(٢) : حساب المثلثات

- قاعدة الجيب ومساحة المثلث
- قاعدة جيب التمام
- حل المثلث
- تطبيقات على حل المثلث (زوايا الارتفاع والانخفاض)
- الدوال المثلثية لمجموع او فرق قياسي زاويتين
- الدوال المثلثية لضعف قياس الزاوية

حساب المثلثات

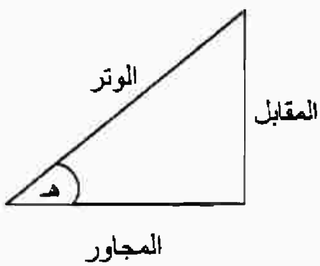
تذكر أن :

١ـ الدوال المثلثية للزاوية الحادة في المثلث القائم :-

$\text{جا هـ} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ | $\text{قتا هـ} = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$

$\text{جتا هـ} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ | $\text{قا هـ} = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$

$\text{ظا هـ} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ | $\text{ظتا هـ} = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$



٢ـ العلاقات الأساسية للدوال المثلثية :-

١) $\text{قتا هـ} = \frac{1}{\text{جا هـ}}$ ، $\text{قا هـ} = \frac{1}{\text{جتا هـ}}$ ، $\text{ظتا هـ} = \frac{1}{\text{ظا هـ}}$

٢) $\text{ظا هـ} = \frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}}$ ، $\text{ظتا هـ} = \frac{\text{جتا هـ}}{\text{جا هـ}}$.

٣) $\text{جا}^2\text{ هـ} + \text{جتا}^2\text{ هـ} = 1$ $\Leftarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{جا}^2\text{ هـ} = 1 - \text{جتا}^2\text{ هـ} \\ \text{جتا}^2\text{ هـ} = 1 - \text{جا}^2\text{ هـ} \end{array} \right.$

٤) $\text{أ} + \text{ظا}^2\text{ هـ} = \text{قا}^2\text{ هـ}$ ، $\text{ا} + \text{ظتا}^2\text{ هـ} = \text{قتا}^2\text{ هـ}$

٣ـ العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين المتتامتين:-

$\text{جا } (90 - \text{هـ}) = \text{جتا هـ}$ $\text{جا } 15^\circ = \text{جتا } 75^\circ$

$\text{جتا } (90 - \text{هـ}) = \text{جا هـ}$ $\text{ظا } 58^\circ = \text{ظتا } 32^\circ$

$\text{ظا } (90 - \text{هـ})\ \text{ظتا هـ}$ $\text{قا } 17^\circ = \text{قتا } 73^\circ$

جا (٩٠° + هـ) = جتا هـ   **مثال**   جا ٩٨° = جا (٩٠° + ٨°) = جتا ٨°

جتا (٩٠° + هـ) = - جا هـ   **مثال**   جتا ١٠٠° - جتا (٩٠° + ١٠°) = - جا ١٠°

ظا (٩٠° + هـ) = - ظتا هـ

٤- العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين المتكاملتين:-

جا (١٨٠ – هـ) = ج هـ   جا ١٦٥ = جا ١٠

جتا (١٨٠ – هـ) = - جتا هـ   جتا ١٤٠° = - جتا ٤٠°

ظا (١٨٠ – هـ) – ظا هـ   ظا ١٣٥°= - ظا ٤٥°

➢ في أي مثلث أ ب جـ يكون :-

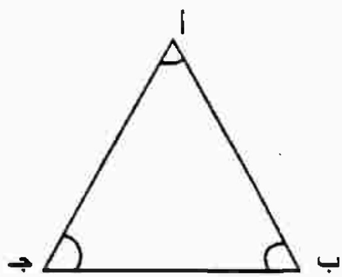
ق(أ) + ق (ب) + ق (جـ) = ١٨٠°

∴ ق(أ) + ق(ب) = ١٨٠ – ق(جـ)

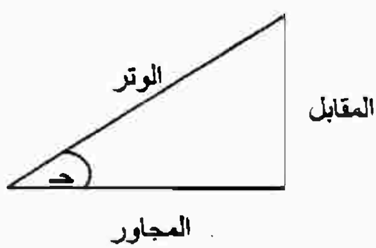
∴ جا (أ + ب) = جا جـ

جتا (أ + ب) = - جتا جـ

ظا (أ + ب) = - ظا جـ



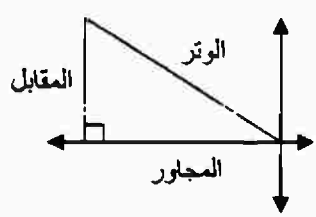
- تحديد الربع :

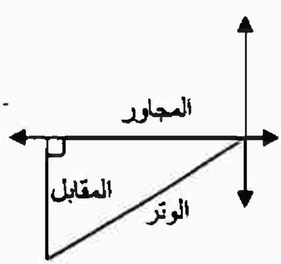


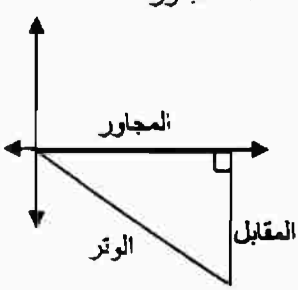
الربع الأول : -

٠ < هـ < ٩٠°   ،   ٠ < هـ < $\frac{ط}{٢}$

نرسم أي مثلث قائم







٩٠° < هـ < ١٨٠°   ١٨٠° < هـ < ٢٧٠°   ٢٧٠° < هـ < ٣٦٠°

$\frac{ط}{٢}$ < هـ < ط   ط < هـ < $\frac{٣ط}{٢}$ $\frac{٣ط}{٢}$ < هـ < ٢ ط

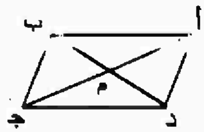
الثاني   **الثالث**   **الرابع**

- بعض المساحات المستخدمة :-

* مساحة Δ = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ القاعدة × الارتفاع

* أو = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ حاصل ضرب طول أي ضلعين × جا الزاوية المحصورة بينهما

* مساحة ▱ = القاعدة × الارتفاع



= ٢ مساحة المثلث أ ب جـ = ٤ مساحة Δ أ ب م

* مساحة شبه المنحرف = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ مجموع القاعدتين المتوازيتين في الارتفاع

* مساحة الشكل الرباعي نوجده كمجموع مساحة أي مثلثين

أو = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ حاصل ضرب طول القطرين × جا الزاوية المحصورة بينهما

* مساحة الدائرة = ط نق$^{\text{٢}}$ * محيط الدائرة = ٢ ط نق

- يكون الشكل الرباعي دائري :-

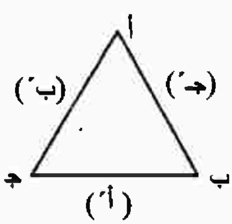
(١) إذا كان فيه زاويتين مرسومتين علي قاعدة واحد متساويتا في القياس .

(٢) إذا كان فيه زاويتين متقابلين متكاملتين .

- إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \frac{\text{هـ}}{\text{و}}$ فإن $\frac{\text{مجموع المقدمات}}{\text{مجموع التوالي}}$ = أحدي النسب

∴ $\frac{\text{أ + جـ + هـ}}{\text{ب + د + و}}$ = أي نسبة من النسب مطلوب إيجادها

قاعدة الجيب



- في أي مثلث أ ب جـ يكون

$\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـَ}}{\text{جا جـ}}$ = ٢ نق

أي : أطوال أضلاع المثلث تتناسب مع جيوب الزوايا المقابلة لها

الإثبات :-

مساحة المثلث = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ حاصل ضرب أي ضلعين × جيب الزاوية بينهما

$\therefore \frac{١}{٢}\text{ ب َ جـ َ جا أ} = \frac{١}{٢}\text{ أ َ جـ َ جا ب} = \frac{١}{٢}\text{ أ َ ب َ جا جـ}$

بالقسمة على $\frac{١}{٢}$ أ َ ب َ جـ َ

$$\frac{\text{جا أ}}{\text{أ َ}} = \frac{\text{جا ب}}{\text{ب َ}} = \frac{\text{جا جـ}}{\text{جـ َ}}$$

$$\therefore \frac{\text{أ َ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب َ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـ َ}}{\text{جا جـ}}$$

ملاحظات :

١. نق هو نصف قطر الدائرة التي تمر برؤوس المثلث من الخارج .
٢. محيط المثلث = أ َ + ب َ + جـ َ
٣. محيط الدائرة = ٢ ط نق
٤. مساحة الدائرة = ط نق^{٢}
٥. تستخدم قاعدة الجيب إذا علم زاويتان وضلع .

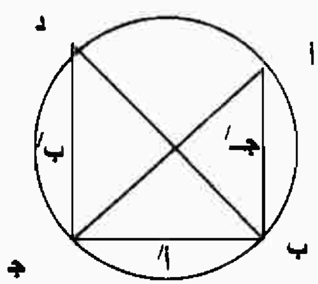
تمرين مشهور :-

في أي مثلث أ ب جـ يكون

$\frac{\text{أ َ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب َ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـ َ}}{\text{جا جـ}} = ٢$ نق ، نق نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ

البرهان

أرسم القطر $\overline{\text{ب ء}}$ ثم صل $\overline{\text{ء جـ}}$



∴ أ ب جـ ء رباعي دائري

∴ ق (ء) = ق (أ)

لكن (ب جـ ء) ٩٠° في نصف دائرة

$\therefore \frac{\text{ب جـ}}{\text{ب ء}} = \text{جا ء}$

$\therefore \frac{\text{أ َ}}{\text{٢ نق}} = \text{جا أ}$ $\qquad \therefore \frac{\text{أ َ}}{\text{جا أ}} = ٢$ نق

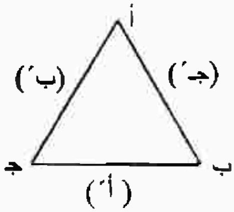
$\therefore \frac{\text{أ َ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب َ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـ َ}}{\text{جا جـ}} = ٢$ نق

مثال : أ ب جـ مثلث فيه ق (أ) = ٥٦° ١٨َ ، ق (ب) = ٤٧° ١١َ ، جـَ = ١٦ سم

أوجد ما يلي :-

١) أَ ، بَ ٢) نصف قطر الدائرة التي تمر برؤوس المثلث .

الحـــــل



أولاً : نوجد ق (جـ)

ق (جـ) = ١٨٠ – ٥٦° ١٨َ - ٤٧° ١١َ

الآلة : ,, Sh = ,, ١١ ,, ٤٧ - ,, ١٨ ,, ٥٦ – ١٨٠

ق (جـ) = ٧٦° ٣١َ

∴ $\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـَ}}{\text{جا جـ}}$ ∴ $\frac{\text{أَ}}{\text{جا ١٨َ ٥٦°}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ١١َ ٤٧°}} = \frac{\text{١٦}}{\text{جا ٣١َ ٧٦°}}$

$\frac{\text{أَ}}{\text{جا ١٨َ ٥٦°}} = \frac{\text{١٦}}{\text{جا ٣١َ ٧٦°}}$ ، $\frac{\text{بَ}}{\text{جا ١١َ ٤٧°}} = \frac{\text{١٦}}{\text{جا ٣١َ ٧٦°}}$

أَ = $\frac{\text{١٦ × جا ١٨َ ٥٦°}}{\text{جا ٣١َ ٧٦°}}$ ، بَ = $\frac{\text{١٦ × جا ١١َ ٤٧°}}{\text{جا ٣١َ ٧٦°}}$

= Sin ,, ٣١ ,, ٧٦ ÷ ١٦ × Sin ,, ١٨ ,, ٥٦ = Sin ,, ٣١ ,, ٧٦ ÷ ١٦ × Sin ,, ١١ ,, ٤٧

أَ = ١٣,٣ سم ، بَ = ١٢

إيجاد نق : نضع $\frac{\text{١٦}}{\text{جا ٣١َ ٧٦°}}$ = ٢ نق

نق = ٨,٢ سم = ٢ ÷ Sin ,, ٣١ ,, ٧٦ ÷ ١٦

مثال : أ ب جـ مساحه سطحه = ٣٣٦ سم^2 فيه أَ = ٢٨سم ، بَ = ٢٦ سم ، جـَ = ٣٠ سم أوجد مساحة سطح الدائرة المارة برؤوسه ؟

الحـــــل

∴ مساحة سطح Δ = $\frac{١}{٢}$ أَ بَ جا جـ

∴ ٣٣٦ = $\frac{١}{٢}$ × ٢٨ × ٢٦ × جا جـ

= ٣٦٤ × جا جـ ∴ جا جـ = $\frac{٣٣٦}{٣٦٤}$

∴ جا جـ = ٠,٩٣٢ ∴ ق (جـ) = ٢٣َ ٦٧°

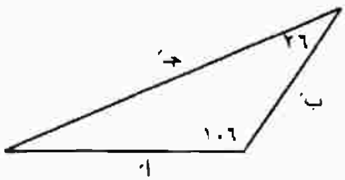
∴ جـَ / جا جـ = ٢ نق ∴ ٣٠ / جا ٢٣َ ٥٦٧ = ٢ نق

∴ ٢ نق = ٣٢,٤ ⟵ نق = ١٦,٢ سم

∴ مساحة الدائرة = ٣٫١٤ × (١٦٫٢)^{٢} = ٨٢٤,٤ سم^{٢}

مثال : ا ب جـ Δ فيه ق (أ) = ٢٦° ، ق (جـ) = ١٠٦° ، جـَ ـ أَ = ٥ سم أوجد أَ

الحـــــل



∴ أَ / جا جـ = جـَ / جا جـ

∴ (جـَ ـ أَ) / (جا جـ ـ جا أ) = أَ / جا جـ

∴ ٥ / (جا ١٠٦ ـ جا ٢٦) = أَ / جا ٢٦

∴ أَ = (٥ جا ٢٦) / (جا ١٠٦ ـ جا ٢٦) = ٤,٢ سم

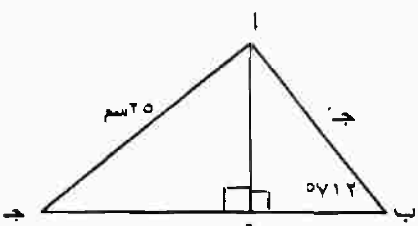
مثال :

أب جـ مثلث فيه ق (أ) = ٣٨َ ٥٦° ، ق (ب) = ١٢َ ٧١° ، بَ = ٢٥ سم

احسب : ١) طول جـَ ٢) نصف قطر الذي تمر بروؤس المثلث .

٣) طول العمود الساقط من أ علي $\overline{\text{ب جـ}}$

الحـــــل



ق(جـ) = ١٨٠ ـ ٣٨َ ٥٦° ـ ١٢َ ٧١°

∴ ق(جـ) = ١٠َ ٥٢°

جـَ / جا جـ = بَ / جا ب = ٢ نق

جـَ / جا ١٠َ ٥٢° = ٢٥ / جا ١٢َ ٧١° = ٢ نق

جـَ = (٢٥ × جا ١٠َ ٥٢°) / (جا ١٢َ ٧١°) = ٢٠,٨ سم

نق = ٢٥ / (٢× جا ١٢َ ٧١°) = ١٣,٢ سم ١٣,٢ = Sin,,١٢,,٧١ ÷ ٢ ÷ ٢٥

إيجاد طول العمود : في Δ أ ء ب $\frac{\text{أ ء}}{\text{جا ٧١° ١٢´}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{جا ء}}$

$\frac{\text{أ ء}}{\text{جا ٧١° ١٢´}} = \frac{\text{٢٠,٨}}{\text{جا ٩٠}}$ $\therefore$ أ ء $= \frac{\text{٢٠,٨} \times \text{جا ٧١° ١٢´}}{\text{١}}$

$\therefore$ أ ء = ١٩.٦ سم

مثال : برهن أن مساحة سطح الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ $= \frac{\text{ط أ´ ب´}}{\text{٤ جا أ جا ب}}$

البرهان

$\therefore$ مساحة سطح الدائرة = ط نق^{٢}

$\therefore$ $\frac{\text{أ´}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب´}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـ´}}{\text{جا جـ}} =$ ٢نق

$\therefore$ نق $= \frac{\text{أ´}}{\text{٢جا أ}}$ أو $\frac{\text{ب´}}{\text{٢جا ب}}$

$\therefore$ مساحة الدائرة = ط نق × نق

$= \text{ط} \times \frac{\text{١}}{\text{٢جا أ}} \times \frac{\text{ب}}{\text{٢جا ب}} = \frac{\text{ط أ´ ب´}}{\text{٤ جا أ جا ب}}$

مثال : أ ب جـ Δ محيطه ١٨ سم فإذا كان ق (أ) = ٤٧° ، ق (ب) = ٥٣° . أوجد أطوال أضلاعه ثم أوجد مساحة سطحه .

