

ثانيا : الجبر

(١) : الدوال الحقيقية

الدالة :-

- مراجعة على الدوال الحقيقية
- المجال – المدى – الدالة الزوجية والدالة الفردية –
التمثيل البياني في اطراد الدوال – الدالة الثابتة –
الدالة الخطية – دالة المقياس – حل المعادلات –
الدالة التربيعية – الدالة التكعيبية – الدالة الكسرية

تذكر أن

• مجموعة الأعداد الطبيعية (ط) = $\{ 1, 2, 3, \dots, \infty \}$

• مجموعة الأعداد الصحيحة (ص) = $\{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, \infty \}$

• مجموعة الأعداد النسبية (ن) = $\left\{ \frac{أ}{ب} : أ, ب \in \mathbb{V}, ب \neq 0 \right\}$

• مجموعة الأعداد الغير نمبية (ن): هي التي لا يمكن وضعها على صورة $\frac{أ}{ب}$

• مجموعة الأعداد الحقيقية (ح) = $\mathbb{N} \cup \mathbb{N}^+ \cup \{ 0 \} \cup \mathbb{C}$

تعريف الدالة

هي علاقة بين مجموعتين غير خاليتين س و ص مثلًا بحيث أن كل عنصر من عناصر س يرتبط بعنصر واحد فقط من عناصر ص

حيث س مجال الدالة ، ص مجال المقابل للدالة

الدوال الحقيقية

إذا كانت س ، ص مجموعتين جزئيتين من ح كانت الدالة حقيقية

مدى الدالة

هو مجموعة عناصر الصور في المجال المقابل والتي يكون لكل منها أصل في مجال الدالة

مثال

إذا كانت د(س) = $4س^2 + 5س - 7$ فإن

د(2) = $12 + 10 - 7 = 15$ د(-3) = $27 - 15 - 7 = 5$

د(-1) = $3 - 5 - 7 = -9$ وهكذا

مجال الدالة = $\{ 2, -3, -1, \dots \}$

مدى الدالة = $\{ 15, 5, -9, \dots \}$

مجال الدالة :- هو قيم س التي تجعل الدالة معرفة

ملاحظات

١) إذا لم يذكر مجال الدالة يكون مجالها هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تكون الدالة عندها معرفه

٢) يقال للدالة أنها حقيقية إذا كان كل من مجالها ومجالها المقابل هو مجموعة الأعداد الحقيقية أو مجموعة جزئية منها.

٣) مدى الدالة هو مجموعة جزئية من المجال المقابل .

٤) تتحدد الدالة تحديداً تاماً إذا علم :-

أ - المجال (س)

ب - المجال المقابل (ص)

ج - قاعدة الدالة

٥) الشكل البياني للدالة يكون على شكل مجموعة من النقاط المنفصلة لا يجوز التوصليل إلا إذا كان مجال الدالة مجموعة وليست فترة .

٦) مدى الدالة يؤخذ من الرسم من محور الصادات من أسفل إلى أعلى

٧) مجال الدالة من الرسم من محور السينات من اليسار إلى اليمين .

مثال

إذا كان $D = \{ -1, 0, 1, 3 \}$ $[-5, 4]$

وكان $D(س) = 2-3$

أوجد مدى هذه الدالة وأرسم الشكل البياني لها .

الحل

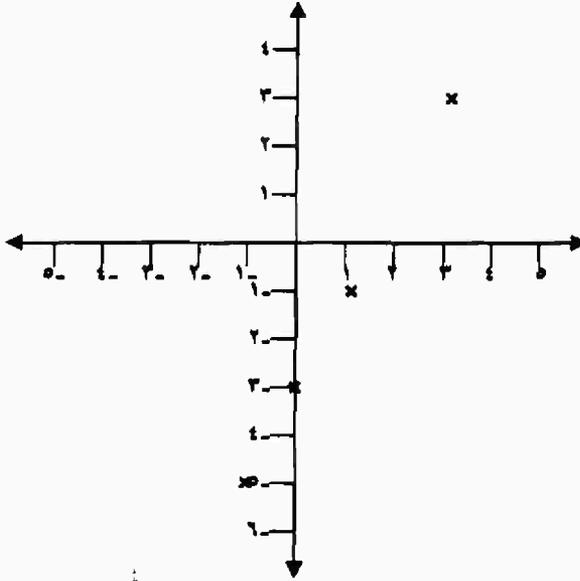
$$3 = 3 - (0)^2 = (0) د$$

$$5 = 3 - (1)^2 = (1) د$$

$$3 = 3 - (2)^2 = (2) د$$

$$1 = 3 - (1)^2 = (1) د$$

مدى الدالة = $\{3, 1, 0, 3, 5\}$



ملاحظة

في المثال السابق يمكن كتابة د(س) على صورة أزواج مرتبة كما يلي

$$د = \{(1, 1), (3, 3), (3, 1), (5, 1)\}$$

مثال

$$\left. \begin{array}{l} \text{إذا كان د: } [0, 3] \leftarrow \text{ح حيث د(س) = } \left. \begin{array}{l} 2س^2 + 3س - 1 \geq 0 \text{ من } 0 > 0 \\ 4 - س \geq 0, \text{ من } 0 \geq 0 \end{array} \right\}$$

أوجد د(3-), د(1-), د(0), د(1), د(5)

ثم أرسم الشكل البياني للدالة ومن الرسم أستنتج مدى الدالة

الحل:-

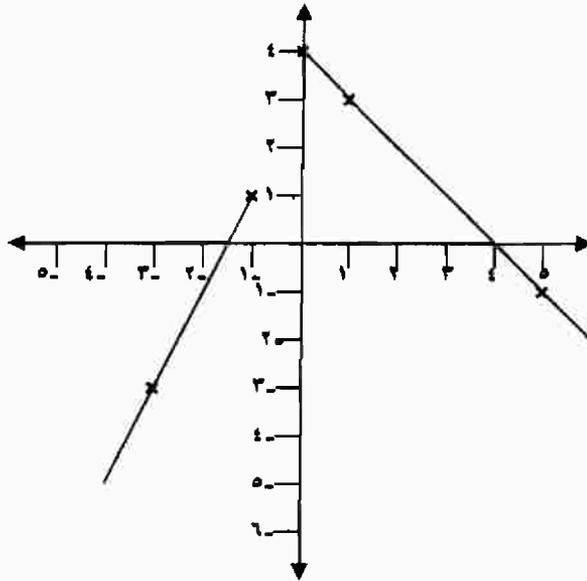
$$1 = (1-)$$

$$3 = 1 - 4 = (1)$$

$$3- = 3 + (3-) 2 = (3-)$$

$$4 = 0 - 4 = (0)$$

$$1- = 0 - 4 = (0)$$



من الرسم : المدى = $[3-, 4]$
لاحظ أن

3- أصغر قيمة صادية ، 4 أكبر قيمة صادية

مثال

أرسم الشكل البياني للدوال الآتية في ح ومن الرسم استنتج مدى الدالة

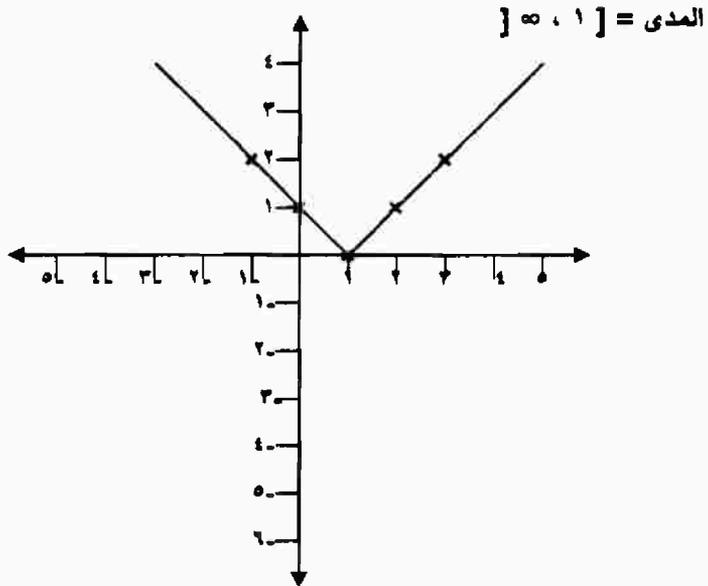
$$\left. \begin{array}{l} \text{د (س) = } 1 + \text{س} \\ \text{د (س) = } 1 - \text{س} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{س} \geq 1 \\ \text{س} < 1 \end{array}$$

الحل

د (س) = س - ١
] ١ ، ∞ [

د (س) = -س + ١
] -∞ ، ١ [

٣	٢	١	١-	٠	١	س
٢	١	٠	٢	١	٠	ص



قواعد إيجاد مجال بعض الدوال الحقيقية جبرياً

أولاً :- دوال كثيرة الحدود

وهي في صورة د (س) = $a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$

حيث ن عدد صحيح غير سالب

فمثلاً: د (س) = $٧س^٢ + ٥س - ١٥س + ١٦$ دالة كثيرة الحدود

، د (س) = $٣س^٢ + ٤س - ٢س + ٨$ ليست كثيرة الحدود

لأنها تحتوي على $٤س^{-٢}$

• جميع الدوال كثيرة الحدود مجالها ح (ما لم يذكر خلاف ذلك)

(أ) الدالة ثابتة \leftarrow ص = أ (عدد)

المجال \leftarrow ح ، المدى \leftarrow أ

(ب) الدالة الخطية \leftarrow ص = أ س + ب ص + ج

المجال \leftarrow ح ، المدى \leftarrow ح

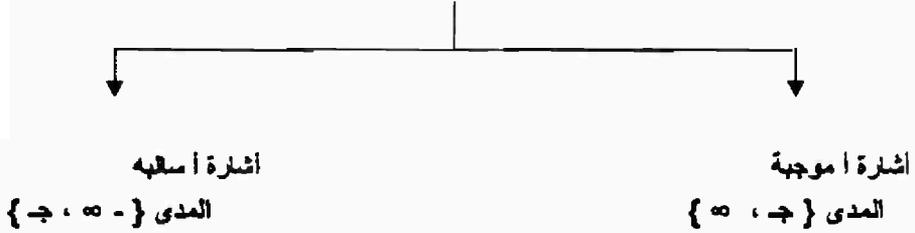
(ج) الدالة المحايدة \leftarrow ص = س

المجال \leftarrow ح ، المدى \leftarrow ح

(د) الدالة التربيعية \leftarrow ص = أ س² + ب ص + ج

المجال \leftarrow ح

والمدى يتوقف على إشارة أ



(هـ) الدالة التكعيبية \leftarrow ص = أ س³ + ب ص

المجال \leftarrow ح ، المدى \leftarrow ح

ملاحظة

١. لأي دالة إذا عرف مجالها عوض بقيمة المجال في الدالة لإيجاد المدى .
٢. طريقة أخرى لإيجاد مدى الدالة الربيعية :-

♦ $\frac{ب}{ا} =$ نوجد س حيث س =

- ♦ ثم نعوض بقيمة س في الدالة ونوجد ص
- ♦ فإن كان معامل س موجب يكون المدى { ص ، ∞ }
- ♦ وإذا كان معامل س سالب يكون المدى { -∞ ، ص }

مثال

أوجد مجال ومدى الدالة $v = 3 - s^2$

الحل

∴ الدالة تربيعية ∴ معامل s^2 سالب ∴ المدى ← $\{-\infty, 3\}$ ∴ المجال ← $ح$

ثانياً:- الدوال الكسرية (الدوال القياسية)

وهي في صورة $د(س) = \frac{ق(س)}{ك(س)}$

حيث $ق(س)$ ، $ك(س)$ دوال كثيرة الحدود

$$\text{مثل } د(س) = \frac{2س^2 + 5س + 4}{3س^2 + 2س + 8}$$

قاعدة

إذا كانت (الدالة كسرية) في صورة بسط ومقام ، فالمجال جميع قيم $ح$ ما عدا التي

تجعل المقام = صفر

مثال

أوجد مجال الدوال الآتية :

$$أ) د(س) = \frac{3}{س + 1}$$

$$ب) د(س) = \frac{س + 1}{س^2 - 9}$$

$$ج) د(س) = \frac{س - 2}{س^2 + 9}$$

$$د) د(س) = \frac{1}{س(س - 2)}$$

الحل

أ- المجال = $ح$ - ما يجعل المقام = 0

$$= ح - (1 -)$$

$$\text{ب) } \therefore \text{ص} = \frac{1+s}{9-2s} = \frac{1+s}{(3+s)(3-s)}$$

المجال: \leftarrow ح - { 3, -3 }

$$\text{ج) } \therefore \text{ص} = \frac{2-s}{9+s} \quad \therefore 0 = 9 + s$$

$$\therefore 9 = -s \quad \therefore s = \frac{9}{-}$$

المجال: \leftarrow ح - { $\frac{9}{-}$ }

$$\text{د) } \therefore \text{ص} = \frac{1}{s(2-s)}$$

نجد أن عندما $s = (2 - s) = 0$

$$\text{فإنه إما } s = 0 \text{ أو } s = 2 \rightarrow 0 = 2 - s \rightarrow s = 2$$

المجال ح ماعدا { 2, 0 }

مثال

أوجد مجال الدوال الآتية :-

$$\text{أ) د (س) = } \frac{1+s}{3+s^2+2s}$$

$$\text{ب) د (س) = } \frac{s}{5+2s}$$

$$\text{ج) ص} = \frac{1-s}{s}$$

الحل

المقام لا يحل:

$$\text{أ) } \therefore \text{ص} = \frac{1+s}{3+s^2+2s}$$

المجال = ح

$$\text{ب) ص} = \frac{s}{5+2s}$$

عندما $s = 0 + 0 = 0$.
 $\therefore s = 0$.

\therefore لا يوجد عدد حقيقي مربعه -5 .
 \therefore المجال \leftarrow ح

ج) $s = \frac{5-s}{s}$.
 \therefore المجال \leftarrow ح - { صفر }

ثالثًا :- الدوال الغير قياسية (الدوال المشتملة على جذور)

أ) إذا كان ما تحت الجذر التربيعي من الدرجة الأولى :-

نجعل ما تحت الجذر \leq صفر

مثال

أوجد مجال الدوال الآتية :-

٢) $\sqrt{s-1}$ = ص

٣) $\sqrt{s-3}$ = ص

١) $\sqrt{s-1}$ = ص

٣) $\sqrt{s-9}$ = ص

الحل

$\therefore s - 1 \geq 0$.

\therefore المجال = $[-1, \infty)$

$\therefore s - 3 \geq 0$.

\therefore المجال = $[-3, \infty)$

$\therefore s - 9 \geq 0$.

\therefore المجال = $[-9, \infty)$

$\therefore s - 3 \geq 0$.

\therefore المجال = $[-3, \infty)$ (فترة مغلقة من ناحية ٣

١) $\sqrt{s-1}$ = ص $\therefore s \geq 1$.

$\therefore s \geq 1$.

٢) $\sqrt{s-1}$ = ص $\therefore s \geq 1$.

$\therefore s \leq 9$.

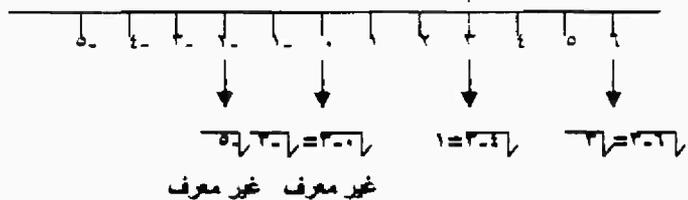
٣) $\sqrt{s-9}$ = ص $\therefore s \geq 9$.

$\therefore s \leq 9$.

٤) $\sqrt{s-3}$ = ص $\therefore s \geq 3$.

$\therefore s \leq 3$.

التحقيق :- ∞



ملاحظة

إذا كان الجذور في المقام :-

نجعل ما تحت الجذور < صفر

مثال

أوجد مجال الدوال الآتية :-

$$(1) \text{ ص} = \frac{1}{3-\sqrt{x}}$$

$$(2) \text{ ص} = \frac{1}{2+\sqrt{x}}$$

الحل

$$\therefore 3 - \sqrt{x} < 0$$

$$\therefore \text{المجال} = (0, 3)$$

$$(1) \therefore \text{ص} = \frac{1}{3-\sqrt{x}}$$

$$\therefore 3 < \sqrt{x}$$

أي إن العدد 3 لا ينتمي إلى المجال .

$$\therefore 2 + \sqrt{x} < 0$$

$$\therefore \text{المجال} = (0, 2)$$

$$(2) \therefore \text{ص} = \frac{1}{2+\sqrt{x}}$$

$$\therefore 2 < \sqrt{x}$$

ب) إذا كان ما تحت الجذر التربيعي من الدرجة الثانية :-

(1) إذا كان ما تحت الجذر التربيعي من الدرجة الثانية ولا يحل :

المدى (صفر ، ∞)

\therefore المجال = ح

مثال

أوجد مجال الدوال الآتية :-

$$(1) \text{ ص} = \frac{1}{x+2}$$

$$(2) \text{ ص} = \frac{1}{x^2+3}$$

الحل

$$(أ) ∴ ص = \frac{1}{س + 2} = ح ∴ \text{المجال} = ح$$

$$∴ ص = س + \sqrt[3]{} = ح ∴ \text{المجال} = ح$$

ب) إذا كان ما تحت الجذر التربيعي من الدرجة الثانية ويحلل :

مثال

أوجد مجال الدوال الآتية :-

$$(أ) ص = \sqrt[3]{س - 1}$$

$$(ب) ص = \sqrt[3]{س - 1}$$

$$(ج) ص = \sqrt[3]{س - 1}$$

الحل

حيث $أ' = (\text{عدد})'$

$$(أ) ∴ ص = \sqrt[3]{س - 1}$$

$$∴ أ' - 1 ≤ صفر$$

$$∴ س ≥ 1$$

$$∴ أ' = س$$

$$∴ أ' ≤ س$$

∴ المجال $[1, +∞)$

$$(ب) ص = \sqrt[3]{س - 1}$$

∴ المجال $[1, +∞)$

$$(ج) ص = \sqrt[3]{س - 1}$$

$$∴ س = 1$$

$$∴ س - 1 = 0$$

∴ المجال $[1, +∞)$

$$∴ س = 1$$

(ج) إذا كانت الجذور في البسط والمقام معاً

∴ المجال = مجال د₁ ∩ مجال د₂ - [أصفر المقام]

مثال

أوجد مجال الدوال الآتية

$$1) \text{ ص } = \frac{\sqrt{1+s}}{\sqrt{s}}$$

$$2) \text{ ص } = \frac{\sqrt{4+2s}}{4-2s}$$

الحل

$$1) \text{ ص } = \frac{\sqrt{1+s}}{\sqrt{s}}$$

$$s \leq 1$$

∴ مجال البسط $s + 1 \geq 0$
∴ المجال $[-1, \infty)$

∴ المجال $(0, \infty]$

مجال المقام $s < 0$

$$\text{∴ المجال} = [-1, \infty) \cap (0, \infty] = -$$

$$2) \text{ ص } = \frac{\sqrt{4+2s}}{4-2s}$$

$$\text{∴ المجال} = \{s \pm\} -$$

ملاحظة

إذا كانت الدالة الغير قياسية تحتوى على جنور فردية للمتغير من فبان مجالها جميعا ح

مثال

أوجد مجال الدوال الآتية :-

$$1) \text{ ص } = \sqrt[3]{1-2s}$$

$$2) \text{ ص } = \frac{2}{3} (1 + s^2 - s^3)$$

$$3) \text{ ص } = \frac{1}{3} (1 - s)$$

الحل

∴ المجال = ح

$$(أ) ∴ ص = \sqrt{2-س}$$

$$(ب) ص = (س^2 - 2س + 1)^{\frac{1}{2}}$$

∴ المجال = ح

$$= \sqrt{(س^2 - 2س + 1)}$$

$$(ج) ص = (س - 1)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1-س}}$$

∴ المجال = ح

رابعاً :- مجال الدوال المعرفة بأكثر من قاعدة :-

هو اتحاد فترات تعريفها

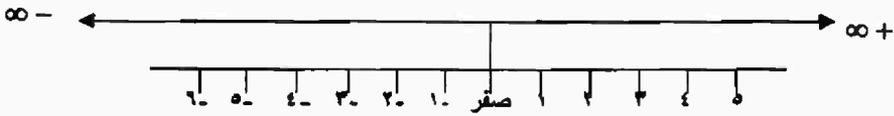
مثال

أوجد الدوال الآتية

$$د(س) = \left. \begin{array}{l} \text{س} - 2 \text{ عندما } \text{س} \leq 0 \\ - \text{س} - 2 \text{ عندما } \text{س} > 0 \end{array} \right\}$$

الحل

∴ المجال = [صفر ، ∞) ∪ (-∞ ، صفر] = ح



مثال

أوجد مجال الدالة

$$د(س) = \left. \begin{array}{l} \text{س} + 4 \text{ عندما } \text{س} \in [-4 , 1] \\ \text{س} - 6 \text{ عندما } \text{س} \in [1 , 6] \end{array} \right\}$$

الحل



$$\therefore \text{المجال} = [-4, 2] \cup [2, 6] = [-4, 6]$$

مثال

أوجد مجال الدالة

$$\left. \begin{array}{l} 2 \text{ من } 2 \\ \text{عندما } 3 \in [0, 2] \end{array} \right\} = (س)$$

$$\left. \begin{array}{l} 4 \text{ من } 2 \\ \text{عندما } 3 \in [0, 2] \end{array} \right\} = (س)$$

الحل



$$\therefore \text{المجال} = [2, 4] \cup [4, 6] = [2, 6]$$

ملاحظة

١- عندما < 3 ، عندما > 3

\therefore المجال ح - {3}

٢- عندما $<$ صفر ، عندما $>$ صفر

\therefore المجال ح - {صفر}

العمليات على الدوال

(أولاً) الجمع والطرح :-

إذا كانت د، د' دالتان مجالهما م، م' على الترتيب .

