اولا التفاضل وحساب المثلثات

(١) التفاضل

النهايات

- نهاية دالة عند نقطة
- نهاية الدالة عند اللانهاية
- نهاية الدوال المثلثية

الاشتقاق

- دالة التغير
- المشتقة الاولى للدالة
- المعنى الهندسي للمشتقة الاولى(ميل المماس للمنحنى)
- مشتقة حاصل ضرب دالتين
- مشتقة خارج قسمة دالتين
- مشتقة دالة الدالة
- مشتقة الدوال المثلثية

النهايات

مقدمة:

لمفهوم النهايات أهمية أساسية للرياضيات حيث تعتبر متطلبا رئيسيا لعدة موضوعات فيه ،من ذلك موضوعي التفاضل والتكامل حيث أن النهايات تشكل البداية والوسيلة في دراسة هذين الفرعين. وقبل ان نبدأ في معنى النهايات وطرق حسابها لابد أن نتعرف على بعض الأساسيات المختصة بهذا الموضوع:

إذا كان أ عددا حقيقيا موجبا فان قسمة هذا العدد على الصفر تعطي كمية كبيرة جدا لا حد لها هي (+∞) أي ان:

$$\frac{أ}{صفر} = +\infty \qquad \frac{-أ}{صفر} = -\infty$$

$$\frac{أ}{\infty} = صفر \qquad \frac{صفر}{أ} = صفر$$

$$\frac{\pm\infty}{أ} = \infty \qquad (أ)^{صفر} = ١$$

$$(١)^{\infty} = \infty$$

$$\left(\frac{أ}{ب}\right)^{\infty} = \infty \text{ اذا كانت } أ > ب \qquad \left(\frac{أ}{ب}\right)^{\infty} = صفر \text{ اذا كانت } ب > أ$$

هناك قيم أخرى غير معينة وهي $\frac{صفر}{صفر}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$.

فالكسر $\frac{س-٢}{س-٢}$ يكون غير معرف (غير معين) اذا كانت س=٢ أي انه لا يمكن اختصاره

اذا كانت س=٢ فنقول ان $\frac{س-٢}{س-٢} = ١$ بشرط ان س $\neq$ ٢

معنى النهاية

لفهم النهاية سوف ندرس المثال التالي:

مثال (١):

ارسم الشكل البياني للدالة $د = \{(س ، ص) : ص = \frac{س^٢ - ٩}{س - ٣}\}$ ؟

الحل

نلاحظ ان نطاق الدالة هو فئة الاعداد الحقيقية ما عدا س=٣ ، وقد سبق رسم الشكل البياني لهذه الدالة وهو عبارة عن خط مستقيم محذوفا منه نقطة واحدة عندما س=٣.

عندما س=٣ فإن $\frac{٣^٢ - ٩}{٣ - ٣} = \frac{٩ - ٩}{٣ - ٣}$

ص= $\frac{صفر}{صفر}$ وهذا كسر غير معروف.

∴ المشكلة التي نبحثها هنا اذا كان من المستحيل ايجاد قيمة ص عندما س=٣ فما هي اقرب قيمة تاخذها ص عندما تكون س قريبة جدا من العدد ٣ ؟

- نكون جدولين : نحسب قيمة ص لبعض قيم س التي تقترب من العدد ٣ سواء من يمين او من يسار العدد.

س تقترب من ٣ من اليمين

س	ص
٣,٥	٦,٥
٣,١	٦,١
٣,٠١	٦,٠١
٣,٠٠١	٦,٠٠١
٣,٠٠٠١	٦,٠٠٠١
↓	↓
٣	٦

س تقترب من ٣ من اليسار

س	ص
٢,٥	٥,٥
٢,٩	٥,٩
٢,٩٩	٥,٩٩
٢,٩٩٩	٥,٩٩٩
٢,٩٩٩٩	٥,٩٩٩٩
↓	↓
٣	٦

من الجدولين نرى ان ص تقترب من العدد ٦ كلما اقتربت س من العدد ٣ ، وهذا يتضح من الشكل البياني للدالة إذ نرى انه كلما اقترب الاحداثي السيني من القيمة ٣ اقترب الاحداثي الصادي من القيمة ٦ سواء كان الاقتراب من اليمين او من اليسار .

∴ العدد ٦ هو اقرب قيمة تاخذها الدالة ص عندما تكون س اقرب ما يمكن للعدد ٣ أي ان العدد ٦ يسمى نهاية الدالة ص= د(س) عندما س تقترب من العدد ٣ ويعبر عنه رمزيا :

$\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـــا}}$ ص = ٦ وتقرا نهاية الدالة ص عندما س تقترب من ٣ = ٦ .

او $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٢}-٩}{\text{س}-٣} = ٦$

النظريات والقواعد الاساسيه في النهايات

(١) $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـــا}}$ [د(س) + ر(س)] = $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـــا}}$ د(س) + $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـــا}}$ ر(س) .

(٢) $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـــا}}$ ك د(س) = ك $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـــا}}$ د(س) حيث ك ثابت . .

(٣) $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـــا}}$ [د(س) × ر(س)] = $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـــا}}$ د(س) × $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـــا}}$ ر(س) .

(٤) $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـــا}}$ [د(س) ÷ ر(س)] = $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـــا}}$ د(س) ÷ $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـــا}}$ ر(س) .

وهذه الخواص صحيحة ايضا عندما س ← ∞ .

قد تكون د(أ) معرفة ، $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـــا}}$ د(س) معرفة ولكن د(أ) ≠ $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـــا}}$ د(س)

∴ تكون الدالة غير متصلة عند س= أ ولكنها معرفة عند س= أ.

طرق حساب النهايات:

اولا: اذا كانت س تقترب من عدد حقيقي محدود (س ← أ) .

١- اذا كانت الدالة المراد ايجاد نهايتها دالة حدودية وكان أ عدد حقيقي فان

$\lim_{س \to أ} د(س) = د(أ)$.

امثلة :

(١) $\lim_{س \to ١} س^٢ + ٢س + ٣ = (١)^٢ + ٢(١) + ٣ = ١ + ٢ + ٣ = ٦$

(٢) $\lim_{س \to ٠} س^٣ - ١ = (٠)^٣ - ١ = -١$

(٣) $\lim_{س \to \frac{١}{٢}} ٢س + ٧ = ٢ \frac{١}{٢} + ٧ = ١ + ٧ = ٨$

(٤) $\lim_{س \to -٢} (س) = -٢$

(٥) $\lim_{س \to ٠} (٣) = ٣$

(٦) $\lim_{س \to ١} (س^٧ + س^٣ + ١) = (١)^٧ + (١)^٣ + ١ = ٣$

٢- اذا كانت الدالة المراد ايجاد نهايتها مكونة من بسط ومقام وكانت س ← أ فاننا نعوض تعويضا مباشرا في الدالة د(أ) فاذا كانت :

أ- د(أ)= كمية حقيقية فان $\lim_{س \to أ} د(س) = د(أ)$

ب- د(أ) = $\frac{\text{عدد حقيقي}}{٠} = \infty$ (النهاية ليس لها وجود).

ج - د(أ) = $\frac{٠}{٠}$ (فإننا نلجأ إلى عدة طرق للتخلص من القيمة المسببة للصفر وهي) :

١- تحليل البسط والمقام إن أمكن ثم الاختصار .

٢- بالضرب في مرافق المقام أو البسط إذا كانت الدالة تحتوي على جذور للمتغير .

٣- استخدام طريقة القسمة المطولة إذا صعب التحليل .

٤- استخدام قاعدة معينة في النهايات إذا لم نتمكن من الحل بالطرق السابقة .

وسوف نتناول كل الملاحظات السابقة بالتفصيل من خلال الأمثلة الآتية:

أمثلة:

اوجد النهايات الآتية إن أمكن:

١) $\lim\limits_{س \leftarrow ١} \frac{س^٢ + ١}{س - ٣}$

بالتعويض المباشر $د(س) = \frac{س^٢ + ١}{س - ٣}$

$د(١) = \frac{١^٢ + ١}{١ - ٣} = \frac{٢}{-٢} = -١$ (عدد حقيقي) .

$\therefore \lim\limits_{س \leftarrow ١} \frac{س^٢ + ١}{س - ٣} = -١$

٢) $\lim\limits_{س \leftarrow ٣} \frac{س^٢ + ١}{س - ٣}$

بالتعويض المباشر $د(٣) = \frac{٣^٢ + ١}{٣ - ٣} = \frac{١٠}{٠} = \infty$

$\therefore$ النهاية ليس لها وجود [غير معرفة] .

أمثلة على التحليل:

٣) $\lim\limits_{س \leftarrow ٣} \frac{س^٢ - ٩}{س - ٣}$ بالتعويض المباشر $د(٣) = \frac{٣^٢ + ١}{٣ - ٣} = \frac{٠}{٠}$

نلاحظ ان البسط هو فرق مربعين $\therefore$ يمكن تحليله .

$$\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٢}-٩}{\text{س}-٣} = \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \frac{(\text{س}-٣)(\text{س}+٣)}{\text{س}-٣}$$ نختصر ثم نعوض

$$= \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}}\ \text{س}+٣ = ٣+٣ =$$

$$\therefore \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٢}-٩}{\text{س}-٣} = ٦ \ .$$

٤) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٢}-٣\text{س}}{\text{س}}$ بالتعويض المباشر $\text{د}(٠) = \frac{٠-٠}{٠} = \frac{٠}{٠}$

نلاحظ انه يمكن اخراج عامل مشترك من البسط وهو س .

$$\therefore \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٢}-٣\text{س}}{\text{س}} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{س}(\text{س}-٣)}{\text{س}} = ٠-٣ = -٣$$

$$\therefore \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٢}-٣\text{س}}{\text{س}} = -٣$$

٥) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{٢\text{س}^{٣}-\text{س}^{٢}}{\text{س}}$ $\Leftarrow$ بالتعويض المباشر $\text{د}(٠) = \frac{٠}{٠}$

بأخذ عامل مختصر من البسط وهو $\text{س}^{٢}$.

$$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٢}(٢\text{س}-١)}{\text{س}} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \text{س}(٢\text{س}-١) = ٠(٢(٠)-١) = \text{صفر}.$$

$$\therefore \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{٢\text{س}^{٣}-\text{س}^{٢}}{\text{س}} = \text{صفر}$$

٦) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{٣\text{س}^{٢}-\text{س}}{\text{س}^{٣}-٢\text{س}^{٢}}$ $\Leftarrow$ بالتعويض المباشر $\text{د}(٠) = \frac{٠}{٠}$

يمكن إخراج عامل مشترك من البسط والمقام .

$$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{س}(٣\text{س}-١)}{\text{س}^{٢}(\text{س}-٢)} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{٣\text{س}-١}{\text{س}(\text{س}-٢)} = \frac{٣(٠)-١}{٠(٠-٢)} = \frac{٢}{٠} = \infty$$

النهاية ليس لها وجود .

٧) $\underset{س \to -١}{\text{نها}} \dfrac{س^٢-س-٢}{س^٢+٤س+٣}$. بالتعويض المباشر :

$د(-١) = \dfrac{-١^٢-١-٢}{-١^٢+٤-١+٣} = \dfrac{١+١-٢}{١-٤+٣} = \dfrac{٠}{٠}$ (نلجأ للتحليل) .

نلاحظ أن البسط والمقام مقادير ثلاثية يمكن تحليلها حيث :

$س^٢ - س - ٢ = (س-٢)(س+١)$.

$س^٢ + ٤س + ٣ = (س+٣)(س+١)$.

$\therefore \underset{س \to -١}{\text{نها}} \dfrac{س^٢-س-٢}{س^٢+٤س+٣} = \underset{س \to -١}{\text{نها}} \dfrac{(س-٢)(س+١)}{(س+٣)(س+١)} = \underset{س \to -١}{\text{نها}} \dfrac{س-٢}{س+٣} = \dfrac{-١-٢}{-١+٣} = \dfrac{-٣}{٢}$

$\therefore \underset{س \to -١}{\text{نها}} \dfrac{س^٢-س-٢}{س^٢+٤س+٣} = \dfrac{-٣}{٢}$

٨) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{س^٣-٨}{س^٢-٤}$ $\Leftarrow$ بالتعويض المباشر : $د(٢) = \dfrac{٢^٣-٨}{٢^٢-٤} = \dfrac{٠}{٠}$

نلاحظ أن البسط عبارة عن فرق بين مكعبين أي يمكن تحليله :

$س^٣-٨=(س-٢)(س^٢+٢س+٤)$

والمقام هو فرق بين مربعين $س^٢-٤ = (س-٢)(س+٢)$

$\therefore \underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{س^٣-٨}{س^٢-٤} = \underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{(س-٢)(س^٢+٢س+٤)}{(س-٢)(س+٢)} = \underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{س^٢+٢س+٤}{س+٢}$

$= \dfrac{٢^٢+٢\times٢+٤}{٢+٢} = \dfrac{٤+٤+٤}{٤} = ٣$

٩) $\underset{س \to -٢}{\text{نها}} \dfrac{س^٣+٨}{س+٢}$ $\Leftarrow$ بالتعويض المباشر : $د(-٢) = \dfrac{-٢^٣+٨}{-٢+٢} = \dfrac{٠}{٠}$

نلجأ إلى تحليل البسط

$\underset{س \to -٢}{\text{نها}} \dfrac{(س-٢)(س^٢+٢س+٤)}{(س+٢)}$ ثم الاختصار

$= \underset{س \to -٢}{\text{نها}} س^٢ - ٢س + ٤ = (-٢)^٢-٢(-٢) + ٤ = ٤+٤+٤ = ١٢$

$$\therefore \lim_{س \to ٢} \frac{س^٣+٨}{س+٢} = ١٢$$

١٠) $\lim_{س \to ٢ك} \frac{س^٢+ك س - ٦ك^٢}{٢س - ٤ك}$ ⇐ بالتعويض المباشر : د(٢ك)=

$$\frac{٤ك^٢+ك(٢ك)-٦ك^٢}{٢ ٢ك - ٤ك} = \frac{٠}{٠}$$

نلجأ إلى تحليل البسط حيث هو عبارة عن مقدار ثلاثي:

$س^٢ + ك س - ٦ك^٢ = (س-٢ك) (س+٣ك)$

$$\therefore \lim_{س \to ٢ك} \frac{س^٢+ك س - ٦ك^٢}{٢س - ٤ك} = \lim_{س \to ٢ك} \frac{(س-٢ك)(س+٣ك)}{٢(س-٢ك)} = \lim_{س \to ٢ك} \frac{س+٣ك}{٢} = \frac{٥ك}{٢}$$

$$\therefore \lim_{س \to ٢ك} \frac{س^٢+ك س - ٦ك^٢}{٢س - ٤ك} = \frac{٥ك}{٢}$$

أمثلة على القسمة المطولة :

نستخدم هذه الطريقة عندما يصعب التحليل في البسط او المقام .

مثال : اوجد $\lim_{س \to ٢} \frac{٢س^٣-٣س^٢-٤}{س^٣-٢س-٤}$ ⇐ بالتعويض المباشر

$$= \frac{١٦-١٢-٤}{٨-٤-٤} = \frac{٠}{٠}$$

بالقسمة على (س-٢) بسطا ومقاما

البسط

$$2\text{س}^2+\text{س}+2$$

$$(\text{س}-2)\ \overline{)\,2\text{س}^3-3\text{س}^2\ -4}$$

$\text{س}^3-4\text{س}^2$ بالطرح

$\text{س}^2 \qquad -4$

$\text{س}^2-2\text{س}$ بالطرح

$2\text{س}-4$

$2\text{س}-4$ بالطرح

$\cdot\ \cdot\ \cdot$

المقام

$$\text{س}^2+2\text{س}+2$$

$$(\text{س}-2)\ \overline{)\,\text{س}^3\qquad -2\text{س}-4}$$

$\text{س}^3-2\text{س}^2$ بالطرح

$2\text{س}^2-2\text{س}-4$

$2\text{س}^2-4\text{س}$ بالطرح

$2\text{س}-4$

$2\text{س}-4$ بالطرح

$\cdot\ \cdot\ \cdot$

$$\therefore \text{نها}_{\text{س}\to 2}\ \frac{2\text{س}^3-3\text{س}^2-4}{\text{س}^3-2\text{س}-4} = \text{نها}_{\text{س}\to 2}\ \frac{2\text{س}^2+\text{س}+2}{\text{س}^2+2\text{س}+2} = \frac{8+2+2}{4+4+2} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

مثال :

أوجد $\text{نها}_{\text{س}\to 2}\ \frac{3\text{س}^3-2\text{س}^2-7\text{س}-2}{\text{س}^2-4}$ $\Leftarrow$ بالتعويض المباشر

$$= \frac{24-8-14-2}{4-4} = \frac{0}{0}$$

بالقسمة على العامل الصفري(س−2) وتحليل المقام

$$\begin{array}{r|l} \multicolumn{1}{r}{٣س^٢ + ٤س + ١} & \\ \hline ٣س^٣ - ٢س^٢ - ٧س - ٢ & (س - ٢) \\ ٣س^٣ - ٦س^٢ & \text{بالطرح} \\ \hline ٤س^٢ - ٧س - ٢ & \\ ٤س^٢ - ٨س & \text{بالطرح} \\ \hline س - ٢ & \\ س - ٢ & \text{بالطرح} \\ \hline ٠٠٠ & \end{array}$$

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{(س-٢)\,(٣س^٢+٤س+١)}{(س-٢)\,(س+٢)} = \lim_{س \to ٢} \frac{٣س^٢+٤س+١}{س+٢} = \frac{١٢+٨+١}{٢+٢} = \frac{٢١}{٤}$$

امثلة على الضرب في المرافق للجذر

(١١) $\lim_{س \to ٩} \frac{\sqrt{س}-٣}{س-٩}$ ⇐ بالتعويض المباشر $د(٩) = \frac{\sqrt{٩}-٣}{٩-٩} = \frac{٠}{٠}$

نلاحظ أن هناك جذر للمتغير س ∴ بالضرب في مرافق البسط وهو $\sqrt{س}+٣$.

$$\frac{\sqrt{س}-٣}{(س-٩)} \times \frac{\sqrt{س}+٣}{\sqrt{س}+٣} = \frac{(س-٩)}{(س-٩)(\sqrt{س}+٣)}$$

$$\therefore \lim_{س \to ٩} \frac{\sqrt{س}-٣}{س-٩} = \lim_{س \to ٩} \frac{(س-٩)}{(س-٩)(\sqrt{س}+٣)} =$$

$$\lim_{س \to ٩} \frac{١}{\sqrt{س}+٣} = \frac{١}{\sqrt{٩}+٣} = \frac{١}{٦} \qquad \therefore \lim_{س \to ٩} \frac{\sqrt{س}-٣}{س-٩} = \frac{١}{٦}$$

١٢) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}+\text{أ}}-\sqrt{\text{أ}}}$ ⇐ بالتعويض المباشر د(٠) = $\dfrac{٠}{٠}$ بضرب كلا من البسط والمقام في مرافق المقام وهو $\sqrt{\text{س}+\text{أ}}+\sqrt{\text{أ}}$ حاصل ضرب المقام في مرافقه يساوي (مربع الأول − مربع الثاني) .

$$\therefore \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}+\text{أ}}-\sqrt{\text{أ}}} \times \dfrac{(\sqrt{\text{س}+\text{أ}}+\sqrt{\text{أ}})}{(\sqrt{\text{س}+\text{أ}}+\sqrt{\text{أ}})}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}\,(\sqrt{\text{س}+\text{أ}}+\sqrt{\text{أ}})}{(\text{س}+\text{أ})-(\text{أ})}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}\,(\sqrt{\text{س}+\text{أ}}+\sqrt{\text{أ}})}{\text{س}} = \sqrt{٠+\text{أ}}+\sqrt{\text{أ}} = ٢\sqrt{\text{أ}}$$

$$\therefore \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}+\text{أ}}-\sqrt{\text{أ}}} = ٢\sqrt{\text{أ}}$$

١٣) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{٢+٣\text{س}}-\sqrt{٢}}{\text{س}}$ ⇐ بالتعويض المباشر د(٠) =

$$\dfrac{\sqrt{٢+٠}-\sqrt{٢}}{٠} = \dfrac{٠}{٠}$$

بالضرب في مرافق البسط وهو $\sqrt{٢+٣\text{س}}+\sqrt{٢}$.

$$\therefore \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{٢+٣\text{س}}-\sqrt{٢}}{\text{س}} \times \dfrac{\sqrt{٢+٣\text{س}}+\sqrt{٢}}{\sqrt{٢+٣\text{س}}+\sqrt{٢}}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(٢+٣\text{س})-(٢)}{\text{س}(\sqrt{٢+٣\text{س}}+\sqrt{٢})}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٣\text{س}}{\text{س}(\sqrt{٢+٣\text{س}}+\sqrt{٢})} = \dfrac{٣}{\sqrt{٢+٠}+\sqrt{٢}} = \dfrac{٣}{٢\sqrt{٢}}$$

$$\therefore \lim_{\text{س}\to 0} \frac{\sqrt{2+3\text{س}} - \sqrt{2}}{\text{س}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} \ .$$

١٤) $\lim_{\text{س}\to 1} \sqrt[3]{\text{س}^2 + 2\text{س} + 5}$ ⇐ بالتعويض المباشر د(١) =

$$\sqrt[3]{(1)^2 + 2(1) + 5} = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$\therefore \lim_{\text{س}\to 1} \sqrt[3]{\text{س}^2 + 2\text{س} + 5} = 2 \ .$$

١٥) $\lim_{\text{س}\to 1} \frac{1 - \text{س}}{\sqrt{1 - \text{س}^2}}$ ⇐ بالتعويض المباشر د(١) = $\frac{0}{0}$

بضرب البسط والمقام في $\sqrt{1 - \text{س}^2}$ للتخلص من الجذر في المقام .

$$\therefore \lim_{\text{س}\to 1} \frac{1 - \text{س}}{\sqrt{1 - \text{س}^2}} \times \frac{\sqrt{1 - \text{س}^2}}{\sqrt{1 - \text{س}^2}} = \lim_{\text{س}\to 1} \frac{(1 - \text{س})\left(\sqrt{1 - \text{س}^2}\right)}{1 - \text{س}^2}$$

$$= \lim_{\text{س}\to 1} \frac{(1 - \text{س})\left(\sqrt{1 - \text{س}^2}\right)}{(1 - \text{س})(1 + \text{س})} = \frac{\sqrt{0}}{2} = \text{صفر} \ .$$

$$\therefore \lim_{\text{س}\to 1} \frac{1 - \text{س}}{\sqrt{1 - \text{س}^2}} = \text{صفر} \ .$$

١٦) $\lim_{\text{س}\to 1} \frac{\sqrt{3 - \text{س}} - \sqrt{\text{س}+1}}{\sqrt{2\text{س} - 1} - \sqrt{3\text{س} - 2}}$ ⇐ بالتعويض المباشر د(١) = $\frac{0}{0}$

بالضرب في مرافق البسط وفي مرافق المقام .

$$\lim_{\text{س}\to 1} \frac{\sqrt{3 - \text{س}} - \sqrt{\text{س}+1}}{\sqrt{2\text{س} - 1} - \sqrt{3\text{س} - 2}} \times \frac{\sqrt{3 - \text{س}} + \sqrt{\text{س}+1}}{\sqrt{3 - \text{س}} + \sqrt{\text{س}+1}} \times \frac{\sqrt{2\text{س} - 1} + \sqrt{3\text{س} - 2}}{\sqrt{2\text{س} - 1} + \sqrt{3\text{س} - 2}}$$

$$= \lim_{\text{س} \to ١} \frac{\left[(٣-\text{س}) - (\text{س}+١) \right] \left[\sqrt{٢\text{س}-١} + \sqrt{٣\text{س}-٢} \right]}{\left[(٢\text{س}-١) - (٣\text{س}-٢) \right] \left[\sqrt{٣-\text{س}} + \sqrt{\text{س}+١} \right]}$$

$$= \lim_{\text{س} \to ١} \frac{٢(١-\text{س})}{(١-\text{س})} \times \frac{\sqrt{٢\text{س}-١} + \sqrt{٣\text{س}-٢}}{\sqrt{٣-\text{س}} + \sqrt{\text{س}+١}} = \frac{٤}{٢\sqrt{٢}} = \sqrt{٢}$$