الحـــــل

ق (جـ) = ١٨٠ − (٤٧ + ٥٣) = ٨٠°

$\because$ $\frac{\text{أ´}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب´}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـ´}}{\text{جا جـ}}$ $\therefore$ $\frac{\text{أ´}}{\text{٠,٧٣١٤}} = \frac{\text{ب´}}{\text{٠,٧٩٨٦}} = \frac{\text{جـ´}}{\text{٠,٩٨٤٨}}$

$\because$ $\frac{\text{مجموع المقدمات}}{\text{مجموع التوالي}} =$ إحدي النسب

$\therefore$ $\frac{\text{أ´ + ب´ + جـ´}}{\text{٠,٧٣١٤ + ٠,٧٩٨٦ + ٠,٩٨٤٨}} = \frac{\text{١٨}}{\text{٢,٥١٤٨}}$ حيث المحيط (أ´ + ب´ + جـ´)

$\therefore$ أ´ $= \frac{\text{١٨} \times \text{٠,٧٣١٤}}{\text{٢,٥١٤٨}} =$ ٥,٢٣ سم

$\therefore$ ب´ $= \frac{\text{١٨} \times \text{٠,٧٩٨٦}}{\text{٢,٥١٤٨}} =$ ٥,٧٢ سم

∴ جـَ = $\frac{\text{١٨} \times \text{٠,٩٨٤٨}}{\text{٢,٥١٤٨}}$ = ٧,٠٠٥ سم

∴ مساحة Δ = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ أَ بَ جا جـ

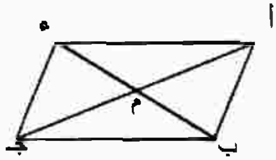
= $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ × ٥,٢٣ × ٥,٧٢ جا ٨٠ = ١٤,٧٣ سم$^{\text{٢}}$

مثال :

أ ب جـ ء متوازي أضلاع فيه أ ب = ١٨ سم ، ق < ب أ جـ = ٤٧° ، ق < أ ب ء = ٥٦°

احسب : ١) طول أ جـ ، ب ء   ٢) مساحة سطح متوازي الأضلاع .

الحـــل



في Δ أ م ب

ق(< م) = ١٨٠ – ٤٧ – ٥٦

ق(< م) = ٧٧°

$\frac{\text{أ ب}}{\text{جا م}} = \frac{\text{أ م}}{\text{جا ٥٦}} = \frac{\text{م ب}}{\text{جا ٤٧}}$ ∴ $\frac{\text{١٨}}{\text{جا ٧٧}} = \frac{\text{أ م}}{\text{جا ٥٦}} = \frac{\text{م ب}}{\text{جا ٤٧}}$

أ م = $\frac{\text{١٨} \times \text{جا ٥٦}}{\text{جا ٧٧}}$ = ١٥,٣ سم   ∴ م ب = $\frac{\text{١٨} \times \text{جا ٤٧}}{\text{جا ٧٧}}$ = ١٣,٥ سم

أ جـ = ٢ أ م = ٢ × ١٥,٣ = ٣٠,٦ سم

ب ء = ٢ ب م = ٢ × ١٣,٥ = ٢٧ سم

مساحة Δ أ م ب = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ أ ب × أ م جا أ

= $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ × ١٨ × ١٥,٣ × جا ٤٧ = ١٠٠,٧ سم$^{\text{٢}}$

مساحة متوازي الأضلاع = ٤ × ١٠٠,٧ = ٤٠٢,٨ سم$^{\text{٢}}$

مثال:

- في أي مثلث أ ب جـ اثبت أن مساحته = $\frac{\text{أَ بَ جَ}}{\text{٤ نق}}$ حيث نق نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه .

الحـــل

نرمز لمساحة المثلث م

∴ م = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ أَ بَ جا جـ

= $\frac{\text{أَ بَ جا جـ}}{\text{٢}}$ (الطرفين × الوسطين)

∴ أَ بَ × جا جـ = ٢ م بالقسمة علي أَ بَ

جا جـ = $\frac{٢م}{أَ بَ}$ بضرب الطرفين × $\frac{١}{جـَ}$

$\frac{جا جـ}{جـَ} = \frac{٢م}{أَ بَ جـَ}$ ، ∵ $\frac{أَ}{جا أ} = \frac{بَ}{جا ب} = \frac{جـَ}{جا جـ} =$ ٢ نق

∴ $\frac{جا جـ}{جـَ} = \frac{١}{٢ نق}$

∴ $\frac{١}{٢ نق} = \frac{٢م}{أَ بَ جـَ}$ ∴ ٤ م نق = أَ بَ جـَ ÷ ٤ نق

∴ م = $\frac{أَ بَ جـَ}{٤ نق}$

حل آخر: ∵ مساحة Δ = $\frac{١}{٢}$ أَ بَ جا جـ

، ∵ $\frac{جـَ}{جا جـ}$ = ٢ نق ∴ جا جـ = $\frac{جـَ}{٢ نق}$

∴ مساحة Δ = $\frac{١}{٢}$ أَ بَ × $\frac{جـَ}{٢ نق}$

= $\frac{أَ بَ جـَ}{٤ نق}$

مثال : اثبت أن مساحة سطح المثلث = ٢ نق^{٢} جا أ جا ب جا جـ

الحـــــل

م Δ = $\frac{١}{٢}$ أَ بَ جا جـ ---------- (١)

∵ $\frac{أَ}{جا أ} = \frac{بَ}{جا ب}$ = ٢ نق

أَ = ٢ نق جا أ بَ = ٢ نق جا ب بالتعويض في (١)

∴ م Δ = $\frac{١}{٢}$ × ٢ نق جا أ × ٢ نق جا ب × جا جـ

م Δ = ٢ نق^{٢} جا أ جا ب جا جـ

تمارين (٦)

١- أ ب جـ Δ فيه ق (أ) = ٥٤٨ ، ق(> ب) = ٥٧٣ ، أَ = ١٥٠ سم

أوجد محيط Δ أ ب جـ.

٢- أ ب جـ Δ فيه ق (أ) = ١٠٥° ، ق(< ب) = ٤٥° ، جـ´ = ٢٠ سم أوجد أ´ ، ب´.

٣- أ ب جـ Δ فيه (جـ´) = ٤٢,٤ سم ، ق(< أ) = ٨٢° ، ق (< جـ) ٥٨°

أوجد ب´ ، مساحة Δ أ ب جـ وكذا طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث أ ب جـ .

٤- أوجد محيط Δ أ ب جـ الذي فيه ق(< أ) = ٢١´ ٦٢° ، ق(< ب) = ٣٩´ ٥٤°

أوجد مساحة سطحه إذا كان جـ´ = ٩,٢٥ سم .

٥- أ ب جـ ء متوازي أضلاع فيه أ ب = ١٢,٥ سم ، ق (< أ ب جـ) = ١١٠° ،

ق (< ب أ جـ) = ٤٥° أوجد أ جـ ، أ ء .

٦- أ ب جـ ء متوازي أضلاع فيه أ ب = ٢٠سم وقطراه أ جـ ، ب ء يصنعان مع الضلع أ ب الزاويتين ٢٢´ ٣٦° ، ٥٨´ ٤٤° علي الترتيب - أوجد طول القطرين ثم اوجد مساحة المتوازي .

٧- Δ أ ب جـ فيه أ´ = ١٣,٥ سم ، ظا ب = $\frac{٤}{٣}$ ، ظا جـ = $\frac{٨}{١٥}$ أوجد ب´ ، جـ´

٨- أ ب جـ Δ فيه ب´ = ١٢,٦ سم ، ق(< أ) = ١٥´ ٦٤° ، ق (< جـ) ١٨´ ٤٢°

أوجد ما يلي : ١) محيط Δ أ ب جـ ومساحته.

٢) طول نصف قطر الدائرة المارة بروؤس المثلث أ ب جـ .

٩- Δ أ ب جـ فيه ق (< أ) = ٥٠° ، ق (< ب) = ١٢٠° ، جـ´ = ٨ سم أوجد : ب´ ،

وكذلك طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث أ ب جـ وكذلك مساحة المثلث .

١٠- أ ب جـ Δ فيه جـ´ = ٧,٦ سم ، ق(< أ)= ٨٠° ، ق(< ب) = ٤٧° أحسب محيط المثلث وكذا طول نصف قطر الدائرة المارة بروؤسه .

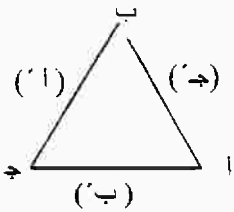
قاعدة جيب التمام

في أي مثلث أ ب جـ يكون :

أ´^{٢} = ب´^{٢} + جـ´^{٢} – ٢ ب´ جـ´ جتا أ

ب´^{٢} = أ´^{٢} + جـ´^{٢} – ٢ أ´ جـ´ جتا ب

جـ´^{٢} = أ´^{٢} + ب´^{٢} – ٢ أ´ ب´ جتا جـ



الإثبات :–

جـ ب = جـ أ + أ ب

∴ || جـ ب ||^{٢} = || جـ أ ||^{٢} + || أ ب ||^{٢} + ٢ جـ أ ن أ ب

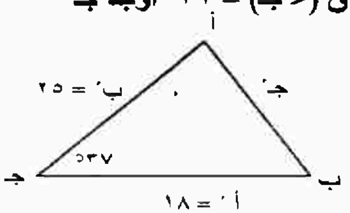
أ´^{٢} = ب´^{٢} + جـ´^{٢} – ٢ أ جـ ن أ ب

أ´^{٢} = ب´^{٢} + جـ´^{٢} - ب´ جـ´ جتا أ

ملاحظة :

– تستخدم هذه الصورة إذا علم ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما .

مثال : أ ب جـ ∆ فيه أ´ = ١٨ سم ، ب´ = ٣٥ سم ، ق (< جـ) = ٣٧° أوجد جـ´



الحـــــل

جـ´^{٢} = أ´^{٢} + ب´^{٢} - أ´ ب´ جتا جـ

= (١٨)^{٢} +(٣٥)^{٢} – ٢ × ١١٨ × ٣٥ جتا ٣٧

١٨ Sh ×٢ +٣٥ Sh ×٢ – ٢ ×١٨ ×٣٥ ×٣٧ Cas =√

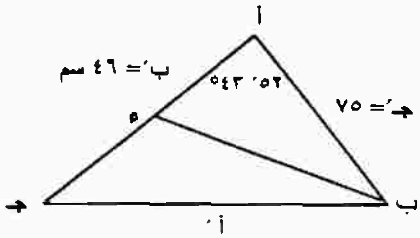
جـ´ = ٢٣٫٣ سم

مثال ٢ : أ ب جـ ∆ فيه ب´ = ٤٦سم ، جـ´ = ٧٥ سم ، ق (< أ) = ٥٤٣ ´٥٢ أوجد :

١) أ´ ، محيط المثلث .

٢) طول نصف قطر الدائرة التي تمر برؤوس المثلث .

٣) طول العمود الساقط من ب علي أ جـ



الحـــــل

١) $أ´^{٢} = ب´^{٢} + جـ´^{٢} - ٢\,ب´\,جـ´\,جتا\,أ$

$= (٤٦)^{٢} + (٧٥)^{٢} - ٢ \times ٤٦ \times ٧٥ \times جتا\,٥٢´\,٤٣°$

أ´ = ٥٢,٥ سم

٢) **محيط المثلث** = أ´ + ب´ + جـ´ = ٥٢,٥ + ٤٦ + ٧٥ = ١٧٣,٥ سم

٣) $\frac{أ´}{جا\,أ} = ٢\,نق$ $\qquad \frac{٥٢,٢}{جا\,٥٢´\,٤٣°} = ٢\,نق$ $\qquad$ **نق** = ٣٧,٩ سم

ثالثا : في Δ أ ب ء

$$\frac{ب\,ء}{جا\,أ} = \frac{أ\,ب}{جا\,ء}$$

$$\frac{ع}{جا\,٥٢´\,٤٣°} = \frac{٧٥}{جا\,٩٠}$$

ع = ٧٥ × جا ٥٢´ ٤٣° = ٥١,٩ سم

مثال : في Δ أ ب ء إذا كان [(أ´ + ب´) - جـ´) (ب´ + جـ´) - أ´] = ٣ ب´ جـ´

أوجد ق (< أ) .

الحـــــل

$\because \underbrace{[\,(أ´ + ب´) - جـ´)\,(ب´ + جـ´) - أ´\,]}_{\text{فرق مربعين}} = ٣\,ب´\,جـ´$

$\therefore (ب´ + جـ´)^{٢} - أ´^{٢} = ٣\,ب´\,جـ´$

$ب´^{٢} + جـ´^{٢} + ٢\,ب´\,جـ´ - أ´^{٢} = ٣\,ب´\,جـ´$

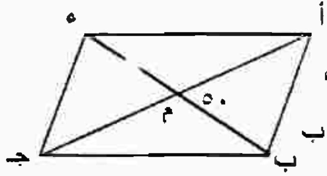
$ب´^{٢} + جـ´^{٢} - أ´^{٢} = ب´\,جـ´$ $\qquad$ بالقسمة علي ٢ ب´ جـ´

$$\therefore \frac{ب´^{٢} + جـ´^{٢} - أ´^{٢}}{٢\,ب´\,جـ´} = \frac{١}{٢}$$

$\therefore جتا\,أ = \frac{١}{٢}$ $\qquad \therefore$ ق (< أ) = ٦٠°

<u>مثال</u> : أ ب جـ ء متوازي أضلاع طولا قطريه أجـ ، ب ء يساوي ٢٤ سم ، ١٨ سم ، قياس الزاوية بين القطرين ٥٠° احسب محيط متوازي الأضلاع .

<u>الحـــــل</u>



في Δ أ ب م

(أ ب)^{٢} = (م أ)^{٢} + (أ ب)^{٢} ـ ٢ م أ × م ب جتا ب

(أ ب)^{٢} = (١٢)^{٢} + (٩)^{٢} ـ ٢ × ١٢ × ٩ × جتا ب

∴ (أ ب) = ٩,٢ سم

في Δ أ م ء

ق (< م) = ١٨٠ ـ ٥٠ = ١٣٠°

(أ ء)٢ = (م أ)٢ + (م ء)٢ ـ ٢ م أ × م ء جتا ١٣٠

(أ ء)^{٢} = (١٢)^{٢} + (٩)^{٢} ـ ٢ × ١٢ × ٩ جتا ١٣٠

∴ أ ء = ١٩

محيط متوازي الأضلاع = (١٩ + ١٩ + ٩,٢ + ٩,٢)

= ٥٦,٤ سم

<u>الحالة الثانية من قاعدة جيب التمام :</u>

في أي Δ أ ب جـ يكون

$$\text{جتا أ} = \frac{\text{ب}'^{٢} + \text{جـ}'^{٢} - \text{أ}'^{٢}}{\text{٢ ب}'\ \text{جـ}'}$$

$$\text{جتا ب} = \frac{\text{أ}'^{٢} + \text{جـ}'^{٢} - \text{ب}'^{٢}}{\text{٢ أ}'\ \text{جـ}'}$$

$$\text{جتا جـ} = \frac{\text{أ}'^{٢} + \text{ب}'^{٢} - \text{جـ}'^{٢}}{\text{٢ أ}'\ \text{ب}'}$$

<u>الإثبات :</u>

∴ أ'^{٢} = ب'^{٢} + جـ'^{٢} ـ ٢ ب' جـ' جتا أ

∴ ٢ ب' جـ' جتا أ = ب'^{٢} + جـ'^{٢} - أ'^{٢}

$$\text{جا أ} = \frac{\text{ب}'^{٢} + \text{جـ}'^{٢} - \text{أ}'^{٢}}{\text{٢ ب}'\ \text{جـ}'}$$

ملاحظات :

١) تستخدم هذه القاعدة لإيجاد قياسات زوايا المثلث إذا علم الأضلاع الثلاثة أ، النسب بين أطوال أضلاعه .

٢) أكبر زاوية تكون مقابلة لأكبر ضلع وأصغر زاوية تكون مقابلة لأصغر ضلع .

مثال : أ ب جـ Δ فيه أ = ٢٦ سم ، ب´ = ٣٥ سم ، جـ´ = ٤١ سم – أوجد أكبر قياسات زوايا المثلث وما هي مساحة سطحه .

الحـــــل

جـ´ أكبر ضلع ∴ جـ´ = أكبر زاوية

$$\text{جتا جـ} = \frac{\text{أ}'^{٢} + \text{ب}'^{٢} - \text{جـ}'^{٢}}{٢\ \text{أ}'\ \text{ب}'} = \frac{(٢٦)^{٢} + (١٥)^{٢} - (٤١)^{٢}}{٢ \times ٢٦ \times ٣٥}$$

٢٦ Sh ×٢ + ٣٥ Sh ×٢ − ٤١ Sh ×٢ = ÷ ٢ ÷ ٢٦ ÷ ٣٥ = Sh Cos Sh ,,

ق (< جـ) = ٨٣° ٣´

$$\text{مساحة سطح المثلث} = \frac{١}{٢}\ \text{أ}'\ \text{ب}'\ \text{جا جـ}$$

$$= \frac{١}{٢} \times ٢٦ \times ٣٥ \times \text{جا } ٨٣° ٣'$$

= ٤٥١,٦ سم^{٢}

مثال : أ ب جـ Δ فيه أ´ = ٣٢ سم ، ب´ = ٣٩ سم . جـ´ = ٥٢ سم أوجد :

١) ق (< أ)   ٢) مساحة سطح المثلث

٣) طول نصف قطر الدائرة الذي تمر برؤوس المثلث .

٤) طول العمود الساقط من ب علي أ جـ .

الحـــل

$$\text{جتا أ} = \frac{\text{ب}'^{٢} + \text{جـ}'^{٢} - \text{أ}'^{٢}}{٢\ \text{ب}'\ \text{جـ}'}$$

$$\text{جتا أ} = \frac{(٣٩)^{٢} + (٥٢)^{٢} - (٣٢)^{٢}}{٢ \times ٣٩ \times ٥٢}$$

∴ ق (< أ) = ٣٧° ٥٣´

إيجاد نق : $\frac{\text{أ}'}{\text{جا أ}} = ٢\ \text{نق}$ ∴ $\frac{٣٢}{\text{جا}٣٧° ٥٣'} = ٢\ \text{نق}$

نق = ٢٦ سم

مثال : في Δ أ ب جـ إذا كانت جتا ب = $\frac{\text{جـ}'}{\text{٢ أ}'}$ أثبت أن المثلث متساوي الساقين وإذا كان $\frac{\text{جا جـ}}{\text{جا أ}}$ = $\sqrt{\text{٣}}$ أوجد : ق (< ب) ، ق (< جـ) .

