الباب الثامن

المنظومات متعددة درجات الحرية

1- **مقدمة:**

يتطلب تحليل المنظومات الديناميكية المتعددة درجات الحرية التعامل مع عدد كبير من المعادلات والحسابات التفصيلية، ولهذا فأن معالجة المسألة بصورة تؤدي بوضوح إلى نتائج المطلوبة من غير أن تصبح متشابكة في التفصيلات البينية بأستخدام طرق المصفوفات والتي تعتبر مناسبة ومثالية لهذا الغرض عند التعامل مع العدد الكبير من المعادلات والتي يمكن معالجتها بالحاسوب. وهذا الباب سيوضح إستخدام طرق المصفوفات لمعالجة وتفهم سلوك المنظومات الميكانيكية متعددة درجات الحرية.

2- **مصفوفة الجساءة واللدانة The flexibility and stiffness matrix**

يعرف معامل تأثير اللدانة **the flexibility and influence coefficient (aij)** بأنها الأزاحة نتيجة لتسليط وحدةقوة واحدة عند **j** ومع القوى f_1 ، f_2 ، f_3 المؤثرة في النقط **1،2،3** ويمكن تطبيق مبدأ التراكيب **the principle of snperposition** لإيجاد الأزاحات بدلالة معاملات تأثير اللدانة.

$$x_1 = a_{11}f_1 + a_{12}f_2 + a_{13}f_3$$
$$x_2 = a_{21}f_1 + a_{22}f_2 + a_{23}f_3 \quad \text{...(8.2-1)}$$
$$x_3 = a_{31}f_1 + a_{32}f_2 + a_{33}f_3$$

وتكون المعادلة بأستخدام المصفوفات على الصورة التالية:

$$\{x\} = [a]\{f\} \quad \text{..(8.2-2)}$$

حيث أن المصفوفة $[a]$ هي مصفوفة اللدانة **the flexibility matrix** ويمكن كتابتها على الصورةالتالية:

$$[a] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{..(8.2-3)}$$

وأذا ضربت المعادلة (2) في معكوس مصفوفة اللدانة **the inverse of the flexibility matrix** نحصل على المعادلة التالية:

$$[a]^{-1}\{x\} = \{f\} = [k]\{x\} \quad \text{..(8.2-4)}$$

ولذا نجد أن معكوس مصفوفة اللدانة هي مصفوفة الجساءة $[k]$ **the stiffness matrix** أي أن:

$$[a]^{-1} = [k]$$

$$[a]=[k]^{-1} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (8.2\text{-}5)$$

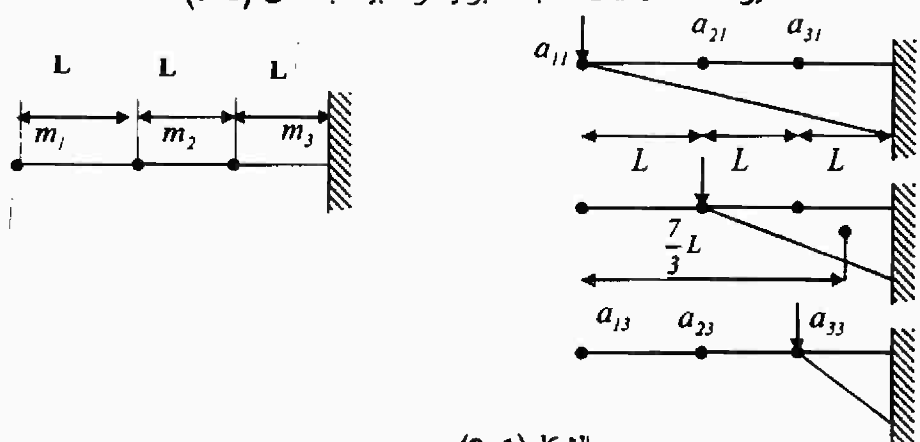
ويمكن كتابة حدود المعادلة (6) علىالصورة التالية:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (8.2\text{-}6)$$

ونلاحظ من مصفوفة الجساءة أنه أذا كانت $x_1 = 1$ و $x_2 = x_3 = 0$ فالقوى عند النقط 1،2،3 والتي تكون لازمة لابقاء هذه الأزاحة طبقاً للمعادلة (6) هي k_{11}، k_{21}، k_{31} وبالمثل فالقوى f_1 و f_2 و f_3 مطلوبة لبقاء الشكل العام للأزاحة $x_1 = 0$، $x_2 = 1$، $x_3 = 0$ هي k_{22}، k_{12}، k_{32}، لذلك فالقاعدة العامة لتكوين عناصر الجساءة لأي عمود هو أن نجعل الأزاحة المناظرة لذلك العمود مساوية لوحده واحدة وجميع الأزاحات الأخرى بالصفر ثم قياس القوى المطلوبة عند كل نقطة.

(1) Determine the influence coefficient for the points(1),(2),and (3) of the uniform cantilever beam shown in fig(8-1).

(1)أوجد معاملات الـتأثير للنقاط 1،2،3 للعتبة كابولية والمبينة بالشكل (1-8).



الشكل(1-8)

<u>الحـــــــــل:</u>

يمكن إيجاد معاملات التأثير بوضع وحدة حمل عند كل مـــن 1،2،3 علـــى التوالـــي، وأن حســاب الأنحرافات عند هذه النقط بأستخدام طريقة عزم المساحة حيث يكون الأنحراف **The deflection** عنـــد النقط المختلفة مساوياً لعزم المنحنى $\frac{M}{EI}$ حول النقطة المختارة. ومثـــال علـــى ذلـــك إيجـــاد القيمـــة $a_{21} = a_{12}$ من الشكل (1-8) كما يلي:

$$a_{12} = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}(2L)^2 \times \frac{7}{3}L\right] = \frac{14L^3}{3EI}$$

وتكون القيم الأخرى كمايلي:

$$a_{11} = \frac{27L^3}{3EI} \quad , \; a_{21} = a_{12} = \frac{14L^3}{3EI}$$

$$a_{22} = \frac{8L^3}{3EI} \quad , a_{23} = a_{32} = \frac{2.5L^3}{3EI}$$

$$a_{33} = \frac{L^3}{3EI} \quad , a_{13} = a_{31} = \frac{4L^3}{3EI}$$

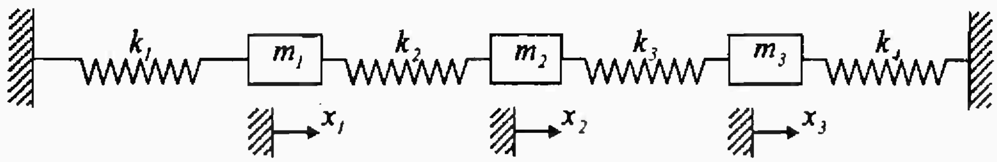
ويمكن أن نكتب مصفوفة اللدانة على الصورة التالية:

$$a = \frac{L^3}{3EI}\begin{bmatrix} 27 & 14 & 4 \\ 14 & 8 & 2.5 \\ 4 & 2.5 & 1 \end{bmatrix}$$

ويلاحظ أن هذه المصفوفة متماثله حول المحور القطري.

2-Fig (8-2) shows three degrees of freedom system. Determine the stiffness matrix.

2- يبين الشكل **(8-2)** منظومة ذات ثلاث درجات من الحرية أوجد مصفوفة الجساءة.



الشكل**(8-2)**

أفرض أن $x_1 = 1.5$ و $x_2 = x_3 = 0$ ، وبأعتبار إن القوى إلى اليمين موجبة فإن القوى المطلوبة عند **3,2,1** تكون كما يلي:

$f_1 = k_1 + k_2 = k_{12}$ و $f_2 = -k_2 = k_{21}$ و $f_3 = 0 = k_{31}$ وبإعادة ذلك بأستخدام $x_2 = 1$ و $x_1 = x_3 = 0$ تصير القوى كما يلي:

$f_1 = -k_2 = k_{12}$ و $f_2 = k_2 + k_3 = k_{22}$ و $f_3 = -k_3 = k_{32}$ وللعمود بالمصفوفة **k** السابقة ومع فرض $x_3 = 1$ ، $x_1 = x_2 = 0$ تصبح القوى كما يلي:

$$f_1 = 0 = k_{13} \quad , f_2 = -k_3 = k_{23} \quad , f_3 = k_3 + k_4 = k_{33}$$

وبالتالي يمكن كتابة مصفوفة الجساءة كما يلي:

$$k = \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 & 0 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) & -k_3 \\ 0 & -k_3 & (k_3 + k_4) \end{bmatrix}$$

3- <u>نظرية التبادل Reciprocity Theorem</u>

نظرية التبادل توضح أن المنظومة الخطية تحقق العلاقة الأتية $a_{ij} = a_{ji}$ - ولبرهان هذه النظرية نلاحظ أن الشغل المبذول بواسطة القوى f_i و f_j وحيث أن ترتيب التحميل هو **i** تتبعه **j** أو العكس ينتج التبادل عندما نجد أن هذا الشغل المنجز لايعتمد على ترتيب التحميل.

وبتطبيق القوة f_i يكون الشغل المبذول $\frac{1}{2} f_i^2 a_{ii}$ ومع ذلك فإن **i** تخضع إلى إزاحة أخرى $a_{ij} f_j$

والشغل الأضافي المبذول بواسطة f_i هو $a_{ij} f_j f_i$، لذلك يكون الشغل المبذول الكلي يمكن التعبير عنه بالمعادلة التالية:-

$$W = \frac{1}{2} f_i^2 a_{ii} + \frac{1}{2} f_j^2 a_{jj} + a_{ij} f_j f_i \text{ ....(8.3-1)}$$

وبعكس ترتيب التحميل وفي هذه الحالة يكون الشغل المبذول الكلي كما بالمعادلة التالية:

$$W = \frac{1}{2} f_j^2 a_{jj} + \frac{1}{2} f_i^2 a_{ii} + a_{ji} f_i f_j \text{ ....(8.3-2)}$$

وحيث أن الشغل المبذول في الحالتين يجب أن يكونا متساويان ولهذا نجد أن:

$$a_{ij} = a_{ji} \text{ ....(8.3-3)}$$

4- القيم الذاتية والمتجهات الذاتية Eagenvalues and Eigenvectors

معادلات الحركة للمنظومات الغير متضائلة والمتعددة درجات الحرية يمكن التعبير عنها في الصوره المصفوفية التالية:

$$[M] = \{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = \{0\} \text{ ....(8.4-1)}$$

حيث أن مصفوفة الكتلة المربعة تكون على الصورة التالية:

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{nn} \end{bmatrix} = \textbf{mass matrix (a square matrix).}$$

ومصفوفة الجساءة المربعة تكون على الصورة التالية:

$$k = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} = \textbf{stiffness matrix (a square matrix).}$$

ومتجه الأزاحة يعبر عنه كمصفوفة عمود كما يلي:

$$X = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}$$

ويمكن الأستغناء عن الأقواس والأقواس المزدوجة بإستخدام الحروف الكبيرة وتكتب المعادلة المصفوفية على الصورة التالية:

$$M\ddot{x} + Kx = 0$$

وأذا ضربت المعادلة أعلاه مسبقاً بـــ M^{-1} نحصل على الحدود التالية:

$M^{-1}M = I$ (مصفوفة أحادية) **a unit matrix**

$M^{-1}k = A$ (مصفوفة ديناميكية) **a dynamic matrix**

$\therefore\ I\ddot{x} + Ax = 0$ ....(8.4-2)

وبفرض أن الحركة توافقية يكون $\ddot{x} = -\lambda x$ حيث $\lambda = \omega^2$ وتصبح المعادلة (8.4-2) على الصورة التالية:

$[A - \lambda I]\{x\} = 0$ ....(8.4-3)

