الباب السابع

المنظومات ثنائية درجة الحرية

1-مقدمة:

المنظومات التى لها حركتان مستقلتان وغير توافقيتان وتحتاج الى إحداثين لوصـف الحركـة تسـمى بالمنظومات ثنائية الحركة . ولكن توجد حالة خاصة والتى تتحرك فيها الوحدتان بحركة توافقية وتـردد واحد تسمى بالحالة الرئيسية (Principle mode) ويسمى التردد فى هذة الحالة بالتردد الطبيعى ، أمـا إذا اعتبرنا ان إحدى الوحدات المترددة واحدا صحيحا فانة يطلق على الحركة بالحالة الاعتياديـة (normal mode) ويلاحظ ان عدد الحالات الاعتيادية لكل مجموعة يقابل عدد درجات حريتها ، ومثال على ذلـك نجد ان المجموعة ثنائية الحركة (ذات درجتين من الحرية) يكون لها حالتان إعتياديتان ، مع ملاحظة ان المننظومات ذات درجتين من الحرية وغير المخمدة تكون حركتها دورية وتتكـون مـن العديـد مـن الحركات الترددية ولكن المنظومات ذات درجتين من الحرية ومع الخمد فان حركتها لاتكـون دوريـة وبذلك فهى لاتكون حركات توافقية . والشكل (7-1) يوضح الكثير من الامثلة علـى المنظومـات ذات درجتين من الحرية حيث نلاحظ ما يلى:-

1-المنظومة المبينة بالشكل (7-1-a) تتكون من كتلتين m_2 , m_1 ونابضين معاملهما k_2 , k_1 وتؤثـر علـى الكتلة m_1 قوة إستثارة $F_o \sin\omega t$ ولتحديد موضع الكتلتين فى الفراغ نحتاج الى إحداثى واحد فقط لكل كتلة ويمثل كل من الازاحتين $x_1(t)$ ، $x_2(t)$ بالنسبة للزمن (t) ، ولذلك فهذة المنظومة ذات درجتين من الحرية اىهى منظومة ثنائية الحركة.

2-المنظومة المبينة بالشكل (7-1-b) تتكون ايضا من كتلتين m_2 , m_1 ونابضين k_2 , k_1 وخامدين c_2 , c_1 ولوصف حركة هذة المنظومةوتحديد موضعها فى الفراغ يلزم إحداثين وهمـا $x_1(t)$, $x_2(t)$ وذلـك بالنسبة للزمن (t) ولهذا فهى منظومة ذات درجتين من الحرية اى ثنائية الحركة.

3-المنظومة المبينة بالشكل (7-1-c) تمثل بندول مركب يتكون ايضا من كتلتين m_2 , m_1 ونلاحظ وجـود ثلاث احداثيات لوصف الحركة وتحديد موضع كل كتلة فى الفراغ و الاحداثيات الثلاثة هـى , $\theta_2(t)$ $\theta_1(t)$ - $y_2(t)$, $y_1(t)$ - $x_2(t)$, $x_1(t)$ ،ويلاحظ انة يكفى احداثين فقط من هذة الاحداثيات الثلاثة لوصف

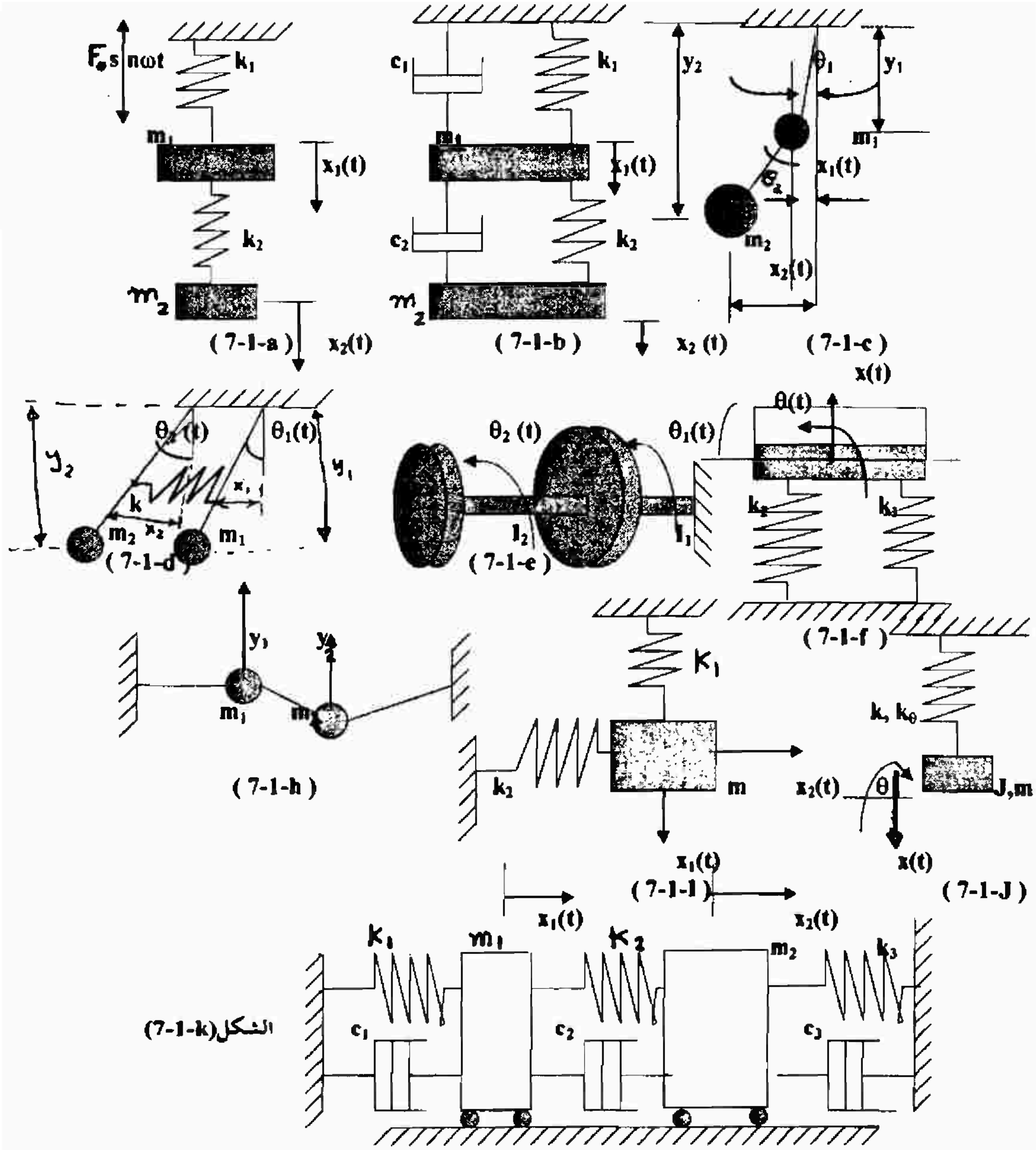
حركة المنظومة وتحديد موضع الكتلتين فى الفراغ ولذلك تعتبر هذة المنظومة ذات درجتين من الحرية اى منظومة ثنائية الحركة.

4-المنظومة المبينة بالشكل (7-1-d) تعتبر ايضا منظومة ذات درجتين من الحرية حيث انها تمثل بندولان بسيطان مع ملاحظة وجود ثلاث أحداثيات وهما الازاحة الزاوية لكل بندول $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$ والاحداثين الاخرين متمثل فى الازاحة الخطيةالافقية لكل كتلة $x1(t)$, $x2(t)$ والازاحة الراسية لكل كتلة $y_1(t)$, $y_2(t)$ ، واى إحداثين منهما كافيان لوصف حركة المنظومة وتحديد موضع كل كتلة فى الفراغ.ولذلك فهى منظومة ثنائية الحركة اى منظومة ذات درجتين من الحرية.

5-المنظومة المبينة بالشكل (7-1-e) تتكون من قرصين مثبتين على عمود فاذا تعرضت هذة المنظومة لعزم التواء فيحدث ازاحة زاوية لكل قرص وهما $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$ وهما كافيان لوصف حركة المنظومة وتحديد موضعها فى الفراغ ولذلك فهى منظومة ذات درجتين من الحرية (ثنائية الحركة).

6-المنظومة المبينة بالشكل (7-1-f) تتكون من كتلة m مُسندة على نابضين معا ملهم k_1 , k_2 وعند اهتزاز هذة المنظومة تحدث ازاحتين احدهما ازاحة خطية $x(t)$ وازاحة زاوية $\theta(t)$ وهما كافيان لوصف حركة المنظومة وتحديد موضع الكتلة فى الفراغ ، وبالمثل للمنظومة (7-1-g) عند حركتها تحدث ازاحة خطية لكل كتلة وهما $y_1(t)$, $y_2(t)$، ولذلك فالمنظومتان تعتبران ذات درجتين من الحرية.(ثنائية الحركة)

7- المنظومة (7-1-i) تتكون من كتلة m واحدة ونابضين k_1 , k_2 وعند اهتزاز المنظومة فانها تتحرك فى اتجاهين $x_2(t)$, $x2(t)$ وهذان الاتجهان هما ايضا الاحداثيان اللازمان لوصف حركة المنظومة وموضع الكتلة فى الفراغ ، وبالمثل المنظومة بالشكل (7-1-j) لها احداثيان $x(t)$, $\theta(t)$ وهما كافيان لوصف حركة المنظومة وتحديد موضع الكتلة فى الفراغ ، وكذلك المنظومة بالشكل(7-1-k) لها احداثيان $x_1(t)$, $x_2(t)$وهما ايضا كافيان لوصف حركة المنظومة فى الفراغ وتحديد موضع الكتلتين فى الفراغ ، وبالتالى فان المنظومات الثلاثة هى منظومات ثنائية الحركة اى منظومات ذات درجتين من الحرية.



الشكل(7-1) يوضح منظومات ذات درجتين من الحرية

2- ***النسق الطبيعي او الرئيسي*** (Normal Mode)

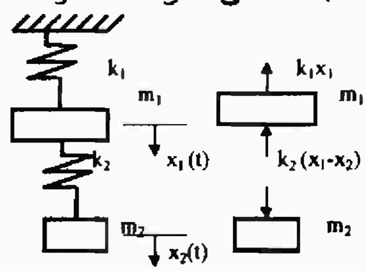
عندما تتذبذب كتل المنظومة وتصل الى اقصى ازاحة وتمر خلال نقاط إتزانها آنيا فـــان الاجــزاء المتحركة فى المنظومة تتحرك متطاورة بتردد واحد ، ولايجاد النسق الطبيعى للمنظومات ثنائية درجـــة الحرية فانة يلزم ايجاد معادلتي الحركة ومعادلة التردد كما سيلى شرحه.

3-***معادلات الحركة للمنظومات ثنائية درجة الحرية.***

عدد درجات الحرية للمنظومات يكون مرتبط بعدد معادلات الحركة ، حيث المنظومات ذات درجـة الحرية الواحدة يكون لها معادلة حركة واحدة ، والمنظومات ذات درجتين من الحرية يكون لها معادلتين للحركة ، ولايجاد معادلات الحركة للمنظومات او التجهيزات ثنائية الحركة يلزم ايجاد القوى المؤثـــرة على كل كتلة او قرص دوار ، ثم بتطبيق طرق وقوانين إيجاد معادلات الحركة مثل طريقـــة الطاقــة Energy method او الطريقة التابعة لقانون نيوتن Newton:s law الثانى او معادلة لاجرانـــج Lagrange equation او طريقة رايليت Rayleigh method ....الخ.

4-***الازاحة الخطية (الراسية): مثال(1)***

اوجد القوى المؤثرة على كل كتلة واكتب معادلتي الحركة للمنظومة المبينة بالشكل (7-2):



الشكل (7-2)

يلزم ايجاد القوى المؤثرة على الكتلتين ، وبتطبيق قانون نيوتن الثانى

$$\because m\ddot{x} = \sum F_x \qquad ,\therefore m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 - k_2(x_1 - x_2)$$

$$\therefore m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 + k_2(x_1 - x_2) = 0. \qquad \therefore m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_2 - k_2x_2 = 0.(1)$$

$$\because m_2\ddot{x}_2 = +k_2(x_1 - x_2) \qquad \therefore m_2\ddot{x}_2 - k_2x_1 + k_2x_2 = 0 ....(2)$$

اى نعين القوى المؤثرة على كل كتلة وبتطبيق قانون نيوتن الثانى على كل كتلة فيمكن كتابـــة معادلـــة الحركة لكل كتلة كما فى المعادلة(1) التى تمثل معادلة الحركة للكتلة الاولى m_1 والمعادلـــة (2) تمثـــل معادلة الحركة للكتلة الثانية m_2 مع ملاحظة اخذ اتجاة تأثير قوة عجلة الجاذبية الارضية الى اسفل هـــو الاتجاة الموجب واى قوى تؤثر فى عكس اتجاة عجلة الجاذبية الارضية اى فى الاتجاة لاعلـــى يكـــون سالب. ، ونلاحظ ان القوى التى تؤثر على الكتاة الاولى m_1 هى قوة شد النابض الاول الذى معاملـــة k_1 للكتلة ويكون اتجاهها لاعلى بينما الكتلة نفسها تجد قوة مقاومة من النابض الثانى الذى معاملة k_2 تقـــاوم حركة الكتلة m_1 الى اسفل وبالتالى يكون اتجاهها الى اعلى ويعين مقدارها من حاصل ضرب معـــامل

النابض الثانى k_2 فى الازاحة النسبية وهى الفرق بين إزاحة الكتلة الاولى x_1 وازاحة الكتلة الثانية x_2 اى ان قوة النابض الثانى F_2 يعبر عنها بالعلاقة التالية $F_2=k_2(x_1-x_2)$ ونلاحظ ايضا ان هذة القوة F_2 الناتجة من النابض الثانى تضغط على الكتلة الثانية الى اسفل وبالتالى يكون تأثيرها على الكتلة الثانية m_2 فى اتجاة معاكس لتاثيرها على الكتلة الاولى m_1 وبنفس المقدار اى ان $F_2=k_2(x_1-x_2)$

مثال(2):إذا إثرت فى الكتلة m_1 بالمنظومة المبينة بالشكل (7-2) بالمثال (1) قوة $F_o \sin \omega t$ ، اوجد القوى المؤثرة فى كل كتلة وكذلك اوجد معادلتى الحركة..

الحل:

عند تأثير القوة $Fo \sin\omega t$ يكون تأثيرها دائما موجب واتجاهها الى اسفل وتكون معادلة الحركة هى نفس المعادلة (1) ولكن بفرق ان الطرف الايمن للمعادلة لا يساوى الصفر ولكن يساوى القوة $F_o \sin \omega t$ والمعادلة (2) فى المنظومة بالشكل (7-3) تكون نفس المعادلة للمنظومة المبينة بالشكل (7-2)كما يلى:

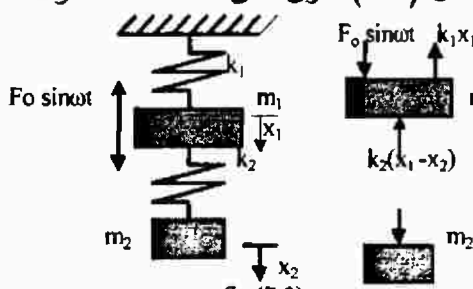


fig.(7-3)

$$\therefore m_1 \ddot{x}_1+(k_1+k_2)x_1-k_2x_2=F_o \sin\omega t \;........(1) \quad ,m_2\ddot{x}_2-k_2x_1+k_2x_2=0........(2)$$

نلاحظ عند حل المسائل الخاصة بالمنظومات ذات درجتين من الحرية يجب ايجاد معادلتى الحركة لهذة المنظومات وهذا يتطلب معرفة القوى التى تؤثر على الكتل او العناصر الفعالة بالمنظومة ، ولتوضيح ذلك يمكننا توضيح هذة القوى وكتابة معادلتى الحركة لبعض المنظومات الهامة الاتية:

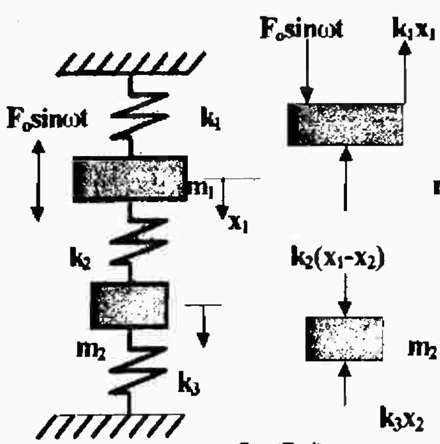


fig.(7-4)

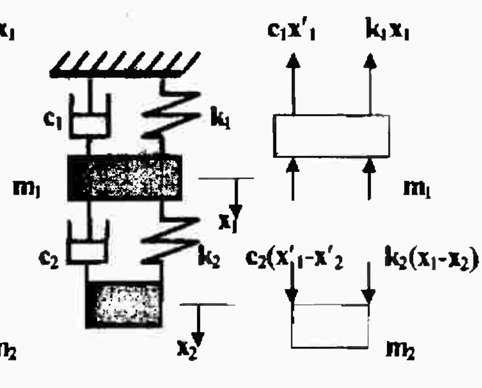


fig.(7-5)

ويمكن ايجاد معادلتى الحركة للمنظومة المبينة بالشكل (7-4) بتطبيق قانون نيوتن كما يلى:

$$\because m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 - k_2(x_1 - x_2) + F_\circ \sin\omega t \qquad \therefore m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = F_\circ \sin\omega t \text{.....(1)}$$

$$\because m_2\ddot{x}_2 = k_2(x_1 - x_2) - k_3x_2 \qquad \therefore m_2\ddot{x}_2 - k_2x_1 + (k_2 + k_3)x_2 = 0 \text{..............................(2)}$$

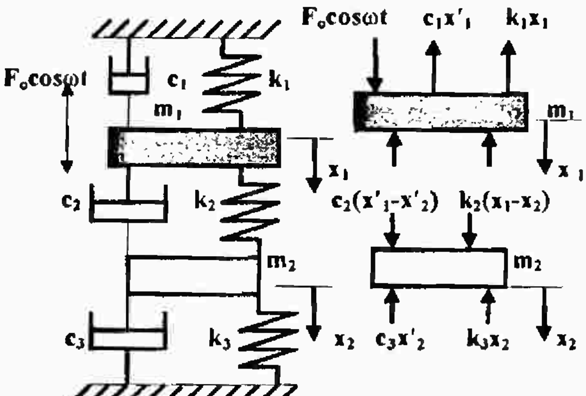
معادلتى الحركة للمنظومة المبينة بالشكل (7-5) بتطبيق قانون نيوتن كما يلى:

$$\because \quad m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 - c_1\dot{x}_1 - k_2(x_1 - x_2) - c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$

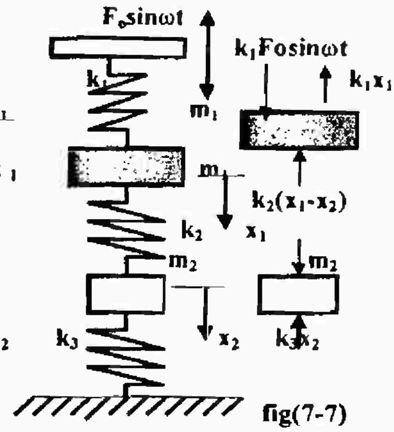
$$\therefore \quad m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 = 0 \text{...................................(1)}$$

$$\because \quad m_2\ddot{x}_2 = k_2(x_1 - x_2) + c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$

$$\therefore \quad m_2\ddot{x}_2 - k_2x_1 + k_2x_2 - c_2\dot{x}_1 + c_2\dot{x}_2 = 0 \text{...(2)}$$



fig(7-6)



fig(7-7)

يمكن ايجاد معادلتى الحركة للمنظومة المبينة بالشكل (7-6) حسب قانون نيوتن كما يلى:

$$\because m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 - c_1\dot{x}_1 - k_2(x_1 - x_2) - c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + F_\circ \cos\omega t$$

$$\therefore m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 = F_\circ \cos\omega t \text{...........(1)}$$

$$\because m_2\ddot{x}_2 = k_2(x_1 - x_2) + c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_3x_2 - c_3\dot{x}_2$$

$$\therefore m_2\ddot{x}_2 - k_2x_1 + (k_2 + k_3)x_2 - c_2\dot{x}_1 + (c_2 + c_3)\dot{x}_2 = 0 \text{..................(2)}$$

وبالمثل للمنظومة المبينة بالشكل (7-7) يلاحظ وجود دعامة مهملة الوزن أى ان (m=0) مثـــل قـــاعدة جهاز لاقط الاهتزاز وهو من الاجهزة الرجفية الخاصة بقياس الازاحة النسبية بين كتلة الجهاز وكتلة الماكينة المراد قياس حركتها الاهتزازية حيث قاعة جهاز لاقط الاهتزاز تثبت على الماكينة ويلاحـظ ان الدعامة تحت تأثير القوة $F_\circ \sin\omega t$ ، وهذة القوة تؤثر بطريق غير مباشر على الكتلة m_1 عـــن طريـــق نابض معاملة k_1 وخا مد معاملة c_1 ولذلك فان الكتلة تقع تحت تأثير القوة المذكورة مضروبة فى معامل النابض k_1 اى القوة التى تؤثر فى الكتلة يكون مقدارها $k_1.F_\circ \sin\omega t$ ويمكن ايجاد معادلتى الحركة كمـــا يلى:

$$\because\ m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k_2 (x_1 - x_2) + k_1 . F_\circ \sin \omega t$$

$$\therefore\ m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) = k_1 . F_\circ \sin \omega t \text{ .... } (1)$$

$$\because\ m_2 \ddot{x}_2 = k_2 (x_1 - x_2) - k_3 x_2$$

$$\therefore\ m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_2 = 0 \text{ .... } (2)$$

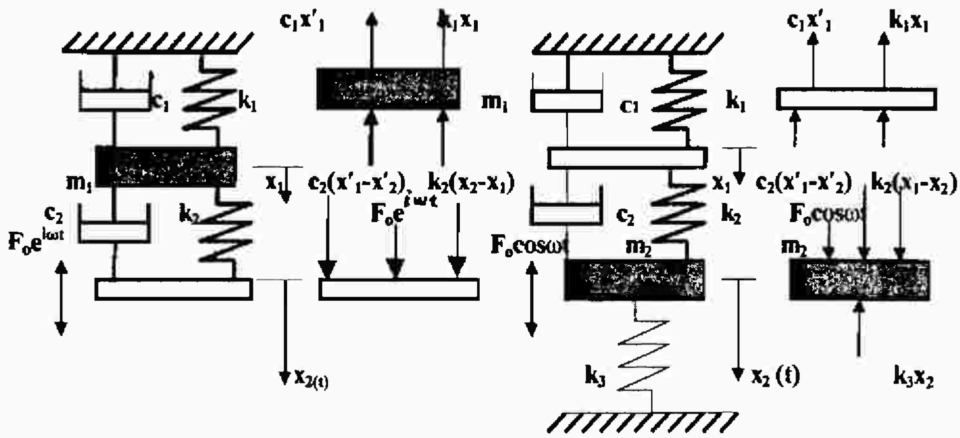


fig.(7-8A) fig.(7-8B)

يلاحظ فى المنظومة المبينة بالشكل (7-8A) وجود دعامة مهملة الكتلـــة اى ان (m=0) وهـــى مثـــل الدعامة الموجودة بجهاز لاقط الاهتزازات كقاعدة تثبت على الماكينة المراد قياس الحركة الاهتزازية لها ، وجهاز لاقط الاهتزازات يعتبر من أجهزة القياس الرجفية التى تستخدم فى قياس الحركة النسبية بيـــن كتلة جهاز لاقط الاهتزاز والماكينة وكذلك يستحدم فى قياس السرعة والعجلة الراسية مثل القطـــارات او المركبات وعند ايجاد معادلة الحركة لهذه الدعامة وعناصر المنظومة المتصلة بها نطبق عليها قـــانون نيوتن الثانى وذلك بعد التعويض عن $m\ddot{x} = 0$ كما فى المعادلة (2) من معادلتى الحركـــة للمنظومـــة المبينة بالشكل (7-8A) ، والمعادلة (1) من معادلتى الحركة للمنظومة المبينة بالشكل (7-8B) وبذلـــك يمكن ايجاد معادلتى الحركة للمنظومتان كما يلى:

معادلتى الحركة للمنظومة المبينة بالشكل (7-8A)

$$\because\ m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - c_1 \dot{x}_1 - k_2 (x_1 - x_2) - c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$

$$\therefore\ m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2) x_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 - k_2 x_2 - c_2 \dot{x}_2 = 0 \text{ .... } (1)$$

$$\because\ m_2 = 0 \quad ,\therefore\ 0 = k_2 (x_1 - x_2) + c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + F_\circ\ e^{i.\omega t}$$

$$\therefore\ k_2 x_2 - k_2 x_1 - c_2 \dot{x}_1 + c_2 \dot{x}_2 = F_\circ\ e^{i.\omega t} \text{ .... } (2)$$

معادلتى الحركة للمنظومة المبينة بالشكل (7-8B) مع ملاحظة وجود دعامـــة منعدمـــة الكتلـــة أى ان (m=0) والكتلة m_2 تؤثر فيها القوة $F_\circ \cos \omega t$

$$\because m = 0 \quad \therefore 0 = -k_1x_1 - c_1\dot{x}_1 - k_2(x_1 - x_2) - c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$

$$\therefore (k_1 + k_2)x_1 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 - k_2x_2 - c_2\dot{x}_2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\because m_2\ddot{x}_2 = k_2(x_1 - x_2) + c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_3x_2 + F_o\cos\omega t$$

$$\therefore m_2\ddot{x}_2 - k_2x_1 + (k_2 + k_3)x_2 - c_2\dot{x}_1 + c_2\dot{x}_2 = F_o \cos\omega t \ldots\ldots\ldots(2)$$