الحــــــل

∵ بَ ^٢^ = جـَ ^٢^ + أَ ^٢^ – ٢ أَ جـَ جتا ب

= جـَ ^٢^ + أَ ^٢^ – ٢ أَ جـَ جتا $\frac{\text{جـ}'}{\text{٢ أ}'}$

بَ ^٢^ = جـَ ^٢^ + أَ ^٢^ – جـَ ^٢^

∴ بَ ^٢^ = أَ ^٢^ ∴ بَ = أَ ∴ Δ متساوي الساقين

∵ $\frac{\text{جا جـ}}{\text{جا أ}}$ = $\sqrt{\text{٣}}$ ∴ $\frac{\text{جـ}'}{\text{أ}'}$ = $\sqrt{\text{٣}}$

∴ جـَ = أ $\sqrt{\text{٣}}$

∴ جتا ب = $\frac{\text{جـ}'}{\text{٢ أ}'}$ = $\frac{\text{أ}\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢ أ}'}$ = $\frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}}$

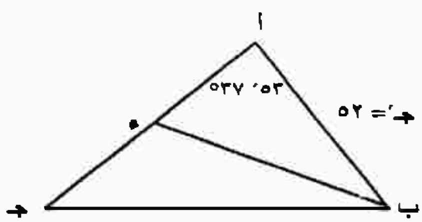
∴ ق (< ب) = ٣٠° ∴ ق (< أ) = ٣٠°

∴ ق(< جـ) = ١٢٠°

مساحة سطح المثلث = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ بَ جـَ أ

= $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ × ٣٩ × ٥٢ × جا ٥٣َ ٣٧°

= ٦٢٢,٦ سم^٢^



Δ أ ب ء : $\frac{\text{أ ب}}{\text{جا ٩٠}}$ = $\frac{\text{ب ء}}{\text{جا ٥٣َ ٣٧°}}$

$\frac{\text{٥٢}}{\text{١}}$ = $\frac{\text{ب ء}}{\text{جا ٥٣َ ٣٧°}}$

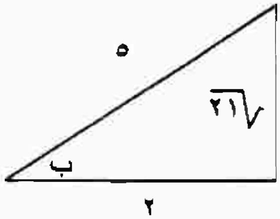
ب ء = ٥٢ × جا ٥٣َ ٣٧°

ب ء = ٣١,٩ سم

مثال : أ ب جـ Δ فيه جا ب = $\frac{\sqrt{\text{٢١}}}{\text{٥}}$ ، بَ = ١٠سم ، جـَ = ٨ سم أثبت أن:

المثلث متساوي الساقين وأوجد : جا أ ، جتا جـ

الحــــل



∵ $\text{جا ب} = \frac{\sqrt{٢١}}{٥} \longrightarrow \text{جتا ب} = \frac{٢}{٥}$

∵ $\text{بَ}^{٢} = \text{جـَ}^{٢} + \text{أَ}^{٢} - ٢\,\text{أَ}\,\text{جـَ}\,\text{جتا ب}$

$١٠٠ = ٦٤ + \text{أَ}^{٢} - ٢ \times ٨ \times \text{أَ} \times \frac{٢}{٥}$

$٣٦ = \text{أَ}^{٢} - \frac{٣٢}{٥}\,\text{أَ}$ بضرب الطرفين في ٥

$١٨٠ = ٥\,\text{أَ}^{٢} - ٣٢\,\text{أَ}$ ∴ $٥\,\text{أَ}^{٢} - ٣٢\,\text{أَ} - ١٨٠ = ٠$

$(٥\,\text{أَ} + ١٨)\,(\text{أَ} - ١٠) = ٠$

إما $٥\,\text{أَ} + ١٨ = ٠ \longrightarrow$ مرفوض أو $\text{أَ} - ١٠ = ٠ \longrightarrow \text{أَ} = ١٠$

∴ $\text{أَ} = ١٠$ ، $\text{بَ} = ١٠$ ، $\text{جـَ} = ٨$

$\text{جا أ} = \text{جا ب} = \frac{\sqrt{٢٠}}{٥}$

، $\text{جتا جـ} = \frac{\text{أَ}^{٢} + \text{بَ}^{٢} - \text{جـَ}^{٢}}{٢\,\text{أَ}\,\text{بَ}} = \frac{(١٠)^{٢} + (١٠)^{٢} - (٨)^{٢}}{٢ \times ١٠ \times ١٠} = ٠,٩٦$

تمارين (٧)

١- أ ب جـ Δ فيه (بَ) = ١١,٣ سم ، (جـَ) = ١٥,٢ سم ، ق(< أ) = ٧٠° . احسب: أَ

٢- أ ب جـ Δ أَ = ٥٠ سم ، بَ = ٦٠سم ، جـَ = ٨٠ سم – أوجد : قياس أكبر زاوية في المثلث.

٣- أ ب جـ ء متوازي أضلاع ق (< أ) = ٦٠° ومحيطه ٢٢ سم وطول قطره الأصغر = ٧ سم

أوجد : أب ، ب جـ

٤- أ ب جـ Δ فيه جتا أ = $\frac{٢}{٥}$ ، بَ = ١٠سم ، جـ = ٨ سم اثبت ان Δ أ ب جـ

متساوي الساقين .

٥- خطأ! ارتباط غير صالح.ب جـ = ٢٠ سم و ق(< ب) = ٢٩° ، ق(< جـ) = ٧٣° ، ء

منتصف ب جـ . أوجد طول كل من $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ ء}}$.

٦- أ ب جـ ء شكل رباعي فيه أ ب = أ ء = ٩ سم ، ب جـ = ٥ سم ، جـ ء= ٨ سم ،

أ جـ = ١١ سم – أثبت أن : الشكل أ ب جـ ء دائري .

٧- أ ب جـ Δ فيه أ ب = ٧ سم ، ب جـ = ٢٥ سم ، جـ أ = ٢٤ سم - أوجد : طول المتوسط المنصف للضلع $\overline{\text{ب جـ}}$

٨- في Δ أ ب جـ إذا علم أن :

$\frac{١}{٣}$ جا أ = $\frac{١}{٤}$ جا ب = $\frac{١}{٦}$ جا جـ أوجد ق (< ب) ثم اثبت أن جتا جـ = $\frac{-١١}{٢٤}$

كذلك أوجد ق (< جـ)

٩- أ ب جـ ء متوازي أضلاع تقاطع قطراه في م ، أ جـ = ١٦ سم ، ب ء = ٢٠ سم ، ق (< أ م ب) = ٥٠° - إحسب طول $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ ء}}$

١٠- أ ب جـ Δ فيه أَ : بَ : جـَ = ٣ : ٥ : ٧ - احسب قياس أكبر زاوية فيه .

حل المثلث

المقصود بحل المثلث هو معرفة أطوال أضلاعه الثلاثة وقياس زواياه الثلاثة .

ملاحظات هامة :-

١) إذا علم طول ضلع وقياس زاويتين

استخدم القانون : $\frac{أ^{\prime}}{جا\ أ} = \frac{ب^{\prime}}{جا\ ب} = \frac{جـ^{\prime}}{جا\ جـ}$

٢) إذا علم ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما

استخدم القانون : $أ^{\prime 2} = ب^{\prime 2} + جـ^{\prime 2} - ٢\ ب^{\prime}\ جـ^{\prime}\ جتا\ أ$

٣) إذا علم أطوال الأضلاع الثلاثة

استخدم القانون : $جتا\ أ = \frac{ب^{\prime 2} + جـ^{\prime 2} - أ^{\prime 2}}{٢\ ب^{\prime}\ جـ^{\prime}}$

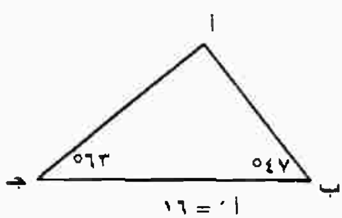
أولاً : إذا علم زاويتان وضلع يكون المطلوب ضلعين وزاوية لذلك تستخدم قاعدة الجيب

$$\left(\frac{أ^{\prime}}{جا\ أ} = \frac{ب^{\prime}}{جا\ ب} = \frac{جـ^{\prime}}{جا\ جـ} \right)$$

مثال١: حل المثلث أ ب جـ الذي فيه أ َ = ١٦ سم ، ق (< ب) = ٤٧° ، ق (< جـ) ٦٣°

الحـــــل

- المعلوم : زاويتان وضلع
- المطلوب : ضلعين وزاوية



ق (< أ) = ١٨٠ ـ ٤٧ ـ ٦٣

ق(< أ) = ٧٠°

$$\frac{أ^{\prime}}{جا\ أ} = \frac{ب^{\prime}}{جا\ ب} = \frac{جـ^{\prime}}{جا\ جـ}$$

$$\frac{١٦}{جا\ ٧٠°} = \frac{ب^{\prime}}{جا\ ب} = \frac{جـ^{\prime}}{جا\ جـ}$$

$$ب' = \frac{١٦ \times جا ٤٧}{جا ٧٠} = ١٢,٤ \text{ سم}$$

$$جـ' = \frac{١٦ \times جا ٦٣}{جا ٧٠} = ١٥ \text{ سم}$$

ثانياً : إذا علم الأضلاع الثلاثة يكون المطلوب الزوايا الثلاثة لذلك تستخدم :

$$جتا أ = \frac{ب'^٢ + جـ'^٢ - أ'^٢}{٢ ب' جـ'} \qquad جتا ب = \frac{أ'^٢ + جـ'^٢ - ب'^٢}{٢ أ' جـ'}$$

$$جتا جـ = \frac{أ'^٢ + ب'^٢ - جـ'^٢}{٢ أ' ب'}$$

مثال:- حل المثلث أ ب جـ الذى فيه أ' = ١٨ سم ، ب' = ٢٥ سم ، جـ' = ٣٧ سم

الحـــــل

- **المعلوم : الأضلاع الثلاثة**
- **المطلوب : الزوايا الثلاثة**

$$جتا أ = \frac{ب'^٢ + جـ'^٢ - أ'^٢}{٢ ب' جـ'} = \frac{(٢٥)^٢ + (٣٧)^٢ - (١٨)^٢}{٢ \times ٢٥ \times ٣٧} \qquad \therefore ق(<أ) = ٢٥° ٢٩'$$

= ,, Sh Cos Sh = ٣٧ ÷ ٢٥ ÷ ٢ ÷ = ^{٢}×Sh ١٨ − ^{٢}×Sh ٣٧ + ^{٢}×Sh ٢٥

$$جتا ب = \frac{أ'^٢ + جـ'^٢ - ب'^٢}{٢ أ' جـ'} = \frac{(٨)^٢ + (٣٧)^٢ - (٢٥)^٢}{٢ \times ١٨ \times ٣٧} \qquad \therefore ق(<ب) = ٣٦° ٤١'$$

ق (< جـ) = ١٨٠ - ٢٥° ٢٩' - ٣٦° ٤١'

ق (< جـ) = ١١٧° ٥٠'

ثالثاً: إذا علم ضلعين و قياس الزاوية المحصورة بينهما يكون المطلوب ضلع وزاويتان لإيجاد الضلع نستخدم :

$$أ'^٢ = ب'^٢ + جـ'^٢ - ٢ ب' جـ' جتا أ$$
$$، ب'^٢ = أ'^٢ + جـ'^٢ - ٢ أ' جـ' جتا ب$$
$$، جـ'^٢ = أ'^٢ + ب'^٢ - ٢ أ' ب' جتا جـ$$

ثم نستخدم $جتا أ = \frac{ب'^٢ + جـ'^٢ - أ'^٢}{٢ ب' جـ'}$ **وهكذا ....**

مثال : حل المثلث أ ب جـ الذي فيه ب´ = ٣٥ سم ، جـ´ = ٥٤ سم ، ق (< أ) = ٥٣°

الحـــــل

أ´^{٢} = ب´^{٢} + جـ´^{٢} – ٢ ب´ جـ´ جتا أ

أ´^{٢} = (٣٥)^{٢} + (٥٤)^{٢} – ٢ × ٣٥ × ٥٤ جتا ٥٣

٣٥ Sh ×٢ + ٥٤ Sh ×٢ -٢O٣٥O٥٤O٥٣ Cos =√

∴ أ´ = ٤٣ سم

$$\text{جتا ب} = \frac{\text{أ´}^{٢} + \text{جـ´}^{٢} - \text{ب´}^{٢}}{\text{٢ أ´ جـ´}} = \frac{(٤٣)^{٢} + (٥٤)^{٢} - (٣٥)^{٢}}{٢ \times ٤٣ \times ٥٤}$$

∴ ق (< ب) = ٤٠° ٢٠´

ق (< جـ) = ١٨٠ – ٥٣ – ٤٠° ٢٠´ = ٨٦° ٤٠´

تمارين (٨)

١- حل Δ أ ب جـ الذي فيه : (ب´) = ٤٠سم ، (أ´) = ٣٢ سم ، ق (< جـ) = ١١٢° ٢٨´

٢- حل Δ أ ب جـ الذي فيه: (جـ´) = ٧٢ سم ، (ب´) = ٨٠ سم ، (أ´) = ٥٠ سم

٣- حل Δ أ ب جـ الذي فيه: (أ´) = ٣٧سم ، (ب´) = ٥٦سم ، ق(< جـ) = ٤٣° ١٦´

٤- حل Δ أ ب جـ الذي فيه : ق (< أ) = ٥٧° ٢´ ، ق(< ب) = ١٠٨° ٥´ ، (أ´) = ١٨,٩٥ سم

٥- حل Δ أ ب جـ الذي فيه: (أ´) = ٢٦ سم ، (ب´) = ١٨ سم ، (جـ´) = ١٤ سم

٦- حل Δ س ص ع حيث : (س´) = ٣ سم ، (ص´) = ٥ سم ، (ع´) = ٧ سم

٧- حل Δ أ ب جـ حيث : (أ´) = ٢٧سم ، (ب´) = ٣٦سم ، ق(< جـ) = ٤٣° ١٦´

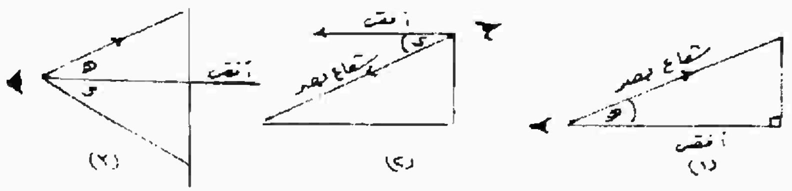
٨- حل Δ س ص ع حيث : (سَ) = ٥ سم ، ق (< ع) = ٦٠° ، مساحة سطحه = ١٥ $\sqrt{٣}$ سم²

٩- حل Δ أ ب جـ الذي فيه : (أَ) = ١٧ سم ، (بَ) = ٢٠ سم ، (جـَ) = ٢٩ سم

١٠- حل Δ س ص ع الذي فيه : (سَ) = ١٠ سم ، ق(< ص) = ٦٢° ، ق (< ع) = ٤٨°

زوايا الارتفاع والانخفاض

هي الزاوية المحصورة بين شعاع البصر والخط الأفقي الذي يمر بشعاع البصر .



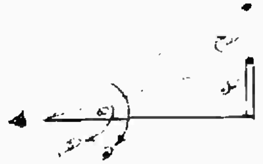
شكل (١) هـ زاوية ارتفاع
شكل (٢) ى زاوية انخفاض
شكل (٣) هـ ، ى زاويتي ارتفاع وانخفاض .

كيف تفكر في حل مسائل زوايا الارتفاع والانخفاض ؟

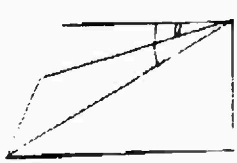
(١)ارسم المسالة جيدا .
(٢) من الرسم يتكون مثلثين مشتركان في ضلع واحد – احد المثلثين معلوم فيه طول ضلع والآخر مطلوب إيجاد طول ضلع فيه .
(٣) نبدأ بالمثلث المعلوم فيه طول ضلع ونستخدم قاعدة الجيب وبذلك توجد طول الضلع المشترك .
(٤) نستخدم قاعدة الجيب مرة أخرى في المثلث المطلوب إيجاد طول الضلع المجهول فيه .

أنواع المسائل

النوع الأول : -
رصد زاوية ارتفاع من مكانين مختلفين
أو زاوية انخفاض لجسم متحرك .

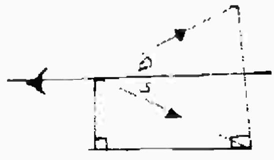


النوع الثاني :-
رصد زاوية ارتفاع قمة وقاعدة برج
فوق تل .



النوع الثالث :-
رصد زاوية انخفاض لجسم منخفض من
مكان أعلى .

النوع الرابع :-



رصد زاويتي ارتفاع وانخفاض من مكان واحد

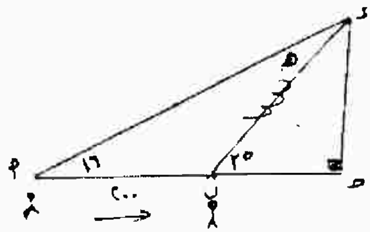
(تستخدم قاعدة الجيب) .

النوع الأول

مثال١

من نقطة على سطح الأرض رصد شخص زاوية ارتفاع من برج فكانت ١٦° وإذا تحرك الشخص جهة قاعدة البرج مسافة ٢٠٠ متر ورصد زاوية الارتفاع مرة أخرى فكانت ٣٥° احسب ارتفاع البرج .

