(٢) : الأسس واللوغاريتمات

- قوانين الاسس الصحيحة
- الأسس الكسرية
- الدالـــــة الاسية
- اللوغاريتمات والدالة اللوغاريتمية
- قوانين اللوغاريتمات
- استخدام حاسبة الجيب

الأســـس

النوع الأول من المسائل:-

قوانين الأسس الصحيحة

قوانين الأسس :-

١- إذا كان أ ∋ ح ، م، ن∋ ص$^{+}$ ، أ≠ صفر فإن:-

$أ^{م} \times أ^{ن} = أ^{م+ن}$ ويسمى قانون الضرب

∴ إذا ضربت كميات متساوية إلي أسس فلإيجاد حاصل الضرب نجمع الأسس

مثلاً: $٢^{٣} \times ٢^{٣} = ٢^{٣+٣} = ٢^{٦}$

$$(١,٠٤)^{\frac{١}{٣}} \times (١,٠٤)^{\frac{١}{٣}} = (١,٠٤)^{\frac{١}{٣}+\frac{١}{٣}} = (١,٠٤)^{\frac{٢}{٣}}$$

نتيجة

$$١^{ن} = ١$$

∴ الواحد الصحيح إذا رفع لأي أس يكون الناتج واحدا صحيحاً

مثلاً : $١^{٥} = ١ \times ١ \times ١ \times ١ \times ١ = ١$

٢- إذا كان أ∋ ح ، م ، ن ∋ ص فإن :

$$\frac{أ^{م}}{أ^{ن}} = أ^{م-ن} \text{ ، أ≠ صفر}$$

∴ إذا قسمت كميات متساوية مرفوعة إلي أسس فالإيجاد حاصل خارج القسمة نطرح الأسس

مثلا $\frac{س^{٥}}{س^{٤}} = س^{٥-٤} = س$

نتيجة :-

$$أ^{٠} = ١$$

∴ (أي كمية) $^{صفر} = ١$ مثلا $(٣٤٠)^{٠} = ١$

نتيجة :-

$$أ^{-ن} = \frac{١}{أ^{ن}}$$

∴ العدد المرفوع لأس سالب يمكن أن ينقل من البسط إلى المقام مع تغيير إشارة أسه
(والعكس صحيح أيضا)

مثلا $٥^{-٢} = \frac{١}{٥^{٢}}$ ، $ب^{-٨} = \frac{١}{ب^{٨}}$ ، $٣^{-١} = \frac{١}{٣}$

٣-إذا كان أ ، ب ∋ ح ، ن ∋ ص فان :-

$(أ ب)^{ن} = أ^{ن} \times ب^{ن}$

$(\frac{أ}{ب})^{ن} = \frac{أ^{ن}}{ب^{ن}}$

وتسمى قوانين ضرب أو قسمة كميات متحدة الأس

مثلا : $(٢ \times ٥)^{٣} = ٢^{٣} \times ٥^{٣}$ ، $(\frac{٢}{٥})^{٣} = \frac{٢^{٣}}{٥^{٣}}$

ملاحظة :-

- قاعدة توزيع الاسس على الحدود داخل القوس لا تستخدم الا في حالتي الضرب والقسمة .
- اما اذا كانت الحدود يفصلها علامة (+ أو-) فلا يوزع الأس على الحدود داخل القوس

مثلاً : $(٤+٣)^{٤} = ٧^{٤} = ٢٤٠١$

٤- اذا كان م، ن> صفر ،أ∋ح فإن :

$(أ^{م})^{ن} = أ^{م ن}$

∴ لرفع أس أي مقدار إلى قوة أعلي نضرب الأسان في بعضهما

مثلا : $(٢^{-٣})^{٤} = ٢^{-١٢} = \frac{١}{٢^{١٢}}$ ، $(٣^{٢})^{٤} = ٣^{٨}$ ،

$(-٣^{-٣})^{٢} = (-٣)^{-٦} = (-٣)^{-٣ \times ٢} = \frac{١}{(-٣)^{٦}} = \frac{١}{٣^{٦}}$

٥- $(\frac{أ}{ب})^{-ن} = (\frac{ب}{أ})^{ن}$

طريقة حل مسائل الأسس :-

١) تحليل الاساسات إلى عوامل أولية
٢) توزيع الأسس
٣) اختصار كل من لبسط والمقام كل على حدة
٤) اختصار البسط مع المقام

مثال :

اختصر $\frac{٨ب^{-١} \times ٦ب^{-٧} \times ٩ب^{-٢}}{٢ب^{-٥} \times ٨ب^{-٣}}$

الحـــــــل

١- تحليل الأساسات إلى عوامل أولية

$$\frac{(٢^{٣})ب^{-١} \times (٢ \times ٣)ب^{-٧} \times (٣^{٢})ب^{-٢}}{(٢)ب^{-٥} \times (٣)ب^{-٣}}$$

٢- توزيع الأسس

$$\frac{٢^{٣}ب^{-١٢} \times ٢^{-٧}ب^{-٧} \times ٣^{-٧}ب^{-٢} \times ٣^{-٢}ب^{-٤}}{٢^{-٥}ب^{-١٠} \times ٣ب^{-٣}}$$

٣- اختصار كل من البسط والمقام على حدة

$$\frac{٢^{-٤}ب^{-٢٩} \times ٣ب^{-٣}}{٢^{-٥}ب^{-١٠} \times ٣ب^{-٣}}$$

٤- اختصار البسط مع المقام

$$= ٢^{-٤-(-٥)}ب^{-٢٩-(-١٠)} \times ٣ب^{-٣-(-٣)}$$

$$= ٢^{١} \times ٣^{٠} = ٣٢$$

مثال :

أثبت أن: $\frac{٣ص \times (٣^{٤})ص^{+١}}{(١٤٣)ص} = ٨١$

الحـــــــل

الطرف الأيمن: $= \frac{٣ص \times (٣^{٤})ص^{+١}}{(٣^{٥})ص} = \frac{٣ص \times ٣^{٤ص+٤}}{٣^{٥ص}}$

$$= ٣^{ص+٤-٥ص} = ٣^{٤}$$

= ٨١ الطرف الأيسر

مثال :

اختصر: $\frac{١٢٥ص^{-٤} \times ١٥^{-٦}ص \times ٩ص^{-١}}{٢٥ص^{-٣} \times ٣ص^{+٣}}$

الحـــــــل

$$\frac{(٥^{٣})ص^{-٤} \times (٣ \times ٥)^{-٦}ص \times (٣^{٢})ص^{-١}}{(٥^{٢})ص^{-٣} \times ٣ص^{+٣}}$$

$$\frac{٥^{٢م-١٢} \times ٣^{٦-م} \times ٥^{٦-م} \times ٣^{٢م-٢}}{٥^{٢م-٦} \times ٣^{م-٣}}$$

$$= ٥^{٢م-١٢} \times ٥^{٦-م} \times ٥^{-(٢م-٦)} \times ٣^{٦-م} \times ٣^{٢-م} \times ٣^{-(م-٣)}$$

$$= ٥^{٢م-١٢+٦-م-٢م+٦} \times ٣^{٦-م-٢م+٢-م+٣}$$

$$= ٥^{صفر} \times ٣ = ١ \times ٣ = ٣$$

مثال :

اختصر: $\frac{٢^{ن+١} \times ٥^{ن+م} \times ٦^{م} \times ٣^{ن-م}}{٦^{ن} \times ١٠^{م+٢} \times ١٥^{ن}}$

الحـــــل

$$= \frac{٢^{ن+١} \times ٥^{م+ن} \times (٣\times٢)^{م} \times ٢^{ن-م}}{(٣\times٢)^{ن} \times (٥\times٢)^{م+٢} \times (٥\times٣)^{ن}}$$

$$= \frac{٢^{ن+١} \times ٥^{ن+م} \times ٢^{م} \times ٣^{م} \times ٣^{ن-م}}{٢^{ن} \times ٣^{ن} \times ٢^{م+٢} \times ٥^{م+٢} \times ٣^{ن} \times ٥^{ن}}$$

$$= ٢^{ن+١+م-ن-م-٢} \times ٥^{ن+م-م-٢-ن} \times ٣^{م+ن-م-ن}$$

$$= ٢^{-١٠} \times ٥^{-٢} \times ٣^{٠} = \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢٥} \times ١ = \frac{١}{٢٥\times٢} = \frac{١}{٥٠}$$

تمرين (١٩)

اختصر:-

١- $\frac{٨^{ن-٤} \times ٦^{ن-٧} \times ٩^{ن-٢}}{٢^{٢ن-١٠٠٠} \times ٣^{ن+٣}}$

٢- $\frac{٨^{ن} \times ٢٨^{م-٣}}{١٤^{١-م} \times ٤٩^{١-٢م}}$

٣- $\frac{(٥)^{٢ن} \times (٣)^{ن+١}}{(٩\times٥)^{٢ن} \times (\frac{١}{٩})^{ن}}$

٤- $\dfrac{(٢٧)س^{-\frac{٢}{٣}} \times (٤٨)س^{٠,٥}}{(٢١٦)س^{-١} \times (١٢)س^{٠,٠٥} \times (٧٢)س^{٠,٥}}$

٥- $\dfrac{٢ن^{ن+١} \times ٥ن^{٣ن} \times ٦^{٥ن} \times ٣^{ن-٥}}{٦ن \times ١٠^{٥ن} \times ١٥^{ن}}$

٦- $\dfrac{١٢٥س^{-١} \times ١٥س^{٠,٥} \times ٩س^{١}}{٢٥س^{-٢} \times ٣س^{٠,٥}}$

٧- $\dfrac{٣س^{٣} \times (٢٤٣)س^{٠,٥}}{(٧٢٩)س}$

٨- $\dfrac{(٢م^{٢}ن^{١})^{٤} \times (٥أ^{٢}ب^{-٧})^{٠,٢}}{(٤أ^{-٣}ب)^{٠,٢}}$

٩- $\dfrac{٢^{١-٢ن} \times ٤٣٢ن \times ٣^{-ن}}{٣ن^{-٤} \times ١٢ن^{-١}}$

١٠- $\dfrac{(ب^{\frac{١}{٢}})^{٢} \times (أ^{\frac{١}{٢}})^{٤ن} \times ج^{٢ن-١} \times \sqrt{ج^{ن}}}{ب^{ن} \times ج^{ن} \times \sqrt{ب^{٣}}}$

النوع الثاني من المسائل :

المعادلات الآسية البسيطة

المعادلة الأسية هي معادلة لا تحتوي علي علامة (+) أو (-) بين الأساس .