وتكون المحدده من المعادلة (8.4-3) على الصورة التالية:

$|A - \lambda I| = 0$ ....(8.4-4)

التي هي المعادلة المميزة للمنظومة، وتدعى الجذور λ_i للمعادلة المميزة بالقيم الذاتية وتحسب الترددات الطبيعية للمنظومة بواسطة العلاقة الأتية:

$\lambda_i = \omega_i^2$

وبالتعويض بـــ λ_i في المعادلة المصفوفية (8.4-3) نحصل على شكل النسق المناظر x_i الذي يدعى بالمتجه الذاتي. لذا فالمنظومة التي لها عدد n من درجات الحرية يكون لها عدد n من القيم الذاتية وعدد n من المتجهات الذاتية، ويمكن كذلك أيجاد المتجهات الذاتية من المصفوفة المرافقة للمنظومة، حيث أن $B = A - \lambda I$ وبذلك يمكن تعريف معكوس B كما يلي:

$B^{-1} = \frac{1}{|B|} adjB$ ....(8.4-6)

ويمكننا أن نضرب مسبقاً بواسطة $|B|B$ للحصول على $|B|I = BadjB$ أوبدلالة الصيغة الأصلية الى B

$|A - \lambda I|I = [A - \lambda I]adj[A - \lambda I]$

وأذا فرضنا أن $\lambda = \lambda_i$ هي القيمة الذاتية

$|A - \lambda I|I = [A - \lambda I]adj[A - \lambda I]$ ....(8.4-7)

عندئذ يكون الطرف الأيسر لهذه المعادلة مساوية للصفر أي أن:

$[0] = [A - \lambda I]adj[A - \lambda I]$ ....(8.4-8)

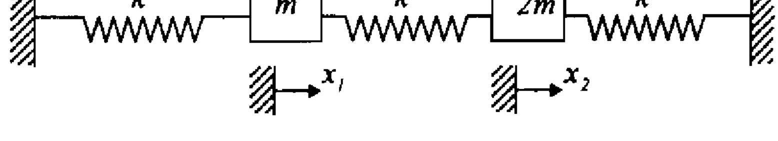
وتكون المعادلة أعلاه نافذة المفعول لجميع قيم λ_i وتمثل n من المعادلات لمنظومة لها عدد n من درجات الحرية وبمقارنة هذه المعادلة بالمعادلة (8.4-3) للنسق i^{th} نجد أن:

$[A - \lambda_i]\{x\}_i = 0$

ونلاحظ أن المصفوفة المرافقة $adj[A - \lambda I]$ يجب أن تحتوي على أعمدة كل منها هو المتجه الذاتي x_i مضروب في ثابت أختياري.

3- Consider the system of fig(8-3),determine the eigenvalues, the eigenvector and the two normal nodes.

3- تأمل المنظومة المبينة بالشكل (8-3) أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية والعقدتين الأعتياديتين.



الشكل(8-3)

الحـــــل:

يمكن كتابة معادلتي الحركة على الصورة المصفوفية كما يلي:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{.............................}(1)$$

وبمضرب بواسطة معكوس (مقلوب) مصفوفة الكتلة

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2m} \end{bmatrix}$$

وبفرض أن $\lambda = \omega^2$ يصبح المعادلة (1) على الصورة التالية:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{2k}{m} - \lambda\right) & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{2m} & \left(\frac{k}{m} - \lambda\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = 0 \text{......................................}(2)$$

وتكون معادلة التردد أو المعادلة المميزة من محدد المصفوفة أعلاه هي

$$\lambda^2 - \frac{3k}{m}\lambda + \frac{3}{2}\left(\frac{k}{m}\right)^2 = 0 \text{...}(3)$$

ويمكن إيجاد المتجها ت الذاتية (**The eigenvectors**) من المعادلة (2) بالتعويض عن قيم λ أعلاه ومع ذلك يمكن توضيح أستخدام المصفوفة المرافقة في تقدير قيمتها.

$\because$ المصفوفة المرافقة من المعادلة (2) تكون على الصورة التالية:

$$adj[A - \lambda_i I] = \begin{bmatrix} \left(\frac{k}{m} - \lambda_i\right) & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{2m} & \left(\frac{2k}{m} - \lambda_i\right) \end{bmatrix} \text{........................}(4)$$

وبالتعويض عن $\lambda_i = 0.634Km$ نحصل من المعادلة(4) حيث كل عمود ينسق إلى النتائج الأحاديـــة في المتجة الذاتي الأول (**The first eigenvector**).

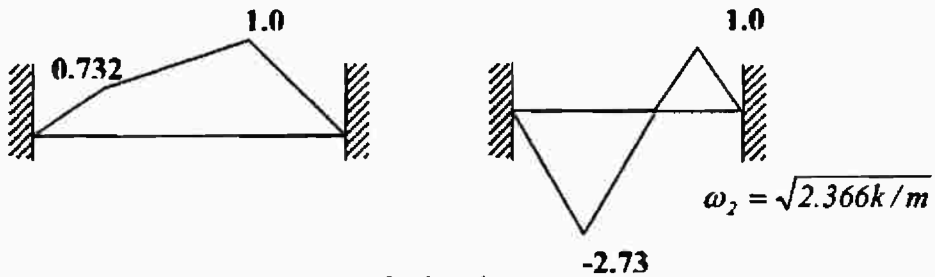
$$\therefore \begin{bmatrix} 0.366 & 1.000 \\ 0.500 & 1.366 \end{bmatrix} \frac{k}{m}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 0.732 & 0.732 \\ 1.000 & 1.000 \end{bmatrix} \text{ or } x_1 = \begin{Bmatrix} 0.732 \\ 1.000 \end{Bmatrix}$$

بالمثل عندما نستخدم $\lambda_2 = 2.366Km$ نحصل على المتجة الذاتي الثـاني (**the second eigenvector**) من أي عمود في المعادلة (8.3-4) وليكن:

$$x_2 = \begin{Bmatrix} -2.73 \\ 1.00 \end{Bmatrix}$$

والشكل التالي يبين العقدتين الأعتياديتن (The two normal nodes)



الشكل (8-4)

(8.5) خواص التعامد للمتجهات الذاتية Orthogonal properties eigenvectors

الأنساق الأعتيادية أو المتجهات الذاتية للمنظومة يمكن أن تكون متعامدة بالنسبة إلى مصفوفات الكتلـــة والجساءة وذلك بفرض أن المعادلة للنسق i^{th} هي كما يلي:

$kx_i = \lambda_i M x_i$ ....(8.5-1)

وبالضرب بواسطة منقول النسق j نجد أن:

$x_j^{\prime} k x_i = \lambda_i \left(x_j^{\prime} M x_i \right)$ ....(8.5-2)

بعد ذلك نبدأ بالمعادلة للنسق j^{th} مع الضرب مسبقاً بواسطة $x_i^{\prime}$ للحصول على:

$x_i^{\prime} k x_j = \lambda_j \left(x_i^{\prime} M x_j \right)$ ....(8.5-3)

وحيث أن k و M هما مصفوفتان متماثلتان فإن العلاقات الأتية تبقى مستمرة:

$$x_j^{\prime} M x_i = x_i^{\prime} M x_j$$
$$x_j^{\prime} k x_i = x_i^{\prime} k x_j$$
....(8.5-4)

لذلك فإنه بطرح المعادلة (8.5-3) من المعادلة (8.5-2) نحصل على:

$0 = \left(\lambda_i - \lambda_j \right) x_i^{\prime} M x_j$ ....(8.5-5)

وأذا كانت $\lambda_i \neq \lambda_j$ فأن المعادلة أعلاه تتطلب أن يكون:

$x_i^{\prime} M x_j = 0$ ....(8.5-6)

وكذلك يكون واضحاً من المعادلة(8.5-2) أومن المعادلة(8.5-3)والتي هي نتيجة للمعادلة (8.5-6) أن:

$x_i^{\prime} k x_j = 0$ ....(8.5-7)

تعرف المعادلات (8.5-6) ، (8.5-7) بخاصية التعامد للأنساق الأعتياديـــة وأخـــيراً، أذا كـــان $i = j$ فالمعادلة (8.5-5) تتحقق عند أي قيمة محدده كحاصل الضرب المعطى بواسطة المعـــادلات (8.5-6)، (8.5-7) ولذلك نفرض أن:

$x_i^{\prime} M x_i = M_i \quad , \quad x_i^{\prime} k x_i = k_i$ ....(8.5-8)

وتدعى هذه بالكتلة العامة والجساءة العامة على التوالي.

(8-6) الجذور المكررة Repeated Roots

الجذور المكررة في المعادلة المميزة تدل على أن المتجهات الذاتية المناظرة تكون غير فريدة والتوافق الخطي لمثل هذه المتجهات الذاتية يمكن أن يحقق معادلة الحركة. ولتوضيح ذلك نفرض أن X_1 ، X_2 هي المتجهات الذاتية التي تعود إلى القيم الذاتية المشتركة (λ_o)، X_3 هي المتجه الذاتي الثالث التي ترجع إلى λ_3 والتي تختلف عن λ_o وبذلك يمكننا أن نكتب:

$$AX_1 = \lambda_o X_1 \quad , AX_2 = \lambda_o X_2 , \quad AX_3 = \lambda_3 X_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8.6\text{-}1)$$

بضرب المعادلة الثانية في الثابت b وبأضافته إلى المعادلة الأولى نحصل على المعادلة التالية:

$$A(X_1 + bX_2) = \lambda_o (X_1 + bX_2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8.6\text{-}2)$$

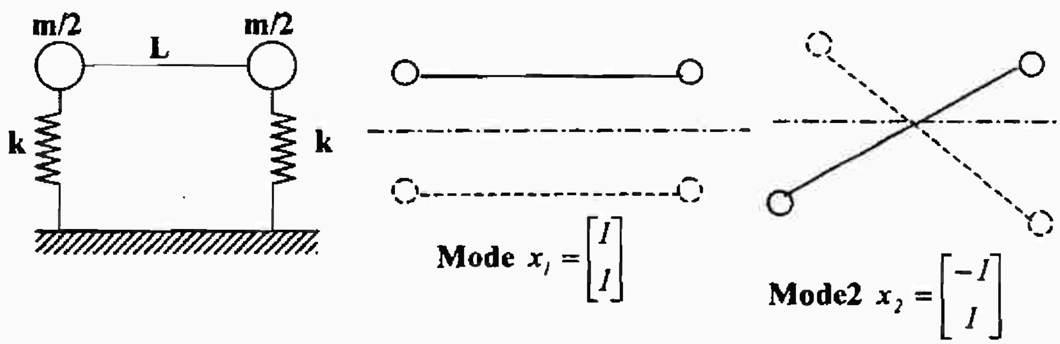
لذلك فإن المتجه الذاتي الجديد $X_{12} = X_1 + bX_2$ والذي يعتبر هو التوافق الخطي لأول زوج يتم تحقيقهم كما في المعادلة الأساسية:

$$AX_{12} = \lambda_o X_{12} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8.6\text{-}3)$$

ولذلك لايوجد نسق منفرد مقابل λ_o، أي من الأنساق المناظرة إلى λ_o يجب أن يكون متعامداً مع X_3 ، أذا كانت هذه النسق طبيعية. وأذا كانت الأنساق الثلاثة جميعها متعامده ومستقلة خطياً فيمكن جمعها حتى يمكن وصف الأهتزاز الحر الناتج من أي شرط أبتدائي.

(4) Consider the system shown in Fig(8-5a) where the connecting bar is rigid and negligible in weight. Determine the natural frequency for the two modes.

4- تأمل المنظومة المبينة بالشكل (8-5a) حيث توضح قضيب التوصيل من الصلب ومهمل الوزن. أوجد التردد الطبيعي للنسقان .