الحـــــــل



في Δ أ ب ء

هـ = ٣٥ ـ ١٦ = ١٩°

Δ أ ب ء

$$\frac{\text{أ ب}}{\text{جا هـ}} = \frac{\text{ء ب}}{\text{جا أ}}$$

$$\frac{٢٠٠}{\text{جا}١٩} = \frac{\text{ب ء}}{\text{جا}١٦}$$

$$\therefore \text{ب ء} = \frac{٢٠٠ \times \text{جا } ١٦}{\text{جا } ١٩} \qquad \therefore \text{ب ء} = ١٦٩{,}٣٠ \text{ م}$$

في Δ ب ج ء

$$\frac{\text{ء جـ}}{\text{جا}٣٥} = \frac{\text{ء ب}}{\text{جا}٩٠}$$

$$\frac{\text{ء جـ}}{\text{جا}٣٥} = \frac{١٦٩{,}٣}{\text{جا } ٩٠} \qquad \text{د ج} = \frac{١٦٩{,}٣ \times \text{جا } ٣٥}{١}$$

$\therefore$ ء ج = ٩٧ م

مثال:

من نقطة أ في المستوى الأفقي المار بقاعدة برج رأسي وجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة البرج = س° وحين تقدم الراصد في اتجاه قاعدة البرج مسافة ف وجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة البرج = ص°

$$\text{أثبت أن : ارتفاع البرج} = \frac{\text{ف جا س جا ص}}{\text{جا (ص- س)}}$$

الحـــــــل

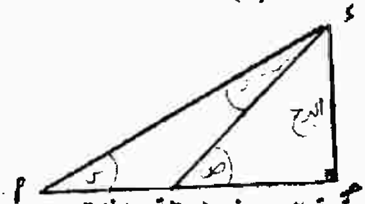
Δ ء ب أ

$$\frac{\text{ف}}{\text{جا (ص- س)}} = \frac{\text{ء ب}}{\text{جا س}}$$

$$\therefore \text{ ء ب } = \frac{\text{ف جا س}}{\text{جا (ص - س)}} \longleftarrow (1)$$

Δ ء جـ ب

$$\frac{\text{ء ب}}{\text{جا س}} = \frac{\text{ء ب}}{\text{جا س}} \quad \therefore \text{ ء ب جا ص = ء جـ } \longleftarrow (2)$$



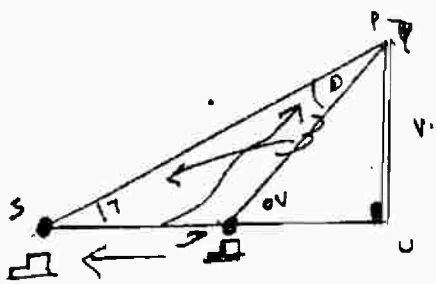
من ١ ، ٢

$$\therefore \text{ ء جـ (ارتفاع البرج) } = \frac{\text{ف جا س جا ص}}{\text{جا (ص - س)}}$$

مثال:

برج ارتفاعه ٧٠م رصدت زاوية انخفاض سيارة من قمة البرج في لحظة ما فكانت ٥٧° وبعد ٣ دقائق أصبحت زاوية ارتفاع السيارة هي ١٦° احسب سرعة السيارة (علما بان البرج والسيارة في الحالتين تقعان في مستوى رأسي واحد)

الحـــــــــل



Δ أ ب جـ

$$\frac{\text{أ ب}}{\text{جا جـ}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{جا ب}}$$

$$\frac{70}{\text{جا}57} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{جا } 90}$$

$$\therefore \text{ أ جـ } = \frac{70 \times \text{جا}90}{\text{جا } 57} = 83{,}4 \text{ م}$$

في Δ أ جـ ء   هـ = ٥٧ ـ ١٦ = ٤١

$$\frac{\text{جـ ء}}{\text{جا هـ}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{جا ء}}$$

$$\frac{\text{جـ ء}}{\text{جا } 41} = \frac{83{,}4}{\text{جا } 16}$$

$$\therefore \text{ جـ ء } = \frac{73{,}4 \times \text{جا}41}{\text{جا } 16} = 198{,}5 \text{ م}$$

$$\text{السرعة} = \frac{\text{المسافة}}{\text{الزمن}} = \frac{198{,}5}{3} = 66{,}1 \text{ م / ق}$$

مثال:

من قمة صخرة ارتفاعها ١٨٠ متر عن سطح الأرض رصد رجل زاويتي انخفاض قاربين يقعان في مستوى رأسي مار بالرجل فوجد أن قياسهما ٤٨°٣٠َ ، ٣٢°٢٥َ . أوجد البعد بين القاربين .

الحـــــــــل

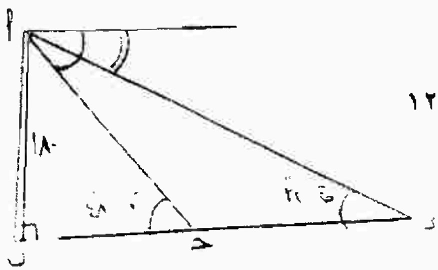
Δ أ ب جـ

أ جـ / جا ٩٠ = ١٨٠ / جا ٣٠َ ٤٨ْ   أ جـ = ١٨٠ × جا ٩٠ / جا ٣٠َ ٤٨ْ = ٢٤٠,٣ متر

Δ أ جـ ء

ق (< ء أ جـ) = ٣٠َ ٤٨ْ ـ ٢٥َ ٣٢ْ = ٥َ ١٦ْ

∴ ء جـ / جا ٥َ ١٦ْ = ٢٤٠,٣ / جا ٢٥َ ٣٢ْ



∴ ء جـ = ٢٤٠,٣ × جا ٥َ ١٦ْ / جا ٢٥َ ٣٢ْ = ١٢٤,٢

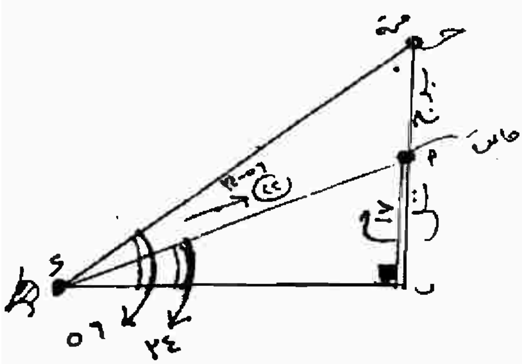
∴ البعد بين القاربين = ١٢٤,٢ متر

النوع الثاني

مثال:

من نقطة على سطح الأرض رصد شخص زاويتي ارتفاع قمة وقاعدة برج مقام فوق تل ارتفاعه ١٧ متر فكانتا ٥٦ْ ، ٣٤ْ احسب ارتفاع البرج .

الحـــــــــل



Δ أ ب ء

١٧ / جا ٣٤ = أ ء / جا ٩٠

∴ أ ء = ١٧ × جا ٩٠ / جا ٣٤   ∴ أ ء = ٣٠,٤ م

$\triangle$ أ جـ ء :

$\angle$ (جـ) = ٩٠ − ٥٦ = ٣٤°

$$\frac{\text{أ ء}}{\text{جا جـ}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{جا ء}}$$

$$\frac{\text{٣,٤}}{\text{جا ٣٤}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{جا ٢٢}}$$

$$\text{أ جـ} = \frac{\text{٣٠,٤} \times \text{جا٢٢}}{\text{جا٣٤}}$$

أ جـ = ٢٠,٣ م

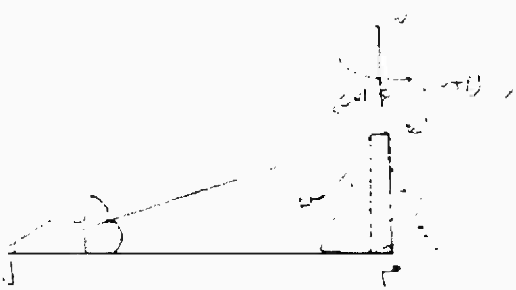
$\therefore$ ارتفاع البرج = ٢٠,٣ م

مثال:

برج ارتفاعه (ع) مقام على قمة جبل ارتفاعه س عن سطح الأرض ومن نقطة على سطح الأرض وجد أن الجبل يقابل زاوية مقدارها أ والبرج يقابل زاوية مقدارها ب

اثبت أن : ارتفاع الجبل = $\dfrac{\text{جا أ جتا (أ + ب) ع}}{\text{جا ب}}$

الحـــــــل



$\triangle$ ن م ل

ق ($\angle$ ن) = ٩٠ − (أ + ب)

$\triangle$ ن هـ ل

$$\frac{\text{هـ ل}}{\text{جا}(\text{٩٠} - (\text{أ} + \text{ب}))} = \frac{\text{ع}}{\text{جاب}}$$

$$\therefore \frac{\text{هـ ل}}{\text{جتا}(\text{أ} + \text{ب})} = \frac{\text{ع}}{\text{جاب}}$$

$$\therefore \text{هـ ل} = \frac{\text{جتا}(\text{أ} + \text{ب})\text{ع}}{\text{جاب}} \leftarrow (\text{١})$$

∴ Δ هـ م ل :

$$جا\,أ = \frac{س}{هـ\,ل}$$

∴ س = جا أ × هـ ل

بالتعويض في (١)

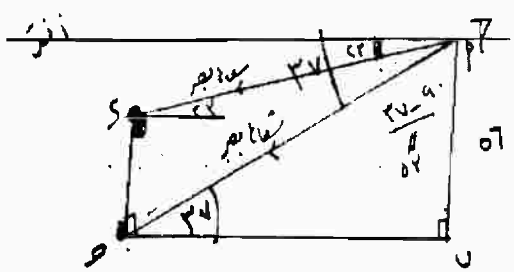
$$∴ س = \frac{جا\,أ \times ع \times جتا(أ + ب)}{جا\,ب}$$

النوع الثالث

مثال:

رصد زاويتي انخفاض لجسم منخفض من مكان أعلى من قمة برج ارتفاع ٥٦ متر رصدت زاوية انخفاض قمة وقاعدة برج آخر فكانت ٢٣° ، ٣٧° احسبي ارتفاع البرج الثاني والبعد الأفقي بين البرجين .

الحـــــــل



Δ أ ب جـ

$$\frac{٥٦}{جا\,٣٧} = \frac{أ\,جـ}{جا\,٩٠} = \frac{ب\,جـ}{جا\,٥٣}$$

$$أ\,جـ = \frac{٥٦ \times جا\,٩٠}{جا\,٣٧} = ٩٣ \text{ م}$$

$$ب\,جـ = \frac{٥٦ \times جا\,٥٣}{جا\,٣٧} = ٧٤,٣ \text{ م}$$

في Δ أ جـ ء

ق (< أ) = ٣٧ − ٢٣ = ١٤°   ق (< ء) = ٩٠ + ٢٣ = ١١٣°

$$∴ \frac{ء\,جـ}{جا\,١٤} = \frac{أ\,جـ}{جا\,١١٣} \qquad \frac{ء\,جـ}{جا\,١٤} = \frac{٩٣}{جا\,١١٣}$$

$$∴ ء\,جـ = \frac{٩٣ \times جا\,١٤}{جا\,١١٣} \qquad ∴ ء\,جـ = ٢٤,٤ \text{ م}$$

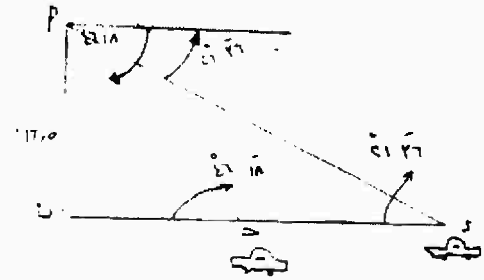
مثال:

من قمة برج ارتفاعه ١١٦,٥ مترا عن سطح الأرض وجد أن زاويتي انخفاض سيارتين على الطريق الأفقي المار بقاعدة البرج هما ١٨´ ٤٦° ، ٣٦´ ٢١° أوجد البعد بين السيارتين .

الحـــــــل

جـ أ ء = ١٨´ ٤٦° − ٣٦´ ٢١°

= ٤٢´ ٢٤°



Δ أ ب جـ القائم في ب

$$\text{جا جـ} = \frac{\text{١١٦,٥}}{\text{أ جـ}}$$

$$\therefore \text{أ جـ} = \frac{\text{١١٦,٥}}{\text{جا } ٤٦^\circ\ ١٨'}$$

Δ أ جـ ء :

$$\frac{\text{جـ ء}}{\text{جا } ٢٤^\circ\ ٤٢'} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{جا } ٢١^\circ\ ٣٦'}$$

$$\therefore \text{جـ ء} = \frac{\text{١١٦,٥} \times \text{جا } ٢٤^\circ\ ٤٢'}{\text{جا } ٢١^\circ\ ٣٦'}$$

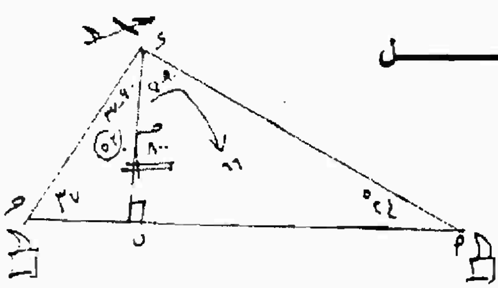
$$= \frac{\text{١١٦,٥} \times \text{جا } ٢٤^\circ\ ٤٢'}{\text{جا } ٤٦^\circ\ ١٨' \times \text{جا } ٢١^\circ\ ٣٦'}$$

$$= \text{١٨٢,٩}$$

∴ البعد بين السيارتين = ١٨٣ متر تقريبا

مثال:

طائرة على ارتفاع ٨٠٠ متر من سطح البحر رصدت زاويتي انخفاض سفينتان فكانتا ٢٤° ، ٣٧° احسب البعد بين السفينة إذا علمت أن مسقط الطائرة يقع بين السفينتين .



الحـــــــل

Δ أ ب ء

$$\frac{\text{أ ب}}{\text{جا ٦٦}} = \frac{\text{٨٠٠}}{\text{جا ٢٤}}$$

$$\text{ا ب} = \frac{\text{٨٠٠} \times \text{جا ٦٦}}{\text{جا ٢٤}} = \text{١٧٩٦,٨ متر}$$

Δ ء ب جـ

$$\frac{\text{ب جـ}}{\text{جا ٥٣}} = \frac{\text{٨٠٠}}{\text{جا ٣٧}}$$

$$\text{ب جـ} = \frac{\text{٨٠٠} \times \text{جا ٥٣}}{\text{جا ٣٧}} = \text{١٠٦١,٦ متر}$$

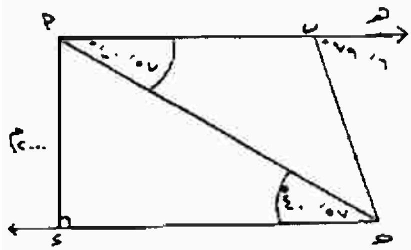
البعد بين السفينتين = أ ب + ب جـ = ١٧٩٦,٨ + ١٠٦١,٦

= ٢٨٥٨,٤ متر

مثال:

رصد طيار معسكرا وهو على ارتفاع ٢٠٠٠ م عن سطح البحر فوجد أن قياس زاوية انخفاض ٥٧´ ٤٠° وبعد أن سار دقيقتين وهو على نفس الارتفاع متجها نحو المعسكر وقبل أن يصله وجد أن قياس زاوية انخفاض المعسكر أصبحت ٦´ ٧٩° . فما سرعة الطيار بالمتر / الثانية ؟

الحــــــــــل



أ موضع الطيار الأول.

ب موضع الطيار بعد دقيقتين ، جـ المعسكر

ب أ جـ هي زاوية انخفاض جـ للموضع الأول

هـ ب جـ هي زاوية انخفاض جـ للموضع الثاني

ق(ب أ جـ) = ق (أ جـ ء) = ´57 ٤٠° بالتبادل

ق (ب جـ ء) = ق (جـ ب هـ) = ٦´ ٧٩° بالتبادل

∴ ق (أ جـ ب) = ٦´ ٧٩° - ٥٧´ ٤٠° = ٩´ ٣٨°

Δ أ ء جـ القائم فيه جا (أ جـ ء) = $\frac{\text{أء}}{\text{أجـ}}$

∴ أ جـ = $\frac{\text{أ ء}}{\text{جا (< أ جـ ء)}} = \frac{\text{٢٠٠٠}}{\text{جا (٥٧´ ٤٠°)}} = \text{٣٠٥١,٦}$

ق (أ ب جـ) = ١٨٠ - (٦´ ٧٩°) = ٥٤´ ١٠٠°

Δ أ ب جـ فيه $\frac{\text{أجـ}}{\text{جا (< أ ب جـ)}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{جا (< أ جـ ب)}} = \frac{\text{٣٠٥١,٦}}{\text{جا (٥٤´ ١٠٠°)}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{جا (٩´ ٣٨°)}}$

أ ب = $\frac{\text{٣٠٥١,٦ جا ٩´ ٣٨°}}{\text{جا ٥٤´ ١٠٠°}} = \text{١٩٢٠}$

سرعة الطيار بعد دقيقتين = $\frac{\text{١٩٢٠}}{\text{٢×٦٠}}$ = ١٦ م / ث

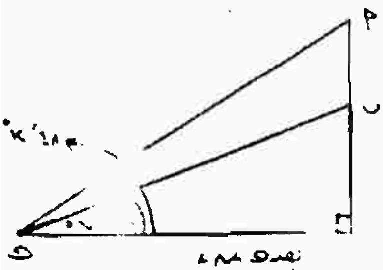
مثال:

برج به فتحتان أ ، ب في مستوى رأسي واحد المسافة بينهما ٣,٥ م رصدت الفتحتان من النقطة جـ الواقعة في المستوى الأفقي المار بقاعدة البرج فكان قياسا زاويتي ارتفاعهما هما ٣٠´ ٥٧° ، ٤٨´ ١٢° على الترتيب . أوجد بعد النقطة جـ عن قاعدة البرج ($\overline{\text{أ ب}}$ قطعة مستقيمة رأسية)

الحـــــــل

ق (< أ) = ١٨٠ – (٩٠ + ٤٨ ١٢°) = ١٢ ٧٧°

ق (< أ جـ ب) = ٤٨ ١٢° – ٣٠ ٧° = ١٢ ٥°



Δ أ ب جـ فيه $\frac{\text{أ ب}}{\text{جا (< أ جـ ب)}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{جا (< أ)}}$

$\frac{\text{٣,٥}}{\text{جا ١٢ ٥°}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{جا ١٢ ٧٧°}}$

∴ ب جـ = $\frac{\text{٣,٥ جا ١٢ ٧٧°}}{\text{جا ١٢ ٥°}}$ = ٣٧,٧ م

Δ ب جـ ء القائم

∴ جتا (< ب جـ ء) = $\frac{\text{ء جـ}}{\text{ب جـ}}$

∴ ء جـ = ب جـ جتا (< ب جـ ء)

= ٣٧,٣ جتا ٣٠ ٧° = ٣٧ م .