قواعد حل المعادلات الآسية :

(١) إذا كانت $أ^{م} = أ^{ن}$ فان م = ن

أي إذا كان الأساس = الأساس فان الأس= الأس

(٢) إذا كان $أ^{م} = ب^{م}$ فان أ = ب

أي إذا تساوى الأسان يتساوى الأساسان

(٣) إذا كان $أ^{م} = ١$ فان م = صفر

(٤) إذا كان $أ^{م} = ب^{م}$ ، $أ \neq ب$ فان م = صفر

ملاحظة

للتخلص من علامة الجذر نقسم الأس علي الدليل

مثلا $\sqrt{س^{٣}} \leftarrow س^{\frac{٣}{٢}}$ $\sqrt[٤]{س^{٢}} \leftarrow س^{\frac{٢}{٤}}$

مثال :أوجد قيمة س العددية :

$$\left(\frac{٣}{٥}\right)^{س} = \frac{٨١}{٦٢٥}$$

الحـــــل

الطرف الأيسر $= \frac{٨١}{٦٢٥} = \frac{٣^{٤}}{٥^{٤}} = \left(\frac{٣}{٥}\right)^{٤}$

$\therefore \left(\frac{٣}{٥}\right)^{س} = \left(\frac{٣}{٥}\right)^{٤}$ ، $\therefore$ س = ٤

مثال : أوجد قيمة س العددية:-

$$\frac{(٨١)^{س-١} \times ٢٧^{س-٢}}{٩^{٣س-٧}} = ٧٢٩$$

الحـــــل

$$\text{المقدار} = \frac{(٣^{٤})^{س-١} \times (٣^{٣})^{س-٢}}{(٣^{٢})^{٣س-٧}} = \frac{٣^{٤س-٤} \times ٣^{٣س-٦}}{٣^{٦س-١٤}}$$

$$= \frac{٣^{٤س-٤} + ٣^{س-٦}}{٣^{٦س-١٤}} = ٣^{٧س-١٠-٦س+١٤}$$

$\therefore ٣^{س+٤} = ٣^{٦}$ $\therefore س + ٤ = ٦$ $\therefore س = ٢$

مثال : أوجد مجموعة حل المعادلة

$س^{\frac{١}{٣}} - ١٠ س^{\frac{٢}{٣}} + ٩ =$ صفر

الحـــــل

$\therefore س^{\frac{١}{٣}} - ١٠ س^{\frac{٢}{٣}} + ٩ =$ صفر

$(س^{\frac{٢}{٣}} - ١)(س^{\frac{٢}{٣}} - ٩) = ٠$

$\therefore (س^{\frac{٢}{٣}} - ١) = ٠$ $\therefore س^{\frac{٢}{٣}} = ١$ $\therefore س = ١$

أ، $س^{\frac{٢}{٣}} - ٩ = ٠$ $\therefore س^{\frac{٢}{٣}} = ٩$ $\therefore س^{\frac{٢}{٣}} = ٣^{٢}$

$\therefore س^{\frac{٢}{٣}} = ٣^{٢}$ بضرب اس الطرفين في $\frac{٣}{٢}$

$\therefore س = ٣^{٣}$ $\therefore س = ٢٧$

مثال : أوجد مجموعة حل المعادلة .

$س^{\frac{١}{٣}} + ١٢ س^{-\frac{١}{٣}} - ٧ = ٠$

الحـــــل

$س^{\frac{١}{٣}} + ١٢ س^{-\frac{١}{٣}} - ٧ = ٠$

بضرب الطرفين في $س^{\frac{١}{٣}}$ $\therefore س^{\frac{٢}{٣}} + ١٢ = ٠$

$(س^{\frac{١}{٣}} - ٣)(س^{\frac{١}{٣}} - ٤) = ٠$ $\therefore س^{\frac{١}{٣}} = ٣$ ← $س = ٢٧$

أو $س^{\frac{١}{٣}} = ٤$ $\therefore س = ٢^{٦}$ ← $س = ٦٤$

مثال : أوجد مجموعة حل المعادلة

$٧ س^{-٦} = س س^{-٦}$

الحـــــل

$\therefore ٧ س^{-٦} = س س^{-٦}$ $\therefore$ الأس = الأس

$\therefore$ إما $س = ٧$

أو $س - ٦ = ٠$ ومنها $س = ٦$

∴ مجموعة الحل { ٦ ، ٧ }

مثال : حل المعادلة

$$٣^{س-١} = \sqrt[٣]{٩}$$

الحـــــل

$$٣^{س-١} = ٣^{\frac{١}{٣} \times ٢} = ٣^{\frac{٢}{٣}}$$

∴ الأساس = الأساس

∴ س − ١ = $\frac{٢}{٣}$ ∴ س = $\frac{١}{٣}$ + ١

مثال : حل المعادلة:

$$٨^{٥-س} = ٧^{س-٥}$$

الحـــــل

∴ $٨^{٥-س}$ ⟵ $(\frac{١}{٨})^{س-٥}$

∴ $(\frac{١}{٨})^{س-٥} = ٧^{س-٥}$ ∴ س − ٥ = ٠ ⟵ س = ٥

∴ م . ج = { ٥ }

مثال : حل المعادلة:

$$٣^{|٣س-٤|} = ٩^{٢س-٢}$$

الحـــــل

∴ الأساس = الأساس لأن $٩^{٢س-٢} = ٣^{٢(٢س-٢)}$

∴ | ٣س − ٤ | = ٤س − ٤

∴ | ٣س − ٤ | − ٤س + ٤ = صفر

∴ ٣س − ٤ − ٤س + ٤ = ٠ عندما س ≤ $\frac{٤}{٣}$ = − س

− ٣س + ٤ − ٤ س + ٤ عندما س > $\frac{٤}{٣}$ = − ٧ س + ٨

∴ − س = صفر ⟵ س = صفر (مرفوض)

، − ٧ س + ٨ = ٠ ⟵ س = $\frac{٨}{٧}$

∴ مجموعة الحل = { $\frac{٨}{٧}$ }

مثال : حل المعادلة:

$$\frac{٦^{٢س} \times ٢٧^{س}}{٤^{س} \times ٨١^{س}} = \frac{١٠^{٣س} \times ٢٥^{س}}{٨^{س} \times ٦٢٥^{س}}$$

الحـــــــل

الطرف الأيمن = $\frac{(٢)^{٢ص} \times (٣)^{٢ص} \times (٣)^{٣ص}}{(٢)^{٢ص} \times (٣)^{٤ص}} = \frac{(٢)^{٢ص} \times (٣)^{٥ص}}{(٢)^{٣ص} \times (٣)^{٤ص}}$

$= ٣^{ص - ٤ص} = ٣^{ص}$ ← (١)

الطرف الأيسر = $\frac{(٢)^{٣ص} \times (٥)^{٣ص} \times (٥)^{٢ص}}{(٢)^{٣ص} \times (٥)^{٤ص}} = \frac{(٢)^{٣ص} \times (٥)^{ص}}{(٢)^{٣ص} \times (٥)^{٤ص}}$

$= ٥^{ص} _ ٥^{ص} = ٥^{ص}$ ← (٢)

∴ الأس = الأس ، ∴ $٥ \neq ٣$

∴ مجموعة الحل هي { صفر }

تمرين (٢٠)

حل المعادلات الآتية :-

١) $٤^{ص^{٢}-١} = ٨^{ص}$

٢) $٣^{ص^{٢}} = ٩^{ص} + ٤$

٣) $س^{٢ص-٥} = ٣^{٢ص-٥}$

٤) $٤^{ص-٥} = ٩^{ص-٥}$

٥) $(س^{٢} + ٢س)^{٥} = ٢٤٣$

٦) $س^{ص^{٢}-٢٥} = ١$

٧) $(\frac{٣}{٥})^{س} = (\frac{١٢٥}{٢٧})^{-١}$

٨) $٦^{س-٤} = \frac{١}{٢١٦}$

٩) $١٠^{ص} _ ع = ٨ \times ٥^{ص-٤}$

١٠) $٢^{٣ص-١} = \frac{١٦}{٢٧}$

النوع الثالث من المسائل :

الأسس الكسرية

** إذا كانت ن∈ ص+ ، أ∈ ح+ فإن

(أ) $أ^{\frac{1}{ن}} = \sqrt[ن]{أ}$ و تقرأ ((الجزر النوني للعدد أ))

(ب) $\sqrt[ن]{أ}$ تسمى الصورة الجذرية للعدد

فمثلا : $(٩)^{\frac{1}{٢}} = \sqrt{٩} = ٣$ ، $(\frac{١}{٨١})^{\frac{1}{٤}} = \sqrt[٤]{\frac{١}{٨١}} = \frac{١}{٣}$

(ج) $أ^{\frac{م}{ن}} = \sqrt[ن]{أ^{م}} = (\sqrt[ن]{أ})^{م}$ بمعنى مقام الأس (دليل الجذر)

مثلا $٣^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{٣^{2}} = \sqrt{٩}$

(د) $\sqrt[ن]{أ^{م}} = \sqrt[ن\times ك]{أ^{م\times ك}}$

مثلا $\sqrt[3]{٥^{2}} = \sqrt[3\times 4]{٥^{2\times 4}} = \sqrt[12]{٥^{8}}$

وتستخدم هذه القاعدة عند توحيد أدلة الجذور حتى يمكن استخدامها عند مقارنتها أو إجراء العمليات الحسابية بينهما.

ملاحظة

جميع قوانين الأسس الصحيحة تصلح كقوانين للأسس الكسرية

مثال : اختصر لأبسط صورة:

(أ) $٨^{\frac{3}{4}} \times (١٦)^{-\frac{1}{2}}$ (ب) $\sqrt[5]{(٢٤٣)^{-١}}$

(ج) $\sqrt[4]{\frac{٨١}{٦٢٥}}$ (د) $\sqrt[10]{أ^{7}} \times \sqrt[4]{أ^{2}} \times \sqrt{أ}$

الحـــــل

(أ) $٨^{\frac{3}{4}} \times (١٦)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt[4]{٨} \times \frac{١}{(١٦)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt[16]{٨}}{\sqrt[16]{١٦}} = \frac{\sqrt[8]{٢}}{\sqrt[16]{٢}} = \frac{١}{\sqrt[2]{٢}}$

(ب) $\sqrt[5]{(٢٤٣)^{-١}} = \frac{١}{\sqrt[5]{٢٤٣}} = \frac{١}{\sqrt[5]{٣^{5}}} = \frac{١}{٣}$

(ج) $\sqrt[4]{\frac{81}{625}} = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{3}{5}}$

(د) $\sqrt[4]{i} \times \sqrt[7]{i^3} \times \sqrt[10]{i^7} = (i)^{\frac{1}{4}} \times (i)^{\frac{3}{7}} \times (i)^{\frac{7}{10}} = i^{\frac{1}{4}+\frac{3}{7}+\frac{7}{10}}$

$= i = \frac{196+120+70}{280} = \frac{386}{280}$

مثال : أوجد قيمة كل مما يأتي :-

١) $\sqrt{3} \times \sqrt[5]{2}$ ٤) $(343)^{-\frac{1}{3}}$

٢) $\sqrt{6} \div \sqrt{3}$ ٥) $\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}$

٣) $(256)^{\frac{3}{4}}$ ٦) $(0,0625)^{-\frac{1}{4}}$

الحـــــل

١) نوجد الأدلة حتى نتمكن من عملية الضرب

$\therefore \sqrt{3} \times \sqrt[5]{2} = \sqrt[10]{3^5} \times \sqrt[10]{2^2} = \sqrt[10]{3^5 \times 2^2} = \sqrt[10]{243 \times 4} = \sqrt[10]{972}$

٢) $\sqrt{6} \div \sqrt{3} = \sqrt{6} \div \sqrt{3} = \sqrt{\frac{36}{27}} = \sqrt{\frac{4}{3}}$

٣) $(256)^{\frac{3}{4}} = (2^8)^{\frac{3}{4}} = 2^{8 \times \frac{3}{4}} = 2^6 = 64$

٤) $(343)^{-\frac{1}{3}} = (5^3)^{-\frac{1}{3}}$

٥) $\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt[4]{3^2}}{\sqrt[4]{2^2}} = \sqrt[4]{\frac{64}{4}} = \sqrt{16} = \sqrt{4^2} = (4)^{\frac{2}{4}}$

٦) $(0,0625)^{-\frac{1}{4}} = \left(\frac{625}{10000}\right)^{-\frac{1}{4}} = \left(\frac{5^4}{10^4}\right)^{-\frac{1}{4}} = \left(\frac{5}{10}\right)^{-1} = \frac{10}{5} = 2$

مثال : أيهما أكبر :

(أ) $\sqrt{5}$ أو $\sqrt[3]{7}$ (ب) $\sqrt[4]{3}$ أو $\sqrt[5]{4}$

الحـــــل

- لابد من توحيد دليلي الجذرين

-

(أ) $\sqrt{5} = \sqrt[3]{5^3} = \sqrt[6]{125}$ ، $\sqrt[3]{7} = \sqrt[6]{7^{2\times 2}} = \sqrt[6]{49}$

