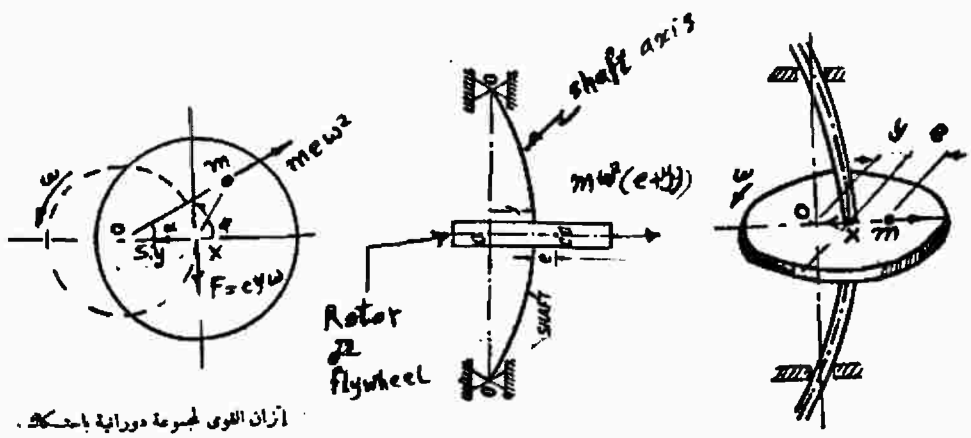
الباب السادس

السرعة الحرجة لعمود الإدارة

1- مقدمة:.

الاعمدة الدورانية تميل الى الاهتزاز فى الاتجاة العرضى والسرعة الحرجة فى الاعمدة الدورانيـــة تقابل ظاهرة الرنيين فى المنظومات الميكانيكية التى سبق دراستها فى البابين اللثالث والرابـــع والتـــى يتساوى فيها تردد الاستثارة مع التردد الطبيعى للمنظومة . وعندما يقترب تردد سرعة الـــدوران مـــن التردد الطبيعى للعمود فان سعة الاهتزاز تزداد وقد تشكل خطرا علية إذا زادت عن الحد المسموح بـــة لفترة طويلة نسبيا ، واذا كان إحتكاك الاجزاء الدورانية بالهواء او اى نوع اخر مـــن انـــواع الكبـــت صغيرا ، فان العمود يدور تحت تأثير قوتين متزنتين وهما مقاومة العمود للانثناء وقوة الطرد المركزية وذلك لاختلال التوازن بالاجزاء الدورانية.

2-السرعات الحرجة للاعمدة الدورانية:



(A) (B) (C)

الشكل(1-6) إنحراف العمود الدورانى

الشكل (6-1) يبين مركز الدوران عند النقطة 0 ، x محور العمود عند نقطة الانحـــراف ويـــدور هـــذا المحور حول (0) على نصف قطر y ، m تمثل كتلة خارجة عن التوازن(الحدافة) تبعـــد عـــن محـــور العمود بالمسافة e، وبفرض ان مقاومة العمود لوحدة الانحراف(جساءة العمود) عند المحـــور x هـــى S وان توازن القوتين السابقتين يعطى بالمعادلة التالية: $S.y=m(e+y)\omega^2$ حيـــث m هـــى كتلـــة الحدافـــة Flywheel ووزنها W او تمثل ثقل ما خارج عن التوازن متصل بعمود مهمل الوزن. وان مركز الثقـــل C.G للحدافة يبعد مسافة e عن محور الدوران وباعتبار ان S هى جساءة العمود stiffness of the shaft

وان y هي نصف قطر مسار الدوران للعمود او هـــي الازاحـــة الاضافيـــة additional displacement لمركز الثقل عن محور الدوران the axis of rotation نتيجة قوة الطرد المركزيـــــة centrifugal force وباعتبار ان ω هى السرعة الزاوية المنتظمة للعمود وان ω_c هى السرعة الحرجة للعمود اى ان:

ω= the uniform angular speed of the shaft in rad/sec

ω_c =the critical or whirling speed of the shaft in rad/sec

وتكون قوة الطرد المركزية والمسببة للانحناء تعين من العلاقة الاتية:

.Outward centrifugal force=$(W/g)\omega^2[y+e]$...(1)

والقوة الكامنة للانحناء يعبر عنها بالعلاقة التالية:

$$Force\ resisting\ deflection = S.Y = \frac{W}{g}\omega^2(y+e) = \frac{W}{g}\omega^2 y + \frac{W}{g}\omega^2 e ....(2)$$

$$\therefore S.y - \frac{W}{g}\omega^2 y = \frac{W\omega^2 .e}{g} = me\omega^2 \qquad \therefore y = \frac{me\omega^2}{S - m\omega^2} = \frac{e}{\frac{S}{m\omega^2} - 1}........(3)$$

والسرعة الحرجة تسمى ايضا بالسرعة التدويمية ويرمز لها بالرمز ω_n او بـــالرمز ω_c ، والانحـــراف الاستاتيكىΔ تحت تاثير الوزن W يعين من العلاقة الاتية:

$$\because \Delta = \frac{W}{S} \qquad \because \omega_c = \omega_n = \sqrt{\frac{g}{\Delta}}$$

$$\therefore \frac{y}{e} = \frac{1}{\frac{S.g}{W.\omega^2} - 1} = \frac{1}{\frac{g}{\Delta\omega^2} - 1} = \frac{1}{\frac{\omega_c^2}{\omega^2} - 1} = \frac{1}{\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2 - 1}.........................(4)$$

$$\therefore y = \frac{e}{\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2 - 1} = \frac{\omega^2 .e}{\omega_c^2 - \omega^2}..(5)$$

وعندما تكون $\omega = \omega_c$ فان المقام للمعادلة (5) يساوى الصفر ولهذا فان (y/e) تؤل الى مالانهاية وهـــذة المرحلة تسمى بمرحلة الرنين وهى اخطر مرحلة حيث يتساوى فيها تردد سرعة العمود مـــع الـــتردد الطبيعي للعمود فى الاتجاة الجانبى وهى المرحلـــة او الســـرعة الحرجـــة للعمـــود. واذا كـــانت $\omega >$ $(S.g/W)^{0.5}$ i.e $\omega > \omega_n$ فان الازاحة y تكون سالبة وهذا يعنى ان الكتلة m تـــدور داخـــل محـــور العمود ، ولهذا يمكن وضع الازلحة او نصف قطر الدوران y على صورة المعادلة الاتية:

$$y = \pm\frac{\omega^2 .e}{\omega_c^2 - \omega^2} = \pm\frac{e}{\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2 - 1}..(6)$$