<u>النوع الرابع</u>

<u>مثال:</u>

رصد زاوية ارتفاع وانخفاض معا من شرفة منزل يرتفع عن سطح الأرض ٨ متر رصدت زاويتي ارتفاع وانخفاض برج مقابل فكانتا ٣٧ ° ، ١٨ ° احسب :

- البعد بين المنزل والبرج   - ارتفاع البرج

الحـــــــل

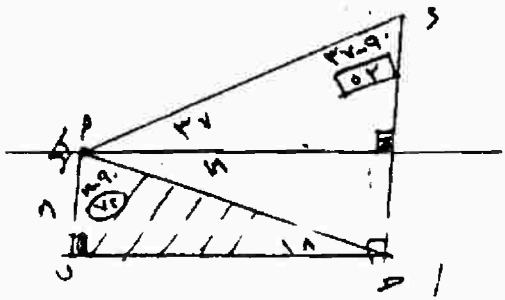
Δ أ ب جـ

$\frac{\text{أ جـ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{جا جـ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{جا أ}}$

$\frac{\text{أ جـ}}{\text{جا ٩٠}} = \frac{\text{٨}}{\text{جا ١٨}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{جا ٧٢}}$

أ جـ = $\frac{\text{٨ جا ٩٠}}{\text{جا ١٨}}$ = ٢٤,٦ متر (البعد بين المنزل والبرج)

في Δ أ جـ ء



$$\frac{د\ جـ}{جا\ أ} = \frac{أ\ جـ}{جا\ د}$$

$$\therefore \frac{ء\ جـ}{جا\ ٥٥} = \frac{٢٥,٨}{جا\ ٥٣}$$

$$\therefore ء\ ج = \frac{٢٥,٨ \times جا\ ٥٥}{جا\ ٥٣}$$

$\therefore$ ء ج = ٢٦,٤ متر

ارتفاع البرج = ٢٦,٤ متر

مثال:

شاهد رجل قمة منذنة تقع شماله فوجد أن زاوية ارتفاعها 18´ ٢٢°٥ ولما سار مسافة ١٥٠ متر جنوبا وجد أن زاوية ارتفاع قمة المنذنة أصبحت 32´ ١٧°٥ فما ارتفاع المنذنة .

الحـــــــــل

و ا = ع طا 42´ ٦٧°٥

= ٢,٤٣٨٢ ع

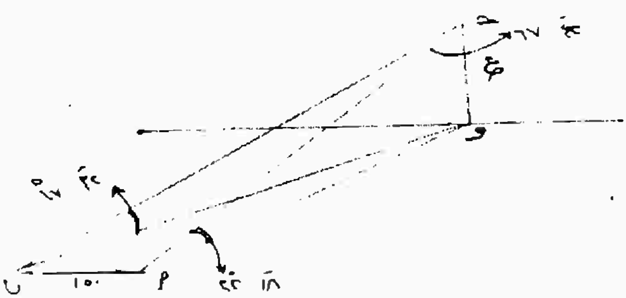
و ب = ع طا 28´ ٧٢°٥

= ٣,١٦٥٨ ع

ب ا ⊥ ا و

Δ و أ ب قائم :

$\therefore$ و ب ٢ = و ا ٢ _ ا ب ٢



ع ٢ (٣,١٦٥٨) ٢ = ع ٢ (٢,٤٣٨٢) ٢ + ١٥٠ ٢

$$ع^٢ = \frac{٢٢٥٠٠}{٤,٠٧٧٢} = ٥٥١٨,٠٤٩$$

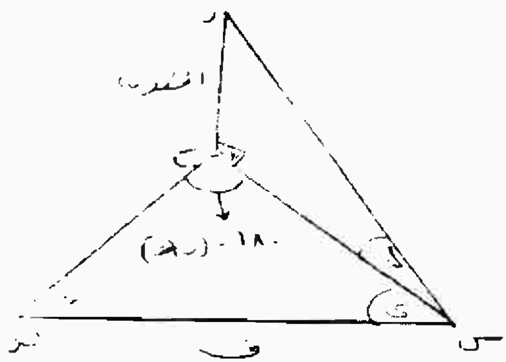
$\therefore$ ع = ٧٢,٢٨

مثال:

س ، ص نقطتان في المستوى الأفقي المار بنقطة ع حيث ع قاعدة منذنة قمتها ن ، ع ∉ ص´ س´ وكـــان س ص = ف ، ق (> س ص ع) = هـــ ، ق (> ص س ع) = ى وقياس زاوية ارتفاع قمة المنذنة من س = ل°

اثبت أن : ارتفاع المئذنة = $\frac{ف \text{ جا } هـ \text{ طا } ل}{\text{جا}(ى + هـ)}$

الحـــــــل



Δ س ع ن :

طا ل = $\frac{ع}{س ع}$

$\therefore$ ع = س ع طا ل ← ١

Δ س ص ع :

$\frac{ف}{\text{جا}(ى + هـ)} = \frac{س ع}{\text{جا } هـ}$

$\therefore$ س ع = $\frac{ف \text{ جا } هـ}{\text{جا}(ى + هـ)}$ ← ٢

من ١ ، ٢

$\therefore$ ع (ارتفاع البرج) = $\frac{ف \text{ جا } هـ \text{ طا } ل}{\text{جا}(ى + هـ)}$

مثال:

شاهد رجل من نقطة عند سطح تل أن قياس زاوية ارتفاع قمة التل ١٢َ ٢٧ْ ولما صعد نحو التل مسافة ٢٠٠٠ متر على مستوى يميل على الأفقي بزاوية قياسها ١٧ْ وجد أن مقياس زاوية ارتفاع قمة التل ١٥َ ٢٦ْ . احسب ارتفاع التل .

الحـــــــل

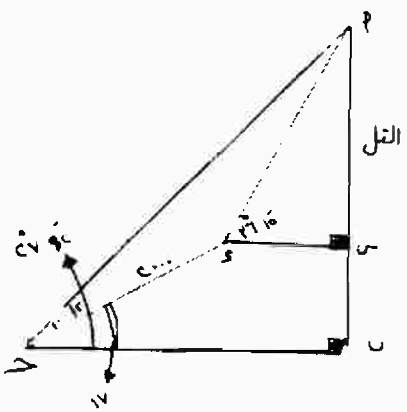
ق (س ء جـ) = ١٨٠ ـ ١٧ = ١٦٣

ق (أ ء جـ) = ٣٦٠ ـ (١٦٣ + ١٥َ ٢٦ْ)

= ٤٥َ ١٦٠ْ

ق (ء أ جـ) = ١٨٠ ـ (٤٥َ ١٦٠ْ + ١٢َ ١٠ْ)

= ٣َ ٩ْ



Δ أ جـ ء

$\frac{أ جـ}{\text{جا } ٤٥َ ١٦٠ْ} = \frac{٢٠٠٠}{\text{جا } ٣َ ٩ْ}$

$\therefore$ أ جـ = $\frac{٢٠٠٠ \times \text{جا } ٤٥َ ١٦٠ْ}{\text{جا } ٣َ ٩ْ}$ = ٤١٠١,٩٧

Δ أ ب جـ

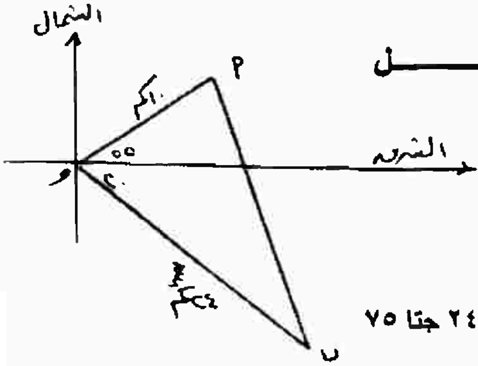
$\frac{أ جـ}{\text{جا}٩٠} = \frac{٢٠٠٠}{\text{جا } ١٢َ ٢٧ْ}$

∴ أ ب = ٤١٩١,٩٧ × جا ١٢ َ ٢٧°

= ١٩١٦ وهو ارتفاع البرج

مثال:

تحركت سفينة من نقطة ما في اتجاه ٧٠° شرق الجنوب مسافة ٢٤ كم وفي نفس اللحظة تحركت سفينة أخرى في اتجاه ٥٥° شمال الشرق مسافة ١٠ كم . أوجد المسافة بين السفينتين .



الحــــــل

Δ أ ب و

$(أ ب)^٢ = (أ و)^٢ + (و ب)^٢$

$- ٢ (أ و) (ب و)$ جتا أ و ب

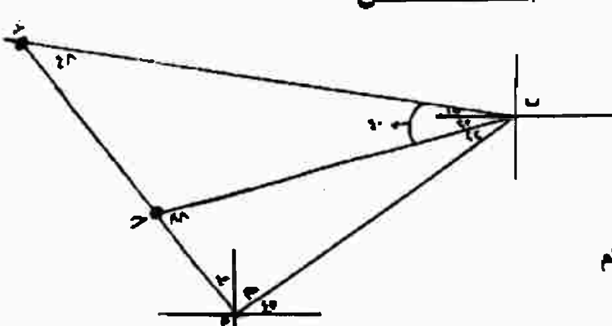
$= (١٠)^٢ + (٢٤)^٢ - ٢ × ١٠ × ٢٤$ جتا ٧٥

∴ أ ب ⟵ ٢٣,٤٩ كم

مثال:

سفينة تسير نحو الشمال الشرقي بسرعة ٢٤ كم / ساعة شاهد راكب فيها نقطتين ثابتين تجاه ٢٥° غرب الشمال وبعد ٤ ساعات وجد هذا الراكب أن إحدى هاتين النقطتين أصبحت في اتجاه ٢٣° جنوب الغرب بينما أصبحت النقطة الأخرى في اتجاه ١٧° شمال الغرب - أوجد البعد بين النقطتين علما بان النقطتين والرجل في مستوى أفقي واحد .

الحــــــل



السرعة = ٢٤ كم / س

الزمن = ٤ ساعات

∴ المسافة = السرعة × الزمن

= ٢٤ × ٤ = ٩٦ كم

Δ أ ب جـ :

$$\frac{\text{ب جـ}}{\text{جا } ٧٠} = \frac{٩٦}{\text{جا } ٨٨}$$

$$\therefore \text{ ب جـ} = \frac{٩٦ \times \text{جا } ٧٠}{\text{جا } ٨٨} = ٩,٣ \leftarrow ١$$

Δ ب جـ ء :

$$\frac{\text{ب جـ}}{\text{جا } ٤٨} = \frac{\text{جا ء}}{\text{جا } ٤٠}$$

$$\therefore \text{ جـ ء (البعد بين النقطتين)} = \frac{\text{ب جـ جا } ٤٠}{\text{جا } ٤٨} \leftarrow ٢$$

بالتعويض من ١ في ٢

$$\therefore \text{ جـ ء} = \frac{٩,٣ \times \text{جا } ٤٠}{\text{جا } ٤٨} \cong ٨$$

تمارين (٩)

١- قاس شخص زاوية ارتفاع قمة منزل فوجدها ٢٧° ١٢´ ثم سار مسافة ١٦ متر متجهاً نحو المنزل وقاس زاوية ارتفاع قمة المنزل مرة أخري فوجدها ٣٥° ٤٩´ - أوجد ارتفاع المنزل .

٢- من نقطة في المستوي الأفقي المار بقاعدة تل رصد شخص قمة تل فوجد أن قياس زاوية ارتفاعها ٤٢° ١٥´ ولما سار جهة إلتل مسافة ٢٣٥ متر ورصد قمة التل مرة ثانية فوجد زاوية ارتفاعها ٦٧° ٣٠´ - أحسب ارتفاع التل .

٣- من قمة صخرة ارتفاعها ٧٠ متر رصد قاربين بزاويتي أنخفاض ٢٠° ، ٤٥°- أوجد البعد بين القاربين علماً القاربين وقاعدة الصخرة في مستوي أفقي واحد.

٤- رصد شخص من نقطة علي سطح الأرض قمة برج رأسي فوجد أن قياس زاويةارتفاع قمة البرج تساوي ١٢° ٣٥´ وعندما سار مسافة ٧٥ متر نحو البرج وجد أن زاوية ارتفاع قمة البرج أصبح مقاسها ١٧° ٢٨´ - أوجد ارتفاع البرج من سطح الأرض .

٥- من نقطة علي سطح الأرض رصد رجل زاويتا ارتفاع أعلي وأسفل نقطة من سارية علم مثبتة رأسياً فوق سطح منزل فوجدهما ٥٤° ٢٦´ ، ٤٣° ١٢´ فإذا كان طول السارية ٨,٢٥ متر – فأوجد ارتفاع المنزل .

٦- قلعة ارتفاعها ٢٠ متر فوق قمة تل فإذا كان قياس زاويتا قمة القلعة وقاعدتها من نقطة علي سطح الأرض هما ٢٤´ ٥٦٥ ، ٥٣٨ - إحسب ارتفاع التل .

٧- برجان رأسيان البعد الأفقي بينهما ٦٠متر وزاوية أنخفاض قمة الأول عندما ترصد من قمة الثاني هي ٥٣٠ - أوجد ارتفاع البرج الأول إذا علم أن ارتفاع البرج الثاني ١٥٠متر .

٨- برج ارتفاعه ٣٠متر مقام فوق جبل – فإذا كانت زاويتاارتفاع قمة البرج وقاعدته من نقطة علي سطح الأرض هما ١٢´ ٥٦٧ ، ٥٣٥ - أوجد ارتفاع الجبل .

٩- رصد طيار في وقت واحد محطتين علي سطح الأرض أ ، ب المسافة بينهما ١٥٠٠متر فوجد أن قياس زاويتي أنخفاضيتهما ٥٤٨ ، ٥٥٧ فإذا كانت الطائرة والمحطتين في مستوي رأسي واحد – أوجد ارتفاع الطائرة عن سطح الأرض علماً بأن مسقط الطائرة علي الأرض يقع علي أ ب .

١٠- من قمة برج قيست زاويتي أنخفاض قمة مئذنة وقاعدتها فكانتا ٢٧´ ٥٣، ٥٢´ ٥٥٧ علي الترتيب – اوجد ارتفاع البرج إذا كان ارتفاعع المئذنة ٣٧متر .

١١- من قمة صخرة قيست زاويتا أنخفاض علامتين علي الأرض البعد بينهما كيلو متر واحد فوجدتا ٥٧٤ ، ٥٥٢ علي الترتيب وفي نفس الأتجاه شرق الصخرة – أوجد ارتفاع الصخرة .

١٢- برج به فتحتان س،ص في خط رأسي واحد المسافة بينهما ١٥متر رصدت الفتحتان من النقطة جـ الواقعة في المستوي الأفقي المار بقاعدة البرج فكانت زاويتا ارتفاعهما ٢٨´ ٥١١ ، ١٩´ ٥١٥ - أوجد بعد جـ عن قاعدة البرج .

١٣- أراد رجل أن يعين ارتفاع قمة تل فأختار نقطتين ب ، جـ في مستوي قاعدة التل البعد بينهما ٥٠٠٠متر ثم رصد نقطة أ علي قمة التل فكانت < أ ب جـ=٥١٢٧ ، < أ جـ ب=٥٣٣ وزاوية ارتفاع نقطة أ من الموقع ب هي ١٤´ ٥٥ - أحسب ارتفاع التل .

١٤- أ ، ب نقطتان المسافة بينهما ١٢٠٠قدماً ، جـء برج قاعدته جـ تقع في المستوي الأفقي المار بالنقطتين أ ، ب . رصدت قمة البرج ء من نقطة أ فكانت زاوية ارتفاعها ٣٨´ ٥١٢ فإذا كانت < ب أ جـ = ١٢´ ٥٧٧ ، < أ ب جـ = ٣٠´ ٥٦٥ فأوجد ارتفاع البرج لأقرب قدم .

١٥ـ من قمة منزل ارتفاعه ١٥ متر كان قياس زاوية ارتفاع قمة برج ٥٦٧ ، قياس زاوية انخفاض قاعدة البرج ٥٣٥ ـ أوجد ارتفاع البرج علماً بأن قاعد البرج وقاعدة المنزل في مستوي أفقي واحد .