$\therefore \sqrt[6]{125} < \sqrt[6]{49}$ $\therefore \sqrt{5} < \sqrt[3]{7}$

(ب) $\sqrt[4]{3} = \sqrt[5]{3^4} = \sqrt[20]{243}$ $\quad\quad$ $\sqrt[5]{4} = \sqrt[5\times4]{4^5} = \sqrt[20]{256}$

$\therefore \sqrt[20]{256} > \sqrt[20]{243}$ $\quad\quad$ $\sqrt[5]{4} > \sqrt[4]{3}$

مثال : اختصر لأبسط صورة :

$$\frac{(18)^{\frac{1}{2}} \times (24)^{\frac{5}{2}}}{(27)^{-\frac{1}{2}} \times (19)^{\frac{3}{2}}}$$

الحـــــل

$$= \frac{(2\times3^2)^{\frac{1}{2}} \times (3\times2^3)^{\frac{5}{2}}}{(3^3)^{-\frac{1}{2}} \times (2^4)^{-\frac{5}{2}}} = \frac{(2)^{-\frac{1}{2}} \times (3)^{-1} \times 3^{-\frac{3}{2}} \times 2^{-\frac{3}{2}}}{(3)^{-\frac{3}{2}} \times (2)^{-4\times\frac{5}{2}}}$$

$$= (2)^{-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}+10} \times (3)^{-10-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}} = 2^5 \times 3^{-10} = \frac{32}{3}$$

مثال : أوجد قيمة :

أ- $(س^{\frac{2}{3}} - س^{\frac{1}{3}})(س^{\frac{1}{3}} + س^{\frac{2}{3}})$

ب- $(س^{\frac{1}{4}} - ص^{\frac{1}{4}})^2$ $\quad\quad$ ج- $(س^{\frac{1}{5}} - 1)^2$

د- $(س^{\frac{1}{3}} - 1)(س^{\frac{2}{3}} - س^{\frac{1}{3}} - 1)$

الحـــــل

أ- $(س^{\frac{2}{3}} - س^{\frac{1}{3}})(س^{\frac{1}{3}} + س^{\frac{2}{3}})$ (فرق بين مربعين)

$= (س^{\frac{2}{3}} - س^{\frac{2}{3}}) = س^{\frac{2}{3}}(س^{\frac{2}{3}} - 1) = \sqrt[3]{س^2}\,(\sqrt[3]{س^2} - 1)$

ب- $(س^{\frac{1}{4}} - ص^{\frac{1}{4}})^2 = س^{\frac{2}{4}} - 2س^{\frac{1}{4}}ص^{\frac{1}{4}} + ص^{\frac{2}{4}}$

$= س^{\frac{1}{2}} - 2س^{\frac{1}{4}}ص^{\frac{1}{4}} + ص^{\frac{1}{2}} = \sqrt{س} - 2\sqrt[4]{س ص} + \sqrt{ص}$

ج- $(س^{\frac{1}{5}} + 1)^2 = س^{\frac{2}{5}} + 2س^{\frac{1}{5}} + 1 = \sqrt[5]{س^2} + 2\sqrt[5]{س} + 1$

د- $(س^{\frac{1}{3}} - 1)(س^{\frac{2}{3}} - س^{\frac{1}{3}} - 1) = س^{\frac{1}{3}}س^{\frac{2}{3}} - س^{\frac{1}{3}}س^{\frac{1}{3}} \times 1 - س^{\frac{2}{3}} + س^{\frac{1}{3}} + 1$

$= س^{\frac{3}{3}} - س^{\frac{2}{3}} - س^{\frac{1}{3}} + س^{\frac{1}{3}} + 1 = س - 2س^{\frac{2}{3}} + 1 = س - 2\sqrt[3]{س^2} + 1$

تمرين (٢١)

١- اختصر:-

أ- $(أ^{\frac{٣}{٤}})^{٤}$ ب- $(أ^{-٥})^{\frac{٤}{٥}}$

ج- $(أ^{-٨})^{\frac{٣}{٨}}$ د- $(٠,٠٠١)^{-\frac{٢}{٣}}$

٢- أوجد قيمة : $\frac{\sqrt{٥}\times\sqrt[٣]{٥}\times\sqrt[٤]{٥}\times\sqrt[٦]{٥}}{\sqrt[١٢]{(٥)^{٣}}}$

٣- اختصر: $\frac{(س^{\frac{١}{٤}})^{-٣}\times(س^{\frac{٤}{٣}})^{-٢}\times(س^{-\frac{٢}{٣}})^{٤}}{(س^{\frac{٣}{٢}})^{-٢}}$

٤- أختصر: $\frac{٢٧\,س^{-\frac{١}{٣}}\times\sqrt[س]{٧\,س^{٢+٣س}}}{(١٨٩)^{س-١}\times\sqrt{(٤٩)^{٧}}}$

٥- أثبت أن: $\frac{(\sqrt{١٢٥})^{س-١}\times\sqrt{١٢٥}}{٥^{س}\times\sqrt{٥^{س}}}=١$

٦- أثبت أن: $\frac{٩^{ن+\frac{١}{٤}}\times\sqrt{٣\times٣^{ن}}}{\sqrt{٣^{-٣ن}}}=٢٧$

٧- إذا كانت س ∈ ح+ وكان $\frac{س-٢}{\sqrt{س^{٢}+\sqrt[٣]{٤س^{٢}}}}=\sqrt{٢}$ أوجد قيمة س

٨- أوجد ناتج: $(٢أ^{\frac{١}{٣}}-٣أ^{-\frac{١}{٣}})^{٢}\,،\,(٢أ^{\frac{٢}{٣}}-ب^{-\frac{١}{٣}})(٣أ^{\frac{٢}{٣}}+٤ب^{-\frac{١}{٣}})$

٩- إذا كانت د (س) = ٥ ^{س} فأوجد قيمة :

$$\frac{د(س+٤)-د(س+٣)}{د(س+٥)-د(س+٤)}$$

١٠- إذا كانت د(س) = ٣ ^{س} أثبت أن

$$\frac{د(٢س+٢)+د(٢س-١)}{٥\,د(٢س)-٧\,د(٢س-١)}=\frac{٧}{٢}$$

النوع الرابع من المسائل :

مسائل علي حل معادلات تشتمل الأسس الكسرية

مثال : أوجد مجموعة الحل للمعادلة الآتية:-

أ) $٦^{س-٤} = \frac{١}{٢١٦}$ ب) $\sqrt[٣]{س^{٢}} = \frac{١}{٢٥}$

ج) $\sqrt{٨ \times ٢} \times (٨)^{\frac{٥ص+٧}{٢}} = \frac{١}{٢}$ د) $(س - \frac{١}{٢})^{\frac{١}{٣}} = (٨١)^{-\frac{١}{٤}}$

الحـــــل

أ) $٦^{س-٤} = \frac{١}{٢١٦}$ ∴ $٦^{س-٤} = (٦)^{-٣}$ ∴ س − ٤ = − ٣

∴ س = ١

ب) $\sqrt[٣]{س^{٢}} = \frac{١}{٢٥}$ ∴ $س^{\frac{٢}{٣}} = ٥^{-٢}$ بضرب الأسين في $\frac{٣}{٢}$

∴ $س = ٥^{-٢ \times \frac{٣}{٢}}$ ∴ $س = ٥^{-٣}$

∴ $س = \frac{١}{١٢٥}$

ج) $\sqrt{٨ \times ٢} \times (٨)^{\frac{٥ص+٧}{٢}} = \frac{١}{٢}$

∴ $(٢)^{٣} (٢)^{\frac{١}{٢}} \times (٢)^{٣ \times \frac{٥ص+٧}{٢}} = ٢^{-١}$

$٢^{\frac{٧}{٢}} \times ٢^{٥ص+٣} = ٢^{-١}$

∴ $٥ص + \frac{١٣}{٢} + ٣ = -١$ ⟵ $٢^{-١} = ٢^{-١}$

$٥ س = -\frac{١٥}{٢}$ ⟵ $س = \frac{-٣}{٢}$

د) ∴ $(س - \frac{١}{٢})^{\frac{١}{٣}} = (٨١)^{-\frac{١}{٤}}$

∴ $(س - \frac{١}{٢})^{\frac{١}{٣}} = (٣^{٤})^{-\frac{١}{٤}} = (٣)^{-١}$

∴ $[(س - \frac{١}{٢})^{\frac{١}{٣}}]^{٣} = [٣^{-١}]^{٣}$ بتكعيب الطرفين

$س - \frac{١}{٢} = ٣^{-٣}$ ∴ $س - \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢٧}$ ∴ $س = \frac{٢٩}{٥٤}$

مثال : حل المعادلة $ص^{\frac{٣}{٤}} = ٢س^{\frac{٥}{٣}} = ٦٤$ **ثم أوجد قيمة ٥ س + ٢ص**

الحـــــل

نوجد قيمة كل من س ، ص

∴ $ص^{\frac{٣}{٤}} = ٦٤$ ∴ $ص = ٢^{٦}$ بدفع الطرفين للقوة $\frac{٤}{٣}$

∴ ص = ٢ $^{\frac{٤}{٣} \times ٦}$ = ٢ ^{٨} = ٢٥٦ ، ٢س $^{\frac{٥}{٣}}$ = ٦٤ بالقسمة علي ٢

∴ س $^{\frac{٥}{٣}}$ = ٣٢ ⟵ س $^{\frac{٥}{٣}}$ = ٢ ^{٥} بدفع الطرفين للقوة $\frac{٣}{٥}$

∴ س = ٢ $^{\frac{٣}{٥} \times ٥}$ = ٢ ^{٣} = ٨ ∴ س = ٨ ، ص = ٢٥٦

∴ المقدار ٥ س + ٢ ص = ٥ × ٨ + ٢ × ٢٥٦ = ٥٥٢

النوع الخامس من المسائل :

المعادلات الآسية لمركبة

المعادلات الآسية المركبة هي التي تحتوي علي علامة (+) أو (-) وهي نوعان:

(١) النوع الأول : باخراج العامل المشترك بأصغر أس

مثال : أوجد مجموعة الحل للمعادلات الآتية

١- ٤ $^{٢ س - ١}$ - ١٦ $^{س - ١}$ = - ٤

الحـــــل

٢ $^{٤ س - ٢}$ - ٢ $^{٤ س - ٤}$ = - ٤

٢ $^{٤ س - ٤}$ [٢ ^{٢} + ١] = - ٤ ∴ ٢ $^{٤ س - ٤}$ × ٥ = - ٤ بالقسمة علي ٥

∴ ٢ $^{٤ س - ٤}$ = ٢ $^{-٣}$ ∴ ٤س - ٤ = - ٣

∴ ٤س = ٧ ∴ س = $\frac{٧}{٤}$ ∴ مجموعة الحل $\{\frac{٧}{٤}\}$

مثال : حل المعادلة

٢ $^{٣ س + ١}$ + ٨ $^{س - \frac{١}{٣}}$ = ١٦٠

الحـــــل

٢ $^{٣ س + ١}$ + (٢ ^{٣}) $^{س - \frac{١}{٣}}$ = ٢ $^{٣ س + ١}$ + ٢ $^{٣ س - ١}$ = ٢ $^{٣ س}$ (٢ ^{١} + ٢ $^{-١}$)

= ٢ $^{٣ س}$ (٢ + $\frac{١}{٢}$) = ٢ $^{٣ س}$ × $\frac{١}{٢}$ ٢ = ٢ $^{٣ س}$ × $\frac{٥}{٢}$ = ١٦٠