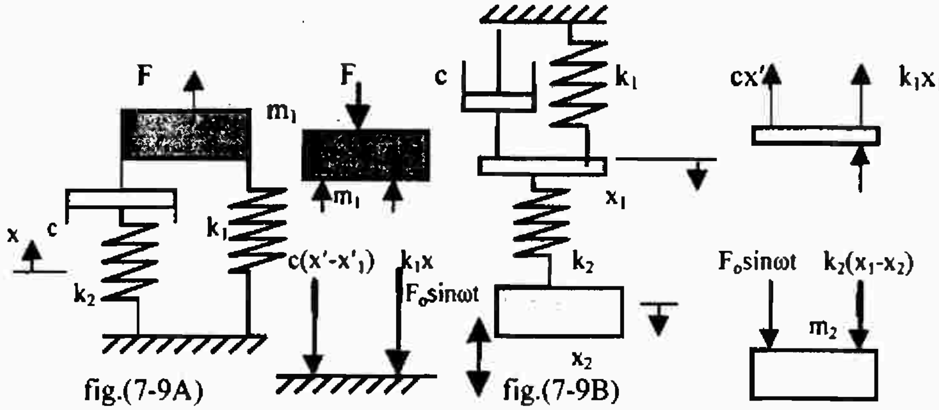


fig.(7-9A) fig.(7-9B)

معادلتى الحركة للمنظومة المبينة بالشكل (7-9A) :

$$\because m\ddot{x} = \sum F_x$$

$$\therefore \quad m_1\ddot{x} = -k_1x - c(\dot{x} - \dot{x}_1) + F \quad \therefore \quad m_1\ddot{x} + k_1x + c(\dot{x} - \dot{x}_1) = F \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\because m_2 = 0 \quad \therefore \quad 0 = c(\dot{x} - \dot{x}_1) - k_1x_1 \quad \therefore \quad k_1x_1 - c(\dot{x} - \dot{x}_1) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

معادلتى الحركة بالنسبة للمنظومة المبينة بالشكل (7-9B) وذلك مع الاخذ فى الاعتبار ان كتلة الدعامة منعدمة الوزن :

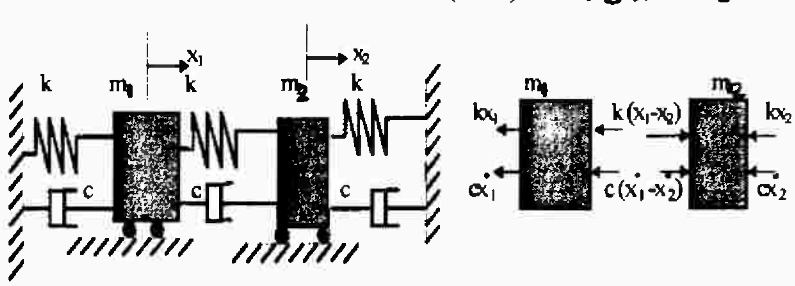
$$\because m\ddot{x} = \sum F_x \quad \therefore \quad m_1\ddot{x}_1 = 0 = -k_1x_1 - c\dot{x}_1 - k_2(x_1 - x_2)$$

$$\therefore (k_1 + k_2)x_1 + c\dot{x}_1 - k_2x_2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\because m_2\ddot{x}_2 = k_2(x_1 - x_2) + F_o\sin\omega t \quad \therefore \quad m_2\ddot{x}_2 - k_2x_1 + k_2x_2 = F_o\sin\omega t \ldots\ldots(2)$$

5-الإزاحة الخطية الأفقية

معادلتى الحركة للمنظومة المبينى بالشكل(7-10)



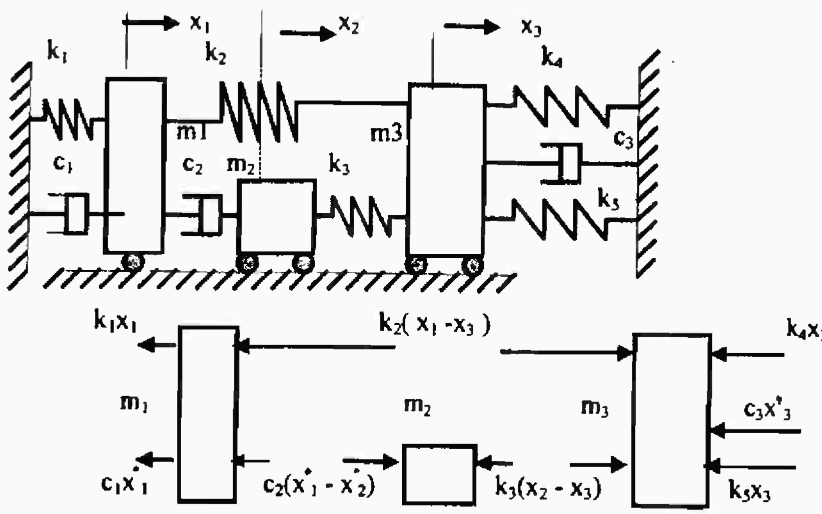
(7-10)

$$\because\ m_1\ddot{x}_1 = -kx_1 - k(x_1 - x_2) - c\dot{x}_1 - c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$

$$\therefore\ m_1\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 + 2c\dot{x}_1 - c\dot{x}_2 = 0 \text{.......................................}(1)$$

$$\because\ m_2\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - kx_2 - c\dot{x}_2$$

$$\therefore\ m_2\ddot{x}_2 - kx_1 + 2kx_2 + 2c\dot{x}_2 - c\dot{x}_1 = 0 \text{.......................................}(2)$$



الشكل (7-11)

معادلات الحركة للمنظومة المبينة بالشكل (7-11)

$$\because\ m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 - c_1\dot{x}_1 - k_2\ (x_1 - x_2) - c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$

$$\therefore\ m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_3 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 = 0 \text{......................}(1)$$

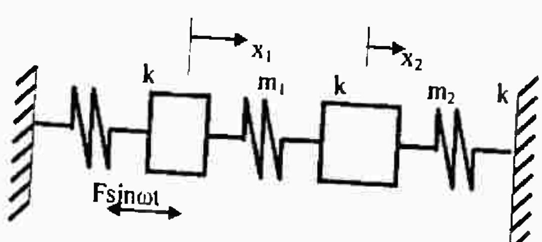
$$\because\ m_2\ddot{x}_2 = c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_3(x_2 - x_3)$$

$$\therefore\ m_2\ddot{x}_2 - c_2\dot{x}_1 + c_2\dot{x}_2 + k_3x_2 - k_3x_3 = 0 \text{.......................................}(2)$$

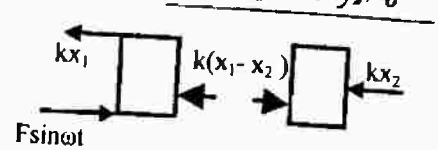
$$\therefore\ m_3\ddot{x}_3 = k_2(x_1 - x_3) + k_3(x_2 - x_3) - k_4x_3 - c_3\dot{x}_3 - k_5x_3 \text{....................}$$

$$\therefore\ m_3\ddot{x}_3 - k_2x_1 + (k_2 + k_3 + k_4 + k_5)x_3 - k_3x_2 + c_3\dot{x}_3 = 0 \text{...............}(3)$$

6-الإزاحة الخطية الأفقية::



الشكل (7-12)



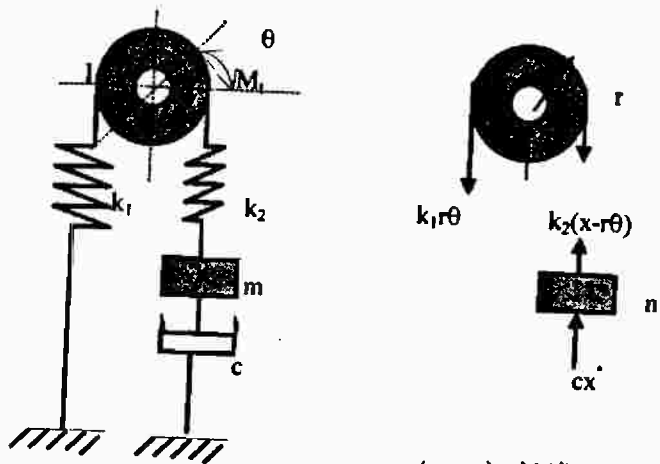
الشكل(7-13)

معادلتى الحركة للمنظومة المبينة بالشكل (7-12)

$$\because m_1\ddot{x}_1 = -kx_1 - k(x_1 - x_2) + F\sin\omega t \quad \therefore\ m_1\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = F\sin\omega t \text{.....(1)}$$

$$\because m_2\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) - kx_2 \quad \therefore\ m_2\ddot{x}_2 - kx_1 + 2kx_2 = 0 \text{........................(2)}$$

٢-الإزاحة الزاوية (الدورانية):

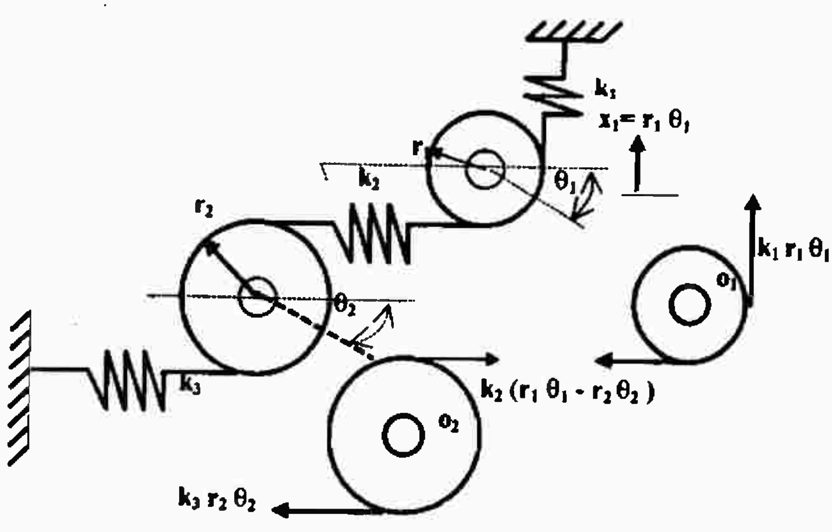


الشكل (7-14)

$$\because \sum M_o = I\ddot{\theta} \ ,\because\ \sum M_o = k_1 r\theta r - k_2(x - r\theta)r - M_t$$

$$\therefore I\ddot{\theta} + k_1 r^2\theta - k_2(x - r\theta)r = M_t \text{.......................................(1)}$$

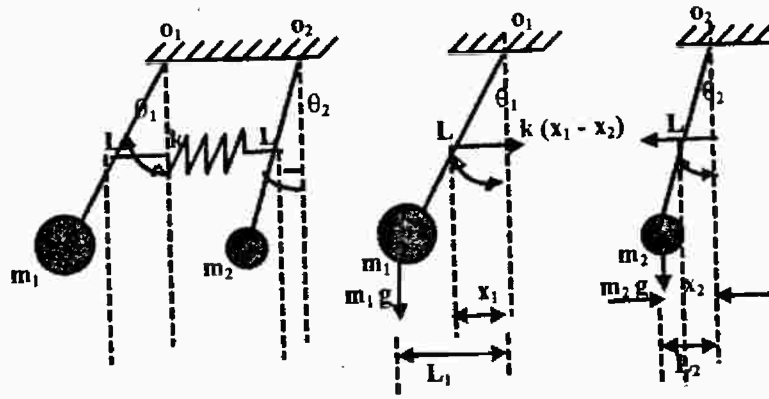
$$\because m\ddot{x} = -k_2(x - r\theta) - c\dot{x} \quad \therefore\ m\ddot{x} + c\dot{x} + k_2 x - k_2 r\theta = 0 \text{......(2)}$$



الشكل (7-15)

$$\because \sum M_{o1} = I_1\ddot{\theta}_1 \quad \therefore\ I_1\ddot{\theta}_1 + (k_1 + k_2)r_1^2\theta_1 - k_2 r_1 r_2\theta_2 = 0 \text{.................(1)}$$

$$\because \sum M_{o2} = I_2\ddot{\theta}_2 \quad \therefore\ I_2\ddot{\theta}_2 + k_2 r_1 r_2\theta_1 - (k_2 - k_3)r_2^2\theta_2 = 0 \text{.............(2)}$$



الشكل (7-16)

معادلتى الحركة للمنظومة المبينة بالشكل (7-16)

$$\because \sum M_{o1} = I_1 \ddot{\theta}_1 \quad , \because \sum M_{o1} = m_1 gl + k(x_1 - x_2)b = m_1 gl + kb^2(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\therefore \quad I_1 \ddot{\theta}_1 + (m_1 gl + kb^2)\theta_1 - kb^2\theta_2 = 0 \ldots\ldots(1)$$

$$\because \sum M_{o2} = I_2 \ddot{\theta}_2 \quad , \because \quad \sum M_{o2} = m_2 gl_2 - kb^2(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\therefore \quad I_2 \ddot{\theta}_2 - kb^2\theta_1 + (m_2 gl + kb^2)\theta_2 = 0 \ldots\ldots(2)$$

8-خطوات ايجاد معادلة التردد و الترددات الطبيعية ونسب السعات للمنظومات ذات درجتين من الحرية:

1-نعين معادلتى الحركة للمنظومة ثنائية الحركة.

2-نفرض ان الحركة للمنظومة غير المخمدة دورية وتتكون من العديد من المركبات التوافقية ذات الترددات والسعات المختلفة ولذلك نعوض عن إحدى المركبات باحدى العلاقات الاتية :

(1) $x_1 = D\sin(\omega t + \phi)$, $x_2 = E\sin(\omega t + \phi)$ (2)$x_1 = D\cos(\omega t + \phi)$, $x_2 = E\cos(\omega t + \phi)$ (3)$x_1 = De^{i\omega t}$, $x_2 = Ee^{i\omega t}$,

حيث x هى الازاحة ، ϕ هى زاوية الطور ، E , D هى ثوابت إختيارية ، ω هى إحدى الترددات الطبيعية للمنظومة.

3-نفاضل المركبتين x_1 , x_2 بالعلاقة (1) التى(تمثل الازاحتين) بالنسبة للزمن لنحصل على السرعة والعجلة كما يلى:

$\dot{x}_1 = \omega D\cos(\omega t + \phi)$, $\ddot{x}_1 = -\omega^2 D\sin(\omega t + \phi)$, $\dot{x}_2 = \omega E\cos(\omega t + \phi)$, $\ddot{x}_2 = -\omega E\cos(\omega t + \phi)$

4-نعوض من العلاقات $x_1 , \dot{x}_1 , \ddot{x}_1 , x_2 , \dot{x}_2 , \ddot{x}_2$ فى معادلتى الحركة فنحصل على معادلات جبرية خطية فى E , D ويسمى الحل E=D=0 بالحل فى حالة الاتزان للمنظومة.

5- نحصل على الحل المتمثل فى معادلة التردد بوضع المعادلات الجبرية الخطية المتجانسة فى صورة محدد ومساواوتة بالصفر اذا كانت المعادلات متجانسة ثم نفك المحدد فنحصل على معادلة التردد ، ويلاحظ وجود إحدى مركبات الترددات على صورة ω^4

6-للحصول على الترددين الطبيعيين ω_1 , ω_2 من معادلة التردد نضع $\lambda = \omega^2$ فى معادلة التردد فتؤول

معادلة التردد الى معادلة من الدرجة الثانية والتى يمكن إيجاد جذورها باستخدام القانون العام التالى:

$$\lambda_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

حيث $\lambda_2=\omega^2_2$, $\lambda_1=\omega^2_1$ وبالتالى يمكن إيجاد ω_1 , ω_2

7- يمكن الحصول على نسب السعات من المعادلات الجبرية فى E , D ، اى انة يمكن إيجاد نسبة السعة الاولى (D_1/E_1) وذلك بقسمة معامل E_1 من المعادلة الجبرية الاولى او الصف الاول فى المحدد على معامل D_1 من المعادلة الاولى او الصف الاول من المحدد ، وبالمثل يمكن إيجاد نسبة السعة الثانية للمعادلة الجبرية الثانية (D_2/E_2) وذلك بقسمة معامل E_2 من المعادلة الثانية الجبرية او الصف الثانى فى المحدد على معامل D_2 من المعادلة الثانية او الصف الثانى فى المحدد.

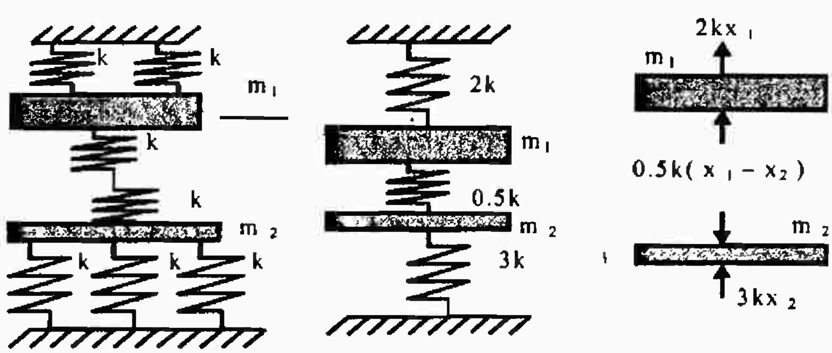
أمثلة محلولة

1-(a) The system as shown in fig.(7-17) consisting of two masses and identical springs , each spring of stiffness k , with each mass constrained to move only in the vertical direction. Determine the equation of frequency , the two natural frequencies , and the ratio of amplitudes corresponding to those two frequencies.

(b)If the upper mass $(m_1)$is displaced 1 cm. down the static equilibrium position and then released , Determine $x_1(t)$ and $x_2(t)$ for the two masses when $m_1=m_2=m$

1-أ-المنظومة المبينة بالشكل (7-17) تتكون من كتلتين ونابضين معامل كل نابض k ، وكل كتلة تتحرك فى الاتجاه الرأسى فقط ، أوجد معادلة التردد والترددين الطبيعين ونسب السعات المناظرتين لهذين الترددين

ب-إذا تحركت الكتلة العلوية (m_1) 1 سم أسفل وضع الاتزان ثم تركت ، أوجد الازاحتين $x_1(t)$, $x_2(t)$ عندما تتساوى الكتلتين وكل منهم يساوى m



الشكل(7-17)

يمكن تعيين معادلتى الحركة للمنظومة المبينة بالشكل (7-17) كما يلى:

$$\because\ m_1\ddot{x}_1=-2kx_1-0.5k(x_1-x_2)\quad\therefore\ m_1\ddot{x}_1+2.5kx_1-0.5kx_2=0..........(1)$$

$$\because\ m_2\ddot{x}_2=0.5k(x_1-x_2)-3kx_2\quad\therefore\ m_2\ddot{x}_2-0.5kx_1+3.5kx_2=0...........(2)$$

وبفرض ان الحركة دورية فهى تتكون من العديد من المركبات التوافقية ذات سعات وترددات مختلفـــة ولذلك نعوض عن إحدى هذة المركبات بالعلاقات الاتية:

$x_1 = D\sin(\omega t+\phi)$, $x_2 = E\sin(\omega t+\phi)$ حيث x_1 , x_2 هما الازاحتين ، E , D هما سعتى الحركة ، ω هـــى أحد الترددات ϕ هى زاوية الطور ثم بتفاضل الازاحتين لتعين كل من السرعة والعجلة كما بالعلاقـــات السابقة ، ثم بالتعويض بهذة العلاقات فى معادلتى الحركة للمنظومة (1) ، (2) تنتج المعادلتين الاتيتين:

$$\therefore \left(-m_1\omega^2 + 2.5k\right)D - 0.5kE = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$-0.5D + \left(3.5k - m_2\omega^2\right)E = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

ولايجاد معادلة التردد نضع المعادلتين الجبريتين (3) ، (4) على صورة المحدد وبفكـــة نحصـــل علـــى معادلة التردد كما يلى:

$$\begin{vmatrix} (2.5k - m_1\omega^2) & -0.5k \\ -0.5k & (3.5k - m_2\omega^2) \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore (2.5k - m_1\omega^2)(3.5k - m_2\omega^2) - (0.5k)^2 = 0$$

$$\therefore m_1 m_2 \omega^4 - (2.5km_2 + 3.5km_1)\omega^2 + \frac{34}{4}k^2 = 0 \ldots\ldots\ldots(5)$$

$$assume \quad \lambda = \omega^2 \quad \therefore \quad \lambda^2 - \left(\frac{2.5k}{m_1} + \frac{3.5k}{m_2}\right)\lambda + \frac{34k^2}{4m_1m_2} = 0 \ldots\ldots\ldots(6)$$

$$\because \lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-\left(\frac{2.5k}{m_1} + \frac{3.5k}{m_2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{2.5k}{m_1} + \frac{3.5k}{m_2}\right)^2 - \frac{34k^2}{m_1m_2}}}{2}$$

$$\therefore \lambda_{1,2} = -\left(\frac{5k}{4m_1} + \frac{7k}{4m_2}\right) \pm \frac{\sqrt{\left(\frac{5k}{2m_1} + \frac{7k}{2m_2}\right)^2 - \frac{34k^2}{m_1m_2}}}{2} \ldots\ldots\ldots(7)$$

$$\therefore \frac{D_1}{E_1} = \frac{-0.5k}{2.5k - m_1\omega^2} \quad , \quad \frac{D_2}{E_2} = \frac{3.5k - m_2\omega^2}{-0.5k} \ldots\ldots\ldots(8)$$

وبذلك أمكن ايجاد نسب السعات من المعادلة(8)

$$\therefore \omega_{1,2}^2 = \lambda_{1,2} = \frac{3k}{m} \pm \sqrt{\frac{k^2}{2m^2}} \quad , \lambda_1 = 2\omega_1^2 = \frac{3.71k}{m} \quad \therefore \omega_1 = 1.9\sqrt{\frac{k}{m}} rad/\sec ..(9)$$

$$\therefore \lambda_2 = \omega_2^2 = 2.29\frac{k}{m} \quad , \therefore \omega_2 = 1.5\sqrt{\frac{k}{m}} rad/\sec \ldots\ldots\ldots(10)$$

ب-اذا إزيحت الكتلة m1 مسافة 1 سم من موضع إتزانها الاستاتيكى يكون عندها $x_1(0)=0$ ، $t=0$ ، مع اعتبار ان $m_1=m_2=m$ ،

ويمكن ايجاد $x_2(t)$ ، $x_1(t)$ بالتعويض فى المعادلتين الاتيتين:

$$x_1(t) = D_1\cos(\omega_1 t + \phi_1) + D_2\cos(\omega_2 t + \phi_2) \ldots\ldots (11)$$
$$x_2(t) = D_1\cos(\omega_1 t + \phi_1) - D_2\cos(\omega_2 t + \phi_2) \ldots\ldots (12)$$

حيث الثوابت الاربعة للتكامل يمكن الحصول عليها من الاحوال الابتدائية الاربعة الاتيـــة: , $x_1(0)=1$
$\dot{x}_2(0)=0$, $x'_1(0)=0$, $x_2(0)=0$

وبالتعويض فى المعادلتين (11) , (12) من الاحوال الابتدائية كما يلى:

$$\therefore\ 1 = D_1\cos\phi_1 + D_2\cos\phi_2 \ldots\ldots (13)$$
$$0 = D_1\cos\phi_1 - D_2\cos\phi_2 \ldots\ldots (14)$$

وبتفاضل المعادلتين (11) , (12) بالنسبة للزمن لايجاد $x'_1(t)$, $x'_2(t)$ ثم بالتعويض مـــن الاحـــوال الابتدائية ينتج ما يلى:

$$\therefore\ 0 = -\omega_1 D_1\sin\phi_1 - \omega_2 D_2\sin\phi_2 \ldots\ldots (15)$$
$$0 = -\omega_1 D_1\sin\phi_1 + \omega_2 D_2\sin\phi_2 \ldots\ldots (16)$$

بحل المعادلتين (13) , (14) معا ينتج ان :

$$1 = 2D_1\cos\phi_1 \qquad , D_1 = \frac{1}{2\cos\phi_1} \qquad \therefore D_2 = \frac{1}{2\cos\phi_2} \ldots\ldots (17)$$

وبحل المعادلتين (15) , (16) معا ينتج ان: $\sin\phi_1=\sin\phi_2=0$ وبذلك يكون $\phi_1=\phi_2=0$ وبالتعويض عنـــهما فى المعادلتين (10) , (11) ينتج ان $D_1=D_2=0.5$ وبالتالى يمكن تعيين معادلتى الحركة كما يلى:

$$\therefore\ x_1(t) = 0.5\cos(1.9\sqrt{\frac{k}{m}}t) + 0.5\cos(1.5\sqrt{\frac{k}{m}}t) \ldots\ldots (18)$$
$$\therefore\ x_2(t) = 0.5\cos(1.9\sqrt{\frac{k}{m}}t) - 0.5\cos(1.5\sqrt{\frac{k}{m}}t) \ldots\ldots (19)$$

9-الاحداثيات العمومية والرئيسية: General and Principal Coordinates

أ-الاحداثيات العمومية:

هى الاحداثيات المستقلة او المتغيرات التى يمكن بواسطتها وصف حركة المنظومة مثل الطـــول - الزاوية ......الخ ، أو اى متغيرات طبيعية اخرى.

ب-الاحداثيات الرئيسية:

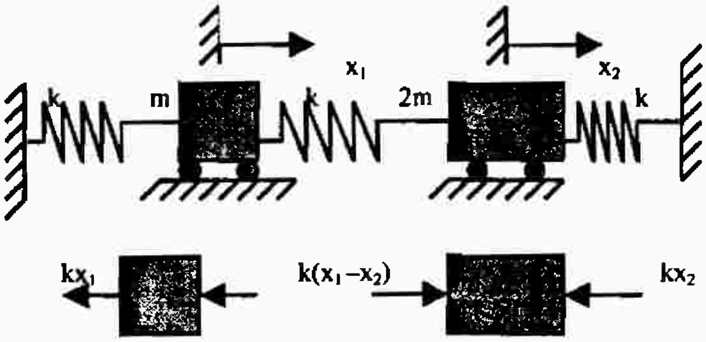
هى مجموعة من الاحداثيات تحتويها كل معادلة للحركة وتكون مجهولة وتحـــل هـــذة المعـــادلات مستقلة عن بعضها البعض لايجاد المجاهيل ولذلك تسمى بالاحداثيات الرئيسية.