نظرية

إذا كانت ن عددا صحيحا موجبا فان :

$$\lim_{\text{س} \to \text{أ}} \frac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س} - \text{أ}} = \text{ن}\,\text{أ}^{\text{ن}-١} \quad ، \quad \text{س} \neq \text{أ}$$

نتائج

١) $$\lim_{\text{س} \to \text{أ}} \frac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س}^{\text{م}} - \text{أ}^{\text{م}}} = \frac{\text{ن}}{\text{م}} (\text{أ})^{\text{ن}-\text{م}}$$

٢) $$\lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{(\text{أ}+\text{هـ})^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}}{\text{هـ}} = \text{ن}\,\text{أ}^{\text{ن}-١}$$

ملاحظات:

أ) $$\lim_{\text{س} \to ١} \frac{\text{س}^{\text{ن}} - ١}{\text{س} - ١} = \text{ن}$$

ب) $$\lim_{\text{س} \to ١} \frac{\text{س}^{\text{ن}} - ١}{\text{س}^{\text{م}} - ١} = \frac{\text{ن}}{\text{م}}$$

أمثلة على النظرية ونتائجها

١) أوجد $\lim_{\text{س} \to ٣} \frac{\text{س}^{٤} - ٨١}{\text{س} - ٣}$

الحـــــــل

$$\lim_{\text{س} \to ٣} \frac{\text{س}^{٤} - ٨١}{\text{س} - ٣} = \lim_{\text{س} \to ٣} \frac{\text{س}^{٤} - (٣)^{٤}}{\text{س} - ٣} = ٤(٣)^{٣} = ١٠٨$$

٢) اوجد $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س}+\text{ب})^{٣} - \text{ب}^{٣}}{\text{س}}$

الحـــــل

$$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س}+\text{ب})^{٣} - \text{ب}^{٣}}{\text{س}} = \underset{\text{س}+\text{ب}\to \text{ب}}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س}+\text{ب})^{٣} - \text{ب}^{٣}}{(\text{س}+\text{ب}) - \text{ب}} = ٣\,\text{ب}^{٢}$$

ملاحظة : عندما س $\to$ ٠ فان س + ب $\to$ ب

٣) اوجد $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٣} - ٢٧}{\text{س}^{٤} - ٨١}$

الحـــــل

نجد انه يمكن كتابة ٢٧ = $(٣)^{٣}$ ، ٨١ = $(٣)^{٤}$

$\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٣} - ٢٧}{\text{س}^{٤} - ٨١}$ على صورة النتيجة .

$$= \dfrac{٣}{٤} (٣)^{٣-٤} = \dfrac{٣}{٤} (٣)^{-١} = \dfrac{٣}{٤} \times \dfrac{١}{٣} = \dfrac{١}{٤}$$

٤) اوجد $\underset{\text{س}\to -١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٣} + ١}{\text{س}^{٥} + ١}$

الحـــــل

نلاحظ انه من التعويض المباشر أن د(−١) = $\dfrac{٠}{٠}$ نلجأ إلى استخدام النتيجةمع ملاحظة أن

$$(-١)^{٣} = (-١)^{٥} = -١$$

$$\therefore \underset{\text{س}\to -١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٣} - (-١)}{\text{س}^{٥} - (-١)} = \underset{\text{س}\to -١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٣} - (-١)^{٣}}{\text{س}^{٥} - (-١)^{٥}} = \dfrac{٣}{٥} (-١)^{٣-٥}$$

$$= \dfrac{٣}{٥} (-١)^{-٢} = \dfrac{٣}{٥} \times \dfrac{١}{(-١)^{٢}} = \dfrac{٣}{٥}$$

$$\therefore \underset{\text{س}\to -١}{\text{نهـــا}} \frac{\text{س}^{٣} + ١}{\text{س}^{٥} + ١} = \frac{٣}{٥}$$

٥) اوجد $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـــا}} \frac{٧\text{س}^{٣} - ٧}{\text{س}^{٧} - ١}$

الحـــــــل

بالتعويض المباشر د(١) = $\frac{٠}{٠}$ نلجأ إلى استخدام النتيجة حيث تصعب كل الطرق الأخرى مع ملاحظة إخراج العامل المشترك من البسط وهو (٧) وان $(١)^{٧} = (١)^{٣} = ١$

$$\therefore \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـــا}} \frac{٧(\text{س}^{٣} - ١)}{\text{س}^{٧} - ١} = ٧ \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـــا}} \frac{(\text{س}^{٣} - ١)}{\text{س}^{٧} - ١} = ٧ \times \frac{٣}{٧} (١)^{٣-٧} = ٧ \times \frac{٣}{٧} (١)^{-٤} = ٣ \times ١$$

$$\therefore \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـــا}} \frac{٧\text{س}^{٣} - ٧}{\text{س}^{٧} - ١} = ٣$$

٦) اوجد $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـــا}} \frac{\frac{١}{\text{س}^{٤}} - \frac{١}{١٦}}{\text{س} - ٢}$

الحـــــــل

نلاحظ أن د(٢) = $\frac{٠}{٠}$ نلجأ إلى استخدام النظرية بعد تغيير صورة النهاية .

$$\frac{١}{\text{س}^{٤}} = (\text{س})^{-٤} \quad ، \quad \frac{١}{١٦} = \frac{١}{(٢)^{٤}} = (٢)^{-٤}$$

$$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـــا}} \frac{(\text{س})^{-٤} - (٢)^{-٤}}{\text{س} - ٢} = \frac{-٤}{١} (٢)^{-٤-١} = -٤(٢)^{-٥} = \frac{-٤}{(٢)^{٥}} = \frac{-٤}{٣٢}$$

$$\therefore \lim_{\text{س} \to 2} \frac{\frac{1}{\text{س}^{4}} - \frac{1}{16}}{\text{س} - 2} = \frac{-4}{32} = \frac{-1}{8}$$

$$\text{٧) اوجد } \lim_{\text{س} \to 1} \frac{\frac{4}{\sqrt{\text{س}}} - 4}{\text{س}^{2} - 1}$$

الحـــــل

د(١) = $\frac{\cdot}{\cdot}$ نلجأ إلى استخدام النتيجة مع مراعاة انه يجب اخراج العامل المشترك ٤ من البسط لأنه ثابت .

$$4 \lim_{\text{س} \to 1} \frac{\frac{1}{\sqrt{\text{س}}} - 1}{\text{س}^{2} - 1} = 4 \lim_{\text{س} \to 1} \frac{(\text{س})^{-\frac{1}{2}} - 1}{\text{س}^{2} - 1} =$$

$$4 \lim_{\text{س} \to 1} \frac{(\text{س})^{-\frac{1}{2}} - (1)^{-\frac{1}{2}}}{\text{س}^{2} - (1)^{2}} = 4 \times \frac{-\frac{1}{2}}{1} \times (1)^{-\frac{1}{2}-2} = 4 \times \frac{-1}{2} \times 1 = -2$$

٨) إذا كانت $\text{د(س)} = \frac{3\,\text{أ}\,\sqrt[3]{\text{س}} + 3\,\text{أ}}{\text{س}+1}$ فاثبت أن :-

أ) $\lim_{\text{س} \to -1} \text{د(س)} = \text{أ}$

ب) $\lim_{\text{س} \to 1} \text{د(س)} = \text{د(١)}$

ج) $\frac{\text{د}\ (0)}{3}\ \lim_{\text{س} \to -1} \text{د(س)} = \text{صفر}$

الحـــــل

أ) $\text{د(س)} = \lim_{\text{س} \to -1} \frac{3\,\text{أ}\,\sqrt[3]{\text{س}} + 3\,\text{أ}}{\text{س}+1}$ بالتعويض المباشر .

$$د(-١) = \frac{٣أ\sqrt[٣]{-١} + ٣أ}{-١+١} = \frac{-٣أ+٣أ}{-١+١} = \frac{٠}{٠}$$

نستخدم القاعدة لإيجاد النهاية $= ٣أ$ $\quad \underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[٣]{س} + ١}{س + ١} = ٣أ$

$$\underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \frac{(س)^{\frac{١}{٣}} - (-١)^{\frac{١}{٣}}}{س^{١} - (-١)^{١}} = ٣أ \times \frac{١}{٣}\,(-١)^{\frac{١}{٣}-١} = أ \times \frac{١}{(-١)^{\frac{٢}{٣}}} = أ \times ١$$

$$\therefore \underset{س \to -١}{\text{نهـا}} د(س) = أ$$

ب) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} د(س)$ بالتعويض المباشر $د(١) = \frac{٣أ\sqrt[٣]{١} + ٣أ}{١+١} = \frac{٦أ}{٢} = ٣أ$

$$\therefore \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} د(س) = ٣أ = د(١)$$

ج) $د(٠) = \frac{٣أ \times ٠ + ٣أ}{٠ + ١} = ٣أ \quad \Leftarrow \quad \frac{د(٠)}{٣} = \frac{٣أ}{٣} = أ$

$$\therefore \frac{د(٠)}{٣} - \underset{س \to -١}{\text{نهـا}} د(س) = أ - أ = \text{صفر}$$

٩) اوجد $\underset{س \to \frac{١}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{٣٢س^{٥} - ١}{٢س - ١}$

الحل

$د\left(\frac{١}{٢}\right) = \frac{٠}{٠}$ ، $\therefore س \to \frac{١}{٢}$ $\quad \therefore ٢س \to ١$

$$\lim_{س \to ١^-} \frac{(٢)^٥ س^٥ - ١}{٢س - ١} = \lim_{س \to ١^-} \frac{(٢س)^٥ - (١)^٥}{٢س - ١}$$ على صورة النظرية

$$\frac{٥}{١} (١)^{٥-١} = ٥ \times ١ = ٥$$

$$\therefore \lim_{س \to \frac{١}{٢}} \frac{٣٢ س^٥ - ١}{٢س - ١} = ٥$$

١٠) اوجد $\lim_{و \to ٠} \frac{\sqrt{و+٤} - ٢}{و}$ ؟

الحل

بالتعويض المباشر : د(٠) = $\frac{٠}{٠}$ نجعل المعادلة على صورة النظرية $\Leftarrow$ ٢ = $(٤)^{\frac{١}{٢}}$

$$\lim_{و \to ٠} \frac{\sqrt{و+٤} - ٢}{و} = \lim_{و+٤ \to ٤} \frac{(و+٤)^{\frac{١}{٢}} - (٤)^{\frac{١}{٢}}}{(و+٤) - (٤)} = \frac{\frac{١}{٢}}{١} (٤)^{\frac{١}{٢} - ١}$$

$$= \frac{١}{٢} (٤)^{-\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٢(٤)^{\frac{١}{٢}}} = \frac{١}{٢ \times ٢} = \frac{١}{٤}$$

$$\therefore \lim_{و \to ٠} \frac{\sqrt{و+٤} - ٢}{و} = \frac{١}{٤}$$

١١) اوجد $\lim_{و \to ٠} \frac{\frac{١}{(س+و)^٤} - \frac{١}{س^٤}}{و}$

الحل

د(٠) = $\frac{٠}{٠}$ ، نجعل المعادلة على صورة النظرية :

$$\therefore \frac{١}{(س+و)^{٤}} = (س+و)^{-٤} \quad ، \quad \frac{١}{س^{٤}} = (س)^{-٤}$$

$$\therefore \underset{و \leftarrow ٠}{نهـــا} \frac{(س+و)^{-٤} - س^{-٤}}{و} = \underset{س+و \leftarrow س}{نهـــا}$$

$$\frac{(س+و)^{-٤} - س^{-٤}}{(س+و) - (س)}$$

$$= \frac{-٤}{١}(س)^{-٤-١} = -٤س^{-٥} = \frac{-٤}{س^{٥}}$$

$$\therefore \underset{و \leftarrow ٠}{نهـــا} \frac{\frac{١}{(س+و)^{٤}} - \frac{١}{س^{٤}}}{و} = \frac{-٤}{س^{٥}}$$

١٢) اوجد $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـــا} \frac{(أ+ب س)^{٣} - أ^{٣}}{س}$ ؟

الحل

د(٠) = $\frac{٠}{٠}$ ، بضرب البسط والمقام في ب .

$$\underset{س \leftarrow ٠}{نهـــا} \frac{ب}{ب} \left(\frac{(أ+ب س)^{٣} - أ^{٣}}{س} \right) = ب$$

$$\underset{(ب) س \leftarrow ٠}{نهـــا} \frac{(أ+ب س)^{٣} - أ^{٣}}{(أ+ب س) - أ}$$

$$= \text{ب} \lim_{(\text{أ}+\text{ب س})\to \text{أ}} \frac{(\text{أ}+\text{ب س})^{٣}-\text{أ}^{٣}}{(\text{أ}+\text{ب س})-\text{أ}} = \text{ب} \times \frac{٣}{١}(\text{أ})^{٣-١} = ٣\,\text{ب}(\text{أ})^{٢}$$

$$\therefore \lim_{\text{س}\to ٠} \frac{(\text{أ}+\text{ب س})^{٣}-\text{أ}^{٣}}{\text{س}} = ٣\,\text{ب}(\text{أ})^{٢}$$

١٣) اوجد $\lim_{\text{س}\to ٠} \dfrac{\sqrt[٣]{\text{أ}+\text{ب س}}-\sqrt[٣]{\text{أ}}}{\text{س}}$

الحل

د(٠) = $\frac{٠}{٠}$ ، بأخذ العامل المشترك من البسط اولا وهو (٣)

$$= ٣ \lim_{\text{س}\to ٠} \frac{(\text{أ}+\text{ب س})^{\frac{١}{٣}}-\text{أ}^{\frac{١}{٣}}}{\text{س}}$$ بضرب البسط والمقام في (ب)

$$= ٣\text{ب} \lim_{\text{س}\to ٠} \frac{(\text{أ}+\text{ب س})^{\frac{١}{٣}}-\text{أ}^{\frac{١}{٣}}}{\text{ب}(\text{س})}$$ بإضافة (أ) وطرح (أ) من المقام .

$$= ٣\text{ب} \lim_{(\text{أ}+\text{ب(س)})\to \text{أ}} \frac{(\text{أ}+\text{ب س})^{\frac{١}{٣}}-\text{أ}^{\frac{١}{٣}}}{(\text{أ}+\text{ب س})-\text{أ}} = ٣\,\text{ب} \times \frac{١}{٣}(\text{أ})^{\frac{١}{٣}-١}$$

$$= \text{ب}\,(\text{أ})^{-\frac{٢}{٣}} = \frac{\text{ب}}{\sqrt[٣]{\text{أ}^{٢}}}$$

$$\therefore \lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\sqrt[٣]{\text{أ}+\text{ب س}}-\sqrt[٣]{\text{أ}}}{\text{س}} = \frac{\text{ب}}{\sqrt[٣]{\text{أ}^{٢}}}$$

١٤) اوجد $\underset{\text{س} \leftarrow \frac{٨}{٥}}{\text{نهــا}} \frac{٤\sqrt[٣]{٥\text{س}} - ٨}{٥\text{س} - ٨}$

الحل

د$\left(\frac{٨}{٥}\right) = \frac{٠}{٠}$ ، بأخذ العامل المشترك من البسط وهو (٤) .

$$٤ \underset{\text{س} \leftarrow \frac{٨}{٥}}{\text{نهــا}} \frac{\sqrt[٣]{٥\text{س}} - ٢}{٥\text{س} - ٢} = ٤ \underset{٥\text{س} \leftarrow ٨}{\text{نهــا}} \frac{(٥\text{س})^{\frac{١}{٣}} - (٨)^{\frac{١}{٣}}}{(٥\text{س}) - (٨)} = ٤ \times \frac{\frac{١}{٣}}{١} (٨)^{\frac{١}{٣} - ١}$$

$$= \left(\frac{٤}{٣}\right) \times (٨)^{-\frac{٢}{٣}} = \left(\frac{٤}{٣}\right) \times \frac{١}{(٨)^{\frac{٢}{٣}}} = \frac{٤}{٣} \times \frac{١}{٤} = \frac{١}{٣}$$

$$\therefore \underset{\text{س} \leftarrow \frac{٨}{٥}}{\text{نهــا}} \frac{٤\sqrt[٣]{٥\text{س}} - ٨}{٥\text{س} - ٨} = \frac{١}{٣}$$

١٥) اوجد $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{\frac{١٦}{\sqrt{\text{س} + ٤}} - ٨}{\text{س}}$

الحل

د$(٠) = \frac{٠}{٠}$ ، بأخذ العامل المشترك من البسط وهو (١٦).

$$١٦ \underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{\frac{١}{\sqrt{\text{س} + ٤}} - \frac{١}{٢}}{\text{س}} = ١٦ \underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{(\text{س} + ٤)^{-\frac{١}{٢}} - (٤)^{-\frac{١}{٢}}}{\text{س}}$$

$$= 16 \lim_{\text{س}+4 \to 4} \frac{(\text{س}+4)^{-\frac{1}{2}} - (4)^{-\frac{1}{2}}}{(\text{س}+4) - (4)} = 16 \times \frac{-\frac{1}{2}}{1} (4)^{-\frac{1}{2}-1}$$

$$= -8\,(4)^{-\frac{3}{2}} = -8 \times \frac{1}{8} = -1$$

$$\therefore \lim_{\text{س} \to 0} \frac{\frac{16}{\sqrt{\text{س}+4}} - 8}{\text{س}} = -1$$

ثانيا : إذا كان المتغير س يقترب من المالانهاية أي أن $\text{س} \to \infty$.

١- إذا كانت الدالة المراد إيجاد نهايتها دالة جبرية حدودية فان $\lim_{\text{س} \to \infty} \text{د(س)} = \infty$

فمثلا $\lim_{\text{س} \to \infty} 2\text{س}+1 = \infty$ ، $\lim_{\text{س} \to \infty} 3\,\text{س}^2+\text{س}^3 = \infty$ **وبصفة عامة فان :**

$$\lim_{\text{س} \to \infty} \text{س}^{\text{ن}} = \infty$$ **حيث ن عدد حقيقي موجب :**

$$\therefore \lim_{\text{س} \to \infty} \sqrt{\text{س}} = \infty \quad ، \quad \lim_{\text{س} \to \infty} \text{س}^{\frac{4}{3}} + 1 = \infty \ .$$

و هكذا ....

٢- إذا كان الدالة المراد إيجاد نهايتها دالة جبرية مكونة من بسط ومقام فإننا نقسم كلا من البسط والمقام على الحد المشتمل على اكبر أس للمتغير س .

مع ملاحظة أن $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{1}{\text{س}^{\text{ن}}} = 0$ **حيث ن عدد حقيقي موجب .**

فمثلا : $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{1}{\text{س}} = \frac{1}{\infty} = \text{صفر}$ ، $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{1}{\text{س}^2} = \frac{1}{\infty} = \text{صفر}$

، $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{1}{\sqrt{\text{س}}} = \text{صفر}$.

أمثلة

١) أوجد $\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{٤س} + ٣}{\text{٢س} + ٥}$

الحل

نلاحظ أن الدالة مكونة من بسط ومقام ∴ نقسم البسط والمقام على الحد المشتمل على اكبر اس وهو س . ثم الاختصار .

$$\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\frac{\text{٤س}}{\text{س}} + \frac{٣}{\text{س}}}{\frac{\text{٢س}}{\text{س}} + \frac{٥}{\text{س}}} = \underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٤ + \frac{٣}{\text{س}}}{٢ + \frac{٥}{\text{س}}} = \dfrac{٤ + \frac{٣}{\infty}}{٢ + \frac{٥}{\infty}} = \dfrac{٤ + ٠}{٢ + ٠} = ٢$$

٢) أوجد $\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^٣ + \text{٢س} - ١}{٩ - \text{٢س} - \text{٣س}^٣}$ ؟

الحل

بقسمة البسط والمقام على $\text{س}^٣$.

$$\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\frac{\text{س}^٣}{\text{س}^٣} + \frac{\text{٢س}}{\text{س}^٣} - \frac{١}{\text{س}^٣}}{\frac{٩}{\text{س}^٣} - \frac{\text{٢س}}{\text{س}^٣} - \frac{\text{٣س}^٣}{\text{س}^٣}} = \underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{١ + \frac{٢}{\text{س}^٢} - \frac{١}{\text{س}^٣}}{\frac{٩}{\text{س}^٣} - \frac{٢}{\text{س}^٢} - ٣}$$

$$= \dfrac{١ + \frac{٢}{\infty} - \frac{١}{\infty}}{\frac{٩}{\infty} - \frac{٢}{\infty} - ٣} = \dfrac{١ + ٠ - ٠}{٠ - ٠ - ٣} = \dfrac{١}{-٣} = \dfrac{-١}{٣}$$

٣) أوجد $\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^٢ - \text{٣س}^٣ + ١}{\text{٢س}^٢ + ١}$ ؟

الحل

بقسمة البسط والمقام على اكبر أس وهو $\text{س}^٣$ ، والاختصار .

$$\therefore \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٣}} - \frac{٣\text{س}^{٣}}{\text{س}^{٣}} + \frac{١}{\text{س}^{٣}}}{\frac{٢\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٣}} + \frac{١}{\text{س}^{٣}}} = \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\frac{١}{\text{س}} - ٣ + \frac{١}{\text{س}^{٣}}}{\frac{٢}{\text{س}} + \frac{١}{\text{س}^{٣}}}$$

$$= \frac{\frac{١}{\infty} - ٣ + \frac{١}{\infty}}{\frac{٢}{\infty} + \frac{١}{\infty}} = \frac{٠ - ٣ + ٠}{٠ + ٠} = \frac{-٣}{٠} = -\infty$$ (النهاية ليس لها وجود)

∴ النهاية ليس لها وجود . (لاحظ ان درجة البسط اعلى من درجة المقام) .

٤) اوجد $\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\text{س}^{٢}+٤}{٢\text{س}^{٤}+٢\text{س}}$ ؟

الحل

بقسمة البسط والمقام على اكبر اس وهو $\text{س}^{٤}$

$$\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٤}} + \frac{٤}{\text{س}^{٤}}}{\frac{٢\text{س}^{٤}}{\text{س}^{٤}} + \frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٤}}} = \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\frac{١}{\text{س}^{٢}} + \frac{٤}{\text{س}^{٤}}}{٢ + \frac{٢}{\text{س}^{٣}}} = \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\frac{١}{\infty} + \frac{٤}{\infty}}{٢ + \frac{٢}{\infty}} = \frac{٠}{١}$$

$$\therefore \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\text{س}^{٢}+٤}{٢\text{س}^{٤}+٢\text{س}} = \text{صفر} .$$

ملاحظات :

أ) إذا كانت درجة البسط تساوي درجة المقلم فان $\lim_{\text{س}\to\infty} \text{د(س)}$ = عدد حقيقي≠ صفر .

ب) إذا كانت درجة البسط < درجة المقلم فان $\lim_{\text{س}\to\infty} \text{د(س)}$ = صفر .

جـ) إذا كانت درجة البسط > درجة المقلم فان $\lim_{\text{س}\to\infty} \text{د(س)}$ غير معرفة (ليس لها وجود) .