٢ $^{٣ س}$ = ١٦٠ × $\frac{٢}{٥}$ ∴ ٢ $^{٣ س}$ = ٣٢ × ٢ = ٦٤

٢ $^{٣ س}$ = ٢ ^{٦} ∴ ٣س = ٦ ∴ س = ٢

مثال : حل المعادلة

١١ $^{٤ س + ١}$ + ١١ $^{٤ س}$ = ١٢

الحـــــل

١١ $^{٤ س}$ [١١ ^{١} + ١] = ١١ $^{٤ س}$ × ١٢ = ١٢

∴ ١١ $^{٤ س}$ = ١ ∴ ١١ $^{٤ س}$ = ١ ^{٠}

∴ ٤س = ٠ ∴ س = ٠

مثال : حل المعادلة

٤ س + ٢ $^{٢ س}$ + ٣ = ١٤٤

الحـــــــل

$٢^{٢س} + ٢^{٢س+٣} = ٢^{٢س} (١ + ٢^{٣}) = ٢^{٢س} (١ + ٨)$

$٢^{٢س} \times ٩ = ١٤٤$ .. $٢^{٢س} = \frac{١٤٤}{٩}$ .. $٢^{٢س} = ١٦$

$٢^{٢س} = ٢^{٤}$ .. $٢س = ٤$ .. $س = ٢$

مثال :

إذا كان د(س) = $٧^{س}$ أثبت أن $٧^{ص} \times$ د(س – ص) = د(س)

الحـــــــل

الطرف الأيمن = $٧^{ص} \times$ د(س – ص)

$= ٧^{ص} \times ٧^{س-ص}$

$= ٧^{ص} \times ٧^{س} \times ٧^{-ص} = ٧^{س}$

= د(س) .. الطرفان متساويان

مثال :

إذا كانت د(س) = $٤^{س}$ فاوجد قيمة س التي تحقق د(س+١) + (س- ١) = ٦٨

الحـــــــل

.. $٤^{س+١} + ٤^{س-١} = ٦٨$

.. $٤^{س-١} (٤^{٢} + ١) = ٦٨$

.. $٤^{س-١} \times ١٧ = ٦٨ (\div ١٧)$

.. $٤^{س-١} = ٤^{١} = ٣^{٢}$

.. س- ١ = ١ .. س= ١ + ١ .. س =٣

مثال :

إذا كانت د(س) = $(\frac{١}{٣})^{س}$ فاوجد قيمة س إذا كانت د(س+٢) – د(س-٢) = ٨٠

الحـــــــل

د(س+٢) – د(س-٢) = $(\frac{١}{٣})^{س+٢} - (\frac{١}{٣})^{س-٢}$

$= (\frac{١}{٣})^{س} [(\frac{١}{٣})^{٢} - (\frac{١}{٣})^{-٢}] = (\frac{١}{٣})^{س} [\frac{١}{٩} - ٩] = (\frac{١}{٩})^{س} [\frac{١-٨١}{٩}]$

.. $(\frac{١}{٣})^{س} \times \frac{-٨٠}{٩} = -٨٠$

.. $(\frac{١}{٣})^{س} = -٨٠ \times \frac{٩}{-٨٠}$ .. $(\frac{١}{٣})^{س} = ٩$ .. $٣^{-س} = ٣^{٢}$

.. س = – ٢ .. س = – ٢

مثال :

إذا كانت د: ح $\to$ ح حيث د(س) = $أ^{س}$ اثبت أن د(١) = $\frac{د(س+١) + د(س+٢)}{د(س) + د(س+١)}$

الحـــــــل

الطرف الأيمن =د(١) = أ ← (١)

الطرف اليسر = $\frac{د(س+١)+د(س+٢)}{د(س)+د(س+١)} = \frac{أ^{س+١}+أ^{س+٢}}{أ^{س}+أ^{س+١}} = \frac{أ^{س+١}+(١+أ)}{أ^{س}+(١+أ)}$

$= أ^{س+١-س} = أ$ ← (٢)

من ① ، ② ∴ الطرفان متساويان

مثال :

إذا كانت د(س) = ٢ س- ١ فاوجد قيمة : $\frac{د(س+٢)}{د(س-٢)} - \frac{د(س-٢)}{د(س+٢)}$

الحـــــــل

المقدار = $\frac{٢^{(س+٢)-١}}{٢^{س-٣}} - \frac{٢^{(س-٣)}}{٢^{س+١}} = ٢^{٤} - ٢^{-٤}$

$= ١٦ - \frac{١}{١٦} = \frac{٢٥٥}{١٦}$

٢) **النوع الثاني : بالتحليل**

مثال : أوجد مجموعة الحل للمعادلات الآتية :-

$٧^{٢س} - ٥٠ \times ٧^{س} + ٤٩ = ٠$

الحـــــــل

$(٧^{س} - ٤٩)(٧^{س} - ١) = ٠$

$٧^{س} = ٤٩$ || $٧^{س} = ١$

$٧^{س} = ٧^{٢}$ || $٧^{س} = ١^{٠}$

∴ س = ٢ ∴ س = صفر

∴ مجموعة الحل = { ٠ ، ٢}

مثال : $٥^{٢س} - ٣٠ \times ٥^{س} + ٦٢٥ = ٠$

الحـــــــل

المقدار عبارة عن مقدار ثلاثي

∴ $(٥^{س} - ١٢٥)(٥^{س} - ٥) = ٠$

$$\begin{array}{l|l} ٥^{س} = ٥^{٣} & د^{س} = ٥ \\ ٥^{س} = ٥^{٠} & د^{س} = د^{١} \\ \therefore س = ٣ & \therefore س = ١ \end{array}$$

∴ مجموعة الحل = { ١ ، ٣}

مثال : أوجد مجموعة الحل للمعادلات الآتية :-

$$٢^{٤س-٣} - ٣ \times ٢^{٢س} + ١٦ = ٠$$

الحـــــل

بضرب طرفي المعادلة × $٢^{٣}$

$$\therefore ٢^{٤س-٣} \times ٢^{٣} - ٣ \times ٢^{٢س} \times ٢^{٣} + ١٦ \times ٢^{٣} = ٠$$

$$٢^{٤س-٣+٣} - ٣ \times ٢^{٢س} \times ٨ + ١٦ \times ٨ = ٠$$

$$٢^{٤س} - ٢٤ \times ٢^{٢س} + ١٢٨ = ٠$$

$$\therefore (٢^{٢س} - ١٦)(٢^{٢س} - ٨) = ٠$$

$$\begin{array}{l|l} ٢^{٢س} = ١٦ & ٢^{٢س} = ٨ \\ ٢^{٢س} = ٢^{٤} & ٢^{س} = ٢^{٣} \\ \therefore ٢س = ٤ & \therefore ٢س = ٣ \\ س = ٢ & \therefore س = \frac{٣}{٢} \end{array}$$

∴ مجموعة الحل = $\{ ٢^{\frac{٣}{٢}} \}$

مثال : إذا كان $٩^{س} + ٣^{س+١} = ١٠٨$ فأوجد قيمة س

الحـــــل

$$٣^{٢س} + ٣^{س+١} = ١٠٨ \quad \therefore ٣^{٢س} + ٣^{س} \times ٣ - ١٠٨ = ٠$$

$$٣^{٢س} + ٣^{س} \times ٣ - ١٠٨ = ٠$$

$$\therefore (٣^{س} - ٩)(٣^{س} + ١٢) = ٠$$

$$\therefore ٣^{س} = ٩ \longleftarrow ٣^{س} = ٣^{٢} \quad \therefore س = ٢$$

، $٣^{س} = -١٢$ (مرفوض) ∴ مجموعة الحل = { ٢ }

مثال : $٢^{٢ص} + ٢^{٥-ص} = ١٢$

الحـــــل

$٢^{٢ص} + ٢^{٥} \times ٢^{-ص} - ١٢ = ٠$ ى بالضرب في $٢^{ص}$

∴ $2^{2ص} - 12 \times 2^{ص} + 32 = 0$

∴ $(2^{ص} - 4)(2^{ص} - 8) = 0$

$2^{ص} - 4 = 0$	$2^{ص} - 8 = 0$
$2^{ص} = 4$	$2^{ص} = 2^{3}$
$2^{ص} = 2^{2}$	∴ ص = 3

∴ ص = 2

∴ **مجموعة الحل = { 2 ، 3}**

تمرين (٢٢)

حل المعادلات الآتية (أوجد قيمة س)

١) $3^{س+1} + 3^{1-س} = 10$

٢) إذا كان $9^{س} + 3^{س} + 1 = 108$ فأوجد قيمة س

٣) $25^{س} - 126 \times 5^{س-1} + 5 = 0$

٤) $2^{ص} + 2^{6-ص} = 12$

٥) $2^{3س+1} + 8^{س-\frac{1}{3}} = 160$

٦) $7^{3س-1} - 7^{3س} = -2058$

٧) $\frac{(0,6)^{2س-1} \times 5^{2س}}{(\sqrt{3})^{2س-2}} = 45$

٨) $3^{س-4} - 16^{\frac{1}{2}} = 5^{س-4} - 16$

٩) $3^{2ص} - 30 \times 3^{ص} + 81 = 0$

١٠) إذا كانت د: ح$^{+}$ ← ح$^{+}$ حيث د(س) = $2^{س+1}$

حل المعادلة د(س) + د(س+١) + د(س+٢) = ٢٨

١١) $125 (\sqrt[3]{\frac{3}{5}})^{س+1} = \sqrt[3]{3^{7}}$

١٢) $3^{2س} - 3 \times 7^{س} - 18 = 0$

١٣) $2^{2س+2} + 4^{1-س} - 17 = 0$

١٤) $3^{س+2} + 3^{س-1} = 28$

١٥) $(س - 3)^{\frac{3}{3}} = 8$

١٦) $7^{1+س} + 7^{1-س} = 50$

١٧) $2^{2س+1} = 4^{21س-13}$

١٨) $2^{2س} - 2^{س} - 2 = 0$

١٩) $2\sqrt{س-13} = 4$

٢٠) ١٠ $س^{٢ن}$ − ١١ $س^{ن}$ + ٦ = صفر

٢١) $س^{٦ن}$ − ٢٨ $س^{٣ن}$ + ٢٧ = ٠

٢٢) ٤ $س^{٢ن}$ − ٥ × ٢ $س^{ن+١}$ + ١٦ = ٠

الدالـــة الأسيـــــة

تعريف الدالة : د (س) = $أ^{س}$ ، ص = $أ^{س}$

حيث (الأس) أ ∋ ح ، (الأساس) أ ∋ ح$^{+}$ - { ١ }

ملحوظة : في حالة أ = ١ تصبح دالة ثابتة

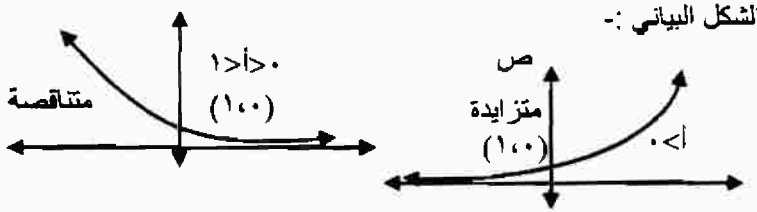
تسمي دالة أسية حيث د : ح ⟵ ح$^{+}$

المجال المجال المقابل

١- المجال = ح (مجموعة الأعداد الحقيقية) =] - ∞ ، ∞ [

٢- المدى = ح$^{+}$ =] ٠ ، ∞ [

٣- الشكل البياني :-



أ- تمثيل بيانياً بمنحني يقع بأكمله فوق محور السينات ويمر بالنقطة (٠ ، ١) كذلك النقطة (١ ، أ) وتكون الدالة متزايدة إذا كان أ > ١ ، و متناقصة إذا كان ٠ < أ < ١

ب- الدالة موجبة دائماً أي المدي = ح$^{+}$

ج- لها نفس قوانين الأسس .