فإن : $(د \pm د')$ (س) = (س) د' \pm (س) د

ويكون مجالهما $(د \pm د')$ هو $م \cap م'$

ملاحظة

مجموع (او فرق) دالتين هو دالة جديدة

(ثانياً) الضرب والقسمة :-

إذا كانت d_1, d_2 دالتان مجالهما M_1, M_2 على الترتيب .

$$(1) \text{ فإن : } (d_1 \cdot d_2) (s) = (s) \cdot d_1 \times (s) \cdot d_2$$

ويكون مجالهما $(d_1 \cdot d_2)$ هو $M_1 \cap M_2$

$$(2) \frac{d_1}{d_2} (s) = \frac{(s) \cdot d_1}{(s) \cdot d_2} \text{ حيث } (s) \cdot d_2 \neq \text{صفر}$$

حيث : مجال $\frac{d_1}{d_2}$ هو $(M_1 \cap M_2) - [\text{اصفار } d_2 (s)]$

ملاحظة

♦ حاصل ضرب او خارج قسمة دالتين هو دالة جديدة

♦ مجال الدالة $d_1 \cdot d_2$ هو المجال المشترك للدالتين اي $M_1 \cap M_2$

ومجال الدالة $\frac{d_1}{d_2}$ هو المجال المشترك للدالتين ونستبعد منه اصفار d_2

مثال

إذا كانت $d_1 : [-2, 2]$ صفر] ح حيث $d_1 (s) = s - 3$

$d_2 : [-1, 1]$ ح حيث $d_2 (s) = s + 3$

فأوجد

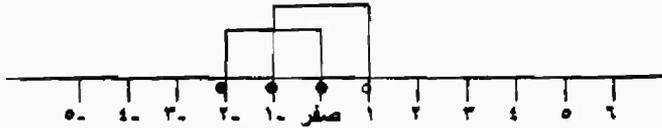
$$(أ) (d_1 + d_2) (s), (d_1 - d_2) (s), (d_1 \cdot d_2) (s), \frac{d_1}{d_2} (s)$$

مجال كل من $d_1 + d_2, d_1 - d_2, d_1 \cdot d_2, \frac{d_1}{d_2}$

الحل

$$(d_1 + d_2) (s) = (s) - 3 + s + 3 = 2s$$

$$\text{ومجالها } M_1 \cap M_2 = [-2, 2] \cap [-1, 1] = [-1, 1]$$



∴ المجال = $s \in [-2, 1]$ ، صفر]

$$s^2 - 2s + 3 = (s - 1)(s + 2) = 0$$

والمجال المشترك] -1 ، صفر]

$$s^2 - 9 = (s + 3)(s - 3) = 0$$

والمجال] -1 ، صفر]

$$\frac{s^2}{s-3} = \frac{s^2}{s-3} \text{ ماعدا أصفار المقام}$$

∴ المجال] -1 ، صفر] -3

مثال

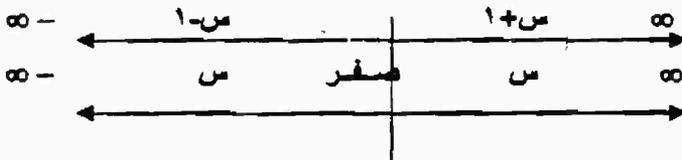
إذا كانت

$$\left. \begin{array}{l} 1+s \text{ عندما } s \leq 0 \\ 1-s \text{ عندما } s > 0 \end{array} \right\} = (s)$$

، $r(s) = s$ حيث $s \in \mathbb{R}$ أوجد:-

$$r(s) + d, r(s) - d, r(s) \times d, \frac{d}{r(s)} \text{ وعين المجال.}$$

الحل



لإيجاد $(s) + d =$

$$\left. \begin{array}{l} d+r \text{ عندما } s \leq 0 \\ d+r \text{ عندما } s > 0 \end{array} \right\} =$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \leq s \\ \bullet > s \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1+s^2 \\ 1-s^2 \end{array} \left. \begin{array}{l} 1+s \\ 1-s \end{array} \right\} =$$

نعين مجال (د + ر) (س) = مجال د \cap مجال ر

$$ح = ح \cap ح =$$

لايجاد (د - ر) (س) = د(س) - ر(س)

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \leq s \\ \bullet > s \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1 \\ 1- \end{array} \left. \begin{array}{l} 1+s-s \\ 1-s-1-s \end{array} \right\} =$$

والمجال (د - ر) (س) = ح (مثل الجمع)

لايجاد (د \times ر) (س) = د(س) \times ر(س)

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \leq s \\ \bullet > s \end{array} \right\} \begin{array}{l} s^2 + s \\ s^2 - s \end{array} \left. \begin{array}{l} (1+s)(s) \\ (1-s)(s) \end{array} \right\} =$$

والمجال = مجال د \cap مجال ر = ح

$$\text{لايجاد } \left(\frac{د}{ر} \right) (س) = \frac{د(س)}{ر(س)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \leq s \\ \bullet > s \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{1+s}{s} \\ \frac{1-s}{s} \end{array} \left. \right\} =$$

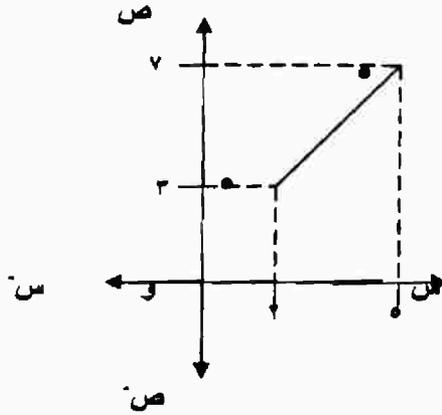
والمجال = مجال د \cap مجال ر - {اصفار المقام}

$$ح = \{ صفر \}$$

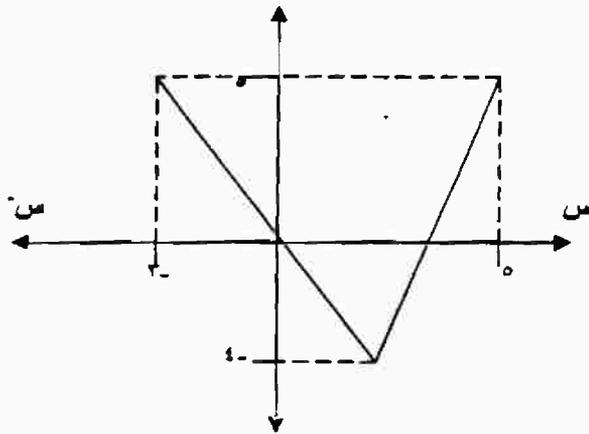
تمرين (١٢)

على مجال الدالة ومداها من الرسم والعمليات على الدوال

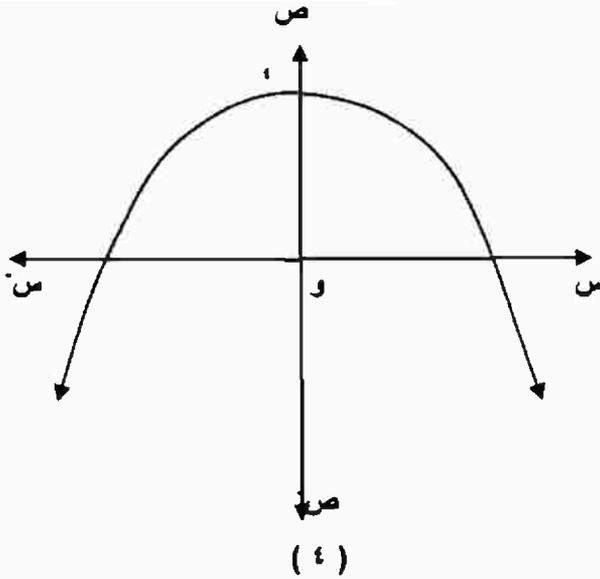
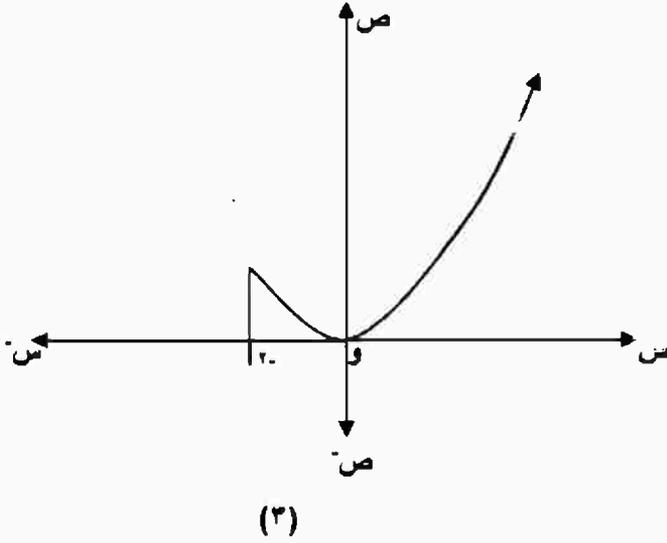
(١) من الأشكال الآتية عين المجال والمداى .



(١)



(٢)



٢) أوجد المجال والمدى للدوال الآتية :-

ب) د(س) = ٣ -

أ) د(س) = ١

ج) د(س) = ٢ عندما س ∈]٤ ، ٣-]

د) د(س) = $\begin{cases} ٢ & \text{عندما } س \leq ٠ \\ ٥ & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$

٣) أرسم الدوال الآتية وأوجد من الرسم المجال والمدى

أ) د(س) = ١ + ٢س
ب) د(س) = ٤ - ٣س

ج) د(س) = $\begin{cases} ١ + س & \text{عندما } س \leq ٢ \\ ٢ - س & \text{عندما } س > ٢ \end{cases}$

٤) أرسم الدوال الآتية ومن الرسم أوجد المجال والمدى

أ) د(س) = س
ب) د(س) = -س

٥) أرسم الدوال الآتية وأوجد المجال والمدى

أ) د(س) = س^٢
ب) د(س) = س - س^٢

ج) د(س) = س^٢ - ٥س + ٦

٦) إذا كانت د: $\{-٣, -٢, -١, ٠, ١, ٢, ٣\}$ في ح [٢, ١١]

، د(س) = س^٢ + ٢ أوجد مدى هذه الدالة وارسم الشكل البياني

٧) إذا كانت د: $[-١, ٥]$ ← ح

د(س) = $\begin{cases} ٤ - س & \text{عندما } ١ \leq س < ٢ \\ س & \text{عندما } ٢ \leq س \leq ٥ \end{cases}$

أوجد كل من د(-١)، د(٠)، د(١)، د(٢)، د(٣)، د(٥)

ثم ارسم الشكل البياني للدالة ومن الرسم أوجد المدى

٨) إذا كانت د(س) = $\begin{cases} ٢س & \text{عندما } س < ٢ \\ ٢ + س & \text{عندما } س > ٢ \end{cases}$

أوجد د(٢)، د(٣)، د(٤)، د(١)، د(٠)، د(-١)، د(-٤)

وارسم الشكل وأوجد المدى

٩) إذا كانت

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} + ٢ \\ \text{س} - ١ \end{array} \right\} = \text{د (س)}$$

عندما $\text{س} < ٠$
عندما $\text{س} > ٠$

ارسم الشكل وأوجد المجال والمدى

١٠) ارسم منحنى الدالة

$$\left. \begin{array}{l} \text{س}^٢ \\ \text{س} + ٢ \end{array} \right\} = \text{د (س)}$$

عندما $\text{س} \in [٠, ٢]$
عندما $\text{س} \in [٢, ٥]$

١١) ارسم الدالة

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} \\ ٣ \\ \text{س} - ٩ \end{array} \right\} = \text{د (س)}$$

عندما $\text{س} \in [٠, ٣]$
عندما $\text{س} \in [٣, ٦]$
عندما $\text{س} \in [٦, ٩]$

ثم عين المجال والمدى

١٢) مثل بيانياً

$$\left. \begin{array}{l} ٢ + \text{س} \\ ٣ \end{array} \right\} = \text{د (س)}$$

عندما $\text{س} > -١$
عندما $\text{س} \leq -١$

وعين مداها ثم أوجد د (٣-)، د (٢-)، د (٠)، د (١)

١٣) مثل بيانياً

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} - ٢ \\ \text{س} + ٢ \end{array} \right\} = \text{د (س)}$$

عندما $\text{س} > ٠$
عندما $\text{س} < ٠$

وعين مداها

١٤) عين مجال د (ر)

$$\sqrt{٥ + ٣ - \text{س}}$$

١٥) عين مجال د (ر)

$$\sqrt{١ + \text{س}}^٣ - \sqrt{٥ - \text{س}}$$

عين مجال د (ر)

$$\frac{\sqrt{٢ + \text{س}}}{\sqrt{٢ - \text{س}}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{عندما } s < 1 \\ \text{عندما } s > 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} s-1 \\ s+1 \end{array} = (s) d$$

ر (س) = (س) ، س ، س 3 ح
أوجد :

$$(1) (r + d) (s)$$

$$(2) (r - d) (s)$$

ومثلها بيتياً وأوجد مداها ثم أوجد (ر + د) (3) ، (ر - د) (4-)

$$\text{وأوجد (د × ر) (س) ، (س) } \frac{d}{r} \text{ ، (س) } \frac{r}{d}$$

$$\text{ثم أوجد (د × ر) (1-)} \frac{d}{r} \text{ ، (4-)} \frac{r}{d} \text{ ، (5) } \frac{r}{d}$$

إطراء الدوال

المقصود ببحت اطراء الدالة :-

إيجاد الفترات الجزئية من المجال (محور السينات) التي تكون فيها الدالة

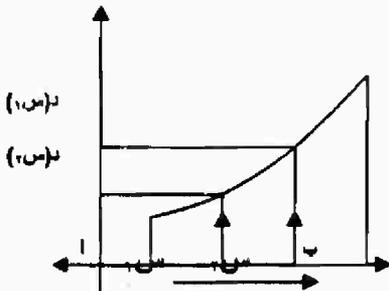
(متزايدة - متناقصة - ثابتة)

١) الدالة المتزايدة :-

(كلما زادت س زادت ص والعكس)

لكل س₁ ، س₂ ∈ [أ ، ب]

إذا كانت س₁ < س₂ ← د (س₁) < د (س₂)

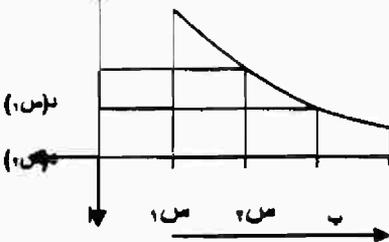


٢) الدالة المتناقصة :-

(كلما زادت س نقصت ص والعكس)

لكل س₁ ، س₂ ∈ [أ ، ب]

إذا كانت س₁ < س₂ ← د (س₁) > د (س₂)

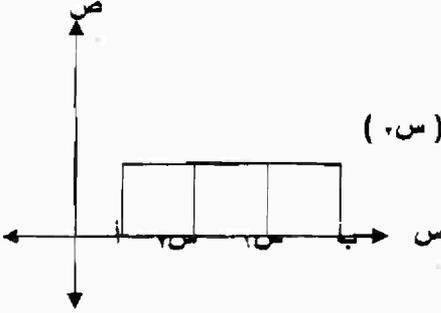


الدالة الثابتة :-

$$d(s) = c$$

لكل $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ [أ،ب]

إذا كانت $s_1 < s_2$ ، $d(s_1) = c = d(s_2)$ (s_1, s_2)



الخلاصة :-

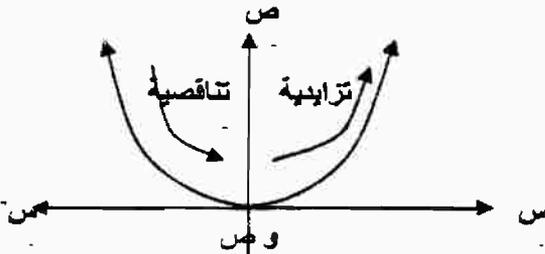
- (١) $d(s)$ تزايدية إذا كانت قيمة الدالة تتزايد بزيادة قيمة s
- (٢) $d(s)$ تناقصية إذا كانت قيمة الدالة تتناقص بزيادة قيمة s
- (٣) $d(s)$ ثابتة إذا كانت قيمة الدالة ثابتة مهما زادت قيمة s
- (٤) الدالة الثابتة تمثل بخط مستقيم يوازي محور السينات

ملاحظات :-

$$(١) d(s) = s^2$$

المجال = \mathbb{R}

$$\text{المدى} = [0, \infty)$$



الأطراف :-

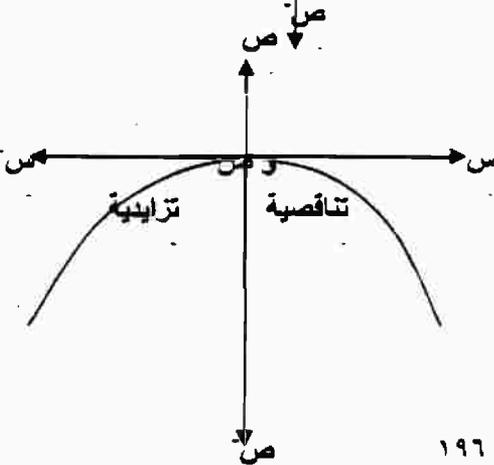
متناقصة عندما $s \in]-\infty, 0]$

متزايدة عندما $s \in]0, \infty[$

$$(٢) d(s) = -s^2$$

المجال = \mathbb{R}

$$\text{المدى} =]-\infty, 0]$$



الأطراف :-

متناقصة عندما $s \in]-\infty, 0]$

متزايدة عندما $s \in]0, \infty[$

مثال

مثال بيانيا :-

عندما $s \geq 1$

$$\frac{1}{(s+2)}$$

عندما $s < 1$

'س'

$$= (s)$$

وعين مداها وأبحث أطرافها

الحل

المدى = ح

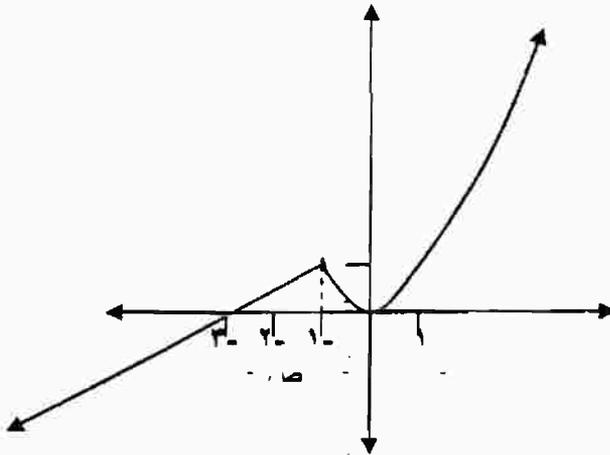
المجال = ح

الاطراد :-

متزايدة عندما $s \in]0, \infty[$

متناقصة عندما $s \in]1, \infty[$

متزايدة عندما $s \in]-\infty, 1[$



مثال

مثال بيانيا :-

$$d(s) = s^2 - 3s$$

س $\in]2, 2[$ وعين مداها وأبحث أطرافها

الحل

$$\frac{3}{4} = \frac{b}{\frac{1}{3}} = \text{س} \quad \therefore \text{س} = \frac{9}{4}$$

$$\text{د} = \left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{4} - \frac{9}{4} = \frac{9}{4} - \frac{9}{4} = 0 \quad \therefore \text{رأس المنحنى} = \left(\frac{9}{4}, -\frac{3}{4}\right)$$

التقاطع مع محور السينات نضع د = 0

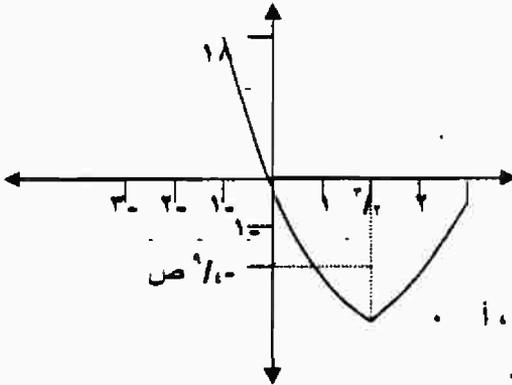
$$\text{س}^2 - 3\text{س} = 0 \quad \text{س}(\text{س} - 3) = 0 \quad \therefore \text{س} = 0, 3$$

$$\text{المدى} = \left[-\frac{9}{4}, 18\right]$$

الأطراف :-

متناقصة عندما $\text{س} \in \left[\frac{3}{4}, 3\right]$

متزايدة عندما $\text{س} \in \left[0, \frac{3}{4}\right]$



ملاحظة

الدالة الخطية د (س) = اس + ب ، أ ،

تمثل بخط مستقيم ميله (أ) إذا كان :-

(أ) $أ < 0$. فإن الدالة متزايدة على مجالها

(ب) $أ > 0$. فإن الدالة متناقصة على مجالها

مثال

مثل بيتانيا :-

$$\left. \begin{array}{l} \text{عندما } \text{س} \geq 2 \\ \text{عندما } \text{س} < 2 \end{array} \right\} \text{د (س) = } \begin{cases} \text{س} + 2 \\ -(\text{س} + 2) \end{cases}$$

وعين مداها وأبحث أطرافها .