10-ارتباط او تقارن الاحداثيات: Coordinate Coupling

يوجد نوعان من الارتباط وهو الارتباط الاستاتيكي بســـبب الازاحـــات الاســـتاتيكية والارتبـــاط الديناميكى بسبب القصور الذاتى ، وإرتباط الاحداثيات هو إهتزاز اى جزء من النظام ينشأ عنة إهـــتزاز فى جزء اخر من نفس المنظومة نتيجة القوة المنقولة من خلال عنصر الربط بينهم سوءا كان نـــابض او خامد او كلاهما معا وسوف يشرح ذلك تفصيلا وبالامثلة التوضيحية .

2-In the undamped system as shown in fig.(7-18). Using coordinates x_1 , x_2 measured from referance of position , Determine the differential equations of motion ,the frequency equation and amplitudes ratio or the normal modes.

2-من المنظومة المبينة بالشكل (7-18) , باستخدام المحورين x_1 , x_2 ومقاس من موضـــع الانتســـاب ، أوجد معادلتى الحركة ومعادلة التردد والتردد الطبيعى لكل كتلة ونسب السعات أو النسق الطبيعى.



الشكل (7-18)

ويمكن كتابة معادلتى الحركة طبقا لقانون نيوتن الثانى كما يلى:

$$m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - kx_1 \quad \text{.......(1)}$$

$$2m\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) - kx_2 \quad \text{.......(2)}$$

وباعتبار ان الحركة دورية وتتكون من العديد من الحركات التوافقية ذات سعات وترددات مختلفـــة ، وبفرض ان احدى المركبات يمكن تمثيلها بالعلاقات التالية:

$$\because x_1 = De^{i\omega t} \quad , \quad \dot{x}_1 = i\omega.De^{i\omega t} \quad , \quad \ddot{x}_1 = -\omega^2.De^{i\omega t} \quad \text{.......(3)}$$

$$\because x_2 = Ee^{i\omega t} \quad , \quad \dot{x}_2 = i\omega.Ee^{i\omega t} \quad , \quad \ddot{x}_2 = -\omega^2 Ee^{i\omega t} \quad \text{.......(4)}$$

وبالتعويض من العلاقات (3) , (4) فى معادلتى الحركة (1) , (2) ينتج ما يلى:

$$\therefore (2k - \omega^2 m)D - kE = 0 \quad \text{.......(5)}$$

$$-kD + (2k - 2\omega^2 m)E = 0 \quad \text{.......(6)}$$

ويمكن ايجاد معادلة التردد بوضع المعادلتين (5) , (6) فى صورة المحدد وبفكة نحصل على معادلة التردد كما يلى:

$$\begin{vmatrix} (2k-\omega^2 m) & -k \\ -k & (2k-2\omega^2 m) \end{vmatrix} = 0 \quad \text{...(7)}$$

$$\therefore (2k-\omega^2 m)(2k-2\omega^2 m)-k^2=0 \qquad \therefore \omega^4-\frac{3k}{m}\omega^2-1.5\left(\frac{k}{m}\right)^2=0 \text{.........(8)}$$

$$put\ \lambda=\omega^2 \qquad \therefore\ \lambda^2-\left(\frac{3k}{m}\right)\lambda+1.5\left(\frac{k}{m}\right)^2=0 \text{...(9)}$$

$$\therefore\ \lambda_1=\omega_1^2=0.634\left(\frac{k}{m}\right) \quad , \ \lambda_2=\omega_2^2=2.36\left(\frac{k}{m}\right) \text{.......................................(10)}$$

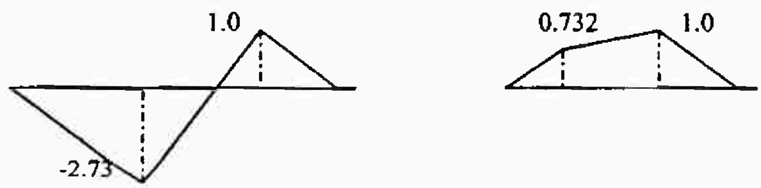
$$\therefore \omega_1=0.79\sqrt{\frac{k}{m}}\ rad/\sec \qquad , \qquad \omega_2=1.54\sqrt{\frac{k}{m}}\ rad/\sec \text{........................(11)}$$

وبذلك يمكن إيجاد نسب السعات The ratio of amplitudes كما يلى:

$$\therefore \frac{D_1}{E_1}=\frac{k}{2k-\omega_1^2 m}=\frac{k}{2k-0.634\left(\frac{k}{m}\right)m}=0.731 \text{.................................(12)}$$

$$\therefore \frac{D_2}{E_2}=\frac{k}{2k-\omega_2^2 m}=\frac{k}{2k-2.36\left(\frac{k}{m}\right)m}=-2.73 \text{.................................(13)}$$

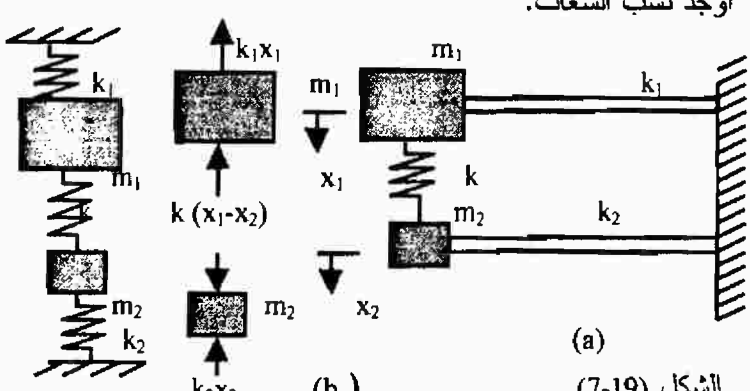
ويمكن رسم النسق بيانيا كما يلى:



(a) (b)

3-The system shown in fig.(7-19a)Determine the equations of motion , the equation of frequency and the two natural frequencies. If $m_1=m_2=m$, $k_1=k_2=k$ determine the amplitudes ratio

3-المنظومة المبينة بالشكل (7-19a) ، اوجد معادلتى الحركة ومعادلة التردد والترددين الطبيعيين، إذا كانت $k_1=k_2=k$, $m_1=m_2=m$ أوجد نسب السعات.



(b) (a)

الشكل (7-19)

الشكل (7-19a) يمثل منظومة تتكون من كتلتين m_1 , m_2 ونابض بينهما معاملة k وكـــل كتلـــة متصلة بنابض ورقى معامل كل منهما k_1, k_2 ن والشكل(7-19b) يوضح القوى المؤثرة على كل كتلـة ن والشكل (7-19c) يوضح المنظومة المكافئة ويمكن إياد معادلتى الحركة كما يلى:

$$\because \ m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k(x_1 - x_2) \qquad \therefore \ m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k)x_1 - kx_2 = 0 \text{..............(1)}$$

$$\because m_2 \ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) - k_2 x_2 \qquad \therefore \ m_2 \ddot{x}_2 - kx_1 + (k + k_2)x_2 = 0 \text{................(2)}$$

وبفرض ان الحركة دورية وبدون خمد فهى تتكون من العديد من المركبات التوافقية ذهت الترددات والسعات المختلفة ولذلك نعوض عن احدى المركبات كما بالعلاقتين الاتيتين:

$$x_1 = A_1 \sin(\omega t + \phi) \ , \dot{x}_1 = \omega A_1 \cos(\omega t + \phi) \ , \ddot{x}_1 = -\omega^2 A_1 \sin(\omega t + \phi 0 \text{............(3)}$$

$$x_2 = A_2 \sin(\omega t + \phi) \ , \dot{x}_2 = \omega A_2 \cos(\omega t + \phi) \ , \ddot{x}_2 = -\omega^2 A_2 \sin(\omega t + \phi) \text{............(4)}$$

بالتعويض من العلاقات (3) , (4) فى المعادلتين (1) , (2) تنتج المعادلتين الاتيتين:

$$\therefore (k_1 + k - m_1\omega^2)A_1 - kA_2 = 0 \text{...(5)}$$

$$-kA_1 + (k + k_2 - m_2\omega^2)A_2 = 0 \text{...(6)}$$

ويمكن الحصول على معادلة التردد كما يلى:

$$\begin{vmatrix} (k_1 + k - m_1\omega^2) & -k \\ -k & (k_2 + k - m_2\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore (k_1 + k - m_1\omega^2)(k_2 + k - m_2\omega^2) - k^2 = 0 \text{..(7)}$$

وبالتعويض فى معادلة التردد (7) عن $k_1=k_2=k$, $m_1=m_2=m$ يمكن ايجاد الترددين الطبيعيين كما يلى:

$$\therefore (2k - m\omega^2)^2 - k^2 = 0 \quad \therefore \ m\omega^2 - k = 0 \ \ or \ \ m\omega^2 - 3k = 0$$

$$\therefore \ \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \ rad/\sec \qquad , \ \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}} \ rad/\sec \text{......................(8)}$$

ويمكن ايجاد نسب السعات كما يلى:

$$\therefore the \ \ frist \ \ \mathrm{mod}e = \frac{A_1}{A_2} = \frac{k}{k + k_1 - m_1\omega^2} = \frac{k}{2k - m\omega^2}$$

$$\therefore at \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \therefore \frac{A_1}{A_2} = \frac{k}{2k - m(\frac{k}{m})} = +1 \text{..(9)}$$

$$or \qquad the \ \ \sec ond \ \ \mathrm{mod}e = \frac{A_1}{A_2} = \frac{k_2 + k - m_2\omega^2}{k} = \frac{2k - m\omega^2}{k}$$

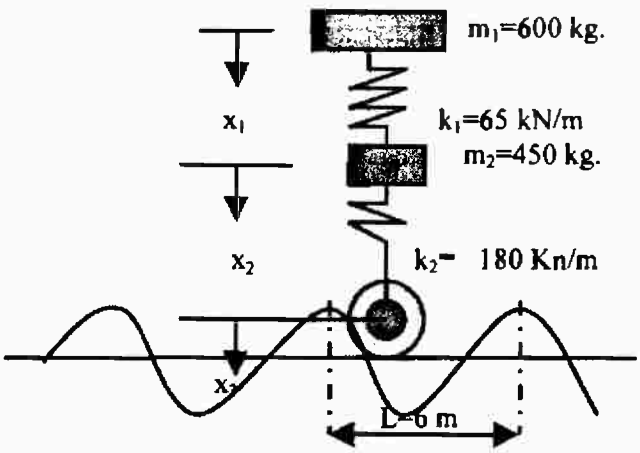
$$\therefore at \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}} \quad \therefore \frac{A_1}{A_2} = \frac{k}{-k} = -1 \text{...(10)}$$

4-A two – wheel trailer is drawn over an undulating surface in such a way that the vertical motion of the tyre may be regarded as sinusoidal , the pitch of the undulations being 6m. The combined stiffness of the tyres is 180 kN/m and that of the main springs is 65 kN/m , the axle and attached parts have a mass of 450 kg. , and the mass of the body is 500 kg. Find (a) the critical speeds of the trailer in km/hr and (b) the amplitude of the trailer body vibration if the trailer is drawn at 60 km/hr and the amplitude of the undultions is 0.15m.

4-مقطورة ذات إطارين (عجلتين) سحبت على طريق سطحة متموج وكانت الحركة الرأسية للاطار تأخذ شكل المنحنى الجيبى ، طول الخطوة (طول دورة موجية كاملة واحدة) 6 cm. ومعامل الاطار التركيبى 180 kN/m ومعامل النابض65 kN/m وكتلة محور العجلتين والجزء المتصل بهما 450 kg وكتلة جسم المحرك 600 kg. ، (أ) أوجد السرعة الحرجة للمقطورة بالكيلومتر / ساعة.

(ب)أوجد السعة الاهتزازيةلجسم المقطورة إذا سحبت المقطورة بسرعة 60 km/hr وسعة الطريق المموج 0.15 m

الحل:



الشكل (7-20)

إذن يمكن إيجاد معادلتى الحركة كما يلى:

$$\because\ m_1 \ddot{x}_1 = -k_1(x_1 - x_2) \quad \therefore\ m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 - k_1 x_2 = 0 \ldots\ldots(1)$$

$$\because\ m_2 \ddot{x}_2 = k_1(x_1 - x_2) - k_2(x_2 - x_3) \quad \therefore\ m_2 \ddot{x}_2 - k_1 x_1 + k_1 x_2 + k_2 x_2 - k_2 x_3 = 0 \ldots\ldots(2)$$

نفرض ان الحركة دورية وتتكون من عدة حركات توافقية ذات سعات وترددات مختلفة وبالتالى نعوض عن إحدى هذة الحركات بالعلاقات التالية:

$$\therefore x_1 = A_1 \sin \omega t \ ,\ \dot{x}_1 = \omega A_1 \cos \omega t \ ,\ \ddot{x}_1 = -\omega^2 A_1 \sin \omega t \ldots\ldots(3)$$

$$x_2 = A_2 \sin \omega t \ ,\ \dot{x}_2 = \omega A_2 \cos \omega t \ ,\ \ddot{x}_2 = -\omega^2 A_2 \sin \omega t \ldots\ldots(4)$$

$$x_3 = A_3 \sin \omega t \ ,\ \dot{x}_3 = \omega A_3 \cos \omega t \ ,\ \ddot{x}_3 = -\omega^2 A_3 \sin \omega t \ldots\ldots(5)$$

إذن بالتعويض من العلاقات (3) , (4) , (5) ينتج ان:

$$\therefore\ A_1(k_1 - m_1\omega^2) + A_2(-k_1) = 0 \ldots\ldots(6)$$

$$A_1(-k_1) + A_2(k_1 + k_2 - m_2\omega^2) = k_2 A_3 \ldots\ldots(7)$$

وبالتالى يمكن تعيين معادلة التردد كما يلى:

$$(k_1 - m_1\omega^2)(k_1 + k_2 - m_2\omega^2) - k_1^2 = 0 \quad \text{.....(8)}$$

إذن يمكن تعيين السرعات الحرجة (the critical speeds) المقابلة للترددات الطبيعية وعندما يحدث الرنين وذلك من معادلة التردد كما يلى:

$$m_1 m_2 \omega^4 - (m_1 k_1 + m_1 k_2 + m_2 k_1)\omega^2 + k_1 k_2 = 0 \quad \text{.....(9)}$$

$$\therefore (600)(450)\omega^4 - \left[(600)(65) + (600)(180) + (450)(65)\right](10^3)\omega^2 + (65)(180)(10^6) = 0$$

$$\therefore\ 0.27\omega^4 - 176.25\omega^2 + 11700 = 0 \quad \text{.....(10)}$$

$$put\ \lambda = \omega^2 \quad \therefore\ 0.27\lambda^2 - 176.25\lambda + 11700 = 0$$

$$\therefore \lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{176.25 \pm \sqrt{(176.25)^2 - 4(0.27)(11700)}}{2(0.27)} \quad \text{.....(11)}$$

$$\therefore \lambda_1 = \omega_1^2 = 577.78\ (rad/\sec)^2 \qquad \therefore\ \omega_1 = 24.04\ rad/\sec \quad \text{.....(12)}$$

$$\therefore \lambda_2 = \omega_2^2 = 75\ (rad/\sec)^2 \qquad \therefore\ \omega_2 = 8.66\ rad/\sec \quad \text{.....(13)}$$

وبذلك يمكن إيجاد السرعات الحرجة كما يلى:

$$\because \omega_1 = 2\pi f \quad \therefore f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{24.04}{2\pi} = 3.83\ HZ \quad \text{.....(14)}$$

$$\because f = \frac{v}{3.6L} \quad \therefore\ v_1 = 3.6(L)f_1 = 3.6(6)(3.83) = 82.728\ km/hr \quad \text{.....(15)}$$

$$\because f_2 = \frac{8.66}{2\pi} = 1.38\ HZ \quad \therefore v_2 = 3.6(L)f_2 = 3.6(6)(1.38) = 29.81\ km/hr \quad \text{.....(16)}$$

ويلاحظ ان جر المقطورة عند هذة السرعات سوف يحدث إثارة الرنين للمنظومة وبالتعويض عن قيمة A_2 من المعادلة (6) فى المعادلة(7) نحصل على ما يلى:

$$\because A_2 = \frac{A_1(k_1 - m_1\omega^2)}{k_1}$$

$$\therefore A_1(-k_1) + \frac{A_1(k_1 - m_1\omega^2)}{k_1}\left[k_1 + k_2 - m_2\omega^2\right] = k_2 A_3$$

$$\therefore\ A_1\left[-k_1^2 + (k_1 - m_1\omega^2)(k_1 + k_2 - m_2\omega^2)\right] = k_1 k_2 A_3 \quad \text{.....(17)}$$

$$\therefore A_1 = \left[\frac{k_1 k_2 A_3}{(k_1 + k_2 - m_2\omega^2)(k_1 - m_1\omega^2) - k_1^2}\right] = \left[\frac{(65)(180)A_3}{0.27\omega^4 - 176.25\omega^2 + 11700}\right] \quad \text{.....(18)}$$

إذن يمكن إ يجاد سعة المقطورة اذا سحبت بسرعة 60km/hr ، وسعة الطريق المتموج A_3=0.15m كما يلى:

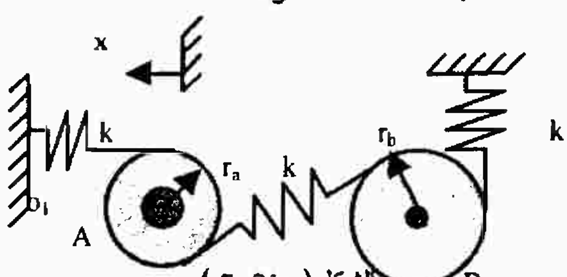
$$\because f=\frac{v}{L}=\frac{60}{6(3.6)}=2.78\ HZ \quad \therefore \omega=2\pi f=2\pi(2.78)=17.49\ rad/\sec \ldots\ldots\ldots\ldots(19)$$

بالتعويض عن $\omega=17.49$ rad/sec ، $A_3=0.15$ m يمكن الحصول على الســعة الاهتزازيــة A_1 لجســم المقطورة كما يلي:

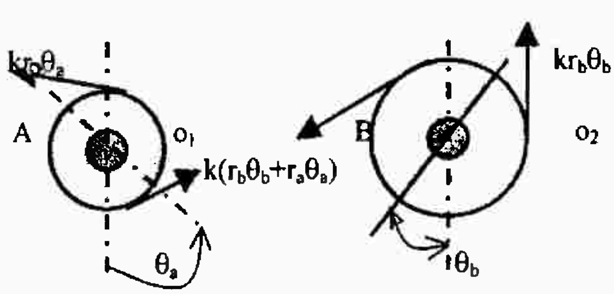
$$\therefore A_1=\left[\frac{(65)(180)(0.15)}{0.27(17.49)^4-(176.25)(17.49)^2+11700}\right]=-0.104m\ldots\ldots\ldots\ldots(20)$$

5-Part of a machine can be modelled by the system shown in fig (7-21). Two uniform discs A and B, which are free to rotate about fixed parallel axes thorough their centers, are coupled by a spring. Similar springs connect the discs to the fixed frame as shown in the figure. Each of the springs has a stiffness of 3 kN/m which is the same in tension or compression. Disc A has a mass moment of inertia about its axis of rotation of 0.08 kg.m^2, and a radius of 0.15m, whilst for the disc B the corresponding figures are 0.45kg.m^2 and 0.3m. Damping is negligible. Determine the natural frequencies of small amplitude oscillation of the system and the corresponding of amplitudes ratio.

5-جزء من ماكينة يمكن تمثيلة بالمنظومة المبينة بالشكل (7-21) والمتكون من قرصان منتظمان B, A اللذان يدوران بحرية حول محورين ثابتين متوازيين خلال مركزهما O_1, O_2 ومتصلين معـــا بنـــابض وكذلك نابضين متماثلين متصلين بالقرصين مع هيكل الماكينة كما مبين بالشكل (7-27) ومعامل كـــل نابض k=3kN/m حيث يكون كل منهما متماثل أثناء الشد أو الضغط ، عزم القصـــور الذاتـــي الكتلـــي للقرص A حول محور دورانة $I_a=0.08$ kg.m^2 ونصف قطرة $r_a=0.15$m بينما للقرص B يكـــون عـــزم القصور الذاتي لة $I_b=0.45$ kg.m^2 ونصف قطرة $r_b=0.3$ m ، إهمل الخمد -أوجد الترددات الطبيعية لسعة تذبذبية صغيرة لهذة المنظومة وكذلك نسب السعات المناظرة.



الشكل(7-21-a)



الشكل(7-21-b)

$$\because \sum M_{O1} = -I_a \ddot{\theta}_a \quad ,\sum M_{O1} = kr_a^2\theta_a + k(r_b\theta_b + r_a\theta_a)r_a$$

$$\therefore I_a \ddot{\theta}_a + 2kr_a^2\theta_a + kr_a r_b\theta_b = 0 \qquad (1)$$

$$\because \sum M_{O2} = -I_b \ddot{\theta}_b \quad ,\because \sum M_{02} = k(r_b\theta_b + r_a\theta_a)r_b + kr_b^2\theta_b$$

$$\therefore I_b \ddot{\theta}_b + 2kr_b^2\theta_b + kr_a r_b\theta_a = 0 \qquad (2)$$

وبفرض ان الحركة دورية وتتكون من العديد من الحركات التوافقية ذات سـعات وتـرددات مختلفـة ونعوض عن إحدىالمركبات كما يلى:

$$\theta_a = A\sin\omega t \quad ,\ddot{\theta}_a = -\omega^2 A\sin\omega t \quad ,\theta_b = B\sin\omega t \quad ,\ddot{\theta}_b = -\omega^2 B\sin\omega t \qquad (3)$$

وبالتعويض من(3) فى المعادلتين (1) ،(2) ينتج ما يلى:

$$\therefore (2kr_a^2 - \omega^2 I_A)A + (kr_a r_b)B = 0 \qquad (4)$$

$$(kr_a r_b)A + (2kr_b^2 - \omega^2 I_B)B = 0 \qquad (5)$$

ويمكن إيجاد معادلة التردد بوضع المعادلتين (4) ، (5) فى صورة المحدد كما يلى:

$$\begin{vmatrix} (2kr_a^2 - \omega^2 I_A) & kr_a r_b \\ kr_a r_b & (2kr_b^2 - \omega^2 I_B) \end{vmatrix} = 0 \qquad (6)$$

$$\therefore \quad \omega^4 I_A I_B - 2k(I_A r_b^2 + I_B r_a^2)\omega^2 + 3(kr_a r_b)^2 = 0 \qquad (7)$$

وبالتعويض فى معادلة التردد (7) عن القيم التـــــالى $k = 3kN/m$, $I_A = 0.08\ kg.m^2$, $I_B = 0.45 kg.m^2$, $r_a = 0.15m$, $r_b = 0.3m$

$$\therefore \omega^4(0.08)(0.45) - 2(3)(10^3)\left[0.08(0.3^2) + 0.45(0.15^2)\right]\omega^2 + 3\left[3(10^3)\right]^2.(0.15^2)(0.3^2) = 0$$

$$\therefore 0.036\omega^4 - 6(10^3)(0.0173)\omega^2 + 54.675(10^3) = 0 \qquad (8)$$

$$put\ \omega^2 = \lambda \quad \therefore 0.036\lambda^2 - 103.95\lambda + 5467 = 0 \qquad (9)$$

$$\because \lambda_{1,2} = \frac{-b^2 \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \therefore \quad \lambda_1 = \omega_1^2 = 2195.83(rad/\sec)^2 \quad \lambda_2 = \omega_2^2 = 691.67(rad/\sec)^2$$

وبالتالى يمكن إيجاد الترددين ونسب السعات كما يلى:

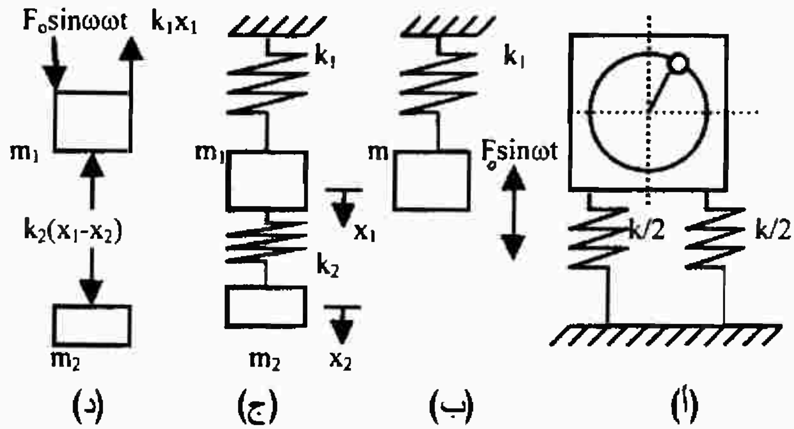
$$\therefore \omega_1 = 46.86\ rad/\sec \quad ,\omega_2 = 26.3\ rad/\sec \qquad (10)$$

$$\therefore \frac{A_1}{B_1} = \frac{kr_a r_b}{2kr_a^2 - \omega_1^2 I_A} = \frac{135}{-40} = -3.375 \quad , \quad \frac{A_2}{B_2} = \frac{2kr_b^2 - \omega_2^2 I_B}{hr_a r_b} = \frac{228.74}{135} = 1.69 \qquad (11)$$

6-A rotating machine at constant speed 4000 rpm , the exciting frequency was closed to natural frequency of the system. If the machine mass is 30 ib and the spring coefficient is 15ib/in, find the mass and the spring coefficient of the shock absorber that must be installed in order to get natural frequency for the system equal 25%of the exciting frequency?. How can you reduce the amplitude of vibration for mass m1 as much as possible by using the dynamic of the shock absorber ?