(a) الشكل (8-5) (b) (c)

النسقان الأعتياديان للأهتزاز هما نسقان متعامدان أحدهما إنتقالي والأخر دوراني ومع ذلك تكون الترددات الطبيعية للنسقين متساوية ويمكن حسابها من العلاقة $\omega_n = \sqrt{\dfrac{2k}{m}}$.

وهذا المثال يوضح أن المتجهات الذاتية المختلفة يمكن أن يكون لها قيماً ذاتية متساوية.

(5) Determine the eigenvalues and eigenvectors when $A=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$

(5) أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية عندما يكون $A=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$.

<u>الحـــــل:</u>

$\because$ المعادلة المميزة **(characteristic Equation)** $|A-\lambda I|=0$ والتي يمكن أن تكتب علـــى الصـــورة $(\lambda-1)^2(\lambda+2)=0$ وبذلك فإن القيم الذاتية تكون هي $\lambda_1=1, \lambda_2=1$ **and** $\lambda_3=-2$

وتكون المصفوفة المرافقة كما يلي:

$$adj[A-\lambda I]=\begin{bmatrix}(\lambda^2-1) & -(\lambda-1) & (\lambda-1)\\ -(\lambda-1) & (\lambda^2-1) & (\lambda-1)\\ (\lambda-1) & (\lambda-1) & (\lambda^2-1)\end{bmatrix}$$

وبذلك تكون القيم المناظرة إلى $\lambda_3=-2$ والتي يمكن أن توجد من أي عمود للمصفوفة الموجودة أعلاه وبذلك يكون:

$$\begin{bmatrix}3 & 3 & -3\\ 3 & 3 & -3\\ -3 & -3 & 3\end{bmatrix} \text{ or } X_3=\begin{Bmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{Bmatrix}$$

$\therefore$بالتعويض بالقيم $\lambda_1=\lambda_2=1$ في المصفوفة المرافقة يؤدي ذلك إلى أن تكون كل العناصر تســـاوي الصفر **(all zero)** ولذلك نعود إلى معادلة المصفوفة الأصلية $[A-\lambda I]X=0$ مع $\lambda=1$ وبذلك يكون:

$$-x_1-x_2+x_3=0 \quad , \quad -x_1-x_2+x_3=0 \ , \quad x_1+x_2-x_3=0$$

وبذلك يمكن التعبير عن المعادلات الثلاثة بالمعادلة $x_1=x_3-x_2$ وبذلك يكون للقيمة الذاتية x_1 المقابلة لـــــ $\lambda_1=\lambda_2=1$ وبذلك يمكننا أن نكتب المصفوفة التالية:

$$X_1=\begin{Bmatrix}x_3-x_2\\ x_2\\ x_3\end{Bmatrix}$$

والتي وجدت على X_3 لجميع قيم x_2 و x_3 أي أن $(X_3)\{X_1\}=0$ ولذلك يمكن الحصول مـــن القيـــم $x_2=x_3=1$ على المصفوفة

$$X_1=\begin{Bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{Bmatrix}$$

القيم $x_3 = 1$ ، $x_2 = -1$ يمكن أن تكتب المتجه الثاني على الصورة $X_2 = \begin{Bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$ وذلك كما مبين بالمعادلة (8.6-2) وبذلك لاتكون x_1 ، x_2 منفردة وأن اي توافق خطي بين x_1 ، x_2 سيحقق معادلـــة المصفوفــة الأصلية.

(8-7) مصفوفة الأنساق The model Matrix(P)

نظراً لأن الترابط الأستاتيكي أو الديناميكي ينتج من إختيار الأحداثيات كما سبق شرحه من الباب السـابع والمنظومات الغير متضائلة يكون لها مجموعة من الأحداثيات الرئسية والتي تعبر عن معادلات الحركـة كتكوين غير مترابط **uncoupled form** ومثل هذه الاحداثيات غير المترابطة يكون مرغوب فيـــها لان فى هذة الحالة يمكن حل كل معادلة بصورة مستقلة عن المعادلة الأخرى.

منظومة الكتلة المجمعة المتعددة درجات الحرية يمكن استنتاج الأحداثيات المختارة عند كل نقطـــة وبالتالي توجد مصفوفة كتلة قطرية، بينما مصفوفة الجساءة تحتوي على مصفوفة قطريـــة والتـــي توضح الترابط الأستاتيكي ويمكن أن تنتج الأحداثيات التي تم أختيارها بطريقـــة أخـــرى ترابطــاً ديناميكياً أو كلاهما (كل من الترابط الأستاتيكي و الديناميكي)، ويمكن فك ترابط معادلات الحركـــة لمنظومة لها عدد **n** من درجات الحرية. بشرط أن يكون معلوم أولاً النسق الأعتياديـــة للمنظومـــة وعندما تجمع النسق الأعتيادية **n** (أو القيم الذاتية) في مصفوفة مربعة مع كل نسق أعتيادي ممثـــل بعمود، وتسمى هذه المصفوفة بمصفوفة النسق **P** ولذلك يمكن أن تظهر مصفوفة النسق لمنظومـــة ذات ثلاث درجات من الحرية كما يأتي:-

$$P = \begin{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \end{bmatrix} = [X_1 X_2 X_3] \text{..............................(8.7-1)}$$

وبالتالي يمكن أن تتضمن مصفوفة النسق جميع علاقات التعامد وذلك من البند (5-8) في معادلة واحدة. وكذلك نحتاج لهذه العملية منقولة **P** والتي تكون على الصورة التالية:

$$P' = \begin{bmatrix} (x_1 & x_2 & x_3)_1 \\ (x_1 & x_2 & x_3)_2 \\ (x_1 & x_2 & x_3)_3 \end{bmatrix} = [X_1 X_2 X_3]' \text{.................................(8.7-2)}$$

وحيث أن كل صف يقابل نسق، ولذلك فإن حاصل الضرب $P^{\backprime}MP$ أو $P^{\backprime}KP$ ينتج مصفوفة قطريـــة وتعبر عن علاقة التعامد والتي تكون مساوية للصفر، فأذا لاحظنا منظومة ذات درجتين من الحرية فأننا نجد أن مصفوفة النسق يعبر عنها بالعلاقة التالية:

$$P^{\backprime}MP = [X_1 X_2]' [M][X_1 X_2] = \begin{bmatrix} X_1^{\backprime}MX_1 & X_1^{\backprime}MX_2 \\ X_2^{\backprime}MX_1 & X_2^{\backprime}MX_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \text{....(8.7-3)}$$

ونلاحظ من المعادلة السابقة أن المصفوفة قطرية بسبب التعامد والحدود القطرية هي التي يعـبر عنـها بالكتلة العامة M_i، ومن الممكن ايضاً أن نستخدم صيغة مشابهة لمصفوفة الجسـاءة **k** والتـي تنتـج المعادلة الأتية:

$$P^{t}kP=\begin{bmatrix}k_1 & o\\ 0 & k_2\end{bmatrix}\text{..}(8.7\text{-}4)$$

حيث تمثل حدود القطر هنا الجساءة العامة k_i.

أذا قسمنا كل عمود للمصفوفة **P** على الجذر التربيعي للكتلة العامة M_i فإن المصفوفة الجديدة تسـمى بالمصفوفة الوزنية ويرمز لها بالرمز $\widetilde{P}$ ومن السهل نرى أن التخطيـط القطـري لمصفوفـة الكتلـة بواسطة نموذج المصفوفة الوزنية ينتج مصفوفة إحادية يعبر عنها بالعلاقة التالية:

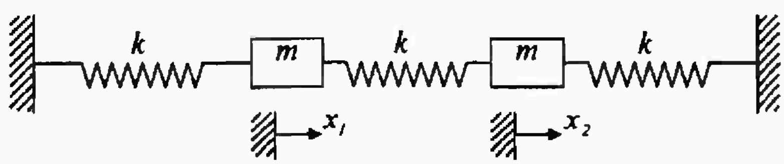
$$\widetilde{p}'k\widetilde{p}=I \qquad where \qquad k_i/M_i=\lambda_i \qquad ....(8-7-5)$$

ان مصفوفة الجساءة تعامل بالمثل بواسطة نموذج المصفوفة الوزنية وبالتالى تتحول الى مصفوفـة قطريةللقيم الذاتية كما يلي:

$$\widetilde{P}'k\widetilde{P}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{bmatrix}=\Lambda\text{ ....}(8.7\text{-}6)$$

(6) Consider the symmetrical two degrees of freedom system shown in fig (8-6). Determine the eigenvalues and eigenvectors?

(6) تأمل المنظومة المتماثلة ذات درجتين من الحرية والمبينة بالشـكل (6-8) وأوجـد القيـم الذاتيـة والمتجهات الذاتية.



الشكل(8-6)

الحل

يمكن تعيين معادلتي الحركة ووضعهم في الصورة المصفوفية التالية:

$$\begin{bmatrix}m & 0\\ 0 & m\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}2k & -k\\ -k & 2k\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}=0\text{ ....}(1)$$

وبالتالي يمكن تعيين القيم الذاتية والمتجهات الذاتية كما يلي:

$$\lambda_1=\omega_1^2=\frac{k}{m} \quad , \quad \lambda_2=\omega_2^2=3\frac{k}{m}$$

$$\therefore \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \lambda_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad , \quad \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \text{.................................(2)}$$

وتكون الكتلة العامة لكل من النسقين **2m** وتكون مصفوفة الأنساق ومصفوفة الأنساق الوزنية على الصورة التالية:

$$\therefore P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \widetilde{P} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{...........................(3)}$$

وبفك الترابط للمعادلة الأصلية فأننا نستخدم $\widetilde{P}$ في التحويل:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} \quad \text{...(4)}$$

وبالضرب مسبقاً بواسطة $\widetilde{P}$ نحصل على:

$$\widetilde{P}^{\prime} M \widetilde{P} \ddot{Y} + \widetilde{P}^{\prime} k \widetilde{P} Y = 0 \quad \text{or} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix} + \frac{k}{m} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = 0 \quad \text{...............(5)}$$

لذلك فإن المعادلة (1) قد تم تحويلها إلى معادلة فك الترابط (5) بواسطة التحويل الأحداثي للمعادلـة (4). وبالتالي يشار للأحداثيات y_2 ، y_1 بأنهما أحداثيات عمودية أو رئيسية.

(8.8) الأهتزاز القسري وفك ترابط الأحداثي

Forced vibration and coordinate decoupling

يمكن تمثيل معادلات الحركة لمنظومة لها عدد n من درجات الحرية مع تضاؤل لزج وبأثارة أختيارية **F(t)** بالصورة المصفوفية التالية:

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + kX = F \quad \text{..(1)}$$

وأذا كانت مصفوفة التضاؤل تتناسب مع أي من مصفوفة الجساءة أ, الكتلة أو مع توافق خطـــي لـــهذه المصفوفات، وعندئذ يسمى التضاؤل بالتضاؤل المتناسب ويمكن أن يكتب على صورة المعادلة التالية:

$$C = \alpha M + \beta k \quad \text{..(2)}$$

حيث β, α ثوابت مع ملاحظة أن المعادلة (2) يمكن أن تكتب علـــى الصـــورة $C = \alpha M'' + \beta k'''$ وتكون أيضاً قطرية.

