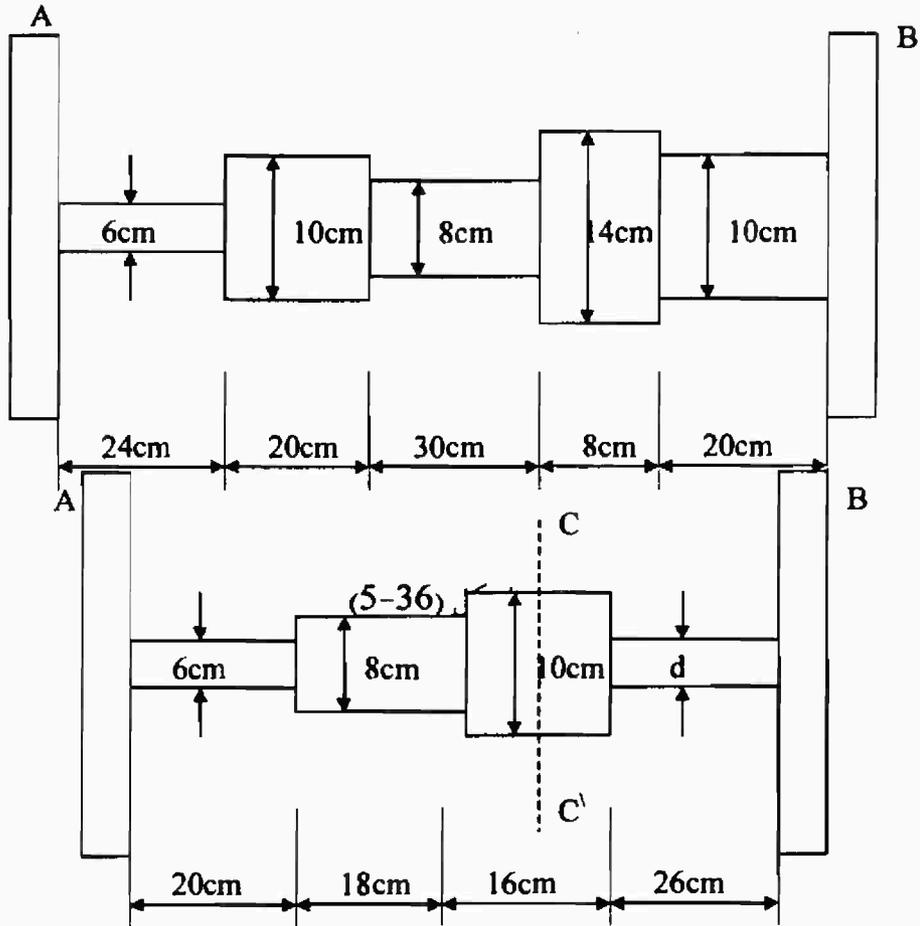
Moment of inertia of the pump impeller = 15 Kg.m^2 .

Determine the natural frequency of the torsional oscillation of the system.

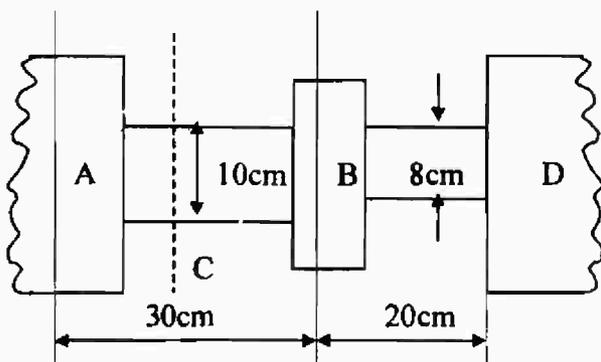
15- An electric motor drive a centrifugal pump running at 3 times its speed through gear and pinion. The steel shaft from the motor to the gear wheel is 4cm diameter and (L)cm long. The

shaft from pinion to centrifugal pump is 3cm diameter and 36cm long The weight and the radii of gyration of motor and centrifugal pump are respectively 22Kgf, 8cm, 32Kgf and 12cm.