6- عند دوران ماكينة بسرعة ثابتة 4000 rpm ، كان تردد الاستثارة قريب جدا من الـــتردد الطبيعـــى للمنظومة ، وإذا كانت كتلة الماكينة 30 ib ومعامل النابض 15 ib/in ، أوجد كتلة ومعامل النابض لجهاز ماص الصدمات الواجب إضافتة حتى يكون التردد الطبيعي للمنظومة مساويا 25٪ من تردد الاسـتثارة ؟ كيف يمكنك تقليل سعة إهتزاز كتلة الماكينة m_1 بقدر الامكان باســـتخدام منظومـــة مـــاص الاهـــتزاز الديناميكى ؟

الحل:



الشكل (7-21)

$$\because m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 - k_2(x_1 - x_2) + F_o \sin\omega t \quad \therefore m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 + k_2x_1 - k_2x_2 = F_o \sin\omega t \text{....(1)}$$

$$\because m_2\ddot{x}_2 = k_2(x_1 - x_2) \quad \therefore \quad m_2\ddot{x}_2 - k_2x_1 + k_2x_2 = 0 \text{..(2)}$$

وبما ان المنظومة عديمة الخمد فتكون الحركة دورية وبالتالى فهى تتكون من العديـــد مـــن الحركـــات التوافقية والتى يمكن التعويض عن احدى مركباتها x_2, x_1 بالعلاقات الاتية:

$$x_1 = D\sin\omega t \quad ,\dot{x}_1 = \omega D\cos\omega t \quad ,\ddot{x}_1 = -\omega^2 D\sin\omega t \text{............................(3)}$$

$$x_2 = E\sin\omega t \quad ,\dot{x}_2 = \omega E\cos\omega t \quad ,\ddot{x}_2 = -\omega^2 E\sin\omega t \text{............................(4)}$$

بالتعويض من (3) ، (4) فى المعادلتين (1) ، (2) تنتج المعادلتين (5) ،(6) ومنها نحصل على ما يلى:

$$\therefore (-m_1\omega^2 + k_1 + k_2)D - k_2E = F_\circ \text{...}(5)$$

$$-k_2D + (k_2 - m_2\omega^2)E = 0 \text{...}(6)$$

$$\therefore \Delta = \begin{vmatrix} (k_1 + k_2 - m_1\omega^2) & -k_2 \\ -k_2 & (k_2 - m_2\omega^2) \end{vmatrix} = (k_1 + k_2 - m_1\omega^2)(k_2 - m_2\omega^2) - k_2^2 \text{...}(7)$$

$$\therefore \Delta x_1 = \begin{vmatrix} F_\circ & -k_2 \\ 0 & (k_2 - m_2\omega^2) \end{vmatrix} = F_\circ(k_2 - m_1\omega^2) \text{.......................................}(8)$$

$$\therefore \Delta x_2 = \begin{vmatrix} (k_1 + k_2 - m_1\omega^2) & F_\circ \\ -k_2 & 0 \end{vmatrix} = k_2F_\circ \text{...}(9)$$

$$\therefore D = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{F_\circ(k_2 - m_2\omega^2)}{(k_1 + k_2 - m_1\omega^2)(k_2 - m_2\omega^2) - k_2^2} \text{.......................................}(10)$$

$$\therefore E = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{k_2F_\circ}{(k_1 + k_2 - m_1\omega^2)(k_2 - m_2\omega^2) - k_2^2} \text{.......................................}(11)$$

يمكن إيجاد معادلة التردد لهذة المنظومة وذلك بوضع $\Delta=0$ بالمعادلة (7) وفك المحدد كما يلى:

$$\therefore k_1k_2 + k_2^2 - m_1\omega^2k_2 - m_2\omega^2k_1 - m_2\omega^2k_2 + \omega^4m_1m_2 - k_2^2 = 0 \text{......................}(12)$$

$$\therefore 1 - \frac{m_1\omega^2}{k_1} - \frac{m_2\omega^2}{k_2} - \frac{m_2\omega^2}{k_1} + \frac{m_1m_2\omega^4}{k_1k_2} = 0 \text{...}(13)$$

بالتعويض فى المعادلة (12) عن قيم الترددين الطبيعين كما يلى:

$$\because \omega_n^2 = \frac{k_1}{m_1} \quad ,\omega_n^2 = \frac{k_2}{m_2} \quad , \quad r^2 = \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2$$

$$1 - 2r^2 - \omega^2\left(\frac{m_2}{k_1}\right) + r^4 = 0 \quad .,\therefore 1 - 2r^2 - \frac{k_2\omega^2}{k_1\omega_n^2} + r^4 = 0$$

$$\therefore r^4 - (2 + \frac{k_2}{k_1})r^2 + 1 = 0 \text{...}(14)$$

بماأنهيجب ان تكون الترددات على الاقل 25% من تردد الاستثارة لكى نتجنب الرنين:

$$\therefore r=\frac{\omega}{\omega_n}=\frac{100-25}{100}=0.75 \quad \text{......(15)}$$

$$\therefore (0.75)^4-(2+\frac{k_2}{k_1})(0.75)^2+1=0 \quad ,\therefore k_2=0.339k_1 \quad \text{......(16)}$$

$$at\ resonance\ r=\frac{\omega}{\omega_n}=1 \quad \therefore \frac{k_1}{m_1}=\frac{k_2}{m_2} \quad \therefore \frac{k_2}{k_1}=\frac{m_2}{m_1}=0.339 \quad \text{......(17)}$$

$$\therefore m_2=0.339m_1=0.339(30)=10.17\ ib \quad \text{......(18)}$$

$$\therefore k_2=0.339k_1=0.339(15)=5.085\ ib/in \quad \text{......(19)}$$

بذلك لتجنب حدوث الرنين يجب ان يكون k_2=5.085 ib/in , m_2=10.17 ib

ولتقليل سعة إهتزاز الكتلة بقدر الامكان باستخدام ماص الاهتزاز الديناميكى فان المعادلة (10) يجب ان تساوى الصفر وبذلك يكون:

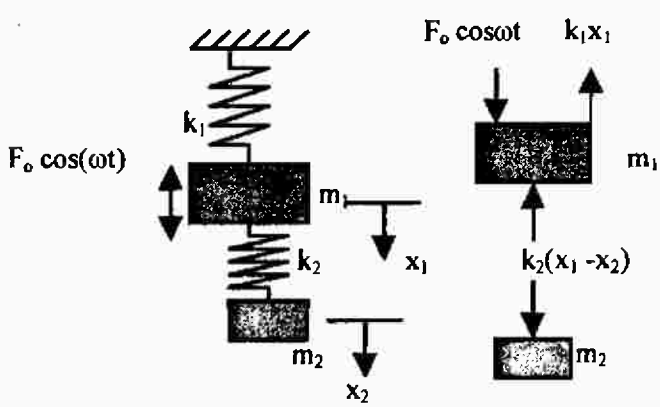
$$\therefore k_2-m_2\omega^2=0 \qquad \therefore k_2=m_2\omega^2 \quad \text{......(20)}$$

وعندما يحدث ذلك تكون سعة الكتلة m1 مساوية للصفر عمليـا ولـهذا تسـتخدم منظومـة الاهـتزاز الديناميكى فقط عندما يكون التردد الطبيعى للمنظومة الاصلية قريبة من تردد الاستثارة ولهذا يكون

$$\therefore \frac{k_1}{m_1}=\frac{k_2}{m_2} \quad \text{......(21)}$$

7-Exciting force $F_0 \cos(\omega t)$ acting on the system shown in fig(7-22). Determine the amount of damping vibration by mechanical impedance method for m_1, m_2 at steady state ,If the air damping assumed to be c=2 kg.cm/sec and $k_1=k_2$=2 kg/cm ,$m_1=m_2$=2 kg ,and w=1 rad/sec

7-قوة إستثارة $F_0 \cos(\omega t)$ تؤثر فى المنظومة المبينة بالشكل (7-22). أوجد مقدار الاهتزاز المخمـود بطريقة الممانعة الميكانيكية للكتلتين m_1,m_2 فى الحالة المستقرة ، إذا فرض ان الخمـد الـهوائى c=2 kg.cm/sec ، وان $k_1=k_2$=2kg/cm ، $m_1=m_2$=2kg ، ω= 1 rad/sec



الشكل(7-23)

يمكن إيجاد معادلتى الحركة للمنظومة (7-23) مع ملاحظة ان الخمد بالمنظومة خمد هوائى كما يلى:

$$\because m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - c_1 \dot{x}_1 - k_2(x_1 - x_2) + F_\circ \cos(\omega t)$$

$$\therefore m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 + c_1 \dot{x}_1 - k_2 x_2 = F_\circ \cos(\omega t) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\because m_2 \ddot{x}_2 = -c_2 \dot{x}_2 + k_2(x_1 - x_2)$$

$$\therefore m_2 \ddot{x}_2 + c_2 \dot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

وباستخدام طريقة الاعاقة الميكانيكية نعوض عن قوة الاستثارة والازاحات كما يلى:

$$\therefore F_\circ \cos(\omega t) = F_\circ e^{i\omega t} \quad ,\omega = 1 \ rad/\sec \quad \therefore F_\circ \cos(t) = F_\circ e^{it} \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$\therefore x_1 = X_1 e^{it} \quad , \quad \dot{x}_1 = iX_1 e^{it} \quad , \quad \ddot{x}_1 = (i)^2 X_1 e^{it} = -X_1 e^{it} \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

$$\therefore x_2 = X_2 e^{it} \quad , \quad \dot{x}_2 = iX_2 e^{it} \quad , \quad \ddot{x}_2 = -X_2 e^{it} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

وبالتعويض من العلاقات (3) ، (4) ، (5) فى معادلتى الحركة (1) ، (2) ووضعهم فى صورة المحـــدد وبطريقة كرامر يمكن إيجاد المطلوب كما يلى:

$$\therefore (2 + 2i)X_1 - 2X_2 = F_\circ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

$$-X_1 + iX_2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

$$\therefore \Delta = \begin{vmatrix} (2+2i) & -2 \\ -1 & i \end{vmatrix} = 2i - 4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

$$\Delta X_1 = \begin{vmatrix} F_\circ & -2 \\ 0 & i \end{vmatrix} = iF_\circ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

$$\Delta X_2 = \begin{vmatrix} (2+2i) & F_\circ \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = F_\circ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

$$\therefore X_1 = \frac{\Delta X_1}{\Delta} = \frac{iF_\circ(2i+4)}{(2i-4)(2i+4)} = \frac{(2i+4).i.F_\circ}{-20} = \frac{(-2+4i)F_\circ}{-20} \ldots\ldots\ldots (12)$$

$$\therefore X_1 = (0.1 - 0.2i)F_\circ \quad ,X_1 = F_\circ\sqrt{(0.1)^2 + (0.2)^2} = 0.22F_\circ \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

$$\therefore X_2 = \frac{\Delta X_2}{\Delta} = \frac{F_\circ(2i+4)}{(2i-4)(2i+4)} = \frac{(2i+4)F_\circ}{-20} = -(0.1i + 0.2)F_\circ \ldots\ldots\ldots (14)$$

$$\therefore X_2 = F_\circ\sqrt{(0.1)^2 + (0.2)^2} = 0.22F_\circ.$$

$$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{-0.2}{0.1}\right) = -26.6^\circ \quad ,\theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{-0.2}{-0.1}\right) = 63.4^\circ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

ويمكن التعبير عن قوة الاستثارة بالعلاقة $F_o \cos t = Re(Foe^{it})$ والازاحة يعبر عنها بالعلاقةالتالية:

$$\because X_1 = X_1 e^{i\theta} \quad \therefore x_1 = R_e(X_1 e^{it}) = R_e(X_1 e^{i\theta_1} . e^{it}) = X_1 \cos(t+\theta_1).....(16)$$

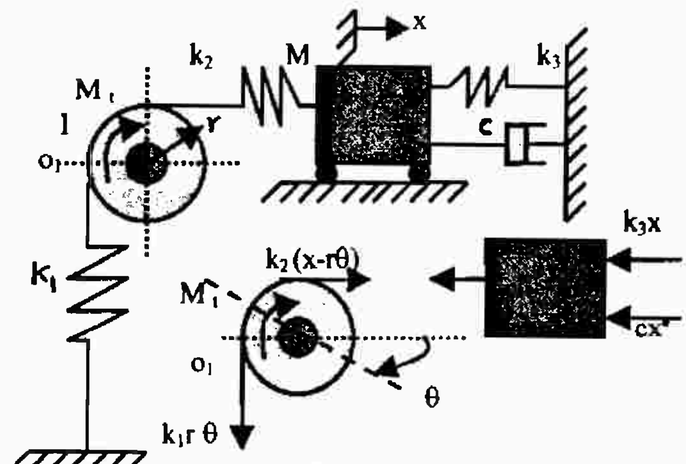
$$\therefore x_2 = X_2 \cos(t+\theta_2)..........(17)$$

$$\therefore x_1 = 0.22F_o \cos(t - 26.6^\circ) \quad , x_2 = 0.22F_o \cos(t + 63.4^\circ)..........(18)$$

وبذلك تكون الاهتزازات المخمودة فى الحالة القسرية تكون على الصورة المبينة بالمعادلة (21)

8-The system in fig.(7-24) consists of a pulley , a trolley of mass m , three springs of stiffness k_1 , k_2 and k_3 , and a dashpot in the figure. The pulley has a mass moment of subjected to the moment M(t) shown. Determine the equations of motion of the system and then put them in the matrix form cosidering that the displacement is x>rθ..

8-المنظومة المبينة بالشكل (24-7) تتكون من بكرة وعربة كتلتها m_1 وثلاث نوابض معاملهما k_1 , k_2 k_3 وخامد معامل الخمد لة c ، جميعهم إتصلوا معا كما بالشكل ، عزم القصور الذاتى الكتلى للبكـــرة حول محور الدوران ، البكرة وضعت تحت عزم M_t كما موضح بالرســــم-أوجــد معادلــة الحركــة للمنظومة وإكتبهم فى الصورة المصفوفية مع إعتبار ان الازاحة x > rθ.



الشكل (7-24)

بماأن عزم اللى الكامن يساوى عزم اللى الاسترجاعى فى المقدار ويخالفة فى الاتجاة.

وبذلك يمكن تعين القوى المؤثرة على القرص والبكرة وكذلك معادلة حركتهما كما يلى:

$$\because \sum M_o = -I\ddot{\theta} \quad \because \sum M_0 = k_1 r\theta . r - k_2(x - r\theta)r - M_t$$

$$\therefore I\ddot{\theta} + (k_1 + k_2)r^2\theta - k_2 r x = M_t..........(1)$$

$$\because M\ddot{x} = \sum F_x \quad \therefore M\ddot{x} = -c\dot{x} - k_3 x - k_2(x - r\theta)$$

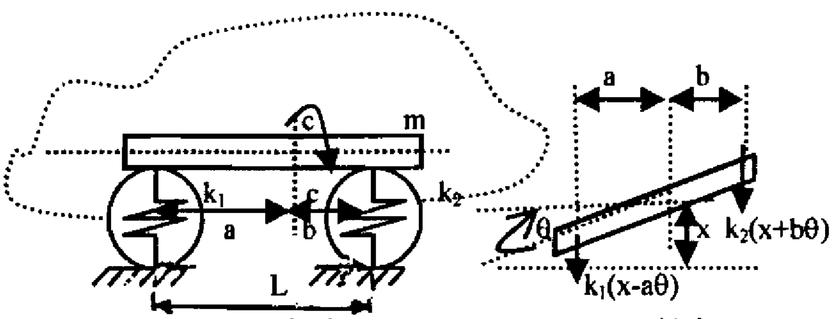
$$\therefore M\ddot{x} + c\dot{x} + k_3 x + k_2(x - r\theta) = 0 \quad \therefore M\ddot{x} + c\dot{x} + (k_3 + k_2)x - k_2 . r\theta = 0.....(2)$$

ويمكن كتابة معادلتى الحركة (1) ،(2) فى الصورة المصفوفية كما يلى:

$$\therefore \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{x} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} (k_1r^2+k_2r^2) & (-k_2r) \\ (-k_2r) & (k_3+k_2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta \\ x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} M_t \\ 0 \end{bmatrix}......(3)$$

11–*تحويلات الاحداثى والتقارن* . Coordinate Transformations and Coupling.

المنظومة المبينة بالشكل (7–25a) تعتبر نموذجا رياضيا للسيارة حيث يمثل الهيكل بواسطة لوحة صلبة ذات كتلة كلية m ومركز الثقل لها يقع على بعد a , b من النوابض k_1 , k_2 على التوالى ، حيث تمثل النوابض الية التعليق بالسيارة ، وبفرض ان بدن السيارة لة عزم قصور ذاتى كتلى I_c حول المركز c ، ويلاحظ ان كتلة الاطارات قد إهملت كما نفترض ان جسائتها ما لانهاية. ويبين الشكل (7-25b) مخطط الجسم الحر المناظر للبدن فى الوضع المزاح ، حيث تحتوى الازاحات على الانتقال الرأسى x(t) للمركز (c) ، والدوران θ(t) حول المركز (c) وتحدد الانتقالية x(t) من موضع الاتـزان حيث يتعادل وزن السيارة W=mg مع قوى الانضغاط الابتدائية المناظرة فى النوابض. وبفرض ان الازاحة الزاوية θ(t) صغيرة ، فيمكن كتابة المعادلتين للحركة كما يلى:



الشكل(7-25-a) الشكل (7-25-b)

نلاحظ فى الشكل (7-25b) انة توجد ازاحتان أحدهما إزاحة زاوية θ(t) وأزاحة خطية رأسية x(t) وتكون معادلة الحركة فى حالة الازاحة الزاوية والازاحة الخطية الرأسية كما يلى:

$$\because m\ddot{x}=-k_1(x-a\theta)-k_2(x+b\theta) \quad \therefore m\ddot{x}+(k_1+k_2)x-(k_1a-k_2b)\theta=0.....(1)$$

$$\because \sum M_c=-I_c\ddot{\theta} \quad ,\because \sum M_c=-k_1(x-a\theta)a+k_2(x+b\theta)b$$

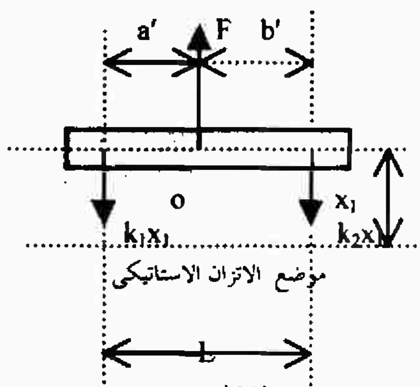
$$\therefore I_c\ddot{\theta}-(k_1a-k_2b)x+(k_1a^2+k_2b^2)\theta=0...(2)$$

ويمكن وضع المعادلتين (1) ، (2) فى الصورة المصفوفية كما يلى:

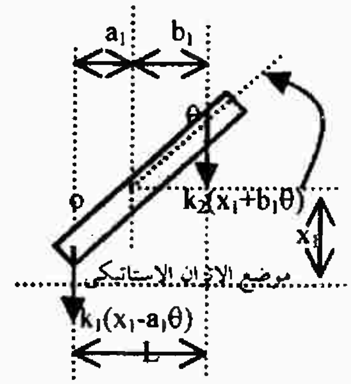
$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} (k_1+k_2) & -(k_1a-k_2b) \\ -(k_1a-k_2b) & (k_1a^2+k_2b^2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.............(3)$$

فى حالة تعرض المنظومة لقوة رأسية عند نقطة (o) تتعرض المنظومة الى حركة إنتقالية فقط كما فى الشكل (7-26a) ،وبفرض ان النقطة (o) تقع عند البعدين a_1 , b_1 من النوابض k_1 ,k_2 على التوالى ، عندئذ ترمز x_1 الى الانتقال الرإسى للوح (الكتلة) ونستنتج من شرط عزوم التواء الصفر حول (o) بأن :

$k_1x_1a_1=k_2x_1b_1$, i.e $k_1a_1=k_2b_1$ ....(4)



الشكل (7-26-a)



الشكل (7-26-b)

وبأستعمال الاحداثيات $x_1(t)$, $\theta(t)$ حيث $\theta(t)$ ترمز الى دوران الكتلة فى الثانية، والمنظومة المبينة بالشكل (7-26b) توضح ذلك وبالتالى يمكن كتابة المعادلة على الصورة التالية :

$$\therefore -k_1(x_1 - a_1\theta) - k_2(x_1 + b_1\theta) = m\left|\ddot{x}_1 - (a_1 - a)\ddot{\theta}\right| \quad ....\ ....(4)$$

$$k_1(x_1 - a_1\theta)a_1 - k_2(x_1 + b_1\theta)b_1 = I_\circ\ddot{\theta} - m\ddot{x}_1(a_1 - a) \quad ....\ ....(5)$$

$$\because\ k_1a_1 = k_2b_1 \qquad assume \quad e = a_1 - a$$

$$\therefore\ m\ddot{x}_1 - me\ddot{\theta} + (k_1 + k_2)x_1 = 0 \quad ....\ ....\ ....\ ....\ ....(6)$$

$$\therefore\ -me\ddot{x}_1 + I_\circ\ddot{\theta} + (k_1a_1^2 + k_2b_1^2)\theta = 0 \quad ....\ ....\ ....\ ....(7)$$

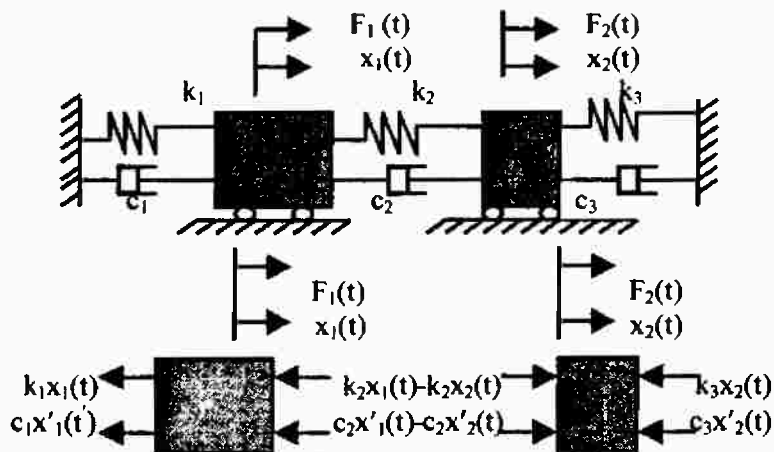
$$\therefore \begin{bmatrix} m & -me \\ -me & I_\circ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & 0 \\ 0 & (k_1a_1^2 + k_2b_1^2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ....(8)$$

حيث I_o هى عزم القصور الذاتى الكتلى للكتلة m حول المركـــز o والمعادلـــة (8) تمثـل المصفوفـة لمعادلتى الحركة (6) , (7) للمنظومة المبينة بالشكل (7-26-b) ، وبالنظر الى المعادلة (3) نستنتج انـــة عند إستعمال إحداثيات الانتقال $x(t)$ لمركز الكتلة (c) والدوران $\theta(t)$ حولها بالمنظومة (7-25-b) تقـترن معادلتا الحركة بواسطة حدود الجساءة ، ويسمى هذا التقارن او الترابط بالتقارن او الترابط الاســـتاتيكى او المرنى ، ومن جهة اخرى فان معادلات الحركة المبينة بالمعادلة (8) قد إرتبطـت بواسـطة حـدود القصـور الذاتى ، ويسمى هذا الترابط بالترابط الديناميكى إو بالقصور الذاتى ، ولهذا يتضح ان طبيعـــة

الترابط تعتمد على الاحداثيات المستعملة وهى ليست خواصا اساسية للمنظومة وبذلـــك يمكــن إعتبــار وجود إحداثيات $q_2(t)$, $q_1(t)$ مثلا بحيث تصبح المعادلات عند إستعمالها غـــــير مرتبــط إســتاتيكيا أو ديناميكيا. وتكون هذة الاحداثيات موجودة واقعيا ، وتعرف بالاحداثيات الطبيعية الاساسية ويمكن تمثيــل الحركة العامة لمنظومة ذات إزاحة خطية غير متضائلة كتجميع خطى للانســـاق الطبيعيـــة مضروبـــة بواسطة الاحداثيات الطبيعية.

12-الاحداثيات الطبيعية Natural coordinates

المنظومة المبينة بالشكل (7-27) هى منظومة ثنائية الحركة (ذات درجتين من الحرية).