٥) اوجد $\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{٢\text{س} + \sqrt{\text{س}} + ١}{١ - \text{س}}$

الحل

بقسمة البسط والمقام على س ∴ $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{\dfrac{\text{٢س}}{\text{س}} + \dfrac{\sqrt{\text{س}}}{\text{س}} + \dfrac{\text{١}}{\text{س}}}{\dfrac{\text{١}}{\text{س}} - \dfrac{\text{س}}{\text{س}}}$

$$= \dfrac{\dfrac{\text{٢}}{\text{١}} + \dfrac{\text{١}}{\sqrt{\text{س}}} + \dfrac{\text{١}}{\text{س}}}{\dfrac{\text{١}}{\text{س}} - \dfrac{\text{١}}{\text{١}}} = \dfrac{\text{٢} + \dfrac{\text{١}}{\infty} + \dfrac{\text{١}}{\infty}}{\dfrac{\text{١}}{\infty} - \text{١}} = \dfrac{\text{٢} + \text{٠} + \text{٠}}{\text{٠} - \text{١}} = \dfrac{\text{٢}}{\text{١-}}$$

$$\therefore \lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{\text{٢س} + \sqrt{\text{س}} + \text{١}}{\text{١} - \text{س}} = \text{٢-}$$

٦) اوجد $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{\text{٣س} + \text{٢س}\sqrt{\text{س}} + \text{٣}}{\text{٥س} + \text{٣س}\sqrt{\text{س}} - \text{١}}$

الحل

لاحظ أن اكبر اس للمتغير س هو س $\sqrt{\text{س}}$ أي $(\text{س})^{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}}$

$$\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{\dfrac{\text{٣س}}{\text{س}\sqrt{\text{س}}} + \dfrac{\text{٢س}\sqrt{\text{س}}}{\text{س}\sqrt{\text{س}}} + \dfrac{\text{٣}}{\text{س}\sqrt{\text{س}}}}{\dfrac{\text{٥س}}{\text{س}\sqrt{\text{س}}} + \dfrac{\text{٣س}\sqrt{\text{س}}}{\text{س}\sqrt{\text{س}}} - \dfrac{\text{١}}{\text{س}\sqrt{\text{س}}}}$$

$$= \dfrac{\dfrac{\text{٣}}{\infty} + \text{٢} + \dfrac{\text{٣}}{\infty}}{\dfrac{\text{٥}}{\infty} + \text{٣} - \dfrac{\text{١}}{\infty}} = \dfrac{\text{٠} + \text{٢} + \text{٠}}{\text{٠} + \text{٣} - \text{٠}} = \dfrac{\text{٢}}{\text{٣}}$$

$$\therefore \lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{\text{٣س} + \text{٢س}\sqrt{\text{س}} + \text{٣}}{\text{٥س} + \text{٣س}\sqrt{\text{س}} - \text{١}} = \dfrac{\text{٢}}{\text{٣}}$$

٧) اوجد $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{\sqrt{\text{١} + \text{س}^{\text{٢}}}}{\text{٢س} + \text{٣}}$

الحل

لاحظ أن اكبر أس للمتغير هو (س) حيث أن $\sqrt{س^{2}}$ = س .

بقسمة البسط و المقام على

$$\lim_{س \to \infty} \frac{\frac{\sqrt{1+س^{2}}}{س}}{\frac{2س}{س}+\frac{3}{س}} = \lim_{س \to \infty} \frac{\frac{\sqrt{1+س^{2}}}{\sqrt{س^{2}}}}{2+\frac{3}{س}}$$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{س^{2}}+\frac{س^{2}}{س^{2}}}}{2+\frac{3}{س}}$$

$$\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{س^{2}}+1}}{2+\frac{3}{س}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{\infty}+1}}{2+\frac{3}{\infty}} = \frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{1+س^{2}}}{2س+3} = \frac{1}{2}$$

8) اوجد $\lim_{س \to \infty} \frac{5-3س}{\sqrt{4س^{2}+2س-1}}$ ؟

الحل

اكبر أس للمتغير س ه[س = $\sqrt{س^{2}}$] بقسمة البسط على س والمقلم على $\sqrt{س^{2}}$

$$\therefore \lim_{س \to \infty} \frac{\frac{5}{س}-\frac{3س}{س}}{\sqrt{\frac{4س^{2}}{س^{2}}+\frac{2س}{س^{2}}-\frac{1}{س^{2}}}} = \lim_{س \to \infty} \frac{\frac{5}{س}-3}{\sqrt{4+\frac{2}{س}-\frac{1}{س^{2}}}}$$

$$= \frac{\frac{5}{\infty}-3}{\sqrt{4+\frac{2}{\infty}-\frac{1}{\infty}}} = \frac{0-3}{\sqrt{4}+0} = \frac{-3}{2}$$

$$\therefore \lim_{س \to \infty} \frac{5-3س}{\sqrt{4س^{2}+2س-1}} = \frac{-3}{2}$$

٩) اوجد $$\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\sqrt{\text{س} - ١}}{\frac{١}{\text{س}} + ١} \times \frac{\sqrt{\text{س} + ١}}{(\text{س} + ١)} \quad ؟$$

الحل

بضرب المقادير الجبرية التي في البسط والمقام :

$$\sqrt{\text{س} - ١} \times \sqrt{\text{س} + ١} = \sqrt{(\text{س} - ١)(\text{س} + ١)} \text{ البسط } = \sqrt{\text{س}^{٢} - ١}$$

$$\text{المقام} = \left(\frac{١}{\text{س}} + ١\right)(\text{س} - ١) = ١ - \frac{١}{\text{س}} + \text{س} - ١ = \text{س} - \frac{١}{\text{س}}$$

$$\therefore \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\sqrt{\text{س}^{٢} - ١}}{\text{س} - \frac{١}{\text{س}}}$$ بقسمة البسط والمقام على اكبر اس للمتغير وهو س

$$\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢}} - \frac{١}{\text{س}^{٢}}}}{\frac{\text{س}}{\text{س}} - \frac{\frac{١}{\text{س}}}{\text{س}}} = \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\sqrt{١ - \frac{١}{\text{س}^{٢}}}}{١ - \frac{١}{\text{س}^{٢}}}$$

$$= \frac{\sqrt{١ - \infty}}{١ - \infty} = \frac{\sqrt{١}}{١} = ١$$

$$\therefore \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\sqrt{\text{س} - ١}}{\frac{١}{\text{س}} + ١} \times \frac{\sqrt{\text{س} + ١}}{(\text{س} + ١)} = ١$$

١٠) اوجد $$\lim_{\text{س}\to\infty} \sqrt{\text{س}^{٢} + ٣\text{س}} - \text{س}$$

الحل

عند التعويض المباشر نجد أن د $(\infty) = \infty - \infty$ وهي كمية غير معرفة .

نلاحظ أن هذه الدالة تحتوي على كسور و هي مكونة من بسط فقط .

∴ بضرب المقدار في مرافقه حتى يتكون بسط ومقام للدالة .

$$\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\left(\sqrt{\text{س}^{٢}+٣\text{س}}-\text{س}\right)\times\frac{\sqrt{\text{س}^{٢}+٣\text{س}}+\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{٢}+٣\text{س}}+\text{س}}$$

$$=\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\frac{(\text{س}^{٢}+٣\text{س})-(\text{س}^{٢})}{\sqrt{\text{س}^{٢}+٣\text{س}}+\text{س}}=\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\frac{٣\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{٢}+٣\text{س}}+\text{س}}$$

بقسمة كلا من البسط والمقام على س .

$$\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\frac{\frac{٣\text{س}}{\text{س}}}{\sqrt{\frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢}}+\frac{٣\text{س}}{\text{س}^{٢}}}+\frac{\text{س}}{\text{س}}}$$

$$=\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\frac{٣}{\sqrt{١+\frac{٣}{\text{س}}}+١}=\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\frac{٣}{\sqrt{١+٠}+١}=\frac{٣}{٢}$$

$$\therefore\ \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\sqrt{\text{س}^{٢}+٣\text{س}}-\text{س}=\frac{٣}{٢}$$

(١١) اوجد $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\sqrt{\text{س}+\sqrt{\text{س}}}-\sqrt{\text{س}}$ ؟

الحل

نحول الدالة إلى بسط و مقام بضربها في المرافق .

$$\therefore\ \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\left(\sqrt{\text{س}+\sqrt{\text{س}}}-\sqrt{\text{س}}\right)\times\frac{\sqrt{\text{س}+\sqrt{\text{س}}}+\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}+\sqrt{\text{س}}}+\sqrt{\text{س}}}$$

$$\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\frac{(\text{س}+\sqrt{\text{س}})-(\text{س})}{\sqrt{\text{س}+\sqrt{\text{س}}}+\sqrt{\text{س}}}=\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\frac{\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}+\sqrt{\text{س}}}+\sqrt{\text{س}}}$$

بقسمة البسط والمقام على الحد المشتمل على اكبر آس وهو $\sqrt{\text{س}}$.

$$= \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\frac{\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}}}}{\sqrt{\frac{\text{س}}{\text{س}} + \frac{\sqrt{\text{س}}}{\text{س}}} + \frac{\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}}}} = \lim_{\text{س} \to \infty}$$

$$= \frac{١}{\sqrt{١ + ٠} + ١} = \frac{١}{٢}$$

$$\therefore \lim_{\text{س} \to \infty} \left(\sqrt{\text{س} + \sqrt{\text{س}}} - \sqrt{\text{س}} \right) = \frac{١}{٢}$$

ثالثا : إذا كانت الدالة المراد إيجاد نهايتها هي دالة اسية (غير جبرية) والتي يكون فيها الأساس ثابت والأس متغير فإننا نقسم كلا من البسط والمقام على الحد المشتمل على اكبر أساس للمتغير س مع ملاحظة أن :

* $\lim_{\text{س} \to \infty} (١)^{\text{س}} = (١)^{\infty} = ١$

* $\lim_{\text{س} \to \infty} \left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^{\text{س}} = \left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^{\infty} =$ صفر، إذا كان أ < ب (أي إذا كان الكسر اقل من الواحد)

فمثلا $\lim_{\text{س} \to \infty} \left(\frac{٣}{٥}\right)^{\text{س}} =$ صفر .

* $\lim_{\text{س} \to \infty} \left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^{\text{س}} = \left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^{\infty} = \infty$ ، إذا كان أ > ب (أي إذا كان الكسر اكبر من الواحد)

فمثلا $\lim_{\text{س} \to \infty} \left(\frac{٥}{٣}\right)^{\text{س}} = \infty$.

لاحظ ان $\frac{\text{أ}^{\text{س}}}{\text{ب}^{\text{س}}} = \left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^{\text{س}}$.

مثال

اوجد $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـــا}} \dfrac{٢ \times ٥^{س} + ٤ \times ٣^{س}}{٥^{س} + ٧ \times ٣^{س}}$ ؟

الحل :

نلاحظ ان هذه الدالة اسية حيث أن الأس متغير .

$\therefore$ نقسم كلا من البسط والمقام على الحد المشتمل على اكبر أساس وهو ($٥^{س}$) .

$$\therefore \underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـــا}} \dfrac{٢ \times \left(\dfrac{٥^{س}}{٥^{س}}\right) + ٤ \times \dfrac{٣^{س}}{٥^{س}}}{\left(\dfrac{٥^{س}}{٥^{س}}\right) + ٧ \times \dfrac{٣^{س}}{٥^{س}}} = \underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـــا}} \dfrac{٢ \times ١ + ٤ \times \left(\dfrac{٣}{٥}\right)^{س}}{١ + ٧ \times \left(\dfrac{٣}{٥}\right)^{س}}$$

نلاحظ ان $\left(\dfrac{٣}{٥}\right)^{س} = \text{صفر}$. $\dfrac{٢ \times ١ + ٤ \times ٠}{١ + ٧ \times ٠} = \dfrac{٢}{١} = ٢$.

$$\therefore \underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـــا}} \dfrac{٢ \times ٥^{س} + ٤ \times ٣^{س}}{٥^{س} + ٧ \times ٣^{س}} = ٢$$

مثال :

اوجد $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـــا}} \dfrac{٢^{س} + ٥ \times ٣^{س} + ٧^{٢}}{٦ \times ٢^{س} + ١٠ \times ٣^{س}}$

الحل :

نجد ان الحد المشتمل على اكبر اساس هو $(٣)^{س}$ حيث ان $(٧)^{٢}$ يعتبر ثابتا .

$$\therefore \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\frac{٢^{\text{س}}}{٣^{\text{س}}} + ٥ \times \frac{٣^{\text{س}}}{٣^{\text{س}}} + \frac{٧^{٣}}{٣^{\text{س}}}}{٦ \times \frac{٢^{\text{س}}}{٣^{\text{س}}} + ١٠ \times \frac{٣^{\text{س}}}{٣^{\text{س}}}} = \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\left(\frac{٢}{٣}\right)^{\text{س}} + ٥ + \frac{٧^{٣}}{٣^{\text{س}}}}{٦ \times \left(\frac{٢}{٣}\right)^{\text{س}} + ١٠}$$

لاحظ ان $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{\infty} = \text{صفر}$

$$= \frac{\left(\frac{٢}{٣}\right)^{\infty} + ٥ + \frac{٧^{٣}}{\infty}}{٦ \times \left(\frac{٢}{٣}\right)^{\infty} + ١٠} = \frac{٠ + ٥ + ٠}{٦ \times ٠ + ١٠} = \frac{٥}{١٠} = \frac{١}{٢}$$

$$\therefore \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{٢^{\text{س}} + ٥ \times ٣^{\text{س}} + ٧^{٣}}{٦ \times ٢^{\text{س}} + ١٠ \times ٣^{\text{س}}} = \frac{١}{٢}$$

مثال :

اوجد $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{٦ \times ٢^{\text{س}+١} + ٥ \times ٣^{\text{س}+٢}}{٢^{\text{س}+٢} + ١٠ \times ٣^{\text{س}+١}}$

الحل :

قبل البدء في حل المثال تذكر ان :

$٢^{ن+١} = ٢^{ن} \times (٢)^{١} = ٢ \times ٢^{ن}$

$٢^{ن+٢} = ٢^{ن} \times (٢)^{٢} = ٤ \times ٢^{ن}$

$٣^{ن+٢} = (٣)^{٢} \times ٣^{ن} = ٩ \times ٣^{ن}$

$$\therefore \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{٦ \times ٢ \times ٢^{\text{س}} + ٥ \times ٩ \times ٣^{\text{س}}}{٤ \times ٢^{\text{س}} + ١٠ \times ٣ \times ٣^{\text{س}}} = \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{١٢ \times ٢^{\text{س}} + ٤٥ \times ٣^{\text{س}}}{٤ \times ٢^{\text{س}} + ٣٠ \times ٣^{\text{س}}}$$

بقسمة البسط والمقام على اكبر أس وهو $(٣^{س})$.

$$\lim_{س\to\infty} \frac{١٢\times\frac{٢^{س}}{٣^{س}}+٤٥\times\frac{٣^{س}}{٣^{س}}}{٤\times\frac{٢^{س}}{٣^{س}}+٣٠\times\frac{٣^{س}}{٣^{س}}}$$

$$= \lim_{س\to\infty} \frac{١٢\times\left(\frac{٢}{٣}\right)^{س}+٤٥\times ١}{٤\times\left(\frac{٢}{٣}\right)^{س}+٣٠\times ١}$$

$$\frac{٤٥+١٢\times ٠}{٣٠+٠\times ٤} = \frac{٤٥}{٣٠} = \frac{٣}{٢}$$

$$\therefore \lim_{س\to\infty} \frac{٦\times ٢^{س+١}+٥\times ٣^{س+٢}}{٢^{س+٢}+١٠\times ٣^{س+١}} = \frac{٣}{٢}$$

مثال :

اوجد $\lim_{س\to\infty} \frac{٢\times(٩)^{س+١}+٣\times(٢)^{٢س}}{(٣)^{٢س+١}+٥\times(٤)^{س}}$

الحل :

لاحظ أن $(٩)^{س+١} = (٣^{٢})^{س+١} = (٣)^{٢س+٢}$

$(٤)^{س} = (٢^{٢})^{س} = (٢)^{٢س}$

$$\therefore \lim_{س\to\infty} \frac{٢\times(٣)^{٢س+٢}+٣\times(٢)^{٢س}}{(٣)^{٢س+١}+٥\times(٢)^{٢س}}$$

$$= \lim_{س\to\infty} \frac{٢\times(٣)^{٢}\times(٣)^{٢س}+٣\times(٢)^{٢س}}{(٣)\,(٣)^{٢س}+٥\times(٢)^{٢س}}$$

بالقسمة على الحد المشتمل على اكبر أساس وهو $(٣)^{٢س}$.

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{١٨ \times \frac{٣^{٢س}}{٣^{٢س}} + ٣ \times \frac{٢^{٢س}}{٣^{٢س}}}{٣ \times \frac{٣^{٢س}}{٣^{٢س}} + ٥ \times \frac{٢^{٢س}}{٣^{٢س}}}$$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{١٨ \times ١ + ٣ \times \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢س}}{٣ \times ١ + ٥ \times \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢س}} = \frac{١٨ + ٣ \times \left(\frac{٢}{٣}\right)^{\infty}}{٣ + ٥ \times \left(\frac{٢}{٣}\right)^{\infty}}$$ ، لاحـــظ ان

$\left(\frac{٢}{٣}\right)^{\infty}$ = صفر

$$= \frac{١٨ + ٠}{٣ + ٠} = \frac{١٨}{٣} = ٦$$

$$\therefore \lim_{س \to \infty} \frac{٢ \times (٩)^{س+١} + ٣ \times (٢)^{٢س}}{(٣)^{٢س+١} + ٥ \times (٤)^{س}} = ٦$$

مثال :

اوجد $\lim_{س \to \infty} \frac{(٥)^{س+٣}}{(٢٥)^{س+١}}$ ؟

الحل :

لاحظ ان : $(٢٥)^{س+١} = (٥^{٢})^{س+١} = (٥)^{٢س+٢}$

$$\therefore \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{(5)^{\text{س}} \times (5)^{3}}{(5)^{2\text{س}} \times (5)^{2}} = \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{(5)^{-\text{س}} \times 125}{25}$$

$$= \lim_{\text{س} \to \infty} 5 \times (5)^{-\text{س}} = 5 \times (5)^{-\infty} = \text{صفر}$$

، لاحظ أن $(5)^{-\infty} = \text{صفر}$

$$\therefore \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{(5)^{\text{س}+3}}{(25)^{\text{س}+1}} = \text{صفر}$$

مثال :

اوجد $\lim_{\text{س} \to \infty} \dfrac{\sqrt{(7)^{\text{س}+2}}}{(7)^{\text{س}-1}}$

الحل :

بتبسيط البسط وذلك بتحويل الجذر الى اس :

$$\sqrt{(7)^{\text{س}+2}} = (7)^{\frac{\text{س}+2}{2}} = (7)^{\frac{\text{س}}{2}+1}$$

$$\therefore \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{(7)^{\frac{\text{س}}{2}+1}}{(7)^{\text{س}-1}} = \lim_{\text{س} \to \infty} (7)^{\frac{\text{س}}{2}+1-\text{س}+1}$$

$$= \lim_{\text{س} \to \infty} (7)^{\frac{-\text{س}}{2}+2} = \lim_{\text{س} \to \infty} (7)^{-\frac{\text{س}}{2}+2} \times (7)^{2}$$

$$= (7)^{-\infty} \times 49 = \text{صفر}$$

$$\therefore \lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{(٧)^{س+١}}}{(٧)^{س-١}} = \text{صفر}$$

مثال :

اذا كانت د(س) $= \dfrac{أ \times ٣^{س} + ب \times ٣^{٢س}}{جـ \times ٣^{س} + د \times ٣^{٢س}}$ فاوجد :

(١) $\lim_{س \to ٠}$ د(س) ، (٢) $\lim_{س \to \infty}$ د(س)

الحل :

(١) $\lim_{س \to ٠} د(س) = \lim_{س \to ٠} \dfrac{أ \times ٣^{س} + ب \times ٣^{٢س}}{جـ \times ٣^{س} + د \times ٣^{٢س}}$

$$= \frac{أ \times (٣)^{٠} + ب \times (٣)^{٠}}{جـ \times (٣)^{٠} + د \times (٣)^{٠}}$$

$$\therefore \lim_{س \to ٠} د(س) = \frac{أ + ب}{جـ + د}$$

(٢) $\lim_{س \to \infty} د(س) = \lim_{س \to \infty} \dfrac{أ \times ٣^{س} + ب \times ٣^{٢س}}{جـ \times ٣^{س} + د \times ٣^{٢س}}$

بقسمة البسط والمقلم على الحد المشتمل على اكبر أساس واس وهو $(٣)^{٢س}$.

$$\lim_{س \to \infty} \frac{أ \times \frac{٣^{س}}{٣^{٢س}} + ب \times \frac{٣^{٢س}}{٣^{٢س}}}{جـ \times \frac{٣^{س}}{٣^{٢س}} + د \times \frac{٣^{٢س}}{٣^{٢س}}} = \lim_{س \to \infty} \frac{أ \times \left(\frac{١}{٣}\right)^{س} + ب}{جـ \times \left(\frac{١}{٣}\right)^{س} + د}$$

$$= \frac{أ \times \left(\frac{١}{٣}\right)^{\infty} + ب}{جـ \times \left(\frac{١}{٣}\right)^{\infty} + د} = \frac{أ \times (٠) + ب}{جـ \times (٠) + د} = \frac{ب}{د}$$

$$\therefore \lim_{س \to \infty} د(س) = \frac{ب}{د}$$

الخلاصة

(١) نهاية الدالة الكسرية :-

$\lim_{س \to أ}$ د(س) ⇐ نعوض عن س بالقيمة أ فنحصل على :-

$\frac{\text{عدد حقيقي}}{}$ عدد حقيقي ∴ نهاية الدالة = العدد

$\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ (كمية غير معينة) والعامل الصفري (س−أ) وللتخلص منه بأحد الطرق

$\frac{\text{عدد حقيقي}}{\text{صفر}}$ ∴ الدالة ليس لها نهاية

التحليل

القسمة المطولة

الضرب في المرافق

النظرية ونتائجها

(٢) نهاية الدالة عند لا نهاية :-

$\lim_{س \to \infty}$ د(س) ⇐ نعوض عن س بالقيمة ∞ فنحصل على

عدد حقيقي ∴ نهاية الدالة = العدد

$\frac{\infty}{\infty}$

$\infty - \infty$ نضرب في المرافق

القسمة على اكبر اساس مرفوع لأس (س) في المقام	القسمة على (س) مرفوعة لأكبر أس في المقام

تمرين (١)

المجموعة الأولى :

اوجد:

(١) $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} \left(\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٣\right)$

(٢) $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢} + ٤}$

(٣) $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٢} - ٩}{\text{س} - ٣}$

(٤) $\underset{\text{س} \to ٤}{\text{نها}} \dfrac{\text{س} - ٤}{\text{س}^{٢} - \text{س} - ١٢}$

(٥) $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٣} - ٢٧}{\text{س}^{٢} - ٩}$

(٦) $\underset{\text{س} \to ٧}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٢} - ٤٩}{\text{س}^{٢} - ٩\text{س} + ١٤}$

(٧) $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٢} - ٩}{\text{س}^{٢} - ٧ + ١٢}$

(٨) $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نها}} \dfrac{\text{س} - ١}{\text{س}^{٢} + ٢ - ٣}$

(٩) $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٣} - ١}{\text{س} - ١}$

(١٠) $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٣} + ٢٧}{\text{س} + ٣}$

(١١) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٣} + ٧\text{س}}{\text{س}}$

(١٢) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نها}} \dfrac{٢\text{س}^{٢} - \text{س}}{٢\text{س}^{٢} + \text{س}}$

(١٣) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٢} + \text{س} + ١٠^{٩}}{\text{س}^{٣} + ٩}$