اما اذا كان تاثير الاحتكاك مع الهواء او الجو المحيط بالقرص كبيرا فيمكن اخذة فى الاعتبـــار بواسطة القوة F التى تؤثر عند محور العمود x كما بالشكل (6-1-c) . وبفرض ان الاحتكاك لزجا فانـــة يعبر عن القوة F بالعلاقة التالية:

$$F=c.y.\omega \qquad (7)$$

حيث c هى معامل الكبت او التضائل. ويمكن التعبير عن توازن القوى بالمعادلتين الاتيتين للاتجـــاهين الافقى والراسى على الترتيب:

$$me\omega^2.\cos(\alpha)-S.y=0 \quad , \quad me\omega^2.\sin(\alpha)-c.y.\omega=0 \qquad (8)$$

ومن الشكل (6-1-c) يمكن ايجاد العلاقة بين الزاويتين α , ϕ كما يلى:

$$e.\sin\alpha=e.\sin\phi \quad , \quad e.\cos\alpha=y+e.\cos\phi \qquad (9)$$

$$from\ (8,9)\ \therefore m\omega^2(y+e.\cos\phi)-S.y=0 \quad , \quad me\omega^2.\sin\phi-c.y.\omega=0 \qquad (10)$$

$$\therefore from\ (10)\ \therefore \tan\phi=\frac{c\omega}{S-m\omega^2} \qquad (11)$$

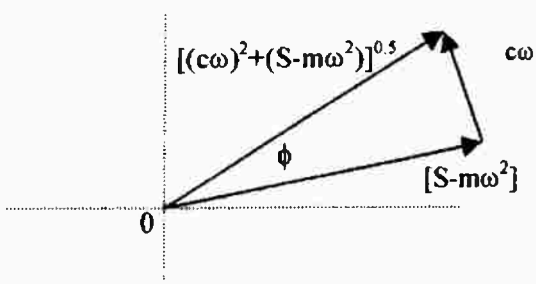
$$\therefore y=\frac{me\omega^2.\cos\phi}{S-m\omega^2}=\frac{me\omega^2}{\sqrt{(c\omega)^2+(S-m\omega^2)^2}}=\frac{er^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta.r)^2}} \qquad (12)$$

$$where \quad r=\frac{\omega}{\omega_n} \ , S\equiv k \ \ (stiffness\ \ of\ \ spring)$$

ونلاحظ ان المعادلة (11) تناظر المعادلة (13) التالية والخاصة بالاهتزلز الحر ذات الخمد والتى سبق شرحها بالباب الرابع ، وكذلك المعادلة (12) تناظر المعادلة (14) التالية والخاصة بالاهتزاز الجبرى ذات الخمد كما سبق شرحة ايضا بالباب الرابع:

$$\phi=\tan^{-1}\frac{c\omega}{(k-m\omega^2)} \qquad (13) \quad , \quad \frac{x}{x_1}=\frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta.r)^2}} \qquad (14)$$

ويمكن تمثيل ذلك بيانيا كما بالشكل (2-6) وبالتالى يكون الحل للمعادلتين (6-11,12) هو نفـــس الحـــل بالباب الرابع فى حالة الاهتزاز الجبرى مع الخمد لمنظومة تتكون من الكتلة والنابض والخامد.

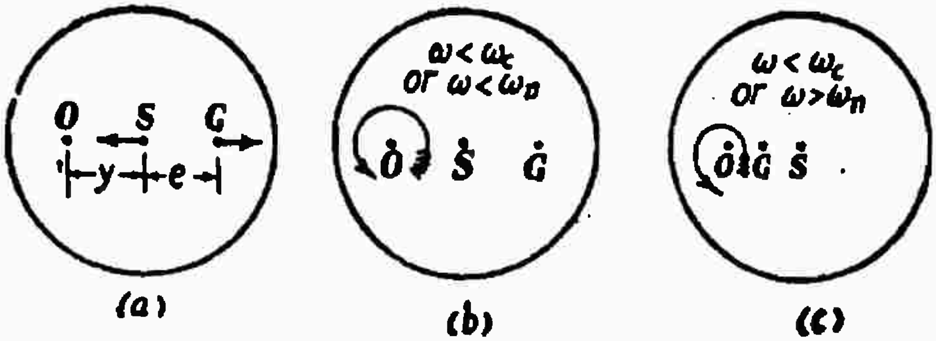


الشكل (2-6)

ويظهر من ذلك ان $y=x$ ، $Ar^2=x_1$ وبذلك يكـون $y \approx Ar^2$ عندمـا $r=0$ ، $y=0$ عندمـا r تسـاوى مالانهاية.

حيث y هى سعة الاهتزاز وبذلك نستنتج انة كلما زاد الكبت كلما قلت السعة y وتحدث حالـة الرنيـن عندما $r=1$

ملاحظات:



الشكل(6-3) يوضح السرعات المختلفة للعمود الدوار

1- النسبة (y/e) تؤل الى مالانهاية عندما $\omega_c=\omega$ وعند هذة السرعة يكون تردد الحركة الاهتزازية هـو التردد الطبيعى ω_n ويساوى سرعة العمود ، اى ان $\omega = \omega_c = \omega_n$ وفى هذة الحالة يسمى التردد الطبيعى بالسرعة الحرجة the natural frequency is called the critical or the whirling speed

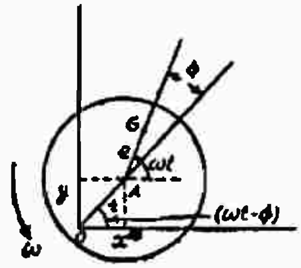
2-يلاحظ ان y تكون موجبة عندما تكون السرعة اقل من السرعة الحرجة وتكـون سـالبة اذا كـانت السرعة اكبر من ω_n اى عندما تكون $\omega<\omega_n$ فان المنظومة تدور على الجانب الثقيل with the heavy side ويكون G خارج S كما بالشكل (6-3-b). واذا كانت $\omega>\omega_n$ فان الجانب الخفيف والمقـابل الـى G يكون خارج S وهذا يقابل زاوية طورتساوى الصفر وهى الزاوية بين الازاحة وقوة الطرد المركـزى اى عندما تكون $\omega \le \omega_n$.