الشكل (7-27)

وباعتبار ان الاحداثين $x_2(t)$, $x_1(t)$ إزاحتين خطيتين كدالة فى الزمن (t) ، وبتطبيق قانون نيوتن الثانى على حركة الكتلتين m_2 , m_1 نحصل على معادلتى الحركة ووضعهما فى الصورة المصفوفية كما يلى:

$$\because m_1\ddot{x}_1(t) = -k_1x_1(t) - c_1\dot{x}_1(t) - k_2\left|x_1(t) - x_2(t)\right| - c_2\left|\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)\right| + F(t)........(a)$$

$$\therefore m_1\ddot{x}_1(t) + (k_1 + k_2)x_1(t) - k_2x_2(t) + (c_1 + c_2)\dot{x}_1(t) - c_2\dot{x}_2(t) = F_1(t)................(1)$$

$$\because m_2\ddot{x}_2(t) = k_2\left(x_1(t) - x_2(t)\right) + c_2\left|\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)\right| - k_3x_2(t) - c_3\dot{x}_2(t) + F_2(t)...(b)$$

$$\therefore m_2\ddot{x}_2(t) - k_2x_1(t) + (k_2 + k_3)x_2(t) - c_2\dot{x}_1(t) + (c_2 + c_3)\dot{x}_2(t) = F_2(t)................(2)$$

$$\therefore \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (c_1 + c_2) & -c \\ -c_2 & (c_2 + c_3) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & (k + k) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{bmatrix}....(3)$$

$$[m]\left[\ddot{x}(t)\right] + [c]\left[\dot{x}(t)\right] + [k][x(t)] = [F(t)]..(*)$$

$-c_2 x_2(t) \quad ,-k_2 x_1(t) \;\; in \; the \;\; frist \;\; equation$

$and \;\; -k_2 x_1(t) \quad in \; the \;\; second \;\; equation$

حيث نلاحظ ان حدود الترابط (the coupling terms) بهذة المعادلات تتمثل فى :

13-الإهتزاز الحر للمنظومات ثنائية الحركة الغير مخمدة:

المنظومة المبينة بالشكل (7-27) فى حالة عدم وجود خمد وعدم وجود قوة إســـتثارة وبالتـــالى تـــؤل معادلتى الحركة الى ما يلى:

$$i.e \;\; c_1 = c_2 = 0 \qquad , F_1(t) = F_2(t) = 0$$

$$\therefore m_1 \ddot{x}_1(t) + (k_1 + k_2) x_1(t) - k_2 x_2(t) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

$$\therefore m_2 \ddot{x}_2(t) - k_2 x_1(t) + (k_2 + k_3) x_2(t) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

$$put \;\; k_1 + k_2 = k_{11} \;\; , \;\; k_2 + k_3 = k_{22} \;\; , \;\; -k_2 = k_{12} = k_{21} \;\; in \;\; equation (4),(5)$$

$$\therefore m_1 \ddot{x}_1(t) + k_{11} x_1(t) + k_{12} x_2(t) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

$$m_2 \ddot{x}_2(t) + k_{12} x_1(t) + k_{22} x_2(t) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

ونظرا لان المعادلتين (6) , (7) معادلات تفاضلية ومتجانسة فان حلها يكون متمثلا بـــالعلاقتين $\alpha.x_2(t)$, $\alpha.x_1(t)$ حيث α هى ثابت إختيارى ولهذا فان الحل للمعادلتين(4 و5) يمكن فرضـــــهم علـــى الصـــورة التالية:

$$x_1(t) = u_1 f(t) \quad , x_2(t) = u_2 f(t) \ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

حيث u_1, u_2 تلعب دور السعات الثابتة وبالتالى فان المعادلتين (6) , (7) يمكن كتابتـــهم علـــى الصـــورة التالية:

$$\therefore m_1 u_1 \ddot{f}(t) + (k_{11} u_1 + k_{12} u_2) f(t) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(9)$$

$$\therefore m_2 u_2 \ddot{f}(t) + (k_{12} u_1 + k_{22} u_2) f(t) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(10)$$

$$\therefore -\frac{\ddot{f}(t)}{f(t)} = \frac{k_{11} u_1 + k_{12} u_2}{m_1 u_1} = \frac{k_{12} u_1 + k_{22} u_2}{m_2 u_2} = \lambda \ldots\ldots\ldots\ldots(11)$$

حيث λ هى ثابت حقيقى وكذلك m_1 , m_2 , k_{11} , k_{12} , u_1 , and u_2 تعتبر ثوابـــت حقيقيـــة ولـــهذا تكـــون الحركة التزامنية محتملة ويكون الحل المحتمل على صورة المعادلات التالية:

$$\ddot{f}(t) + \lambda . f(t) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(12)$$

$$, \;\; (k_{11} - \lambda m_1) u_1 + k_{12} u_2 = 0 \;\; , k_{12} u_1 + (k_{22} - \lambda m_2) u_2 = 0 \ldots\ldots\ldots(13)$$

وبالتالى يمكن وضع المعادلة (12) على الصورة التالية:

$$f(t) = Ae^{st} \quad where \quad s^2 + \lambda = 0 \;.\; and \quad s_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda} \text{..............}(14)$$

يكون الحل للمعادلة (14) على الصورة التالية:

$$f(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} = A_1 \exp(\sqrt{-\lambda})t + A_2 \exp(-\sqrt{-\lambda})t \text{............}(15)$$

بوضع $\lambda = \omega_2$ فى المعادلة (14) نجد ان :

$s_{1,2} = i\omega$..(16)

وبالتالى فان المعادلة (15) يمكن كتابتها على الصورة التالية:

$f(t) = A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}$ ....(17)

حيث A_2 , A_1 هى ثوابت للاعداد المركبة وان $e^{i\omega t}$, $e^{-i\omega t}$ تمثل المتجهات المركبة التى قيمتها الوحـــدة وبالتالى يمكن كتابتها على الصورة التالية :

$e^{i\omega t} = \cos\omega t \mid i\sin\omega t$ ....(18)

وبالتالى نستنتج ان :

$f(t) = (A_1 + A_2)\cos\omega t + i(A_1 - A_2)\sin\omega t$..(19)

حيث $A_1 + A_2 = c\cos\phi$, $i(A_1 - A_2) = c.\sin\phi$ ....

وبالتالى يكون الحل للمعادلة (19) على صورة المعادلة التالي

$f(t) = c.\cos(\omega t - \phi)$..(20)

حيث c هى ثابت إختيارى ، ω هى التردد للحركة التوافقية ، ϕ هى زاوية الطـــور وعندمـــا $\lambda = \omega^2$ فان المعادلتين المتمثلة فى (13) يمكن كتابتهم على الصورة التالية:

$$(k_{11} - \omega^2 m_1)u_1 + k_{12}u_2 = 0 \text{...}(21)$$

$$k_{12}u_1 + (k_{22} - \omega^2 m_2)u_2 = 0 \text{...}(22)$$

والتى تمثل معادلتين جبريتين انيتين متجانستين بالمجاهيل u_2 , u_1 مع ω_2 التى تلعب دور المتغير ، مـــن الجبر الخطى نلاحظ ان المعادلات (21) و (22) تعتبر حلا فقط اذا كان المحدد للمعـــاملات u_1 , u_2 مساويا للصفر ، اى ان :

$$\Delta(\omega) = \det\begin{bmatrix} (k_{11} - \omega^2 m_1) & k_{12} \\ k_{12} & (k_{22} - \omega^2 m_2) \end{bmatrix} = 0 \text{.................................}(23)$$

حيث $\Delta(\omega^2)$ والتى تعرف بالمحددة المميزة ، وهى متوالية الحدود من الدرجة الثانية فى ω^2 ، ويمكن ان تكتب بفك المعادلة (23) كما يلى:

$$\Delta(\omega^2) = m_1 m_2 \omega^4 - (m_1 k_{22} + m_2 k_{11})\omega^2 + k_{11}k_{22} - k_{12}^2 = 0 \text{............}(24)$$

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{0.5m_1 k_{22} + m_2 k_{11}}{m_1 m_2} \pm 0.5\sqrt{\left(\frac{m_1 k_{22} + m_2 k_{11}}{m_1 m_2}\right)^2 - 4\left(\frac{k_{11}k_{22} - k_{12}^2}{m_1}\right)} \text{.......}(25)$$

وهى تمثل معادلة تربيعية فى ω^2 تدعى بالمعادلة المميزة ، او معادلة التردد وهذة المعادلة لها الجذور

التالية، ولذلك فانة يوجد نسقان يمكن ان تكون الحركة التزامنية فيهما ممكنة الحـــدوث والنســق الاول يمثلة التردد الاول ω_1 والاخر التردد الثانى ω_2 واللذان يعرفان بالترددات الطبيعية للمنظومة ، ولايجـــاد قيم الثوابت u_1 , u_2 والتى تعتمد على هذين الترددين الطبيعين ، حيث ترمز الى القيمة المناظرة للــــتردد ω_1 بالرمزين $u_1^{(1)}$, $u_2^{(1)}$ والمناظرة للتردد $\omega 2$ بالرمزين $u_1^{(2)}$, $u_2^{(2)}$ مع العلم بـــــان الارقـــام (1) , (2) لاتشير الى القوى الاسية ، لكن تعرف الترددات التى ترتبط معها الثوابت u_1 , u_2 فقــط. وحيــث ان المعادلتين (21) و (22) متجانستين وبالتالى يمكن إيجاد نسب السعات r_1, r_2 وذلك بعد إدخال ω_1^2, ω_2^2 كما يلى:

$$r_1 = \frac{u_2^{(1)}}{u_1^{(1)}} = -\frac{k_{11} - \omega_1^2 m_1}{k_{12}} = -\frac{k_{12}}{k_{22} - \omega_1^2 m_2} \quad \text{.....................................(26)}$$

$$r_2 = \frac{u_2^{(2)}}{u_1^{(2)}} = -\frac{k_{11} - \omega_2^2 m_1}{k_{12}} = -\frac{k_{12}}{k_{22} - \omega_2^2 m_2} \quad \text{.....................................(27)}$$

ونلاحظ ان النسبتين المقابلةالى r_1 فى المعادلة(26) متشابهتان وينطبق ذلك على النسبتين المقابلة الى r_2 فى المعادلة (27) ، وحيث ان كتابة ثنائى الثوابت $u_1^{(1)}$, $u_2^{(2)}$ فى طرف وثنائى الثوابت $u_1^{(2)}$, $u_2^{(2)}$ فى الطرف الاخر يحددان شكل المنظومة عندما تحدث الحركة التوافقية التزامنية مع الــــترددين الطبيعيــن على التوالى ويعرف كل منهما بالانساق الطبيعية لاهتزاز المنظومة ، ويمكن كتابة الانساق فى الصورة المصفوفية التالية:

$$\left[u^{(1)}\right] = \begin{bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{bmatrix} = u_1^{(1)} \begin{bmatrix} 1 \\ r_1 \end{bmatrix} \text{.....(28)} \qquad , \quad \left[u^{(2)}\right] = \begin{bmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \end{bmatrix} = u_1^{(2)} \begin{bmatrix} 1 \\ r_2 \end{bmatrix} \text{.....(29)}$$

حيث كل من $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ تسمى بالمتجهات الشكلية the model vectors ويكون كل من التردد الطبيعــى ω_1 والمتجهة الشكلية [$u^{(1)}$] تعرف با لمعنى الشائع للنسق الاول للاهتزاز وكذلك الـــتردد الطبيعــى ω_2 والمتجهة الشكلية [$u^{(2)}$] تسمى بالنسق الثانى للاهتزاز وبذلك تكون الرموز الدليلية الموضوعة أعلى او اسفل النسق والمحصورة بين الاقواس هى التى تميز رقم النسق ، ونلاحظ ان المنظومة ذات درجتيــــن من الحرية يكون لها نسقان من الاهتزاز ونلاحظ أيضا ان عدد الانساق يتطـــابق مـــع عـــدد درجـــات الحرية. وكذلك نلاحظ ان الانساق الطبيعية والتى تمثل بالترددات الطبيعية والمتجهات الشكلية ، مـــاهى الا خاصية فريدة للمنظومة المعطاة فيما عدا قيمة المتجهات الشكلية ، حيث ان شكل النسق يكون وحيـدا او فريدا (unique) بينما تكون السعة مميزة وبذلك نحصل على الحركة خلال الزمن المحـــدد بواســطة المعادلتين (20) و (8) والتى يمكن كتابتها على الصورة المصفوفية التالية كما يلى:

$$\left[x^{(1)}(t)\right] = \begin{bmatrix} x_1^{(1)}(t) \\ x_2^{(1)}(t) \end{bmatrix} = \left[u^{(1)}\right] f_1(t) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ r_1 \end{bmatrix} \cos(\omega_1 t - \phi_1) \text{..................(30)}$$

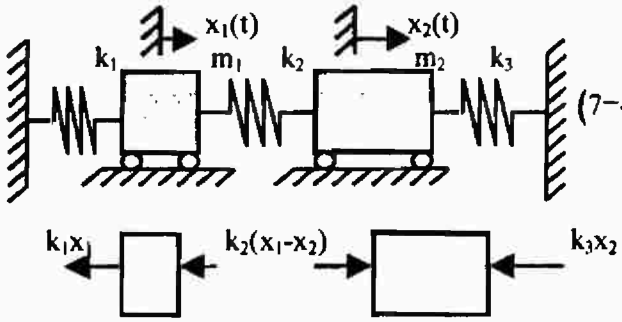
$$\left[x^{(2)}(t)\right] = \begin{bmatrix} x_1^{(2)}(t) \\ x_2^{(2)}(t) \end{bmatrix} = \left[u^{(2)}\right] f_2(t) = C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ r_2 \end{bmatrix} \cos(\omega_2 t - \phi_2) \text{..................(31)}$$

حيث الثوابت $u_1^{(1)}$, $u_1^{(2)}$ قد عبر عنها بكل من c_2 , c_1 على التوالى ، ويلاحظ ان $f_2(t)$, $f_1(t)$ تمثل الحل للمعادلة (20) فى كل من النسق الاول والنسق الثانى ، وهذا يوضح ان الحركة للمنظومة عند أى زمن يمكن ان نحصل عليها كتراكب لنسقين طبيعيين ، وبالتحديد تحسب الثوابت c_2 , c_1 بالاضافة الى زاويا الطور بواسطة الشروط الابتدائية كما بالمعادلة التالية:

$$[x(t)] = [x^{(1)}(t)] + [x^{(2)}(t)] = C_1\begin{bmatrix}1\\ r_1\end{bmatrix}\cos(\omega_1 t - \phi_1) + C_2\begin{bmatrix}1\\ r_2\end{bmatrix}\cos(\omega_2 t - \phi_2) \quad \ldots(32)$$

9-Consider the system of fig(7-27), let $m_1=m$, $m_2=2m$, $k_1=k_2=k$, $k_3==2k$ and obtain the natural modes of vibration.

9-لاحظ المنظومة المبينة بالشكل (7-27-b)حيث $m_1=m$, $m_2=2m$, $k_1=k_2=k$, $k_3=2k$ ، ثـم اوجـد الانساق الطبيعية للاهتزاز.



الشكل(7--27-b)

الحل :

يمكن ايجاد معادلتى الحركة للمنظومة المبينة بالشكل (7-27-b) كما يلى:

$$m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = 0 \quad \ldots(1)$$

$$m_2\ddot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3)x_2 = 0 \quad \ldots(2)$$

$$\because k_1 = k_2 = k \quad , k_3 = 2k \quad , \because m_1 = m \quad m_2 = 2m$$

$$\therefore m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0 \quad \ldots(3)$$

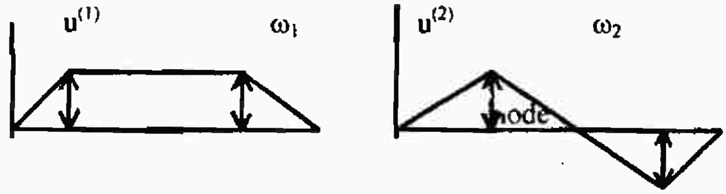
$$2m\ddot{x}_2 - kx_1 + 3kx_2 = 0 \quad \ldots(4)$$

باستخدام المعادلة (24) والتعويض من العلاقات (5) نحصل على معادلة التردد التاليـة والتـى يمكـن ايجاد جذورها كما يلى :

$$\therefore \Delta(\omega^2) = \frac{2m\omega^4}{7mk\omega^2} + 5k^2 = 0 \quad \ldots(5)$$

$$\therefore \omega_1^2 = \left[\frac{7}{4} - \sqrt{\left(\frac{7}{4}\right)^2 - \frac{5}{2}}\right]\frac{k}{m} = \frac{k}{m} \qquad , \omega_2^2 = \left[\frac{7}{4} + \sqrt{\left(\frac{7}{4}\right)^2 - \frac{5}{2}}\right]\frac{k}{m} = \frac{5k}{2m} \quad \ldots(6)$$

$$\therefore \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad , \omega = 1.5811\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \ldots(7)$$



الشكل(7-28)

وبادخال ω_1^2 , ω_2^2 فى المعادلتين (26) و (27) نحصل على النسب الاتية:

$$r_1 = \frac{u_2^{(1)}}{u_1^{(1)}} = -\frac{k_{11} - \omega_1^2 m}{k_{12}} = -\frac{2k - \left(\frac{k}{m}\right)m}{-k} = 1 \quad \text{..............(7)}$$

$$r_2 = \frac{u_2^{(2)}}{u_1^{(2)}} = -\frac{k_{11} - \omega_2^2 m}{k_{12}} = -\frac{2k - \left(\frac{5k}{2m}\right)m}{-k} = -0.5 \quad \text{..............(8)}$$

$$\therefore \left[u^{(1)}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \left[u^{(2)}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{bmatrix} \quad \text{..............(9)}$$

بذلك امكن الحصول على الانساق الطبيعية من المعادلة (9) ، حيث الثوابت قد اخذت احاديا ، وهــى لاتؤثر فى اشكال النسق التى خططت بيانيا فى الشكل (7-28) ونلاحظ ان النسق الثانى يوجــد عنـد نقطة إزاحتها صفر وتسمى هذة النقطة بالعقدة.

ملاحظات على الاحداثيات الطبيعية:

نلاحظ من معادلتى الحركة (6) ، (7) حيث حصلنا على النسب $r_1=u_2^{(1)}/u_1^{(1)}$, $r_2=u_2^{(2)}/u_1^{(2)}$ وذلــك بواسطة المعادلتين (26) ، (27) حيث يمكن كتابة حلهما على الصورة التالية:

$$x_1(t) = q_1(t) + q_2(t) \quad \text{..............(33)}$$

$$x_2(t) = r_1 q\ (t) + r_2 q_2(t) \quad \text{..............(34)}$$

وبادخال المعادلتين (33) ، (34) فى المعادلة (6) ، (7) نحصل على المعادلتين الاتيتين:

$$m_1(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + k_{11}(q_1 + q_2) + k_{12}(r_1 q_1 + r_2 q_2) = 0 \quad \text{..............(35)}$$

$$m_2(r_1\ddot{q}_1 + r_2\ddot{q}_2) + k_{12}(q_1 + q_2) + k_{22}(r_1 q_1 + r_2 q_2) = 0 \quad \text{..............(36)}$$

وبضرب المعادلة (35) بالمقدار m_2r_2 والمعادلة (36)فى المقدار m_1 ثم بالطرح بينــهما نحصــل علــى المعادلة التالية:

$$m_1 m_2 (r_2 - r_1)\ddot{q}_1 + (m_2 r_2 k_{11} + m_2 r_1 r_2 k_{12} - m_1 k_{12} - m_1 k_{22} r_1) q_1$$
$$+ (m_2 r_2 k_{11} + m_2 r_2^2 k_{12} - m_1 k_{22} - m_1 k_{22} r_2) q_2 = 0 \quad \text{..............(37)}$$

ثم بضرب المعادلة (35) بالمقدار m_1r_1 والمعادلة (36) فى المقدار m_1 ثم بالطرح بينهما نحصل علـــى المعادلة (38) التالية:

$$m_1 m_2 (r_1 - r_2)\ddot{q}_2 + (m_2 r_1 k_{11} + m_2 r_1^2 k_{12} - m_1 k_{12} - m_1 k_{22} r_1) q_1$$
$$+ (m_2 r_1 k_{11} + m_2 r_1 r_2 k_{12} - m_1 k_{12} - m_1 k_{22} r_2) q_2 = 0 \quad \text{.....................(38)}$$

وباستخدام المعادلات (26) ، (27) يمكن إختصار المعادلتين (37) ، (38) الى المعادلة (39) التالية:

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = 0 \qquad , i = 1,2 \quad \text{...(39)}$$

حيث ω_i (i=1,2) هما الترددان الطبيعيان للنظام المعكوس الى المعـــادلتين (6) ، (7) والمعـــادلات q_1, q_2 والتي تكون معادلات حركة نظامها مستقلة ، تسمى بالاحاثيات الطبيعية او الاساسية ، ونلاحظ ان الحـل للمعادلة (39) يكون على الصورة التالية:

$$q_i(t) = C_i \cos(\omega_i t - \phi_i) \qquad , i = 1,2 \quad \text{...(40)}$$

بالتعويض من المعادلة (40) فى المعادلة (33) ، (34) نحصل على المعادلتين التاليتين :

$$\therefore x_1(t) = C_1 \cos(\omega_1 t - \phi_1) + C_2 \cos(\omega_2 t - \phi_2) \quad \text{...........................(41)}$$
$$x_2(t) = C_1 r_1 \cos(\omega_1 t - \phi_1) + C_2 r_2 \cos(\omega_2 t - \phi_2) \quad \text{.........................(42)}$$

والتى يمكن كتابتها بصيغة المصفوفات كما يلى:

$$[x(t)] = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ r_1 \end{bmatrix} \cos(\omega_1 t - \phi_1) + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ r_2 \end{bmatrix} \cos(\omega_2 t - \phi_2)$$
$$= C_1 \left[u^{(1)}\right] \cos(\omega_1 t - \phi_1) + C_2 \left[u^{(2)}\right] \cos(\omega t_2 t - \phi_2) \quad \text{............(43)}$$

حيث $u^{(1)}, u^{(2)}$ تمثل متجهات المنظومة وتعتمد السعات c_1 , c_2 وزوايـــا الطـــور ϕ_1, ϕ_2 علـــى الـــشروط الابتدائية. وحيث ان المعادلة (43) تكون مشابة للمعادلة (32) مما يوضح ويؤيد بان الحركة للمنظومـــة عند اى زمن يمكن الحصول عليها كتراكب للانساق الطبيعية مضروبة بواسطة الاحداثيات الطبيعية.

10-Consider the automobile as shown in fig(7-25), let the system parameters have the values m=100 Ib- s^2 /ft , I$_c$=1600 Ib-s^2-ft, k$_1$=2400 Ib/ft , k$_2$=2700 Ib/ft , a=4.40 ft, b=5.60ft , and find the natural coordinates of the system

10-اعتبر المنظومة المبينة بالشكل (7-25) تمثل سيارة ، إفرض قيم متغيرات المنظومة كما يلى:

m=100 lb -s^2/ft , I$_c$=1600 Ib-s^2 -ft , k$_1$ =2400 lb/ft , k$_2$=2700 Ib/ft , a=4.40 ft , b=5.60 ft. ، أوجد

الاحداثيات الطبيعية للمنظومة.

الحل:

لايجاد الاحداثيات الطبيعية ، يجب ان نعين الانساق الطبيعية وادخال قيم المتغيرات المعطاة فى معادلتى الحركة التى وضعت فى الصورة المصفوفية كما يلى:

$$\because m\ddot{x}+(k_1+k_2)x-(k_1a-k_2b)\theta=0 \quad ,I_c\ddot{\theta}-(k_1a-k_2b)x+(k_1a^2+k_2b^2)\theta=0$$

$$\therefore \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} (k_1+k_2) & -(k_1a-k_2b) \\ -(k_1a-k_2b) & (k_1a^2+k_2b^2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 1600 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 5100 & 4560 \\ 4560 & 131136 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\text{.................................(1)}$$

$$\therefore -\omega^2\begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 1600 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ \Theta \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 5100 & 4560 \\ 4560 & 131136 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \Theta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\text{..............................(2)}$$

والمعادلة (2) توضح معادلات القيمة الذاتية ، حيث X ، Θ هما السعتان الى x(t) ، θ(t) على التوالـــي ولذلك يمكن ايجاد

$$\therefore \det\begin{bmatrix} 5100-100\omega^2 & 4560 \\ 4560 & 131136-1600\omega^2 \end{bmatrix}=160000(\omega^4-132.96\omega^2+4050)=0\text{..........(3)}$$

$\therefore$ *having the solution*

$$\omega_1^2,\omega_2^2=66.48\mp\sqrt{(66.48)^2-4050}=66.48\mp 19.22=47.26(rad/\sec)^2,85.7(rad/\sec)^2$$

$\therefore$ *the natural frequencies are* $\omega_1=6.88\ rad/\sec\ ,\omega_2=9.26 rad/\sec$

ويمكن تعيين المعادلة المميزة للمنظومة وذلك بوضع معادلتى الحركة على صورة المحدد كما بالمعادلـــة (3) وبالتالى يمكن تعين الترددين الطبيعين للمنظومة.