أ- د (م) . د(ن) = د(م + ن)

ب- [د(م)]^{ن} = د(م ن)

ج- د(م) ÷ د (ن) = د(م − ن)

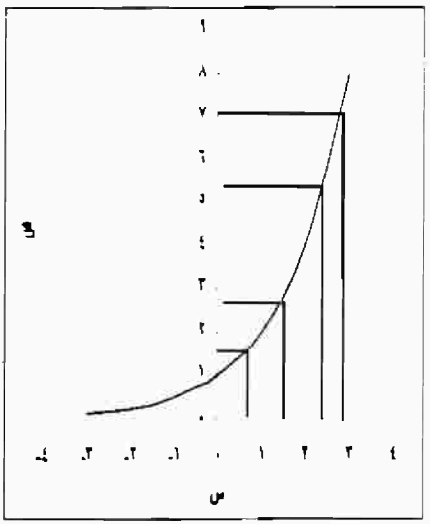
د − د(- م) = $\frac{١}{د(م)}$

*مثال :- ارسم منحني الدالة د(س) = ٢^{س} متخذة س ∋ [- ٣ ، ٣] ومن الرسم أوجد قيمة:-

د (٢,٤) و (- $\frac{٣}{٢}$) جـ ($\sqrt{٢٧}$) ثم أوجد قيمة س عندما ٢^{س} = ٧

د(س) = ٢^{س} .. ص = ٢^{س}

س	ـ ٣	ـ٢	ـ ١	٠	١	٢	٣
ص	$\frac{١}{٨}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	١	٢	٤	٨



إيجاد القيم التقريبية :-

* د (٢,٤) = ٢ ^{٠,٤} ≃ ٥,٣

* د($-\frac{٣}{٢}$) = د (ـ ١,٥) = ٢ $^{-١,٥}$ ≃ ٠,٣

* د($\sqrt{٢}$) = ٢ $^{\frac{١}{٢}}$ = ٢,٦ ≃ ٢ ^{٠,٤}

$\sqrt[٥]{٨} = \sqrt[٥]{٢^{٣}} = ٢^{\frac{٣}{٥}} = ٢^{٠,٦} \simeq ٠,٥$

مثال :-

ارسم الشكل البياني للدالة

د(س) = $(\frac{١}{٣})^{س}$ حيث س ∈ [ـ ٣ ، ٣]

من الرسم أوجد قيمة تقريبية لكل من $\frac{١}{\sqrt[٣]{٣}}$ ، $\frac{\sqrt[٣]{٣}}{٩}$ ، د (١,٢) ، د (ـ ١,٢)

الحـــــل

س	ـ ٣	ـ٢	ـ ١	٠	١	٢	٣
ص	٢٧	٩	٣	١	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٢٧}$

$\frac{١}{\sqrt[٣]{٣}} = (\frac{١}{٣})^{\frac{١}{٣}}$ ⟸ $(\frac{١}{٣})^{-\frac{١}{٢}}$ ، د $(\frac{١}{٢})$ = $(\frac{١}{٣})^{\frac{١}{٢}}$ ، س = $\frac{١}{٢}$

$\frac{١}{\sqrt[٣]{٣}}$ = ٠,٦ من الرسم

$\frac{\sqrt[٣]{٣}}{٩} = \frac{٣^{\frac{١}{٣}}}{٣^{٢}} = ٣^{-١,٥} = (\frac{١}{٣})^{١,٥}$

⬅ س = ١,٥ ⬅ د (١,٥) = ($\frac{١}{٣}$)^{١,٥} = ٠,٢ من الرسم

د(١,٢) = ($\frac{١}{٣}$)^{١,٢} = ٠,٣ من الرسم

الحاسبة للتأكيد

$\frac{١}{\sqrt{٣}}$ = ٠,٦ $\frac{\sqrt{٣}}{٩}$ = ٠,٢ د(١,٢) = ($\frac{١}{٣}$)^{١,٢} = ٠,٣

أكمل !!!

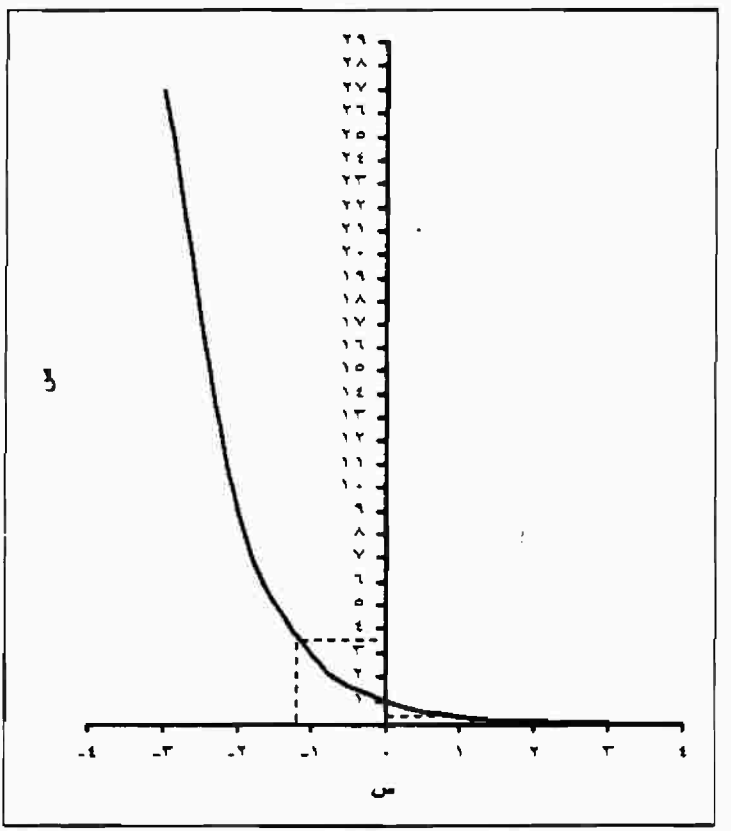
الصورة العامة للدالة الآسية هي:

د(س) = أ^{س} حيث أ ∋ ح$^{+}$ - { ١} مجالها ح

، مجالها المقابل ح$^{+}$ ، منحني الدالة يمر بالنقطة (٠ ، ١)

وتكون متزايدة علي مجالها إذا كان أ > ١

، ومتناقصة علي مجالها إذا كان ٠ < أ < ١



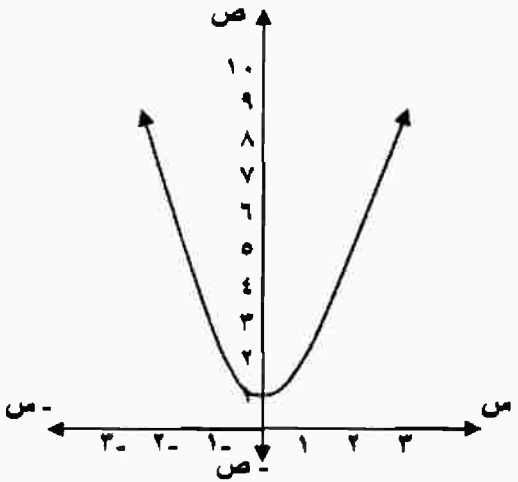
مثال :- ارسم الشكل البياني للدالة

د(س) = { ٢^س حيث س ≥ ٠ ، ٢^-س حيث س < ٠ }

من الرسم استنتج المدى والاطراد وبين نوعها من حيث الزوجية أو الفردية

الحـــــل

س	س	٠	١	٢	٣	س	٠	١-	٢-	٣-
ص	٢^س	١	٢	٤	٨	٢^-س	١	٢	٤	٨



المدي = [١ ، ∞ [

في]- ∞ ، ٠ [تناقصية

في [٠ ، ∞ [تزايدية

الدالة زوجية

٢٧) ٢^س = س^٢

الحـــــل

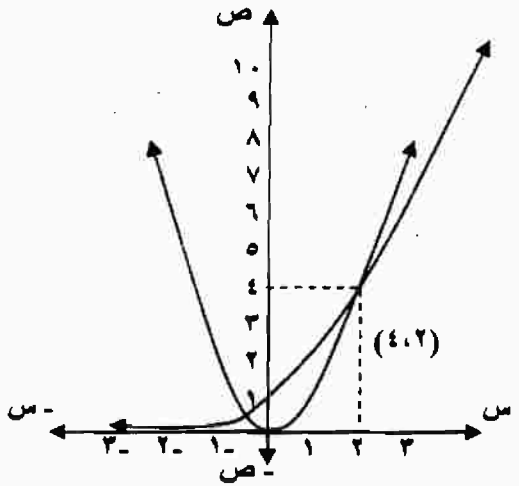
نفرض أن ص = ٢^س ⟸ ص= س^٢ ثم نكون جدولين وهما

٢^س

س	٢-	١-	٠	١	٢	٣
٢^س	١/٤	١/٢	١	٢	٤	٨

س^٢

س	٣-	٢-	١-	٠	١	٢	٣
ص	٩	٤	١	٠	١	٤	٩



مجموعة الحل = { - ٠,٨ ، ٢}

مثال:-

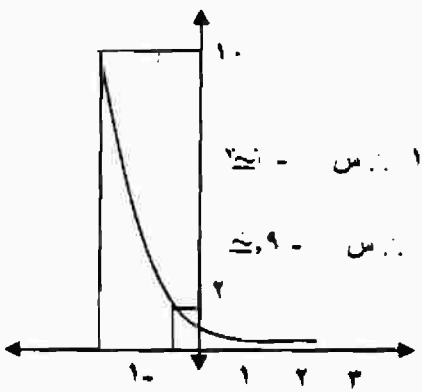
إذا كانت د : ح ⟸ ح$^{+}$ حيث د (س) = ($\frac{١}{٣}$)^{س} ، س ∋ [-٣ ، ٣] فارسم المنحني لهذه الدالة ومن الرسم.

أولاً: د(- ٠,٥)

ثانياً: قيمة س عندما($\frac{١}{٣}$)^{س} = ١٠، أوجد قيمة س إذا كانت ($\frac{١}{٣}$)^{س} = ٨

، ص= ($\frac{١}{٣}$)^{س}

س	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣
ص	٢٧	٩	٣	١٠	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٢٧}$



أولاً : د(-٠,٥) ≃ ١,٧ عندما س = - ٠,٥

ثانياً : ($\frac{١}{٣}$)^{س} = ١٠ ∴ عندما ص = ١٠ ∴ س = - ٢,١ ≃

($\frac{١}{٣}$)^{س} = ٨ ∴ عندما ص = ٨ ∴ س = - ١,٩ ≃

للتأكيد فقط : د(- ٠,٥) = ($\frac{١}{٣}$)$^{-٠,٥}$

= (٣-) - ٠,٥ = ٣ ٠,٥

مثال:- إرسم

٢ــ س = ٢- س

الحـــــــل

نفرض أن ص = ٢ ــ س ص = ٢- س

ثم نكون جدولين وهما

ص = ٢- س

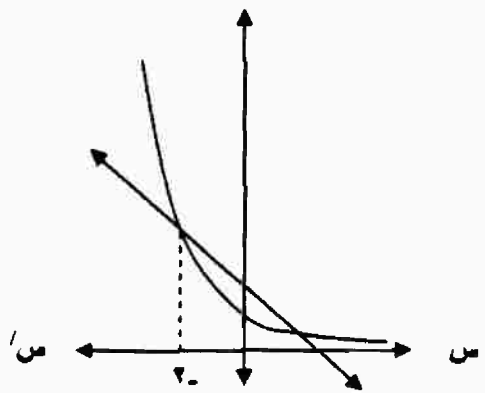
س	٣-	٢-	١-	٠	١	٢	٣
ص = ٢- س	٨	٤	٢	١	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

ص = ٢ ــ س

س	٠	١
ص	٢	١

ص = ٢- س ص = ٢ ــ س

مجموعة الحل = { - ٢ ، ١,٧ }



تمرين رقم (٢٣)

(١) أرسم الشكل البياني للدالة ص= ٣+ ٢^{س} ومن الرسم عين مجال الدالة ومداها وأطرادها .