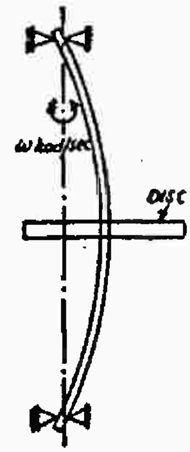
ويكون الفرق فى الزاوية 180° عندما تكون $\omega>\omega_n$. بينما فى حالة السرعات العالية جـدا نجـد ان $y=e$ وتنطبق كل من النقطتين O , G معا . ولهذا فان السرعة الحرجة لاهتزاز العمود تحدث عندمـا تصـل سرعة القرص الى الصفر.

<u>3-السرعات الحرجة للاعمدة الدورانية فى حالة الحمل المركزى مع وجود الخمد:</u>

The whirling or the critical speed of the shaft on carrying central load and with damping.

فى الشكل (6-4) يركب القرص بالعمود فى موضع القوة الديناميكية التى تؤثر فـى الاتجـاة القطـرى ويكون تحليل السرعات الحرجة للاعمدة الدورانية فى وجود الخمد. حيث (0) مركـز الـدوران ، (A) مركز القرص او العمود ، (G) مركز الثقل للقرص ، (e) المسافة اللامركزيـة centre eccentricity ، (m) كتلة القرص ويمكن كتابه معادلة الحركة فى حالة الازاحتين y,x كما يلى:





الشكل (6-4)

أ-إيجاد معادلة الحركة فى إتجاة (x):

$$m\frac{d}{dt^2}\left[x+e.\cos(\omega t)\right]=-kx-c\dot{x} \quad \therefore m\ddot{x}+kx+c\dot{x}=me\omega^2.\cos(\omega t)$$

$$\therefore \ddot{x}+\frac{c}{m}\dot{x}+\frac{k}{m}x=e\omega^2.\cos(\omega t) \quad ,\because c=2\zeta.m\omega_n \quad ,\frac{c}{m}=2\zeta.\omega_n \quad ,\omega_n^2=\frac{k}{m}$$

$$\therefore \ddot{x}+2\zeta.\omega_n\dot{x}+\omega_n^2.x=e.\omega^2.\cos(\omega t)\text{...}(15)$$

ب-إيجاد معادلة الحركة فى إتجاة y:

$$\because m\frac{d}{dt^2}\left(y+e.\sin(\omega t)\right)=-ky-c\frac{dy}{dt} \quad \therefore m\ddot{y}-me\omega^2.\sin(\omega t)+ky+c\dot{y}=0$$

$$\therefore \ddot{y}+2\zeta.\omega_n.\dot{y}+\omega_n^2.y=\omega^2e.\sin(\omega t)\text{...}(16)$$

ويمكن إيجاد الحل فى الحالة المستقرة Steady state كما يلى:

$$X=\frac{e.r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta.r)^2}}.\cos\left[\omega t-\phi)\right]\text{.................................}(17)$$

$$where \quad r=\frac{\omega}{\omega_n} \quad , \quad \phi=\tan^{-1}\left(\frac{2\zeta.r}{1-r}\right)$$

$$Y=\frac{e.r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta.r)^2}}.\sin\left[\omega t-\phi\right]\text{..}(18)$$

تمثل المعادلة (15) معادلة الحركة للمنظومة فى اتجاة x والمعادلة (16) تمثل معادلة الحركة للمنظومة فى اتجاة y ، والمعادلة (17) تمثل الحل فى الحالة المستقرة وفى إتجاة المحور x ، بينما المعادلة (18) تمثل الحل فى الحالة المستقرة وفى إتجاة المحور y ، ولهذا تكون حركة النقطة خلال المحورين فى دائرة مركزها (o) اى مسار حركة النقطة هى دائرة مركزها (o) ونصف قطر الدائرة يمكن تعينة من المعادلة التالية:

$$R = \frac{e.r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta.r)^2}} \quad \text{...} (19)$$

$$awithout \quad damping \quad \zeta = 0 \quad , \quad R = \frac{e.r^2}{1-r^2} \quad \text{...} (20)$$

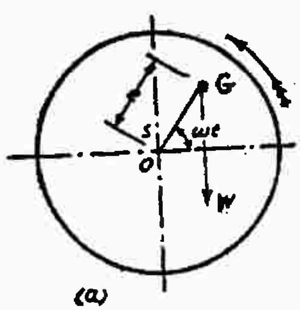
ملاحظات-

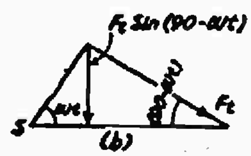
1-عندما تكون الزاوية ϕ صغيرة عند الترددات النخفضة فان نسبة السرعة r تقترب من الصفر ولهذا فان الزاوية ϕ سوف تقترب من الصفر ايضا نتيجة ان النقط O, A , G على خط عمل واحد اى ان (Points O,A,G to be linear) 2-عندما تكون نسبة السرعة r كبيرة نسبيا فان الزاوية ϕ =180° لان النقط O , A G تكون على إستقامة واحدة مع مركز الثقل اى ان (Points O , A G to be collinear with C.G) ويكون فى هذة الحالة A هى مركز العمود.

3-عندما تكون r كبيرة جدا ، فان إنحناء العمود مع وجود نسبة من الخمد قريبا من البعد اللامركزى (e) وان $r^2 \cong (1-r^2)$ ونظرا لانة لاتوجد نسبة للمقارنة بين المقدار $(2\xi.r)^2$ والمقدار $(1-r^2)$ فان فى حالة السرعة العالية للقرص فان القرص يدور حول مركز الثقل C.G.