وبالتعويض عن ω_1^2 ، ω_2^2 فى المعادلات التى تمثل القيمة الذاتية (2) فى الصف الاول نحصل على:

$$at\ \omega_1^2\quad \therefore -47.26(100)X^{(1)}+5100X^{(1)}+4560\Theta^{(1)}=0\text{............(4)}$$

$$\therefore r_1=\frac{\Theta^{(1)}}{X^{(1)}}=-\frac{374}{4560}=-0.0820\ \ rad/ft\text{..................................(5)}$$

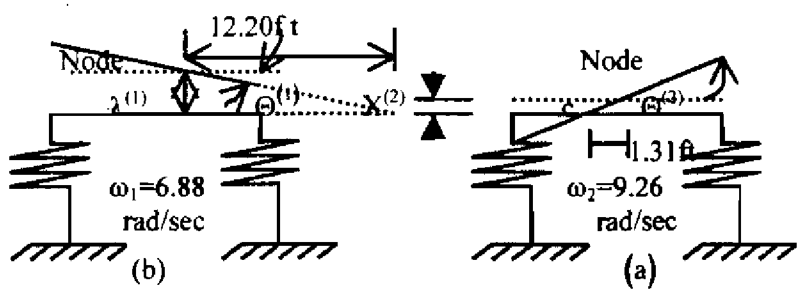
$$at\omega_2^2\quad \therefore -85.70(100)X^{(2)}+5100X^{(2)}+4560\Theta^{(2)}=0\text{...............(6)}$$

$$\therefore r=\frac{\Theta^{(2)}}{X^{(2)}}=\frac{3470}{4560}=0.761\ \ rad/\sec\text{...(7)}$$

نلاحظ أيضا انة بالتعويض عن ω_1^2 , ω_2^2 فى الصف الثانى بدلا من الصف الاول للمعادلة (2) نحصل على نفس النتائج ، ولذلك فان الانساق الطبيعية يمكن كتابتها على الصورة التالية:

$$\begin{bmatrix} X^{(1)} \\ \Theta^{(1)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -0.082 \end{bmatrix}\qquad ,\begin{bmatrix} X^{(2)} \\ \Theta^{(2)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0.761 \end{bmatrix}\text{............................(8)}$$

ويمكن رسم مخطط بيانى للانساق الطبيعية كما يلى:



الشكل(7-29)

وبالتعويض عن r_2 , r_1 فى المعادلات التى تمثل الاحداثيات الطبيعية كما يلى:

$$\because\ x_1(t) = q_1(t) + q_2(t) \qquad , x_2(t) = r_1 q_1(t) + r_1 q_2(t) \ldots\ldots\ldots \quad \ldots.(9)$$

$$at \quad x_1(t) = x(t) \qquad , x_2(t) = \theta(t)$$

$$\therefore\ x(t) = q_1(t) + q_2(t) \qquad , \theta(t) = -0.082\, q_1(t) + 0.761\, q_2(t) \ldots\ldots(10)$$

وبالتعويض عن هذة االصيغ فى معادلتى الحركة (1) التى على الصورة المصفوفية وتتبع ما سبق شرحة ، فاننا نحصل على معادلات الحركة غير المقترنة بالاحداثيات الطبيعية $q_1(t)$, $q_2(t)$ التالية:

$$\ddot{q}(t) + 47.26q(t) = 0 \qquad , \ddot{q}_2(t) + 85.7q(t) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(11)$$

لذلك يمكن حل المعادلات بصورة مستقلة عن بعضها الاخر ، حيث يكون الحل فى الصورة التالية:

$$q_1(t) = C_1 \cos(6.88t - \phi_1) \qquad , q_2(t) = C_2 \cos s(9.26t - \phi_2) \ldots\ldots\ldots(12)$$

ذلك يمكن كتابة معادلتى الحركة للمنظومة كما ياتى:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X^{(1)} \\ \Theta^{(1)} \end{bmatrix} q_1(t) + \begin{bmatrix} X^{(2)} \\ \Theta^{(2)} \end{bmatrix} q_2(t) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -0.082 \end{bmatrix} \cos(6.88t - \phi_1)$$

$$+ C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0.761 \end{bmatrix} \cos(9.26t - \phi_1) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(13)$$

وتعتمد المعاملات C_2 , C_1 وزاوية الطور ϕ_2 , ϕ_1 على الشروط الابتدائية $x(0)$, $x'(0)$, $\theta(0)$, $\theta'(0)$ ويمكن توضيح ذلك كما فى حالة إستجابة منظومة ذات درجتين من الحرية الى الاثارة الابتدائية.

14-إستجابة منظومة ذات درجتين من الحرية الى اثارة ابتدائية:

Response of A Two Degree-of Freedom System To Initial Excitation.

يلاحظ ان حركة المنظومة عند اى زمن يمكن إعتبارها حاصل ضرب الانساق الطبيعية للمنظومة فى إحداثياتها الطبيعية. أى انة يمكن ان نكتب معادلتى الحركة لمنظومة ذات درجتين من الحرية بصيغة عددية كما فى المعادلتين (41) ، (42) السابقتين وهما:

$$x_1(t) = C_1\cos(\omega_1 t - \phi_1) + C_2\cos(\omega_2 t - \phi_2)\text{.................................}(41)$$
$$x_2(t) = C_1 r_1\cos(\omega_1 t - \phi_1) + C_2 r_2\cos(\omega_2 t - \phi_2)\text{...........................}(42)$$
$$where \quad r_1 = \frac{u_2^{(1)}}{u_1^{(1)}} \quad , r_2 = \frac{u_2^{(2)}}{u_1^{(2)}}$$

حيث النسب r_2 , r_1 تكون مفردة للمنظومة المعطاة وكذلك الترددات الطبيعية ω_2 , ω_1 من الجانب الاخـــر تعتمد على السعات C_2 , C_1 وزاويا الطور ϕ_2 , ϕ_1 على الشروط الابتدائية التالية:

$$x_1(0) = x_{10} \;,\; x_2(0) = x_{20} \;,\; \dot{x}_1(0) = v_{10} \;,\; \dot{x}_2(0) = v_{20}\text{......}(44)$$

وبالتعويض من الشروط الابتدائية فى المعادلتين (41) , (42) نحصل على المعادلات الاتية:

$$x_1(0) = x_{10} = C_1\cos\phi_1 + C_2\cos\phi_2\text{..}(45)$$
$$x_2(0) = x_{20} = C_1 r_1\cos\phi_1 + C_2 r_2\cos\phi_2\text{...}(46)$$
$$\dot{x}_1(0) = v_{10} = C_1\omega_1\sin\phi_1 + C_2\omega_2\sin\phi_2\text{..}(47)$$
$$,\dot{x}_2(0) = v_{10} = C_1\omega_1 r_1\sin\phi_1 + C_2\omega_2 r_2\sin\phi_2\text{.......................................}(48)$$

والمعادلات (45) ، (46) ، (47) ، (48) يمكن إعتبارها أربع معادلات جبرية فى المجاهيل التالية:

$$C_1\sin\phi_1 \;,\; C_2\sin\phi_2 \;,\; C_1\cos\phi_2 \;,\; C_2\cos\phi_2$$

هذة المعادلات الاربعة يكون لها الحلول التالية:

$$C_1\cos\phi_1 = \frac{1}{r_2 - r_1}(r_2 x_{10} - x_{20})\text{......... ....}(49)$$
$$C_2\cos\phi_2 = \frac{1}{r_2 - r_1}(-r_1 x_{10} + x_{20})\text{......... ....}(50)$$
$$C_1\sin\phi_1 = \frac{1}{r_2 - r_1}\left(\frac{1}{\omega_1}\right)(r_2 v_{10} - v_{20})\text{......... ....}(51)$$
$$C_2\sin\phi_2 = \frac{1}{r_2 - r_1}\left(\frac{1}{\omega_2}\right)(-r_1 v_{10} + v_{20})\text{......... ....}(52)$$

وبالتالى يمكن الحصول على كل من:

$$C_1 = \frac{1}{r_2 - r_1}\sqrt{(r_2 x_{10} - x_{20})^2 + \frac{(r_2 v_{10} - v_{20})^2}{\omega_1^2}}\text{...........................}(53)$$
$$C_2 = \frac{1}{r_2 - r_1}\sqrt{(-r_1 x_{10} + x_{20})^2 + \frac{(-r_1 v_{10} - v_{20})^2}{\omega_2^2}}\text{.......................}(54)$$
$$\phi_1 = \tan^{-1}\frac{r_2 v_{10} - v_{20}}{\omega_1(r_2 x_{10} - x_{20})}\text{...}(55)$$
$$\phi_2 = \tan^{-1}\frac{r_1 v_{10} - v_{20}}{\omega_2(r_1 x_{10} - x_{20})}\text{...}(56)$$

وتسمى المعادلتين(41) ، (42) وكل من $\phi_2 , \phi_1 , C_2 , C_1$ بالاستجابة الكاملة للاستثارة الابتدائية.

11-Consider the system of example (9) and optain the response to the initiale $x_1(0)=1.2$, $x_2(0)=x'_1(0)=x'_2(0)=0$.

11-تأمل المنظومة فى المثال (9) واوجد الاستجابة للاستثارة الابتدائية.

الحل:

من المعادلة (7) للمثال (9) نجد ان

$$\omega_2 = 1.5811\sqrt{k/m} \quad , \quad \omega_1 = \sqrt{k/m}$$

وكذلك نجد ان $r_1=1$, $r_2=-0.5$ وبالاضافة الى ذلك من الشروط الابتدائية نجد ان :

$x_{10}=1.2$, $x_{20}=v_{10}=v_{20}=0$

وبادخال هذة القيم فى المعادلات (53) و (54) و (55) و (56) فنحصل على ما يأتى:

$$C_1 = \frac{r_2 x_{10}}{r_2 - r_1} = \frac{(-o.5)(1.2)}{-0.5-1.0} = 0.4 \text{.............................}(1)$$

$$C_2 = \frac{-r_1 x_{10}}{r_2 - r_1} = \frac{-1.2}{-0.5-1.0} = 0.8 \text{.............................}(2)$$

$$\phi_1 = 0 \qquad , \phi_2 = 0 \text{..}(3)$$

نعوض عن C_1 , C_2 , ϕ_1 , ϕ_2 فى المعادلتين (41) و (42) فنحصل على الاستجابة المطلوبة كما يلى:

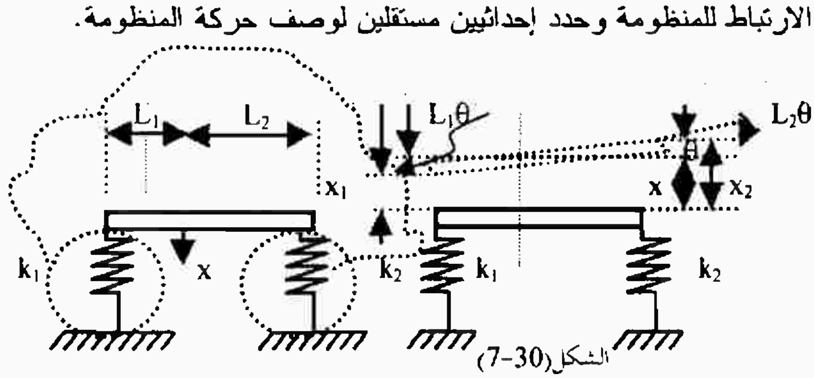
$$x_1(t) = C_1 \cos(\omega_1 t - \phi_1) + C_2 \cos(\omega_2 t - \phi_2) =$$
$$= 0.4\cos\left(\sqrt{k/m}\right)t + 0.8\cos\left(1.5811\sqrt{k/m}\right)t$$
$$x_2(t) = C_1 r_1 \cos(\omega_1 t - \phi_1) + C_2 r_2 \cos(\omega_2 t - \phi_2) =$$
$$= 0.4\cos\left(\sqrt{k/m}\right)t - 0.4\cos\left(1.5811\sqrt{k/m}\right)t$$

12-In the system shown in fig.(7-30) , determine the equation of motion , the two natural frequencies , the amplitude ratios for the two frequencies and the normal modes of vibration of an automobile simulated by the simplified two degrees of freedom system with the following numerical values: W=3220 lb , $J_c=(W/g).r2$, L=10 ft , L_1=4.5ft , k_1=2400 lb/ft , k_2=2600 lb/ft , r=4 ft Study the effect of the coupling of the system , and define two separate coordinate system to descirbe behaviour for the system.

12-فى المنظومة المبينة بالشكل(7-30) ، اوجد معادلتى الحركة والترددين الطبيعين ونسب السعات والنسق الطبيعى لاهتزاز نموذج بسيط لسيارة ذات درجتين من الحرية مع القيم العددية التالية:

W=3220 lb , $J_c=(W/g)r^2$, L=10 ft , L_1=4.5 ft , k_1=2400 lb/ft , k_2=2600 lb/ft , r=4 ft

إدرس تأثير الارتباط للمنظومة وحدد إحداثيين مستقلين لوصف حركة المنظومة.



الشكل(7-30)

يمكن تعيين معادلتى الحركة كما يلى :

$$\because \sum F = m\ddot{x} \qquad \therefore\ m\ddot{x} + k_1x_1 + k_2x_2 = 0$$

$$m\ddot{x} + k_1(x - l_1\theta) + k_2(x + l_2\theta) = 0 \text{..(1)}$$

$$I_c\ddot{\theta} = M_c \quad \therefore\ I_c\ddot{\theta} = k_1(x - l_1\theta)l_1 - k_2(x + l_2\theta)l_2$$

$$I_c\ddot{\theta} - k_1(x - l_1\theta)l_1 + k_2(x + l_2)l_2 = 0 \text{....................................(2)}$$

وباعتبار ان الحركة دورية فهى تتكون من العديد من الحركــات التوافقيــة ذات الســعات والــترددات المختلفة ولهذا نفرض ان إحدى المركبات للازاحة الخطية يعبر عنــها بالعلاقــة $x=Xe^{i\omega t}$ وللازاحــة الزاوية $\theta=\theta_\circ e^{i\omega t}$ وبتفاضل هاتين العلاقتين بالنسبة للزمن نحصل على السرعة والعجلة ونعوض بـــهم فى معادلتى الحركة كما يلى:

$$\because x = Xe^{i\omega t} \quad ,\therefore\ \dot{x} = i\omega Xe^{i\omega t} \quad , \ddot{x} = -\omega^2 Xe^{i\omega t} \text{............................(3)}$$

$$\because \theta = \theta_\circ e^{i\omega t} \quad ,\therefore\ \dot{\theta} = i\omega\theta_\circ e^{i\omega t} \quad , \ddot{\theta} = -\omega^2\theta_\circ e^{i\omega t} \text{...................(4)}$$

بالتعويض من العلاقات (3) ,(4) فى معادلتى الحركة (1) و(2) كما يلى:

$$-m\omega^2 Xe^{i\omega t} + k_1(x - l_1\theta_\circ)e^{i\omega t} + k_2(x + l_2\theta_\circ)e^{i\omega t} = 0$$

$$\therefore X(-m\omega^2 + k_1 + k_2) + \theta_\circ(-k_1l_1 + k_2l_2) = 0 \text{................................(5)}$$

$$\because I_c(-\omega^2\theta_\circ)e^{i\omega t}\ \_\ k_1(x - l_1\theta_\circ)l_1e^{i\omega t} + k_2(x + l_2\theta_\circ)l_2.e^{i\omega t} = 0$$

$$\therefore X(-k_1l_1 + k_2l_2) + \theta_\circ(-I_c\omega^2 + k_1l_1^2 + k_2l_2^2) = 0 \text{...........................(6)}$$

$$\det\begin{vmatrix} (k_1 + k_2 - \omega^2 m) & -(k_1l_1 - k_2l_2) \\ -(k_1l_1 - k_2l_2) & (k_1l_1^2 + k_2l_2^2 - \omega^2 I_c) \end{vmatrix} = 0 \text{.............................(7)}$$

$$\therefore \begin{vmatrix} (2400 + 2600 - (\frac{3220}{32})\omega^2 & -(2400 - 2600) \\ -(2400 - 2600) & \left[2400(4.5)^2 + 2600(5.5)^2 - (\frac{3200}{32})(4)^2\omega^2\right] \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \omega^4 + 128.739\omega^2 - 3928.05 = 0 \qquad ,put\ \ \lambda = \omega^2$$

$$\therefore \lambda^2 + 128.739\lambda - 3928.05 = 0 \text{..(8)}$$

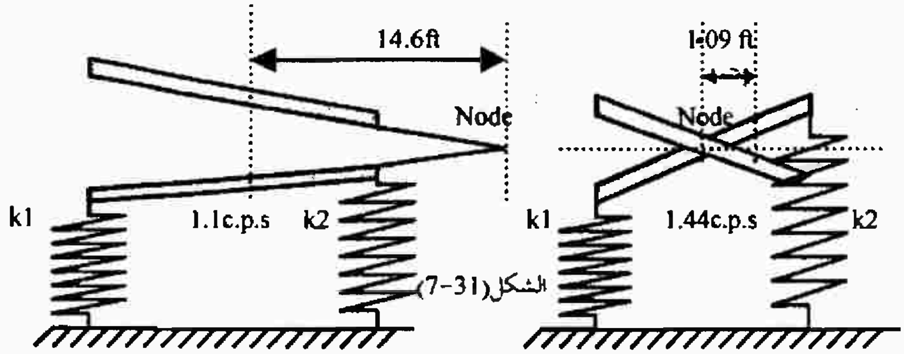
$$\therefore \lambda_1 = \omega_1^2 = -47.6935 \qquad \therefore \omega_1 = 6.9\ \ rad/\sec = 1.1\ \ c.p.s \text{...............(9)}$$

$$\therefore \lambda_2 = \omega_2^2 = -82.0836 \qquad \therefore \omega_2 = 9.06\ \ rad/\sec = 1.44\ \ c.p.s \text{..........(10)}$$

$$\therefore the\ \ amplitude\ \ ratios \quad \left(\frac{x}{\theta}\right)_{\omega_1} = -14.6\ \ ft/rad = -3.06\ \ in./\deg\text{..(11)}$$

$$\therefore \left(\frac{x}{\theta}\right)_{\omega_2} = 1.09\ \ ft/rad = 0.288\ \ in./\deg \text{...(12)}$$

ويمكن رسم النسق الطبيعى Normal modes للمنظومة كما يلى:



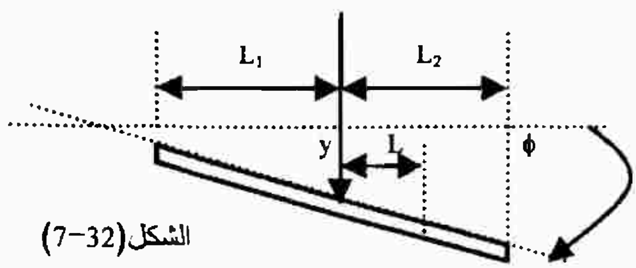
الشكل(7-31)

15-دراسة تأثير الارتباط او التقارن بالمنظومة:

معادلتى الحركة (1) و(2) سوف تكونان مستقلتين عن بعضهما اذا كان المقدار $(k_1L_1 - k_2L_2)$ الخاص بالارتباط مساويا للصفر اى ان $k_1L_1=k_2L_2$ واذا كان k_1L_1 لايساوى k_2L_2 فان محصلة حركة الكتلة تتكون من كل من الحركة الانتقالية والدورانية وذلك عندما تؤثر على مركز ثقل الجسم إزاحة أو عزم لى وذلك فى الحالة الابتدائية وتتحرك الكتلة حركة زاوية او دورانية وحركة إنتقالية خطية (راسية) عندما k_1L_1 لايساوى k_2L_2 وهذا يعرف بالارتباط او التقارن الاستاتيكى او الارتباط او التقارن المرن.

16-تحديد إحداثيين مستقلين لوصف هيئة المنظومة.

يمكن إستخدام $\phi(t)$, $y(t)$ كاحداثيات وبذلك تؤل معادلتى الحركة الى المعادلتين الاتيتين:



الشكل(7-32)

$$m\ddot{y} = -k_1(y - l_1\phi) - k_2(y + l_2\phi) - ml\ddot{\phi}$$

$$\therefore m\ddot{y} + ml\ddot{\phi} + (k_1 + k_2)y + (k_2l_2 - k_1l_1)\phi = 0$$

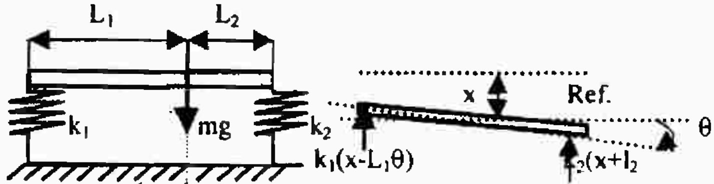
$$I_c\ddot{\phi} = k_1(y - l_1\phi_1)l_1 - k_2(y + l_2\phi)l_2 - m\ddot{y}l$$

$$\therefore I_c\ddot{\phi} + ml\ddot{y} + (k_1l_1^2 + k_2l_2^2)\phi + (k_2l_2 - k_1l_1)y = 0$$

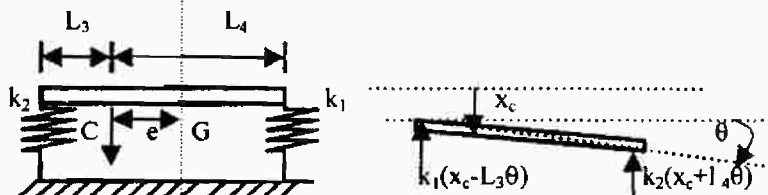
وبذلك تحتوى معادلتى الحركة على إرتباط او تقارن ديناميكى وإرتباط او تقارن أستاتيكى ، أما إذا كانت $k_1L_1=k_2L_2$ فان المنظومة تحتوى على إرتباط ديناميكى فقط وعند ذلك إذا تحركت الكتلة الى اعلى واسفل فى الاحداثى y فان قوة القصور الذاتى $m\ddot{y}$ المؤثرة خلال مركز ثقل الكتلة سيولد حركة فى إتجاة ϕ ويرجع ذلك الى العزم $mL\ddot{y}$ وبذلك فان الحركة فى إتجاة ϕ سوف تولد حركة الكتلة

الراسية فى أتجاة y بسبب القوة $mL\ddot{\phi}$

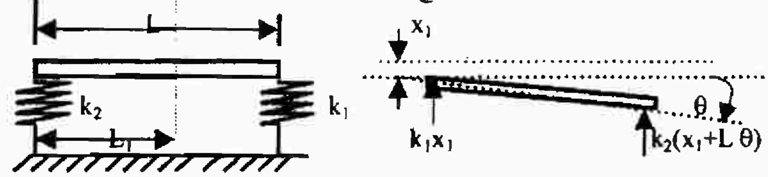
13-Fig.(7-33), shows a rigid bar with its center of mass not coinciding with its geometric center ,i.e., $L_1 \neq L_2$, and supported by two springs k_1, k_2. It represents a two degree of freedom system since two coordinates are necessary to describe its motion . The choice of the coordinates will define the type of coupling which can be immediately determined from the mass and stiffness matrices. Mass or dynamical coupling exists if the mass matrix is nondiagonal . whereas stiffness or static coupling exists if the stiffness matrix is nondiagonal. It is also possible to have both forms of coupling.



الشكل(7-33a) يوضح ارتباط او تقارن الاحداثيات أستاتيكيا



الشكل(7-33b) يوضح إرتباط او تقارن الاحداثيات ديناميكيا



الشكل(7-33c) يوضح إرتباط او تقارن الاحداثيات أستاتيكيا وديناميكيا

13-الشكل(7-33)يوضح قضيب جاسئ لايتطابق مركز كتلتة مع المركز الهندسى لـة اى ان $L_1 \neq L_2$ وان هذا القضيب يرتكز على نابضين معاملهما k_2, k_1 وهو يكون نظام ذو درجتين من الحرية اى انة يتعين إحداثين يكونوا ضروريين لوصف حركة المنظومة، وان إختيار الاحداثيات سوف يعين نـوع الـترابط الذى ينتج مباشرة من مصفوفتى الكتلة والجساءة. الكتلة او الترابط الديناميكى يكون واضحا عندما تكون مصفوفة الكتلة غير مرتبطة ، بينما الجساءة او الترابط الاستاتيكى يكون فى حالة تكون فيها مصفوفـة الجساءة غير قطرية ، كما انة من الممكن ان يتواجد كلا النوعين من الترابط.

الحل:

17-**الترابط او التقارن الاستاتيكى كما بالشكل** (7-33a) ، نختار الاحداثين او المحورين x, θ حيث الاحداثى x يمثل الازاحة الخطية لمركز الثقل ويكون للمنظومة ترابط أستاتيكى عندما تكون معادلتى الحركة فى الصورة المصفوفية (1) التالية :

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & (k_2 l_2 - k_1 l_1) \\ (k_2 l_2 - k_1 l_1) & (k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

اذا كان $k_1L_1=k_2L_2$ فان الترابط يختفى ونحصل على إهتزازت غير مترابطة فى x , θ.

18- **الترابط او التقارن الديناميكى كما بالشكل** (7-33b) توجد نقطة c على القضيب حيث ان القوة تكون عمودية على القضيب وتنتج إزاحة خالصة (واضحة) اى ان $k_1L_3=k_2L_4$ ويمكن كتابة معادلتى الحركة للاحداثين x_c , θ على الصورة المصفوفية (2) كما يلى:

$$\begin{bmatrix} m & me \\ me & J \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_c \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1+k_2) & 0 \\ 0 & (k_1 l_3^2 + k_2 l_4^2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_c \\ \vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ldots\ldots\ldots(2)$$

وهذا يوضح ان نظام المحاور المختارة يلغى الترابط الاستاتيكى وينتج الترابط الديناميكى.

19- **الترابط او التقارن الاستاتيكى والديناميكى كما بالشكل** (7-33c).

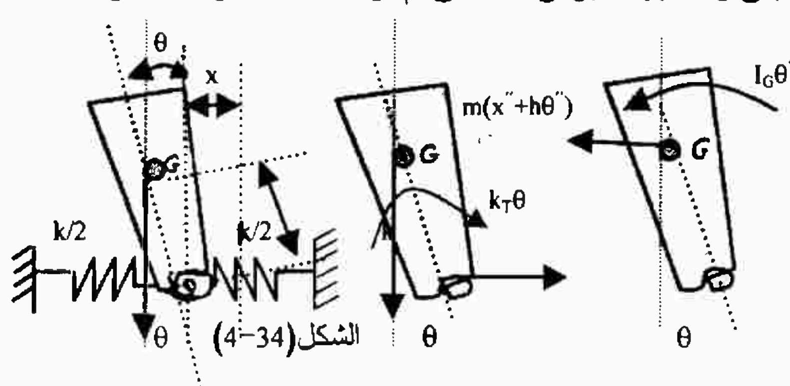
اذا اخترنا $x=x_1$ عند طرف او نهاية العمود فانة يمكن كتابة معادلتى الحركة فى الصورة المصفوفية (3) كما يلى:

$$\begin{bmatrix} m & ml \\ ml & J_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1+k_2) & k_2 l \\ k_2 l & k_2 l^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

وبذلك يكون كل من الترابط الاستاتيكى والديناميكى موجدين.

14-In a study of earthquakes , a building is idealized as a rigid body of mass M supported on two springs , one giving translational stiffness k and the other rotational stiffness k_T as shown . Given that I_G is the mass moment of inertia of the building about its mass centre G , write down the equations of motion using coordinates x for the translation from the equilibrium position , and $\theta$for the rotation of the building. Hence determine the frequency equation of the motion

14-فى دراسة للهزات الارضية ، حسم جاسئ لمبنى ذات كتلة .M مثبتة على نابضين أحدهما إنتقالى معاملة k والاخر دورانى معاملة k_T كما مبين بالشكل (7-34) ، فاذا علم ان I_G عزم القصور الذاتى الكتلى للمبنى حول مركز ثقلة G . اكتب معادلات الحركة مستخدما المحور الانتقالى x من موضع الاتزان الاستاتيكى والمحور الدورانى θ للمبنى ثم أوجد معادلة التردد للمنظومة.