(١٤) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٣} + ٨}{١٢\text{س}^{٢} + ٩}$

(١٥) $\underset{\text{ن} \to \infty}{\text{نها}} \dfrac{\text{ن}^{٢} + ٣\text{ن} + ١٠٠٠}{٢\text{ن}^{٢} + \text{ن} + ٧}$

(١٦) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٣} + ٩\text{س}}{٣\text{س}^{٣} - ٧\text{س} + ٤}$

(١٧) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نها}} \dfrac{٣\text{س} - ٢}{٩\text{س} + ٧}$

(١٨) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نها}} \dfrac{٦\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ١}{٦\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٧}$

(١٩) $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٢}+\text{س}-٢}{٤\text{س}^{٣}-١}$ (٢٠) $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \dfrac{٢\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢}+١}$

(٢١) $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٤}+\text{س}^{٣}-\text{س}^{٢}-٥\text{س}+٤}{\text{س}^{٣}-\text{س}^{٢}-\text{س}+١}$ (٢٢) $\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نها}} \left(\dfrac{٣}{٥}\right)^{\text{ن}}$

(٢٤) $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \dfrac{\text{أ س}^{٤}+\text{ب س}^{٢}+\text{جـ}}{\text{ءس}^{٥}+\text{هـ س}^{٣}+\text{و س}}$

(٢٥) $\underset{\text{س}\to٠}{\text{نها}} \dfrac{(٢-٣\text{س})^{٢}-٤}{٣\text{س}}$ (٢٦) $\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نها}} \dfrac{٣^{\text{ن}}-٢\times٥^{\text{ن}}+٢\times٧^{\text{ن}}}{٢^{\text{ن}}+٨\times٣^{\text{ن}}+٥\times٧^{\text{ن}}}$

(٢٧)اوجد $\text{ح}_{\text{ن}}$ في المتسلسلة: $\dfrac{١}{٢}+\dfrac{٣}{٥}+\dfrac{٥}{٨}+\ldots\ldots$

ثم اثبت أن $\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نها}}\ \text{ح}_{\text{ن}} = \dfrac{٢}{٣}$

(٢٨)اثبت أن مجموع المتسلسلة اللانهائية الآتية هو الواحد الصحيح :

$$\text{د(س)} = \dfrac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢}+١} + \dfrac{\text{س}^{٢}}{[\text{س}^{٢}+١]^{٢}} + \dfrac{\text{س}^{٢}}{[\text{س}^{٢}+١]^{٣}} + \ldots\ldots\ldots$$

اوجد د(٠) ، $\underset{\text{س}\to٠}{\text{نها}}\ \text{د(س)}$ لترى أن د(٠) $\neq \underset{\text{س}\to٠}{\text{نها}}\ \text{د(س)}$

<u>**المجموعة الثانية :**</u>

اوجد:

(١) $\underset{\text{س}\to٢}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٦}-٦٤}{\text{س}-٢}$ (٢) $\underset{\text{س}\to١}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٢}-١}{\text{س}-١}$

(٣) $\underset{\text{س}\to\frac{١}{٣}}{\text{نها}} \dfrac{٢٧\text{س}^{٣}-١}{٣\text{س}-١}$ (٤) $\underset{\text{س}\to\frac{١}{٥}}{\text{نها}} \dfrac{٦٢٥\text{س}^{٤}-١}{٥\text{س}-١}$

(٥) $\underset{\text{س}\to٠}{\text{نها}} \dfrac{(١+\text{س})^{٢}-١}{\text{س}}$ (٦) $\underset{\text{س}\to٠}{\text{نها}} \dfrac{(\text{ص}+٨)^{\frac{١}{٣}}-٢}{\text{ص}}$

(٧) $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{\text{م}} - \text{ب}^{\text{م}}}{\text{س}^{\text{ن}} - \text{ب}^{\text{ن}}}$

(٨) $\underset{\text{و} \to \text{٠}}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س} + \text{و})^{\text{٤}} - \text{س}^{\text{٤}}}{(\text{س} + \text{و}) - \text{س}}$

(٩) من تعريف النهاية اثبت ان :

$$\underset{\text{س} \to \text{١}}{\text{نها}} (\text{٤س}^{\text{٣}} + \text{٢س}^{\text{٢}} - \text{٢٤س} + \text{٢٢}) = \text{٤}$$

<u>اوجد</u> $\underset{\text{و} \to \text{٠}}{\text{نها}}$ <u>د(و) في كل من الحالات الآتية</u> :

(١٠) $\text{د(و)} = \dfrac{\sqrt{\text{٣} + \text{و}} - \sqrt{\text{و}}}{\text{و}}$

(١١) $\text{د(و)} = \dfrac{(\text{٢} + \text{و})^{\text{٣}} - \text{٨}}{\text{و}}$

(١٢) $\text{د(و)} = \dfrac{(\text{٢} + \text{و})^{\text{٣}} - \text{٤}}{\text{و}}$

(١٣) $\text{د(و)} = \dfrac{(\text{س} + \text{و})^{\text{٢}} - \text{س}^{\text{٢}}}{\text{و}}$

(١٤) $\text{د(و)} = \dfrac{\dfrac{\text{١}}{\text{س} + \text{و}} + \dfrac{\text{١}}{\text{س}}}{\text{و}}$

اوجد $\underset{\text{و} \to \text{٠}}{\text{نها}} \dfrac{\text{د(س + و)} - \text{د(س)}}{\text{و}}$ في كل من الحالات الآتية :

(١٥) $\text{د(س)} = \text{٢س}^{\text{٢}}$

(١٦) $\text{د(س)} = \dfrac{\text{١}}{\text{٤}} \text{س}^{\text{٣}}$

(١٧) $\text{د(س)} = \dfrac{\text{١}}{\text{س}}$

(١٨) $\text{د(س)} = \text{س}^{\text{٤}}$

(١٩) $\text{د(س)} = \sqrt{\text{س}}$

(٢٠) $\text{د(س)} = \text{س}^{\text{٢}} - \text{٣س}$

اوجد كلا من النهايات الآتية :

(٢١) $\underset{\text{س} \to \text{٢}}{\text{نها}} \dfrac{\text{١}}{(\text{س} - \text{٢})^{\text{٣}}}$

(٢٢) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}}{\text{س} + \text{١}}$

(٢٣) $$\underset{\text{س}\to\text{٢}}{\text{نها}}\ \frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{س} - \text{١}}$$

(٢٤) $$\underset{\text{س}\to\text{٢}}{\text{نها}}\ \frac{\text{س}^{\text{٢}} + \text{س} - \text{٦}}{(\text{س} - \text{٢})^{\text{٢}}}$$

(٢٥) $$\underset{\text{و}\to\text{٠}}{\text{نها}}\ \frac{\sqrt{\text{٥س} + \text{٣و}} - \sqrt{\text{٥س}}}{\text{٢و}}$$

(٢٦) $$\underset{\text{س}\to\text{٢}}{\text{نها}}\ \frac{\text{٤} - \text{س}^{\text{٢}}}{\text{٣} - \sqrt{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٥}}}$$

(٢٧) $$\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نها}}\ \frac{\text{ن} + \text{١}}{\text{ن}}$$

(٢٨) $$\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نها}}\ \frac{(\text{ن} + \text{١})(\text{٢ن} + \text{١})}{\text{ن}^{\text{٢}}}$$

(٢٩) $$\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نها}}\ \frac{(\text{ن} + \text{١})(\text{٢ن} + \text{١})(\text{٣ن} + \text{١})}{\text{ن}^{\text{٣}}}$$

(٣٠) $$\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}}\ \frac{\text{س}^{\frac{\text{٥}}{\text{٣}}} - \text{٣٢}}{\text{س} - \text{٨}}$$

(٣١) $$\underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نها}}\ \frac{\sqrt[\text{م}]{\text{س}} - \text{١}}{\sqrt[\text{ن}]{\text{س}} - \text{١}}$$

(٣٢) $$\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نها}}\ \frac{\text{١} + \text{٢} + \text{٣} + \cdots\cdots + \text{ن}}{\text{ن}^{\text{٢}}}$$

(٣٣) $$\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نها}}\ \frac{\text{١} + \text{٢} + \text{٥} + \cdots\cdots + (\text{٢ن} - \text{١})}{\text{ن}^{\text{٢}} + \text{٤}}$$

(٣٤) $$\underset{\text{ن}\leftarrow\infty}{\text{نها}}\ \frac{\text{١} + \text{٢} + \text{٣} + \cdots\cdots + \text{ن}}{\text{١} + \text{٥} + \text{٩} + \cdots\cdots + (\text{٤ن} - \text{٣})}$$

(٣٥) $$\underset{\text{ن}\leftarrow\infty}{\text{نها}}\ \frac{\text{١}^{\text{٢}} + \text{٢}^{\text{٢}} + \text{٣}^{\text{٢}} + \cdots\cdots + \text{ن}^{\text{٢}}}{\text{١} + \text{٢} + \text{٣} + \cdots\cdots + \text{ن}}$$

(٣٦) $$\underset{\text{ن}\leftarrow\infty}{\text{نها}}\ \frac{\text{١}^{\text{٢}} + \text{٢}^{\text{٢}} + \text{٣}^{\text{٢}} + \cdots\cdots + \text{ن}^{\text{٢}}}{\text{١}^{\text{٣}} + \text{٢}^{\text{٣}} + \text{٣}^{\text{٣}} + \cdots\cdots + \text{ن}^{\text{٣}}}$$

(٣٧) $$\underset{\text{س}\leftarrow\infty}{\text{نها}}\ \frac{\underset{\text{١}}{\overset{\infty}{\text{مجـ}}}\ \text{س}^{\text{٢}}}{\underset{\text{١}}{\overset{\infty}{\text{مجـ}}}\ (\text{٢س} + \text{٣})\ \text{س}}$$

نهاية الدوال المثلثية

مفاهيم أساسية

١- $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \dfrac{\text{حا س}}{\text{س}} = 1$

٢- $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \dfrac{\text{طا س}}{\text{س}} = 1$

٣- $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \text{ جتاس } \neq 1$

٤- $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}^{\text{ن}}(\text{م س})}{(\text{م س})^{\text{ن}}} = 1$

٥- $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \dfrac{\text{طا}^{\text{ن}}(\text{م س})}{(\text{م س})^{\text{ن}}} = 1$

٦- $1 - \text{حتا س} = 2\,\text{جا}^2\dfrac{\text{س}}{2}$

٧- $1 - \text{حتا } 2\text{ س} = 2\,\text{جا}^2\text{ س}$

٨- $1 - \text{جتا}4\text{س} = 2\,\text{جا}^2\,2\text{ س}$

أمثلة

١) $\underset{\text{س}\to\text{ط}}{\text{نها}} \dfrac{\text{حا س}}{\text{س}} = 200\ (1 \text{ ، } -1 \text{ ، } 5)$

$\underset{\text{س}\to\text{ط}}{\text{نها}} \dfrac{\text{حا ط}}{\text{ط}} \Leftarrow \underset{\text{س}\to\text{ط}}{\text{نها}} \dfrac{\text{حا س}}{\text{س}} = 0$

٢) <u>أوجد</u> $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \dfrac{1}{\text{س قتا س}}$!؟

$$\underset{س\to٠}{نها}\ \frac{١}{س\ قتا\ س} = \underset{س\to٠}{نها}\ \frac{حا\ س}{س} = ١$$

٣) **أوجد** $\underset{س\to٠}{نها}\ \frac{س + طا\ س}{س}$

$$\underset{س\to٠}{نها}\ \frac{س + طا\ س}{س} = \cancel{\underset{س\to٠}{نها}\ \frac{س}{س}}\ ١ + \cancel{\underset{س\to٠}{نها}\ \frac{طا\ س}{س}}\ ١ = ٢$$

$$\underset{س\to٠}{نها}\ \frac{س + طا\ س}{س} = ٢$$

٤) **أوجد** $\underset{س\to٠}{نها}\ \frac{جا^{٢}\ ٣\ س}{س^{٢}}$ ؟!

$$\underset{س\to٠}{نها}\ \frac{جا^{٢}\ (٣\ س)}{س^{٢}} = \underset{س\to٠}{نها}\ \frac{جا^{٢}\ ٣\ س}{\left(\frac{٣س}{٣}\right)^{٢}}$$

$$= ٩ \times ١ \Leftarrow \underset{س\to٠}{نها}\ \frac{جا^{٢}\ (٣\ س)}{س^{٢}} = ٩$$

٥) $\underset{س\to٠}{نها}\ ٥\ و\ قتا\ و = ٥\ \underset{س\to٠}{نها}\ \cancel{\frac{و}{حا\ و}}\ ١$

$$\underset{س\to٠}{نها}\ ٥\ و\ قتا\ و = ٥$$

٦) **أوجد** $\underset{س\to٢}{نها}\ \frac{جا(س-٢)}{٧س - ١٤} = \frac{١}{٧}\ \underset{س\to٢}{نها}\ \frac{جا(س-٢)}{س - ٢}$

$$\frac{1}{7}\ \lim_{\text{س}\to 2}\ \frac{\text{جا}(\text{س}-2)}{7\text{س}-14}=\frac{1}{7}$$

٧) **أوجد** $\displaystyle \lim_{\text{س}\to 3}\ \frac{\text{س}^2-6\text{س}+9}{\text{طا}^2(\text{س}-3)}$

$$\lim_{\text{س}\to 3}\ \text{المقدار} = \lim\ \frac{(\text{س}-3)^2}{\text{طا}^2(\text{س}-3)}=1$$

٨) $\displaystyle \lim_{\text{س}\to 3}\ \frac{\text{طا}(\text{س}-3)}{\text{س}^3-27}$ ؟!

$$\lim_{\text{س}\to 3}\ \text{المقدار} = \lim_{\text{س}\to 3}\ \frac{\text{طا}(\text{س}-3)}{(\text{س}-3)(\text{س}^2+3\text{س}+9)}$$

$$\lim_{\text{س}\to 3}\ \text{المقدار} = \lim_{\text{س}\to 3}\ \frac{\text{طا}(\text{س}-3)}{(\text{س}-3)}\times\lim_{\text{س}\to 3}\ \frac{1}{(\text{س}^2+3\text{س}+9)}$$

$$\lim_{\text{س}\to 3}\ \text{المقدار} = \frac{1}{27}$$

٩) **أوجد** $\displaystyle \lim_{\text{س}\to 0}\ \frac{1-\text{حتا س}}{\text{س}^2}$

$$1-\text{حتا}=2\ \text{جا}^2\ \frac{\text{س}}{2}$$

$$\lim_{\text{س}\to 0}\ \text{المقدار} = \frac{2\text{جا}^2\left(\frac{\text{س}}{2}\right)}{\left(2\times\frac{\text{س}}{2}\right)^2}$$

$$2\times\frac{1}{4}\ \lim_{\text{س}\to 0}\ \frac{2\text{حا}^2\left(\frac{\text{س}}{2}\right)}{\left(\frac{\text{س}}{2}\right)^2}=2\times\frac{1}{4}\times 1=\frac{1}{2}$$

١٠) $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\text{قا}^2\text{س} - \text{حتا } 2\text{ س}}{3\text{س}^2} = \dfrac{1}{3} \lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{1 + \text{طا}^2\text{س} - \text{حتا}2\text{س}}{\text{س}^2}$

$\dfrac{1}{3} \left[\lim\limits_{\text{س}\to 0} 1 - \text{حتا}2\text{س} + \lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\text{طا}^2\text{س}}{\text{س}^2} \right] = \dfrac{1}{3} \left[\lim\limits_{\text{س}\to 0} 2 \dfrac{\text{حا}^2\text{س}}{\text{س}^2} + 1 \right]$

$\lim\limits_{\text{س}\to 0} \text{المقدار} = \dfrac{1}{3} (2 + 1) = 1$

١١) أوجد $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\text{قتا هـ} - \text{ظتا هـ}}{\text{هـ}}$ ؟!

$\lim\limits_{\text{س}\to 0} \text{المقدار} = \lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{\text{جا هـ}} - \dfrac{\text{جتا هـ}}{\text{حا هـ}}}{\text{هـ}}$

$\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{1 - \text{حتا هـ}}{\text{هـ جا هـ}} = \lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{2\text{حا}^2 \frac{\text{هـ}}{2}}{\text{هـ} \times \text{حا} \frac{\text{هـ}}{2} \text{ حتا} \frac{\text{هـ}}{2}}$

$\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\text{طا} \frac{\text{هـ}}{2}}{2 \times \frac{\text{هـ}}{2}} = \dfrac{1}{2}$ $\qquad$ $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \cancel{\dfrac{\text{طا} \frac{\text{هـ}}{2}}{\frac{\text{هـ}}{2}}} = \dfrac{1}{2}$

١٢) أوجد $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\text{حتا } 2\text{ س} - 2\text{حتا س} + 1}{\text{س}^2}$

$\lim\limits_{\text{س}\to 0} \text{المقدار} = \lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{2\text{حتا}^2\text{س} - 1 - 2\text{حتاس} + 1}{\text{س}^2}$

$\lim\limits_{\text{س}\to 0} \text{المقدار} = -2 \left[\lim\limits_{\text{س}\to 0} \text{حتاس} \times \lim 1 - \dfrac{\text{حتا س}}{\text{س}^2} \right]$

$\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}}$ المقدار $= -٢ \left[١ \times \frac{١}{٢} \right] \Leftarrow \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}}$ المقدار $= -١$

١٣) **أوجد** $\underset{س \leftarrow \frac{ط}{٦}}{\text{نها}} \frac{\sqrt{٣}\ \text{جا س} - \text{حتا س}}{س - \frac{ط}{٦}}$

$\text{جا} \left(س - \frac{ط}{٦} \right) = \text{جا س حتا} \frac{ط}{٦} - \text{حتا س حا} \frac{ط}{٦}$

$\text{حا} \left(س - \frac{ط}{٦} \right) = \text{حا س} \times \sqrt{\frac{٣}{٢}} - \text{حتا س} \times \frac{١}{٢}$

$\text{حا} \left(س - \frac{ط}{٦} \right) = \sqrt{٣}\ \text{حا س} - \text{حتا س}$ (البسط)

$\underset{س \leftarrow \frac{ط}{٦}}{\text{نها}}$ المقدار $= \underset{س - \frac{ط}{٦} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{حا} \left(س - \frac{ط}{٦} \right)}{س - \frac{ط}{٦}} \times ٢$

$\underset{س - \frac{ط}{٦} \leftarrow ٠}{\text{نها}}$ المقدار $= ٢$

١٤) **أوجد** $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{١ - \text{حتاس}}{س}$ ؟!

$\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهَا}}$ المقدار $= \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{٢\ \text{جا}^٢ \frac{س}{٢}}{س} \Leftarrow ٢ \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}}$ ٢٠٠٦/٠٧/٢٩ $\frac{\text{جا} \frac{س}{٢}}{س} \times \text{جا} \frac{س}{٢}$

$\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}}$ المقدار $= ٢ \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا} \frac{س}{٢}}{٢ \times \frac{س}{٢}} \times \text{حا}\ ٠$

$$\lim_{\text{س}\to 0} \text{المقدار} = 1 \times 0 = 0$$

١٥) <u>أوجد</u> $\lim_{\text{ص}\to 0} \frac{\text{طا}^2\text{ص}}{\text{ص حا ص}}$ ؟!

بقسمة حدي الكسر على ص^2

$$\lim_{\text{ص}\to 0} \frac{\text{طا}^2\text{ص}}{\text{ص حا ص}} = \lim_{\text{ص}\to 0} \frac{\text{طا}^2\text{ص}}{\text{ص}^2} + \lim_{\text{ص}\to 0} \frac{\text{ص حا ص}}{\text{ص}^2}$$

$$\lim_{\text{ص}\to 0} \frac{\text{طا}^2\text{ص}}{\text{ص حا ص}} = 1$$

١٦) <u>أوجد</u> $\lim_{\text{س}\to 0} \frac{\text{٣ س - حا س}}{\text{طا س + س}}$ ؟!

بقسمة حدود الكسر على س :

$$\lim_{\text{س}\to 0} \text{المقدار} = \frac{\lim_{\text{س}\to 0} \frac{3\text{س}}{\text{س}} - \lim_{\text{س}\to 0} \frac{\text{حا س}}{\text{س}}}{\lim_{\text{س}\to 0} \frac{\text{طا س}}{\text{س}} + \lim_{\text{س}\to 0} \frac{\text{س}}{\text{س}}} = \frac{3-1}{1+1} . \Leftarrow \lim_{\text{س}\to 0} \text{المقدار} = 1$$

١٧) <u>أوجد</u> $\lim_{\text{س}\to 0} \frac{\text{طا(حاس)}}{\text{س}}$ ؟!

$$\lim_{\text{س}\to 0} \text{المقدار} = \lim_{\text{س}\to 0} \frac{\text{طا(حاس)}}{\text{س}} \times \frac{\text{حا س}}{\text{حا س}}$$

$$\lim_{\text{س}\to 0} \text{المقدار} = \lim_{\text{س}\to 0} \frac{\text{طا حا س}}{\text{حا س}} \times \lim_{\text{س}\to 0} \frac{\text{حا س}}{\text{س}} = 1$$

١٨) **أوجد** $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{حا س}}{\sqrt[٣]{\text{س}}}$ ؟

$$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{حا س}}{\sqrt[٣]{\text{س}}} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{حا س}}{\text{س}^{\frac{١}{٣}}} \times \dfrac{\text{س}^{\frac{٢}{٣}}}{\text{س}^{\frac{٢}{٣}}}$$

$$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \text{ المقدار} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{حا س}}{\text{س}} \times \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \text{ س}^{٢/٣}$$

$$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \text{ المقدار} = ١ \times ٠ = ٠$$

١٩) **أوجد** $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{-٤\text{طا}^{٢}\text{س}}{٢\text{حتاس} - \sqrt{٤\text{سحاس}+٤}}$

$$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \text{ المقدار} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{-٤\text{طا}^{٢}\text{س}}{٢\text{حتاس} - \sqrt{٤\text{سحاس}+٤}} \times \dfrac{٢\text{حتاس} + \sqrt{٤\text{س حاس}+٤}}{٢\text{حتاس} + \sqrt{٤\text{س حاس+س}}}$$

(المرافق)

$$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} = -٤ \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{طا}^{٢}\text{س } (٢\text{حتا س} + \sqrt{٤\text{س حا س} + ٤})}{٤\text{حتا}^{٢} - ٤\text{س حاس} - ٤}$$

(بأخذ ٤ عامل مشترك) ، ($\text{حتا}^{٢}$ س-١) = -$\text{حا}^{٢}$ س

$$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \text{ المقدار} = - \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{طا}^{٢}\text{س } (٢\text{حتا س} + \sqrt{٤\text{س حا س} + ٤})}{-(\text{حا}^{٢}\text{س} + \text{س حا س})}$$

$$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \text{ المقدار} = ١ \times \dfrac{٢\text{حتا٥} + \sqrt{٤\times٥+٤}}{١+١}$$

$$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \text{ المقدار} = ٢$$

٢١) **أوجد** $\underset{\text{س} \leftarrow \frac{\text{ط}}{٣}}{\text{نها}} \dfrac{\text{حا س طا س} - \sqrt{٣}\,\text{طا س حتا س} - \sqrt{٣}\,\text{حا س} + ٣\,\text{حتا س}}{(١ + \sqrt{٣}\,\text{طا س})(\text{س} - \frac{\text{ط}}{٣})^{٢}}$

$$\underset{\text{س} \leftarrow \frac{\text{ط}}{٣}}{\text{نها}} \text{ المقدار } \dfrac{\text{حا س}(\text{طا س} - \sqrt{٣}) - \sqrt{٣}\,\text{حتا س}(\text{طا س} - \sqrt{٣})}{(١ + \sqrt{٣}\,\text{طا س})(\text{س} - \frac{\text{ط}}{٣})^{٢}}$$

$$= \underset{\text{س} \leftarrow \frac{\text{ط}}{٣}}{\text{نها}} \dfrac{\text{طاس} - \sqrt{٣}}{(١ + \sqrt{٣}\,\text{طا س})(\text{س} - \frac{\text{ط}}{٣})} \times \underset{\text{س} \leftarrow \frac{\text{ط}}{٣} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{٣}\,\text{حتا س} - \text{حا س}}{\text{س} - \frac{\text{ط}}{٣}}$$

$$\text{طا}(\text{س} - \frac{\text{ط}}{٣}) = \dfrac{\text{طا س} - \text{طا}\frac{\text{ط}}{٣}}{١ + \text{طا س طا}\frac{\text{ط}}{٣}} \text{ ، جا}(\text{س} - \frac{\text{ط}}{٣}) = \text{حا س حتا}\frac{\text{ط}}{٣} - \text{حتاس حا}\frac{\text{ط}}{٣}$$

$$\text{حا}(\text{س} - \frac{\text{ط}}{٣}) = \frac{١}{٢}\,\text{حا س} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}\,\text{حتا س}$$

$$٢\,\text{حا}(\text{س} - \frac{\text{ط}}{٣}) = \text{حا س} - \sqrt{٣}\,\text{حتا س}$$

$$\underset{\text{س} \leftarrow \frac{\text{ط}}{٣}}{\text{نها}} \text{ المقدار } = \underset{\text{س} \leftarrow \frac{\text{ط}}{٣} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{طا}(\text{س} - \frac{\text{ط}}{٣})}{\text{س} - \frac{\text{ط}}{٣}} \times ٢ \underset{\text{س} \leftarrow \frac{\text{ط}}{٣} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{حا}(\text{س} - \frac{\text{ط}}{٣})}{\text{س} - \frac{\text{ط}}{٣}}$$

$$\underset{\text{س} \leftarrow \frac{\text{ط}}{٣} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \text{ المقدار } = ٢$$

٢٢) **أوجد** $\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نها}} \text{ س حا } \frac{١}{\text{س}}$ ؟!