وتمثل معادلات الحركة لحالة التضاؤل المناسب بالمعادلة (1) ، ويمكن فك الترابط بواســطة مصفوفـة الأنساق P أو بواسطة مصفوفة الأنساق الوزنية $\widetilde{P}$ لمنظومة الأهتزاز الحر المقابل بأستخدام P ونفرض أن:

$$X = \widetilde{P} Y \quad \text{..(3)}$$

حيث **Y** هي مصفوفة عمود أخرى والمعادلة (3) تمثل تحويل الأحداثيات من **X** إلى **Y**، وبالتعويض من المعادلة (3) في المعادلة (1) والضرب مسبقاً بواسطة $\widetilde{P}^{\prime}$ نحصل على:

$$\widetilde{P}^{\prime} M \widetilde{P} \ddot{Y} + \widetilde{P}^{\prime} c \widetilde{P} \dot{Y} + \widetilde{P}^{\prime} k \widetilde{P} Y = \widetilde{P}^{\prime} F \quad \text{..(4)}$$

بمساواة **C** إلى المعادلة (2) ومن المعادلات (8.7-5)، (8.7-6) تصبح العادلة أعلاه:

$$I\ddot{Y} + (\alpha I + \beta\Lambda)\dot{Y} + \Lambda Y = \tilde{P}^{t} F \text{ ....(8.8-5)}$$

وبما أن جميع المعاملات على الطرف الأيسر من هذه المعادلة هي مصفوفات قطريـــة,لذلـــك ســـتمثل المعادلة (8.8-5) مجموعة من معادلات الدرجة الثانية غير المترابطة وبالصورة التالية:

$$\ddot{y}_i + (\alpha + \beta\omega_i^2)\dot{y}_i + \omega_i^2 y_i = Q_i(t) \text{ ....(8.8-6)}$$

وبالأمكان تنفيذ الحل للمعادلات أعلاه بصورة مناسبة وبواسطة تحويل لابلاس واذا كـــانت مصفوفـــة التضائل غير متناسبة فسوف تترابط انيا او بواسطة الطريقة الموضحة في البند (8.10) القادم.

(8-9) الأنساق الأعتيادية القسرية للمنظومات المتضائلة

Forced normal modes of damped

عند أهتزاز النسق العادية نجد أن كل نقطة في المنظومة تتحرك حركة توافقيـــة وتمـــر خـــلال موقـــع الأتزان آنياً. ولقد وجد أن مثل هذه الحركة تكون ممكنة للأهتزاز غير المتضائل. وكذلك يكون أهـــتزاز النسق العادي ممكن الحدوث في المنظومة المتضائلة وذلك أذا ما أثـــير بعـــدد مـــن القـــوى التوافقيـــة والمساوية إلى عدد درجات الحرية للمنظومة. ولتوضيح ذلك نتأمل المنظومة المتضائلة تضائلاً لزجـــاً والتي لها عدد n من درجات الحرية والمثارة بواسطة قوى توافقية ذات تردد ω والمعادلـــة الحركيـــة للمنظومة تكون على الصورة التالية:

$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{F\}\sin\omega t \text{ ....(8.9-1)}$$

ويكون الحل على صورة المعادلة التالية:

$$\{x\} = \{X\}\sin(\omega t - \theta) \text{ ....(8.9-2)}$$

حيث أن كل من هذه الأنساق يكون متعلق بطور محدد θ, وتوزيع متجه القوة F, والمطلوب لأثـــارة المنظومة. وتسمى هذه الأستجابة بالأنساق الأعتيادية القسرية للمنظومات المتضائلة والتي تتحرك فيـــها كل نقطة بالمنظومة بطور، وتمر خلال موقع إتزانها أنياً بالنسبة إلى النقاط الأخرى كمـــا فـــي حالـــة الأهتزاز الحر غير المتضائل وتكون علاقات التعامد موجودة بين الأنساق وعند التعويض من المعادلـــة (8-9-2) في المعادلة (8-9-1) وبمساواة المعاملات للحدود المتشابهة نحصل على المعادلتين التاليتين:
المعاملات للحدود المتشابهة نحصل على المعادلتين التاليتين:

$$\left[([k] - [m]\omega^2)\sin\theta - [c]\omega\cos\theta\right]\{X\} = \{0\} \text{ ....(8.9-3)}$$
$$\left[([k] - [m]\omega^2)\cos\theta - [c]\omega\sin\theta\right]\{X\} = \{F\} \text{ ....(8.9-4)}$$

وبإعادة ترتيب المعادلة (8.9-3) إلى الصورة التالية:

$$\left[[I]\tan\theta - \left([k]-[m]\omega^2\right)^{-1}[c]\omega\right]\{X\} = \{0\} \qquad \text{(8.9-5)}$$

ويتضح أنه يوجد عدد n من القيم إلى θ_i المقابلة إلى n للقيم الذاتية للمعادلة (8.9-5)، ويوجد لكل $\tan\theta_i$ متجه ذاتي مناظر $\{X\}_i$. وعندئذ يمكن الحصول على الدوال القسرية المطلوبة $\{F_i\}$ بالتعويض عن θ_i، $\{X_i\}$ في المعادلة (8.9-4).

ويمكن الحصول على علاقات التعامد بإعادة كتابة المعادلة (8.9-3) إلى i^{th} قيمة ذاتية ومتجه ذاتي وذلك بالضرب أولاً بواسطة المنقول إلى j^{th} متجه ذاتي وأعادة العملية مع تبادل j, i.

$$\tan\theta_i \{X\}_j^t \left([k]-[m]\omega^2\right)\{X\}_i - \omega\{X\}_j^t[c]\{X\}_i = 0$$
$$\tan\theta_j \{X\}_i^t \left([k]-[m]\omega^2\right)\{X\}j - \omega\{X\}_i^t[c]\{X\}j = 0$$

ونظراً لوجود تماثل بالمصفوفات c, k, m نحصل على العلاقات التالية بواسطة الطرح $\tan\theta_i \neq \tan\theta_j$

$$\{X\}_j^t \left([k]-[m]\omega^2\right)\{X\}_i = 0 \qquad \text{(8.9-6)}$$
$$\{X\}_j^t[c]\{X\}_i \qquad \text{(8.9-7)}$$

وبنفس الطريقة من المعالة (8.9-4) يمكن الحصول على العلاقة الأتية:

$$\{X\}_j^t\{F\}_i = 0 \qquad \text{(8.9-8)}$$

تحويل الأحداثيات **Transformation of coordinates**

يمكن تبسيط تحويل الأحداثيات بإستخدام المصفوفة النموذجية $[P]$ للمنظومة غير المتضائلة أو مصفوفة الأنساق الوزنية $[\tilde{P}]$ التي هي مصفوفة الأنساق $[P]$ مع العمود i^{th} وذلك بالقسمة على الجذر التربيعي للكتلة العامة $\left(\{X\}_i^t[m]\{X_i\}\right)^{1/2}$ (أنظر البند 8-6) حيث يكون التحويل على الصورة التالية:

$$\{x\} = [\tilde{P}]\{y\} \qquad \text{(8.9-9)}$$

وذلك أجرى على المعادلة (8.9-1) وبالضرب أولاً بواسطة المنقول $\{\tilde{P}\}$ فنتج المعادلة الأتية:

$$[I]\{\ddot{Y}\} + [c]\{\dot{Y}\} + [\lambda_i]\{Y\} = [\tilde{P}]^t\{F\}\sin\omega t \qquad \text{(8.9-10)}$$

حيث أن مربعات الترددات الطبيعية غير المتضائلة $[\lambda_i][\tilde{P}]^t[k][\tilde{P}]$

مصفوفة متضائلة متماثلة= $[c] = [\tilde{P}]^t[e][\tilde{P}]$

مصفوفة أحادية $[1] = [\tilde{P}]^t[m][\tilde{P}] =$

ونفرض أن الحل على صورة المعادلة التالية:

$\{v\} = \{Y\}\sin(\omega t - \phi)$ ....(8.9-11)

ويمكن استبدال نتائج الفقرة السابقة كما يلي:

$\left[[1]\tan\phi - \omega\left[\dfrac{1}{\lambda_i - \omega^2}\right][c]\right]\{Y\} = 0$ ....(8.9-12)

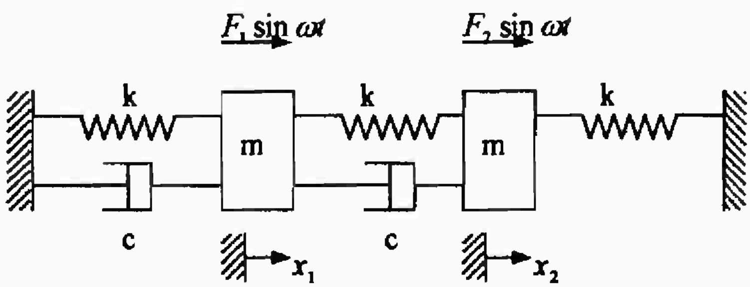
$\left[([\lambda_i] - \omega^2[1])\cos\phi + \omega[c]\sin\phi\right]\{Y\} = [\tilde{P}]^t\{F\}$ ....(8.9-13)

$\{Y\}_j^t[c]\{Y\}_i = 0$ ....(8.9-14)

$[Y]_j^t[\tilde{P}]\{F\}_i = 0$ ....(8.9-16)

وعند استعمال مصفوفة الأنساق $[P]$ بدلا من مصفوفة الأنساق الوزنية $[\tilde{P}]$ تصبح كل من مصفوفات الكتلة والجساءة قطرية ولكن مصفوفة الكتلة لن تكون مصفوفة أحادية.

(7) Figure (8-7) shows a two degrees of freedom system, find the normal modes, the nodal matrix, the weighted normalized matrix, the eigenvalues and the eigenvector.



الشكل (8-7)

الشكل (8-7) يوضح منظومة ذات درجتين من الحرية أوجد النسق الأعتيادية ومصفوفة الأنساق الأعتيادية ومصفوفة الأنساق الوزنية والقيمة الذاتية والمتجه الذاتي.

الحـــــل: يمكن كتابة معادلتي الحركة للمنظومة (8-7) على الصورة المصفوفية التالية:

$$m\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + c\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + k\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}\sin\omega t$$

والأنساق الأعتيادية يمكن تعريفها كما يلي:

$$\lambda_1 = \frac{k}{m}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)_1 = 1$$

$$\lambda_2 = 3\frac{k}{m}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)_2 = -1$$

بما ان الكتلة العامة هي 2m لكلا النسقين ، لذا ستكون مصفوفة الانساق ومصفوفة الانساق الوزنية كالآ :

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad [\bar{P}] = \frac{1}{\sqrt{2m}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

باستخدام $[\bar{p}]$ نحصل على :

$$[\lambda_i] = \frac{k}{m}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \frac{c}{2m}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

وتصبح المعادلة (8-9-12)

$$\left[[1]\tan\phi - \frac{\omega c}{2k}\begin{bmatrix} \dfrac{1}{1-\dfrac{\omega^2 m}{k}} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{3-\dfrac{\omega^2 m}{k}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}\right]\begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = 0$$

بفرض $\mu = (2k/wc)\tan \varnothing$ تختزل المعادلة اعلاه الى :

$$\begin{bmatrix} \left(\mu - \dfrac{1}{1-\dfrac{\omega^2 m}{k}}\right) & \left(\dfrac{1}{1-\dfrac{\omega^2 m}{k}}\right) \\ \left(\dfrac{1}{3-\dfrac{\omega^2 m}{k}}\right) & \left(\mu - \dfrac{5}{3-\dfrac{\omega^2 m}{k}}\right) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = 0$$

وعندئذ نجد القيمة الذاتية μ من المحددة للمصفوفة اعلاه :

$$\mu^2 - \mu\left[\frac{1}{1-\dfrac{\omega^2 m}{k}} + \frac{5}{3-\dfrac{\omega^2 m}{k}}\right] + \frac{4}{\left(1-\dfrac{\omega^2 m}{k}\right)\left(3-\dfrac{\omega^2 m}{k}\right)} = 0$$