الحل

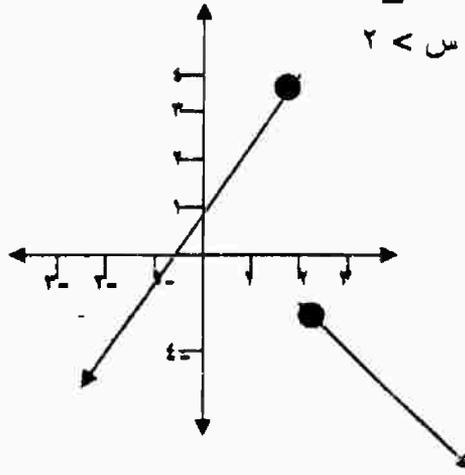
المجال = $[-\infty, 4[$

المدى = $[-\infty, 4[$

الاطراد :-

الدالة تزايدية عندما $x \geq 2$

وتناقصية عندما $x < 2$



ملاحظة :-

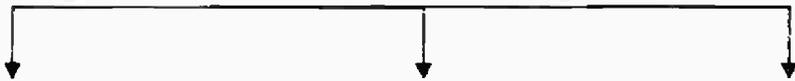
لبحث أطراد الدالة في فترة ما س باستخدام التعريف :-

(١) نفرض $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ حيث $s_2 > s_1$

∴ $s_2 - s_1 = \text{صفر} \leftarrow 1$

(٢) نوجد $d(s_2) - d(s_1)$ في أبسط صورة ومن (١) نستنتج أحد الحالات

الآتية :-



$$d(s_2) - d(s_1) = 0$$

∴ الدالة ثابتة

$$d(s_2) - d(s_1) > 0$$

∴ الدالة متناقصة

$$d(s_2) - d(s_1) < \text{صفر}$$

∴ الدالة تزايدية

مثال

إذا كانت د : ح ← ح حيث د (س) = ٢ س - ١ أثبت ان الدالة تزايدية وحقق ذلك من التمثيل البياني

الحل

نفرض ان س١ ، س٢ ∈ ح ، س٢ < س١ ، فإن س١ - س٢ < ٠

$$د(س٢) = ٢س٢ - ١ ، د(س١) = ٢س١ - ١$$

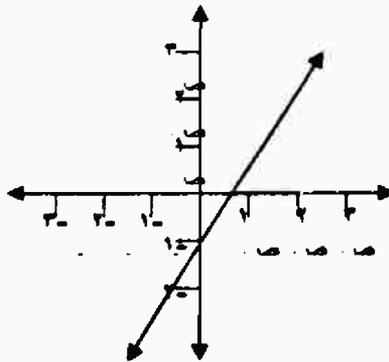
$$د(س١) - د(س٢) = (٢س١ - ١) - (٢س٢ - ١) = ٢س١ - ١ - ٢س٢ + ١ = ٢(س١ - س٢)$$

$$= ٢(س١ - س٢) < ٠ \quad [\text{نلاحظ ان الناتج موجب}]$$

∴ د(س١) < د(س٢) الدالة تزايدية

س	٠	١	٢
د(س)	١-	١	٣

من الرسم يتضح ان الدالة د (س) تزايدية [كما زانت من زانت د (س)]



مثال

ابحث اطراف الدالة : د (س) = ٤ - ٣ س

الحل

$$د(س١) = ٤ - ٣س١ \quad (١)$$

$$\text{بطرح (١) - (٢) نجد ان} \quad د(س١) = ٤ - ٣س١ \quad (٢)$$

$$د(س١) - د(س٢) = (٤ - ٣س١) - (٤ - ٣س٢) = ٣س٢ - ٣س١ = ٣(س٢ - س١) > ٠ \quad [\text{سلبية}]$$

∴ د (س) دالة تناقصية

مثال :

ابحث اطراف الدالة : د (س) = ٢ س + ٣

الحل

نفرض ان س١ ، س٢ ∈ ح & س١ < س٢

د (س٢) = ٢ س٢ + ٣ (١)

د (س١) = ٢ س١ + ٣ (٢) بطرح (١) - (٢) نجد ان

د (س) - د (س) = (س)٢ - (س)١ = ٢ (س٢ - س١) > ٠ [موجبة]

∴ د (س) دالة تزايدية

مثال

ابحث اطراف الدالة :-

د (س) = $\begin{cases} س : س \le ٠ \\ ر (س) : س > ٠ \end{cases}$

الحل

هـ (س) = (د × ر) (س) = $\begin{cases} س^٢ : س \le ٠ \\ س : س > ٠ \end{cases}$

مجال هـ (س) = ح

هـ (س) في [٠ ، ∞]

س١ ، س٢ ∈]٠ ، ∞]

س١ < س٢

هـ (س٢) - هـ (س١) = (س٢) - (س١) = س٢ - س١ > ٠

∴ هـ (س) تزايدية في [٠ ، ∞]

هـ (س) = ٠ في]-∞ ، ٠]

وهي دالة ثابتة

أي ليست تزايدية ولا تناقصية

مثال

$$د : ح \leftarrow ح \text{ حيث } ح = ح - \{0\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} < 0 : \\ \text{ر} : ح \leftarrow ح \text{ حيث } ر (\text{س}) = \text{س} \\ \text{س} > 0 : \end{array} \right\} = (\text{س}) د$$

عين مجال (د × ر) (س) وارسم الشكل البياني لها وأدرس أطرادها

الحل

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} < 0 : \\ \text{س} > 0 : \end{array} \right\} = (\text{س}) د = (\text{س}) ر = (\text{س}) هـ$$

$$\text{هـ} (\text{س}) = \text{س}^2 + 1 \text{ في }] 0, \infty [\quad \text{هـ} (\text{س}) = 1 \text{ في }] -\infty, 0 [$$

س	(0)	1	2	3	4
هـ (س)	(1)	2	5	10	17

هـ(س) = 1 دالة ثابتة

ليست تزايدية ولا تناقصية

$$\text{س} < 0 : \text{س}^2 + 1 < \text{س}^2 + 2 < \text{س}^2 + 3 < \dots$$

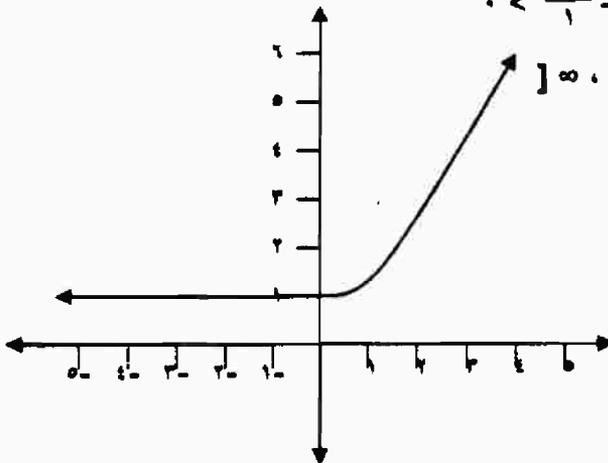
$$\text{هـ} (2) - \text{هـ} (1) = 5 - 2 = 3 > 0$$

$$\text{هـ} (3) - \text{هـ} (2) = 10 - 5 = 5 > 0$$

∴ هـ(س) تزايدية في] 0, ∞ [

المجال ح - {0}

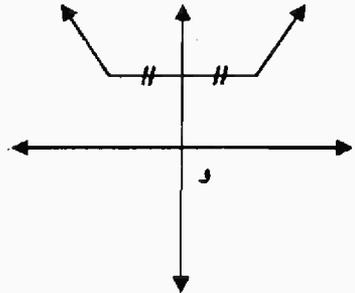
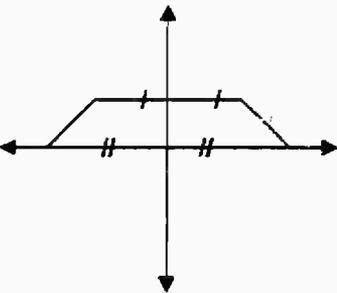
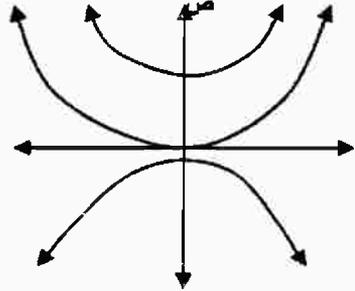
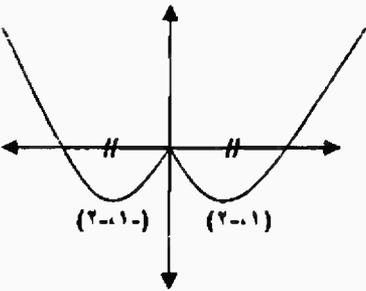
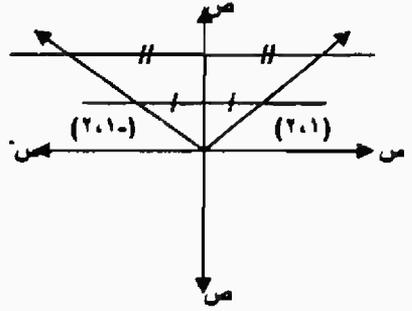
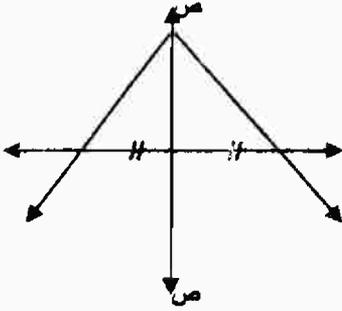
المدى =] 1, ∞ [



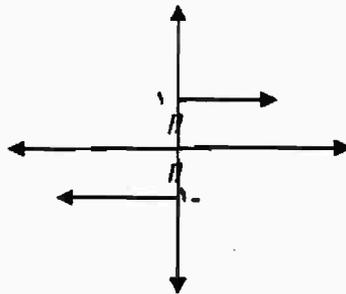
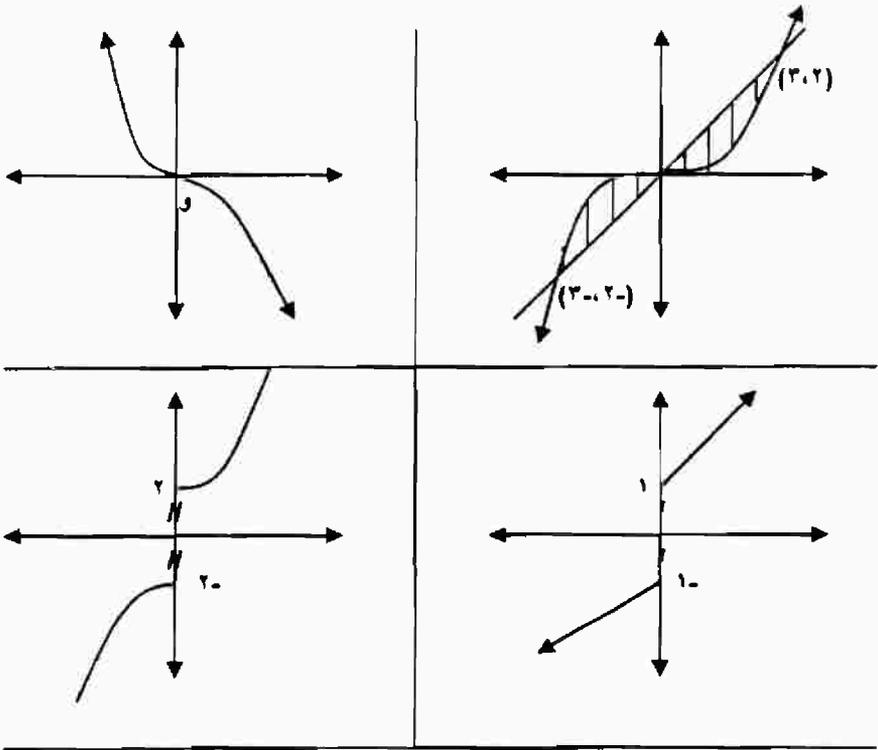
الدوال الزوجية والدوال الفردية

أولاً بيانياً

يقال للدالة انها زوجية إذا كان الشكل البياني للدالة متماثل بالنسبة لمحور الصادات أى كل نقطة (س ، ص) و د تناظر (-س ، -ص) و د



ويقال للدالة انها فردية اذا كان الشكل البياني متماثل بالنسبة لنقطة الاصل (و) اي كل نقطة (س، ص) تناظر (سس ، صص)



ملاحظة هامة

ليس من الضروري ان تكون الدالة فردية او زوجية فمعظم الدوال ليست فردية وليست زوجية

مثال

مثال بيانياً

$$\left. \begin{array}{l} \cdot \text{س عندما } \leq 0 \\ \cdot \text{س عندما } > 0 \end{array} \right\} = \text{د (س)}$$

وعين مداها وابتحث اطردھا ونوعھا من حيث كونھا زوجية أو فردية

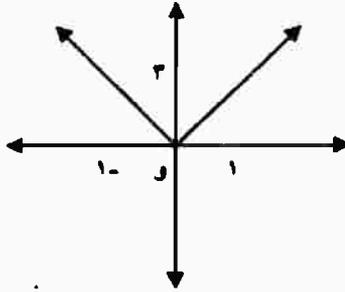
الحل

المجال = ح ، المدى = $[-\infty, \infty]$

الاطراد :- متناقصة عندما $\text{س} \in [0, \infty)$ - $[-\infty, 0)$

وتزايدية عندما $\text{س} \in]0, \infty]$

النوع : زوجية من التماثل بالنسبة لمحور الصادات



مثال

مثال بيانياً

$$\left. \begin{array}{l} \cdot \text{س' عندما } \leq 0 \\ \cdot \text{س' عندما } > 0 \end{array} \right\} = \text{د (س)}$$

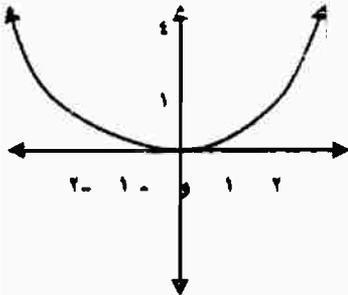
الحل

المجال = ح ، المدى = $[-\infty, \infty]$

النوع : زوجية

الاطراد : متناقصة عندما $\text{س} \in [0, \infty)$ - $[-\infty, 0)$

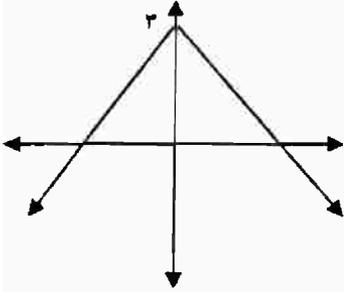
وتزايدية عندما $\text{س} \in]0, \infty]$



مثال

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} + 3 > 0 \text{ عندما} \\ \text{س} + 3 \leq 0 \text{ عندما} \end{array} \right\} = (\text{س})$$

الحل



المجال = ح

المدى = $[-\infty, 3]$

النوع : زوجية

الأطراف : متزايدة عندما

$س \in [0, \infty)$

ومتناقصة عندما $س \in]-\infty, 0]$

مثال

$$\left. \begin{array}{l} 1-2 \text{ س} > 3 \text{ عندما} \\ 3 \text{ عندما} \\ \frac{1}{4} (\text{س} + 4) < 2 \text{ عندما} \end{array} \right\} = (\text{س})$$

الحل

المدى = $[-3, \infty)$

المجال = ح

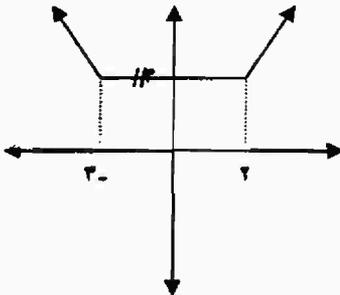
النوع : ليست زوجية وليست فردية

الأطراف :

متناقصة عندما $س \in]-\infty, 3]$

وثابتة عندما $س \in [3, 4)$

ومتزايدة عندما $س \in [4, \infty)$



مثال

مثال بيانياً واوجد المدى والمجال ونوع الدالة

$$\left. \begin{array}{l} \text{س}^2 = 1 \text{ عندما} \\ \text{س} - 1 > 0 \text{ عندما} \end{array} \right\} = (\text{س})$$

الحل

المدى = ح - [١٠ ، ١)

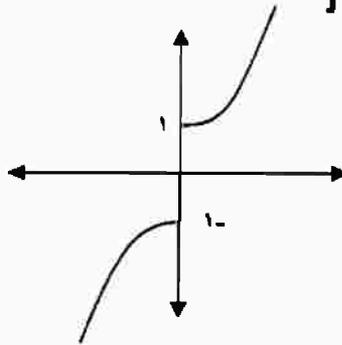
المجال = ح - { ٠ }

الأطراف :

متزايدة عندما س \in] ٣ - ، ∞ -]

ومتزايدة عندما س \in] ∞ ، ٣ -]

النوع : فردية



مثال

مثل بيانياً وأوجد المجال والمدى ونوع الدالة

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \text{ عندما س } < ٣ \\ \bullet \text{ عندما س } > ٣ \end{array} \right\} = \text{د (س)}$$

الحل

المدى = { ٣ ، ٣- }

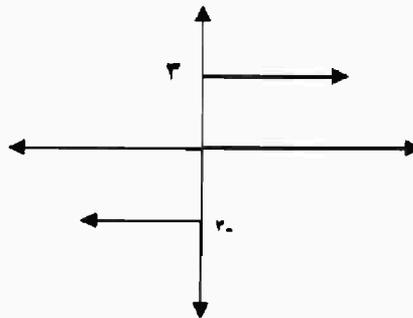
المجال = ح *

الأطراف :

وثابتة عندما س $>$ ٣

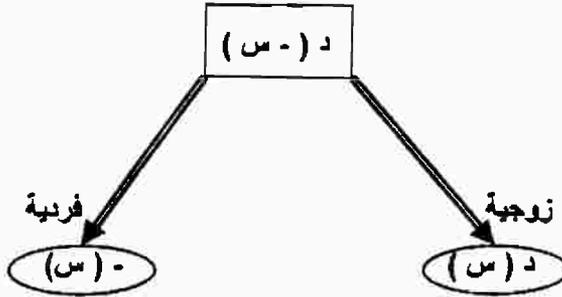
ثابتة عندما س $<$ ٣

النوع : فردية



الدالة الزوجية والدالة الفردية

ثانيا : جبريا



إذا كانت : $د (- س) = د (س)$ ← :: الدالة زوجية

إذا كانت : $د (- س) = - د (س)$ ← :: الدالة فردية

إذا كانت : $د (- س) \neq \pm د (س)$ ← :: الدالة زوجية وليست فردية

ملاحظة

حا (- س) = - حا (س) ، حتا (- س) = حتا س ، طا (- س) = - طا س

ملاحظة

إذا رمزنا للدالة الزوجية بالرمز + والفردية بالرمز -

(ا) حاصل ضرب دالتين زوجيتين يكون دالة زوجية

(ب) حاصل ضرب دالتين فرديتين يكون دالة زوجية

(ج) حاصل ضرب دالتين احدهما زوجية والأخرى فردية يكون دالة فردية

(د) حاصل جمع دالتين زوجيتين يكون دالة زوجية

(هـ) حاصل جمع دالتين فرديتين يكون دالة فردية

(و) حاصل جمع دالتين احدهما فردية والأخرى زوجية يكون دالة ليست زوجية وليست

فردية

الخلاصة

الدالة الفردية

بيانياً يكون الشكل متماثل بالنسبة
لنقطه الأصل (و)

جبرياً: $d(س) = -d(س)$

الدالة الزوجية

بيانياً يكون الشكل متماثل بالنسبة لمحور الصادات

جبرياً: $d(س) = d(س)$

استنتاج هام

- ١- $\sqrt{\text{فردية}} = \text{دالة فردية} = \text{دالة فردية}$
 - ٢- $\sqrt{\text{زوجية}} = \text{دالة فردية} = \text{ليست فردية ولا زوجية}$
 - ٣- $\sqrt{\text{فردية أو زوجية}} = \text{دالة زوجية} = \text{دالة زوجية}$
 - ٤- من النوال الزوجية
- حنا س ، قاس ، اس ا ، س ن حيث ن زوجي والدالة الثابتة

مثال

بين نوع الدالة

$$ص = \sqrt{س^2 + ٩} + حقا ٥ س + ٩$$

الحل

∴ ما تحت الجذر دالة زوجية ، الجذر فردي

∴ الدالة زوجية

مثال

بين نوع الدالة

$$ص = \sqrt{٩ - ٣س} - ٣س$$

الحل

∴ ما تحت الجذر دالة فردية ، الجذر زوجية

∴ الدالة ليست فردية ولا زوجية

مثال

بين نوع كل من الدوال الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية

$$(1) \quad y = (x) \quad (1)$$

الحل

$$\therefore y = (x - x) = 0$$

نوع

$$\therefore y = (x - x) = 0$$

$$(2) \quad y = (x^2 + x^3 + 1)$$

الحل

$$y = (x^2 + x^3 + 1) = (x^2 + x^3) + 1$$

$$= x^2 + x^3 + 1$$

زوجية

$$y = (x^2 + x^3)$$

$$y = (x^2 + x^3) = x^2 + x^3$$

(3)

الحل

$$y = (x^2 + x^3) = x^2 + x^3$$

\therefore عملية الجمع عملية تبادلية

نوع

$$\therefore y = (x^2 + x^3) = x^2 + x^3$$

$$(4) \quad y = (x^3 \times x^3 + \frac{x^3}{x^3})$$

الحل

$$y = (x^3 \times x^3 + x^{-3} \times x^3) = x^3 \times x^3 + x^{-3} \times x^3$$

$$y = (x^3 \times x^3 + x^{-3} \times x^3) = x^3 \times x^3 + x^{-3} \times x^3$$

\therefore الدالة زوجية

$$(5) \quad y = (x^3) = x^3$$

الحل

$$د(س - س) = (س - س) \times ح(س - س)$$

$$= س - س \times ح(س - س)$$

$$= س(س - س) = د(س)$$

∴ الدالة زوجية

$$٦) د(س) = \frac{س^٣ طاس}{١ + قاس}$$

الحل

$$د(س - س) = \frac{(س - س)^٣ طاس}{١ + (س - س) قاس}$$

$$د(س - س) = \frac{س^٣ طاس - س طاس}{١ + قاس}$$

$$د(س) = \frac{س^٣ طاس}{١ + قاس}$$

= د(س) الدالة زوجية

$$٧) د(س) = (س - س) (س - س) = (س - س)^٢$$

الحل

$$د(س) = (س - س) (س - س) = (س - س)^٢$$

= د(س) الدالة زوجية

$$= (س - س)^٢ (س - س) = (س - س)^٣$$

$$٨) د(س) = (س - س) (س - س) = (س - س)^٢$$

الحل

$$د(س - س) = (س - س) (س - س) = (س - س)^٢$$

$$= (س - س)^٢ (س - س) = (س - س)^٣$$

= د(س) الدالة زوجية

$$د(س) = (س^2 - 2س - 1)(س^2 - 2س + 1)$$

الحل

$$د(-س) = (-س^2 + 2س - 1)(-س^2 + 2س + 1)$$

$$د(-س) = (-س^2 + 2س - 1)(-س^2 + 2س + 1) \times (-س^2 + 2س - 1)$$

$$= (-س^2 + 2س - 1)(-س^2 + 2س + 1)$$

∴ عملية الضرب عملية تبديلية

د(س) الدالة زوجية

$$د(س) = س \text{ حتا } س$$

الحل

$$د(-س) = -س \text{ حتا } (-س)$$

$$= -س \text{ حتا } س$$

$$= -(-س \text{ حتا } س)$$

$$= د(س)$$

الدالة فردية

$$د(س) = س^2 - 5س$$

الحل

$$د(-س) = -س^2 + 5س$$

$$= -(س^2 - 5س)$$

$$= -د(س)$$

الدالة فردية

$$د(س) = \frac{س \times جتا س}{س + 2}$$

الحل

$$د(-س) = \frac{-س \times جتا س}{س + 2}$$

$$د - د (س) فردية = \left(\frac{س \times جتا س}{س + ٢} \right) =$$

$$(١١) د(س) = ٣٧ - ٧ - ٣$$

الحل

$$د(س) = ٣٧ - ٧ - ٣$$

$$= (٣٧ - ٧ - ٣)$$

$$= د(س)$$

الدالة فردية

$$(١٢) د(س) = \frac{\sqrt[٣]{س \times طاس}}{س}$$

الحل

$$د(س) = \frac{\sqrt[٣]{س \times طاس}}{س}$$

$$= \frac{\sqrt[٣]{س \times طاس}}{س}$$

$$= د(س) زوجية$$

$$د(س) = \left(\frac{٥}{٣س} + \frac{٢}{س} \right)^٢$$

الحل

$$د(س) = \left(\frac{٥}{٣س} + \frac{٢}{س} \right)^٢$$

$$= \left(\frac{٥}{٣س} + \frac{٢}{س} \right)^٢ (١ -) =$$

$$= \left(\frac{٥}{٣س} + \frac{٢}{س} \right)^٢ =$$

$$= - د (س) فردية$$

$$١٣) د (س) = س' + س$$

الحل

$$د (س - س') = س - س'$$

$$= - (س' + س)$$

$$\neq \pm د (س) \quad \text{ليست فردية أو زوجية}$$

$$١٤) د (س) = س قتا س + س'$$

الحل

$$د (س - س) = س - س - س قتا س - س'$$

$$= س قتا س - س'$$

$$= - (س قتا س + س')$$

$$\neq \pm د (س) \quad \text{ليست فردية أو زوجية}$$

تمرين (١٣)