بوضع $\frac{١}{\text{س}} = \text{ص}$ عندما س $\leftarrow \infty$

$$\text{ص} = \frac{١}{\infty} \leftarrow ٠$$

$$\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{حا ص}}{\text{ص}} = ١$$

٢٣) **أوجد** $\lim\limits_{\text{س}\to\text{ص}} \dfrac{\text{حا س}}{\text{س - ص}}$ ؟!

بوضع س ـ ص = ص   عندما س ← ط

س = ص + ط   ص ← ط

$$\lim_{\text{س}\to\text{ط}} \frac{\text{حا س}}{\text{س - ص}} = \lim_{\text{ص}\to ٠} \text{حا} \frac{\text{ص + ط}}{\text{ص}}$$

$$\lim_{\text{س}\to\text{ط}} \text{المقدار} = \lim_{\text{ص}\to ٠} \frac{\text{حاص حتا ص +حتاص حا ط}}{\text{ص}}$$

$$\lim_{\text{س}\to\text{ط}} \text{المقدار} = - \lim_{\text{ص}\to ٠} \frac{\text{حا ص}}{\text{ص}} = -١$$

٢٤) **أوجد** $\lim\limits_{\text{س}\to\frac{\text{ط}}{٢}} \dfrac{\text{طتاس}}{\frac{\text{ط}}{٢} - \text{س}}$ ؟!

بوضع $\frac{\text{ط}}{٢}$ - س = ص ، عندما س ← $\frac{\text{ط}}{٢}$

$$\lim_{\text{س}\to\frac{\text{ط}}{٢}} \text{المقدار} = \lim_{\text{ص}\to ٠} \text{طتا} \frac{\frac{\text{ط}}{٢} - \text{ص}}{\text{ص}}$$

$$\lim_{\text{س}\to\frac{\text{ط}}{٢}} \text{المقدار} = \lim_{\text{ص}\to ٠} \frac{\text{طا ص}}{\text{ص}} = ١$$

٢٥) <u>أوجد</u> $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{|\text{س}|}{\text{س}}$ ؟!

$\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{|\text{س}|}{\text{س}} = \underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}}{\text{س}} = ١$

$\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{-\text{س}}{\text{س}} = -١$

ليس لها وجود

٢٦) <u>أوجد</u> $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{حا . س}}{|\text{س}|}$ ؟!

$\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{حا . س}}{|\text{س}|} = \underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{حا . س}}{\text{س}} = ١$

$\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{حا . س}}{-\text{س}} = -١$

ليس لها وجود

٢٧) <u>أوجد</u> $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{هـ}^{\text{لوحا}^{٢}\text{س}}}{\text{س}^{٢}}$ ؟!

$\text{هـ}^{\text{لو د(س)}} = \text{د(س)} \Leftarrow \underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نها}}$ المقدار

$\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{حا}^{٢}\text{س}}{\text{س}^{٢}} = ١$

<u>تذكر أن</u>

١) $\text{حا أ} - \text{حا ب} = ٢\,\text{حتا} \left(\dfrac{\text{أ} + \text{ب}}{٢}\right) \text{حا} \left(\dfrac{\text{أ} - \text{ب}}{٢}\right)$

٢) $\text{حتا أ} - \text{حتا ب} = -٢\,\text{حا}\left(\frac{\text{أ}+\text{ب}}{٢}\right)\text{حا}\left(\frac{\text{أ}-\text{ب}}{٢}\right)$

٢٨) <u>أوجد</u> $\lim\limits_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\text{حا}\left(\frac{\text{ط}}{٤}+\text{هـ}\right)-\text{حا}\frac{\text{ط}}{٤}}{\text{هـ}}$

$\text{حا أ} - \text{حا ب} = ٢\,\text{حتا}\left(\frac{\text{أ}+\text{ب}}{٢}\right)\text{حا}\left(\frac{\text{أ}-\text{ب}}{٢}\right)$

$\lim\limits_{\text{هـ}\to ٠} \text{المقدار} = ٢ \lim\limits_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\text{حتا}\left(\frac{\text{ط}}{٤}+\frac{\text{هـ}}{٢}+\frac{\text{ط}}{٤}\right)\text{حا}\left(\frac{\text{ط}}{٤}+\frac{\text{هـ}}{٢}-\frac{\text{ط}}{٤}\right)}{\text{هـ}}$

$\lim\limits_{\text{هـ}\to ٠} \text{المقدار} = ٢ \left[\lim\limits_{\text{هـ}\to ٠} \text{حتا}\left(\frac{\text{ط}}{٤}+\frac{\text{هـ}}{٢}\right) \times \lim\limits_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\text{حا}\frac{\text{هـ}}{٢}}{٢\times\frac{\text{هـ}}{٢}} \right]$

$\lim\limits_{\text{هـ}\to ٠} \text{المقدار} = \text{حتا}\left(\frac{\text{ط}}{٤}+٠\right) \Leftarrow \lim\limits_{\text{هـ}\to ٠} \text{المقدار} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

٢٩) <u>أوجد</u> $\lim\limits_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\text{حتا}(٣\text{س}+٣\text{هـ}) - \text{حتا}٣\text{س}}{\text{هـ}}$

$\text{حتا أ} - \text{حتا ب} = -٢\,\text{حا}\left(\frac{\text{أ}+\text{ب}}{٢}\right)\text{حا}\left(\frac{\text{أ}-\text{ب}}{٢}\right)$

$\text{البسط} = -٢\,\text{حا}\left(٣\text{س} + \frac{٣}{٢}\,\text{هـ}\right)\text{حا}\frac{٣\,\text{هـ}}{٢}$

$$\lim_{هـ \to 0} \text{المقدار} = -٢ \lim_{هـ \to 0} \text{حا}(٣س + \frac{٣}{٢}هـ) \times \lim_{هـ \to 0} \frac{\text{حا}\,\frac{٣}{٢}هـ}{\frac{٣}{٢}هـ \times \frac{٢}{٣}}$$

$$\lim_{هـ \to 0} \text{المقدار} = \text{حا}\,(٣س + ٠) \times ٣$$

$$\lim_{هـ \to 0} \text{المقدار} = -٣\text{حا}٣س$$

٣٠) **<u>أوجد</u>** $\lim_{س \to 0} \frac{س\ \text{حا}\ س}{١ - \text{حتا}\ س}$ ؟!

بقسمة حدي الكسر على $س^٢$

$$\lim_{س \to 0} \frac{\frac{س \cdot \text{حا} \cdot س}{س^٢}}{\frac{١ - \text{حا} \cdot س}{س^٢}} = \lim_{س \to 0} \frac{١}{\frac{٢\,\text{حا}^٢ \frac{س}{٢}}{\left(٢ \times \frac{س}{٢}\right)^٢}}$$

$$\lim_{س \to 0} \text{المقدار} = ٢$$

٣١) **<u>أوجد</u>** $\lim_{س \to 0} \frac{\text{طا}^{-١}س}{\text{حا}^{-١}س}$ ؟!

بقسمة حدي الكسر على س

$$\lim_{س \to 0} \text{المقدار} = \lim_{س \to 0} \frac{\text{طا}^{-١}س}{س} \div \lim_{س \to 0} \frac{\text{حا}^{-١}س}{س}$$

بوضع $\text{طا}^{-١}س = \alpha$ $\qquad$ $س = \text{طا}\,\alpha$

$\text{حا}^{-١}س = \beta$ $\qquad$ $س = \text{حا}\,\beta$

$$\lim_{\text{س} \to 0} \text{المقدار} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\alpha}{\text{طا}\,\alpha} + \lim_{\beta \to 0} \frac{\beta}{\text{حا}\,\beta}$$

$$\lim_{\text{س} \to 0} \text{المقدار} = ١ + ١ = ١$$

تمرين (٢)

المجموعة الأولى :-

أوجد قيمة النهايات الآتية :-

(١) $\displaystyle \lim_{\text{س} \to 0} \frac{١ - \text{حتا } ٢\text{س}}{٣\text{س}^{٢}}$

(٢) $\displaystyle \lim_{\text{س} \to 0} \frac{٥ \text{ س} + \text{حا س}}{٧ \text{ س} - \text{طا س}}$

(٣) $\displaystyle \lim_{\text{س} \to 0} \frac{١ - \text{حتا } ٢ \text{ س}}{\text{س}^{٢}}$

(٤) $\displaystyle \lim_{\text{س} \to 0} \frac{٥}{\text{س}^{٢} \text{قتا}^{٢} \text{ س}}$

(٥) $\displaystyle \lim_{\text{س} \to \frac{\text{ط}}{٢}} \frac{\text{حا}\left(\frac{\text{ط}}{٢} - \text{س}\right)}{\frac{\text{ط}}{٢} - \text{س}}$

(٦) $\displaystyle \lim_{\text{أ} \to 0} \frac{١ - \text{حتا أ}}{\text{أ}^{٢}}$ حيث أ بالتقدير الدائري

(٧) $\displaystyle \lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{حا س} + \text{س}^{٢}}{\text{س}}$

(٨) $\displaystyle \lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{قا } ٢ \text{ س طا } ٣ \text{ س}}{٣ \text{ س}}$

(٩) $\displaystyle \lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{حتا}\left(\frac{\text{ط}}{٢} - \text{س}\right)}{\text{س}}$

(١٠) $\displaystyle \lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{حا}^{٢} \text{ س}}{\text{س}}$

(١١) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{حا}^{٢} \frac{١}{٢}\text{س}}{\text{س}^{٢}}$

(١٢) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{حتا } ٢ \text{ س} - ٢ \text{ حتا س} + ١}{\text{س}^{٢}}$

(١٣) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٢} + \text{حا}٣\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢} + \text{طا}٤\text{س}}$

(١٤) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{٢ \text{ حا س} + ٣ \text{ طا س}}{٥ \text{ س حتا } ٢ \text{ س}}$

(١٥) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{٢ \text{ س}^{٢} + \text{حا } ٢\text{س}^{٣}}{\text{س}^{٤} - \text{طا}^{٣} ٣ \text{ س}}$

المجموعة الثانية :-

ضع علامة (√) أو (X)

(١) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{حا س طا س}}{٢ \text{ س}} = \text{صفر}$ ( )

(٢) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{طا } ٢ \text{ س حا } ٣ \text{ س}}{٥ \text{ س}^{٢}} = \dfrac{٤}{٥}$ ( )

(٣) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{٥}{\text{س قتا } ٣ \text{ س}} = ٥$ ( )

(٤) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{١ - \text{حتا } ٢ \text{ س}}{\text{س}^{٢}} = ٣$ ( )

(٥) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{س} + \text{حا } ٣ \text{ س}}{٢ \text{ س}} = ٢$ ( )

(٦) $\underset{\text{س} \to \frac{\text{ط}}{٢}}{\text{نها}} \dfrac{\text{حا } ٣ \text{ س}}{\text{س}}$ ( )

(٧) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{حا } ٢ \text{ س طا } ٣ \text{ س}}{٥ \text{ س}^{٢}} = ١$ ( )

(٨) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{حا } ٣ \text{ س حتا } ٣ \text{ س}}{٩ \text{ س}} = ١$ ( )

(٩) $\underset{س \leftarrow \frac{ط}{٢}}{\text{نها}} \dfrac{\text{حا}^{٢}\text{س} - \text{حتا}^{٢}\text{س}}{\text{س}^{٢}} = \dfrac{٤}{ط^{٢}}$ ( )

(١٠) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{حتا}(\frac{ط}{٢} - \text{س})}{٢ \text{ س}} = \dfrac{١}{٢}$ ( )

الاشتقاق

دالة التغير – دالة متوسط التغير – دالة معدل التغير

مفهوم التغير:

اذا كان المتغير الحقيقى س قيمته الابتدائية س وزادت قيمته أو نقصت ر أصبحت $س_١$

فان التغير فى س = $س_٢ - س_١$

(يرمز للتغير فى س بالرمز هـ أو $\triangle$ س)

∴ هـ ($\triangle$ س) = $س_٢ - س_١$

ملاحظات :

التغير فى س قد يكون موجبا أو سالبا

اذا كان $س_٢ > س_١$ يكون موجبا

اذا كان $س_٢ < س_١$ يكون سالبا

دالة التغير

- **اذا كانت ص= د(س) وتغيرت س من $س_١$ الى $س_١$ + هـ**

فان د(س) تتغير تبعا لها بمقدار د($س_١$+ هـ) – د(س)

و يكون

$$ت(هـ)_{س = س_١} = د (س_١ + هـ) – د(س_١)$$

حيث ت (هـ) معناها التغير فى الدالة بمعنى أن ت (هـ) دالة تعين قيمة التغير الذى يتوقف على هـ

- **∴ دالة التغير = الدالة بعد التغير – الدالة قبل التغير**
- **ت (هـ) = د ($س_١$ + هـ) – د ($س_١$)**

$\triangle$ص = د ($س_١$ + $\triangle$س) – د ($س_٢$)

مثال : اذا كانت د(س) = ٢ س + ١ و تغيرت س من س الى س + هـ .

أوجد دالة التغير ، ثم احسب ت (٠,٥)

الحــل

∵ ت(هـ) = د (س + هـ) – د (س)

= [٢ (س + هـ) + ١] - (٢ س + ١)

= ٢ س + ٢ هـ + ١ – ٢ س – ١ = ٢ هـ

∴ ت (هـ) = ٢ هـ

∴ ت (٠,٥) = ٢ × ٠,٥ = ٠,١٠

مثال : اذا كانت د (س) = $س^٢$ و تغيرت س من س = ٣ الى س = ٣ + هـ .

أوجد ت (هـ)$_{س = ٣}$ ثم أوجد قيمة ت (٠,١) ، ت (٠,٢٠)

الحــل

∵ ت (هـ) = د ($س_١$ + هـ) – د ($س_١$)

، ∵ د (س) = $س^٢$ ، $س_١$ = ٣ ∴ ت (هـ) د (٣ + هـ) – د (٣)

∴ ت (هـ) = $(٣ + هـ)^٢$ – ٣ = ٩ + ٦ هـ + $هـ^٢$ – ٩ = ٦ هـ + $هـ^٢$

∴ ت (٠,١) = ٦ (٠,١) + $(٠,١)^٢$ = ٠,٦ + ٠,٠١ = ٠,٦١

∴ت (٠,١) = ٠,٦١

∴ ت (٠,١) = ٠,٦١ (مقدار تغير د (س) عندما تتغير س من ٣ الى ٣,١)

، ت(٠,٢٠) = ٦ (٠,٢٠) + $(٠,٢٠)^٢$ = ١,٢٠ + ٠,٠٤ = ١,١٦

= مقدار تغير د(س) عندما تتغير س من ٣ الى ٢,٨

مثال : اذا كانت د(س) = ٢ س + ٣ فما قيمة التغير فى س ، قيمة التغير فى د(س) فيما يلى:

(أ) عندما تتغير س من ٢ الى ٢,٠٢

(ب) عندما تتغير س من ٢ الى ١,٨

الحــل

(أ) $س_١$ = ٢ ، $س_٢$ = ٢,٠٢ ∴ △س = التغير فى س = $س_٢$ – $س_١$

$\therefore$ $\triangle$س = ٢,٠٢ – ٢ = ٠,٠٢

التغير فى د(س) = $\triangle$ ص = $\triangle$(س$_٢$) – د (س$_١$)

د (س$_٢$) = د (٢,٠٢) ، د (س$_١$) = ٢

= د (٢,٠٢) – د (٢) = (٣×٢,٠٢+١) – (٣×٢+١)

= (٧,٠٦) – (٧) = ٠,٠٦

(ب) س$_١$ = ٢ ، س$_٢$ = ١,٨

$\triangle$س = التغير فى س = ١,٨ – ٢ = –٠,٢

$\triangle$ص = د (س$_٢$) – د (س$_١$) = د(١,٨) – د(٢)

= (٣×١,٨+١) – (٣×٢+١)

= ٦,٤ – ٧ = – ٠,٦

(لاحظ $\triangle$س فى (أ) موجبة ، و سالبة فى (ب))

دالة متوسط التغير

$\therefore$ ت(هـ) = د (س$_١$+ هـ) – د (س$_١$)

بالقسمة على هـ حيث هـ≠٠ نحصل على :

دالة متوسط التغير [م(هـ)] = $\frac{\text{ت(هـ)}}{\text{هـ}}$ = $\frac{\triangle \text{ص}}{\triangle \text{س}}$

= $\frac{\text{د(س}_١\text{ + هـ) – د (س}_١\text{)}}{\text{هـ}}$

$\therefore$ م(هـ)= $\frac{\text{الدالة بعد التغير – الدالة قبل التغير}}{\text{هـ}}$

<u>مثال:</u> اذا كانت د(س) = $\frac{٣}{\text{(٢ س – ١)}}$

احسب متوسط التغير عندما تتغير س من س$_١$ الى س$_١$ + هـ . ثم احسب المتوسط عندما تتغير س من ٢ الى ٢,٢٥

<u>*الحـــل*</u>

ت(هـ) = د(س$_١$ + هـ) – د(س$_١$)

$$= \frac{٣}{(٢+\text{هـ})^٢ - ١} - \frac{٣}{٤ - ١} = \frac{٣}{٣ + ٢\text{هـ}} - ١$$

$$\text{ت}(\text{هـ}) = \frac{٣ - ٣ - ٢\text{هـ}}{٣ + ٢\text{هـ}} = \frac{-٢\text{هـ}}{٣ + ٢\text{هـ}}$$

$$\therefore \text{م}(\text{هـ}) = \frac{\text{ت}(\text{هـ})}{\text{هـ}} = \frac{-٢\text{هـ}}{٣ + ٢\text{هـ}} \times \frac{١}{\text{هـ}} = \frac{-٢}{٣ + ٢\text{هـ}}$$

وعندما تتغير س من ٢ الى ٢,٢٥ فان هـ = ٠,٢٥

$$\therefore \text{م}(٠,٢٥) = \frac{-٢}{٣ + ٢ \times ٠,٢٥} = \frac{-٢}{٣ + ٠,٥} = \frac{-٢}{٣,٥}$$

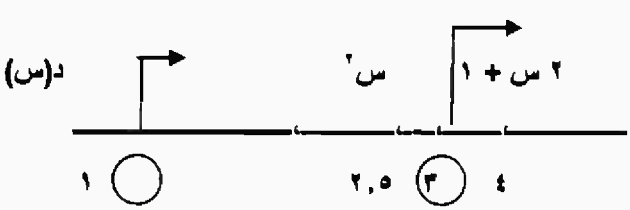
$$= - \frac{٢٠٠}{٣٠٥} = -٠,٦٦$$

<u>مثال :</u> اذا كان د(س) =
$\begin{cases} \text{س}^٢ & \text{اذا كان } ١ \le \text{س} < ٣ \\ ٢\text{س} + ١ & \text{اذا كان س} \geq ٣ \end{cases}$

فأوجد متوسط الدالة د(س) عندما تتغير س

(أ) من ١ الى ٢,٥ (ب) من ٣ الى ٤

<u>*الحـــل*</u>



(أ) عندما تتغير س من ١ الى ٢,٥ : س = ١ ، هـ = ١,٥

$$\therefore \text{م}(١,٥) = \frac{\text{د}(٢,٥) - \text{د}(١)}{١,٥} = \frac{٧}{٢}$$

(ب) عندما تتغير س من ٣ الى ٤ : س = ٣ ، هـ = ١

$\therefore$ م(١) = $\dfrac{\text{د(٤)} - \text{د(٣)}}{١}$ = $\dfrac{٩ - ٧}{١}$ = ٢

مثال: أوجد متوسط معدل تغير حجم كرة عندما يتغير نصف قطرها من ٣ سم الى ٥ سم

الحل

حجم الكرة = $\dfrac{٤}{٣}$ ط نق^{٣} حيث نق نصف قطر الكرة

نق = ٣ ، نق + هـ = ٥ $\therefore$ هـ = ٢

م(هـ) = $\dfrac{\text{د(٥)} - \text{د(٣)}}{٢}$

$\therefore$ د(٥) = $\dfrac{٤}{٣}$ ط (٥)^{٣} ، د(٣) = $\dfrac{٤}{٣}$ ط (٣)^{٣}

$\therefore$ م(هـ) = $\dfrac{٤}{٣}$ ط (٥)^{٣} − $\dfrac{٤}{٣}$ ط (٣)^{٣} = $\dfrac{٣٩٢}{٦}$ ط سم^{٣} / ث

مثال: يتحرك جسم على خط مستقيم بحيث كانت المسافة معطاة بالعلاقة

ف = ٢ن^{٢} + ٣ن + ٥ حيث ن الزمن بالثواني ، ف بالسم . أحسب متوسط تغير ن من ١ الى ٥

الحل

د(٥) = ٢(٥)^{٢} + ٣×٥ + ٥ = ٥٠ + ١٥ + ٥ = ٧٠

د(١) = ٢(١)^{٢} + ٣×١ + ٥ = ١٠

هـ = ٥ - ١ = ٤

$\therefore$ م(هـ) = $\dfrac{٧٠ - ١٠}{٤}$ = ١٥

مثال: احسب دالة متوسط التغير في د عند س = ٣ اذا كانت د(س) = $\sqrt{\text{س} + ٨}$

الحل

$\text{ت(هـ)} = \text{د}(١ + \text{هـ}) - \text{د}(١)$

$= \sqrt{١ + \text{هـ} + ٨} - \sqrt{١ + ٨}$

$= \sqrt{٩ + \text{هـ}} - \sqrt{٩}$ بالضرب × المرافق

$$= \frac{\sqrt{٩ + \text{هـ}} - \sqrt{٩}}{١} \times \frac{\sqrt{٩ + \text{هـ}} + \sqrt{٩}}{\sqrt{٩ + \text{هـ}} + \sqrt{٩}} = \frac{٩ + \text{هـ} - ٩}{\sqrt{٩ + \text{هـ}} + ٣}$$

$$\therefore \text{م(هـ)} = \frac{\text{هـ}}{\sqrt{٩ + \text{هـ}} + ٣} \times \frac{١}{\text{هـ}} = \frac{١}{\sqrt{٩ + \text{هـ}} + ٣}$$

معدل تغير الدالة

$$\text{معدل تغير الدالة} = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{د}(\text{س}_١ + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س}_١)}{\text{هـ}}$$

مثال: اذا كانت $\text{د(س)} = ٣\,\text{س}^٢ - ١$ و تغيرت س من س الى س + هـ .