وستحدد القيمة الذاتية من النسبة :

$$\frac{Y_1}{Y_2} = \frac{\dfrac{1}{1-\dfrac{\omega^2 m}{k}}}{\dfrac{1}{1-\dfrac{\omega^2 m}{k}} - \mu}$$

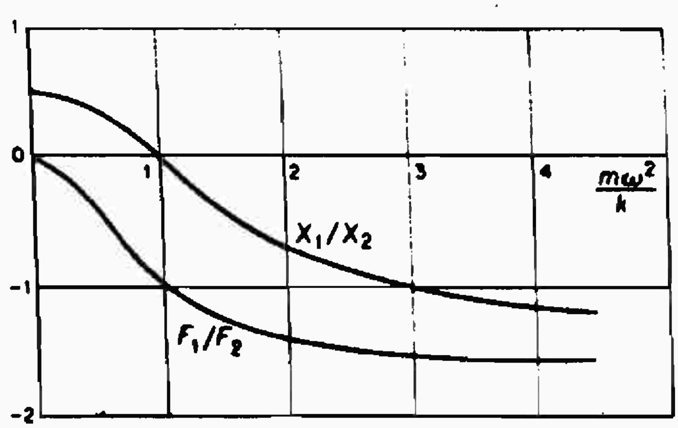
للحصول على القيم العددية ، يكون من الضروري تحديد تردد الاثارة w او w²m/k عندما يكون w²m/k = 0.5 ونحصل على :

$$\mu_1 = 1.105 \quad و \quad \mu_2 = 2.895$$

$$\{Y\}_{\mu_1} = \begin{matrix} 2.24 \\ 1.00 \end{matrix} \quad و \quad \{Y\}_{\mu_2} = \begin{matrix} -2.24 \\ 1.00 \end{matrix}$$

تحقق هذه الكميات علاقات التعامد المعطاة بوساطة المعادلات (8.9-15) ، (8.9-14) وبواسطة المعادلة (8.9-16) ، نستطيع ان نجد نسبة القوى . والمعادلة :

$$\{Y\}_{\mu_1}^{t}[\bar{P}]^{t}\{F\}_{\mu_1} = 0$$



شكل (8-8) النسق الأول

تنتج $(F_1/F_2)_{\mu_1} = -0.382$ وبالطريقة نفسها $\{Y\}_{\mu_1}[\bar{P}]^{t}\{F\}_{\mu_1} = 0$ تؤدي الى

$$\left(\frac{F_1}{F_2}\right)_{\mu_1} = -2.61$$

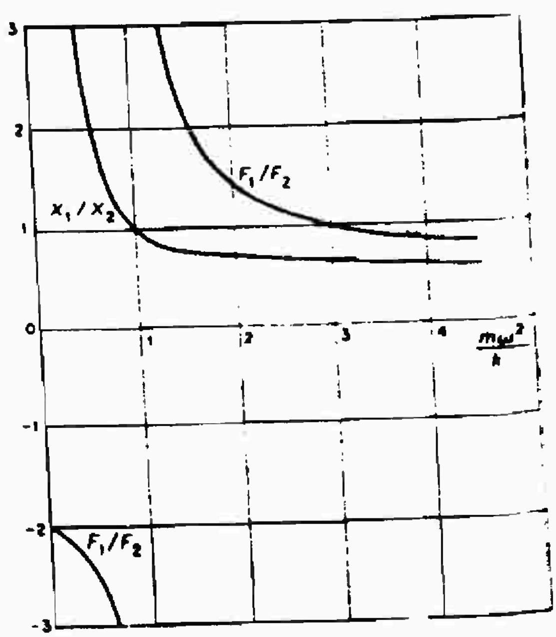
اخيرا ، يمكن ايجاد السعات الحقيقية $\{X\}$ من التحويل | $\{X\} = [\bar{P}]\{Y\}$ كما يأتي

$$\{X\}_{\omega_1} = \begin{Bmatrix} .382 \\ 1.000 \end{Bmatrix} \qquad \{X\}_{\omega_2} = \begin{Bmatrix} 2.61 \\ 1.00 \end{Bmatrix}$$

ولاكمال المسألة . يجب اختيار الترددات الاخرى w^2m/k وتكرر الحسابات اعلاه . والمخطط البياني للسعة ونسبة القوى مبينة للنسقين في الشكلين ,8.9-3 8.9-2 .

6.10 طريقة حيز الحالة State Space Motbod .

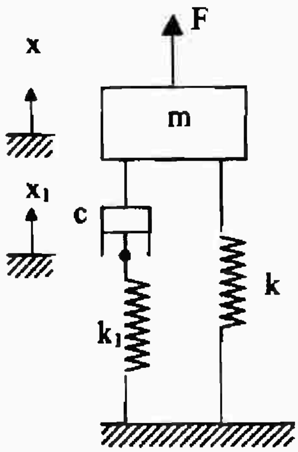
في الحالة الاكثر عمومية حيث لايوجد تضاؤل تناسبي فنظام معادلات الدرجة الثانية بصيغة المعادلة (8.8-4) لا يمكن ان يفك تقارنها ما لم تعاد صياغتها بدلالة معادلات الدرجة الاولى . ولاعادة هذه الصياغة ، تعطى كل من المتغيرات الاصلية ومشتقاتها كمتغيرات جديدة تشير الى متغيرات الحالة ومن ثم تصبح المشتقات الثانية مشتقات اولى لمتغيرات الحالة الجديدة . مع ان رتبة المشتقات اختصرت بهذه الطريقة ولكن عدد المتغيرات قد تضاعف وهذا يضيف عبئا جديدا للحسابات ، لهذا السبب يكون استخدام الحاسبة الالكترونية ضروريا في الحسابات العددية .



الشكل (8-9) النسق الثاني

(8) Consider the viscoelastically damped system of Fig (8-10). The system differs from the viscously damped system by the addition of the springs k_1, which introduces one more coordinate x_1 to the system.

8- تأمل المنظومة المتضائلة تضائلاً لزجا مرونيا والمبين بالشكل (8-10) فهي تختلف عن المنظومة المتضائلة لزوجيا باضافة النابض k_1 الذي يضيف أحداثيا أخر x_1 إلى المنظومة.



الشكل (8-10)

الحـــل:

معادلات الحركة للمنظومة في أحداثيات القصور الذاتي x، x_1 هي:

$$m\ddot{x} = -kx - c(\dot{x} - \dot{x}_1) + F \quad \text{............(8.10-1)}$$

$$0 = c(\dot{x} - \dot{x}_1) - k_1 x_1$$

وبأستخدام التعويضات الأتية: $\alpha = \frac{k_1}{c}$، $\beta = \frac{k_1}{m}$، $\omega_o^2 = \frac{k}{m}$.

يمكن كتابة المعادلات كما يلي:

$$\ddot{x} = -\omega_o^2 x - \beta x_1 + \frac{F}{m} \quad , \quad \dot{x}_1 = \dot{x} - \alpha x_1 \quad \text{..................................(8.10-2)}$$

ويمكن أختيار متغيرات الحالة كما يلي:

$$x_1 = z_1 \quad , \quad \dot{x}_1 = \dot{z}_1 \quad , \quad x = z_2 \quad , \quad \dot{x} = z_3 + \dot{z}_2 \quad \text{..............................(8.10-3)}$$

ويمكن أعادة كتابة معادلات الحركة بدلالة z على الصورة التالية:

$$\begin{Bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\beta & -\omega_o^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{F}{m} \end{Bmatrix} \quad \text{.....................................(8.10-4)}$$

يمكن أعادة كتابة المعادلة برموز مختصرة كما يلي:

$$\dot{z} = Az + u \quad \text{...(8.10-5)}$$

حيث:

$$\dot{z}=\begin{Bmatrix}\dot{z}_1\\ \dot{z}_2\\ \dot{z}_3\end{Bmatrix}, \qquad z=\begin{Bmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\end{Bmatrix}, \qquad u=\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ \dfrac{F}{m}\end{Bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}-\alpha & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ -\beta & -\omega_o^2 & 0\end{bmatrix}$$

وحل هذه المعادلة من الدرجة الأولى يمكن كتابته على الصيغة المغلقة كالأتي:

$$Z=e^{At}Z_o+e^{At}\int_0^t e^{-At}u(\tau)d\tau \qquad \text{.......(8.10-6)}$$

ان هذه المعادلة بسيطة ظاهريا -ليست في الحقيقة بسيطة أطلاقا حيث تحتاج إلى معالجات عددية جديرة بالأعتبار والتي ستعرض في الفقرة الأتية:

الحل (1): نتأمل المعادلة المتجانسة

$$\dot{Z}=AZ \qquad \text{.......(8.10-7)}$$

ويكون حلها على صورة المعادلة (8.10-8) .... $Z=e^{At}Z_o$

في هذه المعادلة يحتاج الحد e^{At} إلى تمثيل وسنعتمد أسلوبا واحدا لحل المعادلة المتجانسة وذلك باستخدام تحويل لابلاس للمعادلة المتجانسة مع مقارنة النتائج وبفرض ان $\bar{Z}(s)$ هي تحويل لابلاس إلى المتجه العمودي Z ولذلك نحصل على:

$$S\bar{Z}(s)-Z_o-A\bar{Z}(s)$$

$$\therefore [SI-A]\bar{Z}(s)=Z_o \qquad \text{.......(8.10-9)}$$

ولذلك نجد أن

$$Z=L^{-1}[SI-A]^{-1}Z_o \qquad \text{.......(8.10-10)}$$

والتي يمكن أن نستنتج منها

$$Z=L^{-1}[SI-A]^{-1}Z_o$$

وايضا نستنتج أن:

$$e^{At}=L^{-1}[SI-A]^{-1}=L^{-1}\frac{adj[SI-A]}{[SI-A]} \qquad \text{.......(8.10-11)}$$

مع ملاحظة L^{-1} هي معكوس داله لابلاس .

ومن الواضح هنا أن الجذور s_i للمعادلة المميزه $|SI-A|=0$ يجب أن تحسب وسيكون الطرف الأيمن من العملية بعد عملية العكس سوف تصبح مصفوفة مربعة وعناصرها هي e^{s_it} مضروبة بثوابت. وأذا وجدت جذور متكررة فستظهر أيضا حدود في المصفوفة مثل te^{At}.