(٢) مثل بيانياً د(س) = $(\frac{١}{٢})^{س}$ حيث س [- ٢ ، ٣] ومن الرسم

أوجد قيمة تقريبية لكل من: $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، $\frac{\sqrt{٢}}{٤}$ ، د(١,٥) ، د (- ١,٥)

(٣) إذا كانت د : ح ← ح$^{+}$ ، د(س) = ٣ س أرسم منحني هذه الدالة متخذاً س∋ [-٣،٣]

أوجد قيمة تقريبية من لكل من :-

أ) د (١,٥) ب) قيمة س عندما ٣^{س} = ٨

(٤) أرسم الكل البياني للدالة د(س) = $(\frac{١}{٣})^{س}$: س ∋ [- ٣،٣] ومن الرسم

أوجد قيمة : د (- ٠,٤) قيمة س عندما $(\frac{١}{٣})^{س}$ = ٨

(٥) مثل بيانياً الدالة د: ح ← ح$^{+}$ حيث د(س) = ٣ $^{س-٢}$ متخذاً س ∋ [٠ ، ٥] ومن الرسم

أوجد : أ) د (١,٨) ب) قيمة س عندما ٣ $^{س-٢}$

(٦) د(س) = $(\frac{٥}{٣})^{س}$ مثلها بيانياً في [- ٢ ، ٤] ومن الرسم

أوجد : أ) د (٢,٣) ب) قيمة س عندما $(\frac{٥}{٢})^{س}$ = ١٢

(اللوغاريتمـــــات)

نعلم أن ٣٢ = ٢ ^ ٥

هذه المتساوية تحتوى على

(١) العدد ٣٢ (٢) الأساس ٢ (٣) الأس ٥

يمكن تحويل هذه المتساوية الى صورة

لو٢ ٣٢ = ٥

وتقرأ لوغاريتم ٣٢ للأساس ٢ يساوى ٥

تعريف اللوغاريتم

هو الأس الذى يرفع اليه الأساس لكى يعطى العدد

أمثلة

لو٢ ١٦ ، لو٥ ١٢٥ ، لو٦٤ $\frac{١}{٦٤}$ ، لو٦ ٦ ، لو٧ ١

الحل

لو٢ ١٦ = ٤ & لو٥ ١٢٥ = ٣

لو٦٤ $\frac{١}{٦٤}$ = -٦ & لو٦ ٦ = ١ & لو٧ ١ = صفر

مثال

١) أحسب قيمه ما يلى:-

١) لو٣ ٢٧ + لو٥ ١٢٥

٢) $\frac{\text{لو}_{٢}\ ٣٢ \times \text{لو}\ \frac{١}{١٢٨}}{\text{لو}_{٢}\ ٢٥٦}$

الحل

١) لو٢ ٢٧ + لو٨ ١٢٥ = ٣ + ٣ = ٦

٢) $\frac{\text{لو}_{٢}\ ٣٢ \times \text{لو}_{\frac{١}{١٢٨}}}{\text{لو}_{٢}\ ٢٥٦} = \frac{٧- \times ٥}{٥} = \frac{٣٥-}{٨} = ٧$

المعادلة اللوغاريتمية:

هى معادلة يكون المجهول فيها إما عدد أو اساس أو أس لذلك تحول الصورة اللوغاريتمية إلى صورة أسية

مثال

حل المعادلات الآتيه:-

١) لو٨ س = $\frac{٢}{٣}$ ٢) لو١٦ ٣٢ = س

٣) لوس ١٠ ١٢٥ = ٣ ٤) (لو٢س)^{٢} - ٥ (لو٢س) + ٦ = ٠

الحل

١) س= (٨)$^{\frac{٢}{٣}}$

س= ٢ $^{٣ \times \frac{٢}{٣}}$

س= ٢ ^{٢} س= ٤

٢) س= ٣٢ = (٦٤)^{س}

٢ ^{٥} = ٢ ^{٦س}

٦س = ٥

س = $\frac{٥}{٦}$

٣) س = ١٢٥ = (س - ١)^{٣}

٥ ^{٣} = (س - ١)^{٣}

س - ١ = ٥

س = ٦

٤) ^{٢} ـ ٥أ + ٦ = ٠ ، أ = لو$_{٢}$ س

(أ ـ ٣) (أ ـ ٢) = ٠

أ = ٣ ، أ = ٢

لو$_{٢}$ س = ٣ ، لو$_{٢}$ ^{س} = ٢

س = ٢ ^{٣} ، س= ٢ ^{٢}

س = ٨ ، س = ٤

س ∈ {٨ ، ٤}

قوانين اللوغاريتمات

(١) لو$_{أ}$ (س × ص) = لو$_{أ}$ ^{س} + لو$_{أ}$ ^{ص}

لو ٧ × ٨ = لو ٧ + لو ٨

لو ٥ + لو ٦ = لو٥ × ٦ = لو ٣٠

(٢) لو$_{أ}$ $\left(\frac{س}{ص}\right)$ = لو$_{أ}$ س ـ لو$_{أ}$ ص

لو $\frac{٧}{٨}$ = لو$_{٧}$ ـ لو$_{٨}$

لو$_{٦}$ ـ لو$_{٥}$ = لو$\frac{٦}{٥}$

مثال

حول إلى ضرب وقسمة ما يلي :-

١) لو ٧ + لو ٦ ـ لو ٥ ـ لو ١١ = لو $\frac{٧ \times ٦}{١١ \times ٥}$

٢) لو $\frac{٣}{٤}$ + لو $\frac{٥}{٦}$ ـ لو $\frac{٩}{١١}$ = لو $\frac{١١ \times ٥ \times ٣}{٩ \times ٦ \times ٤}$

٣) لو$_{أ}$ س^{ن} = ن لو$_{أ}$ س

لو ٥ ^{٣} = ٣ لو ٥

٧ لو$_{٢}$ = لو$_{٢}$ ^{٧}

٤) لو أ = ١ لذلك يكون لو$_{٠,٦}$ = لو$_{٠,٧}$ = لو$_{٠,٨}$ = ١

لو$_{٠,١}$ = صفر لذلك يكون لو$_{٠,٠١}$ = لو$_{٠,٠١}$ = لو$_{٠,٠١}$ = صفر

النوع الأول من المسائل:

جمع وطرح لوغاريتمات

مثال ١ :- بدون الحاسبة أوجد قيمة

$٢ لو \frac{٤}{٧} + \frac{٣}{٢} لو \frac{١}{٤} ٢ + ٢ لو (٧)^{٢} - لو ٦ - لو ٩$

الحل

$لو (\frac{٤}{٧})^{٢} + \frac{٣}{٢} لو \frac{٩}{٤} + لو (٧)^{٢} - لو \frac{٦}{١} - لو \frac{٩}{١}$

$لو(\frac{٤}{٧})^{٢} + لو\frac{٩}{٤}\frac{٣}{٢} + لو \frac{٤٩}{١} - لو \frac{٦}{١} - لو \frac{٩}{١}$

$لو \frac{١٦}{٤٩} + لو \frac{٢٧}{٨} + لو\frac{٤٩}{١} - لو\frac{٦}{١} - لو\frac{٩}{١}$

$لو (\frac{١ \times ١ \times ٤٩ \times ٢٧ \times ١٦}{٩ \times ٦ \times ١ \times ٨ \times ٤٩})$

= لو ١ = صفر

مثال ٢

:- $لو_{٥} \frac{٣}{٥} + ١ لو_{٥} ٢٥ + ٦ لو_{٢} ٢ - \frac{١}{٤} لو_{٣} ٨١ = لو_{٢} ٨$

الحل

الأيمن $لو_{٥} \frac{٣}{٥} + \frac{١}{٢} لو_{٥} (٢٥)^{\frac{١}{٢}} + لو_{٢} ٢^{٦} - لو_{٣} (٨١)^{\frac{١}{٤}}$

$لو_{٥} \frac{٣}{٥} + لو_{٥} \frac{٥}{١} + لو_{٢} \frac{٤٦}{١٤} - لو_{٣} \frac{٣}{١}$

$= لو_{٢} (\frac{١ \times ٦٤ \times ٥ \times ٣}{٣ \times ١ \times ١ \times ٥}) = لو_{٢} ٦٤ = ٣$

الأيسر $لو_{٢} ٨ = ٣$

مثال ٣

بدون الحاسبة أوجد قيمة

$$\frac{\text{لو}٤٠ - \text{لو}٨ + \text{لو}٥}{\text{لو}٢٨ - \text{لو}٧ + \text{لو}٢٥} = ١ - \text{لو}٢$$

الحل

$$\text{الأيمن} = \frac{\text{لو}\left(\frac{٤ \times ٥}{٨}\right)}{\text{لو}\left(\frac{٢٨ \times ٢٥}{٧}\right)} = \frac{\text{لو}٢٥}{\text{لو}١٠٠}$$

$$= \frac{\text{لو}٥^{٢}}{٢} = \frac{٢\text{لو}٥}{٢} = \text{لو}٥$$

$$\text{الأيسر} \quad ١ - \text{لو}٢ = \text{لو}١٠ - \text{لو}٢ = \text{لو}\frac{١٠}{٢} = \text{لو}٥$$

الأيمن = الأيسر

النوع الثاني :-

ضرب وقسمة اللوغاريتمات

تستخدم القاعدة $\text{لو}\ س^{ن} = ن\ \text{لو}\ س$

مثال

أوجد قيمة ما يلي بدون الحاسبة

١) $$\frac{\text{لو}١٦ \times \text{لو}٢٧}{\text{لو}٨١ \times \text{لو}٣٢}$$

٢) $$\frac{\text{لو}\frac{٨١}{١٦}}{\text{لو}\frac{٣}{٢}^{٥}}$$

الحل

١) $\frac{\text{لو}_{٢}{}^{٤} \times \text{لو}_{٣}{}^{٣}}{\text{لو}_{٣}{}^{٤} \times \text{لو}_{٢}{}^{٥}} = \frac{٤\text{لو}٢ \times ٣\text{لو}٣}{٤\text{لو}٣ \times ٥\text{لو}٢} = \frac{١٢}{٢٠} = \frac{٣}{٥}$

٢) $\frac{\text{لو}(\frac{٣}{٢})^{٤}}{\text{لو}_{\frac{٣}{٢}}{}^{٥}} = \frac{٤\text{لو}\frac{٣}{٢}}{٥\text{لو}\frac{٣}{٢}} = \frac{٤}{٥}$

مثال

حل المعادلات الآتية :-

١) $\text{لو}_{٢}(\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ١٢) = ٢$

٢) $\text{لو}\frac{١}{٥}\ \text{لو}_{٥}\sqrt{\text{س}} = \text{صفر}$

٣) $\text{لو}\frac{١}{٢}\ \text{لو}_{٨}\frac{\text{س}^{٢} - ٢\text{س}}{\text{س}-٣} = \text{صفر}$

٤) $\text{لو}_{٤}\ \text{لو}_{٢}\ \text{لو}_{٢}(٢\text{س} - ١) = \frac{١}{٢}$

الحـــل

١) $\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ١٢ = ٣^{٢}$

$\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ٣ = ٠$ ∴ $(\text{س} + ٣)(\text{س} + ١) = ٠$

∴ س = - ٣ أما س = - ١

٢) $\text{لو}\frac{١}{٥}\ \text{لو}_{٥}\sqrt{\text{س}} = \text{صفر}$

∴ $\text{لو}_{٥}\sqrt{\text{س}} = (\frac{١}{٥})^{٠} = ١$

∴ $\sqrt{\text{س}} = ٥^{١}$ بالتربيع

∴ س = ٢٥ ∴ س = ٥

٣) $\log_{\frac{1}{2}} \log_{8} \frac{س^{2} - ٢س}{س-٣} = صفر$

$\therefore \log_{8} \frac{س^{2} - ٢س}{س-٣} = (\frac{١}{٢})^{٠} = ١ \quad \frac{س^{2} - ٢س}{س-٣} = ٨$