احسب معدل التغير عند س = ١

الحل

$$\therefore \text{معدل التغير} = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{د}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{د(س)}}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{[٣(\text{س} + \text{هـ})^٢ - ١] - [٣\,\text{س}^٢ - ١]}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{[٣\,\text{س}^٢ + ٦\,\text{س هـ} + ٣\,\text{هـ}^٢ - ١ - ٣\,\text{س}^٢ + ١]}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{٦\,\text{س هـ} + ٣\,\text{هـ}^٢}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{هـ}(٦\text{س} + ٣\,\text{هـ})}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{هـ \to 0} 6س + 3هـ$$

∴ معدل التغير = ٦ س عندما س = ١

∴ معدل التغير = ٦ × ١ = ٦

<u>مثال:</u> مكعب من المعدن يتمدد بانتظام محتفظا بشكله . أوجد متوسط معدل التغير فى حجم المكعب عندما يتغير طول حرفه من ٣ سم الى ٣,٢ سم . ثم احسب معدل التغير فى حجم المكعب عندما يكون طول حرفه = ٤ سم .

<u>الحـــل</u>

∴ ح = $س^3$

∴ ت(هـ) = ($س_1$+ هـ $)^3$ – $س_1^3$

= هـ (٣ $س_1^2$+ ٣ $س_1$ هـ+ $هـ^2$)

∴ م هـ = هـ (٣ $س_1^2$+ ٣ $س_1$ هـ+ $هـ^2$) × $\frac{1}{هـ}$

= ٣ $س_1^2$+ ٣ $س_1$ هـ+ $هـ^2$

و بوضع $س_1$ = ٣ ، هـ = ٣,٢ – ٣ = ٠,٢

∴ م(٠,٢) = ٢٧+ ٩ × ٠,٢ + ٠,٠٤ = ٢٨,٨٤

<u>*لايجاد معدل التغير :*</u>

$$\lim_{هـ \to 0} م(هـ) = 3س_1^2 + 3س_1 \times 0 + (0)^2$$

= ٣ $س_1^2$ = ٣ × ١٦ = ٤٨

<u>مثال:</u> اذا كانت د(س) = أ $س^2$+ ب س + حـ حيث أ ، ب ، حـ ∈ ح فأوجد دالة التغير ت(هـ) عندما س من ٢ الى ٢ + هـ . ثم أوجد كلا من أ ، ب ، حـ . علما بأن د (١) = ٠ ، د (٢) = ٥

، ت(٠,٢) = ٦,٢٤

الحـــل

∴ ت(هـ) = د (س + هـ) – د (س)

= أ (س + هـ)^{٢} + ب(س + هـ) + جـ – أ س^{٢} – ب س – جـ

= ٢ أ س هـ + أ هـ^{٢} + ب هـ

∵ د(١) = ٠ ∴ أ + ب + جـ = ٠ ....(١)

د(٢) = ٥ ∴ ٤ أ + ٢ ب + جـ = ٥ ....(٢)

ت(٢,٠) = ٦,٢٤ ∴ ٢١ أ + ٥ ب = ٣١ ....(٣)

بطرح (١) من(٢)

٤ أ + ٢ ب + جـ = ٥

أ + ب + جـ = ٠

---

٣ أ + ب = ٥...(٤)

بضرب (٤) × ٧ و بطرح (٣) منها

∴ ٢١ أ + ٧ ب = ٣٥

٢١ أ + ٥ ب = ٣١

---

٢ ب = ٤ ∴ ب = ٢

من (٣) أ = ١ و من (١) جـ = – ٣

<u>مثال:</u> اذا كانت د(س) = ٣ س – ١ ، س ≤ ١

س^{٢} + س ، س > ١

أوجد تغير الدالة عندما س = ١

<u>الحـــل</u>

م(هـ) $_{س = ١}$ = (د(١ + هـ) – د(١)) / هـ

= (٣(١ + هـ) – ١ – ٢) / هـ ، هـ < ٠

(١ + هـ)^{٢} + ١ + هـ – ٢) / هـ ، هـ > ٠)

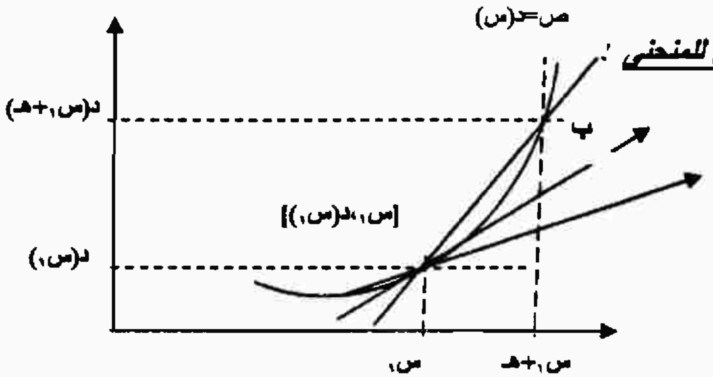
$$= \begin{cases} ٣ & \text{، هـ} < ٠ \\ ٣ + \text{هـ} & \text{، هـ} > ٠ \end{cases}$$

$\therefore \lim\limits_{\text{هـ} \to ٠} \text{م(هـ)} = ٣$ (نهـــا م(هـ) = ٣)

$\therefore$ (معدل التغير)$_{\text{س} = ١}$ = ٣

التفسير الهندسى لمعدل التغير

ميل المماس للمنحنى :



لاحظ أن $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مستقيم قاطع للمنحنى و ميله يتعين بالمقدار

$$\frac{\text{د(س}_١ + \text{هـ)} - \text{د(س}_١\text{)}}{\text{هـ}}$$

أى أن ميل المماس لمنحنى الدالة ص = د(س) عند النقطة (س١ ، د(س١)) ∋ للمنحنى

هو ميل التماس = $\lim\limits_{\text{هـ} \to ٠} \dfrac{\text{د(س}_١ + \text{هـ)} - \text{د(س}_١\text{)}}{\text{هـ}}$ = طا ى = د′ (س)

$\therefore$ معدل التغير = ميل المماس = $\lim\limits_{\text{هـ} \to ٠} \dfrac{\text{د(س+هـ)} - \text{د(س)}}{\text{هـ}}$

اذا كان ص = د(س) فان المشتقة الأولى للدالة عند نقطة هو ميل المماس للمنحنى عند نقطة ويرمز لها $\frac{ء ص}{ء س}$ = ص' = د' (س) = $\frac{ء}{ء س}$ د(س)

مثال: اذا كانت د(س) = س^{٢} ـ ٣ س+ ٥ أوجد د' (س) ثم أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة د عند النقطة (١ ، ٢) الواقعة عليه

الحل

د(س) = س^{٢} ـ ٣ س+ ٥

∴ د(س+هـ)= (س + هـ)^{٢}- ٣ (س + هـ) + ٥

د(س + هـ) ـ (س) = (س + هـ)^{٢}- ٣ (س + هـ) + ٥ ـ س^{٢} +٣ س - ٥

= س^{٢} + ٢س هـ + هـ^{٢} -٣ س -٣ هـ +٥ ـ س^{٢} + ٣ س -٥

=٢س هـ + هـ^{٢} ـ ٣هـ

∴ د'(س) = $\underset{هـ \leftarrow ٠}{نهـا}$ $\frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$

= $\underset{هـ \leftarrow ٠}{نهـا}$ هـ $\frac{(٢س -٣+هـ)}{هـ}$ = ٢س ـ ٣

∴ ميل المماس لمنحنى الدالة عند النقطة (س ، د (س)) =٢س ـ ٣

= ٢ × ١ ـ ٣ = ـ١

∴ ميل المماس = ـ١ عند النقطة (١،٢)

مثال: أوجد ميل المماس للمنحنى ص = $\frac{٢}{٢ س - ٣}$ عند أى نقطة عليه (س ، ص) ثم

استنتج هذا الميل عند النقطة (ـ١ ، ٢) .

الحل

ملاحظة لاحظ أن الدالة غير معرفة عند س= $\frac{٣}{٢}$ أى أن المشتقة الأولى للدالة عند

$\text{س} = \frac{٣}{٢}$ ليس لها وجود .

$$\text{د(س + هـ)} = \frac{٢}{\text{٢(س + هـ) − ٣}}$$

$$\text{د(س + هـ) − د(س)} = \frac{٢}{\text{٢(س + هـ) − ٣}} - \frac{٢}{\text{٢س − ٣}}$$

$$= \frac{\text{٢[٢س − ٣] − ٢[٢س + ٢هـ − ٣]}}{\text{(٢س + ٢هـ − ٣)(٢س − ٣)}}$$

$$\text{د(س + هـ) − د(س)} = \frac{\text{٤س − ٦ − ٤س − ٤هـ + ٦}}{\text{(٢س + ٢هـ − ٣)(٢س − ٣)}}$$

$$\lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{د(س + هـ) − د(س)}}{\text{هـ}} = \frac{−٤}{\text{(٢س − ٣)}^٢} = \text{د}'\text{(س)}$$

$$= \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$$

$$\therefore \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\text{س} = −١ ، ٢} = \frac{−٤}{٢٥} .$$

<u>مثال:</u> اذا كانت العلاقة التى تربط المسافة التى يتحركها جسيم و الزمن تعطى بالمعادلة

$\text{ف} = \text{ن}^٢ + ٢٠\text{ن} + ١$ فأوجد سرعته بعد مرور ٥ ثوان

<u>*الحل*</u>

السرعة هى معدل تغير المسافة بالنسبة للزمن

$\therefore$ لايجاد السرعة نوجد معدل تغير ف بالنسبة لـ ن أى $\lim_{\Delta \text{ن} \to ٠} \frac{\Delta \text{ف}}{\Delta \text{ن}}$

$$\therefore \text{د(ن)} = \text{ف} = \text{ن}^٢ + ٢٠\text{ن} + ١$$

$$\text{د(ن + هـ)} = \text{(ن + هـ)}^٢ + ٢٠\text{(ن + هـ)} + ١$$

$$\therefore \text{ف} = \text{د(ن + هـ) − د(ن)}$$

$$= [\text{(ن + هـ)}^٢ + ٢٠\text{(ن + هـ)} + ١] − [\text{ن}^٢ + ٢٠\text{ن} + ١]$$

$= \text{ن}^2 + ٢\,\text{ن هـ} + \text{هـ}^2 + ٢٠\,\text{ن} + ٢٠\,\text{هـ} + ١ - \text{ن}^2 - ٢٠\text{ن} - ١$

$\therefore \text{ف} = ٢\,\text{ن هـ} + \text{هـ}^2 + ٢٠\,\text{هـ}$

$\therefore$ معدل التغير (السرعة) $= \lim\limits_{\Delta\text{ن} \to ٠} \frac{\Delta \text{ف}}{\Delta \text{ن}} = \lim\limits_{\text{هـ} \to ٠} \frac{٢\,\text{ن هـ} + \text{هـ}^2 + ٢٠\,\text{هـ}}{\text{هـ}}$

$= \lim\limits_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{هـ}(٢\text{ن} + \text{هـ} + ٢٠)}{\text{هـ}} = ٢\text{ن} + ٠ + ٢٠$

$\therefore$ السرعة = ٢ن + ٢٠

عندما ن = ٥ ثوان فان ع = ٢×٥ + ٢٠ = ١٥+٢٠ = ٣٥ متر / ث

__مثال:__ اثبت أن معدل التغير فى حجم مكعب بالنسبة لأحد أضلاعه هو ١٢ بوصة مكعبة لكل بوصة حينما يكون طول الضلع بوصتين .

الحـــل

$\because$ حجم المكعب = (طول الضلع)^3

نفرض طول الضلع ل بوصة و أن حجم المكعب ح بوصة مكعبة

ح = ل^3 $\therefore$ د(ل) = ل^3

$\therefore$ د(ل + هـ) = (ل + هـ^3)

$\therefore$ معدل التغير فى حجم المكعب $\frac{\text{د ح}}{\text{د ل}} = \lim\limits_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{د(ل + هـ)} - \text{د(ل)}}{\text{هـ}}$

$= \lim\limits_{\text{هـ} \to ٠} \frac{(\text{ل} + \text{هـ})^3 - \text{ل}^3}{\text{هـ}} = \lim\limits_{\text{هـ} \to ٠} \frac{(\text{ل} + \text{هـ})^3 - \text{ل}^3}{(\text{ل} + \text{هـ}) - \text{هـ}}$

$= ٣\,(\text{ل})^2$

$\therefore \frac{\text{د ح}}{\text{د ل}} = ٣\,\text{ل}^2$

و عندما يكون الضلع ل = ٢ بوصة فان $\frac{\text{د ح}}{\text{د ل}} = ٣\,(٢)^2 \times ٤ = ١٢$

∴ $\frac{ح^\bullet}{ل^\bullet}$ = ١٢ بوصة مكعبة / بوصة

تمرين(٣)

(١) اذا كانت د(س) = س^{٢} + س وتغيرت س من ٢ الى ٢ + هـ أوجد :

(أ) دالة التغير ت ، ثم أوجد ت (٠,١)

(ب) دالة متوسط التغير م ، ثم أوجد م (٠,٠١)

(جـ) معدل التغير عند س = ٢

(٢) أوجد دالة متوسط معدل التغير للدالة د(س) = س^{٢} – ٣س + ١ عندما تتغير س من س$_{١}$ الى س$_{١}$ + هـ ومنها أوجد:

(أ) متوسط معدل التغير عندما س$_{١}$ = ٥ ، هـ = ٠,٣

(ب) متوسط معدل التغير عندما س$_{١}$ = ٨ ، هـ = – ٠,٥

(٣) للدالة د : س ⟵ $\sqrt{س}$ ، س ∋ ح . أوجد :

(أ) دالة التغير (ب) دالة متوسط معدل التغير عند س$_{١}$= ١

(٤) اذا كانت د(س) معرفة كالآتى :

د(س) = س^{٢} عند س > ٣

٢ س + ٣ عند س ≥ ٣

أوجد متوسط تغير الدالة (س) عندما تتغير س :

(أ) من ٢ الى ٣ (ب) من ٤ الى ٤,٥

(٥) أوجد دالة التغير ت(هـ) للدالة د(س) = أ س^{٢}+ ب س + ٤ وذلك عندما تتغير س من ٣ الى ٣ + هـ . واذا كانت د(٣) = ٤ ، ت(٠,٥) = ١,٧٥ . أوجد قيمتى أ ، ب

(٦) اذا كانت د(س) = $\sqrt{س}$ (س > ١)

٥ – ٢س (س ≤ ١) أوجد :

(أ) متوسط معدل التغير للدالة عندما تتغير س من س = ١ الى س = ١,٣

(ب) متوسط معدل التغير عندما تتغير س من س = ١ الى س = ٠,٦٤

(٧) اذا كانت د(س) =
$$\begin{cases} ٢\text{ س}^{٢} + ٣ & ١ > \text{س} \geq ١ \\ ٦ - ٥\text{ س} & ١ < \text{س} < ٣ \\ \text{س} - ٣ & ١ > \text{س} \leq ٣ \end{cases}$$

احسب متوسط معدل التغير اذا تغيرت س :

(أ) من س=١وتغيرت س بمقدار هـ حيث | هـ | < ١

(ب) من س =٣ وتغيرت س بمقدار هـ حيث | هـ | < ١

(٨) اذا كانت د(س) =
$$\begin{cases} \text{س}^{٣} + ٢\text{ س} & ، \text{س} \geq ٠ \\ \text{س}^{٢} + ٢\text{ س} & ، \text{س} > ٠ \end{cases}$$

أوجد معدل التغير للدالة عندما س = ٠

(٩) قرص دائرى من المعدن يتمدد بانتظام . أوجد معدل تغير مساحة سطح القرص بالنسبة الى طول نصف القطر وذلك عندما نصف القطر = ٧ سم

(١٠) اذا كانت الطاقة ق (بالأرج) فى سلك زنبركى تعطى بالمعادلة ق = ١٠٠٠ سم^{٢} حيث س هو التضاغط فى السلك بالسم . وكان الدفع فى السلك هو التغير فى الطاقة بالنسبة الى التضاغط. فأوجد كلا من : الطاقة و الدفع عند س = ٢ سم

المشتقة الأولى

تعرف المشتقة الأولى أو المعامل التفاضلي الأول للدالة ص = د(س) بأنه ميل المماس لهذه الدالة عند أي نقطة س في مجالها ويرمز إلى ذلك بالاتي

الدالة — مشتقة الدالة بالنسبة للمتغير س

المشتقة أو المعامل التفاضلي الأول

ص أو د(س) $\longleftarrow$ أو تفاضل / أو معدل تغير بالنسبة ل س / أو ميل المماس للمنحنى ص=د(س)

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ أو $\text{د}'(\text{س})$

أو ص'

أو $\underset{\Delta \text{س} \to 0}{\text{نها}} \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$

قوانين مشتقة الدوال الجبرية

قاعدة

إذا كانت ص = $\text{س}^{\text{ن}}$ فإن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{ن س}^{\text{ن}-1}$ حيث ن عدد حقيقي

فمثلا

(١) ص = $\text{س}^{٧}$ فإن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٧ \text{ س}^{٦}$

(٢) ص = $\text{س}^{-٥}$ فإن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -٥ \text{ س}^{-٦}$

ومن هذه القاعدة يمكن استنتاج الحالات الخاصة التالية

(١) ص= أ $\text{س}^{\text{ن}}$ فإن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{أ ن س}^{\text{ن}-١}$

فمثلا ص = $٣\text{س}^{٥}$ فإن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ١٥ \text{ س}^{٤}$

(٢) ص = أ س فإن $\frac{ءص}{ءس} = أ$

فمثلا ١) ص = ٥ س فإن $\frac{ءص}{ءس} = ٥$ ٢) ص = س فإن $\frac{ءص}{ءس} = ١$

(٣) ص = أ (مقدار ثابت) فإن $\frac{ءص}{ءس} = ٠$

فمثلا ١) ص = ٧ فإن $\frac{ءص}{ءس} = ٠$ ٢) ص = ٣ ' فإن $\frac{ءص}{ءس} = ٠$

(٤) ص = $\sqrt{س}$ فإن $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢\sqrt{س}}$

فمثلا ١) ص = $\sqrt{س}$ ص = $س^{\frac{١}{٢}}$ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢} س = س^{-\frac{١}{٢}}$

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢} \cdot \frac{١}{س^{\frac{١}{٢}}} = \frac{١}{٢} \cdot \frac{١}{\sqrt{س}} = \frac{١}{٢\sqrt{س}}$$

وبشكل عام ص = $\sqrt[ن]{س}$ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{ن\sqrt[ن]{س^{ن-١}}}$

البرهان

ص = $\sqrt[ن]{س}$ $\therefore$ ص = $س^{\frac{١}{ن}}$

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{ن} س^{\frac{١}{ن}-١} = \frac{١}{ن} س^{\frac{١-ن}{ن}} = \frac{١}{ن} س^{\frac{-(ن-١)}{ن}} = \frac{١}{ن} \cdot \frac{١}{س^{\frac{ن-١}{ن}}}$$

$$= \frac{١}{ن} \cdot \frac{١}{\sqrt[ن]{س^{ن-١}}} = \frac{١}{ن\sqrt[ن]{س^{ن-١}}}$$

فمثلا ١) $\text{ص} = \sqrt[٣]{\text{س}}$ $\qquad \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{٣\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}}$

٢) $\text{ص} = \sqrt[٥]{\text{س}}$ $\qquad \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{٥\sqrt[٥]{\text{س}^{٤}}}$

(٥) $\text{ص} = \frac{١}{\text{س}}$ فإن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-١}{\text{س}^{٢}}$

<u>البرهان</u>

$\text{ص} = \frac{١}{\text{س}}$ $\quad \therefore \text{ص} = \text{س}^{-١}$ $\quad \therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = (-١)\,\text{س}^{-٢} = \frac{-١}{\text{س}^{٢}}$

ملاحظة :

تفاضل حاصل ضرب دالتين = الأول × تفاضل الثاني + الثاني × تفاضل الأول

<u>مثال</u>

إذا كانت ص = (٢س^{٢} + ١) (٣ س – ٥) أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

<u>الحل</u>

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \underbrace{(٢\text{س}^{٢} + ١)}_{\text{الأول}} \times \underbrace{(٣)}_{\text{تفاضل الثاني}} + \underbrace{(٣\text{س} - ٥)}_{\text{الثاني}} \times \underbrace{(٤\text{س})}_{\text{تفاضل الول}}$$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٦\text{س}^{٢} + ٣ + ١٢\text{س}^{٢} - ٢٠\text{س} = ١٨\text{س}^{٢} - ٢٠\text{س} + ٣$

<u>حل أخر</u>

يمكن تبسيط المقدار ثم التفاضل كالتالي

ص= (٢س^{٢} + ١) (٣ س – ٥)

∴ ص = ٦س^{٣} - ١٠ س^{٢} + ٣س − ٥

$\frac{ءص}{ءس}$ = ١٨س^{٢} - ٢٠ س + ٣ وهو نفس الناتج السابق

نتيجة

تفاضل حاصل ضرب ثلاثة دوال

= الأول × الثاني × تفاضل الثالث + الأول × الثالث × تفاضل الثاني + الثاني × الثالث × تفاضل الأول

فمثلا ص = (٣س + ١) (٢س^{٢} + ٥) (٧س − ١)

فإن

$\frac{ءص}{ءس}$ = = [(٣س + ١) (٢س^{٢} + ٥) (٧)] [(٣س + ١) (٧ س − ١)

(٤ س)] + [(٢س^{٢} + ٥) (٧ س − ١) (٣)]

= [٤٢س^{٣} +١٠٥س+١٤س^{٢}+٥]+[٨٤س^{٣} + ١٦س^{٢}-٤س]+[٤٢س^{٣} -٦س^{٢}

+١٠٥س -١٥]

$\frac{ءص}{ءس}$ = ١٦٨س^{٣} +٢٤س^{٢} +٢٠٦س -٢٠

ملاحظة :

تفاضل خارج قسمة دالتين = $\frac{\text{المقام × تفاضل البسط - [البسط × تفاضل المقام]}}{\text{مربع المقام}}$

<u>فمثلا</u> ص = $\frac{٢س^{٢}-١}{٣س+٥}$

$\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{١٢س^{٢} + ٢٠س - ٦س^{٢} + ٣}{(٣س+٥)^{٢}}$ = $\frac{٦س^{٢} + ٢٠س + ٣}{(٣س+٥)^{٢}}$

ملاحظة :

تفاضل دالة الدالة = تفاضل الدالة × تفاضل ما بداخل الدالة

إذا كانت في صورة قوس = تفاضل القوس × تفاضل ما بداخل القوس

إذا كانت في صورة جذر = تفاضل الجذر × تفاضل ما بداخل الجذر

مثال :

إذا كانت $\text{ص} = (\text{٣س}^{٢} + \text{٥ س} + ٣)^{٨}$ أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

الحل

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٨\,(\text{٣س}^{٢}+\text{٥س}+٣)^{٧} \times [\text{٦س}+٥] = (\text{٤٨س}+٤٠)(\text{٣س}^{٢}+\text{٥س}+٣)^{٧}$$