الشكل(34-4)

بفرض ان زاوية الدوران للمبنى θ صغيرة نتيجة الهزات الارضية وبتطبيق قانون نيوتن الثانى يمكــــن إيجاد معادلتى الحركة للمنظومة كما يلى:

$$\because m\ddot{x} = \sum F \quad \therefore m(\ddot{x} + h\ddot{\theta}) = -kx \quad \therefore m\ddot{x} + mh\ddot{\theta} + kx = 0 \ldots(1)$$

وبما ان عزم اللى الكامن يساوى فى المقدار ويضاد فى الاتجاة عزم اللى الاسترجاعى

$$\because I_G\ddot{\theta} + m(\ddot{x} + h\ddot{\theta})h = -(k_T\theta) + (mgh\theta)$$

$$\therefore mh\ddot{x} + (mh^2 + I_G)\ddot{\theta} - (mgh - k_T) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

باعتبار ان الحركة دورية فهى تتكون من العديد من المركبـــات التوافقيـــة ذات الـــترددات والســـعات المختلفة ولذلك نعوض عن احدى المركبات بالعلاقات التالية:

$$\theta = A_1\sin(\omega t)\ ,\ \dot{\theta} = \omega A_1\cos\omega t\ ,\ \ddot{\theta} = -\omega^2 A_1\sin\omega t \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$x = A_2\sin\omega t\ ,\ \dot{x} = \omega A_2\cos\omega t\ ,\ \ddot{x} = -\omega^2 A_2\sin\omega t \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

بالتعويض من(3) ، (4) فى معادلتى الحركة (1) ، (2) ثم بوضعهم فى صورة المحدد وبفــك المحــدد نحصل على معادلة التردد كما يلى:

$$-m\omega^2 hA_1 - m\omega^2 A_2 + kA_2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

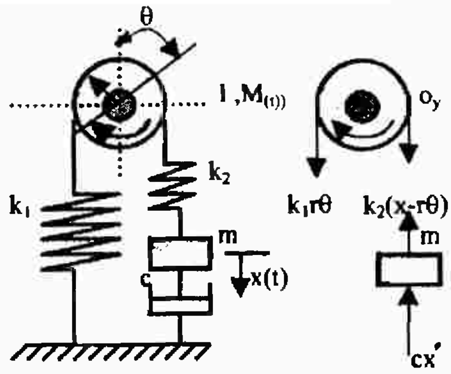
$$m\omega^2 hA_2 + (mh^2 + I_G)\omega^2 A_1 + (mgh - k_T)A_1 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

$$\begin{vmatrix} -m\omega^2 h & (k - m\omega^2) \\ (mh^2 + I_G)\omega^2 + (mgh - k_T) & m\omega^2 h \end{vmatrix} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

$$\therefore mI_G\omega^4 - \omega^2\left[mkh^2 + I_G h - m^2 gh + mk_T\right] - mghk + kk_T = 0 \ldots\ldots\ldots(8)$$

15-The two-degree-of-freedom system shown in fig.(7-35) consists of a pulley , a mass m , two springs of stiffness k_1 and k_2, a dashpot with a damping coefficient of c, and a cable connecting them as shown. The pulley centroidal mass moment of inertia is I , There is sufficient friction between the cable and pulley to prevent the cable from slipping. Determine the differential equations of motion of the system when the pulley is subjected to be a time varying moment M(t) as shown.

15 –منظومة ذات درجتين من الحرية كما مبينة بالشكل (7-35) تتكون من بكــــرة وكتلــــة ونابضــــان معاملهما k_2, k_1 وخامد معامل الخمد لة c وخيط متصل بينهم كما مبين، عزم القصور الذاتــــى الكتلــــى المركزى للبكرة I ، يوجد احتكاك كافى بين الخيط والبكرة لمنع الخيط من التزحلق (الزحف). أوجــــد المعادلات التفاضلية لحركة المنظومة عندما تكون البكــــرة موضوعــــة تحــت عــزم $M_{(t)}$ كمــا هــو مبين بالشكل:



الشكل(7-35)

عندما تتحرك الكتلة m مسافة x فان البكرة تتحرك حول مركزها (o) مسافة θ وباخذ العزوم حول مركز البكرة كما بالشكل (7-35) وباعتبارها حرة وبفرض ان $x > r\theta$ وبالتالى يمكن تعيين معادلة الحركة ووضعهما فى الصورة المصفوفية كما يلى:

$$\because \sum M_o = I\ddot{\theta} \qquad \therefore -kr\theta.r + k_2(x - r\theta)r + M(t) = I\ddot{\theta}$$

$$\therefore I\ddot{\theta} + (k_1 + k_2)r^2\theta - k_2rx = M(t) \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\because m\ddot{x} = \sum F_x \qquad \therefore m\ddot{x} = -k_2(x - r\theta) - c\dot{x} \quad \therefore m\ddot{x} + c\dot{x} + k_2x - k_2r\theta = 0 \ldots\ldots(2)$$

$$\therefore \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2)r^2 & -k_2r \\ -k_2r & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{(t)} \\ 0 \end{bmatrix} \ldots\ldots(3)$$

$$where M = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} = Mass \ \ matrix \ \ , K = \begin{bmatrix} (k_1 + k_2)r^2 & -k_2r \\ -k_2r & k_2 \end{bmatrix} = Stiffness \ \ Matrix$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} = Damping \ \ Matrix$$

20-معادلة لاجرانج Lagrange s Equations

وهى تعتبر طريقة من طرق إيجاد معادلات الحركة للمنظومات الهندسية وهى تعتمد اساسا على طاقة المنظومة مثل طاقة الحركة (K.E) وطاقة الوضع (P.E) والطاقة المبددة (D.E) ويمكن صياغة معادلة لاجرانج على الصورة التالية لاحداثيات عمومية (Generalized Coordinates) q_i.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(K.E)}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial(K.E)}{\partial q_i} + \frac{\partial(P.E)}{\partial q_i} + \frac{\partial(D.E)}{\partial q_i} = Q \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

where: Q_i is a generalized external force (or non-linear damping force) acting on the system

the subscript (i) denotes n equations for an (n) degree of freedom system

أى ان Q_i هى القوة الخارجية العامة المؤثرة فى المنظومة .

and q_i is the generalized coordinate that decribes the position of the system .

اى ان qi هى الاحداثى العام لوصف موضع المنظومة ، n تدل على عدد المعادلات للمنظومة التى لها عدد n من درجات الحرية. وبالنسبة للمنظومة المحافظة التقليدية الحرة (a free conservative system) يكون كل من Qi , D.E مساوية للصفر. وتؤل معادلة لاجرانج الى:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(K.E.)}{\partial q_i}\right)-\frac{\partial(K.E)}{\partial q_i}+\frac{\partial(P.E)}{\partial q_i}=0 \qquad \text{...(2)}$$

$$where: K.E.=\frac{1}{2}m(\dot{x})^2 \quad . \quad P.E.=\frac{1}{2}kx^2 \quad , \quad D.E.=\frac{1}{2}c(\dot{x})^2$$

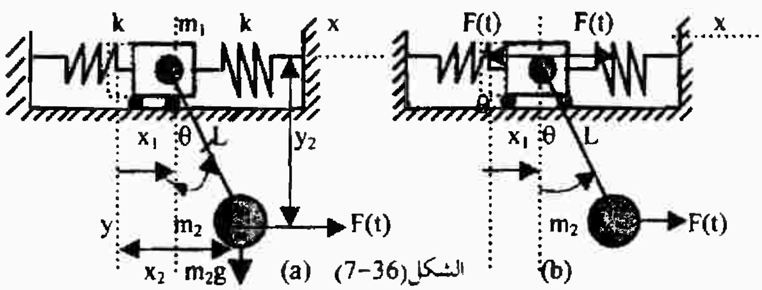
Elements for restoring (K.E.) are mass(m) and moment of inertia(I)

Elements for restoring (P.E) is spring (k).

Elements causing loss of during motion (D.E) is dashpot (c).

16-The system shown in fig.(7-36) consists of two identical springs attached to a trolley of mass m_1 that supports a mass m_2 by means of a rod of length L and negligible mass pinned at point o. Determine the equations of motion of the system in terms of its generalized coordinates, and then linearize these equations by assuming that the oscillations of the rod supporting m_2 are small.

16-المنظومة المبينة بالشكل (7-36) تتكون من نابضين متماثلين متصلان بعربة (ترولى) كتلتها m_1. والمركب بها كتلة m_2 بواسطة قضيب طولة L مع إهمال كتلة المفصل (o) ، أوجد معادلات الحركة للمنظومة لكل من الاحداثيات العمومية والخطية لهذة المعادلات بفرض ان إهتزاز القضيب المركب بالكتلة m_2 صغيرة.



(a) الشكل(7-36) (b)

باتخاذ y,x كمحورين كما بالرسم فان إزاحة الكتلة m_1 تعرف بالاحداثى x_1 ولكن إزاحة الكتلة m_2 يمكن وصفها بالاحداثين x_2 , y_2 او x_2 , θ ولهذا يتضح ان الاحداثيات الاربعة الموضحة بالشكل لاتعتمد على إحداثيات المنظومة ولكن بالشكل (7-36-b) يمكن ان ترتبط الاحداثيات الاربعة كما بالعلاقات الاتية:

$x_2=x_1+L\sin\theta$ ....(1) , $y2=L\cos\theta$....................(2)

والمعادلتين (1) و(2) تعرف بالمعادلات المقيدة constraint equations حيث x_2 , y_2 يمكن التعبير عنهم بالرمزين x_1 , θ وهذة المعادلات تعتمد على الاحداثيات المطلوبة لوصف المنظومة ونظرا لان هذة المنظومة ذات درجتين من الحرية فاننا ناخذ x_1 , θ كاحداثين وبذلك يمكن إيجاد السرعة x'_2 , y'_2 وذلك بتفاضل المعادلتين (1) و(2) كما يلى :

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_1 + l\cos(\theta)(\dot{\theta}) \quad (3) \qquad , \qquad \dot{y}_2 = -l.\sin(\theta)(\dot{\theta}) \quad (4)$$

$$\therefore K.E = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2}m_2\left[(\dot{x})_2^2 + (\dot{y})_2^2\right] \quad (5)$$

لايجاد طاقة الحركة للمنظومة متخذا θ , x_1 كاحداثيات عمومية فانة بالتعويض من المعادلتين (3) و(4) فى المعادلة (5) ينتج ان:

$$K.E. = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2}m_2\left[(\dot{x}_1)^2 + 2(\dot{x}_1)l\cos(\theta)(\dot{\theta}) + l^2(\dot{\theta})^2\right]$$

$$\therefore K.E. = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)(\dot{x}_1)^2 + m_2(\dot{x}_1)l\cos(\theta)(\dot{\theta}) + \frac{1}{2}m_2 l^2(\dot{\theta})^2 \quad (6)$$

نظرا لان الكتلة m2 غير متصلة باى عنصر مرن elastic element ولهذا لايوجد طاقة مبددة strain energyفى المنظومة عند وضع الاتزان الاستاتيكى ، ولهذا فان التغيير الكلى فى طاقة الانفعال يكـــون مرتبط بالازاحة الراسية للكتلة m2 والتى يجب ان تشمل طاقة الوضع كلها كما بالمعادلة التالية:

$$P.E = kx_1^2 + m_2 g(l - l\cos\theta) \quad (7)$$

التى تتكون من الطاقة المبددة فى النابض وطاقة الوضع فى الكتلة m2 ، ولايجاد الشغل المبذول نتيجة التغير فى الازاحات θ , x1 نتيجة تأثير القوة F(t) كما بالشكل (7-36-b) فيكون معدل الشغل المبذول ممثلا بالمعادلات:

$$dW_{x1} = Q_{x1}.dx_1 = F(t)dx_1 \quad (8)$$

$$dW_\theta = Q_\theta.d\theta = F(t)l\cos\theta.d\theta \quad (9)$$

وبمقارنة المعادلتين (7) ، (8) ينتج ان :

$$Q_{x1}=F(t) \qquad , \qquad Q_\theta=F(t)l\cos\theta \quad (10)$$

وطبقا لمعادلة لاجرانج نجد ان q1=x1 ومن المعادلتين (6و7) نجد ان:

$$\frac{\partial(K.E.)}{\partial x_1} = (m_1 + m_2)\dot{x}_1 + m_2 l\cos(\theta)(\dot{\theta})$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(K.E.)}{\partial \dot{x}_1}\right) = (m_1 + m_2)\ddot{x}_1 - m_2 l\sin(\theta)(\dot{\theta})^2 + m_2 l\cos(\theta)(\dot{\theta}) \quad (11)$$

$$\therefore \left(\frac{\partial(K.E)}{\partial x_1}\right) = 0 \quad (12) \qquad , \qquad \left(\frac{\partial(P.E)}{\partial x_1}\right) = 2kx_1 \quad (13)$$

بالتعويض من المعادلات (10) ، (11) ، (12) ، (13) فى معادلة لاجرانج ينتج ان :

$$\because \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(K.E)}{\partial \dot{q}_i}\right)-\left(\frac{\partial(K.E)}{\partial q_i}\right)+\left(\frac{\partial(P.E)}{\partial q_i}\right)=Q_i$$

$$\therefore (m_1+m_2)\ddot{x}_1+2kx_1-m_2 l\sin(\theta)(\dot{\theta})^2+m_2 l\cos(\theta)(\ddot{\theta})=F(t)\text{.........}(14)$$

$$at \quad q_2=\theta \quad for \quad equation(6,7) \quad \therefore \left(\frac{\partial(K.E)}{\partial\dot{\theta}}\right)=m_2\dot{x}_1 l\cos\theta+m_2 l^2\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(K.E)}{\partial\dot{\theta}}\right)=m_2\ddot{x}_1 l\cos(\theta)-m_2\dot{x}_1 l\sin(\theta)(\dot{\theta})+m_2 l^2(\ddot{\theta})\text{.......}(15)$$

$$\left(\frac{\partial(K.E)}{\partial\theta}\right)=-m_2(\dot{x}_1)\sin(\theta)(\dot{\theta})\text{...}(16)$$

$$\left(\frac{\partial(P.E.)}{\partial\theta}\right)=m_2 gl\sin(\theta)\text{..}(17)$$

وبالتعويض من المعادلات (10 و15و16و17) فى معادلة لاجرانج:

$$\therefore m_2 l\cos(\theta)(\ddot{x}_1)+m_2 l^2(\ddot{\theta})+m_2 gl\sin(\theta)=F(t)l\cos(\theta)\text{........}(18)$$

ونظرا لان حركة القضيب الاهتزازية صغيرة فتكون الازاحة الزاوية صغيرو وبالتالى يمكن التعويض عن $\theta(\theta')^2\cong 0$, $\cos\theta=1$, $\sin\cong\theta$ وبذلك يمكن ايجاد معادلتى الحركة وكتابتها فى الصورة المصفوفية كما يلى:

$$\therefore (m_1+m_2)\ddot{x}_1+2kx_2+m_2 l\ddot{\theta}=F(t)\text{................................}(18)$$

$$m_2 l^2\ddot{\theta}+m_2 gl\theta+m_2 l\ddot{x}_1=F(t)l\text{...}(19)$$

$$\begin{bmatrix}(m_1+m_2) & ml\\ m_2 l & m_2 l^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{\theta}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2k & 0\\ 0 & m_2 gl\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ \theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F(t)\\ F(t)l\end{bmatrix}\text{........}(20)$$

17-Determine the equation of motion of the system as shown in fig.(7-35) , by using lagrange's equation.

17-أوجد معادلتىالحركة للمنظومة المبينة بالشكل (7-35) باستخدام معادلة لجرانج.

الحل:

يمكن استنتاج معادلتى الحركة باستخدام معادلة لاجرانج للمنظومة ثنائية الحركة والمبينة بالشكل (35-7) وذلك بان نعتبر الاحداثيات العمومية generalized coordinates هى $q_1=\theta$, $q_2=x$ ، وطاقة الحركة للمنظومة تتكون من طاقة حركة نتيجة الحركة الدائرية للبكرة وطاقة حركة نتيجة الحركة الانتقالية للكتلة m وبتطبيق معادلة لاجرانج كما يلى:

$\because K.E.=\frac{1}{2}I(\dot{\theta})^2+\frac{1}{2}m(\dot{x})^2$,by applying lagrange s equations

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(K.E.)}{\partial\dot{\theta}}\right)=I\ddot{\theta} \quad , \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(K.E)}{\partial\dot{x}}\right)=m\ddot{x}..................(1)$$

ونظرا لان طاقة الحركة ليست دالة فى θ,x وبالتالى تكون :

$$\frac{\partial(K.E)}{\partial\theta}=0 \qquad \frac{\partial(K.E)}{\partial x}=0$$

عند وضع الاتزان لكل من النابض والكتلة يكون $\theta = x = 0$، ونظرا لان التغير فى طاقة الوضع لـهذة المنظومة يعتمد فقط على الازاحة للنابضين من وضع الاتزان الاستاتيكى وتكون الازاحة $r\theta$ للنابضk_1 فقط ، وتكون الازاحة النسبية $(x-r\theta)$ للنابض k_2 . وبالتالى يمكن ايجاد طاقـــة الحركـــة للمنظومـــة وبتطبيق معادلة لاجرانج:

$$\therefore P.E=\frac{1}{2}k_1(r\theta)^2+\frac{1}{2}k_2(x-r\theta)^2$$

$$\therefore \frac{\partial(P.E)}{\partial\theta}=k_1r^2\theta+k_2(x-r\theta)(-r)...............(2)$$

$$and \quad \frac{\partial(P.E)}{\partial x}=k_2(x-r\theta)...............................(3)$$

وبتفاضل الشغل المبذول w بواسطة الحركة الناتجة من العزم M(t) خلال إزاحة صغيرة $d\theta$ وكذلـــك الشغل المبذول بواسطة قوة مقاومة الخمد خلال الازاحة dx وتكون الاشارة سالبة لان قـــوة مقاومـــة الخمد تكون دائما فى إتجاة عكس اتجاة الحركة يمكن التعبير عنهم بالمعادلات الاتية:

$$\because dW_\theta=Q_\theta.d\theta=M(t)d\theta \quad ,\therefore Q_\theta=M(t)............................(4)$$

$$\because dW_x=Q_xdx=-c\dot{x}\,dx \quad \therefore Q_X=-c\dot{x}.................................(5)$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(K.E)}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial(K.E.)}{\partial q_i}+\frac{\partial(P.E)}{\partial q_i}=Q_i............(i=1,2,3,......n)$$

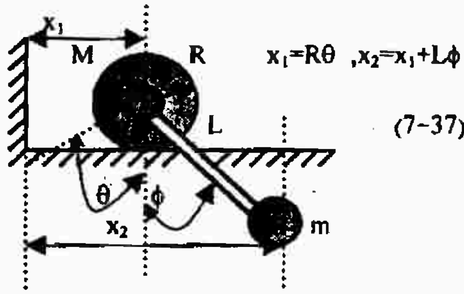
حيث q_i هى الاحداثيات العمومية فى حالة الازاحة الخطية او الزاوية ، Q_i هى القوى او العزوم العمومية الناتجة من قوى الاستثارة او العزوم وذلك بالاضافة الى طاقة المنظومة وقوى الخمد والعزوم المؤثرة ، وباستخدام معادلتى لاجرانج تنتج معادلتى الحركة من العلاقات الناتجة من(1) و(2) و (3) و (4) وذلك كما يلى:

$$I\ddot{\theta}+(k_1+k_2)r^2\theta-k_2rx=M(t)....................(6)$$

$$m\ddot{x}+k_2x+c\dot{x}-k_2r\theta=0................................(7)$$

18-A soild cylinder has a mass M and radius R. Pinned to the axis of the cylinder is an arm of length L which carries a bob of mass m . Obtain the natural frequency of free vibration of the bob. The cylinder is free to roll on the fixed horizontal surface shown in fig.(7-37).

18-اسطوانة مصمتة كتلتها M ونصف قطرها R متصلة بمركزها بذراع طولة L الذى يحمل كتلـــة كروية كتلتها m ، أوجد التردد الطبيعى للاهتزازالحر للكتلةالكروية m حيث ان الاســطوانة تتدحــرج بحرية على مستوى افقى كما مبين بالشكل (7-37).



الشكل(7-37)

باعتبار ان الاحداثيات العامة هى x_2 , x_1 ويمكن تعين طاقتى الحركة والوضع كما يلى:

$$K.E.=\frac{1}{2}M(\dot{x}_1)^2+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}MR^2)(\dot{\theta})^2+\frac{1}{2}m(\dot{x}_2)^2=$$

$$=\frac{1}{2}M(\dot{x}_1)^2+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}M)(\dot{x}_1)^2+\frac{1}{2}m(\dot{x}_2)^2\text{.............(1)}$$

$$\because l\phi=(x_2-x_1) \quad \therefore \phi^2=\frac{(x_2-x_1)^2}{l^2}$$

$$\therefore P.E.=mgl(1-\cos\phi)=mgl(\frac{\phi^2}{2})=mg\left(\frac{(x_2-x_1)^2}{2l}\right)=\frac{mg}{2l}(x_2-x_1)^2\text{.........(2)}$$

وحيث ان ϕ صغيرة وبتطبيق معادلة لاجرانج حيث $q_i=x_1$ ينتج الاتى:

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(K.E)}{\partial\dot{x}_1}\right)=\frac{1}{2}M(2\ddot{x}_1)+\frac{1}{4}M(2\ddot{x}_1)=M\ddot{x}_1+\frac{1}{2}M(\ddot{x}_1)=\frac{3}{2}M(\ddot{x}_1)\text{......(3)}$$

$$\because \frac{\partial(P.E)}{\partial x_1}=\frac{mg}{2l}(-2x_2+2x_1)$$

$$\therefore \frac{3}{2}M\ddot{x}_1+(\frac{mg}{l})(x_1-x_2)=0 \quad \textit{is an equation of motion}$$

$$at \quad q_i=x_2 \quad \therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(K.E)}{\partial\dot{x}_2}\right)=m\ddot{x}_2 \quad \therefore \frac{\partial(P.E)}{\partial x_2}=(\frac{mg}{2l})(2x_2-2x_1)\text{..............(4)}$$

ويمكن حل معادلات الحركة كما يلى:

$$\therefore m\ddot{x}_2 + \left(\frac{mg}{l}\right)(x_2 - x_1) = 0 \quad \textit{is an equation of motion} ....(5)$$

$$\textit{assume} \quad x_1 = X_1 \sin\omega t \quad , \quad x_2 = X_2 \sin\omega t ....(6)$$

$$\therefore X_1\left[(\frac{-mg}{l}) - (\frac{3M}{2})\omega^2\right] + x_2(\frac{-mg}{l}) = 0$$

$$\therefore X_1(\frac{-mg}{l}) + X_2\left[(\frac{mg}{l}) - m\omega^2\right] = 0 ....(7)$$

وبالتالى يمكن كتابة معادلة التردد والتردد الطبيعي ونسبة السعات كما يلى:

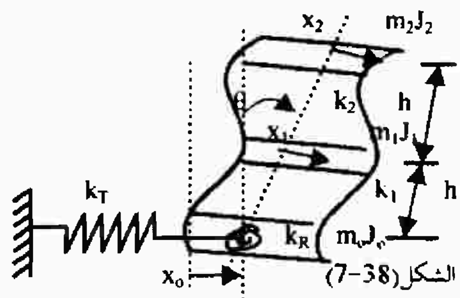
$$\therefore \textit{the frequency equation is} \quad \left(\frac{3M}{2}\right)\omega^4 - (\frac{g}{l})\omega^2\left[m + (\frac{3M}{2})\right] = 0 ....(8)$$

$$\therefore \textit{the natural frequencies are} \quad \omega = 0 \quad , \quad \omega = \sqrt{\left[(1 + \frac{2m}{3g})\frac{g}{l}\right]} \quad rad/\sec ....(9)$$

$$\therefore \textit{the amplitude ratio} \quad \frac{X_1}{X_2} = \frac{-2m}{3M} ....(10)$$

19-A Two-storey building which has its foundation subjected to translation and rotation is modelled by the system as shown in fig.(7-38). Write down expressions for (K.E) and (P.E), and indicate how the natural frequencies of free vibration may be found using the lagrange equation

19-مبنى يتكون من طابقين ولة نموذج مركب على نابضين (احدهم) انتقالى (والاخر) دورانى كما مبين بالشكل (7-38). اكتب دالة طاقة الحركة وطاقة الوضع وبين كيف يمكن ايجاد الترددات الطبيعية للاهتزاز الحر بواسطة معادلة لاجرانج.



الشكل(7-38)

يمكن كتابة دالة طاقة الحركة وطاقة الوضع عندما تكون سعة الاهتزاز صغيرة كما يلى:

$$\therefore K.E = \frac{1}{2}m_o(\dot{x}_o)^2 + \frac{1}{2}J_o(\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_o + h\dot{\theta} + \dot{x}_1) + \frac{1}{2}J_1(\dot{\theta})^2$$

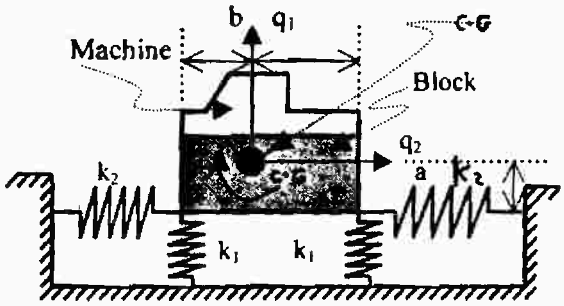
$$+ \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_o + 2h\dot{\theta} + \dot{x}_2)^2 + \frac{1}{2}J_2(\dot{\theta})^2 ....(1)$$

$$\therefore P.E = \frac{1}{2}k_T x_o^2 + \frac{1}{2}k_R\theta^2 + 2\left[\frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2\right] ....(2)$$

حيث θ , xo , x2 , x1 هى الاحداثيات العمومية وبالتعويض فى معادلة لاجرانج مع كل احداثى يعطـــى اربعة معادلات للحركة يمكن حلها وايجاد الترددات الطبيعية للاهتزاز الحر واشكال النسق كمـــا ســبق شرحة بالمسائل السابقة.