$\therefore س^{2} - ٢س = ٨س - ٢٤ \quad \therefore س^{2} - ١٠س + ٢٤ = ٠$

$(س - ٦)(س - ٤) = ٠ \quad \therefore$ س = ٦ أما ٤

٤) $\log_{١} \log_{٢} \log_{٢} (٢س - ١) = \frac{١}{٢}$

$\therefore \log_{٢} \log_{٢} (٢س - ١) = ٤^{\frac{١}{٢}} = ٤$

$\therefore ٢س - ١ = ٤^{٣} = ٨١$

$\therefore ٢س = ٨٢ \quad \therefore س = ٤١$

المعادلات التي تعتمد على قوانين اللوغاريتمات

ملاحظات :-

١) إذا كان $\log_{ب} س = \log_{ب} ص$ فإن س = ص

٢) إذا كان $\log_{ب} أ = \log_{ص} أ$ فإن س = ص

٣) إذا كان $\log_{ب} أ^{س} = ب$ فإن س = ٦

مثال ١

حل المعادلة

$\log_{٢} \frac{٣-س}{١} - \log_{٢} \frac{١}{٢س - ١} = \frac{١}{٢}$

الحل

$\log_{٢} \frac{(٣-س)\times(٢س-١)}{١\times١} = \frac{١}{٢}$

$(٣ - س)(٢س - ١) = (٤)^{\frac{١}{٢}} = ٢$

$٦س - ٢س^{٢} + س - ٢ = ٠$

$-٢س^{٢} + ٧س - ٥ = ٠$

$٢س^{٢} - ٧س + ٥ = ٠$

$(٢س - ٥)(س - ١) = ٠$

$٢س - ٥ = ٠$ $\quad$ $س - ١ = ٠$

$٢س = ٥$

$س = \frac{٥}{٢}$ $\quad$ $س = ١$

مثال ٢

حل المعادلة

$لو_{٣} س = \frac{١}{٢}$ لو ٨١ $-$ ٢ لو ٣ + لو ١٠ $-$ لو ٠,٤

الحل

$لو_{٣} س = لو (٨١)^{\frac{١}{٢}} - لو (٣)^{٢} + لو ١٠ - لو \frac{٤}{١٠}$

$لو_{٣} س = لو ٩ - لو ٩ + لو ١٠ - لو \frac{٤}{١٠}$

$لو_{٣} س = لو \frac{١٠ \times ١٠}{٤}$

$لو_{٣} س = لو ٢٥$

$لو_{٣} س = ٢$

$س = ٣^{٢}$ $\quad$ $س = ٩$

مثال

حل المعادلة

لو ٢٥ × لو ٦٤ = لو ١٢٥ × لو $س^{٢}$

الحل

لو $٥^{٢}$ × لو $٢^{٦}$ = لو $٥^{٣}$ × لو $س^{٢}$

$$\text{لو } ٥ \times ٦^{٢} \text{ لو } ٢ = ٣ \text{ لو } ٥ \times \text{لو } س^{٢}$$

$$٤ \text{ لو } ٢ = \text{لو } س^{٢}$$

$$\text{لو } ٢^{٤} = \text{لو } س^{٢}$$

$$\text{لو } ١٦ = \text{لو } س^{٢}$$

$$س^{٢} = ١٦ \quad س = \pm ٤$$

ملاحظة

تغير الأساس:

قاعدة

$$\text{لو}_{ب} س = \text{لو}_{أ^{ن}} س^{ن} = \text{لو}_{أ^{٢}} س^{٢}$$

$$\text{لو}_{٢} ٣ = \text{لو}_{٤} ٩ = \text{لو}_{٨} ٢٧ \text{ و هكذا}$$

مثال :

حل المعادلة

$$\text{لو}_{٢} س = \text{لو}_{٤} ٩$$

$$\text{لو}_{٤} س^{٢} = \text{لو}_{٤} ٩$$

$$س^{٢} = ٩$$

$$س = \pm ٣$$

$$س = ٣$$

(اللوغاريتمات المعتادة)

هى التى يكون أساسها (١٠) ويمكن حساب هذه اللوغاريتمات بواسطة الحاسبة كما يلى

مثال :-

أوجد بواسطة الحاسبة

١) لو ١٣ ٢) لو ٥ + لو ٧

٣) $\frac{٣\text{لو}٣ + ٢\text{لو}٥ - \text{لو}١١}{\text{لو}١٢ - \text{لو}٥ + \text{لو}٢}$

الحل

١) لو ١٣ = ١ ١١٣٩ = Log ١٣

٢) لو٥ + لو ٧ = ١٥٤٤٠٦ = ٥ Log + ٧ Log

[٢ Log + ٥ Log – ١٢ Log] ÷ [١١ Log – ٥ Log ٢× + ٣ Log ٣×] = ٢٫٦٢٤٤

مثال

إذا كانت س = $\frac{٣لو٢-٥لو٣+٧لو٥,٣}{٢لو٣+٣لو٢}$

الحل

[٣× ٢ Log – ٥× ٣ Log + ٧×٣،٥ Log] ÷ [٢× ٣ Log + ٣× Log]= ١،٢٥٢٣

ملاحظة :-

لو،٧ ٧ Log÷ ٢ Log= ٢،٨٠٧ لو،١٣ ١٣ Log÷ ٥ Log = ١،

العملية العكسية إيجاد العدد إذا علم اللوغاريتم

مثال

أوجد قيمة س فيما يلي

١) لوس = ١،٣٢٥٧ ٢) لوس =-١،٣٥٧

٣) لوس = $\frac{٢-}{٥}$ ٤) لوس = $\frac{لو٧-لو٢+لو٣}{لو٢-لو٣+لو٥}$

الحل

١) ∴ س = ٢١،١٦ = Sh Log ١،٣٢٥٧

٢) ∴ س = ٠،٤٣٩٥ = Sh Log ± ١،٣٥٧

٣) ∴ س = ٠،٢٥ = Sh Log ± = ٥ +٣

٤) = [٥ Log + ٣ Log – ٢ Log] ÷ [٣ Log + ٢ Log – ٧ Log]

س = Sh Log ٨٩،٧٤

حل المعادلات الآسية بواسطة اللوغاريتمات

مثال

حل المعادلة

$$٣^{س} = ١١$$

الحل

$$\therefore \text{لو}_{٣}\, ٣^{س} = \text{لو}_{٣}\, ١١$$

$$\therefore \text{س لو}_{٣}\, ٣ = \text{لو}_{٣}\, ١١$$

$$\therefore \text{س} = \frac{\text{لو}_{٣}\, ١١}{\text{لو}_{٣}\, ٣}$$

$$\therefore \text{س} = ٢,١٨ \qquad ١١ \text{ Log} = ٣ \text{ Log}$$

مثال

حل المعادلة

$$(٧)^{٢\text{س}+٣} = ١٥$$

الحل

$$\text{لو}\,(٧)^{(٢\text{س}+٣)} = \text{لو}\,١٥$$

$$(٢\text{س} + ٣)\,\text{لو}\,٧ = \text{لو}\,١٥$$

$$٢\text{س لو}\,٧ + ٣\,\text{لو}\,٧ = \text{لو}\,١٥$$

$$٢\text{س لو}\,٧ = \text{لو}\,١٥ - ٣\,\text{لو}\,٧$$

$$\text{س} = \frac{\text{لو}\,١٥ - ٣\,\text{لو}\,٧}{٢\,\text{لو}\,٧}$$

$$= [٢ \times ٧ \text{ Log}] \div [١٥ \text{ Log} - ٣ \times ٧ \text{ Log}]$$

$$\text{س} = -٠,٨٠٤$$

مثال

حل المعادلة

$$٧^{٢\text{س}-٣} = ٥ \times (٣)^{\text{س}+٢}$$

الحل

$$\text{لو } ٧^{٢س-٣} = \text{لو } ٥ \times (٣)^{س+١}$$

$$\text{لو } ٧^{٢س-٣} = \text{لو } ٥ + \text{لو } ٣^{س+٢}$$

$$(٢س-٣)\ \text{لو } ٧ = \text{لو } ٥ + (س+٢)\ \text{لو } ٣$$

$$٢س\ \text{لو } ٧ - ٣\ \text{لو } ٧ = \text{لو } ٥ + س\ \text{لو } ٣ + ٢\ \text{لو } ٣$$

$$٢س\ \text{لو } ٧ - س\ \text{لو } ٣ = ٣\ \text{لو } ٧ + \text{لو } ٥ + ٢\ \text{لو } ٣$$

$$س = \frac{٣\ \text{لو } ٧ + \text{لو } ٥ + ٢\ \text{لو } ٣}{٢\ \text{لو } ٧ - \text{لو } ٣}$$

$$[٣ \times ٧\ \text{Log} + ٥\ \text{Log} + ٢ \times ٣\ \text{Log}] \div [٢ \times ٧\ \text{Log} - ٣\ \text{Log}]$$

$$س = ٣,٤٥$$

مثال

حل المعادلة

$$٣^{س+٢} \times ٧^{٢س-٣} = ١٥$$

الحل:

$$\text{لو } ٣^{س+٢} + \text{لو } ٧^{٢س-٣} = ١٥$$

$$(س+٢)\ \text{لو } ٣ + (٢س-٣)\ \text{لو } ٧ = \text{لو } ١٥$$

$$س\ \text{لو } ٣ + ٢\ \text{لو } ٣ + ٢س\ \text{لو } ٧ - ٣\ \text{لو } ٧ = \text{لو } ١٥$$

$$س = [\text{لو } ٣ + ٢\ \text{لو } ٧] = \text{لو } ١٥ + ٣\ \text{لو } ٧ - ٢\ \text{لو } ٣$$

$$س = \frac{[\text{لو } ١٥ + ٣\ \text{لو } ٧ - ٢\ \text{لو } ٣]}{[\text{لو } ٣ + ٢\ \text{لو } ٧]}$$

$$س = ١,٢٧$$

مثال

حل المعادلة

$$٣^{٢س} - ١١ \times ٣^{س} + ٢٤ = ٠$$

الحل

نضع $٣^{س} = أ$ $\quad أ^{٢} - ١١ أ + ٢٤ = ٠$

$$(أ - ٨)(أ - ٣) = ٠$$

$$أ = ٨ \quad أو \quad أ = ٣$$

$$٣^{س} = ٨ \quad أو \quad ٣^{س} = ٣$$

$$لو\ ٣^{س} = ٨ \qquad س = ٣$$

$$س\ لو\ ٣ = ٨$$

$$س = \frac{لو ٨}{لو ٣} = ١,٨٩ \quad س \in \{ ١ : ٨٩ \}$$

مثال

إذا كانت د(س) = $٢^{س}$ أوجد قيمه س إذا كانت

$$د(٢^{س+١}) + (س-١) = ٧$$

الحل

$$٢^{٢س+١} + ٢^{س-١} = ٧$$

$$٢^{١} \times ٢^{٢س} + ٢^{-١} \times ٢^{س} = ٧$$

بوضع $٢^{س} = أ$ $\qquad ٢^{-١} = \frac{١}{٢}$

$$٢أ^{٢} + \frac{١}{٢}أ - ٧ = ٠ \qquad \times ٢$$

$$٤أ^{٢} + أ - ١٤ = ٠$$

$$(٤أ - ٧) \qquad (أ + ٢) = ٠$$

$$٤أ - ٧ = ٠ \qquad أ + ٢ = ٠$$

$$٤أ = ٧ \qquad أ = -٢$$

$$أ = \frac{٧}{٤} \qquad ٢^{س} = -٢$$

$$لو\ ٢^{س} = لو \frac{٧}{٤}$$

$$س\ لو ٢ = لو ٧ - لو ٤$$

$$س = \frac{لو ٧ - لو ٤}{لو ٢} = ٠,٨$$

مثال :- إذاكان حجم المثروط الدائرى القاسم هو

ح = $\frac{1}{3}$ ط نق^{2} × ع أوجدى ح إذا كانت ط = $\frac{22}{7}$ ونق = (٣,٧)

ع = $\frac{13}{5}$

الحل:

ح = $\frac{1}{3}$ × $\frac{22}{7}$ × (٣,٧)^{2} × $\frac{13}{5}$

ح = $\frac{22 \times 3,7^{2} \times 13}{3 \times 5}$

= [٣ × ٥] + [٢ × ١٣ × ٣,٧ Sh × ٢٢]

ح = ٢٦١

مثال

كرة من الرصاص صهرت وحولت إلى مكعب ، احسب طول حرف المكعب علما بان حجم الكرة هو ٣١٧٥ سم^{3} . علما بأن لم يفقد شئ من الرصاص .