مثال :

إذا كانت $\text{ص} = \sqrt[٢]{\text{٥س}^{٢}+١}$ فإن

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \underbrace{\frac{١}{٢\sqrt{\text{٥س}^{٢}+١}}}_{\text{تفاضل الجذر}} \times \underbrace{\text{١٠س}}_{\text{تفاضل ما تحت الجذر}} = \frac{\text{٥س}}{\sqrt{\text{٥س}^{٢}+١}}$$

أى أن تفاضل الجذر التربيعي $= \dfrac{\text{تفاضل ما تحت الجذر}}{\text{ضعف الجذر}}$

وبشكل عام تفاضل الجذر النوني $= \dfrac{\text{تفاضل ما تحت الجذر}}{\text{ن}\sqrt[\text{ن}]{\text{ما تحت الجذر}^{\text{ن}-١}}}$

فمثلا $\text{ص} = \sqrt[٧]{\text{٣س}^{٢} + \text{٥س} + ١}$ فإن $\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \dfrac{\text{٦س}+٥}{٧\sqrt[٧]{(\text{٣س}^{٢}+\text{٥س}+١)^{٦}}}$

قاعدة السلسلة

إذا كانت ص = د (ع) ، ع = ر(س) حيث د قابلة للأشتقاق عند ع ، ر قابلة للأشتقاق عند س

فإن $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس}$

فمثلا إذا كانت ص = $(٣ س^{٢} + ٥س + ٣)^{٨}$ أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ مستخدما قاعدة السلسلة

<u>الحل</u>

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس} = ٨ع^{٧} \times [٦ س + ٥]$

ولكن ع = $٣س^{٢} + ٥ س + ٣$

$\frac{ءص}{ءس} = ٨ (٣س^{٢} + ٥ س + ٣)^{٧} (٦ س + ٥)$

نتيجة

إذا كانت ص = د(ع) ، ع = ر(م) ، م= ي (س)

فإن $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءم} \times \frac{ءم}{ءس}$

<u>فمثلا</u> إذا كانت $٢ع^{٢} + ٥$ ، ع = $م^{٢} + ١$ ، م = ٧س +١٢ أوجد $\frac{ءص}{ءس}$

<u>الحل</u>

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءم} \times \frac{ءم}{ءس}$

$= ٦ع^{٢} \times ٢م \times ٧ = ٨٤ع^{٢} م$ ولكن ع = $م^{٢} + ١$

= ٨٤(م^{٢} + ١)^{٢} م

= ٨٤[م^{٢} + ٢م + ١]م

= ٨٤ [م^{٣} + ٢م^{٢} + م] ولكن م = ٧س + ١٢

$\frac{ءص}{ءس}$ = ٨٤[(٧س+١٢)^{٣} + ٢ (٧س+١٢)^{٢} + (٧س + ١)]

التفاضل الضمني

يجرى للدوال الضمنية وهى التي تكون في صورة د (س ، ص) = ٠ أي ارتباط س مع ص بعلاقة

فمثلا ١) س ص = س^{٢} + ص^{٢} + ١   ٢) س ص + $\sqrt{\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}}$

والطريقة العلمية لتفاضل الدوال الضمنية تتلخص في الآتي

- هو تفاضل س ، ص معاً ولكن عند تفاضل ص يلزم ضربها في $\frac{ءص}{ءس}$ ثم

استخلاص $\frac{ءص}{ءس}$ في الطرف الأيمن

مثال :

أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ إذا كانت س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥

الحل

بالتفاضل ٢س + ٢ص $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

٢ص($\frac{ءص}{ءس}$) = -٢س

$\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{-س}{ص}$

مثال :

أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ اذا كانت $\frac{١}{ص} + \frac{١}{س} = ١$

الحل

بالتفاضل $\frac{-١}{ص^{٢}} \left(\frac{ءص}{ءس} \right) - \frac{١}{س^{٢}} = ٠$

أو $\frac{-١}{ص^{٢}} \left(\frac{ءص}{ءس} \right) = \frac{١}{س^{٢}}$ أو $\frac{ءص}{ءس} = \frac{-ص^{٢}}{س^{٢}}$

أمثلة محلولة على مشتقة الدوال الجبرية

١- أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ في الحالات الاتية

(أ) $ص = س^{-٨}$

(ب) $ص = \frac{\sqrt[٤]{س}}{س}$

(ج) $ص = \sqrt[٥]{س^{٣}}$

(د) $ص = س \sqrt[٣]{س}$

(هـ) $ص = \frac{٢}{\sqrt[٥]{س^{٣}}}$

الحل

(أ) $\frac{ءص}{ءس} = -٨س^{-٩} = \frac{٨}{س^{٩}}$

(ب) $ص = \frac{س^{\frac{١}{٤}}}{س}$ $ص = س^{\frac{١}{٤}-١}$ $ص = س^{-\frac{٣}{٤}}$

$\frac{ءص}{ءس} = -\frac{٣}{٤} س^{-\frac{٧}{٤}} = \frac{-٣}{٤\sqrt[٤]{س^{٧}}}$

(ج) ص = $س^{\frac{٣}{٥}}$ $\frac{دص}{دس} = \frac{٣}{٥}$ $س^{-\frac{٢}{٥}} = \frac{٣}{٥س} = \frac{٣}{٥\sqrt[٥]{س^{٧}}}$

(د) ص = س $\sqrt[٣]{س}$ ص = س س$^{\frac{١}{٣}}$

ص = $س^{\frac{٤}{٣}}$ $\frac{دص}{دس} = \frac{٤}{٣}$ $س^{\frac{١}{٣}} = \frac{٤}{٣}\sqrt[٣]{س}$

(هـ) ص = $\frac{٢}{\sqrt[٥]{س^{٣}}}$ ص = ٢ $س^{-\frac{٣}{٥}}$

$\frac{دص}{دس} = -\frac{٦}{٥}$ $س^{-\frac{٨}{٥}} = \frac{-٦}{٥\sqrt[٥]{س^{٨}}}$

٢ ـ <u>أوجد $\frac{دص}{دس}$ في كل من الحالات الآتية</u>

(أ) ص = $\frac{س^{٣}-١}{س-١}$ (ب) ص= $\frac{\sqrt{س+١}}{(\sqrt{س+١})^{٣}}$

(ج) ص = (١ - $\sqrt{س}$) (١ + $\sqrt{س}$) (١+ س) (١+$س^{٢}$) (١+ $س^{٤}$)

<u>الحل</u>

(أ) ص = $\frac{س^{٣}-١}{س-١}$ = $س^{٢}$ + س – ١

ص = $س^{٢}$ + س – ١ $\frac{دص}{دس}$ = ٢س + ١

لاحظ قانون الفرق بين مكعبين $أ^{٣}$ – $ب^{٣}$ = (أ – ب) ($أ^{٢}$ + أ ب + $ب^{٢}$)

(ب) ص = $\frac{\sqrt{س+١}}{\sqrt{س+١}\ \sqrt{س+١}\ \sqrt{س+١}} = \frac{١}{(\sqrt{س+١})^{٢}} = \frac{١}{س+١}$ = $(س + ١)^{-١}$

$\frac{دص}{دس}$ = (-١) $(س + ١)^{-٢}$ (١) = $\frac{١}{(س+١)^{٢}}$

(ج) ص = (١ - $\sqrt{س}$) (١ + $\sqrt{س}$) (١+ س) (١+$س^{٢}$) (١+ $س^{٤}$)

$ص = (١ - س)(١ + س)(١ + س^{٢})(١ + س^{٤})$

$= (١ - س^{٢})(١ + س^{٢})(١ + س^{٤})$

$ص = (١ - س^{٤})(١ + س^{٤})$

$س = ١ - س^{١٢}$ $\qquad\qquad$ $\frac{ءص}{ءس} = -١٦س^{١٥}$

لاحظ استخدام في هذا المثال $(أ - ب)(أ + ب) = أ^{٢} - ب^{٢}$ بطريقة متتالية

٣- **أوجد** $\frac{ءص}{ءس}$ **إذا كانت :**

(أ) $ص = \sqrt{س} + \sqrt[٣]{س} + \sqrt[٤]{س}$

(ب) $ص = ١ + \frac{١}{س^{٢}} + \frac{١}{س^{٣}}$

(ج) $ص = \frac{١}{١ + س + س^{٢} + س^{٣}}$

(د) $ص = \sqrt{س + س^{٢} + س^{٣}}$

الحل

(أ) $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢\sqrt{س}} + \frac{١}{٣\sqrt[٣]{س^{٢}}} + \frac{١}{٤\sqrt[٤]{س^{٣}}}$

(ب) $ص = ١ + س^{-١} + س^{-٢} + س^{-٣}$

$\frac{ءص}{ءس} = (-١)س^{-٢} + (-٢)س^{-٣} + (-٣)س^{-٤} = -\frac{١}{س^{٢}} - \frac{٢}{س^{٣}} - \frac{٣}{س^{٤}}$

(ج) $ص = \frac{١}{١ + س + س^{٢} + س^{٣}} = (١ + س + س^{٢} + س^{٣})^{-١}$

$$\frac{ءص}{ءس} = -١(١+س+س^٢+س^٣)^{-٢}\,(١+س+س^٢+س^٣) =$$

$$\frac{-(١+٢س+٣س^٢)}{(١+س+س^٢+س^٣)^٢}$$

(د) $ص = \sqrt{س+س^٢+س^٣}$

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{١+٢س+٣س^٢+٤س^٣}{٢\sqrt{س+س^٢+س^٣+س^٤}}$$

٤- **أوجد مشتقة الدوال الآتية**

(أ) $د(ن) = \frac{٢}{\sqrt{ن}} + \frac{٦}{\sqrt[٣]{ن}}$

(ب) $\theta = \frac{٢ر+٥}{٥ر+٢}$

(ج) $ف = \dfrac{\frac{٣}{٥ت}-١}{\frac{٢}{ت^٢}+٧}$

(د) $ف = (ن-١)\sqrt{ن^٢-٢ن+١}$

(ه) $ك(ع) = (٣ع)^{-٥}$

الحل

(أ) $د(ن) = ٢ن^{-\frac{١}{٢}} + ٦ن^{-\frac{١}{٣}}$

$$د'(ن) = -ن^{-\frac{٣}{٢}} - ٢ن^{-\frac{٤}{٣}} = \frac{-١}{ن^{\frac{٣}{٢}}} - \frac{٢}{ن^{\frac{٤}{٣}}} = \frac{-١}{\sqrt{ن^٣}} - \frac{٢}{\sqrt[٣]{ن^٤}}$$

(ب) $\frac{\text{ءθ}}{\text{ءر}} = \frac{\text{١٥ر+٤} - [\text{١٥ر+٢٥}]}{(\text{٥ر+٢})^{٢}}$

$\frac{\text{ءθ}}{\text{ءر}} = \frac{\text{-٢١}}{(\text{٥ر+٢})^{٢}}$

(ج) بضرب البسط والمقام في ت^{٢} $\quad$ ف= $\frac{\text{ت}^{٢}\left(\frac{٣}{\text{٥ت}} - ١\right)}{\text{ت}^{٢}\left(\frac{٢}{\text{ت}^{٢}} + ٧\right)}$

ف= $\frac{\text{٠,٦٠ت} - \text{ت}^{٢}}{\text{٢+٧ت}^{٢}} = \frac{(\text{٢} + \text{٧ت}^{٢})(\text{٠,٦} - \text{٢ت}) - \left[(\text{٠,٦ت} - \text{ت}^{٢})(\text{١٤ت})\right]}{(\text{٢} + \text{٧ت}^{٢})^{٢}}$

$\therefore \frac{\text{ءف}}{\text{ءت}} = \frac{\text{١,٢} - \text{٤ت} - \text{٤,٢ت}^{٢}}{(\text{٢} + \text{٧ت}^{٢})^{٢}}$

(هـ) $\frac{\text{ءك}}{\text{ءع}} = \text{-٥}(\text{٣ع})^{\text{-٦}} \times ٣$

$\frac{\text{ءك}}{\text{ءع}} = \frac{\text{-١٥}}{(\text{٣ع})^{٦}} = \frac{\text{-١٥}}{\text{٣}^{٦}\text{ع}^{٦}} = \frac{\text{-١٥}}{\text{٢٤٣ع}^{٦}}$

٥-(أ) إذا كانت ص=س^{٣}+$\frac{٩}{٢}$س ـ٣٠س+١٢ **أوجد قيم س عندما** $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$

(ب) اذا كانت ص = س$\sqrt{\text{س+١}}$ أوجد قيم س التي تجعل $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$

الحل

(أ) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣س^{٢} +٩س -٣٠

عندما $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ =٠ $\quad\therefore$ ٣س^{٢} +٩س -٣٠ = ٠ بالقسمة على ٣

س^{٢} +٣س -١٠=٠ $\quad\therefore$ (س-٣) (س+٥) = ٠

$\therefore$ أما س = ٢ أ، س= -٥

(ب) $\frac{ءص}{ءس} = \frac{1}{2\sqrt{س+1}}$ ولكن $\frac{ءص}{ءس} = ص$ ∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{1}{2\sqrt{س+1}}$

$ص = \sqrt{س+1}$ ∴ $\sqrt{س+1} = \frac{1}{2\sqrt{س+1}}$

أو $2(\sqrt{س+1})^2 = 1$ ∴ $2(س+1) = 1$ ∴ $س+1 = \frac{1}{2}$

∴ $س = -\frac{1}{2}$

٧- أوجد المشتقة الأولى للدوال الآتية

(أ) $د(س) = \sqrt[9]{(3-س-2س^2)^2}$

(ب) $د(س) = (\frac{\sqrt{س}}{س} + \frac{س}{\sqrt{س}})^5$

الحل

(أ) $د(س) = (3-س-2س^2)^{\frac{5}{9}}$

$د'(س) = \frac{5}{9}(3-س-2س^2)^{-\frac{4}{9}}(-1-4س)$

(ب) $د(س) = [\frac{1}{\sqrt{س}} + \sqrt{س}]^5$

∴ $د(س) = [س^{-\frac{1}{4}} + س^{\frac{1}{2}}]^5$

∴ $د'(س) = 5[س^{-\frac{1}{2}} + س^{\frac{1}{2}}]^4 \times (\frac{-1}{2}س^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}س^{-\frac{1}{2}})$

$= 5[\frac{1}{\sqrt{س}} + \sqrt{س}]^4 (\frac{-1}{2\sqrt{س^3}} + \frac{1}{2\sqrt{س}})$

مثال :

اذا كانت $ص = ع^5$ ، $ع = 3س^2 + 5$ فأوجد $\frac{ءص}{ءس}$

الحل

$\frac{ءص}{ءع} = ع^{٥}$ ———————— (١)

$\frac{ءع}{ءس} = ٦ س$ ———————— (٢) بضرب ١ × ٢

$\frac{ءص}{\cancel{ءع}} \times \frac{\cancel{ءع}}{ءس} = ٥ ع^{٤} \times ٦ س$

$\frac{ءص}{ءس} = ٥ع^{٤} \times ٦ س$

$= ٥(٣س^{٢} + ٥)^{٤} \times ٦ س$

حل آخر

$ص = ع^{٥}$ ———————— (١) ، $ع = ٣س^{٢} + ٥$ ———————— (٢)

من (١) ، (٢)

$ص = (٣ س^{٢} + ٥)^{٥}$

$\frac{ءص}{ءس} = ٥ (٣س^{٢} + ٥)^{٤} \times ٦ س$

مثال :

اذا كانت $س = ن^{٢} - ١$ ، $ص = ن^{٣}$ أوجد $\frac{ءص}{ءس}$

الحل

$\frac{ءس}{ءن} = ٢ ن$ ———————— (١)

$\frac{ءص}{ءن} = ٣ن^{٢}$ ———————— (٢) بالقسمة

$\frac{ءص}{ءن} + \frac{ءس}{ءن} = ٣ ن^{٢} \times \frac{١}{٢ن} = \frac{٣}{٢} ن$

، $س = ن^{٢} - ١$

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{٣}{٢}\,(ن^{٢} - ١)$$

مثال :

اذا كانت ص = $س^{٢} + ١$ ، ع = $\sqrt{س^{٢} - ١}$ فاثبت ان

$$\frac{ءص}{ءع} = ٢\,ع$$

الحل

$$\frac{ءص}{ءس} = ٢\,س \qquad ، \quad ع^{٢} = س^{٢} - ١$$

$$٢ع\,\frac{ءع}{ءس} = ٢\,س$$

$$\frac{ءص}{ءع} = \frac{ءص}{ءس} \times \frac{ءس}{ءع} = ٢س \times \frac{٢ع}{٢س} = ٢\,ع$$

مثال :

اذا كانت ص = $س^{٢} + س$ ، ع = $\frac{\sqrt{س}-١}{س}$ اوجد $\frac{ءص}{ءع}$ عندما س = ١

الحل

$$ص = س^{٢} + س \qquad \frac{ءص}{ءس} = ٢\,س + ١$$

$$ع = س^{-\frac{١}{٢}} - س^{-١}$$

$$\frac{ءع}{ءس} = -\frac{١}{٢}\,س^{-\frac{٣}{٢}} + س^{-٢}$$

$$\frac{ءص}{ءع} = \frac{٢+١}{-٠,٥+١} = ٦$$

مثال :

اذا كانت ص $= \left(\dfrac{\text{ع}+١}{\text{ع}-١}\right)^{٢}$ ، ع = س^{٢} + ٢ س   أوجد $\dfrac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$

الحل

$$\text{ص} = \left(\frac{\text{س}^{٢}+٢\text{س}+١}{\text{س}^{٢}+٢\text{س}-١}\right)^{٢}$$

$$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = ٢\left(\frac{\text{س}^{٢}+٢\text{س}+١}{\text{س}^{٢}+٢\text{س}-١}\right) \times$$

$$\frac{(\text{س}^{٢}+٢\text{س}-١)(٢\text{س}+٢)-(\text{س}^{٢}+٢\text{س}+١)(٢\text{س}+٢)}{(\text{س}^{٢}+٢\text{س}-١)^{٢}}$$

$$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = -٨$$

تمرين (٤)

المجموعة الأولى

أوجد المشتقة الأولى للدالة د حيث

د = { (س ، ص) : ص = د (س) } وذلك بالنسبة إلى س في كل من الحالات الآتية

١) د (س) = (س^{٣} − س) (س^{٤} + ٤)

٢) د (س) = (س^{٢} + ٢ س + ٣) (٢ س^{٢} − ٥ س + ١)

٣) د (س) = (٤ س^{٥} - ٦س^{٢}) (٣س^{٢} −س^{٣})

٤) د (س) = (٢س +١) (٣ س − ٢) (٤ س − ١)

٥) د (س) = (٣ س − ١) (٢ س − ٢) (٤ س + ١)

٦) د (س) = (٣ س + ٢)^{٢}

٧) د (س) = $\dfrac{٤}{\text{س}+١}$ بشرط أن س ≠ -١

٨) د (س) = $\dfrac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢}+٣}$

٩) د (س) = $\dfrac{\sqrt{\text{س}}}{\text{س}-١}$ بشرط ان س≠ ١

١٠) د (س) = $\frac{١ - س + س^{٢}}{١ + س + س^{٢}}$

١١) أوجد معادلتي المماس والعمودي للمنحنى الذي معادلته

ص= (٢س^{٢} + ٣) (١- س^{٢}) عندما س = ١

١٢) أوجد النقطة الواقعة على المنحنى الذي معادلته :

ص= $\frac{س + ١}{س^{٢} + ٢س + ٥}$ والتي يكون المماس عنـ.ـها موازيا المحور السيني

١٣) أوجد ميل المماس للمنحنى الذي معادلته

ص = $\frac{٤س}{س^{٢} + ٤}$ عند نقطة الأصل والنقطة (٢ ، ١)

١٤) أوجد معادلتي المماس والعمودي للمنحنى المعرف بالمعادلة :

ص = $\frac{٥س}{س^{٢} + ١}$ عندما س = ٢

١٥) أوجد معادلة المماس والعمودي للمنحنى المعرف بالمعادلة :

ص = $\frac{٢س + ١}{٣ - س}$ عندما س = ٥

المجموعة الثانية

١- أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية :-

أ - ص = (٧س – ٣) (٨ س + ٢)

ب - ص = (س^{٢} +١) (س +٢)

ج - ص = (س^{٢} -٢س +١) (٢س^{٣} +٥)

ء - ص = (س -١) (س+٢) (س – ٣)

ه - ص = (س^{٤} +٢س -٣) (س^{٦} -٧س^{٥} +٨ س^{٣} +٩س^{٢} +١)

و - ص= (س$^{-٢}$ -٢) (س-٤) (س^{٣})

ز – ص = $\frac{٢س^{٢} - ٣س + ٤}{س}$

ح - ص = $\frac{٢س^{٣} - ٣س^{٢} + ٤س - ٢}{س^{٣}}$

ط- ص = $\frac{٥س - ٢}{٤س + ٣}$

ي - $ص = \frac{س^{٢}+١}{س^{٢}-١}$

ك - $ص = \frac{س}{س^{٢}+١}$

٢- إذا كانت $د(س) = \frac{س+أ}{س-أ}$ وكان $د'(٢) = -٢$ فأوجد قيمة الثابت أ

٣- إذا كانت $د(س) = \frac{س^{٢}+ب\,س+جـ}{س^{٢}+٣س+٢}$ وكان $د(٠) = ٢$ ، $د'(٠) = -٤$ فأوجد قيم ب ، جـ الحقيقية

٤- أوجد معادلتي المماس والعمودي لكل من المنحنيات الآتية

أ- $ص = (س^{٢} - ١)(س+٥)$ عند $س = -٥$

ب – $ص = \frac{س}{١+٢س}$ عند النقطة $(-١ ، ١)$

جـ - $ص = \frac{١-٢س}{س-٣}$ عند $س = ٢$

المجموعة الثالثة

١- أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ في كل مما يأتي :

أ - $ص = (س+٢)^{٧}$

ب- $ص = (٣س - ١)^{٥}$

جـ - $ص = (س^{٢} + ٣س - ٢)^{٤}$

ء - $ص = س^{٥}(س + ٣)^{٧}$

هـ - $ص = (س^{٢} + ٢س - ٣)^{١٦}(٢س + ٥)^{١٣}$

ل - $ص = \frac{(٢س^{٢}+٣)^{٥}}{(٤س^{٢}-١)^{٧}}$

و - $ص = \frac{(س+١)^{٤}}{(س-١)^{٥}}$

م - $ص = \frac{(س^{٢}+١)^{٥}(٣س-٧)^{٨}}{(س^{٢}+٥س-٤)^{٦}}$

٢- أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ لكل الدوال الآتية

أ - $ص = (٢ س + ٥)^{١٢}$

ب- $ص = \sqrt{٢س^٢ + ٣}$

جـ- $ص = \left(\frac{س^٣}{س^٢+١} \right)^٥$

ء - $ص = \left(\frac{س^٢+١}{س^٢-١} \right)^٨$

٣- أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ بدلالة س ، ص في كل من الدوال الضمنية الآتية

أ - $س^٤ + ٤ص^٤ - ٢ = ٠$

ب- $٢س^٢ - ٣س ص + ص^٢ + س + ٢ ص - ٨ = ٠$

جـ- $س^٣ + ٢س^٢ ص - س ص^٢ + ٢ص^٣ = ٤$

ء - $س^٥ - ٢س^٣ص^٢ + ٣س ص^٤ - ص^٥ = ٥$

هـ - $\frac{س^٢}{أ^٢} + \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$ حيث أ ، ب ثابتان

و - $س^٢ - ٢ س ص + ص^٢ = ١٦$

م - $س^٤ - ٢ سص^٢ + س ص^٣ = ١$ عند النقطة (١ ، ٢)