الحـــل(2): يمكننا فحص الحل لمعادلة حيز الحالة كمسالة قيمة ذاتية ومتجه ذاتي ولذلك يمكن أن نستخرج القيمة الذاتية من المعادلة المميزة:

$$[A-\lambda I]=0 \qquad \text{.......(8.10-12)}$$

والمتجهات الذاتية من أحد الأعمدة بمصفوفة المرافق $adj[\lambda I - A]$ مع λ_i للنسق i^{th}، وقبل الأستمرار بهذه المسألة سنقدم هنا تقنية عمل الخط القطري التي هي ضرورية للحل، وتكتب أولا المعادلة المتجانسة من المعادلة (8.10-5) للنسق i^{th} كالأتي:

$$|A - \lambda I|Z_i = 0 \qquad (8.10\text{-}13)$$

حيث فرضت القيم الذاتية لتكون مميزة، وتوجد n من هذه المعادلات (لهذه المسألة $n = 3$) والتي يمكن أعادة ترتيبها كالأتي:

$$AZ_i = \lambda_i Z_i \qquad (8.10\text{-}14)$$

وبالأمكان جمع n من معادلات المصفوفة في معادلة مصفوفة منفردة بدلالة مصفوفة الأنساق P ومصفوفة قطرية بقيم ذاتية والمعرفة كمايلي:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad (8.10\text{-}15)$$

وبذلك تصبح المعادلة المجمعة

$$AP = \mathrm{P}\Lambda \qquad (8.10\text{-}16)$$

والتي يمكن أن تحقق بسهولة بان n من المعادلات والتي هي من النوع الذي يرمز له بالمعادلة (8.10-14)، وأذا المعادلة السابقة ضربت في P^{-1} فأننا نحصل على:

$$\mathrm{P}^{-1}AP = \Lambda \qquad (8.10\text{-}17)$$

والمصفوفة Λ تكون قطرية في حالة القيمة الذاتية للمنظومة.
ونعود الآن إلى حل المعادلة (8.10-15) وذلك بأدخال تحويل الأحداثيات كالأتي:

$$Z = \mathrm{P}y \qquad (8.10\text{-}18)$$

ولذلك نحصل على:

$$\mathrm{P}\dot{y} = PAy + u \qquad (8.10\text{-}19)$$

وبالضرب أولا بواسطة P^{-1} نحصل على:

$$\dot{y} = \mathrm{P}^{-1}APy + \mathrm{P}^{-1}u = \Lambda y + \mathrm{P}^{-1}u \qquad (8.10\text{-}20)$$

ولذلك فإن المعادلة (8.10-20) يمكن فك ترابطها الآن ونحصل على الحل إلى y_i ببساطة من تحويل لابلاس.
لذلك نتأمل المعادلة المتجانسة:

$$\dot{y} = \Lambda y \qquad (8.10.21)$$

والحل يكون على الصورة:

$$y = e^{\Lambda t} y_o \qquad (8.10.22)$$

$$\therefore \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix}_o \qquad (8.10.23)$$

ومن التحويل إلى الأحداثيات الأصلية نلاحظ أن $y = P^{-1}Z$ وبالتعويض في المعادلة (22-8.10) وبالضرب أولا بواسطة P نحصل على:

$Z = Pe^{\Lambda t}P^{-1}Z_o$ ....(8.10.24)

وبالمقارنة مع المعادلة (8-8.10) نستنتج أن:

$e^{At} = Pe^{\Lambda t}P^{-1}$ ....(8.10-25)

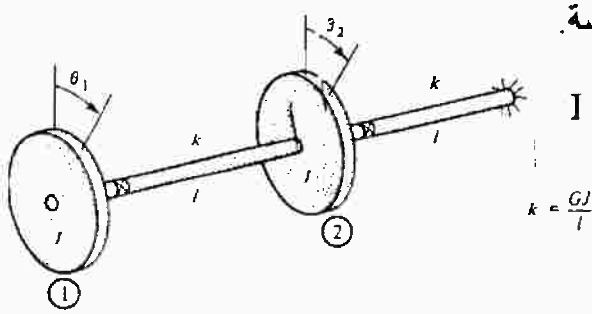
وهي مصفوفة مربعة أيضا.

9- Two identical disks of centroidal mass moment of inertia I are attached to a steel shaft that is fixed at the right end as shown in fig (8-11). Each section of shaft has a diameter d a length L, and a torsional spring constant k. Using the system data.

L = 24in (length of each section of shaft).
d = 1.25in (diameter of shaft).
$G = 12(10)^6$ psi (shear modulus).
$I = 12$ lb.in.s^2 (centroidal mass moment of inertia of disk).

Determine: (a) The eigenvalues of the system.
(b) The natural frequencies of the system (Hz).
(c) The eigenvectors (normal-mode shapes) of the system.

9- قرصين متماثلين عزم القصور الذاتي الكتلي المركزي I متصلين بعمود من الصلب حيث مثبت أحدهما عند النهاية اليمنى له كما بالشكل. كل من جزئي القضيب قطره d وطوله L ومعامل النابض الألتوائي k أستخدم المعطيات التالية:



الطول L = 24 بوصة ، قطره =1.25 بوصة.
إجهاد القص $G = 12\times10^6$
عزم القصور الذاتي الكتلي $I = 12$ lb.in.s^2

أوجد:
(أ) قيمة عامل المصفوفة.
(ب) الترددات الطبيعية للمنظومة.
(ج) متجه عامل المصفوفة.

الحـــل:

أولا: نستخدم الأحداثين θ_2 و θ_1 كما مبين بالشكل (8-11).

ويمكن تعريف معامل الكزازة stiffness coefficients k_{11} بأنه العزم المطلوب ليعطي للقرص الأول لعمل وحده دوانية (a unit rotation) بينما k_{21} هو العزم المطلوب للقرص الثاني لكي يحافظ عليه من الدوران أي لايحدث للقرص الثاني دوران وعند ذلك يكون $\theta_2 = 0$ و $\theta_1 = 0$ وبذلك يكون $k_{21} = -1$ و $k_{11} = k$.

وعندما يكون $\theta_1 = 0$ ، $\theta_2 = 1$ فإن $k_{22} = 2k$ و $k_{12} = -k$

وبتكوين مصفوفة الجساءة (الكزازة) the stiffness matrix

$$\therefore \text{ the stiffness matrix= k=} \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

وتكون مصفوفة الكتلة هي:

$$\text{M= the mass matrix } = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

وبوضع المحدد $|D|$ لمعاملات المصفوفة ومساويتها بالصفر كما يلي:

$$\therefore |D| = \begin{vmatrix} \frac{k}{I} - \lambda & -\frac{k}{I} \\ -\frac{k}{I} & \frac{2k}{I} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

وبفك المحدد نحصل على معادلة التردد

$$\left(\frac{k}{I} - \lambda\right)\left(\frac{2k}{I} - \lambda\right) - \left(\frac{k}{I}\right)^2 = 0$$

$$\therefore \lambda^2 - \frac{3k}{I}\lambda + \left(\frac{k}{I}\right)^2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

ويكون جذور معادلة التردد هما الترددين الطبيعيين (the eigenvalues) لمعادلة الحركة أو للقرصين.

ونظرا لان معادلة التردد يكون فيها ω^4 ، ω^2 فأننا نضع $\lambda = \omega^2$ حتى تتحول إلى معادلة متجانسة من الدرجة الثانية حتى يمكن إيجاد جذورها بالقانون العام كماسبق شرحه بالأمثلة السابقة.

$$\left.\begin{aligned} \therefore \lambda_1 = \omega_1^2 &= \frac{k}{I}\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right] \\ \lambda_2 = \omega_2^2 &= \frac{k}{I}\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right] \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

- يمكن حساب ثابت اللي للياي the torsional spring constant

$$\therefore k = \frac{GJ}{L} = \frac{12(10)^6}{24}\left[\frac{\pi(1.25)^4}{32}\right] = 120(10)^3 \, lb.in/rad$$

$$\frac{k}{I} = \frac{120(10)^3}{12} = 10(10)^3 s^{-2}$$

بالتعويض عن قيمة $\frac{k}{I}$ في المعادلات (5)

$$\therefore \lambda_1 = \omega_1^2 = 3.82(10)^3$$
$$\lambda_2 = \omega_2^2 = 26.18(10)^3 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

ويمكن إيجاد التردد الطبيعي بالهرتز (Hz) كما يلي:

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{\sqrt{3.82(10)^3}}{2\pi} = 9.84Hz \\ f_2 &= \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{\sqrt{26.18(10)^3}}{2\pi} = 25.75Hz \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

<u>ثالثا</u>:- لإيجاد النسق الطبيعي the eigenvectors (normal mode shapes) فإنه يمكن كتابة المصفوفة التالية:

$$\begin{bmatrix} \frac{k}{I} - \lambda & -\frac{k}{I} \\ -\frac{k}{I} & \frac{2k}{I} - \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

where θ_1, θ_2 are the eigenvector components

$\therefore$ من المعادلات (8) نحصل على:

$$\left(\frac{k}{I} - \lambda\right)\theta_1 - \frac{k}{I}\theta_2 = 0 \qquad , \frac{-k}{I}\theta_1 + \left(\frac{2k}{I} - \lambda\right)\theta_2 = 0 \ldots\ldots\ldots (9)$$

$$\therefore \frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{k/I - \lambda}{k/I} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

بالتعويض عن كل من λ_1, λ_2 وكذلك عن $\frac{k}{I} = 10(10)^3$

$$\left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)_1 = \frac{10(10)^3 - 3.82(10)^3}{10(10)^3} = 0.62 \ldots\ldots (frist \quad mode)$$

$$\left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)_2 = \frac{10(10)^3 - 26.18(10)^3}{10(10)^3} = 11.62 \ldots\ldots (second \quad mode)$$

بالرغم من وجود عدد لانهائى من القيم θ1,θ2 فتكون هاتين النسبتين كافيتين.

وبالتعويض عن $\theta_1 = 1$ فإننا نحصل على

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ (0.62) \end{Bmatrix}$$

Eigenvector for first mode

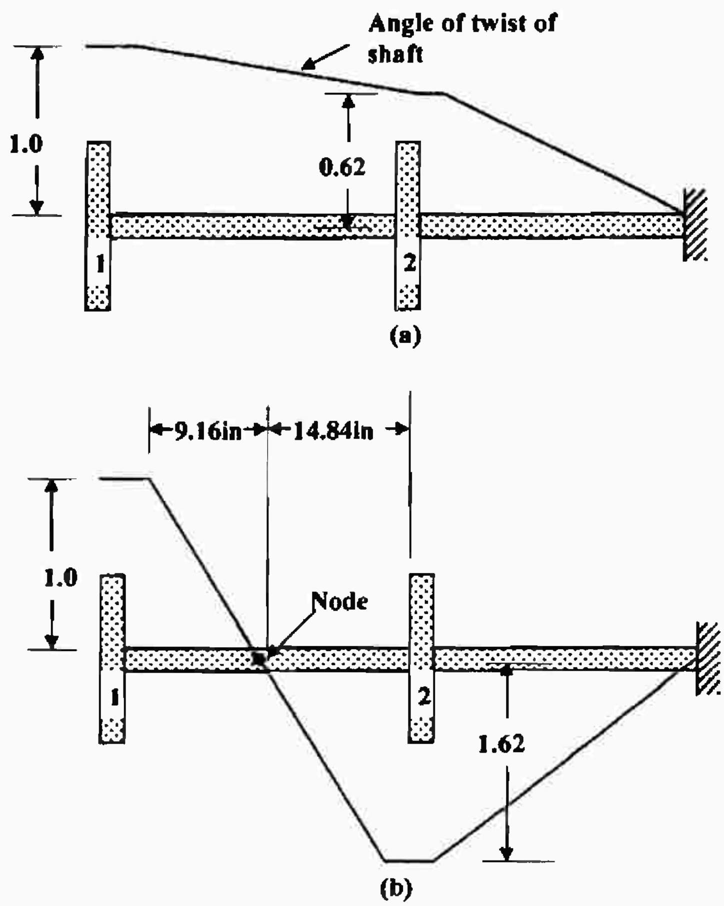
$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1.62 \end{Bmatrix}$$

Eigenvector for second mode

وعندما $f_1 = 9.84Hz$ فإن عند هذه اللحظة يكون $\theta_2 = 0.620\theta_1$ وأن النسق الأول يصف الأهـتزاز الحر الغير مخمد المبين في الشكل (12-8) في تناسق أو شكل المنظومة. فعندما تهتز المنظومة عند تردد f_1 حيث أن: $f_1 = 9.84Hz$

فإن $\theta_2 = 0.620\theta_1$ وعند أي لحظة في هذه الفترة ولهذا تكون النسبة موجبة والقرصين يهتزوا في مسار مع كل للأخر. والنسق الثاني يصف شكل وترتيب المنظومة المهتزة والغير مخمدة وأنه عندمـا تـهتز المنظومة عند التردد الثاني $f_2 = 25.75Hz$ مع دوران القرص $180°$ خارج المسار لكل منـهم فـإن النسبة تكون سالبة.