على اطراد الدوال والدوال الزوجية والفردية

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} \leq ٠ \\ \text{س} > ٠ \end{array} \right\} \begin{array}{l} ٢ - س \\ ٢ - س \end{array} = د (س) \quad \text{١) مثل بيانياً منحنى}$$

ومن الرسم عين نوع الدالة من حيث الزوجية والفردية

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} < ٣ \\ \text{س} \geq ٣ \end{array} \right\} \begin{array}{l} ٣ - س \\ ٣ - س \end{array} = د (س) \quad \text{٢) ارسم الشكل البياني للدالة}$$

ومن الرسم استنتج

الأطراد والمدى ونوع الدالة من حيث الزوجية والفردية

٣) مثل بيانياً الدالة الآتية ثم وضع نوع الدالة من حيث كونها زوجية أو فردية وأطرافها

$$D(s) = \left. \begin{array}{l} s-3 \\ s \geq 0 \\ s-3 \\ s < 0 \end{array} \right\}$$

٤) مثل بيانياً الدالة وأوجد المجال والمدى وابحث أطرافها وبين نوع الدالة

$$D(s) = \left. \begin{array}{l} s^2-3 \\ s \leq 0 \\ s^2-3 \\ s > 0 \end{array} \right\}$$

٥) مثل بيانياً وأوجد المجال والمدى ونوع الدالة وابحث أطرافها

$$D(s) = \left. \begin{array}{l} 2 \\ 1 > s > 1 \\ s^2 \\ s \leq 1 \end{array} \right\}$$

٦) ارسم بيانياً وأوجد المجال والمدى ونوع الدالة وابحث أطرافها

$$D(s) = \left. \begin{array}{l} s^2 \\ s \leq 0 \\ s^2 \\ s > 0 \end{array} \right\}$$

٧) ارسم وأوجد المجال والمدى ونوع الدالة وابحث أطرافها

$$D(s) = \left. \begin{array}{l} s-2 \\ s \geq 2 \\ s-2 \\ s > 2 \\ s-2 \\ s \geq 2 \end{array} \right\}$$

٨) إذا كانت د: ح — ح حيث $D^3 - D^2 + D = 4s^2 + 2s$ أثبت ان د: فردية

٩) ارسم الدالة وأوجد المجال والمدى ونوع الدالة وابحث أطرافها

$$D(s) = \left. \begin{array}{l} s-2 \\ s \leq 1 \\ s+2 \\ s \geq 1 \end{array} \right\}$$

١٠) ارسم واوجد المجال والمدى ونوع الدالة وابحث أطرادها

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} \leq 0 \\ \text{س} \geq 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{12}{2+\text{س}} \\ \frac{12}{2-\text{س}} \end{array} = \text{د (س)}$$

١١) ارسم واوجد المجال والمدى ونوع الدالة وابحث أطرادها

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} \leq 1 \\ \text{س} > 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{س}^3 - 1 + \text{س} \\ -\text{س}^3 - 1 + \text{س} \end{array} = \text{د (س)}$$

ابحث نوع كلامن الدوال الآتية من حيث كونها زوجية او فردية او غير ذلك

$$12) \text{د (س)} = 2\text{س}^4 + \text{س}^2 - 1$$

$$13) \text{د (س)} = 3$$

$$14) \text{د (س)} = \frac{\text{س}^2 + 9}{\text{س} - 4}$$

$$15) \text{د (س)} = 7\text{س}^{10} + \text{س}^6 + \text{س}$$

$$16) \text{د (س)} = (3 - \text{س})^2$$

$$17) \text{د (س)} = \text{س}^2 - 3\text{س}$$

$$18) \text{د (س)} = \frac{\sqrt{3-\text{س}}}{\text{س}}$$

$$19) \text{د (س)} = 5 + \frac{5}{\text{س}}$$

$$20) \text{د (س)} = \frac{1}{\text{س} + 2}$$

$$\frac{1}{س+۳} = (س) د (۲۱)$$

$$\frac{س}{س+۳} = (س) د (۲۲)$$

$$\frac{س}{۹-۲} = (س) د (۲۳)$$

$$\frac{1}{۳-س} + \frac{1}{۳+س} = (س) د (۲۴)$$

$$\frac{س^۲ حتا س}{۵+۲} = (س) د (۲۵)$$

$$\frac{س حتا س^۳}{۵+۲} = (س) د (۲۶)$$

$$س-۵ = (س) د (۲۷)$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet - ۱ \text{ غلما س } > \\ \bullet + ۱ \text{ غلما س } < \end{array} \right\} = (س) د (۲۸)$$

$$س+۷ = (س) د (۲۹)$$

$$س+۴ = (س) د (۳۰)$$

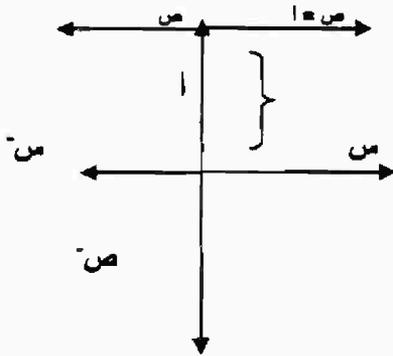
الدوال كثيرة الحدود والتمثيل البياني لها

♦ الصورة العامة للدوال كثيرة الحدود :

$$d(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad \text{حيث } a_n \neq 0$$

♦ كل من مجالها ومجالها المقابل مجموعة جزئية من \mathbb{C} لذلك فهي دالة حقيقية

أولاً : الدالة الثابتة



الصورة العامة : $d(x) = a$

لكل $x \in \mathbb{C}$ حيث a عدد ثابت

• المجال — \mathbb{C} ، المدى — $\{a\}$

• وهي دالة كثيرة حدود من الدرجة صفر

التمثيل البياني للدالة الثابتة :

تمثل بخط مستقيم يوازي محور السينات ويمر بالنقطة $(0, a)$

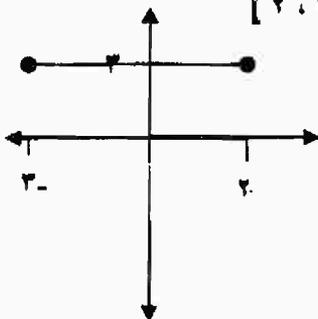
ملاحظة :-

معادلة المحور السيني $y = 0$

، معادلة المحور الصادي $x = 0$

مثال :

مثل بيانياً $d(x) = 3$ عندما $x \in [-2, 3]$



الحل

المجال = $[-2, 3]$ ، المدى = $\{3\}$

ملاحظة :

إذا كان المجال فترة محدودة []

فإن الشكل البياني يكون عبارة عن قطعة مستقيمة .

مثال :

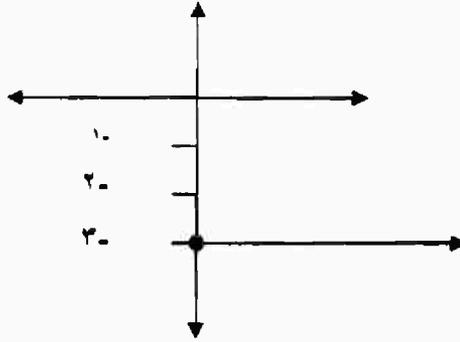
مثل بيانياً $d(x) = -3$ عندما $x \in]-\infty, 3]$

الحل

∴ المجال $s \leq$ صفر — $]-\infty, 0]$

، المدى — $\{3-\}$

د $(0) = 3-$ ، د $(1) = 3-$ ، د $(2) = 3-$



ملاحظة :

إذا كان مجال الدالة متباينة ($>$ أو $<$)

فإنه الشكل البياني سيكون عبارة عن شعاع ← ●

مثال

ارسم الدالة الآتية وأوجد المجال والمدى وابحث الأضداد

ونوع الدالة .

عندما $s < 0$	1	} د (س)
عندما $s > 0$	1-	

الحل

، المدى — $\{1-, 1\}$

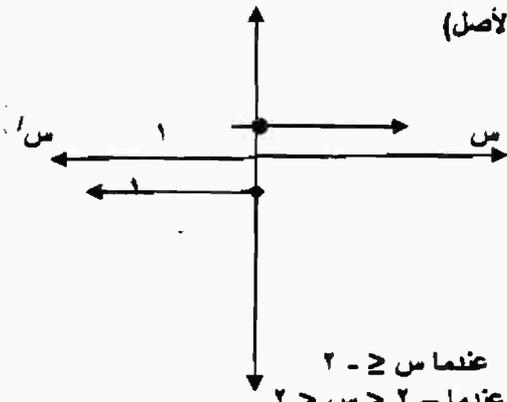
المجال — ح — { صفر }

عندما $s >$ صفر	عندما $s <$ صفر
د $(0) = 1-$	د $(0) = 1$
د $(1) = 1-$	د $(1) = 1$
د $(2) = 1-$	د $(2) = 1$

النوع — فريدة (متماثل حول نقطة الأصل)

الأطراف — عندما $s < 0$ ثابتة

، عندما $s > 0$ ثابتة



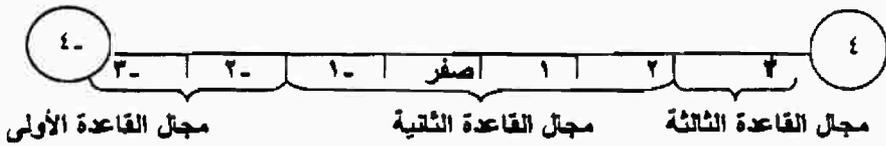
مثال

: مثل بيانياً الدالة $d [-4 , 4] - ح$

عندما $s \geq 2$
عندما $s > 2$
عندما $s \leq 2$

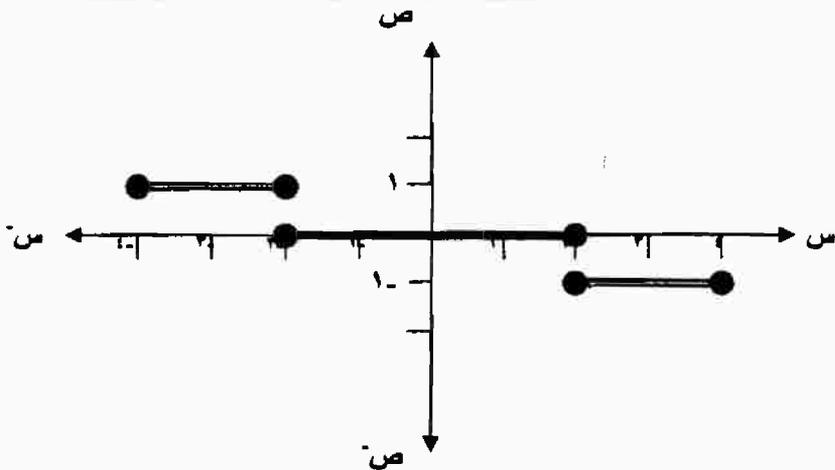
$d (س) = \begin{cases} 1 \\ \text{صفر} \\ -1 \end{cases}$

الحل



∴ المجال $[-4 , 4]$ ، المدى $\{ 1- , \text{صفر} , 1- \}$

عندما $s \leq 2$	عندما $s > 2$	عندما $s \geq 2$
المجال $[-4 , 2]$	المجال $[2 , 4]$	المجال $[2 , 4]$
$d (2) = 1$	$d (2-) = \text{صفر}$	$d (2-) = 1$
$d (4) = 1$	$d (2) = \text{صفر}$	$d (4-) = 1$



∴ المدى ← { ١ ، صفر ، ١ - }

نوع الدالة ← ∴ الدالة متماثلة حول نقطة الأصل ∴ فردية

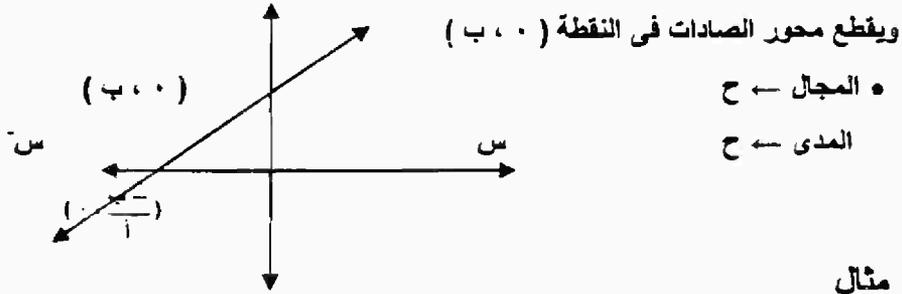
الاطراد ← [-٤ ، ٤ -] ثابتة [٠ ، ٢ -] ، [٤ ، ٢] ثابتة

ثانياً: الدالة الخطية

• الصورة العامة: $d = (s) = as + b, a \neq 0$

• التمثيل البياني للدالة الخطية:

تمثل بيانياً بخط مستقيم يقطع محور السينات في النقطة $(\frac{-b}{a}, 0)$ من



مثل بيانياً $d = (s) = 2s + 3$ ، $s \geq 3$

وأوجد المجال والمدى ونوع الدالة وابحث الاطراد

الحل

∴ الدالة خطية ∴ المجال ← ح ، المدى ← د

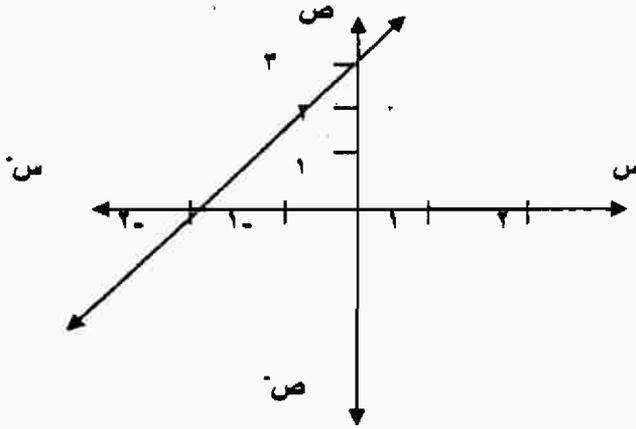
$$\therefore ص = 2س + 3$$

∴ تقطع محور السينات في $\frac{3-}{2} = \frac{-3}{2}$ ، $(\frac{-3}{2}, 0)$

وتقطع محور الصادات في $(b, 0) \leftarrow (3, 0)$

الاطراد: متزايدة على مجالها (لأن $a > 0$)

النوع: ليست زوجية ولا فردية



ملاحظة :

١) الدالة الخطية د (س) = اس + ب إذا كان :-

أ) $0 < |a|$ ← تكون الدالة تزايدية

ب) $0 > |a|$ ← تكون الدالة تناقصية

٢) الدالة الخطية الخالية من الحد المطلق أى التى

على الصورة د (س) = اس هى دالة فردية

مثال

:- مثل بيتانيا $2 - 3س$ ، $س ≤ ٠$

واوجد المجال والمدى ونوع الدالة وابحث أطرافها

الحل

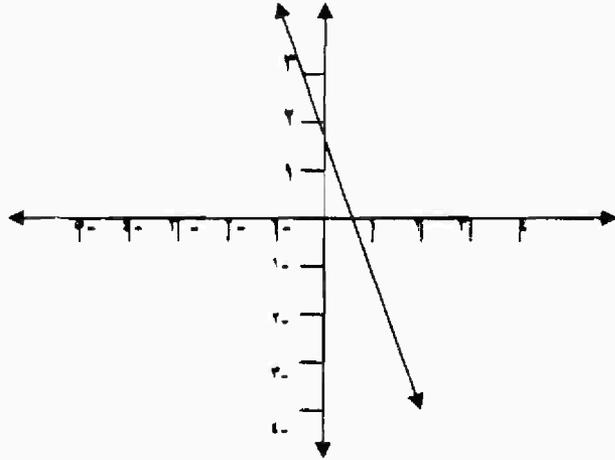
س	٠	١	٢
ص	٢	١ -	٤ -

المجال ← $[-٠, ∞]$

المدى ← $[-∞, ٢]$

نوع الدالة ← ليست زوجية ولا فردية

أطراف الزاوية ← معامل س سالب ∴ الدالة متناقصة



مثال

مثل بيتها :-

$$\left. \begin{array}{l} \text{د (س) = } 2 + \text{س} \quad \text{حيث } \text{س} \in]-2, 3[\\ \text{د (س) = } -8 - \text{س} \quad \text{حيث } \text{س} \in [3, 7[\end{array} \right\}$$

وعين المجال والمدى وأبحث الأضداد ونوع الدالة

الحل

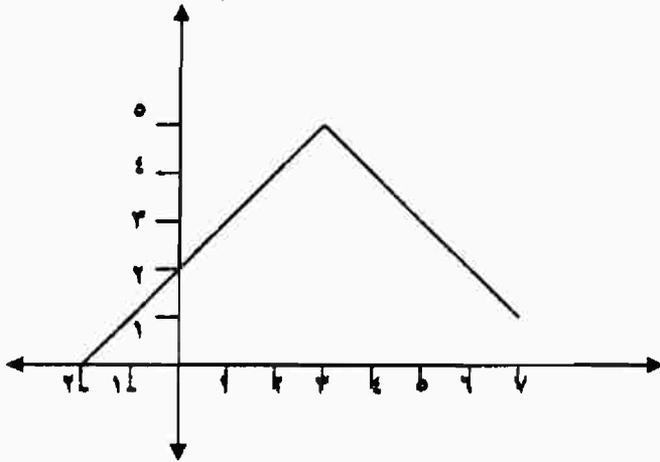
د (س) = $2 + \text{س}$ حيث $\text{س} \in]-2, 3[$	د (س) = $-8 - \text{س}$ حيث $\text{س} \in [3, 7[$
د (س) = $2 + 2 = 4$	د (س) = $2 + 3 = 5$
د (س) = $3 - 8 = -5$	د (س) = $2 + 2 = 4$
د (س) = $7 - 8 = -1$	د (س) = $2 + 3 = 5$

المجال (من رأس المسألة) $]-2, 3[$

المدى (من الرسم) $[5, 0]$

الأضداد : متزايدة في $]-2, 3[$ لأن معامل س موجب

متناقصة في $[3, 7[$ لأن معامل س سالب



مثال

:- إذا كان $d(s) = \frac{1-s^2}{1-s}$ أرسم الدالة

وأوجد المجال والمدى وأبحث أطرادها ونوعها .

الحل

$$d(s) = \frac{(1+s)(1-s)}{1-s} = \frac{1-s^2}{1-s} = 1+s$$

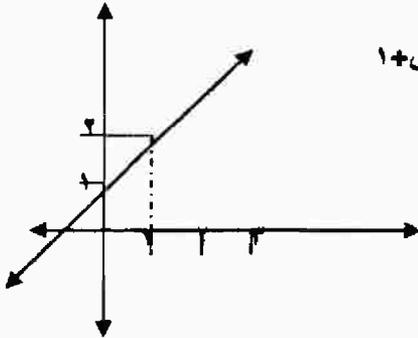
ولكن المجال = ح - { 1 }

المدى = ح - { 2 }

:- معامل s موجب فهي متزايدة

ونوعها : ليست فردية ولا زوجية

مثال



$$\left. \begin{array}{l} [2, 0, 5-] \ni s, \quad 0+s \\ [2, 2-] \ni s, \quad 2 \\ [0, 2] \ni s, \quad s-0 \end{array} \right\} = d(s)$$

وعين المجال والمدى وأبحث نوعها و أطرادها

الحل

القاعدة الأولى			القاعدة الثانية			القاعدة الثالثة		
ص = س + ٥، س ∈]٥-، ٥-]			ص = ٣ - س، س ∈]٣-، ٣-]			ص = ٥ - س، س ∈]٥، ٢]		
س	٥-	٢-	س	٢-	٢	س	٢	٥
ص	صفر	٣	ص	٣	٣	ص	٣	صفر

المدى (من الرسم) [٣ ، ٥]

المجال [٥ ، ٥-]

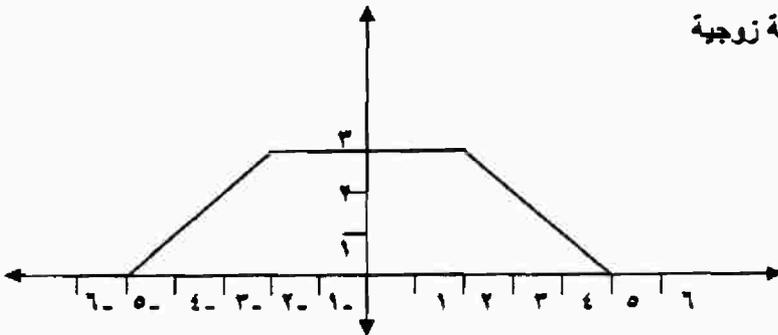
الأطراف : متزايدة في [٥- ، ٢-]

ثابتة في [٢- ، ٢]

ومتناقصة في [٥ ، ٢]

النوع : حيث انها متماثلة حول محور الصادات

∴ الدالة زوجية



تمارين (١٤)

مثل بيانياً الدوال الآتية

$$\left. \begin{array}{l} ١ < س < ٥ \\ ٥ \leq س < ٢ \end{array} \right\} = (س)$$

$$\left. \begin{array}{l} ٢ < س < ٣ \\ ٣ < س < ٤ \end{array} \right\} = (س)$$

$$\left. \begin{array}{l} 2 < x \\ 2 > x - 2 \end{array} \right\} = (x) \quad (3)$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 < x \\ x + 4 > 0 \end{array} \right\} = (x) \quad (4)$$

$$\left. \begin{array}{l} 2 < x \\ 2 > x - 2 \end{array} \right\} = (x) \quad (5)$$

$$\left. \begin{array}{l} x > 1 \\ 3 < x - 2 \end{array} \right\} = (x) \quad (6)$$

$$\left. \begin{array}{l} x > 3 \\ 5 < x \end{array} \right\} = (x) \quad (7)$$

(8) اذا كانت د : $[-2, 4] - ح$

$$\left. \begin{array}{l} 2 < x + 2 \\ 4 > 2x \end{array} \right\} \text{حيث} \\ = (x) \quad (8)$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 < x - 2 \\ 0 > x + 2 \end{array} \right\} = (x) \quad (9)$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 > x + 2 \\ 2 > 0 \\ 2 < x - 1 \end{array} \right\} = (x) \quad (10)$$

$$\left. \begin{array}{l} 2 < x \\ 0 < x + 2 \end{array} \right\} = (x) \quad (11)$$