4 - *السرعة الثانوية الحرجة للعمود*: ***Secondary critical speed***

قوة الطرد المركزية الناتجة من عدم إتزان الكتل الدوارة تسبب السرعة الحرجة الاساسية (main critical speed) للاعمدة الدورانية. وبجانب ذلك نلاحظ ان اكثر الاهتزازات توجد عند منتصف السرعة الحرجة فى حالة الاعمدة الافقية (Horizontal Shaft). ولكن هذة الاهتزازت تختفى فى حالة الاعمدة الرأسية (Vertical Safts) ولهذا فان ثقل الكتل (The Gravity of the Masses) تكون مسئولة عن حدوث هذة الاهتزازات.





الشكل(5-6)يوضح السرعة الثانوية الحرجة للعمود

عندما لاتوجد إهتزازات فان المركز الهندسى (S=gemetric center) يكون متطابق coinciderес مع محور كرسى التحميل (O) bearing axis ، فاذا إعتبرنا ان G هى مركز الثقل للقرص وموضوع على مسافة (e) من المركز الهندسى فانة فى حالة دوران العمود مع القرص وفى اتجاة مضاد لاتجاة عقارب الساعة فان العزم الناتج من وزن القرص (W) يؤخر حركة القرص عندما يكون مركز الثقل G فى

الربع الاول والرابع ويعمل على تعجيل الحركة (acceleration of motion) عندما يقع مركز الثقل G فى الربع الثانى والثالث ويمكن تعيين كل من العزم والعجلة المماسية f^t والقوة المماسية F_t من المعـــادلات الاتية:

$$The Torque = T = W.e.\cos(\omega t) = I.\alpha \quad \therefore \alpha = \frac{We.\cos(\omega t)}{I}$$

$$\because f' = \alpha.e \quad \therefore f' = \frac{W}{I}.e^2.\cos(\omega t)\text{...}(21)$$

$$\therefore F_t = \frac{W}{g}.f' = \frac{W}{g}.\frac{W}{I}.e^2.\cos(\omega t)$$

حيث I عزم القصور الذاتى للقرص ومن مثلث القوى المبين بالشكل(6-5-b) نجد ان القوة المماسية فى الاتجاة الراسى تعين كما يلى:

$$\therefore Ft = \frac{W}{g}.\frac{W}{I}.e^2.\cos(\omega t).\sin(90-\omega t) = \frac{W^2}{gI}.e^2.\cos^2(\omega t) = \frac{W^2}{2gI}.e^2\left[1+\cos(2\omega t)\right]$$

$$\therefore F_t = \frac{W^2}{2gI}.e^2 + \frac{W^2}{2gI}.e^2.\cos(2\omega t)\text{...}(22)$$

والجزء الاول فى المعادلة (22) يكون ثابت ويمثل اى إنحناء إضافى للعمود ويعـــبر عنـــة بالعلاقـــة $(W^2/2gI).e^2$

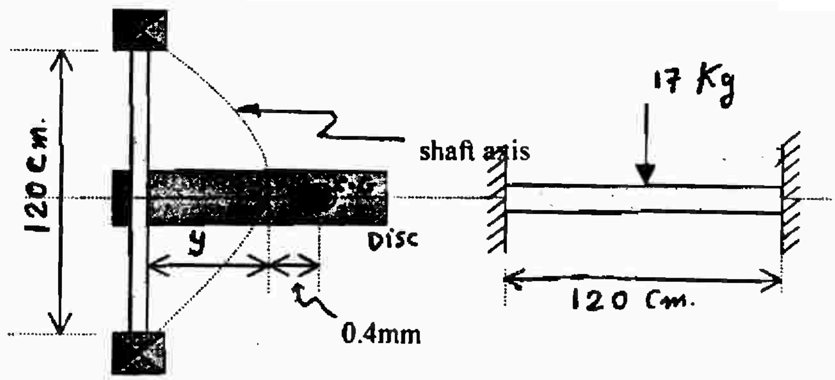
والجزء الثانى يكون ذات تردد$(\omega_c/2)$ ، واذا دار العمود عند منتصف السرعة الحرجة اىعندمـــا $(\omega_c/2)$ تمثل الاختلاف فى القوة الراسية والذى يحدث عند التردد الطبيعي وتسبب اهتزازات عالية فىالعمود.

مسائل محلولة

1-A vertical shaft 18 mm diameter rotates in long bearings and a disc weighing 17 kg is attached to the mid span of the shaft. The span of the shaft between bearings is 1..2 m. The mass centre of the disc is 0.4 mm from the axis of the shaft. Neglecting the mass of the shaft , and taking the deflection as for a fixed beam at both ends. Find (1)the critical speed of rotation, and (2)the range of speed over which the stress in the shaft due to bending will not exceed 750 kg/cm^2. the young 's modulus for the material of the shaft may be taken as 2(10^6) kg/cm^2

1-عمود رأسى قطرة 18 مم يدور حول كرسى تحميل طويل ، قرص وزنة 17 كجم متصل بمنتصـــف العمود والمسافة بين كرسى التحميل 1.2 متر ومركز ثقل القرص يكون على بعد 0.4 مم مـــن محـــور العمود. إهمل كتلة العمود مع أخذ الانحراف كما لو كان عتبة مثبتة من كـــل مـــن نهايتيـــها . أوجـــد (1)السرعة الحرجة للدوران. (2)مدى زيادة السرعة حيث الاجهاد فى العمود نتيجة الانحناء لايتجـــاوز 750 كجم/ سم^2 ، اذا علم ان معامل المرونة لمادة القضيب 2(10^6)kg/cm^2

الحل:



الشكل(6-6)