١٦ـ شاهد رجل من نقطة عند سطح تل أن قياس زاوية ارتفاع قمة التل ٥٤٢ ولما صعد نحو التل مسافة ٢٠متر علي مستوي يميل علي الأفقي بزاوية قياسها ٥٣٠ وجد أن مقياس زاوية ارتفاع قمة التل ٥٥٨ ـ احسب ارتفاع التل .

١٧ـ وقف رجل عند نقطة ب فشاهد جسم عند نقطة جـ التي تبعد ٦٠متر شرق ب عندما سار من ب إلي أ في اتجاه ٥١٠ شمال الشرق وجد أن النقطة جـ في اتجاه ٥١٥ جنوب الشرق من أ ـ أوجد بعد جـ من أ .

١٨ـ بدأت قاذفة قنابل رحلة لها من مدينة (أ) قاصدة مدينة (ب) فطارت في مستوي أفقي في إتجاه ٢ ´٤٢ ٥٣٢ شرق الشمال فوصلت (ب) بعد أن قطعت مسافة ٣٨٥ ميلاً ثم غيرت اتجاهها بعد ذلك وطارت في اتجاه ´٣٦ ٥٤١ غرب الشمال فوصلت إلي مدينة (جـ) بعد أن قطعت مسافة ٥١٠ ميلاً فإذا أرادت العودة من (جـ)إلي (أ) من أقصر طريق ففي أي اتجاه تطير ؟ .

النسب المثلثية للزاوية المركبة (أ - ب) ، (أ + ب)

١) جتا (أ - ب) = جتا أ جتا ب = جتا أ جتا ب + جا أ جا ب

٢) جا (أ - ب) = جا أ جتا ب - جتا أ جا ب

٣) ظا (أ - ب) = $\frac{\text{ظا أ - ظا ب}}{\text{١ + ظا أ ظا ب}}$

٤) جتا (أ + ب) = جتا أ جتا ب - جا أ جا ب

٥) جا (أ + ب) = جا أ جتا ب + جتا أ جا ب

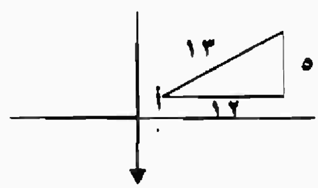
٦) ظا (أ + ب) = $\frac{\text{ظا أ + جا ب}}{\text{١ - ظا أ ظا ب}}$

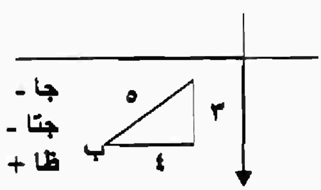
النوع الأول من المسائل إيجاد النسب المثلثية:

مثال: إذا كانت ظا أ = $\frac{٥}{١١}$ ، ظا ب = $\frac{٣}{٤}$

حيث: ٠ < أ < $\frac{\text{ط}}{٢}$ ، ١٨٠° < ب < ٢٧٠°

الحل:





ظا أ = $\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$ = $\frac{٥}{١٢}$ ، ظا ب = $\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$ = $\frac{٣}{٤}$

جا (أ - ب) = جا أ جتا ب - جتا أ جا ب = $\frac{٥}{١٣}$ × $\frac{-٤}{٥}$ - $\frac{١٢}{١٢}$ × $\frac{-٣}{٥}$

جا (أ - ب) = $\frac{-٢٠}{٦٥}$ + $\frac{٣٦}{٦٥}$ ∴ جا (أ - ب) = $\frac{١٦}{٦٥}$

∴ قتا (أ - ب) = $\frac{٦٥}{١٦}$

جتا (أ - ب) = جتا أ . جتا ب + جا أ جا ب

$$= \frac{١٢}{١٣} \times \frac{-٤}{٥} + \frac{٥}{١٣} \times \frac{-٣}{٥}$$

$$= \frac{-٤٨}{٦٥} \quad \frac{-١٥}{٦٥}$$

جتا (أ - ب) = $\frac{-٦٣}{٦٥}$ ومنها قا (أ - ب) = $-\frac{٦٥}{٦٣}$

ظا (أ - ب) = $\frac{\text{ظا أ - ظا ب}}{\text{١ + ظا أ ظا ب}} = \frac{\frac{٥}{١٢} + \frac{٣}{٤}}{١ + \frac{٥}{١٢} \times \frac{٣}{٤}}$

ظا (أ - ب) = $\frac{٢٠ - ٣٦}{٤٨ + ١٥}$ ظا (أ - ب) = $\frac{-١٦}{٦٣}$

ملاحظات:-

١) قتا (أ + ب) = $\frac{١}{\text{جا (أ + ب)}}$

٢) قا (أ + ب) = $\frac{١}{\text{جتا (أ + ب)}}$

٣) ظتا (أ + ب) = $\frac{١}{\text{ظا (أ + ب)}} = \frac{\text{١ - ظا أ ظا ب}}{\text{ظا أ + ظا ب}}$

٤) جتا أ ي زاوية = - جتا المكملة لها

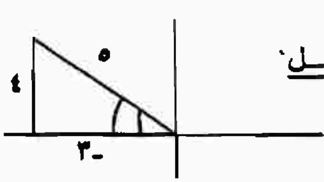
٥) جا أي زاويـة = جا مكملتها

٦) ظا أي زاويـة = - ظا المكملة لها

مثال: إذا كان: جا أ = $\frac{٤}{٥}$ ، جا ب = $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{ط}{٢} < أ < ب < ط$

أوجد: قتا (أ - ب)

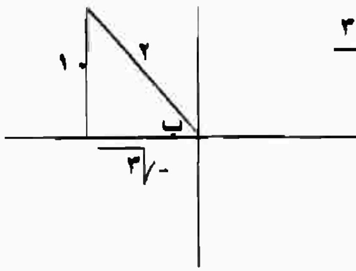
الحـــــــل:



∵ قتا (أ - ب) = $\frac{١}{\text{جا (أ - ب)}}$

∴ جا (أ - ب) = جا أ جتا ب - جتا أ جا ب

$= \frac{٤}{٥} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} - \left(\frac{-٣}{٥}\right) \frac{١}{٢}$



$= \frac{٤\sqrt{٣}}{١٠} + \frac{٣}{(-١٠)} = \frac{-٤\sqrt{٣} + ٣}{١٠}$

∴ قتا (أ - ب) = $\frac{١٠}{-٤\sqrt{٣} + ٣}$

<u>مثال</u>: أ ب جـ مثلث حاد الزاوية فيه جتا أ = $\frac{١}{٣}$ ، جتا ب = $\frac{١}{٤}$

أوجد جتا (أ + ب) ، جتا جـ

<u>الحـــــــل</u>

∵ جتا (أ + ب) = جتا أ جتا ب - جا أ جا أ

$= \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٨}}{٣} \times \frac{\sqrt{١٥}}{٤}$

$= \frac{١}{١٢} - \frac{١٢٠}{١٢} = \frac{١ - \sqrt{١٢٠}}{١٢}$

∵ مجموع زوايا المثلث = ١٨٠°

∴ أ + ب تكمل جـ

∴ جتا (أ + ب) = - جتا جـ

∴ جتا جـ = $\frac{-١ + \sqrt{١٢}}{١٢}$

النوع الثانى من المسائل:-

إيجاد النسب المثلثية لـ بعض الزاوايا بأستخدام الزوايا الخاصة الزوايا:

١٥° ، ٧٥° ، ١٠٥

١) ١٥ = ٤٥ - ٣٠ = ٦٠ - ٤٥

٢) ٧٥ = ٤٥ + ٣٠

٣) ١٠٥ = ٦٠ + ٤٥

مثال: بدون الحاسبة أوجد قيمة جا١٥ ، جتا١٥ ، ظا١٥

الحل: جا١٥ = جا (٦٠ - ٤٥) = جا٦٠ جتا٤٥ - جتا٦٠ جا٤٥

$$\therefore \ ١) \ \text{جا}١٥ = \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}}$$

$$\therefore \ \text{جا}١٥ = \frac{\sqrt{٣}}{٢\sqrt{٢}} - \frac{١}{٢\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٣} - ١}{٢\sqrt{٢}}$$

٢) جتا١٥ = جتا (٦٠ - ٤٥) = جتا ٦٠ جتا ٤٥ + جا ٦٠ جا ٤٥

$$= \frac{١}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}}$$

$$= \frac{١}{٢\sqrt{٢}} + \frac{\sqrt{٣}}{٢\sqrt{٢}}$$

$$\text{جتا}١٥ = \frac{١ + \sqrt{٣}}{٢\sqrt{٢}}$$

$$٣) \ \text{ظا} \ ١٥ = \text{ظا} \ (٦٠ - ٤٥) = \frac{\text{ظا} \ ٦٠ - \text{ظا} \ ٤٥}{١ + \text{ظا} ٦٠ \ \text{ظا} \ ٤٥}$$

$$\text{ظا} \ ١٥ = \frac{\sqrt{٣} - ١}{١ + \sqrt{٣}} = \frac{\sqrt{٣} - ١}{\sqrt{٣} + ١} \times \frac{\sqrt{٣} - ١}{\sqrt{٣} - ١} = \frac{(\sqrt{٣} - ١)^{٢}}{٣ + ١}$$

$$\text{ظا} \ ١٥ = \frac{٣ + ١ - ٢\sqrt{٣}}{٢} = \frac{٤ - ٢\sqrt{٣}}{٢} = ٢ - \sqrt{٣}$$

مثال: برهن أن: ٢$\sqrt{٢}$ جتا ٧٥ = $\sqrt{٣}$ - ١

الحـــــل

∵ جتا ٧٥ = جتا (٤٥ + ٣٠)

= جتا ٤٥ جتا ٣٠ - جا ٤٥ جا ٣٠

$$= \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{٢} = \frac{\sqrt{٣}}{٢\sqrt{٢}} - \frac{١}{٢\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٣} - ١}{٢\sqrt{٢}}$$

∴ الأيمن = ٢$\sqrt{٢}$ جتا ٧٥ = ٢$\sqrt{٢}$ × $\frac{\sqrt{٣} - ١}{٢\sqrt{٢}}$

= $\sqrt{٣}$ - ١ = الأيسر

مثال: أثبت أن: جا ٣٥ + جتا ٦٥ = جتا ٥

الحـــــل

الطرف الأيمن = جا (٣٠ + ٥) + جتا (٦٠ + ٥)

= جا ٣٠ جتا ٥ + جتا ٣٠ جا ٥ + جتا ٦٠ جتا ٥ - جا ٦٠ جا ٥

= $\frac{١}{٢}$ جتا ٥ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ جا ٥ + $\frac{١}{٢}$ جتا ٥ - $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ جا ٥

= جتا ٥ = الأيسر

مثال: أثبت أن: جا ٢٠ + جا ٤٠ = جا ٨٠

الحـــــل

الطرف الأيمن = جا (٣٠ - ١٠) + جا (٣٠ + ١٠)

= جا٣٠ جتا١٠ - جتا٣٠ جا١٠ + جا٣٠ جتا١٠ + جتا٣٠ جا١٠

= $\frac{١}{٢}$ جتا ١٠ + $\frac{١}{٢}$ جتا ١٠ = جتا ١٠ ⇦ (١)

الطرف الأيسر = جا ٨٠ = جا (٩٠ - ١٠) = جتا ١٠ ⇦ (٢)

من (١) ، (٢) ∴ الطرفان متساويان

مثال: بدون الحاسبة

أثبت أن مهما كانت قيمة أ يكون $\sqrt{٢}$ جتا ($\frac{ط}{٤}$ - أ) = جتا أ + جا أ

الحـــــل

$\sqrt{٢}$ [جتا ٤٥ - أ] = $\sqrt{٢}$ [جتا أ جتا ب + جا أ جا ب]

= $\sqrt{٢}$ [جتا ٤٥ جتا أ + جا ٤٥ جا أ]

= $\sqrt{٢}$ [$\frac{١}{\sqrt{٢}}$ جتا أ + $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ جا أ]

= جتا أ + جا أ

مثال: بدون الحاسبة أثبت أن: جا ٤٠ + جتا ٧٠ = جتا ١٠

الحـــــل

الطرف الأيمن = جا (٣٠ + ١٠) + جتا (٦٠ + ١٠)

= جا٣٠ جتا١٠ + جتا٣٠ جا١٠ + جتا٦٠ جتا١٠ - جا٦٠ جا١٠

= $\frac{١}{٢}$ جتا١٠ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ جا١٠ + $\frac{١}{٢}$ جتا١٠ - $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ جا١٠

= جتا١٠ = الأيسر

النوع الثالث: التطبيق العكسي للقوانين:

بدون الحاسبة أوجد قيمة.

١) جا ٧٥ جتا ١٥ - جتا ٧٥ جا ١٥

٢) جتا ٣٨ جتا ٨ + جا ٣٨ جا ٨

٣) $\frac{\text{ظا ٦٥ - ظا ٢٠}}{\text{١ + ظا ٦٥ ظا ٢٠}}$

الحـــــل

مفكوك ١) جا (٧٥ - ١٥) = جا ٦٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

مفكوك ٢) جتا (٣٨ - ٨) = جتا ٣٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

مفكوك ٣) هو ظا (٦٥ - ٢٠) = ظا ٤٥ = ١

مثال: بدون الحاسبة أوجد قيمة: جا ٤٠ جتا ١٠ + جا ٥٠ × جا ١٠

الحل: تعدل إلى جا ٤٠ جتا ١٠ + جتا ٤٠ جا ١٠

= جا (أ + ب)

= جا (٤٠ + ١٠) = جا ٥٠

مثال: أثبت أن: ظا ٥٠ = $\frac{\text{١ + ظا ٥}}{\text{١ - ظا ٥}}$ بدون الحاسبة

الحل: ظا ٥٠ = ظا (٤٥ + ٥) = $\frac{\text{ظا ٤٥ + ظا ٥}}{\text{١ - ظا ٤٥ ظا ٥}}$

ظا ٥٠ = $\frac{\text{١ + ظا ٥}}{\text{١ - ظا ٥}}$

مثال: أثبت أن: جا (س + ٧٠) + جتا (٣٠ - س) + جتا (س + ٧٠) جا (٣٠ - س)

لا تتوقف على قيمة س.

الحل: المقدار = جا [(س + ٧٠) + (٣٠ - س)]

= جا (أ + ب)

= جا (س + ٧٠ + ٣٠ - س) = جا ١٠٠

∴ المقدار لا يتوقف على قيمة س.

مثال: برهن أن:

جتا (س - ١١٠) جتا (س + ٧٠) + جا (س - ١١٠) جا (س + ٧٠) = -١

الحل: المقدار على صورة جتا (أ - ب)

∴ جتا [(س - ١١٠) - (س + ٧٠)]

= جتا (س - ١١٠ - س - ٧٠)]

= جتا (-١٨٠) = جتا ١٨٠

= -١ = الأيسر

مثال: بدون الحاسبة أوجد قيمة: جتا ٧٥ جتا ١٥ - جا ٧٥ × جا ٧٥

الحـــــــل

= جتا٧٥ جتا ١٥ - جا ٧٥ جا ١٥

= جتا (٧٥ + ١٥) = جتا ٩٠ = صفر

النوع الرابع: إثبات صحة علاقات:

مثال: أثبت أن: $\dfrac{\text{جا (أ + ب) + جا (أ - ب)}}{\text{جتا (أ + ب) + جتا (أ - ب)}} = \text{ظا أ}$

الحل: $\dfrac{\text{جا أ جتا ب + جتا أ جا ب + جا أ جتا ب - جتا أ جا ب}}{\text{جتا أ جتا ب - جا أ جا ب + جتا أ جتا ب + جا أ جا ب}}$

$$= \frac{\text{٢جا أ جتا ب}}{\text{٢جتا أ جتا ب}} = \frac{\text{جا أ}}{\text{جتا أ}} = \text{ظا أ} = \text{الأيسر}$$

مثال: إذا كانت أ ، ب قياسا زاويتين حادتين، ظا أ = $\dfrac{٤}{٥}$ ، ظا ب = $\dfrac{١}{٩}$

أثبت بدون أستخدام الآلة الحاسبة أن: أ + ب = ٤٥

الحل: إذا أمكن أثبات أن ظا (أ + ب) = ١ فإن أ + ب = ٤٥°

$$\text{ظا (أ + ب)} = \frac{\text{ظا أ + ظا ب}}{\text{١ - ظا أ ظا ب}} = \frac{\frac{٤}{٥} + \frac{١}{٩}}{١ - \frac{٤}{٥} \times \frac{١}{٩}}$$

$$= \frac{\frac{٣٦ + ٥}{٤٥}}{\frac{٤٥ - ٤}{٤٥}} = \frac{٤١}{٤١} = ١$$

مثال: أثبت أن: $\text{ظا (٤٥ - جـ)} = \dfrac{\text{جتا جـ - جا جـ}}{\text{جتا جـ + جا جـ}}$

الحل: الأيمن = $\dfrac{\text{ظا ٤٥ - ظا جـ}}{\text{١ + ظا ٤٥ ظا جـ}}$

$$= \frac{١ - \frac{\text{جا جـ}}{\text{جتا جـ}}}{١ + ١ \times \frac{\text{جا جـ}}{\text{جتا جـ}}}$$ بضرب البسط والمقام في جتا جـ

$\therefore$ ظا (٤٥ - جـ) = $\dfrac{\text{جتا جـ - جا جـ}}{\text{جتا جـ + جا جـ}}$ = الأيسر

<u>مثال:</u> أوجد قيمة أ ∋ [٠ ، ٣٦٠] التي تحقق المعادلة:

جا أ جتا ١٥ + جتا أ جا ١٥ = $\frac{1}{2}$

<u>الحـــــل</u>

جا أ جتا ١٥ + جتا أ جا ١٥ = $\frac{1}{2}$

جا (أ + ١٥) = $\frac{1}{2}$

$\because$ جا موجب $\therefore$ أ + ١٥ في الربع الأول

أ + ١٥ في الربع الثاني

$\therefore$ أ + ١٥ = ٣٠° أو أ + ١٥ = ١٥٠°

$\therefore$ أ = ١٥° أ = ١٣٥°

<u>مثال:</u> إذا كان: جا ١٠٥ جتا هـ - جتا ١٠٥ جا هـ = ١

أوجد قيمة هـ حيث هـ ∋] ٠ ، $\frac{ط}{2}$ [

<u>الحـــــل</u>

الأيمن هو مفكوك جا (١٠٥ - هـ) = ١

الزاوية التي جيبها ١ هي ٩٠°

١٠٥ - هـ = ٩٠

١٠٥ - ٩٠ = هـ

هـ = ١٥°

تمرين (١٠)

١) إذا كان قا أ = $\frac{١٧}{٨}$ ، قتا ب = $\frac{٥}{٤}$ برهن: قتا (أ + ب) = $\frac{٨٥}{٧٧}$

٢) أ ب جـ مثلث فيه ظا أ = ٣ ، جا ب = $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$

أوجد: جتا (أ + ب) ثم برهن ق (جـ) = ٤٥°

٣) إذا كانت: أ ∈]٠ ، $\frac{ط}{٢}$[حيث جا أ = $\frac{٤}{٥}$ ، ب ∈]ط ، $\frac{٣ط}{٢}$[

حيث ظا ب = $\frac{٥}{١٢}$ أوجد قيمة: ظا (أ + ب) ، ظا (أ - ب)

٤) إذا كان: ظا أ = $\frac{٥}{٦}$ ، ظا ب = $\frac{١}{١١}$ برهن أن: أ + ب = ٤٥°

٥) إذا كان ظا أ = $\frac{١}{٢}$ ، ظا ب = $\frac{١}{٥}$ ، ظا جـ = $\frac{١}{٨}$

برهن: (أ̂) + (ب̂) + (جـ) = ٤٥°

٦) إذا كان ٥ جا أ + ٣ = ٠ ، حيث أ ∈]ط ، ٣ط[، جتا ب = $\frac{٧}{٢٥}$

حيث ب ∈] $\frac{٣ط}{٢}$ ، ٢ط[أوجد قيمة: قتا (أ - ب) ، قا (أ - ب) ، ظتا (أ - ب)

٧) المثلث أ ب جـ الحاد الزاوية إذا كان ظا أ = $\frac{٣}{٤}$ ، ظا ب = $\frac{١٢}{٥}$

اثبت أن: أَ : بَ : جـَ = ١٣ : ٢٠ : ٢١

٨) أثبت أن: جا ٢٣ + جتا ٥٣ = جتا ٧

٩) اثبت أن: ظا ٧٥ - ظا ٣٠ - ظا ٧٥ ظا ٣٠ = ١

١٠) أوجد قيمة: ظا $\frac{\text{٧ط}}{\text{١٢}}$

١١) أوجد قيمة: ظا ١٥ ، ظا $\frac{\text{٧ط}}{\text{١٢}}$

١٢) برهن أن: ظا ٥٥ = $\frac{\text{١ + ظا ١٠}}{\text{١ - ظا ١٠}}$

١٣) أوجد قيمة: جا ٣٧ جتا ٨ + جتا ٣٧ جتا ٨٢

١٤) جتا ١٠٥ جتا ١٥ + جا ١٠٥ جتا ٧٥

١٥) أوجد قيمة: $\frac{\text{١ + ظا ٤٠ ظا ١٧٥}}{\text{ظا ٤٠ - ظا ١٧٥}}$

١٦) جتا $\frac{\text{٥ط}}{\text{١٢}}$ جتا $\frac{\text{ط}}{\text{١٢}}$ - جا $\frac{\text{٥ط}}{\text{١٢}}$ جا $\frac{\text{ط}}{\text{١٢}}$

١٧) اختصر: $\frac{\text{١ + ظا ١٥ ظا ١٥٠}}{\text{ظا ١٥ - ظا ١٥٠}}$

١٨) أوجد قيمة: جا ٣٤ جتا ١١ + جتا ٣٤ جتا ٧٩

١٩) أوجد قيمة: $\frac{\text{جتا ٤٢ جتا ١٢ + جا ٤٢ جا ١٢}}{\text{جا ٢٥ جتا ٣٥ + جتا ٢٥ جا ٣٥}}$

٢٠) برهن: $\frac{\text{جتا ٤٣ جتا ١٣ + جا ٤٣ جا ١٣}}{\text{جا ٣٠ ٥١٢ جتا ٣٠ ٥٣٢ + جتا ٣٠ ٥١٢ جا ٣٠ ٥٣٢}} = \frac{\sqrt{\text{٦}}}{\text{٢}}$

٢١) أثبت أن: ظا (٤٥ + أ) = $\frac{\text{جتا أ + جا أ}}{\text{جتا أ - جا أ}}$

٢٢) إذا كان أ ، ب ، جـ زوايا مثلث فاثبت أن:

ظا أ + ظا ب + ظا جـ = ظا أ ظا ب ظا جـ

٢٣) إذا كان جا (س + ص) = $\frac{\text{٣}}{\text{٤}}$ ، جا (س - ص) = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$

برهن أن: ظا س = ٥ ظا ص

٢٤) أثبت ان جا (أ + ب) جا (أ - ب) = جا^{2}أ - جا^{2}ب

٢٥) إذا كان ق(أ̂) + ق(ب̂) + ق(جـ) = $\frac{ط}{٢}$ فاثبت أن:

ظا أ ظا ب + ظا ب ظا جـ + ظا جـ ظا أ = ١

الدوال المثلثية لضعف الزاوية

(١) جا٢أ = ٢ جا أ جتا أ

الأثبات: ∵ جا (ا + ب) = جا أ جتا ب + جتا ا جا ب   بوضع أ = ب

∴ جا (أ + ب) = جا ا جتا ا + جتا ا جا ا

جا٢أ = ٢جا أ جتا أ

∴ جا ضعف أي زاوية = ٢ جا الزاوية × جتا الزاوية

ملحوظة: إذا وضعنا $\frac{أ}{٢}$ بدلاً من أ

∴ جا أ = ٢جا $\frac{أ}{٢}$ جتا $\frac{أ}{٢}$

(١) جتا٢أ = جتا^{٢}أ - جا^{٢}أ

= ١ - ٢جا^{٢}أ

= ٢جتا^{٢} - ١

الأثبات: جتا (أ + ب) = جتا ا جتا ب - جا أ جا ب   بوضع أ = ب

جتا (أ + ا) جتا ا جتا أ - جا أ جا ا

∴ جتا٢أ = جتا^{٢}ا - جا^{٢}أ.

، ∵ جا^{٢}أ = جتا^{٢}أ - ١

∴ جتا ضعف الزاوية = (١) جتا^{٢} الزاوية - جا^{٢} الزاوية

(٢) ٢جتا^{٢} الزاوية - ١

(٣) ١ - ٢ جا^{٢} الزاوية

ملحوظة: بوضع $\frac{أ}{٢}$ بدلاً من أ   ∴ جتا أ = جتا^{٢} $\frac{أ}{٢}$ - با^{٢} $\frac{أ}{٢}$

= ٢جتا^{٢} $\frac{أ}{٢}$ - ١

= ١ - ٢جا^{٢} $\frac{أ}{٢}$

$$(٣)\ \text{ظا}٢\text{أ} = \frac{٢\text{ظا أ}}{١ - \text{ظا}^{٢}\text{أ}}$$

الإثبات: ظا٢أ = ظا (أ + أ)

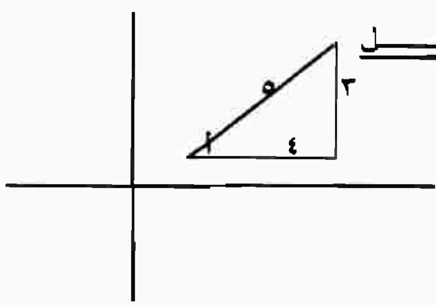
$$= \frac{\text{ظا أ} + \text{ظا أ}}{١ - \text{ظا أ ظا أ}} = \frac{٢\text{ظا أ}}{١ - \text{ظا}^{٢}\text{أ}}$$

ملحوظة: بوضع $\frac{\text{أ}}{٢}$ بدلا من أ $\quad \therefore\ \text{ظا أ} = \dfrac{٢\text{ظا}\frac{\text{أ}}{٢}}{١ - ٢\text{ظا}^{٢}\frac{\text{أ}}{٢}}$

مثال: إذا كان ظا أ = $\frac{٣}{٤}$ حيث أ ∈]٠ ، $\frac{\text{ط}}{٢}$[

أوجد: ١) جا٢أ ٢) جتا ٢أ ٣) ظا٢أ

الحل



(١) جا٢أ = ٢جا أ جتا أ

$$= ٢ \times \frac{٣}{٥} \times \frac{٤}{٥} = \frac{٢٤}{٢٥}$$

(٢) جتا٢أ = جتا²أ - جا²أ

$$= \left(\frac{٤}{٥}\right)^{٢} - \left(\frac{٣}{٥}\right)^{٢} = \frac{١٦}{٢٥} - \frac{٩}{٢٥} = \frac{٧}{٢٥}$$

$$(٣)\ \text{ظا}٢\text{أ} = \frac{٢\text{ظا أ}}{١ - \text{ظا}^{٢}\text{أ}} = \frac{٢ \times \frac{٣}{٤}}{١ - \left(\frac{٣}{٤}\right)^{٢}}$$

$$= \frac{\frac{٦}{٤}}{١ - \frac{٩}{١٦}} = \frac{\frac{٩}{٤}}{\frac{١٦ - ٩}{١٦}} = \frac{\frac{٦}{٤}}{\frac{٧}{١٦}}$$

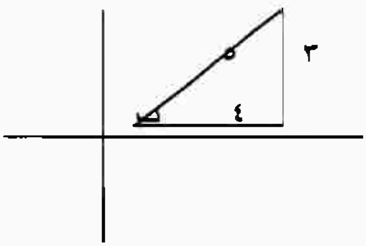
مثال: إذا كان ظا أ = $\frac{٥}{١٢}$ حيث ١٨٠ < أ < ٢٧٠

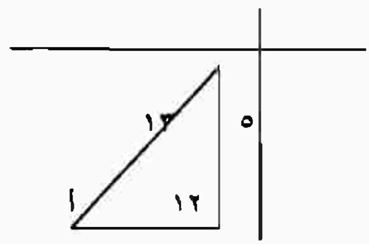
جا ب = $\frac{٣}{٥}$ حيث ٠ < أ < $\frac{ط}{٢}$

احسب قيمة ما يلي (١) جا(٩٠ + ٢جـ) (٢) جتا (١٨٠ - ٢ب)

(٣) جا (أ + ٢ب) (٤) ظا (٢أ + ب)

الحـــــــل





(١) جا(٩٠ + ٢أ) = جا٩٠ جتا٢أ + جتا ٩٠ جا٢أ

= ١ × جتا٢أ + صفر × جا٢أ

= جتا٢أ + ٠

= جتا٢أ - جا^{٢} أ

= $\left(\frac{-١٢}{١٣}\right)^{٢}$ - $\left(\frac{-٥}{١٣}\right)^{٢}$ = $\frac{١٤٤}{١٦٩}$ - $\frac{٢٥}{١٦٩}$ = $\frac{١١٩}{١٦٩}$

(٢) جتا (١٨٠ - ٢ب) = جتا١٨٠ جتا٢ب + جا١٨٠ جا٢ب

= -١ جتا٢ب + صفر × جا٢ب

= - جتا٢ب

= - [جتا^{٢}ب - جا^{٢}ب]

= -[$\left(\frac{٤}{٥}\right)^{٢}$ - $\left(\frac{٣}{٥}\right)^{٢}$] = -[$\frac{١٦}{٢٥}$ - $\frac{٩}{٢٥}$] = $\frac{-٧}{٢٥}$

(٣) جا (أ + ٢ب) = جا أ جتا٢ب + جتا أ جا٢ب

∵ جتا ٢ب = جتا^{٢} ب - جا^{٢}ب = $\frac{٧}{٥}$

$$\text{جا٢ب} = \text{٢جا ب جتا ب} = ٢ \times \frac{٣}{٥} \times \frac{٤}{٥} = \frac{٢٤}{٢٥}$$

$$\therefore\ \text{جا(أ + ٢ب)} = \frac{-٥}{١٣} \times \frac{٧}{٢٥} + \frac{-١٢}{١٣} \times \frac{٢٤}{٢٥}$$

$$= \frac{-٣٥}{١٣ \times ٢٥} - \frac{٢٨٨}{١٣ \times ٢٥} = \frac{-٣٢٣}{٣٢٥}$$

$$\text{(٤) ظا (٢أ + ب)} = \frac{\text{ظا٢أ + ظا ب}}{\text{١ - ظا٢أ ظا ب}} =$$

$$\text{ظا٢ب} = \frac{\text{٢ظاب}}{\text{١ - ظا}^{٢}\text{ب}} = \frac{٢ \times \frac{٥}{١٢}}{١ - \left(\frac{٥}{١٢}\right)^{٢}} = \frac{\frac{١٠}{١٢}}{١ - \frac{٢٥}{١٤٤}}$$

$$= \frac{\frac{١٠}{١٢}}{\frac{١١٩}{١٤٤}} = \frac{١٠}{١٢} \times \frac{١٤٤}{١١٩} = \frac{١٢٠}{١١٩}$$

$$\therefore\ \text{ظا(٢أ + ب)} = \frac{\frac{١٢٠}{١١٩} + \frac{٣}{٤}}{١ - \frac{١٢٠}{١١٩} \times \frac{٣}{٤}} = \frac{٨٣٧}{١١٦}$$

<u>مثال:</u> إذا كان ظا أ = $\frac{١}{٧}$ ، ظا ب = $\frac{١}{٣}$ حيث أ ، ب زوايا حادة

اثبت ان (ا + ب) = ٥٤٥

<u>الحــــــل</u>

نثبت ان ظا(ا + ٢ب) = ظا ٤٥ = ١

$$\text{ظا (ا + ٢ب)} = \frac{\text{ظا ا + ظا٢ب}}{\text{١ - ظا ا ظا٢ب}} = \frac{٢ \times \frac{١}{٣}}{١ - \left(\frac{٣}{٤}\right)^{٢}} = \frac{\frac{٢}{٣}}{١ - \frac{١}{٩}} = \frac{\frac{٢}{٣}}{\frac{٨}{٩}} = \frac{٣}{٤}$$

$$\therefore\ \text{ظا ٢ب} = \frac{\text{٢ظا ب}}{\text{١ - ظا}^{٢}\text{ب}}$$

$$\therefore \text{ظا}\,(\text{أ} + ٢\text{ب}) = \frac{\frac{١}{٧} + \frac{٣}{٤}}{١ - \frac{١}{٧} \times \frac{٣}{٤}} = \frac{\frac{٤ + ٢١}{٢٨}}{\frac{٢٨ - ٣}{٢٨}} = \frac{٢٥}{٢٥}$$

$$\therefore \text{ظا}\,(\text{أ} + ٢\text{ب}) = ١ \quad \therefore \text{أ} + ٢\text{ب} = ٤٥^\circ$$

<u>مثال:</u> إذا كان جا أ + جتا أ = $\frac{٧}{٦}$ أوجد قيمة جا٢أ ، جتا٢أ

<u>الحـــــــل</u>

$$(\text{جا أ} + \text{جتا أ})^٢ = \left(\frac{٧}{٦}\right)^٢$$

$$\text{جا}^٢\text{أ} + \text{جتا}^٢\text{أ} + ٢\,\text{جا أ جتا أ} = \frac{٤٩}{٣٦}$$

$$١ + ٢\,\text{جا أ جتا أ} = \frac{٤٩}{٣٦}$$

$$\therefore \text{جا٢أ} = \frac{٤٩}{٣٦} - ١ = \frac{٤٩ - ٣٦}{٣٦} = \frac{١٣}{٣٦}$$

<u>إيجاد جتا٢ أ</u> $\because$ جا^٢ ٢أ + جتا^٢ ٢أ = ١

$$\therefore \text{جتا}^٢\,٢\text{أ} = ١ - \text{جا}^٢\,٢\text{أ} = ١ - \left(\frac{١٣}{٣٦}\right)^٢$$

$$= \frac{(٣٦)^٢ - ١٦٩}{(٣٦)^٢} = \frac{١١٢٧}{١٢٩٦}$$

$$\therefore \text{جتا ٢أ} = \frac{١١٢٧}{١٢٩٦}$$

<u>مثال:</u> إذا كان جتا أ + جا أ = $\sqrt{\frac{٦}{٥}}$ أوجد: جا٢أ ، جتا٢أ ، ظا٢أ

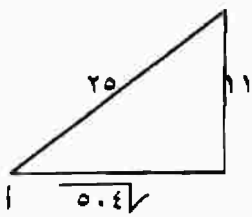
الحـــــــــل

∴ (جا أ + جتا أ) = $\frac{٦}{٥}$ بتربيع الطرفين

(جتا أ + جا أ)^{٢} = $\frac{٣٦}{٢٥}$ ∴ جتا^{٢} + جا^{٢}أ + ٢جا أ جتا أ = $\frac{٣٦}{٢٥}$