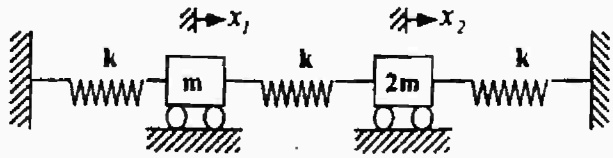
أي أن $\theta_2 = -0.620\theta_1$ وشكل اللي للقضيب (أشكال النسق) يظهر في الشكل (12-8) ونلاحظ أنه فـي حالة النسق الثاني فأن الأزاحة الزاوية للقرصين تساوي صفر عند العقدة.



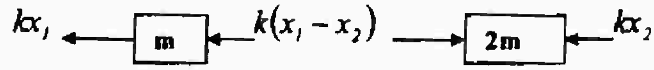
الشكل (12-8) ترتيب وشكل النسق الأول والثاني

10- المنظومة المبينة بالشكل (13-8) أوجد معادلتي الحركة وأكتبها في الصورة المصفوفيـة وأوجـد المعادلة المميزة (معادلة التردد) والتردد الطبيعي لكل كتلة وأوجد كذلك المتجه الذاتـي الأول والثـاني وأرسم رسماً تخطيطياً ليوضح موقع العقدتين الأعتياديتين.

الحـــــل:



الشكل (8-13)



القوى المؤثرة على الكتلة m

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 - k(x_1 - x_2)$$

$$\therefore m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0 \quad \text{.......................................(1)}$$

القوى المؤثرة على الكتلة 2m

$$2mx_2 = k(x_1 - x_2) - kx_2$$

$$\therefore 2mx_2 - kx_1 + 2kx_2 = 0 \quad \text{.......................................(2)}$$

ويمكن وضع المعادلتين (1) ، (2) في الصورة المصفوفية كما يلي:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{..............................(3)}$$

وبفرض أن الحركة دورية وتتكون من حركات توافقية ذات سعات وترددات مختلفة ولهذا نفـــرض أن أحدى المركبات على الصورة التالية:

$$x_1 = A\sin(\omega t + \phi) \qquad , \qquad x_2 = B\sin(\omega t + \phi)$$

حيث A, B, ϕ ثوابت أختيارية ، ω هي أحد الترددات الطبيعية للنظام

$$\dot{x}_1 = \omega A\cos(\omega t + \phi) \qquad \dot{x}_2 = \omega B\cos(\omega t + \phi)$$

$$\ddot{x}_1 = -\omega^2 A\sin(\omega t + \phi) \qquad \ddot{x}_2 = -\omega^2 B\sin(\omega t + \phi)$$

وبالتعويض في المعادلتين (1) ، (2) من هذه العلاقات نحصل على:

$$\therefore (-m\omega^2 + 2k)A - kB = 0 \quad \text{.......................................(4)}$$

وبالتعويض في المعادلة (2) نحصل على:

$$(-2m\omega^2 + 2k)B - kA = 0 \quad \text{.......................................(5)}$$

وبوضع المعادلتين 4 ، 5 في صورة المحدد ونساويه بالصفر كما يلي:

$$\begin{vmatrix} -(m\omega^2 + 2k) & -k \\ -k & (-2m\omega^2 + 2k) \end{vmatrix} = 0 \quad \text{....................................(6)}$$

وبفك المحدد (6) نحصل على معادلة التردد التالية:

$$(-m\omega^2 + 2k)(-2m\omega^2 + 2k) - k^2 = 0$$

و المعادلة المميزة أو معادلة التردد تكون على الصورة:

$$\lambda^2 - 3\frac{k}{m}\lambda + \frac{3}{2}\left(\frac{k}{m}\right)^2 = 0 \quad \text{.......................................(7)}$$

وذلك بعد التعويض عن $\omega^2 = \lambda$

وبأيجاد جذور معادلة التردد (7) يمكن أيجاد التردد الطبيعي للكتلتين وذلك بأستخدام المعادلـــة العامـــة للجذور وهي تسمى أيضاً بالمتجهات الذاتية

$$\therefore \lambda_1 = \omega_1^2 = 0.634\frac{k}{m} \quad , \qquad \therefore \omega_1 = \sqrt{0.634k/m}$$

$$\lambda_2 = \omega_2^2 = 2.366\frac{k}{m} \quad , \qquad \therefore \omega_2 = \sqrt{2.366k/m}$$

وبالضرب مسبقاً بواسطة مقلوب مصفوفة الكتلة:

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2m} \end{bmatrix} \quad \text{...(8)}$$

وبذلك تصبح معادلتي الحركة التي في الصورة المصفوفية (3) على الصورة التالية:

$$\begin{bmatrix} \left(2\frac{k}{m} - \lambda\right) & -\frac{k}{m} \\ -\frac{1}{2}\cdot\frac{k}{m} & \left(\frac{k}{m} - \lambda\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = 0 \quad \text{..(9)}$$

ويمكن إيجاد المتجهات الذاتية من المعادلة (9) بالتعويض عن قيم λ وبذلك سنوضح أستخدام المصفوفة المرافقة في تقدير قيمتها.

$\therefore$ المصفوفة المرافقة من المعادلة (9) هي

$$adj[A - \lambda_i I] = \begin{bmatrix} \left(\frac{k}{m} - \lambda_i\right) & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{2m} & \left(\frac{2k}{m} - \lambda_i\right) \end{bmatrix} \quad \text{....................................(10)}$$

وبالتعويض عن $\lambda_1 = 0.634$ نحصل من المعادلة (10) نحصل على المتجه الذاتي الأول من أي عمـــود في المعادلة (10)

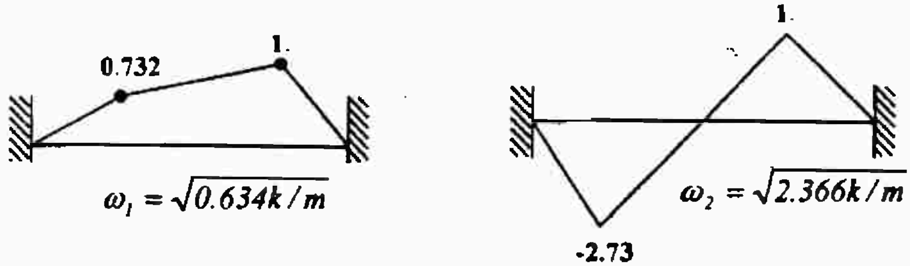
$$\therefore \begin{bmatrix} 0.366 & 1.000 \\ 0.500 & 1.366 \end{bmatrix} \frac{k}{m}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 0.723 & 0.732 \\ 1.000 & 1.000 \end{bmatrix} \quad \textbf{or} \quad x_1 = \begin{Bmatrix} 0.732 \\ 1.000 \end{Bmatrix}$$

بالمثل عندما نستخدم $\lambda_2 = 2.366$ نحصل علىالمتجه الذاتي الثاني من أي عمود في المعادلة(10)وليكن:

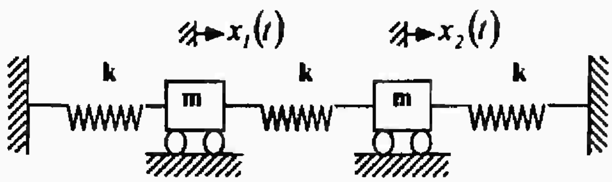
$$x_2 = \begin{Bmatrix} -2.73 \\ 1.00 \end{Bmatrix}$$

والشكل (14-8) التالي يبين العقدتين الأعتياديتين.

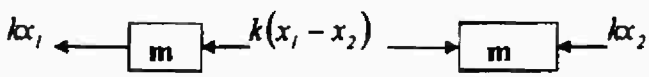


الشكل (8-14)

11 - المنظومة المبينة بالشكل (8-15) أوجد معادلات الحركة وأحسب كم من Eigenvlaues ، Eigenvectors وأحسب x(t) لكل كتلة.



الشكل (8-15)



$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 - k(x_1 - x_2)$$

$$\therefore m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0 \quad \text{.......(1)}$$

$$m\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) - kx_2$$

$$\therefore m\ddot{x}_2 - kx_1 + 2kx_2 = 0 \quad \text{.......(2)}$$

ويمكن كتابة معادلتي الحركة على الصورة المصفوفية كما يلي:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{.......(3)}$$

وبفرض أن الحركة دورية وتتكون من العديد من حركات توافقية ذات سعات وترددات مختلفة ولهذا نفرض أن أحدى المركبات على الصورة التالية:

$$x_1 = A_1 e^{i\omega t} \qquad x_2 = A_2 e^{i\omega t}$$

$$\therefore \dot{x}_1 = i\omega A_1 e^{i\omega t} \qquad \dot{x}_2 = i\omega A_2 e^{i\omega t}$$

$$\ddot{x}_1 = -\omega^2 A_1 e^{i\omega t} \qquad \ddot{x}_2 = -\omega^2 A_2 e^{i\omega t}$$

ويمكن كتابة المعادلة (3) على الصورة التالية:

$$[m][\ddot{x}] + [k][x] = [0]$$

$$\therefore [m][-\omega^2 x] + [k][x] = [0]$$

$$-\omega^2[m][x] + [k][x] = [0]$$

$$[-\omega^2 m][x] + [k][x] = [0]$$

$$\therefore \left[k-\omega^2 m\right]\left[A\right]e^{i\omega t}=\left[0\right]$$

وحيث أن $e^{i\omega t}\neq 0$

$$\therefore \begin{bmatrix} 2k-\omega^2 m & -k \\ -k & 2k-\omega^2 m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \left(2k-\omega^2 m\right)^2-k^2=0$$

$$\omega_1^2=\frac{k}{m} \qquad , \qquad \omega_2=\frac{3k}{m}$$

وحيث أن محددة المصفوفة =0

$$\therefore \begin{bmatrix} 2k-\omega^2 m & -k \\ -k & 2k-\omega^2 m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وبالتعويض

$$\therefore \begin{bmatrix} 2k-k & -k \\ -k & 2k-k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

أذا وضعنا $A_2=1$

$$\therefore k\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A_1-A_2=0 \qquad \therefore A_1=A_2$$

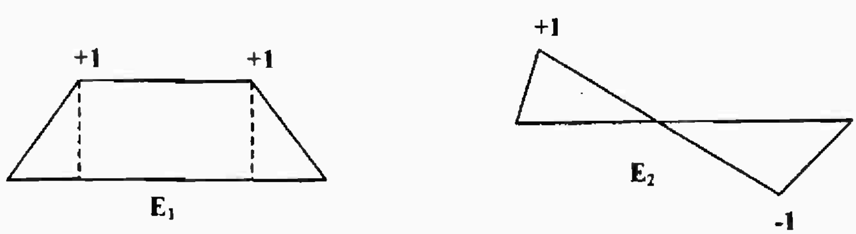
وبالتعويض عن $A_2=1$

$$\therefore \begin{bmatrix} 2k-3k & -k \\ -k & 2k-3k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore k\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A_1+A_2=0 \qquad A_1=-1$$

$$E_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad , \qquad E_2=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$



الشكل(8-16)

$$[\hat{P}] = \left[\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}_{k_1} \quad \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}_{k_2}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[\hat{P}]^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore [\hat{P}][m][\hat{P}]^T[\ddot{x}] + [\hat{P}][k][\hat{P}][x] = [0]$$

$$[\hat{P}][m][\hat{P}]^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix}$$

$$[\hat{P}][k][\hat{P}]^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2k & 0 \\ 0 & 6k \end{bmatrix}$$

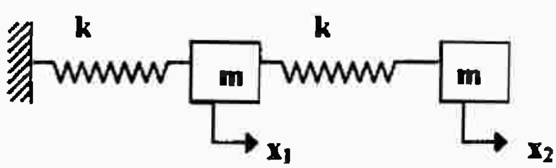
$$\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & 0 \\ 0 & 6k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وبالتالي يمكن فصل كل متغير على حدة

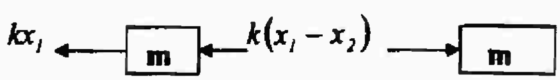
$$2m\ddot{x}_1 + 2kx_1 = 0$$
$$2m\ddot{x}_2 + 6kx_2 = 0$$

وبالتالي يمكن حل معادلة على حدة على إنها ذات درجة حرية واحدة.