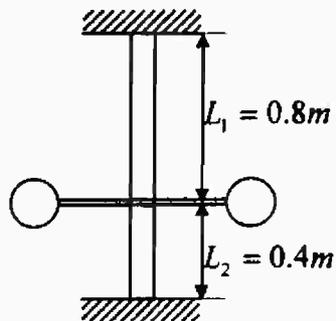
Inertia effect of gear may be neglected. Find the value of (L) if the gears are to be the node point for torsional vibrations $C = 84 \times 10^4 \text{ Kgf/cm}^2$.



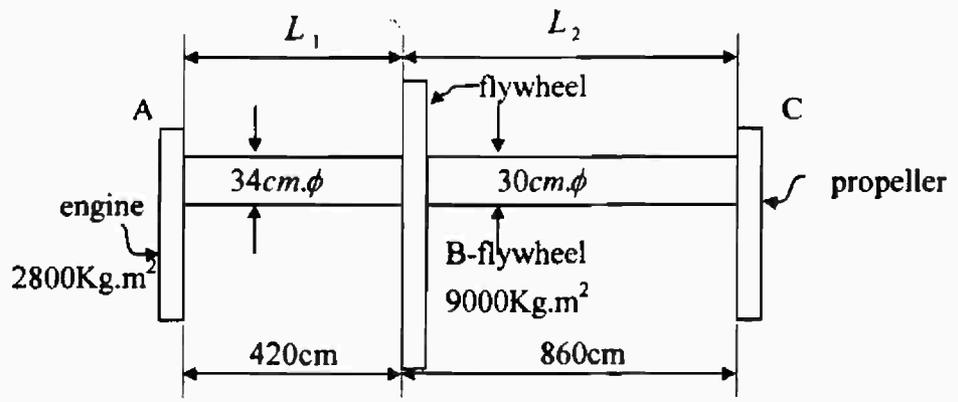
الشكل (5-37)



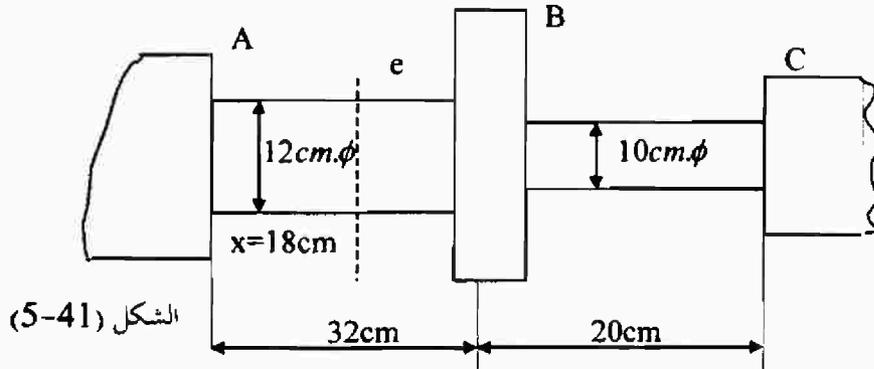
الشكل (5-38)



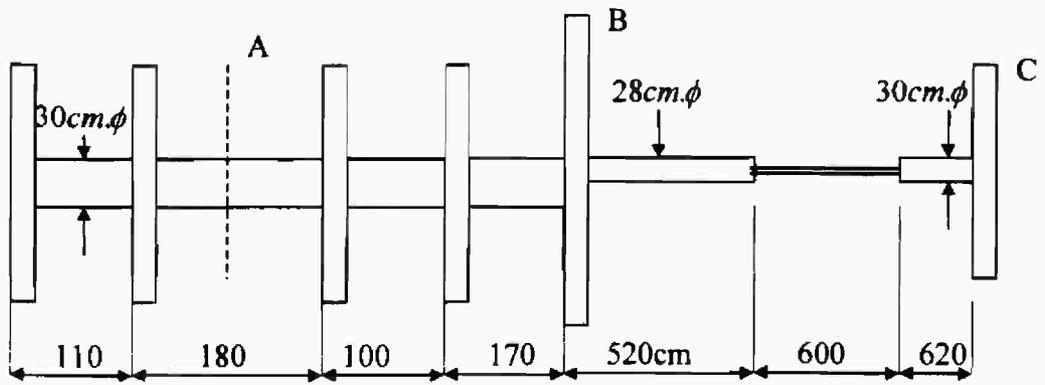
الشكل (5-39)



الشكل (5-40)



الشكل (5-41)



الشكل (5-42)