ثالثاً... دالة المقياس

تعريف مقياس العدد الحقيقي (القيمة المطلقة) -

يرمز لها $|s|$ ويقرأ مقياس العدد الحقيقي ومعناه اكبر العددين (s ، $-s$)

نفس العدد إذا كان موجباً أو $= 0$ } \therefore مقياس (العدد) =

-العدد إذا كان العدد سالباً

$s \leq 0$:

$-s > 0$:

أي أن $|s| =$

$\therefore 15 = 15, 5 = 15, 5 = 15, 4 = 12, 4 = 2, 1 = 11, 5 = 1, 7 = 10, 7 = 0, 1 = 0, 1 = 0$

ملاحظة

$|s| = [s] =$ عندما s ≥ 0 و $\{ \dots, 0, 1, 2, 3, \dots \}$

خواص مقياس العدد الحقيقي

(١) $|s| < 0$ ، $|s| = 0 \leftrightarrow s = 0$

\therefore مقياس العدد هو عد غير سالب

مثال

أوجد مجموعة الحل للمعادلات الآتية :-

(أ) $|s| = 2$

(ب) $|s+11| = 5$

الحل

(أ) $|s| = 2$ مرفوض لأن $|s| \leq 0$

(ب) $|s+11| = 5$ $\therefore s+11 = 5$ $\therefore s = 5 - 11 = -6$ مرفوض

مثال

$$\frac{س}{س+١١} = \text{عين مجال د (س)}$$

الحل

∴ المجال = ح _ {اصفار المقام}

$$\therefore \text{س} + 11 = 0 \quad \therefore \text{س} = -11 \quad \therefore \text{س} = 0$$

∴ المجال = ح _ {١-}

$$(٢) \quad |س| = |س-١|$$

$$\text{مثلاً: } ١٦١ = ١٦٠ = ١$$

$$\text{س} = 13 \quad \text{س} = -13 \quad \text{س} = 1 \quad \text{س} = -1$$

مثال

عين نوع كل من الدوال الآتية من حيث كونها زوجية او فردية

$$(١) \quad \text{د (س)} = س + \frac{١}{س}$$

$$(٢) \quad \text{د (س)} = \frac{س^٢}{س-٦}$$

الحل

$$\text{د (س)} = س + \frac{١}{س}$$

$$\therefore \text{د (-س)} = (-س) + \frac{١}{-س} = -س - \frac{١}{س} = -(س + \frac{١}{س})$$

∴ الدالة زوجية = د (س)

$$(٢) \quad \text{د (س)} = \frac{س^٢}{س-٦} = \text{د (-س)} = \frac{س^٢}{٦-س} = \text{د (س)}$$

٣) إذا كان $|س| = أ$ ← $س = ± أ$

مثال

حل المعادلات الآتية :

$$(١) \quad |س| = ٣ \quad (٢) \quad اس + ١١ = ٥$$

الحل

$$(١) \quad |س| = ٣ \quad ← \quad س = ± ٣$$

$$(٢) \quad اس + ١١ = ٥$$

$$.: س + ١ = ٥$$

$$.: س + ١ = ٥ \quad ← \quad س = ٤$$

$$أ، س + ١ = ٥ \quad ← \quad س = ٦$$

∴ مجموعة الحل = { ٤ ، ٦ }

٤) إذا كان $|س| = |ص|$ فإن $س = ± ص$

مثال : حل المعادلة $اس - ١١ = اس + ١٣$

الحل

$$.: س - ١ = (س + ٣) ±$$

$$س - ١ = س + ٣ \quad || \quad س - ١ = ١ - س$$

$$س - ١ = ١ - س \quad || \quad ٢س = ٢ \quad ∴ س = ١$$

∴ مجموعة الحل = { ١ }

$$(٥) \quad |س| × |ص| = |س · ص|$$

$$مثلاً : ١٣١ × ١٤ = ١١٢٠ = ١٤٠ × ١٢$$

$$١٨٠ × ١٨ = ١٨٠ × ١٨ = ١٨٠ × ١٨$$

$$(6) |س + ص| \geq |س| + |ص|$$

ويحدث التساوى فى حالة س ، ص لهما نفس الأشارة

$$١٦ + ١١ = ١٦ + ١١ ، ١٦ - ٤ - ١ = ١٣ - ٤ - ١$$

$$١٤ - ٧١ > ١٤ - ٧١ ،$$

$$(7) |س| = \sqrt[٢]{٢١س}$$

$$٢س = \sqrt[٦]{٢١س} ، ٧ = ١٧١ = \sqrt[٢]{٧}$$

$$(8) اس = ٢١ = ٢س$$

$$\text{مثلا : } اس = ١٢ = ٢١ = ٢س$$

مثال

حل المعادلات الآتية :-

$$(1) س^٢ - ٤ = |س| + ٣ = ٠$$

$$(2) |س| + ٢ = س^٢ = ٣$$

$$(3) (١١ - اس) + (١١ - اس) = ١٢$$

$$(4) |س| = (٥ - |س|) |٤|$$

الحل

$$(1) (اس - ٢)(اس + ٢) - ٤ = |س| + ٣ = ٠$$

$$\therefore (اس - ٢)(اس + ٢) = (٣ - |س|)$$

$$س = \pm ١$$

$$اس = ١ = ٣ \leftarrow س = \pm ٣ ، اس = ١$$

$$\text{مجموعة الحل} = \{ ٣ ، ٣- ، ١ ، ١- \}$$

نعيد الترتيب

$$(2) |س| + ٢ = س^٢ = ٣$$

$$(٢ اس + ١)(٣ + اس - ١) = ٠$$

$$٠ = ٣ - ١ + اس - ١ = ١$$

وهذا مرفوض

$$١٢ = ١ - ٣ = ٢$$

$$1 \pm = |s| \quad \text{أ. } s = 1$$

$$\{1, -1\} = \text{مجموعة الحل}$$

$$12 = 11 - s + (11 - s) \quad (3)$$

$$0 = (3 - 11 - s)(4 + 11 - s)$$

مرفوض

$$s = 11 - 4$$

$$s = 11 \pm 3$$

$$s = 11 - 3$$

$$\{4, -2\} = \text{مجموعة الحل}$$

$$24 = (5 - |s|) |s| \quad (4)$$

$$0 = 24 - |s| - (11 - |s|)$$

باستخدام خاصية التوزيع

$$0 = (3 + |s|)(8 - |s|)$$

$$8 \pm = |s|$$

$$8 = |s|$$

$$\{8, -8\} = \text{مجموعة الحل}$$

تعريف

$$\left. \begin{array}{l} s \text{ عندما } s \leq 0 \\ -s \text{ عندما } s > 0 \end{array} \right\} = |s|$$

مثلا

$$s \text{ عندما } s \leq 0$$

$$s^2$$

$$-s \text{ عندما } s > 0$$

$$-s^2$$

بينما $s^2 = 1$ ، $s = 1$ ، $s^2 = 1$ ، $s = -1$ ،

تعريف

إذا كان $a \in \mathbb{R}$ ، $b \in \mathbb{R}$ فإن

$$\left. \begin{array}{l} \frac{b}{a} \leq \text{عندما } s + b \\ \frac{b}{a} > \text{عندما } s - b \end{array} \right\} = |a \cdot s + b|$$

فمثلاً :

$$\left. \begin{array}{l} s + 3 \leq -2 \\ s - 3 > -2 \end{array} \right\} = |3s + 1|$$

$$\left. \begin{array}{l} 3 \leq \frac{7}{3} \\ 3 > \frac{7}{3} \end{array} \right\} = |3s - 7|$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{7}{3} \leq 3 \\ \frac{7}{3} > 3 \end{array} \right\} = |3s - 7| = |3s - 7|$$

ملاحظات

- (١) عند إعادة تعريف المقياس يجب أن يكون معامل s موجباً
- (٢) يعاد التعريف في حالة وجود s خارج المقياس

مثال

حل المعادلة

$$s + 1 + 2s + 0 = 0$$

الحل

$$\left. \begin{array}{l} s + 1 + 2s + 0 \\ s - 1 + 2s + 0 \end{array} \right\} = \text{الايمن}$$

<p>عندما $x \leq -4$</p> <p>عندما $x > -4$</p> <p>عندما $x > -4$</p> <p>س $+1 = 0$</p> <p>س $-1 > -4$</p> <p>مرفوض</p>		<p> $\left. \begin{array}{l} 3 \text{ س } + 9 \\ 1 \text{ س } + 1 \end{array} \right\} =$ </p> <p>عندما $x \leq -4$</p> <p>س $3 + 9$</p> <p>س $3 = 9$</p> <p>س $3 = 9 < -4$</p> <p>مقبول</p>
--	--	--

مثال

حل المعادلة

$3x - 13 = 11 - 4x$

الحل

$3x - 13 = 11 - 4x$

<p>عندما $\frac{1}{3} \leq$</p> <p>عندما $\frac{1}{3} >$</p> <p>عندما $\frac{1}{3} \leq$</p> <p>عندما $\frac{1}{3} >$</p> <p>س $-12 = 0$</p> <p>س $12 > \frac{1}{3}$</p> <p>مرفوض</p>		<p> $\left. \begin{array}{l} 3x - 13 + 1 = 11 - 4x + 1 \\ 3x - 12 = 12 - 4x \end{array} \right\} = \text{الايمن}$ </p> <p> $\left. \begin{array}{l} 7 \text{ س } - 14 \\ 12 \text{ س } - 12 \end{array} \right\} =$ </p> <p>س $7 = 14$</p> <p>س $7 = 14$</p> <p>س $7 = 14 < \frac{1}{3}$</p> <p>مقبول</p>
--	--	---

مجموعة الحل = { 7 }

مثال

حل المعادلة

$$2 \text{ من } 12 - 3 \text{ من } 6 + 0 =$$

الحل

$$2 \text{ من } 12 - 3 \text{ من } 6 + 0 =$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{عندما } 2 \leq \\ \text{عندما } 2 > \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \text{ من } 12 - 3 \text{ من } 6 + 0 \\ 2 \text{ من } 12 + 3 \text{ من } 6 + 0 \end{array} = \text{الايمن}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{عندما } 2 \leq \\ \text{عندما } 2 > \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \text{ من } 12 - 7 \text{ من } 6 + 0 \\ 2 \text{ من } 12 + 7 \text{ من } 6 + 0 \end{array} =$$

$$\text{عندما } 2 > \qquad \text{عندما } 2 \leq$$

$$2 \text{ من } 12 - 7 \text{ من } 6 + 0 = \qquad 2 \text{ من } 12 - 7 \text{ من } 6 + 0 =$$

$$0 = (2 - 3) (2 + 3) \qquad 0 = (2 - 3) (2 + 3)$$

$$2 = 3 \text{ مرفوضة} \qquad 2 = 3 \text{ مرفوضة}$$

$$\left\{ \frac{3}{2}, 2 \right\} = \text{مجموعة الحل}$$

مثال

حل المعادلة

$$0 = 12 - 3 \text{ من } 5$$

الحل

$$\left. \begin{array}{l} \text{عندما } 2 \leq \\ \text{عندما } 2 > \end{array} \right\} \begin{array}{l} (2 - 5) 3 - 0 \\ (2 + 5) 3 - 0 \end{array} = \text{الايمن}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{عندما } 2 \leq \\ \text{عندما } 2 > \end{array} \right\} \begin{array}{l} 6 + 3 - 0 \\ 6 - 3 + 0 \end{array} =$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{عندما } 2 \leq \\ \text{عندما } 2 > \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 - 11 \\ 3 - 1 \end{array} =$$

المتباينات والمقياس

نتيجة :-

إذا كان $|س| > أ$ فإن $س > أ$ أو $س < -أ$

$$س > ٣ \text{ أو } س < -٣$$

$$س > ٣$$

فمثلا

$$٥ \geq س \geq ٥$$

$$س \geq ٥$$

نتيجة :-

إذا كان $|س| < أ$ فإن $س < أ$ ، $س > -أ$

$$س < ١ \text{ ، } س > -١$$

$$س < ١$$

فمثلا

$$س \leq ٣ \text{ ، } س \geq -٣$$

$$س \leq ٣$$

س 3 ح - [- ٣ ، ٣]



مثال

حل المتباينات الآتية

١) $س \leq ١٢$

٢) $س \geq ١٢$

٣) $١٠ < ١٤ + س$

٤) $١٠ > ١٤ + س$

الحل

ضع \pm بدلا من $|$ |

$$1 \pm (2 - x) \leq 3$$

$$x - 2 \leq 2$$

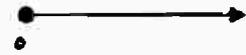
$$x \leq 4$$

$$x \geq 0$$

$$x - 2 \geq 2$$

$$x \geq 4$$

$$x \geq 1$$



$$x \in [-1, 0] \cup [1, \infty)$$

$$3 \pm (2 + x) < 10$$

$$x + 4 < 10$$

$$x < 6$$

$$x < 2$$

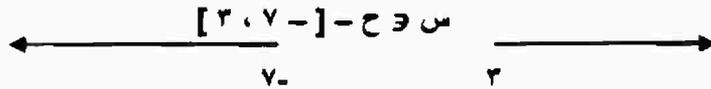
$$x + 4 > 10$$

$$x > 6$$

$$x > 14$$

$$x > 7$$

أو



علامة \leq أو $<$ يكون الحل هو الاتحاد

$$2 \pm (2 - x) \geq 3$$

$$x - 2 \geq 2$$

$$x \geq 4$$

$$x \geq 0$$

$$x - 2 \leq 2$$

$$x \leq 4$$

$$x \leq 1$$



$$x \in [1, 4]$$

$$\pm (2s + 4) > 10$$

$$2s + 4 < 10$$

أو

$$2s + 4 > 10$$

$$2s < 10 - 4$$

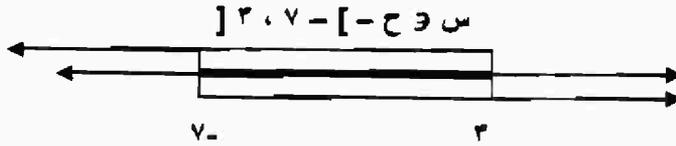
$$2s > 10 - 4$$

$$2s < 14$$

$$2 > s$$

$$s < 7$$

$$s > 3$$

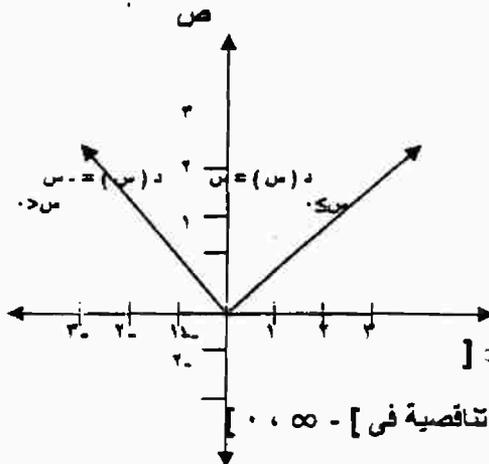


علامة \geq أو $>$ يكون الحل هو المشترك أو التقاطع

التمثيل البياني لدالة المقياس

الحالة الأولى:

ارسم الشكل البياني للدالة $d(s) = |s|$



الحل

$$\left. \begin{array}{l} s : s \leq 0 \\ -s : s > 0 \end{array} \right\} = d(s)$$

س	0	1	0	1
د(س)	0	1	1	0

المجال — ح ، المدى — $]0, \infty[$

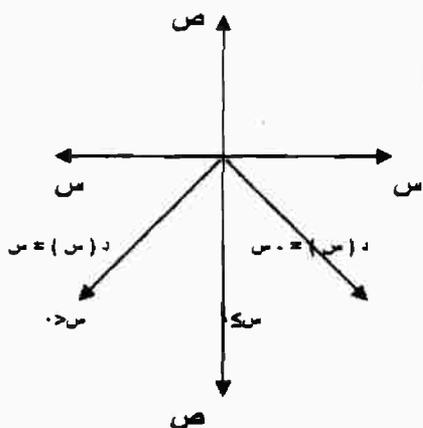
الاطراد: **تزايدية** في $]0, \infty[$ ، **تناقصية** في $]-\infty, 0[$

النوع: زوجية لأنها متماثلة حول محور الصادات

بداية الشعاعين: (صفر ، صفر)

الحالة الثانية :

ارسم الشكل البياني لدالة $d(s) = -s$



الحل

$$\left. \begin{array}{l} -s, s \leq 0 \\ s, s > 0 \end{array} \right\} d(s) = -s$$

المجال : - ح

المدى : $[-\infty, \infty]$

تناقصية عندما $s \in]\infty, 0]$

بداية الشعاعين (صفر ، صفر)

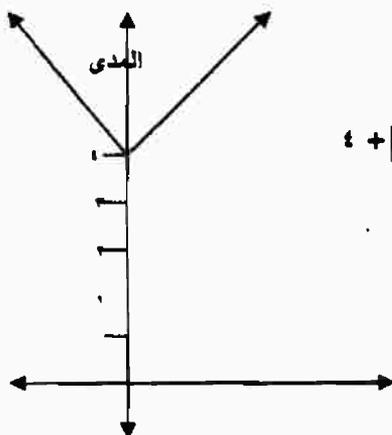
الأطراف : متزايدة عندما $s \in]-\infty, 0]$

النوع : زوجية

الحالة الثالثة :

$|s| + b$ (الإزاحة الصادية)

ارسم الشكل البياني للدالة : $d(s) = |s| + 4$



الحل

س	0	1	2	0	1	2
d(s)	4	5	6	4	5	6

$$\left. \begin{array}{l} s + 4, s \leq 0 \\ -s + 4, s > 0 \end{array} \right\} |s| + 4$$

المجال = ح

المدى = $[-4, \infty]$

الدالة : زوجية - بداية الشعاعين $(b, 0) = (4, 0)$

الدالة تزايدية في $]-\infty, 0]$ تناقصية في $]0, \infty[$

الحالة الرابعة :-

$|s| + b$ (الإزاحة الصادية)

ارسم الدالة د (س) = ٥ - ٢١ س ا ثم أوجد المدى والمجال
والأطراد ونوع الدالة

الحل

٥ + ٢ س

س	٠	١
ص	٥	٣

المدى : [٥ ، ∞)

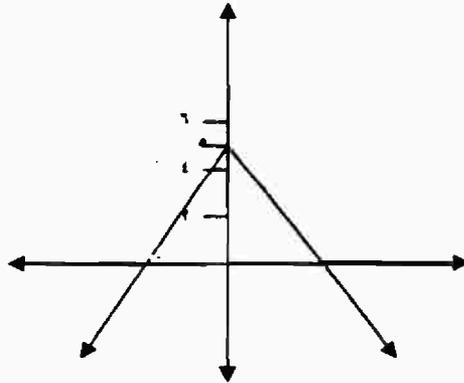
٥ - ٢ س

س	٠	١
ص	٥	٣

المجال - س ح

الأطراد : تزايدية س [٠ ، ∞) وتناقصية س [∞ ، ٠)

النوع ك زوجية ،: بداية الشعاعين (٥ ، ٠)



الحالة الخامسة

د (س) = ١ أ س + ب ١

مثل بيانياً د (س) = ١٣ - ٢١ س

الحل

$$\left. \begin{array}{l} ٢ - ٣ س \leq \frac{٣}{٤} \text{ عندما س } \\ ٢ - ٣ س + ٣ > \frac{٣}{٤} \text{ عندما س } \end{array} \right\} = \text{د (س)}$$

بداية الشعاعين : $(0, \frac{3}{4})$

الشكل متماثل بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $s = \frac{3}{4}$

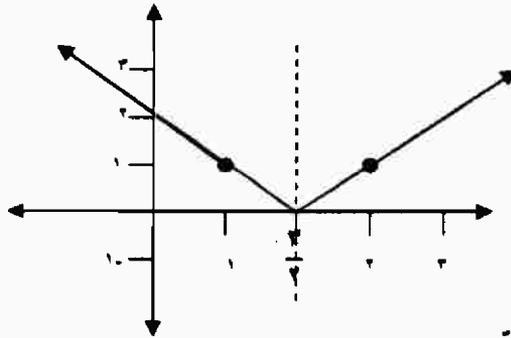
س	٢	١	٠
ص	١	١-	٣-

المجال = ح ، المدى = $], 0, \infty[$

الأطراف : تناقصية عندما $s \in]\frac{3}{4}, \infty[$ تزايدية عندما $s \in]0, \frac{3}{4}]$

النوع : ليست زوجية وليست فردية

الشكل : متماثل بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $s = \frac{3}{4}$



الحالة السادسة :

د (س) = ١س + ٤ب + ١

مثل بيانياً الدالة د (س) = ١س + ٢

الحل

س	١-	٢-	٣-
ص	١	٠	١

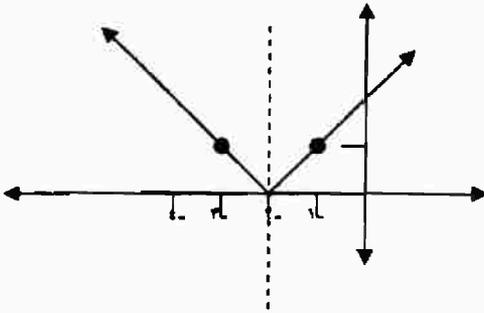
$$د (س) = \begin{cases} ٢ + س \\ ٢ + س - \end{cases}$$

رأس الشعاعين $(٠, ٢) - (٠, \frac{ب}{١})$

المجال = ح ، المدى = $[-٢, \infty)$

الأطراف لك تناقصية عندما $س \in]٣, -\infty[$ ، $٢ - \infty$]

النوع : ليست زوجية ولا فردية



الحالة السابعة :

الإزاحة في اتجاه المحورين

د (س) = ١ أس + ب + ج حيث بداية الشعاعين

$(ج, \frac{ب-}{١})$ والشكل متماثل بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $س = \frac{ب}{١}$

مثال مثل بيانياً :-

د (س) = ٢١ س - ١٥ + ١ وعين مداها وبحث أطرافها

الحل

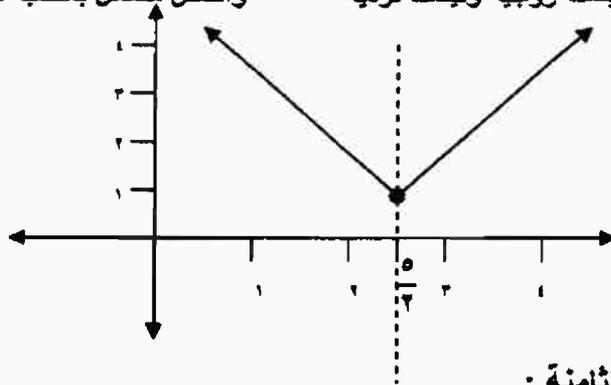
$$د (س) = \begin{cases} ٢س - ١٥ + ١ \text{ عندما } س \leq \frac{٥}{٢} \\ ٢س + ١٥ + ١ \text{ عندما } س > \frac{٥}{٢} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} ٢س - ٤ : س \leq \frac{٥}{٢} \\ ٢س + ٦ : س > \frac{٥}{٢} \end{cases}$$

المجال = ح ، المدى = $[-١, \infty)$

الأطراد : متناقصة عندما $s \in]-\frac{5}{4}, \frac{5}{4}[$ متزايدة عندما $s \in]\frac{5}{4}, \infty[$

النوع : ليست زوجية وليست فردية والشكل متماثل بالنسبة للمستقيم $s = \frac{5}{4}$



الحالة الثامنة :

$$d(s) = |s + b|$$

مثال

ارسم الدالة $d(s) = |s + 2|$

ثم استنتج المجال : المدى ، وابحث الاطراد ونوع الدالة .