الحل

حجم المكعب = ل^{3}

حجم المكعب = حجم الكرة

ل^{3} = ٣١٧٥

ل = $(٣١٧٥)^{\frac{1}{3}}$

٣١٧٥ SH ÷ ٣ = ١٤,٦٩

ل = ١٤,٦٩ سم

التمثيل البيانى للدالة اللوغارتمية

الصورة العامة للدالة اللوغارتمية هى :

ص = لو س حيث

س ∈ ح$^{+}$ ، أ ∈ ح$^{+}$ - { ١ } ، ص ∈ ح

مجال الدالة اللوغارتمية ⟵ ح $^{+}$ والمجال المقابل لها ح

، مداها ح

الدالة اللوغارتمية متزايدة على مجالها إذا كان أ > ١

ومتناقصة على مجالها إذا كان ٠ < أ < ١ ومنحنى الدالة يمر بالنقطة (١ ، ٠)

مثال .

- ارسم منحنى الدالة ص = لو$_{\frac{١}{٣}}$ س ومن الرسم اوجدى قيمة تقريبة للعدد

لو$_{\frac{١}{٣}}$ ٢.٧ ، قيمة $\sqrt{٢٧}$

الحل

تعين ازدواج النقط (س ، لو$_{\frac{١}{٣}}$ س)

س	٢٧	٩	٣	١	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٢٧}$
ص	٣-	٢-	٠	١	٢	٢	٣

لو$_{\frac{١}{٣}}$ ٢.٧ = س ٢.٧

∴ لو$_{\frac{١}{٣}}$ ٢.٧ = ٠.٩-

∴ $\sqrt{٢٧}$ = = ٣$^{\frac{٣}{٢}}$ = $\left(\frac{١}{٣}\right)^{\frac{٣}{٢}}$

بعض المفاتيح الهامة فى الحاسبة

المفتاح X^{2} موضوع على زرار x ويستخدم لإيجاد ضرب العدد فى نفسه عدة مرات

المفتاح $\sqrt{\ }$ موضوع على زرار ÷ يستخدم فى إيجاد جذور الإمداد لأي دليل

مثال

- أحسب ما يلى

$(١,٢٥)^{٨}$ $(١,٣٢)^{-٣}$

الحل:

$١,٢٥\ Sh \times ٨ = ٥,٩$

$١,٣٢\ Sh \times ٣ \pm = ٠,٤٣$

مثال٢

- أحسب قيمه

$\sqrt[٥]{١٧}$ و $\sqrt[٣]{١٧}$ و $\sqrt[٧]{١٧}$

الحل

$\sqrt[٥]{١٧} = (١٧)^{\frac{١}{٥}}$ $١٧\ Sh \div ٥ = ١,٧٦$

$\sqrt[٣]{١٧} = (١٧)^{\frac{١}{٣}}$ $١٧\ Sh \div ٣ = ٢,٥٧$

$\sqrt[٧]{١٧} = (١٧)^{\frac{١}{٧}}$ $١٧\ Sh \div ٧ = ١,٤٧$

تطبيقـــات عمليـــــة

مثال١ :- إذا كانت $س^{٧} = ٣٤٥$ فما قيمة س

الحل

$س = ٢,٣ = ٧ \div Sh\ ٣٤٥$

مثال٢ :- إذا كانت س $^{\frac{٣}{٤}}$ = (٢,٧٥) فما قيمه س

الحل

$$س = (٢,٧٥)^{\frac{٣}{٤}}$$

س = ٣,٨٥ = ٣ ÷ Sh ٤ × ٢,٧٥

مثال٣ - إذا كان حجم الكرة يساوى $\frac{٤}{٣}$ ط نق ^{٣}

أوجدى نق إذا علم أن ح = ٣٤٨ ٣ ط = ٣,١٤

الحل:

$$ح = \frac{٤ط . نق^{٣}}{٣}$$

$$٣ ح = ٤ ط نق^{٣}$$

$$نق^{٣} = \frac{ح٣}{ط٤} \qquad نق = \left(\frac{ح٣}{ط٤}\right)^{\frac{١}{٣}}$$

$$نق = \left(\frac{٣٤٨ \times ٣}{٣,١٤ \times ٤}\right)^{\frac{١}{٣}}$$

نق = ٤ ,٣٦ = ٣ ÷ Sh ٣,١٤ ÷ ٤ ÷ ٣٤٨ × ٣

مثال:- إذاكان أ = م (١+س)^{ن}

وكانت م = ٦٧٥ و س = ٠٤,

ن = ٣٠ فما قيمه (أ)

الحل:

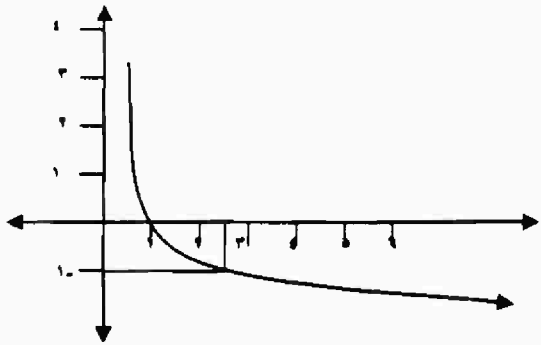
$$أ = ٦٧٥ [١ + ٠٤,]^{٣٠}$$

$$أ = ٦٧٥ (١ ,٠٤)^{٣٠}$$

= ٦٧٥ × ٣٠ × Sh ١,٠٤

أ = ٢١٨٩ ,٢٩

$\left(\frac{١}{٣}\right)^{\frac{-٣}{٢}}$ = س لو$_{\frac{١}{٣}}$ س = $\frac{-٣}{٢}$ عندما ص = $\frac{-٣}{٢}$ س ≅ ٥,٢



مثال

ارسم منحنى الدالة ص = لو$_{\frac{١}{٣}}$ س ومن الرسم اوجد قيمة لو$_{\frac{١}{٣}}$ ٤,٥

يتعين ازواج النقط (س لو$_{\frac{١}{٣}}$ س)

الحل

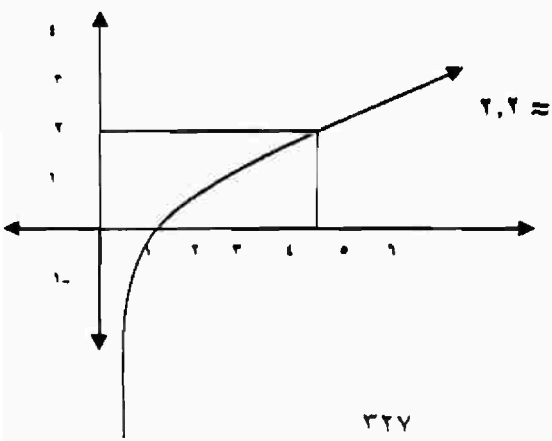
س	$\frac{١}{٨}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	١	٢	٤	٨
ص	٣-	٢-	١-	٠	١	٢	٣

لو$_{\frac{١}{٣}}$ ٤,٥ = س = ٤,٥

بالحاسبة للتاكيد :

لو$_{ب}$ أ = $\frac{\text{لو أ}}{\text{لو ب}}$

∴ لو$_{\frac{١}{٣}}$ ٤,٥ = لو ٤,٥ ≅ ٢,٢



تمرين (٢٤)

اوجد مجموعة الحل للمعادلات الآتية

١) لو$_{س}$ ٢٧ $\sqrt{س}$ = $\frac{١}{٢}$ ٣

٢) س = لو$_{٢}$ ظا $\frac{ط}{٣}$

٣) لو ١٦ ٠٠ ٠٠ ٠ = س $\sqrt[٥]{}^{٢}$

٤) ٤) لو$_{٣}$ $\frac{١}{٢٧}$ = س

٥) لو$_{٢}$ لو$_{٣}$ س = ١

٦) لو$_{٣}$ | س + ١ | = ٤

٧) لو$_{١٦}$ (س + ٣) = $\frac{١}{٤}$

اوجد قيمة : -

٨) ٢ لو$_{٣}$ ٩ $\sqrt{٣}$

٩) لو$_{٥}$ لو$_{٢}$ لو$_{٢}$ ٨

١٠) $\frac{\text{لو}٨١}{\text{لو}٢٧}$

١١) لو٢٥ + لو ٢٨ + $\frac{\text{لو}٨ \times \text{لو}١٦}{\text{لو}٦٤}$ _ لو ($\frac{٤}{٥}$ + ٢)

١٢) لو$_{٤}$ ١٠٠ _ ٢ لو$_{٤}$ ٢ + ٣٦ _ لو$_{٤}$ ١٨ _ لو$_{٤}$ ٢٥

١٣) ٢ لو ٢٥ + لو ($\frac{١}{٥}$ + $\frac{١}{٣}$) + ٢ لو ٣ _ $\frac{١}{٥}$ لو ٣ ٢٤

١٤) ١ + ٢ لو $\frac{٤}{٧}$ - $\frac{٣}{٢}$ لو $\frac{٤}{٩}$ + ٢ لو ٧ _ لو ٦ - ٢ لو ٣

١٥) ٣ لو$_{٢}$ ١٤ - ٤ لو$_{٢}$ ٥ + لو$_{٢}$ $\frac{٢٥}{٧}$ - لو$_{٢}$ ٧

أثبت ان

١٦) لو٠,٣٠ – لو٠,$\frac{٢٧}{٢٥}$ - لو٠,$\frac{١٢٥}{٩}$ = ١

١٧) $\frac{\text{لو}٤٠ - \text{لو}٨ + \text{لو}٥}{\text{لو}٢٨ - \text{لو}٧ + \text{لو}٢٥}$ = ١ – لو٢

١٨) ٣لو٥ + ٢لو١٤ – لو٤٩ + ٢و٠,٢ = لو٠,٢٥

١٩) اذا كان لو٠,$\frac{٣}{٢٥}$ + ٥لو٠,٥ + لو٢٧ – لو٠,$\frac{١٢٥}{١٢}$ - لو٠,٢٤٣ = لو٠,س

فأوجد قيمة س

٢٠) اذا كان ٣لوس + ٤ لوص – س ص^{٢} = ٢ (لو٢ + لو٣)

حل المعادلات الآتية

٢١) س$^{\text{لوس}}$ = ١٠٠ س

٢٢) لو س × لو ٠,٧ = لو٤٩ – (لو٧)^{٢}

٢٣) لو س = $\frac{(\text{لو}٥)^{٢} - \text{لو}١٢٥}{\text{لو}٠,٠٠٥}$

٢٤) لو٠,س = لو$_{٠,٩}$ ٩

٢٥) (لوس)^{٢} – لوس^{٢} = (لو٢)^{٢} – ١

٢٦) ٩$^{\text{س}}$ – ٢٧ × ٣$^{\text{س}}$ + ٥٠ = ٠

٢٧) ٩$^{\text{س}}$ – ١٤ × ٣$^{\text{س}}$ + ٤٥ = ٠

٢٨) اذا كانت ٣$^{٧-٣^{\text{س}}}$ = ١٨,١ اوجد قيمة س

ارسم الدوال الآتية :

٢٩) ص = لو٠,س متخذاً س ∈ [$\frac{١}{٩}$ ، ٩٠] ومن الرسم اوجد قيمة للعدد لو٠,٥

٣٠) د (س) = لو$_{\frac{١}{٣}}$ س من الرسم اوجد قيمة تقريبية للعدد لو$_{\frac{١}{٣}}$ ١٥