١ + جا٢أ = $\frac{٣٦}{٢٥}$

∴ جا٢أ = $\frac{٣٦}{٢٥}$ - ١ = $\frac{٣٦ - ٢٥}{٢٥}$ = $\frac{١١}{٢٥}$



جا٢أ = $\frac{١١}{٢٥}$

∴ جتا٢أ = $\frac{\sqrt{٥٠٤}}{٢٥}$ ، ظا٢أ = $\frac{١١}{\sqrt{٥٠٤}}$

<u>مثال:</u> إذا كان جا أ + جتا أ = $\frac{٢}{٥}$

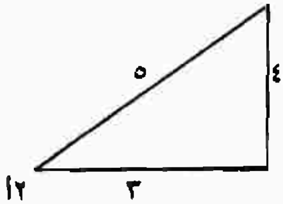
أوجد قيمة: جا٢أ ، جتا٢أ ، ظا٢أ ، جتا أ ، جا أ

الحـــــــــل

∴ جا أ + جتا أ = $\frac{٢}{٥}$ بضرب الطرفين × ٢

∴ ٢جا أ + جتا أ = $\frac{٤}{٥}$ .. جا٢أ = $\frac{٤}{٥}$ (جا٢أ - ٢جا أ جتا أ)

جتا٢أ = $\frac{٣}{٥}$



∴ جتا٢أ = ١ - ٢جا^{٢}أ

∴ $\frac{٣}{٥}$ = ١ - ٢ جا^{٢}أ

٢جا^{٢}أ = ١ - $\frac{٣}{٥}$ ⇐ ٢جا^{٢}أ = $\frac{٢}{٥}$ ⇐ جا^{٢}أ = $\frac{١}{٥}$

∴ جا أ = $\sqrt{\frac{١}{٥}}$

جتا٢أ = ٢جتا^{٢}أ - ١

$\frac{٣}{٥}$ = ٢جتا^{٢}أ - ١ ∴ ٢جتا^{٢}أ = ١ + $\frac{٣}{٥}$ = $\frac{٨}{٥}$

∴ جتا^{٢} أ = $\frac{٤}{٥}$ ⇐ جتا أ = $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$

<u>التطبيق العكسي لقوانين ضعف الزاوية</u>

<u>نعلم أن:</u> ١) ٢جا أ جتا أ = جا٢أ ٢) جتا^{٢}أ - جا^{٢}أ = جتا٢أ

٣) ٢جتا^{٢}أ - ١ = جتا٢أ ٤) ١ - ٢جا^{٢}أ = جتا٢أ

٥) $\frac{\text{٢ظا أ}}{\text{١ - ظا}^{٢}\text{أ}}$ = ظا٢أ

<u>مثال:</u> بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة = $\frac{\text{جا٣٥ جا١٠ + جتا٣٥ جتا١٠}}{\text{٢جا } ٢٢° \; 30' \text{ جتا } ٢٢° \; 30'}$

<u>الحـــــــل</u>

∵ المقدار على صورة $\frac{\text{جا(٣٥ + ١٠)}}{\text{جا٢} \times ٢٢° \; 30'}$ = $\frac{\text{جا٤٥}}{\text{جا٤٥}}$ = ١

<u>مثال:</u> أوجد قيمة = $\frac{\text{جتا٧٠ جتا١٠ + جا٧٠ جا١٠}}{\text{جا١٥ جتا١٥}}$ بدون استخدام الحاسبة

الحــــــل

نوضع المقدار على الصورة = $\dfrac{\text{٢[جتا٧٠ جتا١٠ + جا٧٠ جا١٠]}}{\text{٢جا١٥ جتا١٥}}$

$= \dfrac{\text{٢ × جتا(٧٠ - ١٠)}}{\text{جا٣٠}}$

$= \dfrac{\text{٢ × جتا٦٠}}{\text{جا٣٠}} = \dfrac{٢ \times \frac{١}{٢}}{\frac{١}{٢}} = ٢$

مثال: بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة

١) جتا^{٢} ١٥ - جا^{٢} ١٥   ٣) ٢جتا $\dfrac{ط}{٨}$ - ١

٢) ١ - ٢ جا^{٢} $\dfrac{ط}{٨}$ ٤) $\dfrac{\text{ظا } ٢٢^\circ\ 30'}{\text{١ - ظا}^{٢}\ ٢٢^\circ\ 30'}$

الحــــــل

١) جتا^{٢} ١٥ - جا^{٢} ١٥ = جتا٢ × ١٥

= جتا٣٠ = $\dfrac{\sqrt{٣}}{٢}$

٢) ١ - ٢ جا^{٢} $\dfrac{ط}{٨}$ = ١ - ٢ جا^{٢} $٢٢^\circ\ 30'$

= جتا ٢ × $٢٢^\circ\ 30'$ = جتا٤٥ = $\dfrac{١}{\sqrt{٢}}$

٣) ٢جتا^{٢} $\dfrac{ط}{٨}$ - ١ = ٢جتا^{٢} $٢٢^\circ\ 30'$ - ١ = جتا٤٥ = $\dfrac{١}{\sqrt{٢}}$

٤) $\dfrac{\text{ظا } ٢٢^\circ\ 30'}{\text{١ - ظا}^{٢}\ ٢٢^\circ\ 30'} = \dfrac{١}{٢} \times \left(\dfrac{\text{٢ظا } ٢٢^\circ\ 30'}{\text{١ - ظا}^{٢}\ ٢٢^\circ\ 30'} \right)$

$= \dfrac{١}{٢} \times$ ظا٤٥ $= \dfrac{١}{٢} \times ١ = \dfrac{١}{٢}$

إثبات صحة بعض العلاقات

نعلم أن: ١ - ٢ جا²أ = جتا٢أ

٢جتا²أ - ١ = جتا٢أ

مثال: أثبت أن: $\dfrac{\text{جا٢جـ}}{\text{١ - جتا٢جـ}}$ = ظتا جـ ومن ذلك أوجد قيمة ظا ٢٢° 30´

الحـــــــل

أولاً: $\dfrac{\text{جا٢جـ}}{\text{١ - جتا٢جـ}} = \dfrac{\text{٢جا جـ جتا جـ}}{\text{١ - [١ - ٢ جا}^2\text{جـ]}}$

$= \dfrac{\text{٢جا جـ جتا جـ}}{\text{١ - ١ + ٢ جا}^2\text{جـ}} = \dfrac{\text{جتا جـ}}{\text{جا جـ}}$ = ظتا جـ

ثانياً: ظتا جـ = $\dfrac{\text{جا٢جـ}}{\text{١ - جتا٢جـ}}$

نضع جـ = ٢٢° 30´

∴ ظتا ٢٢° 30´ = $\dfrac{\text{جا٤٥}}{\text{١ - جتا٤٥}}$

$= \dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2} - 1}$

مثال: برهن: $\dfrac{\text{٢جا جـ - جا٢أ}}{\text{٢جا}^3\text{أ}} = \dfrac{1}{\text{١ + جتا أ}}$

الحـــــــل

الأيمن = $\dfrac{\text{٢جا أ - ٢جا أ جتا أ}}{\text{٢جا}^3\text{أ}} = \dfrac{\text{٢جا أ (١ - جتا أ)}}{\text{٢جا}^3\text{أ}}$

$$= \frac{\text{١ - جتا أ}}{\text{جا}^{٢}\text{أ}} = \frac{\text{١ - جتا أ}}{\text{١ + جتا}^{٢}\text{أ}}$$

$$= \frac{\text{١ - جتا أ}}{\text{(١ - جتا أ) (١ + جتا أ)}} = \frac{\text{١}}{\text{١ + جتا أ}} = \text{الأيسر}$$

<u>مثال:</u> برهن: $\frac{\text{٢جا}^{٢}\text{ أ - ١}}{\text{جا أ جتا أ}} = \text{ظا أ - ظتا أ}$

<u>الحــــــل</u>

الطرف الأيمن: البسط صورة - جتا٢أ

بينما المقام $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ جا٢أ

$$= \frac{\text{- جتا٢أ}}{\frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{جا٢أ}} = \frac{\text{-٢ جتا٢أ}}{\text{جا٢أ}} = \text{-٢ ظتا٢أ}$$

$$= \text{-٢} \times \frac{\text{١}}{\text{ظا٢أ}} = \text{-٢} \frac{\text{١}}{\frac{\text{٢ظا أ}}{\text{١ - ظا}^{٢}\text{أ}}} = \frac{\text{-(١ - ظا}^{٢}\text{أ)}}{\text{ظا أ}}$$

$$= \frac{\text{-١}}{\text{ظا أ}} + \frac{\text{ظا}^{٢}\text{أ}}{\text{ظا أ}} = \text{- ظتا أ + ظا} \qquad = \text{ظا أ - ظتا أ}$$

<u>مثال:</u> برهن أن: $\text{جا أ} = \frac{\text{٢ظا} \frac{\text{أ}}{\text{٢}}}{\text{١ + ظا}^{٢} \frac{\text{أ}}{\text{٢}}}$

<u>الحل</u>

$$= \frac{\dfrac{\text{جا}\,\frac{أ}{2}}{\text{جتا}\,\frac{أ}{2}} \times 2}{\dfrac{\text{جا}^2\,\frac{أ}{2}}{\text{جتا}^2\,\frac{أ}{2}} + 1} = \frac{\dfrac{\text{جا}\,أ}{\text{جتا}\,أ} \times 2}{\dfrac{\text{جتا}^2\,\frac{أ}{2} + \text{جا}^2\,\frac{أ}{2}}{\text{جتا}^2\,\frac{أ}{2}}}$$

$$= \frac{2\,\text{جا}\,\frac{أ}{2}}{\dfrac{1}{\text{جتا}\,\frac{أ}{2}}} = 2\,\text{جا}\,\frac{أ}{2}\ \text{جتا}\,\frac{أ}{2}$$

= صورة جا٢أ

$$= \text{جا}\,2 \times \frac{أ}{2} = \text{جا}\,أ = \text{الأيسر}$$

<u>مثال:</u> برهن أن: $\dfrac{\text{جا}\,\text{جـ}}{1 + \text{جتا}\,\text{جـ}} = \text{ظا}\,\dfrac{\text{جـ}}{2}$

<u>الحل</u>

$$\text{الطرف الأيمن} = \frac{2\,\text{جا}\,\frac{\text{جـ}}{2}\ \text{جتا}\,\frac{\text{جـ}}{2}}{1 + \left(2\,\text{جتا}^2\,\frac{\text{جـ}}{2} - 1\right)} = \frac{2\,\text{جا}\,\frac{\text{جـ}}{2}\ \text{جتا}\,\frac{\text{جـ}}{2}}{2\,\text{جتا}^2\,\frac{\text{جـ}}{2}}$$

$$= \frac{\text{جا}\,\frac{\text{جـ}}{2}}{\text{جتا}\,\frac{\text{جـ}}{2}} = \text{ظا}\,\frac{\text{جـ}}{2} = \text{الأيسر}$$

مثال: اثبت أن: $\dfrac{\text{جا أ} + \text{جتا ٢ أ}}{\text{جتا}^{٢}\text{ أ}} = \dfrac{١ + ٢\text{ جا أ}}{١ + \text{جا أ}}$

الحـــــل

الطرف الأيمن $= \dfrac{\text{جا أ} + (١ - ٢\text{جا}^{٢}\text{أ})}{١ - \text{جتا}^{٢}\text{ أ}} = \dfrac{١ + \text{جا أ} - ٢\text{جا}^{٢}\text{ أ}}{١ - \text{جا}^{٢}\text{ أ}}$

$= \dfrac{(١ + ٢\text{جا أ})(١ - \text{جا أ})}{(١ + \text{جا أ})(١ - \text{جا أ})} = \dfrac{١ + ٢\text{ جا أ}}{١ + \text{جا أ}}$

= الطرف الأيسر

مثال: اثبت أن: $\dfrac{\text{جا أ} + \text{جا ٣ أ} + ٢\text{ جا ٤ أ جتا أ}}{\text{جتا أ} + \text{جتا ٣أ} - ٢\text{ جتا ٤أ جتا أ}} = \text{ظتا أ}$

الحـــــل

الطرف الأيمن $= \dfrac{(\text{جا ٣أ} + \text{جا أ}) + (٢\text{جا ٤أ جتا أ})}{(\text{جتا ٣أ} + \text{جتا أ}) - ٢\text{جتا ٤أ جتا أ}}$

$= \dfrac{٢\text{ جا ٢أ جتا أ} + ٢\text{جا ٤أ جتا أ}}{٢\text{جتا ٢أ جتا أ} - ٢\text{جتا ٤أ جتا أ}}$

$= \dfrac{\text{جا ٢أ} + \text{جا ٤أ}}{\text{جتا٢أ جتا ٤أ}} = \dfrac{٢\text{جا ٣أ جتا أ}}{٢\text{جا ٣أ جا أ}}$

$= \dfrac{\text{جتا أ}}{\text{أجا}} = \text{ظتا أ} =$ الأيسر

مثال: اثبت أن: $\dfrac{\text{جا ب} + \text{جا ٢أ ب}}{١ + \text{جتا ب} + \text{جتا ٢ب}} = \text{ظا ب}$

الحـــــل

الطرف الأيمن $= \dfrac{\text{جا ب} + ٢\text{جا ب جتا ب}}{١ + \text{جتا ب} + (٢\text{جتا}^{٢}\text{ ب} - ١)}$

$= \dfrac{\text{جا ب }(١ + ٢\text{جتا ب})}{\text{جتا ب }(١ + ٢\text{ جتا ب})} = \dfrac{\text{جا ب}}{\text{جتا ب}} = \text{ظا ب} =$ الأيسر

تمرين (١١)

١) أثبت أن: جا٣جـ = ٣ جا جـ - ٤ جا^{٣} جـ

٢) ظا (٤٥ + س) - ظا٢س = قا٢س

٣) (١ - جتا٤س) = ٨ جا^{٢}س جتا^{٢}س

٤) قا^{٢} ب ÷ (٢ - قا^{٢} ب) = قا ٢ب

٥) $\dfrac{\text{١ + ٢جتا هـ}}{\text{١ + جتا هـ + جتا ٢هـ}}$ = قا هـ

٦) إذا كان جتا هـ -= حا هـ = $\dfrac{\text{١}}{\text{٢}}$ أوجد قيمة جا ٢هـ ، جتا ٤هـ

٧) $\dfrac{\text{١ - جتا هـ}}{\text{١ + جتا هـ}}$ = ظا^{٢} $\dfrac{\text{هـ}}{\text{٢}}$

٨) (١ + جتا هـ) ظا $\dfrac{\text{جـ}}{\text{٢}}$ = جا جـ

٩) إذا كانت س ∈] ٠ ، ٣٦٠ [أوجد مجموعة حل المعادلة:

١ - ٢جا^{٢}س = جتا س

١٠) جتا (أ + ب) جتا (أ - ب) = جتا^{٢} أ - جا^{٢} ب

١١) ظا ($\dfrac{\text{ط}}{\text{٤}}$ + س) = $\dfrac{\text{١ + ظا س}}{\text{١ - ظا س}}$

١٢) قتا س + ظتا س = ظتا $\dfrac{\text{١}}{\text{٢}}$ س

١٣) $\dfrac{\text{١}}{\text{٢}}$ (١ - جتا هـ) قا^{٢} $\dfrac{\text{هـ}}{\text{٢}}$ = $\dfrac{\text{٢جا هـ - جا ٢هـ}}{\text{٢جا هـ + جا ٢هـ}}$

١٤) $\dfrac{\text{١ + جتا أ + جتا ٢أ}}{\text{١ + ٢ جتا أ}}$ = جتا أ

١٥) أثبت أن: جا ٤أ - ٢جا ٢أ = -٨ جا^{٣} أ جتا أ

١٦) جتا ٢أ - ٤ جتا أ = ٨ جا^{٤} ($\frac{١}{٢}$ أ)

١٧) جا ٢هـ (ظتاهـ - ظتا ٢هـ) = ١

١٨) $\frac{\text{جتا ٢هـ}}{\text{١ + جا ٢هـ}} = \frac{\text{١ - ظا هـ}}{\text{١ + ظا هـ}}$

١٩) (١ - جتا ٢أ) = ظا^{٢}أ (١ + جتا ٢أ)

٢٠) ١ + جتا ٢جـ + ٢ جا^{٢} جـ = ٢

٢١) (١ + جتا٢س) ظا س = جا٢س

٢٢) إذا كان: جا جـ جتا^{٣} جـ - جا^{٣} جـ جتا جـ = $\frac{١}{٤}$ أوجد قيمة جا ٤جـ

٢٣) $\frac{\text{جا ٢س}}{\text{جتا س}} + \frac{\text{جتا ٢س}}{\text{جا س}} = $ قتا س

٢٤) $\frac{\text{١ + جتا جـ + جتا ٢جـ}}{\text{جا جـ + جا ٢جـ}} = $ ظتا جـ

٢٥) ١ - ٢ جا^{٢} ($\frac{\text{ط}}{٤}$ - $\frac{\text{٥س}}{٢}$) = جا ٥س

٢٦) $\frac{\text{جا (أ + ب) + جا (أ - ب)}}{\text{جتا (أ + ب) + جتا (أ - ب)}} = $ ظا أ

٢٧) $\frac{\text{جا ٣جـ}}{\text{جا جـ}} - \frac{\text{جتا ٣جـ}}{\text{جتا جـ}} = ٢$

٢٨) جتا^{٢} ٢جـ + ٤ جتا^{٢} جـ = ١ + ٤جتا^{٤}جـ

٢٩) جتا^{٤} جـ - جا^{٤} جـ = جتا ٢جـ

٣٠) $\frac{\text{جتا هـ + جا هـ}}{\text{جتا هـ - جا هـ}} + \frac{\text{جا هـ - جتا هـ}}{\text{جتا هـ + جا هـ}} = $ ٢ ظا ٢هـ