<u>المجموعة الرابعة</u>

١- اذا كانت $ص = \left(\frac{س^٢+١}{س^٢-١} \right)^ن$ فاثبت ان $(١ - س^٤) \frac{ءص}{ءس} = ٤ن س ص$

٢- إذا كان $د(س) = س^٣ - ٣س^٢ ٢٤س$ أوجد قيم س التي تجعل $د^/(س)$ = صفر

٣- أوجد المشتقة الأولى لكل من :-

أ- $ص = \frac{(س^٢ - ١)^٢}{س+١}$ ب- $ص = س \sqrt{١ - س^٢}$

٤) إذا كانت $د(س) = ٢س^٣ \sqrt{٣س - ٦}$ أوجد $د^/(٠)$

٥) أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ إذا كانت $ص = (س^٢ + ١) (س^٣+٢س) (س^٤+٥س^٢)$

٦) إذا كانت $ص = (س^{٢} - ١)^{ن}$ حيث ن = عدد صحيح موجب اثبت أن

$$٢ن\ س\ ص + (١ - س^{٢})\frac{ء\ ص}{ء\ س} = ٠$$

٧) إذا كانت $ص = \frac{٣-٢س}{٣+٢س}$ فاثبت ان س $\in$ { ٠ ، - ٣} وذلك عندما $\frac{ء\ ص}{ء\ س} = \frac{-٤}{٣}$

٨) إذا كانت $ص = \sqrt{٣س} + \frac{١}{\sqrt{٣س}}$ فاثبت أن

$$\frac{ء\ ص}{ء\ س} = \frac{(٣س+١)\sqrt{٣س}}{٦س^{٢}}$$

٩) إذا كانت $\sqrt[ن]{ص} = \frac{س^{٢}-٢}{س^{٢}+١}$ فاثبت ان $\frac{ء\ ص}{ء\ س} = \frac{٦ن\ س\ ص}{(س^{٢}+١)(س^{٢}-٢)}$

١٠) أوجد $\frac{ء\ ص}{ء\ س}$ لكل من

أ- $ص = \sqrt{٣س^{٢}-س-٦}$

ب - $ص = \sqrt[٣]{٣س^{٢}-س-٦}$

جـ - $ص = \frac{س}{\sqrt{س} - ١}$

ء - $ص = \sqrt[٣]{(س^{٢}+س)^{٢}}$

١١) إذا كانت $م = أ(ن - أ)^{٢}$ حيث أ ثابت

أثبت ان $\left(\frac{ء\ م}{ء\ ن}\right)^{٣} - ٤\ ن\ م\left(\frac{ء\ م}{ء\ ن}\right) + ٨\ م^{٢} =$ صفر

١٢) أثبت ان : $\frac{ء}{ء\ س}(س^{-ن}) = -ن\ س^{-ن-١}$ حيث ن عدد صحيح موجب

١٣) إذا كانت $(٥\ ن - م)^{٥}(ن + م) = ٣$

فاثبت أن $\frac{ء\ م}{ء\ ن} - \frac{٥\ ن}{م} = ٤$

١٤) إذا كان $(٤\,ن - م)^{٤}\,(ن + م) = ١$ فاثبت ان $\frac{ءم}{ءن} - \frac{٤ن}{م} = ٣$ $(م \neq ٠)$

١٥) إذا كان $س\,ص = (س + ص)^{٢}$

فاثبت أن $س\,ص' = ص$ حيث $ص' = \frac{ءص}{ءس}$

المشتقة الأولى لبعض الدوال المثلثية

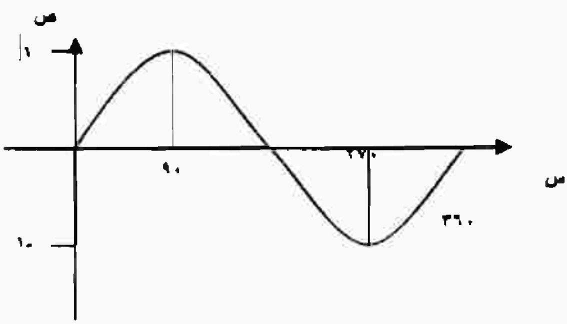
دالة الجيب

المجال   ص = حا س

المنطلق   ح

المدى   (-١ ، ١)

الدالة   فردية



ملاحظات على دالة الجيب :-

ص = حا س ⟵ ص/ = حتا س

ص = حاأس ⟵ ص/ = أ حتا أ س

ص = حا د(س) ⟵ ص/ = حتا د(س) × تفاضل الدالة

ص = [حا(س)]^{ن} ⟵ ن[حا(س)]$^{ن-١}$ × حتاد(س) × تفاضل الزاوية

ص = حا $\sqrt{}$ ⟵ ص/ = حتا $\sqrt{}$ × تفاضل الجذر

(قاعدة عامة)

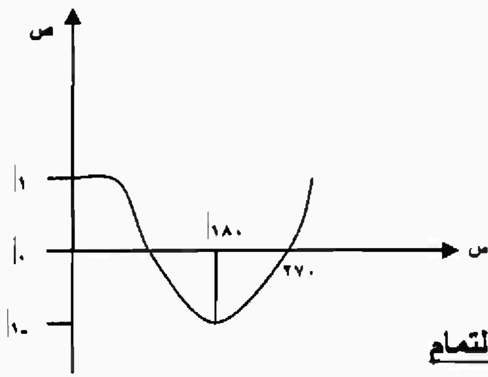
(دالة مثلثية)^{ن} ⟵ ن(دالة مثلثية)$^{ن-١}$ × تفاضل الدالة × تفاضل الزاوية

دالة جيب التمام

ص = حتا س

المجال ح

لمدى (-١ ، ١)



ملاحظات على قاعدة جيب التمام

ص = حتا س ص/ = - حا س

ص = حتاأس ص/ = - أحا أ س

ص = حتا د(س) ⟵ ص/ = حا د(س) × تفاضل الدالة

ص = [حتا(س)]ن ⟵ ن[حتا(س)]ن-١ × - حاد(س) × تفاضل الزاوية

ص = حتا √ ⟵ ص/ = حا √ × تفاضل الجذر

دالة الظل

ص= طا س ، س ∋ ح

المجال س ∋ [ح − ($\frac{ط}{٢}$ + ن ط)]

المدى ∋ ح

إيجاد المشتقة الأولى للدالة ص = طا س

ص = طا س

= $\frac{\text{حا س}}{\text{حتا س}}$

∴ $\frac{\text{ر ص}}{\text{ر س}}$ = $\frac{\text{حتا س × حتا س - حا س × -حا س}}{\text{حتا}^{٢}\text{ س}}$

$$= \frac{\text{حتا}^{2}\text{س} + \text{حا}^{2}\text{س}}{\text{حتا}^{2}\text{س}} = \frac{1}{\text{حتا}^{2}\text{س}} = \text{قا}^{2}\text{س}$$

$$\therefore \frac{ء}{ء\text{س}} \text{طا س} = \text{قا}^{2}\text{س}$$

ملاحظات على دالة الظل

ص = طا ـ ⟵ $\text{ص}' = \text{قا}^{2}\text{س}$

ص = طا أس ⟵ $\text{ص}' = \text{أ قا}^{2}\text{ أ س}$

ص = طا د(س) ⟵ $\text{ص}' = \text{قا}^{2}\text{د(س)}$ × تفاضل الدالة

$\text{ص} = [\text{طا (د(س))}]^{\text{ن}}$ ⟵ $\text{ن}[\text{د(س)}]^{\text{ن}-1}$ × - $\text{قا}^{2}\text{د(س)}$ × تفاضل الزاوية

ص = طا $\sqrt{\quad}$ ⟵ $\text{ص}' =$ - حا $\sqrt{\quad}$ × تفاضل الجذر

مثال :

$\frac{ء}{ء\text{س}}$ (٥ حا س) $= ٥ \frac{ء}{ء\text{س}}$ (حا س) = ٥ حتا س

$\frac{ء}{ء\text{س}}$ ($\frac{1}{2}$ حتا س) $= \frac{1}{2} \frac{ء}{ء\text{س}}$ (حتا س) = - $\frac{1}{2}$ حا س

$\frac{ء}{ء\text{س}}$ (٣ حا س + ٤ حتا س) $= ٣ \frac{ء}{ء\text{س}}$ (حا س) + ٤ $\frac{ء}{ء\text{س}}$ (حتا س)

= ٣حتا س – ٤ حا س

$\frac{ء}{ء\text{س}}$ (٢حا س – ٧س^{2}) = ٢حتا س – ١٤ س

$\frac{ء}{ء\text{س}}$ (٧ حتا س + $\frac{٢}{\text{س}^{2}}$) = - ٧ حا س - $\frac{٦}{\text{س}^{٤}}$

مثال :

إذا عرفت الدالة بالمعادلة

د(س) = س^{2} حا س ، فأوجد $\text{د}'$ (س)

الحل

د(س) = س^{٢} حا س

د$'$ (س) = س^{٢}حتا س + حا س × ٢ س

= س(س حتا س + ٢ حا س)

مثال :

أوجد المشتقة الأولى للدالة د المعنية بالمعادلة

(أ) د(س) = حا (٣ س + ٥)

(ب) د(س) = حتا (س^{٢} – ١)

الحل

(أ) د(س) = حا (٣ س + ٥)

د$'$ (س) = حتا (٣ س +٥) × ٣

= ٣حتا(٣ س +٥)

(ب) د(س) = حتا (س^{٢} – ١)

د$'$ (س) = - حا (س^{٢} – ١) × ٤ س

= -٢ س حا (س^{٢} - ١)

مثال :

إذا كان د(س) = (س٢ + ١) حا س^{٣}- **فأوجد د$'$ (س)**

الحل

د(س) = (س^{٢} + ١) حا س^{٣}

د$'$ (س)= (س^{٢} + ١) حتا س × ٣ س^{٢} + ٢ س حا س^{٣}

= ٣ س^{٢} (س^{٢} + ١) حتا س^{٣} + ٢ س حا س^{٣}

= س [٣ س (س^{٢} + ١) حتا س^{٣} + ٢ حا س^{٣}]

مثال :

أوجد المشتقة الاولى للدالة المعرفة بالمعادلة

د(س) = حا^{٣} (٥ س + ٣)

د(س) = حا^{٣} (٥ س + ٣) = [حا (٥ س + ٣)]^{٣}

= ٣[حا(٥س + ٣)]^{٢} × حتا (٥ س + ٣) × ٥

= ١٥ حا^{٢} (٥ س + ٣) حتا (٥ س + ٣)

مثال :

أوجد $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ إذا عرفت ص بالمعادلة :

٣ ص حا س + ٥ ص^{٢} حتا س – س^{٣} = صفر

الحل

٣ ص حا س + ٥ ص^{٢} حتا س – س^{٣} = صفر

٣(ص حتا س + حا س $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$)+٥[ص^{٢}(-حا س)+حتاس×٢ص $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$] -٣س^{٢} = ٠

(٣حاس+ ١٥ ص حتا س) $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ٥ ص^{٢} حا س – ٣ ص حتا س + ٣ س^{٢}

$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = $\frac{\text{٥ص}^{٢}\text{حا س - ٣ ص حتا س + ٣ ص }^{٢}}{\text{٣ حا س +١٠ ص حتا س}}$

مثال :

أوجد

(١) $\frac{\text{ء}}{\text{ر س}}$ (س طا $\frac{١}{٢}$ س)

(٢) $\frac{\text{ء}}{\text{ر س}}$ (طا^{٢} أ س)

الحل

(١) $\frac{\text{ء}}{\text{ر س}}$ (س طا $\frac{١}{٢}$ س)

= (س قا^{٢} $\frac{١}{٢}$ س) ×$\frac{١}{٢}$ + (طا $\frac{١}{٢}$ س) × ١

$$= \frac{١}{٢}\ \text{س قا}^{٢}\ \frac{١}{٢}\ \text{س} + \text{طا}\ \frac{١}{٢}\ \text{س}$$

(٢) $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}$ (طا^{٢} أ س)

$$= [\ \text{طا}\ (\ \text{أ س}\ )\ ]' = ٢\ \text{طا}\ (\ \text{أ س}\ ) \times \text{قا}^{٢}\ (\ \text{أ س}\ ) \times \text{أ}$$

$$= ٢\ \text{أ طا}\ (\ \text{أ س}\ )\ \text{قا}^{٢}\ (\ \text{أ س}\ )$$

مثال :

اوجد $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ إذا علمت أن :-

(١) طا ص = $\frac{٢\ \text{س}}{١ - \text{س}^{٢}}$

(٢) ص طا ٢ س = س

الحل

(١) طا ص = $\frac{٢\ \text{س}}{١ - \text{س}^{٢}}$

$$\text{قا}^{٢}\ \text{ص}\ \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{٢\left(١ - \text{س}^{٢}\right) - ٢\text{س}\left(-٢\text{س}\right)}{\left(١ - \text{س}^{٢}\right)^{٢}}$$

$$= \frac{٢ - ٢\text{س}^{٢} + ٤\text{س}^{٢}}{\left(١ - \text{س}^{٢}\right)^{٢}} = \frac{\left(٢ + ٢\text{س}^{٢}\right)}{\left(١ - \text{س}^{٢}\right)^{٢}} = \frac{٢\left(١ + \text{س}^{٢}\right)}{\left(١ - \text{س}^{٢}\right)^{٢}}$$

$$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{٢(١ - \text{س}٢\ )\ \text{جتا}\ ٢\text{ص} = ٢}{(\ ١ - \text{س}٢)٢}$$

(٢) ص طا ٢ س = س

$$\text{ص قا}^{٢}\ ٢\ \text{س} \times ٢ + \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}\ \text{طا}\ ٢\ \text{س} = ١$$

$$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{١ - ٢\ \text{ص قا}^{٢}\ ٢\ \text{س}}{\text{طا}\ ٢\ \text{س}}$$

مثال :

أوجد $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ إذا علمت أن :

ص = (٢ س^{٢} – ١) طا^{٣} ٥ س

الحل

ص = (٢ س^{٢} – ١) طا^{٣} ٥ س

$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = (٢ س^{٢} – ١) (٣ طا^{٢} ٥ س) (قا^{٢} ٥ س) × ٥ + ٤ س طا^{٣} ٥ س

= ١٥ (٢ س^{٢} – ١) طا^{٢} ٥ س + ٤ طا^{٣} ٥ س

= طا^{٢} ٥س [١٥ (٢ س – ١) قا^{٢} ٥ س + ٤ س طا ٥ س]

مثال :

أوجد معادلة المماس لمنحنى ص = طا $\frac{١}{٢}$ س ، عند س = $\frac{ط}{٢}$ (ط = $\frac{٢٢}{٧}$)

الحل

ص = طا $\frac{١}{٢}$ س

$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = $\frac{١}{٢}$ قا^{٢} $\frac{١}{٢}$ س عند س = $\frac{ط}{٢}$

ص = طا $\frac{ط}{٤}$ = ١

$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = $\frac{١}{٢}$ قا^{٢} $\frac{ط}{٤}$ = $\frac{١}{٢}$ × ٢ = ١

معادلة المماس المطلوبة هي

ص – ١ = ١ (س - $\frac{ط}{٢}$) = س - $\frac{ط}{٢}$

ص = س + ١ - $\frac{ط}{٢}$ = س + ١ - $\frac{٢٢}{٢×٧}$

= س + ١ - $\frac{١١}{٧}$ = س - $\frac{٤}{٧}$

أي ٧ (ص – س) + ٤ = ٠

مثال :

إذا كان ص = ٢ س حا س حتا س **فاثبت أن**

ص/ = ٢ س حتا ٢ س + حا ٢ س

الحل

ص =٢ س حا س حتا س

= س × ٢ حا س حا س = س حا ٢ س

ص/ = س × حتا ٢ س × ٢ + حا ٢ س × ١

ص/ = ٢ س حتا ٢ س + حا ٢ س

مثال :

أوجد $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$

(١) ص = ٣ س حا س + ٣ س حتا س

(٢) ص = $\frac{\text{٦ س - حا ٢ س}}{\text{٨ س + حا ٢ س}}$ عند س = $\frac{\text{ط}}{\text{٤}}$

الحل

(١) ص = ٣ س حا س + ٣ س حتا س

$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ٣ س (حتا س – حا س) + ٣ (حا س + حتا س)

(٢) ص = $\frac{\text{٦ س - حا ٢ س}}{\text{٨ س + حا ٢ س}}$

ص/ = $\frac{\text{-٢٨ س + ١٤ حا ٢ س}}{\text{(٨ س + حا ٢ س)}^{٢}}$ = $\frac{\text{١٤ (حا٢س - ٢ س)}}{\text{(٨ س + حا ٢ س)}^{٢}}$

د/ ($\frac{\text{ط}}{\text{٤}}$) = $\frac{\text{١٤ (١- } \frac{\text{ط}}{\text{٢}} \text{)}}{\text{(٢ ط + ١)}^{٢}}$

مثال :

أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

(١) $\text{ص} = \left(\frac{\text{س - حتا س}}{\text{حا س}} \right)^{٣}$

(٢) ص = ظتا س

(٣) $\text{ص} = \sqrt[٣]{\text{حا}^{٢}\text{س}} + \frac{١}{\text{حتا}^{٢}\text{س}}$

(٤) $\text{حا ص} = \frac{٢\,\text{س}}{١ + \text{س}^{٢}}$

الحل

(١) $\text{ص} = \left(\frac{\text{س - حتا س}}{\text{حا س}} \right)^{٣}$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣ \left(\frac{\text{س - حتا س}}{\text{حا س}} \right)^{٢} \times \frac{\text{حا س} \,(١ + \text{حا س}) - \text{حتا س}\,(\text{س - حتا س})}{\text{حا}^{٢}\text{س}}$$

$$= ٣ \left(\frac{\text{س - حتا س}}{\text{حا س}} \right)^{٢} \times \frac{\text{حا س} + \text{حا}^{٢}\text{س} + \text{حتا}^{٢}\text{س} - \text{س حتا س}}{\text{حا}^{٢}\text{س}}$$

$$= ٣\ ٣ \left(\frac{\text{س - حتا س}}{\text{حا س}} \right)^{٢} \times \frac{١ + \text{حا س} - \text{س حتا س}}{\text{حا}^{٢}\text{س}}$$

$= \text{حا}^{٢}\text{س} + \text{حتا}^{٢}\text{س} = ١$

(٢) ص = ظتا س

$\text{ص} = \frac{\text{حتا س}}{\text{حا س}}$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{حا س} \times - \text{حا س} - \text{حتا س} \times \text{حتا س}}{\text{حا}^{٢}\text{س}}$$

$$= \frac{-\text{حا}^{٢}\text{س} - \text{حتا}^{٢}\text{س}}{\text{حا}^{٢}\text{س}} = \frac{-(\text{حا}^{٢}\text{س} + \text{حتا}^{٢}\text{س})}{\text{حا}^{٢}\text{س}}$$

$$= -\frac{١}{\text{حا}^{٢}\text{س}} = -\text{قتا}^{٢}\text{س}$$

$$(٣)\ \text{ص} = \sqrt[٣]{\text{حا}^{٢}\text{س}} + \frac{١}{\text{حتا}^{٢}\text{س}}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٢}{٣}\,\text{حا}^{-١/٣}\text{س}\ \text{حتا س} - ٢\ \text{حتا}^{-٣}\text{س}\ (-\text{حا س})$$

$$= \frac{٢}{٣}\,\frac{\text{حتاس}}{\sqrt[٣]{\text{حا س}}} + \frac{٢\ \text{حا س}}{\text{حتا}^{٣}\text{س}}$$

$$(٤)\ \text{حا ص} = \frac{٢\text{س}}{١ + \text{س}^{٢}}$$

$$\text{حتا ص}\ \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٢(١ + \text{س}^{٢}) - ٤\text{س}^{٢}}{(١ + \text{س}^{٢})^{٢}}$$

وحيث ان $\text{حا ص} = \frac{٢\text{س}}{١ + \text{س}^{٢}}$ ، $\text{حتا ص} = \pm\sqrt{١ - \text{حا}^{٢}\text{ص}}$

فان

$$\text{حتا ص} = \pm\frac{\sqrt{٤\text{س}}}{(١ + \text{س}^{٢})^{٢}} = \pm\frac{(١ - \text{س}^{٢})^{٢}}{١ + \text{س}^{٢}}$$

$$= \frac{|١ - \text{س}^{٢}|}{١ + \text{س}^{٢}}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٢(١ - \text{س}^{٢})}{(١ + \text{س}^{٢})\,|١ - \text{س}^{٢}|}$$

وهكذا فان

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \begin{cases} \frac{٢}{١ + \text{س}^{٢}} & \text{عندما } |\text{س}| < ١ \\ -\frac{٢}{١ + \text{س}^{٢}} & \text{عندما } |\text{س}| > ١ \end{cases}$$

وعندما | س | = ١ لا توجد مشتقة

تمرين (٥)

أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$

(١) إذا كانت د(س) = س^{٢} + ٥ س – حتا س

(٢) إذا كانت ص = حا(٥س^{٢} + ٣ س + ١)

(٣) إذا كانت ص = حتا (٥ س + ٣)

(٤) إذا كانت ص = حتا^{٥} (٣س + ١)

(٥) $\frac{ء}{ءس}$ (طا^{٦} ٢ س)

(٦) إذا كانت ص = حا (٣ س + ١) حتا ٧ س

(٧) إذا كانت ص = حتا ٥ س حا ٣ س أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ بطريقتين مختلفتين

(٨) أوجد

(أ) $\frac{ء}{ءس}$ (طا $\frac{ط}{٤}$)

(ب) $\frac{ء}{ءس}$ حا٣ك حيث ك مقدار ثابت

(جـ) $\frac{ء}{ءس}$ (حا^{٢} ٥ س + حتا^{٢} ٥ س)

(٩) أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ للآتي :-

(أ) ص = $\sqrt[١٠]{حا ٣ س + حتا ٥ س}$

(ب) ص = حتا^{٥} $\sqrt[٧]{س^{٢} + ١}$

(١٠) <u>أثبت أن</u> : $\frac{ء}{ءس}$ [حا^{٢} $\frac{س}{٢}$ - حتا^{٢} $\frac{س}{٢}$] = حا س

(١١) إذا كانت ص = طا^{٣} (٢ س – ٥) <u>فأوجد</u> $\frac{ء ص}{ء س}$

(١٢) إذا كان ص = حتا س <u>فأوجد</u> $\frac{ء ص}{ء س}$

(١٣) <u>أوجد</u> $\frac{ء ص}{ء س}$ إذا كان ص = حا س^{٣}

(١٤) إذا كان ص = حتا^{٣} (٣ – س) عند س = ٣٣° <u>أوجد</u> $\frac{ء ص}{ء س}$

(١٥) <u>أوجد</u> $\frac{ء ص}{ء س}$ إذا كان حا س + حتا ص = س + ص

(١٦) <u>أوجد</u> $\frac{ء ص}{ء س}$ إذا كان س حتاص = حا (س + ص)

(١٧) <u>أوجد</u> $\frac{ء ص}{ء س}$ حيث د(ص) = حا^{٣} (س – ٦)^{٢}ومن ثم أثبت أن د$'$($\frac{ط}{٥}$)= صفر

(١٨) <u>أوجد</u> $\frac{ء ص}{ء س}$ إذا كانت ص = حا $\frac{ط}{٢}$ + حتا $\sqrt{س}$

(١٩) <u>أوجد</u> $\frac{ء ص}{ء س}$ إذا كانت ص = حا س - $\frac{١}{٣}$ حا^{٣} س

(٢٠) إذا كانت س = ص طا ٢ س <u>فأثبت أن</u>

$\frac{ء ص}{ء س}$ طا ٢ س + ٢ ص قا^{٢} ٢ س = ١