الحل

المدى $=]-\infty, \infty[$

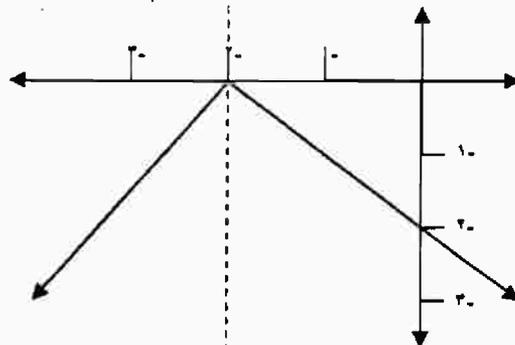
المجال $= \mathbb{R}$

تناقصية في $]-\infty, -2[$

الأطراد : تزايدية في $]-2, \infty[$

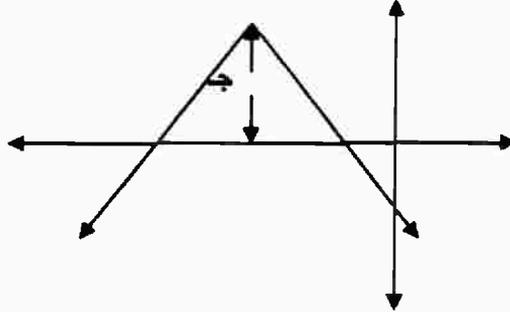
النوع : ليست زوجية وليست فردية

$$\text{بداية الشعاعين } (-2, 0) \text{ حيث } s = \frac{-2}{1} = \frac{2}{-1}$$



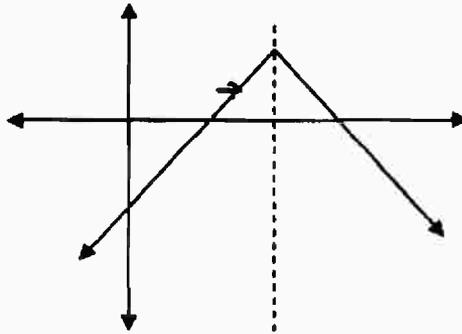
الحالة التاسعة :

$$د (س) = - |س + ب| +$$



الحالة العاشرة :

$$د (س) = |س - ب| +$$



حل معادلات المقياس بيانياً

الحل البياني معناه إيجاد الأحداثى السيني لنقط تقاطع المنحنيات :

مثال

حل المعادلات الآتية : بيانياً :-

$$(١) \quad ٣ = ١٢ - س$$

$$(٢) \quad ١٢ + س = ١١$$

$$(٣) \quad ٠ = س - ٦ + ١٢$$

الحل رقم (١)

١س - ١٢ = ٢

نضع د (س) = ١س - ١٢ ، د (س) = ٢

$$\left. \begin{array}{l} ٢ - س \leq ٢ \\ - س + س > ٢ \end{array} \right\} = د (س)$$

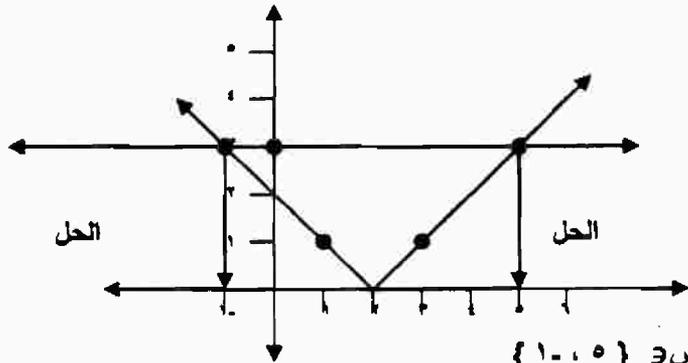
٣	٢	س
١	٠	ص

ص = س + ٢

ص = س - ٢

١	٢	س
١	٠	ص

بالنسبة الى د (س) = ٢ نرسم خط مستقيم ص = ٢ يوازي محور السينات



الحل رقم (٢)

١س - ١١ = ١٢ + ١س

$$\left. \begin{array}{l} ١ - س \leq ١ \\ - س + ١ > ١ \end{array} \right\} = د (س) = ١١ - ١س$$

$$ص = -س + ١$$

$$ص = س - ١$$

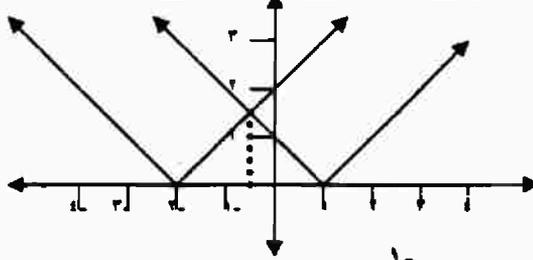
$$\left. \begin{array}{l} ٢ + س \leq ٢ \\ ٢ - س > ٢ \end{array} \right\} \text{نضع د (س) = اس + ١٢ =}$$

$$ص = -س - ٢$$

$$ص = س + ٢$$

س	٢-	٢-
ص	١	٠

س	٢-	١-
ص	٠	١



مجموعة الحل س $\geq \{ \frac{1}{4} \}$

حل رقم (٣)

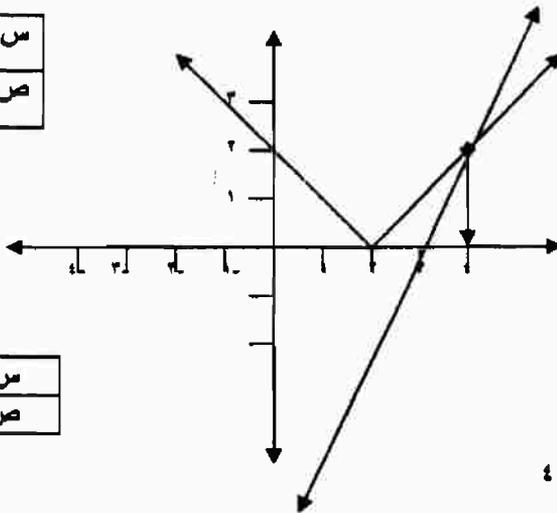
$$١س - ٢ = ١٢ - ٢س$$

$$١س - ٢ = ١٢ - ٢س$$

$$\left. \begin{array}{l} ٢ - س \leq ٢ \\ ٢ + س > ٢ \end{array} \right\} \text{د (س) = اس - ١٢ =}$$

(٢) د (س) = ٢س - ٦ = دالة خطية (خط مستقيم)

س	١	٢
ص	٠	١



س	١	٠
ص	٠	١

الحل س = ٤

تمرین (۱۵)

حل المعادلات الآتية جبرياً

(۱) $۳ = ۱۲ - ۱س$

(۲) $۹ = ۱۳ - ۲س$

(۳) $۱۵ - ۱ = ۱۴ + ۲س$

(۴) $۰ = ۷ + ۱۴ - ۳س$

(۵) $۱۷ - ۱س = ۱۳ - ۱س$

(۶) $۱۲ + ۱س = ۱۳ - ۲س$

(۷) $۰ = ۷ - ۲س + ۱۵ - ۳س$

(۸) $۰ = ۲س + ۱۴ + ۹ - ۲س$

(۹) $۰ = ۱۲ + ۱س - ۱۷$

(۱۰) $۰ = ۱۴ - ۱س - ۱۵$

(۱۱) $۰ = ۱۴ - ۱س - ۱۵$

(۱۲) $۰ = ۲۰ - ۱س + ۱۸$

(۱۳) $۰ = ۱س - ۱$

(۱۴) $۰ = ۳ + ۱س$

ارسم الدوال الآتية واكتب المجال ، والمدى ، الطراد والنوع

(۱۵) $د(س) = ۴ + ۱۶ - ۲س$

(۱۶) $د(س) = ۲ + ۱۳ - ۴س$

(۱۷) $د(س) = ۱س + ۱$

(۱۸) $د(س) = ۷ - ۲س + ۱۸ - ۲س$

(۱۹) $د(س) = ۳ - ۱س + ۱۱ - ۳س$

(۲۰) $د(س) = ۲ + ۱س + ۱۱ + ۲س$

(۲۱) $د(س) = ۲۱ - ۳س - ۱$

$$22) د (س) = 31 - س = 14$$

$$23) د (س) = س + س = 12$$

$$24) د (س) = س + س = 1$$

$$د (س) = \frac{|س|}{س}$$

اوجد مجموعة الحل للمعادلات الآتية بيانياً

$$26) د (س) + س = 16 - 3$$

$$27) د (س) = س + 11 = 3 - 9$$

الدالة التربيعية

الصورة العامة

د (س) = اس² + بس + ح ، ح ≠ ٠ ، وهي في متغير واحد

التمثيل البياني

تمثل بيا نيا بمنحنى (قطع مكافئ) محوره يوازى محور الصادات

ونقطة ورأسه ($\frac{-ب}{٢ا}$ ، $د - \frac{ب^2}{٤ا}$)

حيث ا معامل س^٢ ، ب معامل س

حالات خاصة للدالة التربيعية

الحالة الأولى :-

(١) الدالة د (س) = س^٢

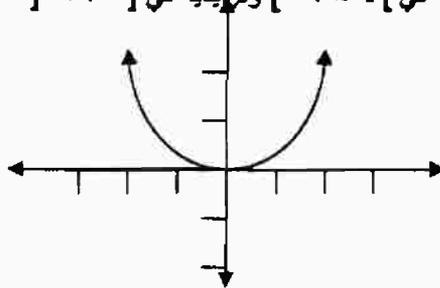
الخصائص

(أ) المنحنى متماثل بالنسبة لمحور الصادات

(ب) راس المنحنى (٠ ، ٠)

(ج) مدى الدالة [٠ ، ∞]

(د) الدالة تناقصية في [-∞ ، ٠] وتزايدية في [٠ ، ∞]



الحالة الثانية:-

٢) الدالة $D = (S) = S^2$

الخصائص

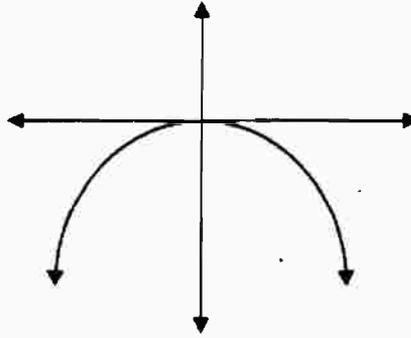
المنحنى متماثل بالنسبة لمحور الصادات

رأس المنحنى (٠، ٠)

ج) مدى الدالة $[-\infty, \infty]$

د) الدالة تزايدية في $[-\infty, ٠]$ وتناقصية في $[٠, \infty]$

هـ) الدالة زوجية



الحالة الثالثة:-

٢) الدالة $D = (S) = S^3$

الخصائص

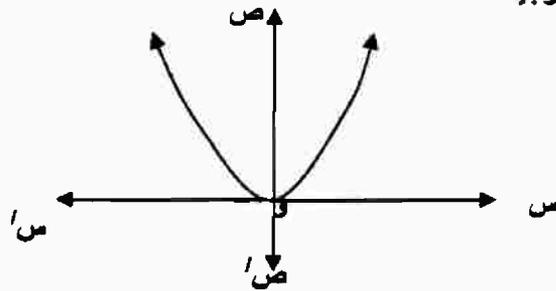
أ) المنحنى متماثل بالنسبة لمحور الصادات

ب) رأس المنحنى (٠، ٠)

ت) المنحنى مفتوح إلى أعلى (إذا كانت $أ < ٠$) وفي هذه الحالة يكون المدى

$[-\infty, \infty]$ وتكون الدالة تناقصية في $[-\infty, ٠]$ وتزايدية في $[٠, \infty]$

- د) المنحنى مفتوح إلى أسفل (إذا كانت $a < 0$) وفي هذه الحالة يكون المدى $]-\infty, 0]$ وتكون الدالة تزايدية في $]-\infty, 0]$ وتناقصية في $[0, \infty[$
- هـ) الدالة زوجية

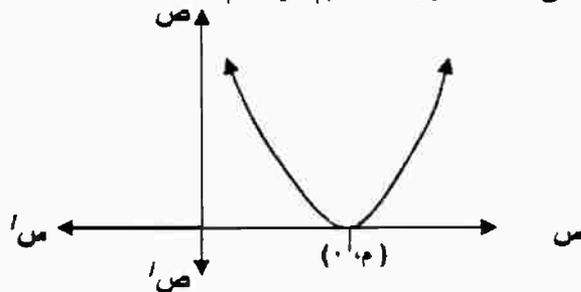


الحالة الرابعة :-

$$٤) \text{ الدالة د (س) = (س - م)}^2 \text{ ، } م < 0$$

الخصائص :-

- (أ) رأس المنحنى $(م ، ٠)$
- (ب) المدى $]-\infty, 0]$
- (ج) الدالة تناقصية في $]-\infty, م]$ وتزايدية في $[م , \infty[$
- (د) الدالة ليست زوجية ولا فردية
- (هـ) يمكن اعتبار أن الشكل البياني لهذه الدالة هو صورة لمنحنى الدالة $ص = س^2$ بإزاحة قدرها م في الاتجاه الموجبة لمحور السينات
- (و) المنحنى متماثل حول المستقيم $س = م$



الحالة الخامسة: -

$$(5) \text{ الدالة } D(s) = (s + m)^2 \quad , m < 0$$

الخصائص: -

(أ) رأس المنحنى $(-m, 0)$

(ب) المدى $[-m, \infty)$

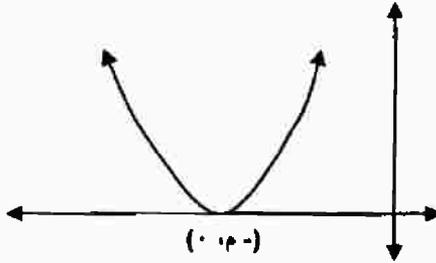
(ج) الدالة تناقصية في $[-m, \infty)$ وتزايدية في $(-\infty, -m]$

(د) الدالة ليست زوجية ولا فردية

(هـ) المنحنى متماثل حول المستقيم $s = -m$

(و) يمكن اعتبار أن الشكل البيتي لهذه الدالة هو صورته لمنحنى الدالة

ص $s = -m$ بإزاحة قدرها m في الاتجاه السالب لمحور السينات



الحالة السادسة: -

$$(6) \text{ الدالة } D(s) = (s - m)^2 \quad , m < 0$$

الخصائص: -

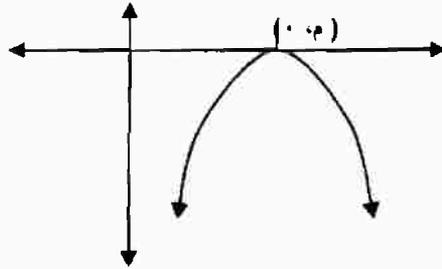
(أ) رأس المنحنى $(m, 0)$

(ب) المدى $[m, \infty)$

(ج) الدالة تزايدية في $[m, \infty)$ وتناقصية في $(-\infty, m]$

(د) الدالة ليست زوجية ولا فردية

(هـ) المنحنى متمائل حول المستقيم $s = m$
 (و) يمكن اعتبار أن الشكل البياني لهذه الدالة هو صورة لمنحنى الدالة
 $v = -s^2$ بإزاحة قدرها m في الاتجاه الموجبة لمحور السينات

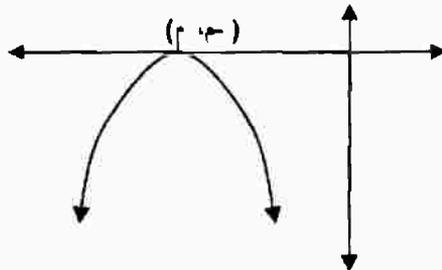


الحالة السابعة:--

(٧) الدالة $d (s) = -(s + m)^2$ ، $m < 0$

الخصائص: -

- (أ) رأس المنحنى $(-m, 0)$
- (ب) المدى $[-\infty, 0]$
- (ج) الدالة تزايدية في $[-\infty, -m]$ وتناقصية في $[-m, \infty]$
- (د) الدالة ليست زوجية ولا فردية
- (هـ) المنحنى متمائل حول المستقيم $s = -m$
- (و) يمكن اعتبار أن الشكل البياني لهذه الدالة هو صورة لمنحنى الدالة
 $v = -s^2$ بإزاحة قدرها m في الاتجاه السالب لمحور السينات



الحالة الثامنة :-

الدالة $d (س) = أ (س - ل) + ٢$ ، $أ \neq ٠$

لها الخواص الآتية :-

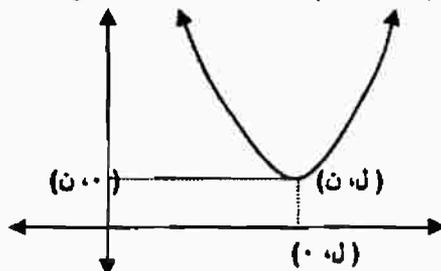
- أ - رأس المنحنى الذى يمثلها $(ل ، ٠)$
- ب - المنحنى متماثل حول المستقيم $س = ل$
- ج - إذا كانت $أ < ٠$ فإن المنحنى يكون مفتوحاً إلى أعلى وتكون الدالة تناقصيه فى $[-\infty ، ل]$ و تزايديه فى $[ل ، \infty]$ ومدى الدالة $[-\infty ، ٠]$
- د - إذا كانت $أ > ٠$ فإن المنحنى يكون مفتوحاً إلى أسفل وتكون الدالة تزايديه فى $[-\infty ، ل]$ وتناقصيه فى $[ل ، \infty]$
- هـ - الدالة ليست زوجيه ولا فرديه إلا إذا كانت $ل = ٠$ فإن الدالة تكون زوجيه

الحالة التاسعة :-

(٩) الدالة $d (س) = أ (س - ل) + ن$ ، $أ \neq ٠$

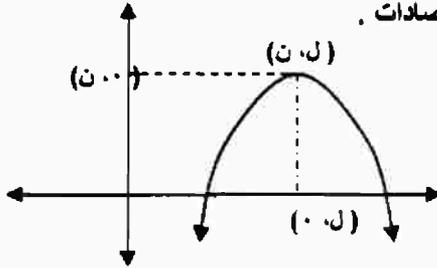
نجد أن خواص الشكل البياني :

- أولاً : إذا كانت $أ < ٠$ ، $ل < ٠$ ، $ن < ٠$
- ١ - رأس المنحنى $(ل ، ن)$
 - ٢ - المدى $[-\infty ، ن]$
 - ٣ - الدالة تناقصيه فى $[-\infty ، ل]$ و تزايديه فى $[ل ، \infty]$
 - ٤ - المنحنى متماثل حول المستقيم $س = ل$
 - ٥ - يمكن اعتبار ان الشكل البياني لهذه الدالة هو صورة لمنحنى الدالة $d (س) = أ (س - ل) + ن$ بزاوية مقدارها $ن$ فى الاتجاه الموجب لمحور الصادات .



ثانياً : إذا كانت $0 < l < n$ ، $0 < n$.

- ١- رأس المنحنى (ل ، ن)
- ٢- المدى [٠ ، ∞ [ل ن
- ٣- الدالة تزايدية في [٠ ، ∞ [ل ، وتناقصيه في] ل ، ∞]
- ٤- المنحنى متماثل حول المستقيم $s = l$
- ٥- الشكل البياني هو صورة لمنحنى الدالة $d (s) = A (s - l)^2 + B$ بإزاحة مقدارها n في الاتجاه الموجب لمحور الصادات .



الحالة العاشرة :-

$$(١٠) \text{ الدالة } d (s) = A s^2 + B s + C , A \neq 0$$

ملاحظات :

(١) يمكن رسم الشكل البياني بإيجاد رأس المنحنى حيث $s = \frac{-B}{2A}$ ثم نكون

جدولاً

لبعض قيم s وقيم $d (s)$ المناظرة على أن يتضمن الجدول نقط تقاطع المنحنى مع

محور السينات حيث ($s = 0$)

(٢) يمكن أيضاً رسم الشكل البياني بطريقة أخرى وذلك بعد أن نجعل $d (s)$ على

الصورة $d (s) = A (s - l)^2 + n$ ، $A \neq 0$. ثم نكون جدولاً كما في (١)

(٣) بعد رسم المنحنى يمكن إيجاد المدى وكذلك بحث الدالة من حيث كونها زوجية أو فردية .

(٤) إذا كان $\Delta = B^2 - 4AC < 0$ فإن المنحنى يقطع محور السينات في نقطتين

أما إذا كان $\Delta = B^2 - 4AC > 0$ فإن المنحنى يمس محور السينات عند رأس المنحنى

وفي الحالة التي فيها $b^2 - 4ac > 0$ فإن المنحنى لا يقطع محور السينات في أي نقطة .

مثال :

ارسم منحنى الدوال الآتية موضحاً على الرسم الأضداد والمدى ونوعها من حيث الزوجية والفردية .