يمكن تعيين الانحراف الاستاتيكي والسرعة الحرجة للدوران كما يلي:

$$\because d = 18mm \quad ,W_{disc} = 17kg \quad ,L = 120cm \quad ,e = 0.4mm \quad \sigma_{bending} = 750kg/cm$$

$$,E = 2(10^6)kg/cm \quad , \quad I = moment \ of \ inertia = \frac{\pi}{64}d^4 = \frac{\pi}{64}(1.8)^4 = 0.52cm^4$$

$$\therefore \Delta = \frac{WL^3}{192EI} = \frac{17(120)^3}{192(2)(10^6)(0.52)} = 0.15cm$$

$$\therefore Natural \ frequency \ of \ Transverse \ vibration(f_n) = \frac{4.897}{\sqrt{\Delta}} = \frac{4.897}{\sqrt{0.15}} = 12.7c.p.s$$

$$(1)Critical \ speed \ of \ rotation = (f_n)(60) = (12.7)(60)762r.p.m = N_c$$

$$(2)Rang \ of \ speed \quad assume \ N_1 = \max imum \ speed \quad ,N_2 = \min mum \ speed$$

وبفرض ان اقل سرعة N_1 ، واقصى سرعة N_2 ، وعند بداية دوران العمود فانة يمكن إيجاد الحمل الديناميكي المضاف W1 الى العمود وكذلك ايجاد الانحراف او الاستطالة المضافة y وايجاد مدى السرعة كما يلي:

$$\because \frac{M}{I} = \frac{\sigma_b}{y} \quad \therefore M = \frac{\sigma_b.I}{y_1} \quad \therefore \frac{W_1.L}{8} = \frac{\sigma_b I}{d/2} \quad where \ y_1 = \frac{d}{2} \therefore W_1 = \frac{8\sigma_b I}{(d/2)L} = \frac{8(2)(750)(0.52)}{(1.8)(120)} = 28.9 \ kg$$

$$The \ additional \ deflection \ due \ to \ W_1 = y = \left(\frac{W_1}{W}\right)(\Delta) = \left(\frac{28.9}{17}\right)(0.15) = 0.25cm$$

$$\therefore y = \frac{\pm e}{\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2 - 1} \quad \therefore \pm\frac{y}{e} = \frac{1}{\left(\frac{N_c}{N}\right)^2 - 1} \quad \therefore \pm\frac{0.25}{0.04} = \frac{1}{\left(\frac{N_c}{N}\right)^2 - 1} \quad \therefore \left(\frac{N_c}{N}\right)^2 - 1 = \pm 0.16$$

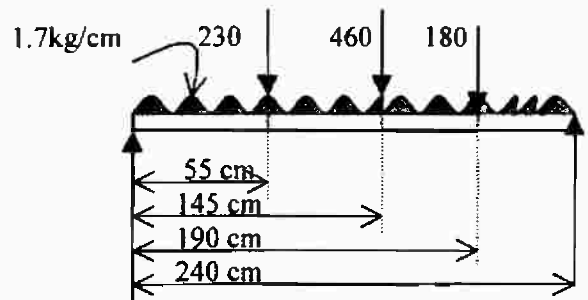
$$\therefore \left(\frac{N_c}{N}\right)^2 = 1 \pm 0.16 = 1.16 \ or \ 0.84 \ ,\therefore at \left(\frac{N_c}{N}\right)^2 = 1.16 \therefore N_1 = \frac{N_c}{\sqrt{1.16}} = \frac{762}{1.077} = 707r.p.m$$

$$at \left(\frac{N_c}{N}\right)^2 = 0.84 \quad \therefore N_2 = \frac{762}{\sqrt{0.84}} = 831r.p.m \quad \therefore Range \ of \ speed \ from \ 707r.p.m \ to \ 831r.p.m$$

2-A shaft 16 cm diameter is supported in two bearing 240 cm apart. It carries three discs of weight 230 kg , 460 kg and 180 kg at 55 cm , 145 cm and 190 cm from the left hand. Assuming the shaft to weight 1.7 kg/cm length determine the critical speed of the shaft. Young's modulus for the material of the shaft is $2.11(10^6)$ kg/cm^2

2- عمود قطرة 16 سم موضوع على كرسين تحميل ، البعد بينهما 240 سم ، يحمل ثلاث اقراص وزنها 230 كجم ، 460 كجم ، 180، كجم عند 55 سم ، 145، سم ، 190 سم ناحية اليد اليسرى (الجانب الايسر). إفرض ان وزن العمود 1.7 كجم لكل واحد سنتميتر من الطول ، أوجد السرعة الحرجة للعمود ، معامل يانج (معامل المرونة) لمادة العمود $2.11(10^6)$ كجم / سم^2

الحل:



الشكل (6−7)

$$W_1 = 230kg \quad ,W_2 = 460kg \,,W_3 = 180kg \quad ,I = \frac{\pi}{64}d^4 = \frac{\pi}{64}(16)^4 = 3215.36cm^4$$

$$w = 1.7kg/cm, E = 2.11(10^6)kg/cm^2$$

$$\because \text{Static deflection due to a weight} (W) = \Delta = \frac{WL_1^2L_2^2}{3EIL} \quad \therefore at \ W = 230kg$$

$$\Delta_1 = \frac{230(55)^2(185)^2}{3(2.11)(10^6)(3215.36)(240)} = 0.0048cm \quad where L_1 = 55cm \quad ,L_2 = 185cm$$

$$\Delta_2 \ due \ to \ 460kg = \frac{480(145)^2(95)^2}{3(2.11)(10^6)(3215.36)(240)} = 0.0186 \ cm \ where L_1, L_2 = 145,95cm$$

$$\Delta_3 \ due \ to \ 180kg = \frac{180(190)^2(50)^2}{3(2.11)(10)^6(3215.36)(240)} = 0.0033cm \ where L_1, L_2 = 190,50cm$$

وبذلك يمكن تعيين الانحراف الاستاتيكى(Δ_S) نتيجة الحمل المنتظم التوزيــــع وحيــث ان الســرعة الحرجة للعمود هى نفس السرعة عند التردد الطبيعى للاهتزاز العرضى ، والتردد الطبيعى f_n للاهتزاز العرضى يمكن تعينة أيضاكما يلى:

$$\therefore \Delta_s = \frac{5}{348}\left(\frac{wL^4}{EI}\right) = \frac{5}{348}\left(\frac{1.7(240)^2}{2.11(10)^6(3215.36}\right) = 0.207(10)^{-6}cm$$

$$\therefore f_n = \frac{4.987}{\sqrt{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \frac{\Delta_s}{1.27}}} = \frac{4.987}{\sqrt{0.0048 + 0.0186 + 0.0033 + \frac{0.2(10)^{-6}}{1.27}}} = 30.59 rev/\sec$$

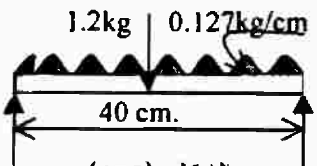
$$\therefore N_c = f_n(60) = 30.59(60) = 1835.7 \ rpm$$

3-Calculate the whirling speed of a shaft 1.8 cm diameter and 0.4m long carrying a load of 1.2 kg at its mid-point. The density of the shaft material is 0.05 kg/cm^3 and youngs modulus is 2(10)^6 kg/cm^2. Assume the shaft to be freely supported.