12- في المنظومة المبينة بالشكل (8-17) أوجد جميع المطالب بالمثال السابق.



الشكل (8-17)



يمكن أستنتاج معادلة الحركة كما يلي:

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 - k(x_1 - x_2)$$
$$m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0 \text{ ....(1)}$$
$$m\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2)$$
$$\therefore m\ddot{x}_2 - kx_1 + kx_2 = 0 \text{ ....(2)}$$

ويمكن وضعهم في الصورة المصفوفية كما يلي:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ....(3)}$$

$$x_1 = A_1 e^{i\omega t} \quad , \quad x_2 = A_2 e^{i\omega t}$$

$$\ddot{x}_1 = -\omega^2 x_1 \qquad , \qquad \ddot{x}_2 = -\omega^2 x_2$$

نعوض بقيم x_2 ، x_1 في المعادلة التالية:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\omega^2 & x_1 \\ -\omega^2 & x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-\omega^2\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} -\omega^2 m & 0 \\ 0 & -\omega^2 m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & k \\ -k & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وبالتعويض بقيمة x_2, x_1

$$\begin{bmatrix} 2k-\omega^2 m & -k \\ -k & k-\omega^2 m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

بالتعويض عن قيمة x_2, x_1

$$\therefore x_1 = A_1 e^{i\omega t} \qquad , \qquad \therefore x_2 = A_2 e^{i\omega t}$$

$$\begin{bmatrix} 2k-\omega^2 m & -k \\ -k & 2k-\omega^2 m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 e^{i\omega t} \\ A_2 e^{i\omega t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

حيث $e^{i\omega t} \neq 0$

$$\begin{bmatrix} 2k-\omega^2 m & -k \\ -k & k-\omega^2 m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} e^{i\omega t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 2k-\omega^2 m & -k \\ -k & k-\omega^2 m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(2k-\omega^2 m)(k-\omega^2 m) - k^2 = 0$$

$$\therefore 2k^2 - 2k\omega^2 m - k\omega^2 m + \omega^4 m^2 - k^2 = 0$$

$$m^2\omega^4 - 3km\omega^2 + k^2 = 0$$

وباعتبار أن هذه المعادلة على الصورة $Ax^2 + bx + c = 0$

$\therefore$ يمكن إيجاد جذورها من القانون العام

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4AC}}{2A}$$

$$A = m^2 \quad , \quad b = -3km \quad , \quad c = k^2$$

$$\therefore \omega_{1-2}^2 = \frac{+km \pm \sqrt{(-3km)^2 - 4m^2k^2}}{2m^2}$$

$$\omega_{1-2}^2 = \frac{3km}{2m^2} \pm \sqrt{\frac{9k^2m^2}{4m^2} - \frac{4m^2k^2}{4m^4}}$$

$$\therefore \omega_{1-2}^2 = \frac{3k}{2m} \pm \sqrt{\frac{5k^2m^2}{4m^4}}$$

$$\therefore \omega_{1-2} = \frac{3k}{2m} \pm \sqrt{\frac{5k^2}{4m^2}}$$

$$\therefore \omega_{1-2}^2 = \frac{3k}{2m} \pm \frac{k}{2m}\sqrt{5} \qquad , \qquad \therefore \omega_{1-2} = \frac{3k}{2m} \pm \frac{2.236}{2m}k$$

$$\left.\begin{aligned} \therefore \omega_1^2 &= 2.62\frac{k}{m} \\ \omega_2^2 &= 0.382\frac{k}{m} \end{aligned}\right\} Eigenvlaues$$

∴نعوض بقيمة ω_{1-2} في المعادلة

$$\begin{bmatrix} +2k-2.62k & -k \\ -k & k-2.62k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

بأخذ k مشترك

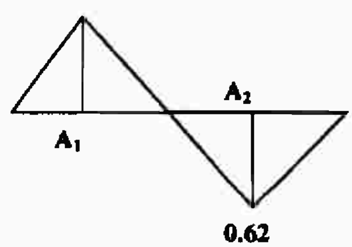
$$\therefore k\begin{bmatrix} -0.62 & -1 \\ -1 & -1.62 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

بفرض أن $A_1 = 1$

$$\therefore \begin{bmatrix} -0.62 & -1 \\ -1 & -1.62 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore -0.62 - A_2 = 0 \qquad A_2 = -0.62$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.62 \end{bmatrix}$$



(a)

بالتعويض في المعادلة (1) عن $\omega_{1,2}$

$$\begin{bmatrix} 2k-0.38k & -k \\ -k & k-0.38k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

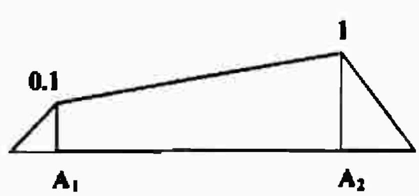
وبفرض أن $A_2 = 1$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1.62 & -1 \\ -1 & 0.62 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

∴بالقسمة على k

$$-A_1 + 0.62 = 0 \qquad \therefore A_1 = 0.62$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 0.62 \\ 1 \end{bmatrix}$$



(b)

الشكل (8-18 a,b)

$$P=\begin{bmatrix}1 & 0.62\\-0.62 & 1\end{bmatrix}[P]^T=\begin{bmatrix}1 & -0.62\\0.62 & 1\end{bmatrix}$$

$$[P][m][P]^T=\begin{bmatrix}1 & 0.62\\-0.62 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m & 0\\0 & m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -0.62\\0.62 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0.62\\-0.62 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m & -0.62m\\-0.62m & m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.62m & 0\\0 & 1.38m\end{bmatrix}$$

$$[P][k][P]^T=\begin{bmatrix}1 & 0.62\\-0.62 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2k & -k\\-k & k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -0.6\\0.6 & 1\end{bmatrix}$$

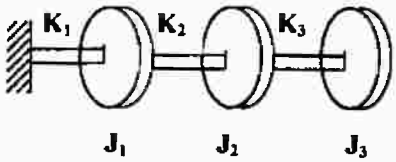
$$=\begin{bmatrix}1 & 0.62\\-0.62 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1.4k & -2.2k\\0.4k & 1.6k\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1.648k & -1.208k\\-0.468 & 2.564k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=0$$

$$\therefore 0.62m\ddot{x}_1+1.648kx_1-0.468kx_2=0$$

$$1.38m\ddot{x}_2-0.468kx_1+2.56kx_2=0$$

تمارين

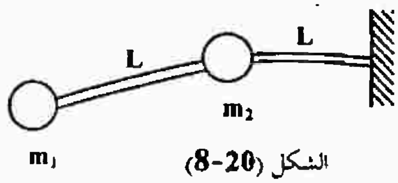


الشكل (8-19)

1- أوجد مصفوفة الجساءة للنظام المبين في الشكل (8-19) وكوّن مصفوفة اللدانه بوساطة مقلوب مصفوفة الجساءة.

2- كوّن مصفوفات الجساءة واللدانة للمسألة 8-9.

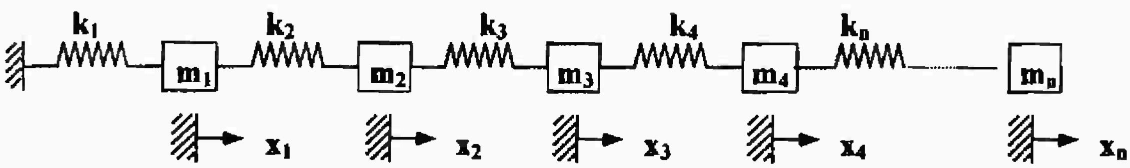
3- عتبة منتظمة مرتكزة على مساند بسيطة بطول L محملة بأوزان عند المواقع 0.25P و 0.6L. أوجد معاملات تأثير اللدانة لهذه المواقع.



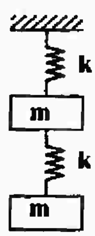
الشكل (8-20)

4- أوجد مصفوفة اللدانة لعتبة كابولية مبينة بالشكل (8-20) وأحسب مصفوفة الجساءة من مقلوب مصفوفة اللدانة.

5- تأمل نظام بـ n من النوابض بالتسلسل كما موضح في الشكل (8-21) وبين أن مصفوفة الجساءة هي مصفوفة شريطية على طول القطر.



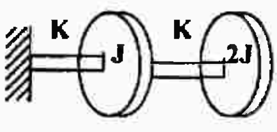
الشكل (8-21)



الشكل (8-22)

6- أوجد مصفوفة اللدانة للنظام في المسألة 5.

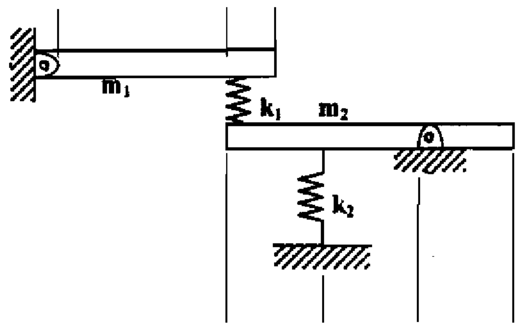
7- بأستخدام المصفوفة المرافقة، أوجد الأنساق الأعتيادية لنظام الكتلة والنابض المبين في الشكل (8-22).



الشكل (8-23)

8- للنظام في المبين في الشكل (8-23)، أكتب معادلات الحركة بصيغة مصفوفة وحدد الأنساق الأعتيادية من المصفوفة المرافقة.

9- عارضتان منتظمتان مبينتان في الشكل (8-24) ومتساويتان في الطول. ولكن مختلف أوجد معـدلات الحركة والترددات الطبيعية وأشكال النسق بأستعمال طرائق المصفوفات.



الشكل (8-24)

المراجع والمصادر

المراجع العربية:

1- ويليام د.ستيو، شوم، نظريات ومسائل فى الاهتزازات الميكانيكية، الدار الدولية للنشر والتوزيع، القاهرة - مصر 1994.

2- د. محمد قيصرون ميرزا - د. حسن غانم، الاهتزازات والأمواج وتحليل فوريه، دار الأمل للنشر والتوزيع، أربد، الأردن 1999.

3- ج حنا، ر.س ستيفر، ترجمة د. أحمد محمد حسين، أ.د صلاح الدين محمد المهدى، النظريات الأساسية فى ميكانيكا الآلات.

المراجع الأجنبية:

1- Daniel J.Inman, Engineering Vibration, Prentice Hall International Educations, 1996.

2- Franciss Tse, Iran E. Morse Rolland T. Hinkle Mechanical vibrations, CBS publishers and Distributors, 1983.

3- Robert F. steidel, Jr, An Introduction to mechanical vibrations. John Wiley & sins 1989.

4- M.L. JAMS, G.M. SMITH, J.C. Wol Ford, P.W.Whaley, vibration of Mechanical and structural Systems with microcompute Applications, Harper coolins college publishbers, 1994.

5- C. F. Beards, structural vibration, Analysis and damping, 1996.

6- Dr. Eng. R. R. Basily, vibration and waves for engineering students, Darel-Dakeem prees, Cairo.

7- Thomas Bevan, The theory of machines, Longmans, Green and Co.LTD of Paternoster Row, 1945.

8- R.S. Khuml, J.K. Gupta, Theory of machines, Eurasia Publishing House (P) LTD. 1976.

9- P.L. Ballaney, Theory of Machines, Khanna Publishers, 1979.