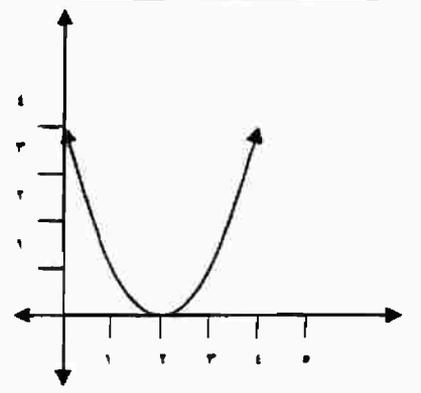
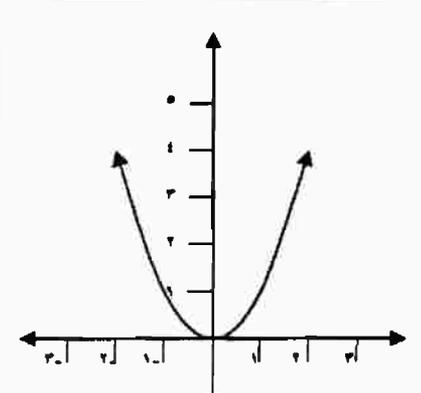
(ب) $d(s) = s^2 - 3$

(أ) $d(s) = s^2$

(ج) $d(s) = s^2 - 3$

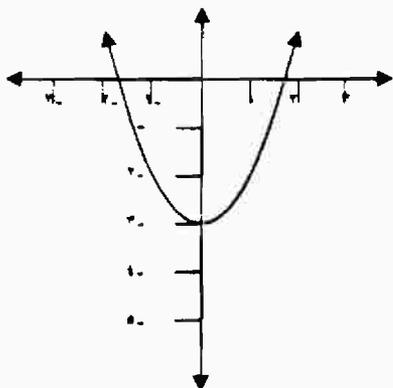
(د) $d(s) = (s - 2)^2$

الحل

<p style="text-align: center;">ج) $d(s) = (s - 2)^2$</p> <table border="1" style="margin: 0 auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;">س</td> <td style="padding: 5px;">٠</td> <td style="padding: 5px;">١</td> <td style="padding: 5px;">٢</td> <td style="padding: 5px;">٣</td> <td style="padding: 5px;">٤</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">ص</td> <td style="padding: 5px;">٤</td> <td style="padding: 5px;">١</td> <td style="padding: 5px;">٠</td> <td style="padding: 5px;">١</td> <td style="padding: 5px;">٤</td> </tr> </table>  <p style="text-align: center;">المدى $]: 0, \infty [$:</p> <p style="text-align: center;">الأضداد : تناقص في $]-\infty, 2 [$</p> <p style="text-align: center;">تزايد في $]2, \infty [$</p> <p style="text-align: center;">ليست زوجية ولا فردية</p>	س	٠	١	٢	٣	٤	ص	٤	١	٠	١	٤	<p style="text-align: center;">د) $d(s) = s^2$</p> <table border="1" style="margin: 0 auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;">س</td> <td style="padding: 5px;">٠</td> <td style="padding: 5px;">١</td> <td style="padding: 5px;">٢</td> <td style="padding: 5px;">٣</td> <td style="padding: 5px;">٤</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">ص</td> <td style="padding: 5px;">٤</td> <td style="padding: 5px;">١</td> <td style="padding: 5px;">٠</td> <td style="padding: 5px;">١</td> <td style="padding: 5px;">٤</td> </tr> </table>  <p style="text-align: center;">المدى $]: 0, \infty [$:</p> <p style="text-align: center;">الأضداد : تناقص في $]-\infty, 0 [$</p> <p style="text-align: center;">تزايد في $]0, \infty [$</p> <p style="text-align: center;">الدالة زوجية</p>	س	٠	١	٢	٣	٤	ص	٤	١	٠	١	٤
س	٠	١	٢	٣	٤																				
ص	٤	١	٠	١	٤																				
س	٠	١	٢	٣	٤																				
ص	٤	١	٠	١	٤																				

$$(د) د (س) = (س - 3)^2$$

س	٢-	١-	٠	١	٢
ص	١	٢-	٣-	٢-	١



المدى $[-3, \infty)$

الأطرار

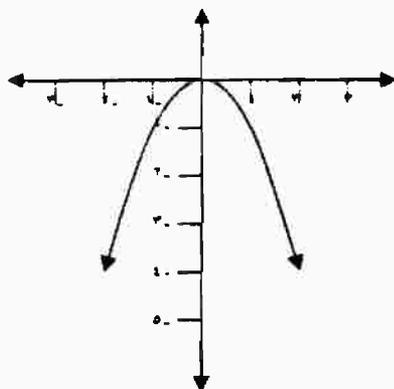
تناقص في $[-3, 0)$

تزايد في $[0, \infty)$

الدالة زوجية

$$(ح) د (س) = -س^2$$

س	٢-	١-	٠	١	٢
ص	٤-	١-	٠	١-	٤-



المدى $[-\infty, 0)$

الأطرار

تزايد في $[-\infty, 0)$

وتناقص في $[0, \infty)$

الدالة زوجية

مثال

اسم الدوال الآتية ومن الرسم اوجد المدى وناقش الأطرار وبوع الدالة

(أ) $د (س) = (س - 2)^2$ س $\in [2, \infty)$

(ب) $د (س) = (س - 5)^2$ س ≤ 5

(ج) $د (س) = (س - 2)^2$ س ≤ 2

الحل

(أ) د (س) = س^٢، س ∈ [٢٠، ٣]

رأس المنحنى = (٠، ٠)

د (٢٠) = ٤ د (٣) = ٩

البداية رأس المنحنى النهاية

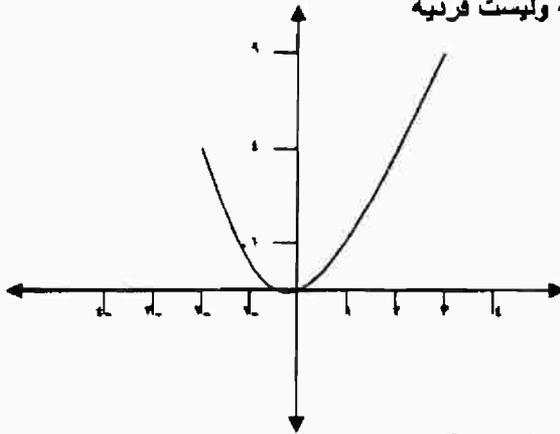
س	٢٠	٠	٣
ص	٤	٠	٩

المدى = [٠، ∞)

وتزايدية في [٣، ٠]

الأطراف: تناقصية في [٠، ٢٠]

ليست زوجية وليست فردية



(ب) د (س) = س^٢ - ٥، س ≤ ٠

رأس المنحنى = (٥، ٠)

د (٢) = ١

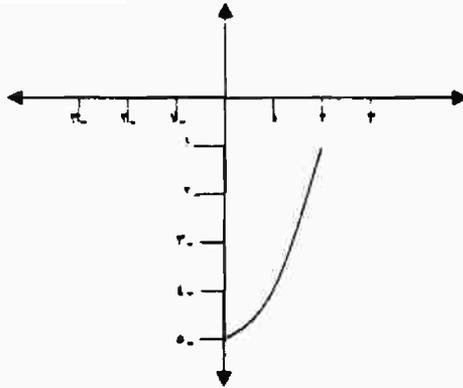
د (١) = ٤ د (٠) = ٥

س	٢٠	١٠	٠
ص	١	٠	٥

المدى =]∞، ٥.]

ليست زوجية وليست فردية

الأطراف: تزايدية في]∞، ٥.]



ج) د (س) = (س - ٢)٢ ، ٠ ≤ س

رأس المنحنى = (٢ ، ٠)

د (٠) = ٤ د (١) = ١ د (٢) = ٠ د (٣) = ١

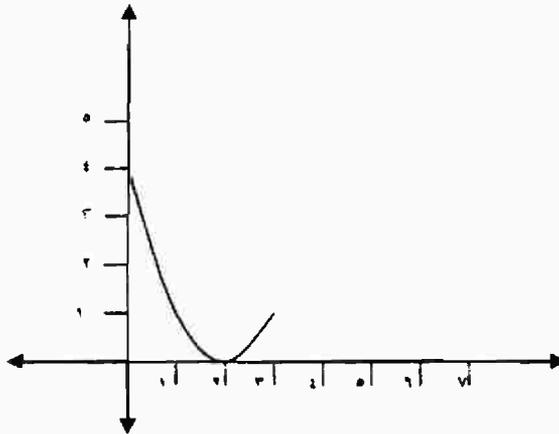
س	٠	١	٢	٣
ص	٤	١	٠	١

المدى =] ٠ ، ∞]

وتزايدية في] ٢ ، ∞]

الأطراف تناقصية في [٠ ، ٢]

ليست زوجية وليست فردية



مثال

وناقش الأضداد ونوع الدالة

ارسم الدوال الآتية ومن الرسم اوجد المدى

$$د (س) = (س) = |س - ١| + ٣$$

$$ب) د (س) = (س) = (س - ٢) - ٢ - اس - ١٢ + ١$$

$$ج) د (س) = (س) = \frac{س^٢ - ٤س + ٣}{١١ - س} \quad س \neq ١$$

الحل

$$د (س) = (س) = |س - ١| + ٣$$

$$١ \leq س \quad \frac{١١}{٤} + (١ - س)$$

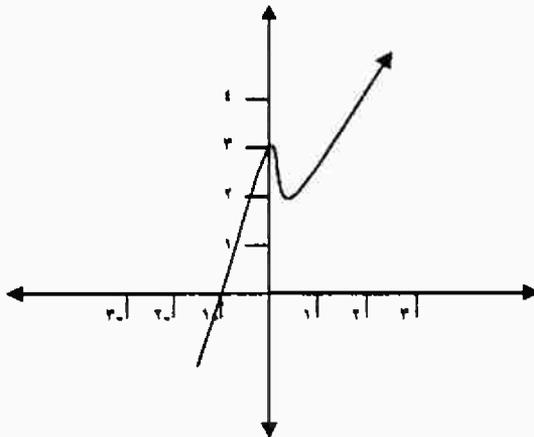
$$١ > س \quad (س - \frac{١}{٤}) - \frac{١٣}{٤}$$

} = د (س)

المدى ح الدالة تزايدية في الفترة [٠ ، ∞] وفي [∞ ، ١/٤]

الدالة تناقصية في الفترة [١/٤ ، ٠]

الدالة ليست زوجية وليست فردية



$$d(s) = (s-2)^2 (s-1) + 1$$

$$\left. \begin{aligned} (s-2)^2 (s-1) + 1 & \leq 0 \quad s \leq 2 \\ (s-2)^2 (s-1) + 1 & > 0 \quad s > 2 \end{aligned} \right\} = d(s)$$

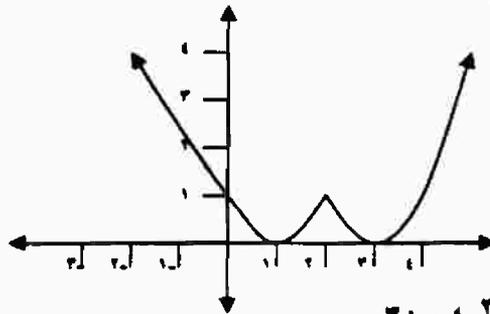
$$\left. \begin{aligned} (s-2)^2 (s-1) + 1 & \leq 0 \quad s \leq 2 \\ (s-2)^2 (s-1) + 1 & > 0 \quad s > 2 \end{aligned} \right\} = d(s)$$

$$d(s) = [0, \infty)$$

الدالة تناصية على الفترة $[-1, \infty)$ وفي $[2, 3]$

الدالة تزايدية على الفترة $[1, 2]$ وفي الفترة $[3, \infty)$

الدالة ليست زوجية ولا فردية



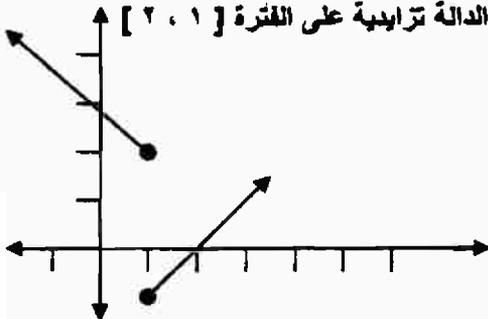
$$g(s) = \frac{s^2 - 4s + 3}{s-1} \quad s \neq 1$$

$$\left. \begin{aligned} s-3 & < 0 \quad s < 1 \\ s-3 & > 0 \quad s > 1 \end{aligned} \right\} = d(s)$$

$$d(s) = [0, \infty)$$

الدالة تناصية على الفترة $[-1, \infty)$ [الدالة تزايدية على الفترة $[1, 2]$]

الدالة ليست زوجية ولا فردية



تمرين (١٦)

(١) ارسم في شكل واحد منحنيات الدوال الآتية وبين مداها واستنتج اطرافها

(أ) $ص = س^١$ (ب) $ص = (س - ١)^٢$ (ج) $ص = (س + ٢)^٢$

(٢) ارسم في شكل واحد منحنيات الدوال الآتية وبين مداها واستنتج اطرافها

(أ) $ص = س^٢$ (ب) $ص = (س - ٢)^٢$ (ج) $ص = (س + ٣)^٢$

(٢) ارسم منحنى الدالة $د(س) = س^٢ + ٦س + ٩$

وبين رأس المنحنى ، والمدى ، اطراف الدالة ثم بين كيف يمكن الحصول على منحنى

$د(س) = س^٢$

(٤) ارسم منحنى الدالة $د(س) = س^٢ - ٤س + ٣$ واوجد نقط تقاطعة مع

محورى اثم بين المدى والأطراف ومعادلة خط تماثل المنحنى

(٥) مثل بيانياً $د(س) = س^٢ - ٣س$ عندما $س \in [-٣ ، ٢]$ وبين مداها وابحث

اطرافها

(٦) ارسم منحنى الدالة واستنتج مداها

$$\left. \begin{array}{l} ٤ - س^١ \geq ٢ \\ ٢ < س - ٤ \end{array} \right\} = د(س)$$

(٧) ارسم الدالة وبين مداها

$ص = |س|$

(٨) ارسم منحنى الدالة $ص = س - اس - ١٢$

(٩) ارسم منحنى الدالة $ص = (س + ١)|س| + ٢$

(١٠) ارسم منحنى الدالة

$$\left. \begin{array}{l} (س - ١)^٢ + ٢ \text{ عندما } س \leq ٠ \\ ٣ - س^١ \text{ عندما } س > ٠ \end{array} \right\} = ص$$

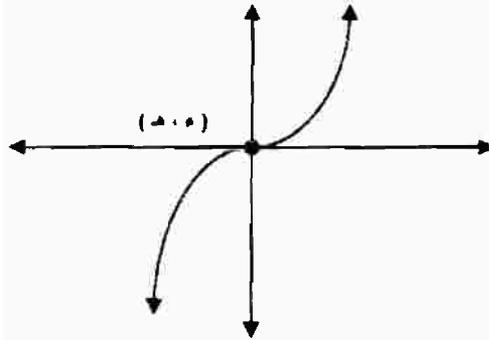
الدالة التكعيبيّة

قاعدة الدالة $d = (س) = ك(س - ع) + هـ$ حيث $ك \neq ٠$

تسمى $(هـ, ع)$ نقطة تماثل للمنحنى

الشكل البياني للدالة:

(١) إذا كانت $ك < ٠$ (موجب)



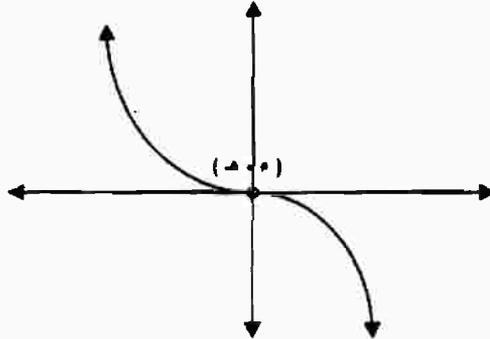
(٢) إذا كانت $ك > ٠$ (سالب)

الخواص

المجال $س \in \mathbb{R}$ والمدى $ص \in \mathbb{R}$

الأطراف: تزايد $ك < ٠$ و متناقصة من $ك > ٠$

النوع: تكون فردية عندما $(هـ, ع) = (٠, ٠)$ فقط



مثال

ارسم الدوال الآتية ثم اكتب المجال والمدى والأطراف ونوع الدالة من حيث كونها زوجية او فردية

$$(1) \quad د(س) = س^2$$

$$(2) \quad د(س) = س^2 - 2$$

$$(3) \quad د(س) = س^2 + 2$$

$$(4) \quad د(س) = -س^2 + 2$$

$$(5) \quad د(س) = (س - 2)^2$$

$$(6) \quad د(س) = -(س + 2)^2$$

$$(7) \quad د(س) = -(س - 1)^2 + 2$$

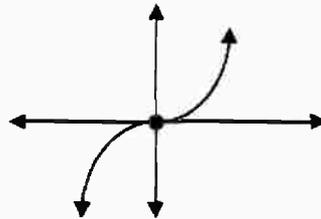
$$(8) \quad د(س) = (س - 2)^2 + 3$$

الحل

$$(1) \quad د(س) = س^2 \quad د(س) = (س - 0)^2 + 0$$

نقطة التماثل (0, 0) صاعد

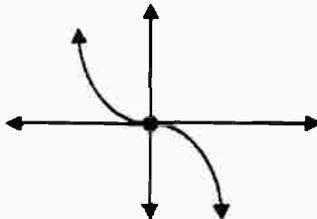
المجال $س \in \mathbb{R}$ المدى $ص \in \mathbb{R}^+$ النوع فردية الاطراف متزايد



$$(2) \quad د(س) = س^2 - 2$$

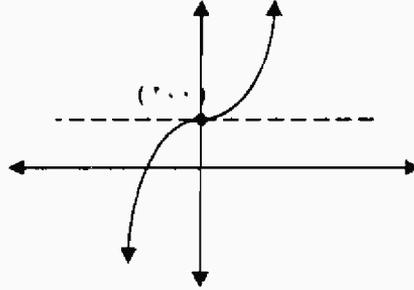
نقطة التماثل (0, 0) هابط

المجال $س \in \mathbb{R}$ المدى $ص \in \mathbb{R}$ النوع فردية الاطراف متناقصة



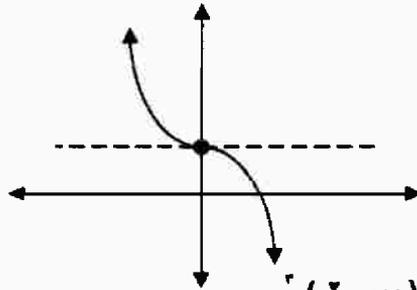
٣) د (س) = $\sqrt{2+s}$
 نقطة التماثل (٢, ٠) صاعد

المجال س ≥ 2 ح المدى ص ≥ 0 ح النوع ليست فردية ولا زوجية الاطراد متزايد



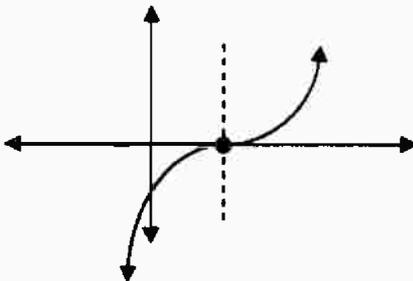
٤) د (س) = $-\sqrt{2+s}$
 نقطة التماثل (٢, ٠) هابط

المجال س ≥ 2 ح المدى ص ≤ 0 ح النوع ليست فردية ولا زوجية الاطراد متناقصة



٥) د (س) = $\sqrt{2-s}$
 نقطة التماثل (٠, ٢) صاعد

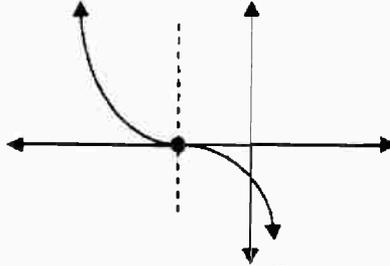
المجال س ≤ 2 ح المدى ص ≥ 0 ح النوع ليست فردية ولا زوجية



$$(6) \quad d(s) = -(s+2)^2$$

نقطة التماثل $(-2, 0)$ هابط

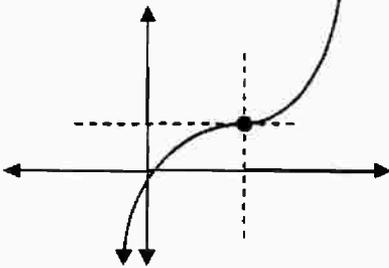
المجال $s \in \mathbb{R}$ المدى $v \in \mathbb{R}$ النوع ليست فردية ولا زوجية الاطراد متناقصة



$$(7) \quad d(s) = (s-1)^2 + 2$$

نقطة التماثل $(1, 2)$ صاعد

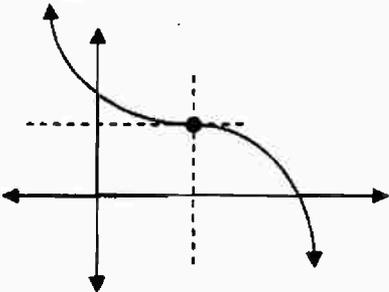
المجال $s \in \mathbb{R}$ المدى $v \in \mathbb{R}$ النوع ليست فردية ولا زوجية الاطراد متزايد



$$(8) \quad d(s) = -(s-2)^2 + 3$$

نقطة التماثل $(2, 3)$ هابط

المجال $s \in \mathbb{R}$ المدى $v \in \mathbb{R}$ النوع ليست فردية ولا زوجية الاطراد متزايد



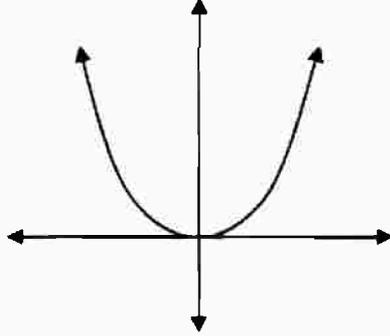
الدالة التكعيبية مع المقياس

القاعدة د (س) = ك اس - ٤ اس^٢ + هـ

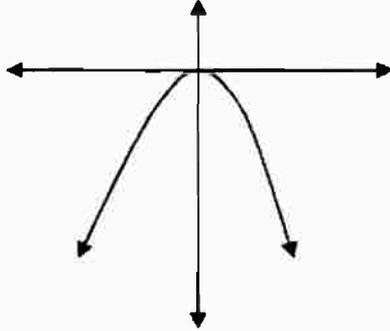
في هذه الحالة (٤ ، هـ) تعتبر راسي للمنحنى

وتعطي شكل الدالة الربيعية تماماً

اى ك < ٠ يكون الشكل



ك > ٠ يكون الشكل



مثال

ك ارسم الدوال الآتية ثم اكتب المدى والأطراف ونوع الدالة من حيث كونها زوجية او

فردية

(١) د (س) = اس^٣

(٢) د (س) = ١ - اس^٣

(٣) د (س) = اس^٣ + ٢

$$(4) \text{ د (س) = اس} - 11 + 2$$

$$(5) \text{ د (س) = } \frac{\text{س}^3 - 4}{\text{اس}}$$

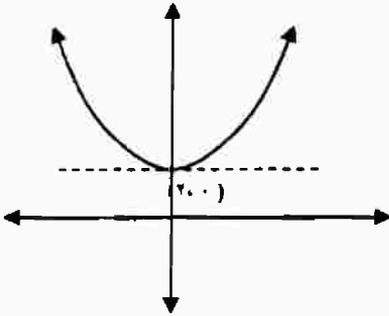
الحل

$$\text{د (س) = اس}^2 + 1$$

الرأس (2, 0) المدى ص [3, ∞) ، 2]