3-إحسب السرعة الحرجة لعمود قطرة 1.8 سم وطولة 0.4 متر يحمل حمل 1.2كجم عند منتصفة ، كثافة مادة العمود 0.05 كجم/ سم^3 ومعامل المرونة ($2(10^6$ كجم/سم2 . إفرض ان العمود حر الاسناد.

الحل:

L=40 cm , W=1.2 kg , d=1.8 cm , $I=(\pi/64)(1.8)^2=0.52$ cm^2 , w=(area)(length)(density)



الشكل (6-8)

حيث w هى وزن العمود لكل وحدة طول weight of the shaft per uint length ويمكن تعين الانحناء الاستاتيكى Δ_s نتيجة الحمل 1.2 كجم عند منتصف العمود وكذلك تعيين كل من التردد الطبيعى (f_n) والسرعة الحرجة (N_c) للاهتزاز العرضي كما يلي:

$$\therefore w = A.L.\rho = \frac{\pi}{4}(1.8)^2(1)(0.05) = 0.127 \ \ kg/cm$$

$$\because \Delta = \frac{WL^3}{48EI} = \frac{(1.2)(40)^3}{48(2)(10^6)(0.52)} = 1.538(10)^{-3} \ \ cm$$

$$\Delta_s = \frac{5wL^4}{384EI} = \frac{5(0.127)(40)^2}{384(2)(10^6)(0.52)} = 0.00407 \ \ cm$$

$$\therefore Frequency \ \ of \ \ Transverse \ \ vibration = f_n =$$

$$\therefore f_n = \frac{4.987}{\sqrt{\Delta + \frac{\Delta_s}{1.27}}} = \frac{4.987}{\sqrt{0.00154 + \frac{0.00407}{1.27}}} = 72.1 \ \ cycle/\sec$$

$$\therefore N_c = The \ \ whirling \ \ speed \ \ of \ \ a \ \ shaft = 72.1(60) = 4342.8 \ \ rpm$$

4-A rotor weighing 18 kgf is mounted mid-way on a 1.8 cm. diameter horizontal shaft supported at the ends by two bearings. The bearing span is 70 cm. Beacause of certain manufacturing defect , the centre of gravity of the disc is 0.015 mm away from the gegmetric centre of the rotor. if the system rotates at 3100 rpm , determine , the .amplitude of the steady state vibration and the dynamic force transmitted to the bearing , E=2(10)^6 kgf/cm^2

4-دوار وزنة 18 kgf مركب فى منتصف عمود أفقى قطرة 1.8 cm. مسند عند طرفية بواسطة كرسيان تحميل. البعد بين كرسى التحميل 70 cm، نتيجة لعدم دقة التصنيع فان مركز ثقل الدوار ينحرف عن المركز الهندسى بقدار 0.015 mm ، إذا كانت هذة المنظومة تدور بسرعة 3100 rpm. ، أوجد السعة للاهتزاز فى الحالة المستقرة والقوى الديناميكية المنتقلة الى كراسى التحميل ، حيث E=2(10^6) kgf/cm^2

لاشارة السالبة توضح ان الازاحة تكون خارج الطور ومع قوة الطرد المركزية ، والحمل على كراسى التحميل يتضمن الحل نتيجة الثقل بالاضافة الى الحمل الديناميكى.

$$\because k = S = \frac{48EI}{L^3} = \frac{48(2)(10)^6 \frac{\pi}{64}(1.8)^4}{(70)^3} = 144 \ \ kgf/cm$$

$$\therefore \omega_n = \omega_c = \sqrt{\frac{g}{\Delta}} = \sqrt{\frac{S.g}{W}} = \sqrt{\frac{144(981)}{18}} = 88.6 rad/\sec$$

$$\because \omega = \frac{2\pi.ne}{60} = \frac{2\pi(3100)}{60} = 324.5 rad/\sec \ \ ,\therefore r = \frac{\omega}{\omega_c} = \frac{324.5}{88.6} = 3.66$$

$$\therefore r^2 = 13.41 \quad \therefore y = \frac{r^2.e}{1-r^2} = \frac{13.41(0.0015)}{1-13.41} = -0.00162 \ \ cm$$

$$\therefore the\ dynamic load\ on\ the\ bearing = R_{dynamic} = S.y = 144(0.00162) = 0.233\ kgf$$

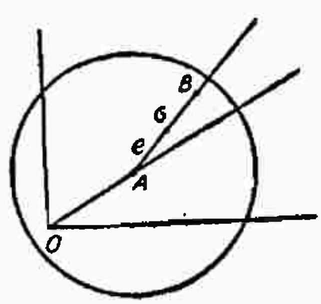
$$\therefore the\ total\ load\ on\ each bearing = \frac{W}{2} + \frac{R_{dynamic}}{2}$$

$$\therefore R_{each\,bearing} = \frac{18}{2} + \frac{0.233}{2} = 9.117\ kgf$$

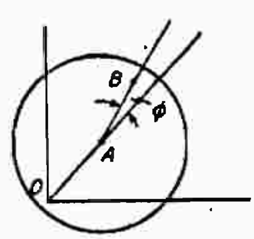
5-A disc attached to the middle of a flexible shaft has a critical speed of 2200 rpm. After the disc had been balanced , an additional balance weight of 45 grm weight was attached to the disc at a distance of 0.3 m from its centre and the shaft was than rotated at 1450 rpm. By means of stroboscope the phase angle ϕ was found to be 12°. Find the radius of the circle described by the centre of the disc when the weight of the disc is 13 kgf.