20- To isolate a structure from the vibration generated by a machine, the machine is mounted on a large block. The block is supported on springs as shown in fig.(7-39). Find the equations that describe the motion of the block in the plan of the figure as shown.

20-لعزل مبنى عن الاهتزازن المتولد من ماكينة ، الماكينة تركب على كتلة كبيرة حيث الكتلة مركبــة على نوابض كما بالشكل (39-7).اوجد المعادلات التى تصف حركة الكتلة فى المستوى المبين بالشكل.



الشكل(39-7)

يمكن استخدام الاحداثيات q_1 , q_2, q_3 لوصف حركة المنظومةوذلك باعتبار ان كتلـــة البلـــوك (الكتلـــة الخرسانية) والماكينة M ، وعزم القصور الذاتى الكتلى I_G حول مركز الثقل C.G

$$\therefore K.E.=\frac{1}{2}M(\dot{q}_1)^2+\frac{1}{2}M(\dot{q}_2)^2+\frac{1}{2}I_G(\dot{q}_3)^2 \text{..............................}(1)$$

$$\therefore P.E.=\frac{1}{2}k_1(q_1+bq_3)^2+\frac{1}{2}k_1(q_1-dq_3)^2+\frac{1}{2}k_2(q_2+aq_3)^2$$

$$+\frac{1}{2}k_2(q_2-aq_3)^2 \text{..}(2)$$

apply the lagrange equation with $q_i=q_1$

$$\therefore \frac{\partial(K.E)}{\partial q_1}=0\ ,\frac{\partial(P.E)}{\partial \dot{q}_1}=M\dot{q}_1\ ,\because \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(K.E)}{\partial \dot{q}_1}\right)\ ,\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(K.E)}{\partial \dot{q}_1}\right)=M\ddot{q}_1 \text{.....}(3)$$

$$\because \left(\frac{\partial(P.E)}{\partial q_1}\right)=k_1(q_1+bq_3)+k_1(q_1-dq_3) \text{..}(4)$$

$$\therefore \textit{the first equation of motion is } M\ddot{q}_1+2k_1q_1+k_1(b-d)q_3=0 \text{........}(5)$$

put $q_i=q_2$, $q_i=q_3$ $\therefore$ *the other equations of motion are obtained*

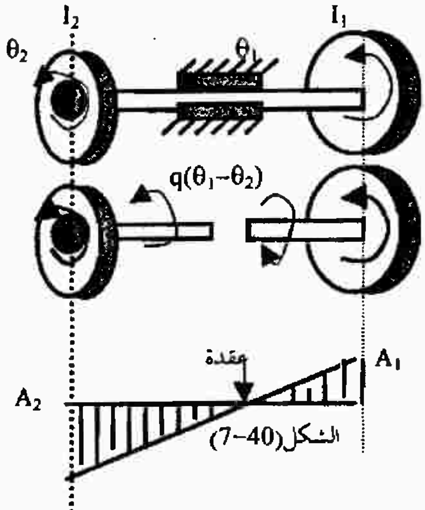
$$\therefore M\ddot{q}_2+2k_1q_2-2ak_2q_3=0 \text{..}(6)$$

$$\textit{and}\quad I_G\ddot{q}_3+k_1(b-d)q_1-2ak_2q_2+(b^2+d^2)k_1+2a^2k_2q_3=0 \text{...........}(7)$$

ولهذا فان المنظومة لها ثلاثة إحداثيات مزدوجة وبالتالى فهى لها ثلاث معادلات ويمكن إيجاد الترددات الطبيعية بالتعويض عن $q_i=A_i\sin\omega t$ ثم نحل معادلة التردد الناتجة وبالتالى يمكن إيجاد الترددات الطبيعية والتى تكون صغيرة.

21-The system as shown in fig.(7-40). Determine : (a) the equations of motion to the two rotors , (b)the natural frequency of the system. , and (c)the amplitude ratio.

21-المنظومة المبينة بالشكل (7-40) . أوجد معادلتى الحركة للدوراين. ، (ب) اوجد التردد الطبيعى للمنظومة. ، (ج)نسب السعات.



الشكل(7-40)

بفرض ان I_1 و I_2 هما عزمى القصور الذاتى للدوار الاول والثانى على الترتيب ، وبالتالى يمكن تعين معادلتى الحركة للمنظومة المبينة بالشكل (7-40) كما يلى:

$$\therefore I_1\ddot{\theta}_1=-q(\theta_1-\theta_2)............(1) \quad , \quad I_2\ddot{\theta}_2=q(\theta_1-\theta_2)..............(2)$$

$$assume \quad \theta_1=A_1\cos\omega t \quad ,\dot{\theta}_1=-\omega A_1\sin\omega t \quad , \ \ddot{\theta}_1=-\omega^2 A_1\cos\omega t.......(3)$$

$$\theta_2=A_2\cos\omega t \quad ,\dot{\theta}_2=-\omega A_2\sin\omega t \ , \ \ddot{\theta}_2=-\omega^2 A_2\cos\omega t........(4)$$

وبالتعويض من (3) و(4) فى المعادلتين (1) و (2) يمكن تعين نسبة السعة والتردد الطبيعى كما يلى:

$$\therefore -\omega^2 I_1 A_1=-q(A_1-A_2).........(5) \quad , \ -\omega^2 I_2 A_2=q(A_1-A_2).........(6)$$

$$\therefore \frac{A_2}{A_1}=\frac{-I_1}{I_2} \quad ....(7) \quad , \quad \omega=\sqrt{\frac{q(I_1+I_2)}{I_1.I_2}}.................(8)$$

حيث q هى معامل الياى الالتوائى للعمود ، A_2, A_1 هما سعتى الاهتزاز الزاوى ونلاحظ من العلاقة (7) ان اتساع الحركة لكل من القرصين يضاد إتجاة الاخر ويتناسب عكسيا مع عزم القصور الذاتى لكتلتهما. وبما ان الحركتين متضادتين فان الحركة يجب ان تتلاشى فى نقطة بينهما تسمى بالعقدة node ونلاحظ من الشكل (7-40) ان المسافتان بين العقدة وكل من القرصين تتناسب عكسيا مع عزم

القصور الذاتى لكتلة كل منهما.

22-A Steel shaft of 2" dia. and 36" long. at one end of the shaft fixed a flywheel with 420 ib and radius of gyration of 12" ,and at the other end installed a rotor with moment of 0.7 of that of the flywheel. Determine the natural frequency , the amplitude ratio for the system and find the node position , assume E=12k10^6 lb/in^2.

22-عمود من الصلب قطرة 2 بوصة وطولة 36بوصة ، ثبت فى احد نهايتية حدافة وزنها 420 باوند ونصف قطر الحركة التدويمية 12بوصة وعند النهاية الاخرى وضع دوار عزم القصور الذاتى لة 0.7 من عزم القصور الذاتى للحدافة. أوجد التردد الطبيعى ونسبة السعة واوجد موضع العقدة مع فرض ان $E=12(10)^6$ lb/in^2

الحل:

$$\therefore I_1 = \frac{420(12)^2}{(32.2)(12)} = 156.2 \ lb.in.\sec^2$$

$$\therefore I_2 = 0.7 I_1 = 0.7(156.2) = 109.57 \ lb.in.\sec^2$$

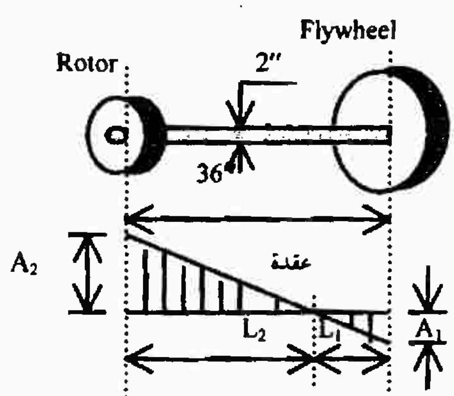
$$\therefore q = \frac{\frac{\pi.d^4}{32}(12)(10)^6}{36} = \frac{\pi(2)^4(12)(10)^6}{(32)(36)} = 0.532(10)^6 \quad lb.in/rad$$

$$\therefore \omega = \sqrt{\frac{q(I_1+I_2)}{T_1.T_2}} = \sqrt{\frac{0.523(10)^6(156.2+109.57)}{(156.2)(109)57)}} = 90.12 \ rad/\sec$$

$$\therefore f_n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{90.12}{2\pi} = 14.35 \quad c.p.s$$

$$\therefore L_1 = \frac{L.I_2}{(I_1+I_2)} = \frac{36(109.57)}{(109.57+156.2)} = 14.82 \quad in$$

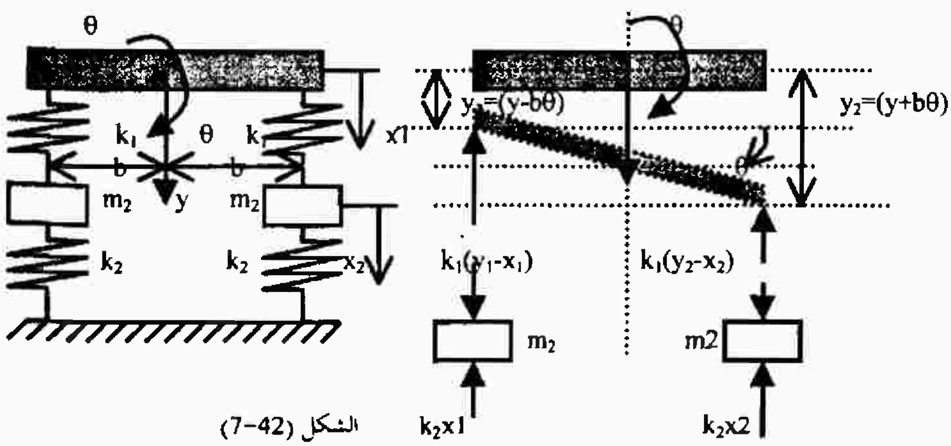
$$\because I_1 A_1 = I_2 A_2 \quad \therefore \frac{A_2}{A_1} = \frac{I_1}{I_2} = \frac{156.2}{109.57} = 1.43 \quad in$$



الشكل (7-41)

23-A simplified model for studying the dynamics of a motor vehicle is shown in fig. (7-42). The body has a mass m_1 , and a moment of inertia about an axis through its mass centre of I. It is considered to be free to move in two directions – vertical translation and rotation in the vertical plane. Each of the unsprung wheel masses m_2 , are free to move in vertical translation only. Damping effects are ignored. (1)-Derive equations of motion for this system. Define carefully the coordinates used. (2)-Is it possible to determine the natural frequency of a wheel hop mode without solving all the equations of motion? If not, suggest an approximation that might be made ,in order to obtain an estimate of the wheel hop frequency , and calculate such an estimate given the following data:
k_1=25 kN/m , k_2=80 kN/m ,m_2 =26 kg.

23-نموذج مبسط يمثل حركة محرك سيارة (مركبة) كما مبينة بالشكل (7-42) ، جسم المحرك كتلتـــه m_1 وعزم القصور الذاتى نسبة الى المحور خلال مركز الكتلة IG . المنظومـــة تتحـــرك بحريـــة فـــى إتجاهين ، إزاحة عمودية (رأسية) ودورانية (زاوية) فى المستوى العمودى. كل من كتلتى العجلتيـــن m_2 تعتبر حرة للتحرك بالإزاحة العمودية فقط ، حيث يهمل تأثير الخمد. (1)إشتق معادلات الحركـــة لـــهذة المنظومة مع توضيح المحاور المستعملة جيدا. (2)-هل من الممكن إيجاد الذبذبـــة الطبيعيـــة لقـــاعدة القرص دون اللجوء الى حل جميع معادلات الحركة ؟ إذا لم يمكـــن كذلـــك اقـــترح طريقـــة تقريبيـــة للحصول على الذبذبة الطبيعية لقاعدة القرص وإحسب هذة النتائج بالقيم المعطاة الاتيـــة: k_1=25kN/m , k_2=80kN/m , m_2=26kg



الشكل (7-42)

ويمكن إيجاد معادلات الحركة للمنظومة المبينة بالشكل (7-42) كما يلى:

$$for\ m_1 \quad \therefore \quad m_1 \ddot{y}_1 = -k_1(y_1 - x_1) - k_1(y_2 - x_2) = -k_1(y - b\theta - x_1) - k_1(y + b\theta - x_2) \ldots\ldots(1)$$

$$I_G \ddot{\theta} = k_1(y - x_1)b - k_1(y - x_2)b = k_1(y - b\theta - x_1)b - k_1(y + b\theta - x_2)b \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$\therefore \quad m_2 \ddot{x}_1 = k_1(y_1 - x_1) - k_2 x = k_1(y - b\theta - x_1) - k_2 x_1 \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

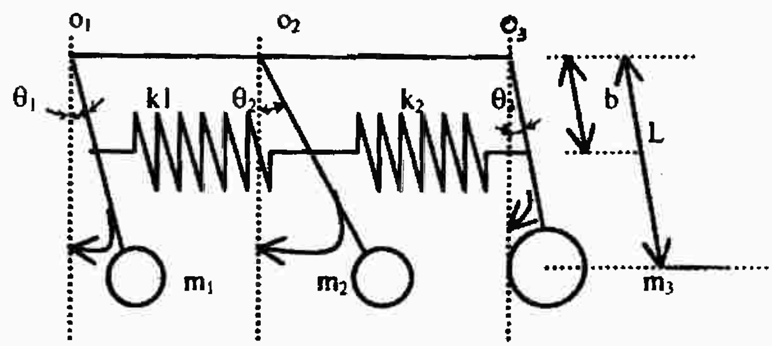
$$\therefore \quad m_2 \ddot{x}_2 = k_1(y_2 - x_2)b - k_2 x_2 = k_1(y + b\theta - x_2)b - k_2 x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

وحيث ان جسم او محرك السيارة لايتحرك ، وبذلك نجد ان y = θ =0 ، وبالتالى يمكن إيجـــاد الـــتردد (الذبذبة) الطبيعى لقاعدة القرص دون اللجوء الى معادلات الحركة كما يلى:

$$\therefore \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{k_1 + k_2}{m_2}\right)} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{25000 + 80000}{26}\right)} = 10.12 \ \ HZ$$

24-Part of a building structure is modelled by the triple pendulum shown overleaf. . Obtain the eguations of motion of small-amplitude oscillation in the plane of the fig.(7-43) by using the lagrange equation. Hence determine the natural frequencies of the structure and the corresponding mode shapes.

24-جزء من تركيبة 'نشائية (مبنى) إتخذ (إعتبر)كنموذج فى ثلاث بندولات كما موضح بالشكل (43-7)، أوجد معادلات الحركة بالنسبة لسعة صغيرة تتذبذب فى مستوى الشكل باستخدام معادلة لاجرانج . ثم اوجد الذبذبة الطبيعية للمنظومة(للتركيبة) كما بالشكل النموذجى المناظر لها.



يمكن إيجاد معادلات الحركة بطريقة الطاقة كما يلى:

$$\because K.E. = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2}m_2 + m_2(\dot{x}_2)^2 + \frac{1}{2}m_3(\dot{x}_3)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left[m_1 l^2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l^2 \dot{\theta}_2^2 + m_3 l^2 \dot{\theta}_3^2\right] = \frac{l^2}{2}\left[m_1 \dot{\theta}_1^2 + m_2 \dot{\theta}_2^2 + m_3 \dot{\theta}_3^2\right] \text{........(1)}$$

$$P.E. = m_1 gl(1-\cos\theta_1) + m_2 gl(1-\cos\theta_2) + m_3 gl(1-\cos\theta_3) + \frac{1}{2}k_1 b(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)^2$$

$$+ \frac{1}{2}k_2 b(\sin\theta_3 - \sin\theta_2)^2$$

$$\because \textit{for small soscillations} \quad 1-\cos\theta \cong \frac{\theta^2}{2} \qquad , \sin\theta \cong \theta$$

وبتطبيق معادلة لاجرانج وذلك بوضع $q_i = \theta_1, \theta_2, \theta_3$ يمكن إيجاد معادلات الحركة

تمارين

1-A vehicle has a mass of 1800 kg and a 2.5m wheelbase. The mass moment of inertia about the centre of mass is 450 $kg.m^2$, and the centre of mass is located 0.8 m from the front axle. Considering the vehicle as a two degree of freedom system. find the natural frequencies and the corresponding modes of vibration , if the front and rear springs have stiffnesses of 48 kN/m and 70 kN/m , respectively Thr expansion joints of a concerete road are 4 m apart. These joints cause a series of impulses at equal intervals to vehicles travelling at a constsnt speed. determine the speeds at which pitching motion and up and down motion are most likely to arise for the above vehicle..

2-Exciting force $F_0 \sin(\omega t)$ acting on the system shown in fig(7-22). Determine the amount of damping vibration by mechanical impedance method for m_1, m_2 at steady state ,If the air damping assumed to be c=3 kg.cm/sec , k_1=k_2=3kg.cm/sec , m_1-m_2=4kg and ω=1 rad/secd

3-Consider the system of fig(7-27), let m_1=3m , m_2=m , k_1=k_2=2k , k_3==3k and obtain the natural modes of vibration.

4-Consider the automobile as shown in fig(7-25), let the system parameters have the values m=140 lb- s^2 /ft , I_c=1300 lb-s^2-ft, k_1=1800 lb/ft , k_2=2000 lb/ft , a=4.40 ft, b=5.60ft , and find the natural coordinates of the system

5-In the system shown in fig.(7-30) , determine the equation of motion , the two natural frequencies , the amplitude ratios for the two frequencies and the normal modes of vibration of an automobile simulated by the simplified two degrees of freedom system with the following numerical values: W=3000 lb ,J_c=(W/g).r2 , L=8 ft , L_1=3.5ft , k_1=2200 lb/ft , k_2=2700 lb/ft , r=5 ft Study the effect of the coupling of the system , and define two separate coordinate system to descirbe behaviour for the system.

6-Fig.(7-33), shows a rigid bar with its center of mass not coinciding with its geometric center ,i.e., $L_1 \neq L_2$, and supported by two springs k_1 ,k_2 . It represents a two degree of freedom system since two coordinates are necessary to describe its motion . The choice of the coordinates will define the type of coupling which can be immediately determined from the mass and stiffness matrices. Mass or dynamical coupling exists if the mass matrix is nondiagonal . whereas stiffness or static coupling exists if the stiffness matrix is nondiagonal. It is also possible to have both forms of coupling

7-In a study of earthquakes , a building is idealized as a rigid body of mass M supported on two springs , one giving translational stiffness 2k and the other rotational stiffness 3kT as shown in fig(7-34) . Given that IG is the mass moment of inertia of the building about its mass centre G , write down the equations of motion using coordinates x for the translation from the equilibrium position , and θ for the rotation of the building. Hence determine the frequency equation of the motion

8-The two-degree-of-freedom system shown in fig.(7-35) consists of a pulley , a mass m , two springs of stiffness2 k1 and 3k2, a dashpot with a damping coefficient of 2c, and a cable connecting them as shown. The pulley centroidal mass moment of inertia is I , There is sufficient friction between the cable and pulley to prevent the cable from slipping. Determine the differential equations of motion of the system when the pulley is subjected to be a time varying moment M(t) as shown.

9-The system shown in fig.(7-36) consists of two springs (k1=2k,k2=3k)attached to a trolley of mass M that supports a mass m2 by means of a rod of length L and negligible mass pinned at point o. Determine the equations of motion of the system in terms of its generalized coordinates, and then linearize these equations by assuming that the oscillations of the rod supporting m are small

10-A Steel shaft of 3" dia. and 48" long. at one end of the shaft fixed a flywheel with 490 ib and radius of gyration of 16" ,and at the other end installed a rotor with moment of 0.6 of that of the flywheel. Determine the natural frequency , the amplitude ratio for the system and find the node position , assume E=12(106)lb/in2.

11-Let us assume a two mass system consisting of two identical masses and three identical springs as shown in Fig (7-44), with each mass constrained to move only in the vertical direction. (1) Determine the frequency equation and solve for the two natural frequencies. (2)- Determine the two principal modes corresponding to the two natural frequencies.

12-Find the equations of motion, the two principal modes and the two principal coordinates for the system shower in Fig (7-45), where two simple pendulum are connected by a linear spring and the supporting are mass less.

13-The two mass system of problem (11) is repeated, this time, the first mass m1, is displaced 12mm and released at time t=0, The second mass m_2 is also released at time t=0, but is not displaced form the equilibrium position be fore being released. Determine the displacement of each mass as a function of time.

14-A rigid block with a mass m and a centroidal moment of inertia (I) is supported by eight equal springs, four vertical and four lateral as shown in fig.(7-46). Determine the coupled natural frequencies and modal fractions for translation in the x – direction and rotation in the x-y plane the natural frequency in the y- direction is ω ;y= (4k/m) and is uncoupled, provided that the center of gravity is located midway between the vertical supporting springs.

15-A vehicle has a mass of 1800 Kg and a wheelbase of 3.6m. The mass center c.g is 1.6m. From the front axle. The radius of gyration of the vehicle about c.g is 1.4m. The spring constants of the front and the rear springs are 42kN/m. and 48kN/m, respectively. Determine (a) the natural frequencies, (b) the principal modes of vibration, and (c) the motion x (t) and θ (t) of the vehicle.

16-Excessive vibration, clue to near reasonance conditions, is encountered in a constant speed machine show in Fig (7-47) The original system consists of m_1, and k_1, It is not feasible to change m_1, and K_1.

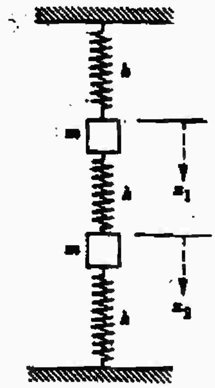
(a)- Show that a dynamic absorber, consisting of m_2 and k_2, will remedy the problem.

(b)- plot the resporse curves of the system , assuming $m_2/m_1=0.3$.

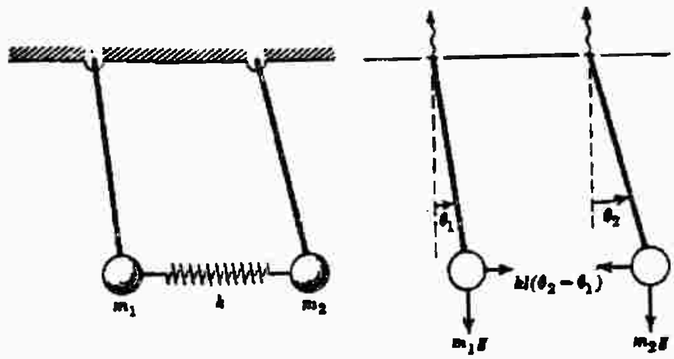
(c)- Investigate the effect of the mass ratio m_2/m_1.

(d)- Consider the dynamic absorber in which a viscous damper (c) installed in parallel with the spring K_2 as shown in (7-47c). Briefly discuss the problem.

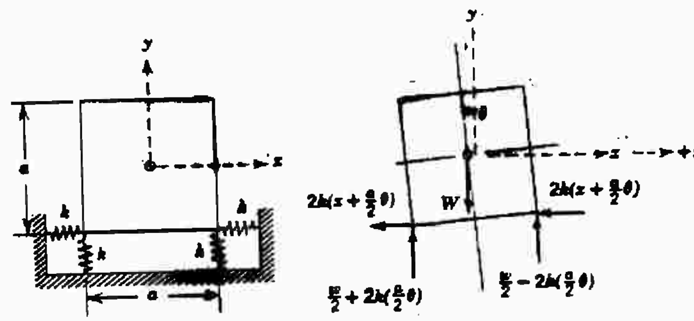
17- A small electronic packang is supported by springs as shown (7-48) opposite. The mass of the package is m, each springs has a constant axial stiffness K, and damping is negligible. Considering motion in the plane of the figure only, and assuming that the amplitude of vibration of the package is small enough for the lateral spring forces to be negligible, write down the equations of motion and hence obtain the frequencies of the free vibration of the package. Explain how the vibration mode shapes can be found.



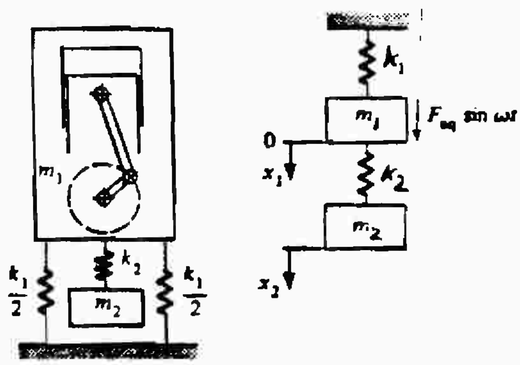
الشكل (7-44)



الشكل (7-45)

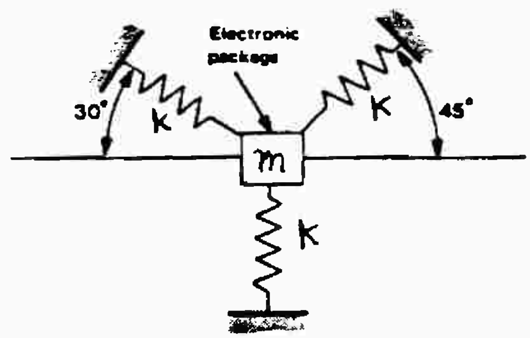


الشكل (7-46)



(a) Vibratory system (b) Equivalent system

الشكل (7-47)



الشكل (7-48)