الأطراف س < 0 متزايدة

س > 0 متناقصة



$$\text{د (س) = اس} - 1 + 1$$

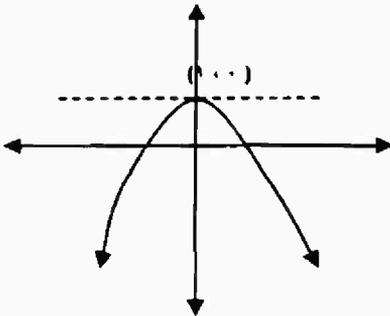
الرأس (1, 0) هابط

الأطراف

س < 0 متناقصة

س > 0 متزايدة

النوع رفض المدى ص [3, ∞) ، 2]



مثال

أرسم الدوال الآتية وعين المجال والمدى وناقش الاطراد ونوع الداله.

$$\begin{aligned}
 & 1 \quad \left. \begin{array}{l} \bullet \text{ س}^3 \text{ عندما س} \leq 0 \\ \bullet \text{ س}^3 \text{ عندما س} > 0 \end{array} \right\} \text{د (س)} = \\
 & -2 \quad \left. \begin{array}{l} \bullet \text{ س}^2 + 2 \text{ عندما س} \leq 0 \\ \bullet \text{ س}^2 + 2 \text{ عندما س} > 0 \end{array} \right\} \text{د- (س)} = \\
 & -3 \quad \text{د (س)} = (2 - \text{س})^2 + 3, \text{ س} \neq 2
 \end{aligned}$$

الحل

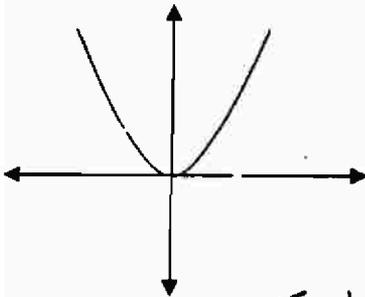
$$\begin{aligned}
 & 1 \quad \left. \begin{array}{l} \bullet \text{ س}^3 \text{ عندما س} \leq 0 \\ \bullet \text{ س}^3 \text{ عندما س} > 0 \end{array} \right\} \text{د (س)} =
 \end{aligned}$$

المجال = ح ، المدى = $[-\infty, 0]$

الاطراد: متزايدة في $[-\infty, 0]$

متناقصة في $[0, \infty]$

النوع : زوجيه من التماثل حول محور الصادات



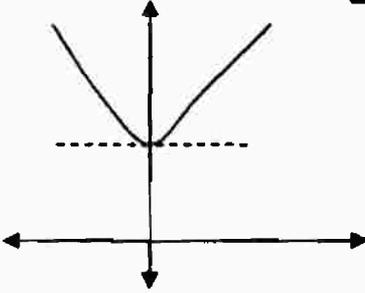
$$\begin{aligned}
 & -2 \quad \left. \begin{array}{l} \bullet \text{ س}^2 + 2 \text{ عندما س} \leq 0 \\ \bullet \text{ س}^2 + 2 \text{ عندما س} > 0 \end{array} \right\} \text{د (س)} =
 \end{aligned}$$

المدى $[-2, \infty[$

الاطراد : متناقصه في $[-2, 0[$

ومتزايدة في $]0, \infty[$

النوع : زوجية من التماثل حول محور الصادات



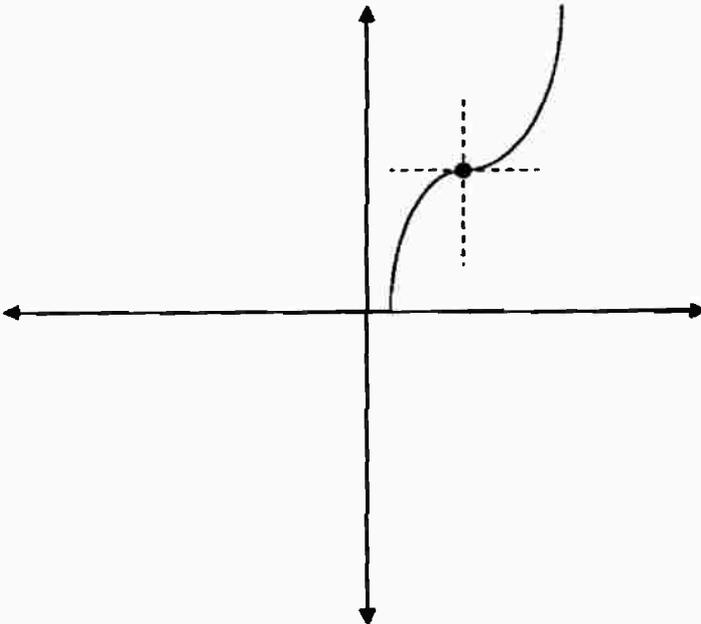
$$3 - (س) = (س - 2)^2 + 3, س \neq 2$$

نقطة التماثل $(2, 2)$

المجال = ح - $\{2\}$ ، المدى = ح - $\{3\}$

الاطراد : متزايدة على مجالها

النوع : ليست زوجية وليست فردية



تمرین (۱۷)

ارسم الدوال الآتیه واستنتج المدى وناقش الاطراد ونوع الداله

$$(۱) \text{ ص } = (س + ۲)^۲$$

$$(۲) \text{ ص } = ۲ - (س + ۱)^۲$$

$$(۳) \text{ ص } = اس^۲$$

$$(۴) \text{ ص } = ۲ - اس^۲$$

$$(۵) \text{ ص } = ۲ - اس(۱ - اس)$$

$$(۶) \text{ ص } = ۲ - (س - ۱)^۲$$

$$\text{ص} = \frac{س^۳ - ۴س}{اس}$$

$$\left. \begin{array}{l} ۰ < س < ۴ \\ ۰ < ۴ - س < ۲ \end{array} \right\} \begin{array}{l} (۸) \\ د(س) = \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} اس^۲ - ۱ \geq ۱ \\ (س - ۱)^۲ \geq ۱ \end{array} \right\} \begin{array}{l} (۹) \\ د(س) = \end{array}$$

$$(۱۰) د(س) = اس^۲ - ۱ - ۴$$

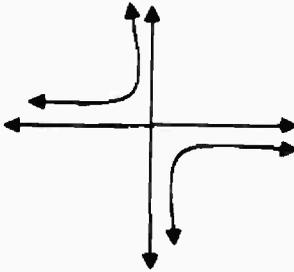
الدالة الكسرية

قاعدة الدالة:- د(س) = $\frac{ك}{س-ه}$ حيث ك \neq صفر

وتسمى (د ، ه) نقطة تماثل للمنحنى

الشكل البياني للدالة

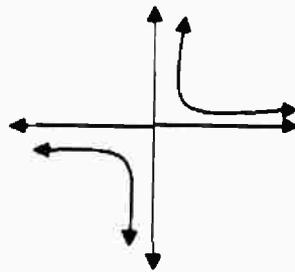
ك > ٠ (-)



الخواص:

- المجال س \in ح - {د}
- المدى س \in ح - {ه}
- الاطراد متزايدة في كل من
- الفترتين] ٠ ، ∞ - [
-]- ∞ ، ٠ [

ك < ٠ (+)



الخواص:

- المجال س \in ح - {د}
- المدى س \in ح - {ه}
- الاطراد متناقصة في كل من
- الفترتين] ٠ ، ∞ - [
-]- ∞ ، ٠ [

النوع : فريدة فقط عندما (د ، ه) = (٠ ، ٠)

أشكال الدالة الكسرية

(النوع الأول)

١) الحالة الأولى :-

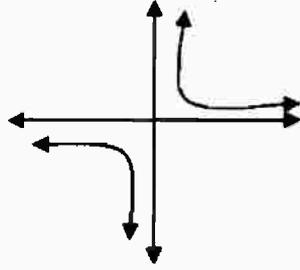
مثال :-

أرسم الدالة د(س) = $\frac{1}{س}$ ثم عين المجال والمدى والاطراد ونوع الدالة

$$\therefore \text{د(س)} = \frac{1}{\text{س}}, \text{ ل} = 1$$

∴ الدالة تقع في الربع الأول والثالث

نقطة التماثل (٠ ، ٠) المجال = ح - { ٠ } المدى = ح - { ٠ }
الدالة فردية ومتناقصة في $[-\infty, 0) \cup (0, \infty]$



(٢) الحالة الثانية :-

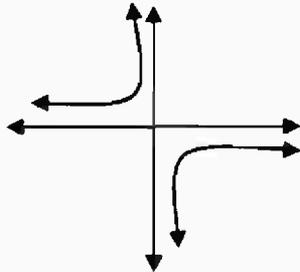
مثال :-

$$\text{أرسم الدالة د(س)} = \frac{2-}{\text{س}}$$

$$\text{ل} = 2-$$

∴ الدالة تقع في الربع الثاني والرابع

نقطة التماثل (٠ ، ٠) المجال = ح - { ٠ } المدى = ح - { ٠ }
وهي دالة متزايدة في $[-\infty, 0) \cup (0, \infty]$ النوع : فردية



٣ الحالة الثالثة:-

مثال :-

$$\frac{3}{1+s} = \text{رسم الدالة } f(s)$$

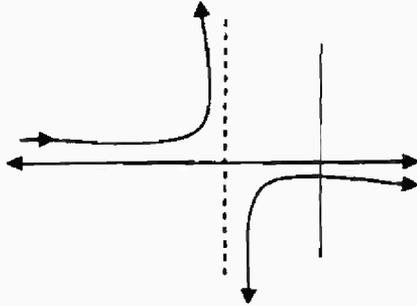
$$k = 3$$

∴ الدالة تقع في الربع الأول والثالث

نقطة التماثل (٠ ، ١) - المجال = ح - {١} المدى = ح - {١}

الأطراف: متناقصة في $[-\infty, 1)$ و $(1, \infty]$

النوع: ليست فردية ولا زوجية لأنها متماثلة حول النقطة (٠ ، ١)



٤ الحالة الرابعة:-

مثال

$$\frac{3}{1+s} = \text{رسم الدالة } f(s)$$

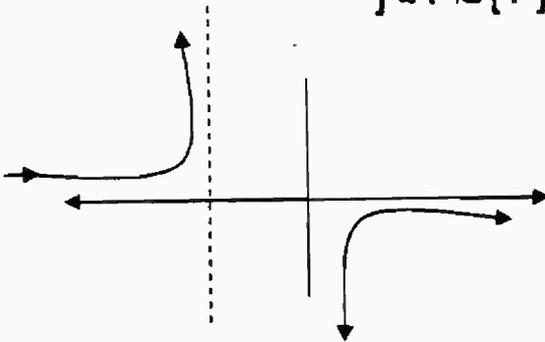
$$k = 3$$

∴ الدالة تقع في الربع الثاني والرابع

نقطة التماثل (٠ ، ١) - المجال = ح - {١} المدى = ح - {٠}

الأطراف: متزايدة في $[-\infty, 1)$ و $(1, \infty]$

النوع: ليست فردية ولا زوجية



٥) الحالة الخامسة :

مثال

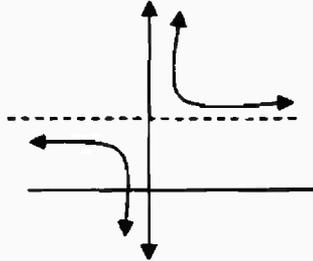
$$\text{أرسم الدالة د(س) = } 3 + \frac{2}{\text{س}}$$

$$\text{ك = ٢}$$

∴ الدالة تقع في الربع الأول والرابع

نقطة التماثل (٣ ، ٠) المجال = ح - { ٠ } المدى = ح - { ٣ }

الأطراف: تناقصية في [٠ ، ∞) ، [٠ ، ∞] النوع: ليست فردية ولا زوجية



٦) الحالة السادسة :-

مثال

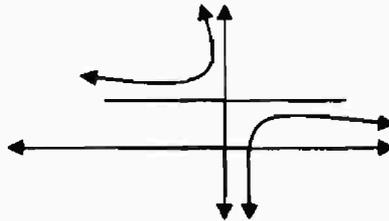
$$\text{أرسم الدالة د(س) = } 1 + \frac{2}{\text{س}}$$

$$\text{ك = -٢}$$

∴ الدالة تقع في الربع الثاني والرابع

نقطة التماثل (١ ، ٠) المجال = ح - { ٠ } المدى = ح - { ١ }

الأطراف: متزايدة في [٠ ، ∞) ، [٠ ، ∞] النوع: ليست فردية ولا زوجية



٧ الحالة السابعة :-

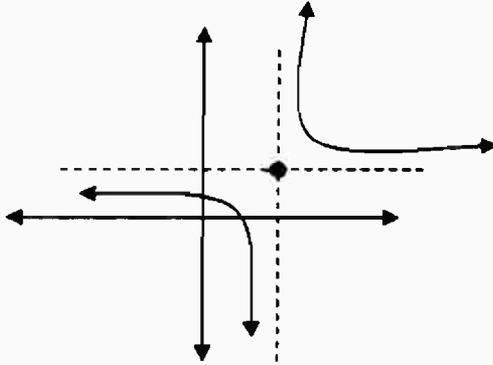
مثال

$$1 + \frac{3}{2-s} = (s) \text{ أرسم الدالة د(س)}$$

$$3 = ك$$

∴ الدالة تقع في الربع الأول والثالث

نقطة التماثل (١ ، ٢) المجال = ح - { ٢ } المدى = ح - { ١ }
 الأضداد : تناقصية في [٠ ، ٢] ، ∞ ، ٢ ، ∞ النوع: ليست فردية ولا زوجية



٨ الحالة الثامنة :-

مثال

$$\frac{1+s^3}{1-s} = (s) \text{ أرسم الدالة د(س)}$$

$$3 + \frac{4}{1-s} = (s) \text{ ∴ د(س)}$$

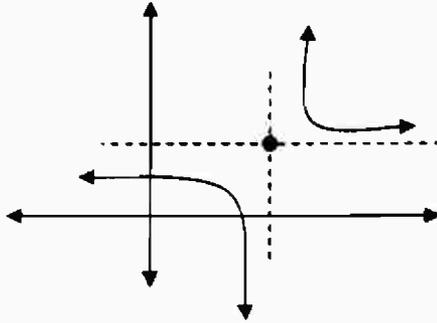
$$\frac{1-s}{1-s} \cdot \frac{1+s^3}{1-s} = \frac{1+s^3}{1-s}$$

$$هـ ، ٣$$

$$ك \quad ٤$$

نقطة التماثل (١ ، ٣)

الدالة تقع في الربع الأول والثالث



ملاحظة :

لاحظ في الحالة رقم (٨)

كل من البسط ، والمقام دالة خطية

(النوع الثاني)

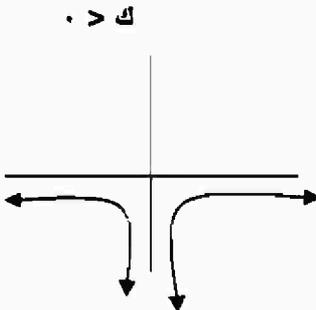
هو دالة مقياس مع دالة كسرية

من أشكال الدالة الكسرية

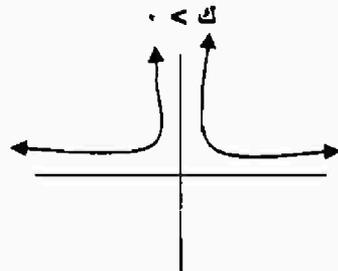
$$\text{القاعدة : } د (س) = \frac{ك}{|س - ه|} + ه$$

وتسمى (د ، ه) نقطة البداية

الشكل البياني :-



الربع الثالث والرابع

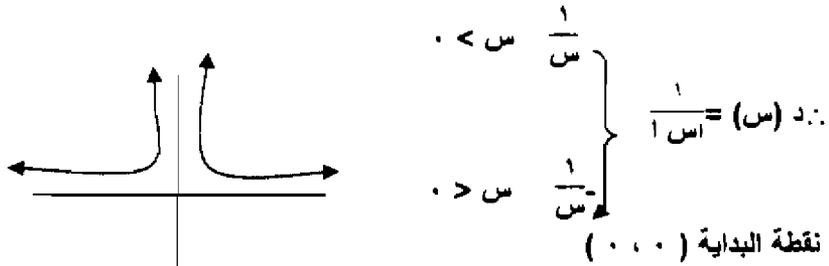


الربع الأول والثاني

١) الحالة الأولى:-

مثال

أرسم الدالة د (س) = $\frac{1}{س}$



الدالة تقع في الربع الأول والثاني المجال س ∈ ح - {٠}

النوع : زوجية المدى س ∈]٠, ∞ [

الأطراف : س < ٠ متناقصة وعند س > ٠ متزايدة

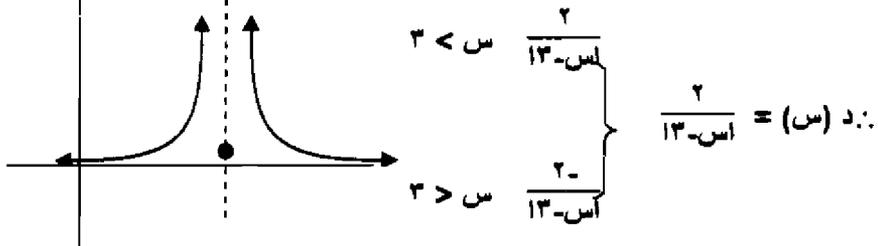
ملاحظة

الدوال الآتية لها نفس الشكل البياني للدالة ص = $\frac{1}{س}$

$$د(س) = \frac{1}{س} \quad د(س) = \frac{٢}{س} \quad د(س) = \frac{١٣}{س}$$

٢) الحالة الثانية :-

مثال ارسم الدالة د(س) = $\frac{٢}{س-١٣}$



نقطة البداية (٠ ، ٣)

الدالة تقع في الربع الأول و الثاني

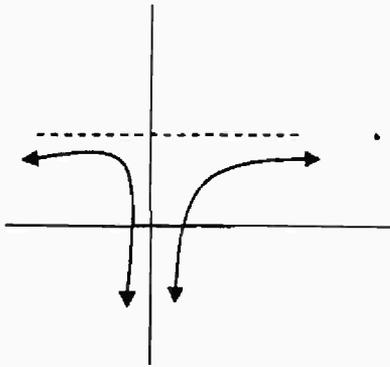
المجال ح - { ٢ } المدى ص [٣ ، ٠]

النوع : ليست زوجية ولا فردية

الاطراد : ص < ٣ متناقصة وعند ص > ٣ متزايدة

٣ الحالة الثالثة :-

مثال



أرسم الدالة د (س) = $٢ + \frac{٣-}{١س}$

$٠ < س < ٢ + \frac{٣-}{١س}$
 $٠ > س > ٢ + \frac{٣-}{١س}$

∴ د (س) = $\frac{٣-}{١س}$

ك = ٣- (الثالث و الرابع)

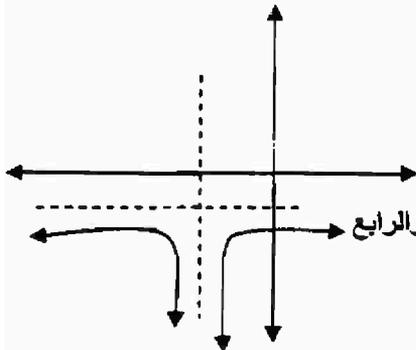
نقطة البداية (٢ ، ١)

الدالة تقع في الربع الثالث والرابع المدى ص [٣ ، ∞ -]

النوع : زوجية الأطراد : ص < ٠ متزايدة وعند ص > ٠ متناقصة

٤ الحالة الرابعة :-

مثال



أرسم الدالة د (س) = $٢ - \frac{٤-}{١س+١}$

ك = ٤- الدالة تقع في الربع الثالث والرابع

نقطة البداية (٢- ، ١-)

٥ الحالة الخامسة :-

مثال

$$1 + \frac{(2-s)^2}{2-s} = (s) \text{ ارسم الدالة د(س)}$$

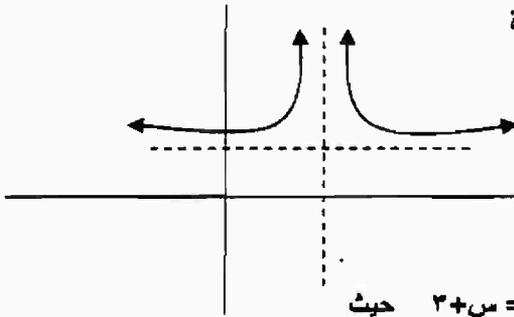
$$1 + \frac{1}{2-s} = 1 + \frac{(2-s)^2}{2-s} = (s) \text{ د(س)}$$

ك = ١ نقطة البداية (٢ ، ١)

الدالة تقع في الربع الأول والثاني المدى ص [٣ ، ١ ، ∞]

الأطراف عند س < ٢ متناقصة

عند س > ٢ متزايدة



مثال

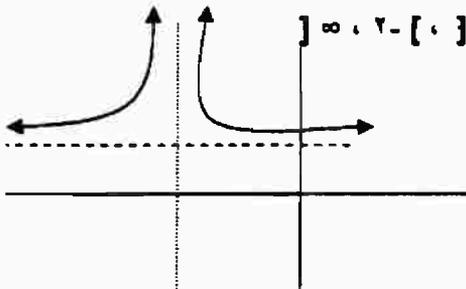
$$\text{ارسم منحنى الدالة د(س) = } \frac{3+s}{2+s} \text{ حيث}$$

س ≠ ٢ ثم عين مجال ومدى هذه الدالة وأبحث أطرافها

الحل

$$1 + \frac{1}{2+s} = \frac{1}{2+s} + \frac{2+s}{2+s} = (s) \text{ د(س)}$$

وهي دالة تناقصية في كل من [٢- ، ∞] ، [٠ ، ٢-) ∞]



تمرین (۱۸)

أرسم الدوال الآتیه وأستنتج المدى والأطراد

$$(۱) د(س) = \frac{۴+س^۲}{۳-س}$$

$$(۲) د(س) = \frac{۱+س^۲}{۳-س}$$

$$(۳) د(س) = \frac{۲(۱-س)}{۱۳(۱-س)}$$

$$(۴) د(س) = \frac{۴+س}{۱۱۶-۲س} \quad س \neq \pm ۴$$

$$(۵) د(س) = \frac{۱}{۱۳-اس}$$

$$(۶) د(س) = \frac{۱}{۱۱+اس}$$

$$(۷) د(س) = \frac{۱-}{۱۲-اس}$$

$$(۸) د(س) = ۱ + \frac{۱}{۱۳-اس}$$

$$(۹) د(س) = ۱ + \frac{۲س}{۱۳اس}$$

$$(۱۰) د(س) = \frac{۱۲}{۲+اس}$$