Fig.(6-8)shows (o) as the centre of rotation , A as the centre of the disc ,and B as the balance weightt of 45

5- قرص مركب فى وسط محور مرن يدور بسرعة حرجة مقدارها 2200 rpm، لقد تم إتزان القـرص باضافة وزن مقدارة 45 جرام على بعد 0.3متر من المركز ، بعدها تـم تدويـر المحـور بسـرعة 1450 rpm بواسطة جهاز قياس الذبذبات وجد ان زاوية الطور ϕ مقدارها 12°. أوجـد نصـف قطـر الدائرة حول مركز القرص عندما يكون وزن القرص 13kgf ، الشـكل(6-8) يوضـح ان (o) مركـز الدوران ، Aمركز القرص ، B ثقل الاتزان بمقدار 45 جرام.



(a)



(b)

الشكل(6-9a,b)

إعتبر ان e هي بعد مركز الثقل للقرص بعد إضافة كتلة 50 جرام للوزن عن المركز الهندسي A كمـــا مبين بالشكل (6-9).

$$\because 13\ e=(30-e)(0.045)\ ,\therefore e=0.103cm\ ,\phi=12^\circ \quad \tan\phi=\tan(12^\circ)=\left(\frac{2\zeta r}{1-r^2}\right)=0.2125$$

$$\because r=\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)=\frac{1450}{2200}=0.66\quad \therefore r^2=0.436\quad \therefore \frac{2\zeta(0.66)}{1-(0.436)}=0.2125\quad \therefore \zeta=0.0908$$

$$\because R=The\ radius\ of\ the\ circle=\frac{er^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}=$$

$$\therefore R=\frac{0.103(0.436)}{\sqrt{[1-(0.436)]^2+[2(0.0908)(0.66)]^2}}=0.079\ cm$$

6-A steel shaft 60 cm. long and 2 cm. diameter on two spherical beerings , on the mid span , a mass of 14 kg installed , if there is an eccentricity that gives a moment 4 kg.cm. Find the maximum deflection of the shaft at speed 92% of the critical speed.

6-كرسين محورين كروين يدور بينهم عمود من الصلب طولة 60 سم وقطرة 2سم ، وضع علية قرص عند منتصفة كتلتة 14 كجم ، فاذا وجد لامركزية بالقرص (نتجة الدوران حدث رفة بالقرص) فتولد عنة عزم مقدارة 0.4 كجم.سم . أوجد أقصى إنحراف بالعمود عندما يدور بسرعة 92% من السرعة الحرجة.

الحل:

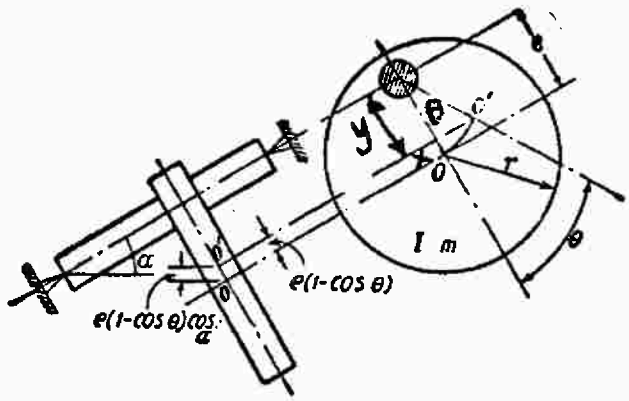
$$\because R=\frac{me\omega^2}{k-m\omega^2}\quad \because \omega_n^2=\frac{k}{m}\quad R=\frac{\frac{me\omega}{k}}{\frac{k-m\omega^2}{k}}=\frac{e.r^2}{1-r^2}\ ,\because r=\frac{\omega}{\omega_n}=0.92$$

$$\because moment=m.e=0.4kg.cm\quad \therefore e=\frac{0.4}{m}=\frac{0.4}{14}=0.0286\ \ cm$$

$$\therefore R=\frac{0.0286(0.92)^2}{1-(0.92)^2}=0.16\ \ cm.$$

7-A circular disc is attached to shaft as shown in fig(6-10). If the ecentricity of the discis (e) end the shaft is inclined at an angle with the horizontal plane, determinethe equation of motion of the system by the energy method , solve the problem by newton;s law of motion also.

7-قرص دائرى متصل بعمود كما بالشكل (6-10) ، اذا كانت e هى لامركزية للقـــرص فـــى نهايـــة العمود ويميل بزاوية على المستوى الافقى. أوجد معادلة الحركة للمنظومة بطريقـــة الطاقـــة وايضــا بقانون نيوتن للحركة.



الشكل(10−6)

أ-طريقة الطاقة:

من الرسم المبين بالشكل(10−6)

$$\because x = e - y \qquad ,\cos\theta = \frac{y}{e} \quad \therefore y = e.\cos\theta \qquad \therefore x = e - e\cos\theta = e(1-\cos\theta)$$

$$oo' = e(1-\cos\theta)\cos\alpha$$

وعزم القصور الذاتى للقرص حول مركز العمود:

$$\therefore I = I + me^2 = \frac{1}{2}mr^2 + me^2 = m(\frac{r^2}{2} + e^2)$$

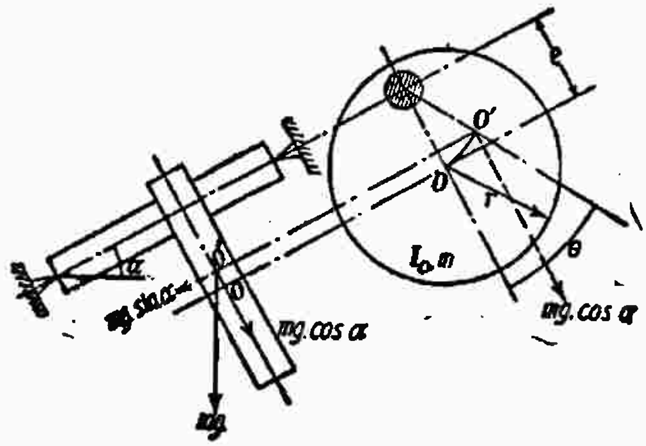
$$K.E = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m(\frac{r^2}{2}+e^2)\dot{\theta}^2 \quad , \quad P.E = mge(1-\cos\theta)\cos\alpha$$

$$\therefore \frac{d(T.E.)}{dt} = 0 = \frac{1}{2}m(\frac{r^2}{2}+e^2)\left(2\dot{\theta}\ddot{\theta}\right) + mge\cos\alpha.\sin\theta\,\theta = 0 \quad where \quad \sin\theta \cong \theta$$

$$\therefore m(\frac{r}{2}+e^2)\ddot{\theta} + mge\cos\alpha.\theta = 0 \quad \therefore \ddot{\theta} + \left[\frac{g.e.\cos\alpha}{\left(\frac{r^2}{2}+e^2\right)}\right]\theta = 0 \quad \therefore f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g.e.\cos\alpha}{\left(\frac{r^2}{2}+e^2\right)}} \quad c.p..s$$

طريقة نيوتن:

مع إعتبار ان مركبتين للوزن وهما mg.sinα عمودية على مستوى القرص ، والمركبة mgcosα فى مستوى القرص وتمثل عتلة للذراع الذى يمثلة e.sinθ.



الشكل (6-11)

$$I = I_{\circ} + me^2 = m(\frac{r^2}{2} + e^2)$$

$$\therefore I\ddot{\theta} = -mge.\cos\alpha.\sin\theta = -mge.\cos\alpha.\theta$$

$$\therefore m(\frac{r^2}{2} + e^2)\ddot{\theta} + mge.\cos\alpha.\theta = 0$$

$$\therefore \ddot{\theta} + \left(\frac{ge.\cos\alpha}{\frac{r^2}{2} + e^2}\right)\theta = 0 \qquad \therefore f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{ge,\cos\alpha}{\frac{r^2}{2} + e^2}} \quad c.p.s$$

1-A vertical shaft 20 mm diameter rotates in long bearings and a disc weighing 24 kg is attached to the mid span of the shaft. The span of the shaft between bearings is 1..6 m. The mass centre of the disc is 0.5 mm from the axis of the shaft. Neglecting the mass of the shaft , and taking the deflection as for a fixed beam at both ends. Find (1)the critical speed of rotation, and (2)the range of speed over which the stress in the shaft due to bending will not exceed 800 kg/cm^2. the young 's modulus for the material of the shaft may be taken as $2(10^6)$ kg/cm^2

2-A shaft 18 cm diameter is supported in two bearing 280 cm apart. It carries three discs of weight 210 kg , 420 kg and 150 kg at 70 cm , 160 cm and 220cm from the left hand. Assuming the shaft to weight 20 kg/cm length

determine the critical speed of the shaft. Young's modulus for the material of the shaft is $2.1(10^6)$ kg/cm^2 -

3-Calculate the whirling speed of a shaft 1.4 cm diameterand 0.3m long carrying a load of 1.4 kg at its mid-point. The density of the shaft material is 0.06 kg/cm^3 and youngs modulus is $2.11(10)^6$ kg/cm^2. Assume the shaft to be freely supported.

4-A rotor weighing 22 kgf is mounted mid-way on a 2cm. diameter horizontal shaft supported at the ends by two bearings. The bearing span is 90 cm. Beacause of certain manufacturing defect , the centre of gravity of the disc is 0.018 mm away from the gegmetric centre of the rotor. if the system rotates at 3400 rpm , determine , the .amplitude of the steady state vibration and the dynamic force transmitted to the bearing , $E=2.1(10)^6$ kgf/cm^2

5-A disc attached to the middle of a flexible shaft has a critical speed of 2500 rpm. After the disc had been balanced , an additional balance weight of 60 grm weight was attached to the disc at a distance of 0.4 m from its centre and the shaft was than rotated at 1600 rpm. By means of stroboscope the phase angle ϕ was found to be 15°. Find the radius of the circle described by the centre of the disc when the weight of the disc is 16 kgf.

Fig.(6-8)shows (0) as the centre of rotation , A as the centre of the disc ,and B as the balance weightt of gram

6-A steel shaft 80 cm. long and 1.8 cm. diameter on two spherical beerings , on the mid span , a mass of 16 kg installed , if there is an eccentricity that gives a moment 5 kg.cm. Find the maximum deflection of the shaft at speed 90 % of the critical speed.

7-A heavy rotor weighs 1300 kg and is fixed at mid span to a shaft 12 cm diameter and 184 cm long. The axil length of the rotor is 92 cm. and it may be assumed that over this length the shaft is prevented from bending. If the ends of the shaft are supported in long bearings and young s modulus for the shaft material is $2(10^6)$ kg/cm^2. Find the whirling speed of the shaft.

8- A shaft 1.3 cm. diameter rotates in long bearing s and a disc of mass 18 kg is secured to a shaft at the middle of its length. The span of the shaft betweenthe beering is 52 cm. The mass centre of the disc is 0.6 mm. from the axis of the shaft. Neglecting the mass of the shaft and taking $E=2(10^6)kg/cm^2$,Find:

(1)Critical speed of rotation in rpm and (2)-The range of speed over which the stress in the shaft due to bending will not exceed 1200 kg/cm 2

9-A vertical shaft 22mm diameter and 0.7 m long is mounted in long beerings and carries a pulley of mass 12 kg midway between the beerings. the centre of pully is o.6 mm from the axis of the shaft. Find:

(a)-the whirling speed ,and(b)-the bending stress in the shaft , when it is rotating at 1650 rpm. Neglect the weight of the shaft and assume E=200 GN/m^2.

10-A shaft 4 in. dia. is supported in bearing 8ft. apart. It carries two pulleys which weighs 500 lb. and 300 lb at distances of 3 ft. and 6 ft. respecttively from one bearing . Calculate the whirling speed by (a)-Dunkerley s method.

(b)the energy method. Find the value of the conatant C in the equation

$N_C=(C/\Delta_m)$, Where Nc is the Whirling speed and Δm is the maximum static of the shaf